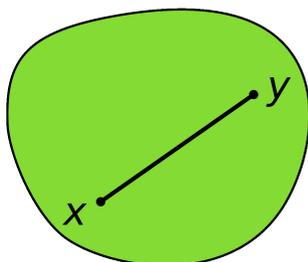


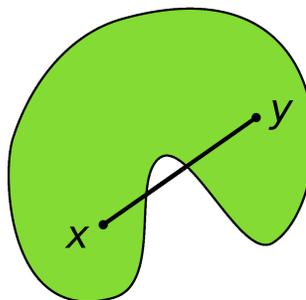
Analysis I

Vorlesung 20

Konvexe Funktionen



Eine konvexe Teilmenge.



Eine nichtkonvexe Teilmenge.

DEFINITION 20.1. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1 - r)Q \text{ mit } r \in [0, 1],$$

ebenfalls zu T gehört.

DEFINITION 20.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man die Menge

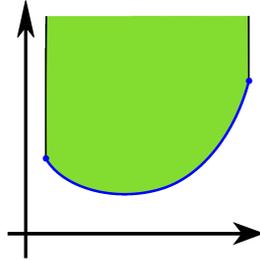
$$S(f) = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} \mid y \leq f(x)\}$$

den *Subgraphen* und

$$E(f) = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

den *Epigraphen* der Funktion.

Subgraph und Epigraph sind nach unten bzw. nach oben unbeschränkt. Im Kontext der Integrationstheorie interessiert man sich für den positiven Subgraphen, der durch die x -Achse nach unten beschränkt ist. Der Graph der Funktion gehört sowohl zum Subgraphen als auch zum Epigraphen.



Der Graph und der Epigraph einer konvexen Funktion.

DEFINITION 20.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *konvex* ist, wenn der Epigraph $E(f)$ konvex ist.

DEFINITION 20.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *konkav* ist, wenn der Subgraph $S(f)$ konvex ist.

Bei beiden Begriffen muss man lediglich überprüfen, ob die Verbindungsstrecke zwischen je zwei Punkten des Graphen jeweils oberhalb bzw. unterhalb des Graphen verläuft, siehe Aufgabe 20.1. Die Verbindungsstrecke zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist durch $f(a) + s \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $s \in [0, b - a]$, bzw. als Ausschnitt (zu $x \in [a, b]$) des Graphen zur linearen Funktion

$$g(x) = f(b) \frac{x - a}{b - a} + f(a) \frac{x - b}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{-af(b) + bf(a)}{b - a}$$

gegeben. Im differenzierbaren Fall gibt es einfache Ableitungskriterien für diese Verhaltensweisen, wobei wir nur den konvexen Fall anführen.

SATZ 20.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann eine konvexe (konkave) Funktion, wenn die Ableitung f' wachsend (fallend) ist.

Beweis. Sei zunächst f konvex und seien zwei Punkte $a < b$ aus I gegeben. Es sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Funktion, die $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet. Aufgrund der Konvexität ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Für die Differenzenquotienten gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{g(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \\
&= \frac{g(b) - g(x)}{b - x} \\
&= \frac{f(b) - g(x)}{b - x} \\
&\leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.
\end{aligned}$$

Durch Übergang zu den Limiten für $x \rightarrow a$ bzw. $x \rightarrow b$ folgt

$$f'(a) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Sei nun f als nicht konvex vorausgesetzt und seien zwei Punkte $a < b$ aus I mit der Eigenschaft gegeben, dass die verbindende Gerade von $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ nicht vollständig oberhalb des Graphen von f verläuft. Es gibt also ein $c \in [a, b]$ mit $g(c) < f(c)$, wobei wieder g die verbindende lineare Funktion ist. Durch Übergang zu $f - g$ können wir $f(a) = f(b) = 0$ und $f(c) > 0$ annehmen. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Punkte $s \in [a, c]$ und $t \in [c, b]$ mit $f'(s) > 0$ und $f'(t) < 0$, so dass f' nicht wachsend ist. \square

KOROLLAR 20.6. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann eine konvexe Funktion, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.8. \square

Die folgende Aussage heißt *Jensensche Ungleichung*.

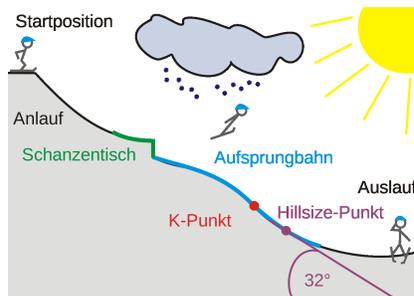
SATZ 20.7. *Es sei*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \dots, x_n \in I$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Dann ist

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.55. \square



Der sogenannte K-Punkt einer Skisprungschanze ist der Wendepunkt des Landungshügels.

DEFINITION 20.8. Es sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion und $c \in I$ ein innerer Punkt von I . Man sagt, dass in c ein *Wendepunkt* von f vorliegt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass f auf $[c - \epsilon, c]$ konvex (konkav) und auf $[c, c + \epsilon]$ konkav (konvex) ist.

Für eine zweimal differenzierbare Funktion liegt nach Korollar 20.6 genau dann ein Wendepunkt in $c \in I$ vor, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt mit $f''(x) \leq 0$ für $x \in [c - \epsilon, c]$ und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [c, c + \epsilon]$ ist (oder umgekehrt). Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines Wendepunktes ist somit, dass $f''(c) = 0$ ist. Die Funktion $f(x) = x^4$ erfüllt im Nullpunkt dieses notwendige Kriterium, es liegt aber kein Wendepunkt vor. Da eine lineare Funktion sowohl konvex als auch konkav ist, liegt in ihr überall ein Wendepunkt vor. Mit den Begriffen *streng konvex*, *streng konkav* und *strenger Wendepunkt* kann man lineare Funktionen ausschließen, siehe Aufgabe 20.12.

Ableitung von Potenzreihen

SATZ 20.9. Es sei

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1}$$

konvergent mit demselben Konvergenzradius. Die durch die Potenzreihe g dargestellte Funktion f ist in jedem Punkt $z \in U(a, R)$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \tilde{g}(z).$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_+$, $s < R$, vorgegeben und sei r mit $s < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ gemäß der Definition von Konvergenzradius. Wegen $n \leq \left(\frac{r}{s}\right)^n$ für n hinreichend groß ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| s^{n-1} &= \sum_{n=1}^N n |a_n| s^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| s^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^N n |a_n| s^{n-1} + \frac{1}{s} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n, \end{aligned}$$

so dass die Potenzreihe \tilde{g} in $B(a, s)$ und somit in $U(a, R)$ konvergiert (dafür, dass der Konvergenzradius von \tilde{g} nicht größer als R ist, siehe Aufgabe 20.24). Die Potenzreihe

$$\rho(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - a)^{n-1}$$

ist ebenfalls in dieser Kreisscheibe konvergent, stellt eine nach Korollar 16.9 stetige Funktion dar und besitzt in a den Wert 0. Daher zeigt die Gleichung (von Potenzreihen und dargestellten Funktionen)

$$f(z) = f(a) + a_1(z - a) + \rho(z)(z - a),$$

dass f in a linear approximierbar, also nach Satz 18.5 differenzierbar ist mit der Ableitung

$$f'(a) = a_1 = \tilde{g}(a).$$

Sei nun $b \in U(a, R)$. Nach dem Entwicklungssatz gibt es eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt b ,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - b)^n,$$

deren dargestellte Funktion mit der durch g dargestellten Funktion in einer offenen Umgebung von b übereinstimmt, und wobei $b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b - a)^{n-1}$ gilt. Daher gilt nach dem schon Bewiesenen (angewendet auf h und die formale Potenzreihenableitung \tilde{h})

$$f'(b) = \tilde{h}(b) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b - a)^{n-1} = \tilde{g}(b).$$

□

KOROLLAR 20.10. *Eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion ist in ihrem Konvergenzbereich unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 20.9. □

SATZ 20.11. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \exp z,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp'(z) = \exp z.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 20.9 ist

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \exp z. \end{aligned}$$

□

KOROLLAR 20.12. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\ln: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln': \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.27. □

KOROLLAR 20.13. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Beweis. Nach Aufgabe 17.1 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 20.11, Korollar 20.12 und der Kettenregel gleich

$$(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

KOROLLAR 20.14. Für die eulersche Zahl gilt die Gleichheit

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp 1.$$

Beweis. Die äußeren Gleichheiten sind Definitionen. Aufgrund von Korollar 20.12 ist $\ln'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \exp 1 &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e. \end{aligned}$$

□

SATZ 20.15. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \sin z,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(z) = \cos z$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \cos z,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(z) = -\sin z.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.36. □

KOROLLAR 20.16. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a^x,$$

zur Basis $a > 0$ ist differenzierbar mit

$$(a^x)' = (\ln a)a^x.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.44. □

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Convex set.svg , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD	1
Quelle = Non Convex set.svg , Autor = Kilom691, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = Convex supergraph.svg , Autor = DieBuche, Lizenz = PD	2
Quelle = Schema einer Skisprungschanze.svg , Autor = Benutzer Stefan-Xp auf Commons, Lizenz = CC.by.sa 3.0	4
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9