Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 8

Aufgaben

Aufgabe 8.1. Sei R ein Zahlbereich und sei $f_1, \ldots, f_n \in R$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von R. Zeige, dass dann der Betrag der Diskriminante

$$|\triangle(f_1, \ldots, f_n)|$$

minimal ist unter allen Diskriminanten von linear unabhängigen n-Tupeln aus R.

Aufgabe 8.2. Berechne die Diskriminante der Gaußschen Zahlen. Man gebe zwei wesentlich verschiedene $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ an und überprüfe, dass die Diskriminanten übereinstimmen.

Aufgabe 8.3. Berechne die Diskriminante zur Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$$

zur Basis 1 und i und zur Basis $2 - 5\mathrm{i}$ und $4 + 7\mathrm{i}$.

Aufgabe 8.4. Bestimme die Diskriminante zur Basis $1, x, x^2$ der kubischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/\big(X^3 - 5X^2 + 6X - 3\big) =: L.$$

Aufgabe 8.5.*

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n und sei $b_1, \ldots, b_n$ eine K-Basis von L. Zeige, dass dann

$$\triangle(b_1, \ldots, b_n) \neq 0.$$

Aufgabe 8.6. Es sei R ein Zahlbereich der Form $R = \mathbb{Z}[X]/(F)$ mit einem normierten Polynom $F \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad d. Zeige, dass x^i, $i = 0, \ldots, n-1$, eine Ganzheitsbasis von R ist.

Aufgabe 8.7.*

Finde ganze Zahlen a, b, c, d, e, f derart, dass die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

gleich 1 ist.

Aufgabe 8.8. Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein teilerfremdes Tupel von ganzen Zahlen. Zeige, dass es eine $n \times n$-Matrix gibt, die das Tupel als eine Zeile enthält und deren Determinante gleich ± 1 ist.

Führe Induktion über das Minimum der Beträge des Tupels.

Mit der vorstehenden Aufgabe kann man auch die folgende Aufgabe lösen.

Aufgabe 8.9. Zeige, dass es in einem Zahlbereich stets Ganzheitsbasen gibt, die die 1 enthalten.

Aufgabe 8.10. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(F)$ eine endliche Körpererweiterung mit einem normierten Polynom $F \in \mathbb{Z}[X]$ und sei R der zugehörige Zahlbereich. Zeige, dass es ein $g \in \mathbb{N}_+$ derart gibt, dass nach Nenneraufnahme an g eine Ringisomorphie

$$R_g = \mathbb{Z}_g[X]/(F)$$

vorliegt.

Aufgabe 8.11. Man gebe Beispiele für Zahlbereiche R, wo die Spur $R \to \mathbb{Z}$ surjektiv bzw. nicht surjektiv ist.

Aufgabe 8.12. Finde möglichst viele (nicht isomorphe) kommutative Ringe mit vier Elementen. Beweise, dass die Liste vollständig ist.

Aufgabe 8.13.*

Man gebe eine vollständige Liste aller kommutativer Ringe mit 6 Elementen.

Aufgabe 8.14. Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n \geq 2$. Zeige, dass $\mathbb{Z}/(p^n)$ kein Vektorraum über $\mathbb{Z}/(p)$ sein kann.

Aufgabe 8.15. Es sei R ein endlicher reduzierter kommutativer Ring. Zeige, dass R ein Produkt von endlichen Körpern ist.

Aufgabe 8.16. Es sei p eine Primzahl und sei R eine endlichdimensionale $\mathbb{Z}/(p)$-Algebra der Dimension n. Zeige, dass R höchstens n Primideale besitzt.

Aufgabe 8.17. Sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$. Zeige, dass $N(f) \in (f)$ ist, dass also die Norm zum von f erzeugten Hauptideal gehört. Zeige durch ein Beispiel, dass dies für die Spur nicht gelten muss.

Abbildungsverzeichnis