Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 27

Aufgabe 27.1. Es sei $A = R[X]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur einelementigen Überdeckung bestehend aus $D(X)$ der punktierten Geraden. Welche Homologie ergibt sich dabei?

Aufgabe 27.2. Es sei $A = R[X,Y]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung der punktierten Ebene zu den Monomen

(1) X^2Y^3,
(2) X^5Y^{-4}.
(3) $X^{-3}Y^{-6}$.

Welche Homologien ergeben sich jeweils dabei?

Aufgabe 27.3. Es sei $A = R[X,Y,Z]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung des punktierten Raumes zum Monom $X^3Y^{-2}Z^7$. Welche Homologien ergeben sich dabei?

Aufgabe 27.4. Es sei $A = R[X,Y,Z]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung des punktierten Raumes zum Monom $X^{-5}YZ^{-4}$. Welche Homologien ergeben sich dabei?

Aufgabe 27.5. Es sei $A = R[X,Y,Z,W]$ über einem kommutativen Ring R. Bestimme den Čech-Komplex zur Strukturgarbe und zur Standardüberdeckung des punktierten Raumes zum Monom $X^{-3}YZ^3W^{-2}$. Welche Homologien ergeben sich dabei?

Aufgabe 27.6. Es sei $K[X_1, \ldots, X_d]$ der Polynomring über einem Körper K und H der von allen Monomen X^ν in den Variablen $X_1, \ldots, X_d$ mit $\nu_j \leq -1$ für alle j erzeugte K-Vektorraum, also

$$H = K\langle X_1^{\nu_1} \cdots X_d^{\nu_d},\, \nu_j \leq -1\rangle .$$

Definiere eine natürliche $K[X_1, \ldots, X_d]$-Modulstruktur auf H.

Aufgabe 27.7. Es sei $K[Y_1,\ldots,Y_d]$ der Polynomring über einem Körper K und H der von allen Monomen X^ν in den Variablen $X_1,\ldots,X_d$ mit $\nu_j \leq -1$ für alle j erzeugte K-Vektorraum, also

$$H = K\langle X_1^{\nu_1}\cdots X_d^{\nu_d},\, \nu_j \leq -1\rangle.$$

Zeige, dass durch

$$K[Y_1,\ldots,Y_d] \longrightarrow H,\, Y^\mu \longmapsto X^{-\mu-(1,1,\ldots,1)},$$

ein K-Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist.

Aufgabe 27.8. Es sei $K[Y_1,\ldots,Y_d]$ der Polynomring über einem Körper K der Charakteristik 0 und H der von allen Monomen X^ν in den Variablen $X_1,\ldots,X_d$ mit $\nu_j \leq -1$ für alle j erzeugte K-Vektorraum, also

$$H = K\langle X_1^{\nu_1}\cdots X_d^{\nu_d},\, \nu_j \leq -1\rangle.$$

Zeige, dass durch

$$\theta\colon\, K[Y_1,\ldots,Y_d] \longrightarrow H,\, Y^\mu \longmapsto \mu!X^{-\mu-(1,1,\ldots,1)},$$

ein K-Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist.

Aufgabe 27.9. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und es seien $K[X_1,\ldots,X_d], K[Y_1,\ldots,Y_d]$ und $K[D_1,\ldots,D_d]$ Polynomringe in d Variablen. Es sei H der in Aufgabe 27.6 beschriebene K-Vektorraum mit der natürlichen $K[X_1,\ldots,X_d]$-Modulstruktur. Der Polynomring $K[D_1,\ldots,D_d]$ wirke auf dem Polynomring $K[Y_1,\ldots,Y_d]$ dadurch, dass die D_i die Wirkungsweise der i-ten partiellen Ableitung übernehmen, also $D_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial Y_i}$. Zeige, dass mit der Zuordnung $D_i \mapsto X_i$ und der Zuordnung $\theta\colon\, K[Y_1,\ldots,Y_d] \to H$ aus Aufgabe 27.8 ein Modulisomorphismus vorliegt.

Für die folgende Aufgabe beachte man, dass in ihr im glatten Fall wegen Korollar 19.12 die Dimension des Raumes der globalen Differentialformen ausgerechnet wird.

Aufgabe 27.10. Es sei $C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2_K$ eine ebene projektive Kurve über einem Körper K vom Grad d. Zeige unter Verwendung der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Garbensequenz (vergleiche Aufgabe 13.23)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(-3) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}(d-3) \longrightarrow \mathcal{O}_C(d-3) \longrightarrow 0$$

auf der projektiven Ebene und Satz 27.4, dass die Dimension von

$$H^0(C,\mathcal{O}_C(d-3))$$

gleich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ ist.

Für die beiden folgenden Aufgaben vergleiche Satz 22.12.

Aufgabe 27.11. Berechne den Čech-Komplex zur Einheitengarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}^{\times}$ zur affinen Standardüberdeckung auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ über einem Körper K sowie die erste Čech-Kohomologie $\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}^{\times})$.

Aufgabe 27.12. Berechne den Čech-Komplex zur Einheitengarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}^{\times}$ zur affinen Standardüberdeckung auf der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_K$ über einem Körper K sowie die erste Čech-Kohomologie $\check{H}^1(D_+(X), D_+(Y), D_+(Z), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_K}^{\times})$.

Aufgabe 27.13. Es sei R ein kommutativer Ring und M_i, $i \in \mathbb{N}$, seien R-Moduln mit fixierten R-Modulhomomorphismen

$$\varphi_i \colon M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt*, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{Kern}(\varphi_i) = \operatorname{Bild}(\varphi_{i-1})$ ist.

(1) Zeige, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition . übereinstimmt.
(2) Sei nun $R = K$ ein Körper, die M_i seien endlich erzeugt, $M_0 = 0$ und alle $M_i = 0$ für $i \geq n$ für ein gewisses n. Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K M_i \ = \ 0.$$

Aufgabe 27.14. Berechne die Euler-Charakteristik für die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_K}(n)$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^d_K$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K.

Abbildungsverzeichnis