Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 56

Basiswechsel bei Tensorprodukten

LEMMA 56.1. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über K. Es seien $v_{1j}, j \in J_1, \ldots, v_{nj}, j \in J_n$, und $w_{1j}, j \in J_1, \ldots, w_{nj}, j \in J_n$, Basen von $V_1, \ldots, V_n$ mit den Basiswechselmatrizen*

$$B_i = M^{\mathfrak{v}_i}_{\mathfrak{w}_i} = (a_{irs})_{1 \leq r,s \leq \dim(V_i)} .$$

Dann ist die Basiswechselmatrix (mit $J = J_1 \times \cdots \times J_n$) zwischen den Basen

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n},\ (j_1, \ldots, j_n) \in J \text{ und } w_{1j_1} \otimes \cdots \otimes w_{nj_n},\ (j_1, \ldots, j_n) \in J$$

des Tensorproduktes durch die $J \times J$-Matrix mit den Einträgen

$$c_{(j_1,\ldots,j_n),(k_1,\ldots,k_n)} = a_{1j_1k_1} \cdots a_{nj_nk_n}$$

beschrieben.

Beweis. Nach der Definition 9.2 der Basiswechselmatrix ist

$$v_{is} = \sum_{r \in J_i} a_{irs} w_{ir}.$$

Somit ist unter Verwendung von Lemma 55.9 (3)

$$\begin{aligned} v_{1k_1} \otimes \cdots \otimes v_{nk_n} &= \left(\sum_{j_1 \in J_1} a_{1j_1k_1} w_{1j_1} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{j_n \in J_n} a_{nj_nk_n} w_{nj_n} \right) \\ &= \sum_{(j_1,\ldots,j_n) \in J} a_{1j_1k_1} \cdots a_{nj_nk_n} w_{1j_1} \otimes \cdots \otimes w_{nj_n}, \end{aligned}$$

und diese Koeffizienten bilden die Basiswechselmatrix. □

BEISPIEL 56.2. Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ und der Standardbasis $\mathfrak{w}$ und $\mathbb{C}$ als reellen Vektorraum mit den Basen $\mathfrak{x} = 3 - 2i, 4 + 5i$ und $\mathfrak{y} = 1, i$. Damit sind die Basiswechselmatrizen, wie sie in Lemma 56.1 auftreten, gleich

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Wir folgen der Anordnung $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$ und erhalten die Basiswechselmatrix

$$\begin{pmatrix} 15 & 20 & -9 & -12 \\ -10 & 25 & 6 & -15 \\ 18 & 24 & 24 & 32 \\ -12 & 30 & -16 & 40 \end{pmatrix}.$$

In der zweiten Spalte steht beispielsweise, wie man $v_1 \otimes x_2$ als Linearkombination der $w_1 \otimes y_1$, $w_1 \otimes y_2$, $w_2 \otimes y_1$, $w_2 \otimes y_2$ ausdrückt.

Tensorprodukt und Dualraum

Satz 56.3. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über K. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_n{}^* \longrightarrow (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \longmapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)).$$

Beweis. Für fixierte Linearformen $f_1 \in V_1{}^*, \ldots, f_n \in V_n{}^*$ ist die Abbildung

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto f_1(v_1) \cdots f_n(v_n),$$

nach Aufgabe 16.36 multilinear und definiert daher eine Linearform auf $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Dies ergibt die Abbildung

$$\Psi : V_1{}^* \times \cdots \times V_n{}^* \longrightarrow (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* (f_1, \ldots, f_n) \longmapsto ((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \mapsto f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)).$$

Diese Gesamtzuordnung Ψ ist ebenfalls multilinear und ergibt somit eine lineare Abbildung

$$V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_n{}^* \longrightarrow (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*$$

Nach Korollar 55.13 und Korollar 13.12 haben die Räume die gleiche Dimension. Es seien v_{ij}, $1 \leq j \leq \dim(V_i)$, Basen der V_i. Dann bilden die $v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n}$ nach Satz 55.12 (3) eine Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ und die Dualbasis dazu eine Basis des Dualraumes. Wir behaupten die Gleichheit der linearen Abbildungen

$$\Psi(v_{1j_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{nj_n}^*) = (v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n})^*.$$

Diese ergibt sich, da beide Abbildungen, angewendet auf die Basiselemente $v_{1k_1} \otimes \cdots \otimes v_{nk_n}$, bei $(k_1, \ldots, k_n) = (j_1, \ldots, j_n)$ den Wert 1 und andernfalls den Wert 0 ergeben. Daher ist Ψ surjektiv und damit auch injektiv. □

Lemma 56.4. *Es sei K ein Körper und U, V, W seien K-Vektorräume. Dann gelten folgende Aussagen (im Sinne einer kanonischen Isomorphie).*

(1) *Es ist*

$$U \otimes_K V \cong V \otimes_K U.$$

(2) *Es ist*

$$U \otimes_K (V \otimes_K W) \cong (U \otimes_K V) \otimes_K W.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 56.2. □

Tensorprodukte von linearen Abbildungen

Lemma 56.5. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n$ Vektorräume über K. Es seien*

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow W_i$$

K-lineare Abbildungen. Dann gibt es eine wohldefinierte lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$$

mit

$$\psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \varphi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(v_n).$$

Beweis. Die Gesamtabbildung

$$V_1 \times \cdots \times V_n \stackrel{\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n}{\longrightarrow} W_1 \times \cdots \times W_n \stackrel{\pi}{\longrightarrow} W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$$

ist nach Aufgabe 16.28 multilinear. Dies induziert nach Lemma 55.4 eine lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \cdots \otimes W_n,\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto \varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_n).$$

□

Definition 56.6. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n$ Vektorräume über K. Zu K-linearen Abbildungen

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow W_i$$

heißt die lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \cdots \otimes W_n,\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto \varphi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(v_n),$$

das *Tensorprodukt* der φ_i. Es wird mit $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ bezeichnet.

Proposition 56.7. *Es sei K ein Körper und seien U, V, Z Vektorräume über K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einer K-linearen Abbildung $\varphi \colon U \to V$ gibt es eine natürliche K-lineare Abbildung $\varphi \otimes_K \mathrm{Id}_Z \colon U \otimes_K Z \to V \otimes_K Z$.*
(2) *Wenn φ surjektiv ist, ist auch $\varphi \otimes_K \mathrm{Id}_Z$ surjektiv.*
(3) *Wenn φ injektiv ist, so ist auch $\varphi \otimes_K \mathrm{Id}_Z$ injektiv.*

Beweis. (1). Dies ist ein Spezialfall von Lemma 56.5.

(2). Die Surjektivität der Abbildung

$$U \otimes_K Z \longrightarrow V \otimes_K Z$$

ist klar, da die $v \otimes z$ ein K-Erzeugendensystem von $V \otimes_K Z$ bilden und diese im Bild der Abbildung liegen.

(3). Wegen der Injektivität können wir

$$U \subseteq V$$

als Untervektorraum auffasen. Eine Basis u_i, $i \in I$, von U können wir zu einer Basis u_i, $i \in J$, mit $I \subseteq J$ von V ergänzen. Sei z_ℓ, $\ell \in L$, eine Basis von Z. Dann ist nach Satz 55.12 die Familie $v_j \otimes z_\ell$, $(j, \ell) \in J \times L$, eine Basis von $V \otimes Z$ und $v_i \otimes z_\ell$, $(i, \ell) \in I \times L$, ist eine Teilmenge davon, die eine Basis von $U \otimes Z$ ist. Also wird unter

$$U \otimes Z \longrightarrow V \otimes Z$$

eine Basis auf linear unabhängige Elemente abgebildet und somit ist diese Abbildung injektiv. $\square$

Von daher werden wir zu Untervektorräumen $U_1 \subseteq V_1, \ldots, U_n \subseteq V_n$ das Tensorprodukt $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ als Untervektorraum von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ auffassen.

Korollar 56.8. *Es sei K ein Körper und U, V, W seien K-Vektorräume. Dann ist*

$$U \otimes_K (V \oplus W) \cong (U \otimes_K V) \oplus (U \otimes_K W).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 56.5. $\square$

Körperwechsel

Schon häufig haben wir ein reelles Problem dadurch vereinfacht, dass wir es als Problem über den komplexen Zahlen aufgefasst haben. Wenn die Situation mit einer reellen Matrix formuliert werden kann, so kann man diese direkt als eine komplexe Matrix auffassen und dafür die (nichtreellen) komplexen Eigenwerte berechnen und ähnliches. Matrizen sind im Allgemeinen von der Wahl von Basen abhängige Beschreibungen mathematischer Objekte. Mit dem Tensorprodukt kann man den Übergang zum Komplexen auf der Ebene der Objekte selbst sinnvoll beschreiben. Wir betrachten daher hier den Fall des Tensorproduktes, wenn über K ein K-Vektorraum V und eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ vorliegt. Wir fixieren die verwendeten Sprechweisen.

Definition 56.9. Eine Teilmenge $K \subseteq L$ eines Körpers L heißt *Unterkörper* von L, wenn folgende Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $0, 1 \in K$.
(2) Mit $a, b \in K$ ist auch $a + b \in K$.

(3) Mit $a, b \in K$ ist auch $a \cdot b \in K$.
(4) Mit $a \in K$ ist auch $-a \in K$.
(5) Mit $a \in K, a \neq 0$, ist auch $a^{-1} \in K$.

Definition 56.10. Sei L ein Körper und $K \subseteq L$ ein Unterkörper von L. Dann heißt L ein *Erweiterungskörper* (oder *Oberkörper*) von K und die Inklusion $K \subseteq L$ heißt eine *Körpererweiterung*.

Lemma 56.11. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann ist L in natürlicher Weise ein K-Vektorraum.*

Beweis. Die Skalarmultiplikation

$$K \times L \longrightarrow L,\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x,$$

wird einfach durch die Multiplikation in L gegeben. Die Vektorraumaxiome folgen dann direkt aus den Körperaxiomen. □

Definition 56.12. Zu einem K-Vektorraum V über einem Körper K und einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ nennt man $L \otimes_K V$ den *durch Körperwechsel gewonnenen* L-Vektorraum.

Statt $L \otimes_K V$ schreibt man auch V_L.

Proposition 56.13. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Das Tensorprodukt $L \otimes_K V$ ist ein L-Vektorraum.*
(2) *Es gibt eine kanonische K-lineare Abbildung*

$$V \longrightarrow L \otimes_K V,\ v \longmapsto 1 \otimes v.$$

Bei $K = L$ ist dies ein Isomorphismus.
(3) *Zu einer K-linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist die induzierte Abbildung*

$$\mathrm{Id}_L \otimes \varphi\colon\ L \otimes_K V \longrightarrow L \otimes_K W$$

eine L-lineare Abbildung.
(4) *Zu $V = K^n$ ist*

$$L \otimes_K K^n \ \cong\ L^n.$$

(5) *Zu einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V ist*

$$\dim_K(V) \ =\ \dim_L(L \otimes_K V).$$

(6) *Zu einer weiteren Körpererweiterung $L \subseteq M$ ist*

$$M \otimes_K V \ \cong\ M \otimes_L (L \otimes_K V)$$

(eine Isomorphie von M-Vektorräumen).

Beweis. (1). Die Multiplikation

$$L \times L \longrightarrow L,\ (r,s) \longmapsto rs,$$

ist L-bilinear und insbesondere K-bilinear und führt nach Lemma 55.4 zu einer K-linearen Abbildung

$$L \otimes_K L \longrightarrow L.$$

Dies induziert nach Lemma 56.4 (2) und nach Proposition 56.7 eine K-lineare Abbildung

$$L \otimes_K (L \otimes_K V) \cong (L \otimes_K L) \otimes_K V \longrightarrow L \otimes_K V.$$

Dies ergibt eine wohldefinierte Skalarmultiplikation

$$L \times (L \otimes_K V) \longrightarrow (L \otimes_K V)\,,$$

die explizit durch

$$s \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes m_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (sr_j) \otimes m_j$$

gegeben ist. Aus dieser Beschreibung folgen direkt die Eigenschaften einer Skalarmultiplikation. (2). Die K-Homomorphie folgt direkt aus der Bilinearität des Tensorprodukts. Bei $L = K$ ist die Abbildung surjektiv. Die Skalarmultiplikation $K \times V \to V$ induziert eine K-lineare Abbildung

$$K \otimes_K V \longrightarrow V.$$

Die Verknüpfung der kanonischen Abbildung $V \to K \otimes_K V$ mit dieser Abbildung ist die Identität auf V, so dass die erste Abbildung auch injektiv ist. (3) folgt aus der expliziten Beschreibung in (1). (4) folgt aus Korollar 56.8. (5) folgt aus (4). (6). Nach Teil (2) haben wir einerseits eine K-lineare Abbildung $V \to L \otimes_K V$. Dies führt zu einer K-multilinearen Abbildung

$$M \times V \longrightarrow M \times (L \otimes_K V) \longrightarrow M \otimes_L (L \otimes_K V)\ ,$$

die eine K-lineare Abbildung

$$M \otimes_K V \longrightarrow M \otimes_L (L \otimes_K V)$$

induziert. Andererseits haben wir eine L-lineare Abbildung

$$L \otimes_K V \longrightarrow M \otimes_K V.$$

Rechts steht ein M-Vektorraum, daher kann man die Skalarmultiplikation als eine L-multilineare Abbildung

$$M \times (L \otimes_K V) \longrightarrow L \otimes_K V$$

auffassen, die ihrerseits zu einer L-linearen Abbildung

$$M \otimes_L (L \otimes_K V) \longrightarrow L \otimes_K V$$

führt. Diese beiden Abbildungen sind invers zueinander, was man auf den zerlegbaren Tensoren überprüfen kann. Daran sieht man auch, dass sich die M-Multiplikationen entsprechen. $\square$

Lemma 56.14. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren aus V. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein K-Erzeugendensystem von V, wenn $1 \otimes v_i$, $i \in I$, ein L-Erzeugendensystem von $L \otimes V$ ist.*
(2) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann K-linear unabhängig (über K) in V, wenn $1 \otimes v_i$, $i \in I$, linear unabhängig (über L) in $L \otimes V$ ist.*
(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein K-Basis von V, wenn $1 \otimes v_i$, $i \in I$, ein L-Basis von $L \otimes V$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 56.15. □

Beispiel 56.15. Es sei V ein reeller Vektorraum. Die Tensorierung mit der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$, also

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V,$$

nennt man die *Komplexifizierung* von V. Wenn V die Dimension n besitzt, so besitzt $V_{\mathbb{C}}$ als komplexer Vektorraum ebenfalls die Dimension n. Wenn man $V_{\mathbb{C}}$ als reellen Vektorraum betrachtet, so besitzt er die reelle Dimension $2n$.