

Analysis I**Arbeitsblatt 23****Übungsaufgaben**

AUFGABE 23.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3, +4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{falls } -3 \leq t \leq -2, \\ -3, & \text{falls } -2 < t \leq -1, \\ \frac{3}{7}, & \text{falls } -1 < t < -\frac{1}{2}, \\ 13, & \text{falls } t = -\frac{1}{2}, \\ \pi, & \text{falls } -\frac{1}{2} < t < e, \\ 0, & \text{falls } e \leq t \leq 3, \\ 1, & \text{falls } 3 < t \leq 4, \end{cases}$$

gegeben ist.

AUFGABE 23.2.*

- a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.
- b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

AUFGABE 23.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

AUFGABE 23.4. Es seien

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

- (1) $f + g$,
- (2) $f \cdot g$,
- (3) $\max(f, g)$,
- (4) $\min(f, g)$,

Treppenfunktionen sind.

AUFGABE 23.5. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

eine Treppenfunktion und

$$g: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

AUFGABE 23.6. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t \, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.7. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 t^3 \, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.8. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^7 -t^3 + 3t^2 - 2t + 5 \, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.9.*

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

AUFGABE 23.10. Zeige, dass für die Funktion

$$]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

AUFGABE 23.11. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren

und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n(x) dx$$

gilt.

AUFGABE 23.12. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

AUFGABE 23.13. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

AUFGABE 23.14. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

- (1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.
- (2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- (3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.
- (4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t) dt = c \int_a^b f(t) dt$.

AUFGABE 23.15. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 23.16. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2 dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f: [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

und einer Treppenfunktion

$$g: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

AUFGABE 23.18. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

AUFGABE 23.19. (8 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

AUFGABE 23.20. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, dass es aber keine Treppenfunktion s mit der Eigenschaft gibt, dass $|s(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in [0, 1]$ ist.

AUFGABE 23.21. (6 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.