Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Vorlesung 22

Zu einer konvergenten Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

bilden die „Teilpolynome“

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

Taylor-Polynome

Brook Taylor (1685-1731)

Eine konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ ist in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen im Punkt a lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Es ist ja

$$f(a) = c_0,\ f'(a) = c_1,\ f''(a) = 2c_2,\ f'''(a) = 6c_3$$

und allgemein

$$f^{(k)}(a) = (k!)c_k.$$

Umgekehrt kann man aus den Ableitungen die Koeffizienten der Potenzreihe durch

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

zurückgewinnen. Dabei ist die rechte Seite unabhängig davon definiert, ob eine Potenzreihe vorliegt, so lange die Funktion nur hinreichend oft differenzierbar ist. Man gewinnt daher über die Ableitungen gute Kandidaten für polynomiale Approximationen, nämlich die *Taylor-Polynome*.

Definition 22.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[1] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Die Funktion f und ihr n-tes Taylor-Polynom stimmen im Punkt a bis einschließlich zur n-ten Ableitung überein.

Beispiel 22.2. Wir möchten für die Funktion

$$f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto x \sin x\,,$$

das Taylor-Polynom der Ordnung 4 im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{4}$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x \cos x\,, \\ f''(x) &= \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x\,, \\ f'''(x) &= -2 \sin x - \sin x - x \cos x = -3 \sin x - x \cos x\,, \\ f''''(x) &= -3 \cos x - \cos x + x \sin x = -4 \cos x + x \sin x\,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist somit

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8-\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-3-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-12-\pi}{4\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

[1] Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n. Man spricht häufig auch von der Ordnung des Taylor-Polynoms.

$$f''''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-4+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-16+\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist daher

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{8-\pi}{8\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{-12-\pi}{24\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{-16+\pi}{96\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 .$$

Die Taylor-Formel

Die folgende *Taylor-Formel* macht eine Aussage über die Güte der Approximation einer Funktion durch ihre Taylor-Polynome. Wir beschränken uns auf die reelle Situation. Bei $n = 0$ handelt es sich einfach um den Mittelwertsatz.

SATZ 22.3. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} .$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Sei $x \neq a$ fixiert. In Anlehnung an die zu beweisende Aussage betrachten wir zu $r \in \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} g_r(u) := f(x) - f(u) - f'(u)\cdot(x-u) - \frac{f^{(2)}(u)}{2!}(x-u)^2 - \ldots \\ - \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n - \frac{r}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}, \end{aligned}$$

den wir als Funktion in $u \in I$ auffassen. Es ist $g_r(x) = 0$ und wir wählen r so, dass $g_r(a) = 0$ ist, was möglich ist. Die Funktion $g(u) := g_r(u)$ ist auf dem Teilintervall $]a, x[\subseteq I$ (bzw. $]x, a[$, falls $x < a$ ist) differenzierbar (nach u) und besitzt an den beiden Intervallgrenzen den Wert 0. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in]a, x[$ mit $g'(c) = 0$.

Aufgrund der Produktregel und der Kettenregel ist (Ableitung nach u)

$$\left(\frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k\right)' = \frac{f^{(k+1)}(u)}{k!}(x-u)^k - \frac{f^{(k)}(u)}{(k-1)!}(x-u)^{k-1} .$$

Daher heben sich in der Ableitung von g die meisten Terme weg und es ergibt sich

$$g'(u) = -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n + \frac{r}{n!}(x-u)^n .$$

Aus der Gleichung

$$0 \;=\; g'(c) \;=\; -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{r}{n!}(x-c)^n$$

folgt $r = f^{(n+1)}(c)$. Wenn wir dies und $u = a$ in die Anfangsgleichung einsetzen und $g_r(a) = 0$ ausnutzen, so ergibt sich die Behauptung. □

Eine gute Approximation für die Funktion erhält man daraus, wenn man den Betrag der $(n+1)$-ten Ableitung abschätzen kann.

KOROLLAR 22.4. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$\mid f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \mid \leq \frac{B}{(n+1)!} \, |x-a|^{n+1} \; .$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 13.10, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 22.3. □

Anwendung auf Extrema

SATZ 22.5. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0 \, .$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein lokales Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

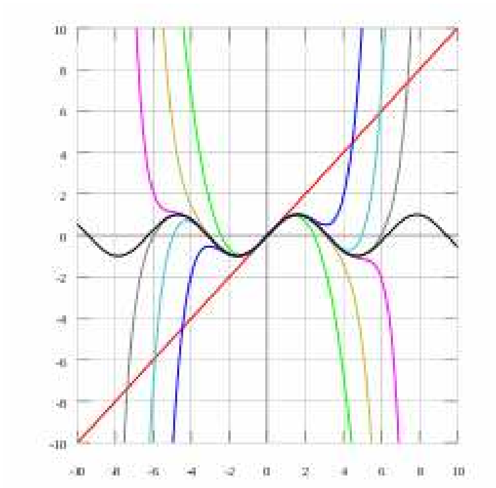
Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c (abhängig von x) zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. $\square$

Für Polynome und allgemeiner für Funktionen, die durch eine Potenzreihe gegeben sind, lässt sich also stets allein unter Bezug auf die Ableitungen entscheiden, ob in einem Punkt ein lokales Extremum vorliegt. Bei Potenzreihen beruht dies auf dem Identitätssatz.

Die Taylor-Reihe



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 22.6. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 22.7. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit einem positivem Konvergenzradius* r *und*

$$f\colon U(a,r) \longrightarrow \mathbb{K}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f *unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt* a *stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.*

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 20.9 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt a. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in a den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 20.9. □

Korollar 22.8. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ *und sei* $b \in U(a,R)$. *Dann erhält man die umentwickelte Reihe im Entwicklungspunkt* b *als Taylor-Reihe von* f *in* b. *Insbesondere konvergiert die Taylor-Reihe in* b *mit einem Konvergenzradius* $\geq R - |a-b| > 0$.

Beweis. Nach dem Entwicklungssatz wird die Funktion f in einer offenen Umgebung von b durch eine Potenzreihe beschrieben. Somit folgt die Aussage aus Satz 22.7. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Taylor-Reihe existieren und auch konvergieren kann, ohne dass dadurch die vorgegebene Funktion dargestellt wird (sie kann auch existieren ohne zu konvergieren).

Beispiel 22.9. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ (und der rechtsseitige Differenzenquotient im Nullpunkt) die Form $p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets 0 ist (siehe Aufgabe 22.11 und Aufgabe 22.12). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert 0 und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

Abbildungsverzeichnis