Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

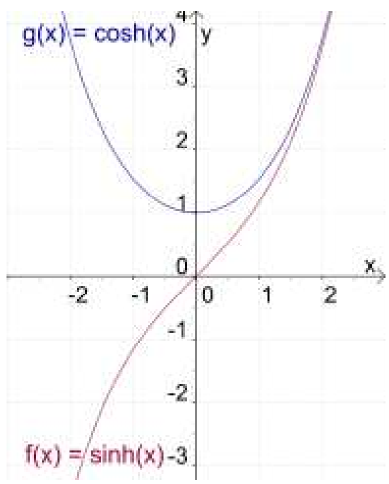
Mathematik für Anwender I

Vorlesung 13

> If you don't know how to fix it, please stop breaking it
>
> Severn Suzuki

In dieser Vorlesung führen wir weitere wichtige Funktionen über ihre Potenzreihen ein.

Die Hyperbelfunktionen



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen

Definition 13.1. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

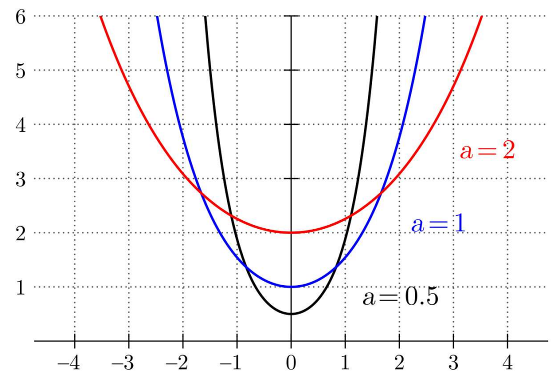
$$\sinh x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Definition 13.2. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.



Der Kosinus hyperbolicus $a \cosh x/a$ (mit Parameter a) beschreibt eine sogenannte *Kettenlinie*, das ist diejenige Kurve, die ein durchhängendes Seil einnimmt.

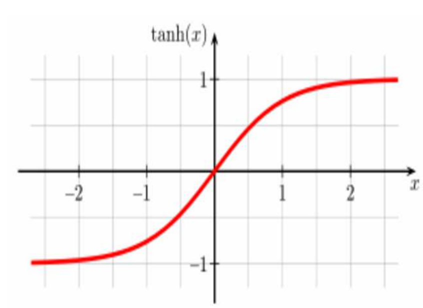
LEMMA 13.3. *Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus besitzen die folgenden Eigenschaften.*

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x$$
(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$
(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 13.1. □

LEMMA 13.4. *Die Funktion Sinus hyperbolicus ist streng wachsend und die Funktion Kosinus hyperbolicus ist auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.3 und Aufgabe 13.27. □



Definition 13.5. Die durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

definierte Funktion heißt *Tangens hyperbolicus*.

Definition 13.6. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Der Kosinus hyperbolicus ist eine gerade und der Sinus hyperbolicus ist eine ungerade Funktion.

Der Kreis und die trigonometrischen Funktionen

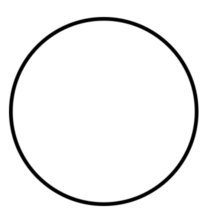
Im $\mathbb{R}^2$ ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ eine positive reelle Zahl (bzw. gleich 0, falls die Punkte zusammenfallen). Wenn die beiden Punkte in Koordinaten gegeben sind, also $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$, so ist der Abstand gleich

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Diese Gleichung beruht auf dem Satz des Pythagoras. Speziell besitzt jeder Punkt $P = (x, y)$ zum Nullpunkt $(0, 0)$ den Abstand

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Weil die Koordinaten reelle Zahlen sind, sind auch die Abstände reelle Zahlen. Wenn ein Punkt M und eine positive reelle Zahl r fixiert sind, so nennt man die Menge aller Punkte der Ebene, die zu M den Abstand r besitzen, den Kreis um M mit Radius r. In Koordinaten sieht die Definition folgendermaßen aus.



Definition 13.7. Es sei $M = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Dann nennt man die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$

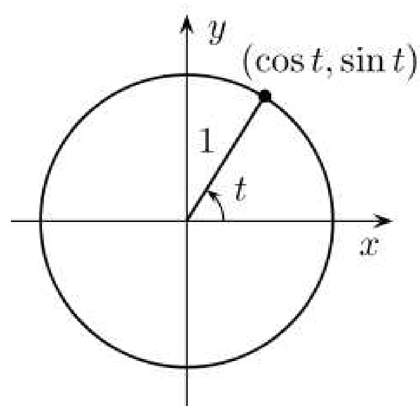
den *Kreis* (oder die *Kreislinie* oder die 1-*Sphäre*) mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* r.

Von Kreislinie spricht man, um zu betonen, dass man nicht den Vollkreis (die Kreisscheibe) meint, sondern nur den Rand. Alle Kreise sind wesensgleich, es kommt für die wichtigsten Eigenschaften des Kreises nicht auf den Mittelpunkt und nicht auf den Radius an. Von daher ist der Einheitskreis der einfachste Kreis, der alle Kreise repräsentiert.

Definition 13.8. Die Menge

$$E := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

heißt der *Einheitskreis*.



Der Einheitskreis besitzt dem Radius 1 und den Mittelpunkt $0 = (0, 0)$. Die trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* werden in einem naiven Zugang am Einheitskreis definiert. Ein „Winkel“ α am Nullpunkt (und von der positiven „x-Achse“ aus „gegen den Uhrzeigersinn“ gemessen.) definiert eine vom Nullpunkt ausgehende „Halbgerade“ (oder „Strahl“). Da diese einen eindeutigen Durchstoßungspunkt $P(\alpha) = (x, y)$ mit der Einheitskreislinie besitzt, definiert der Winkel auch einen eindeutigen Punkt auf dem Einheitskreis. Dessen Koordinaten sind nach Definition gleich

$$P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

d.h. die x-Koordinate wird durch den Kosinus und die y-Koordinate wird durch den Sinus angegeben. Dadurch sind einige wichtige Eigenschaften direkt klar:

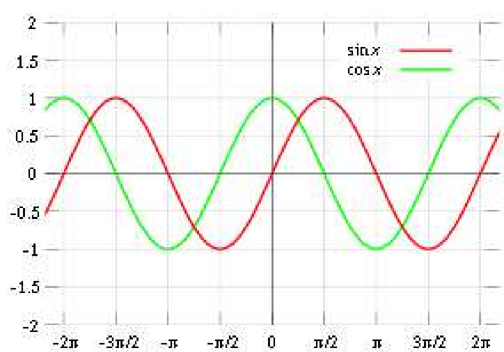
(1) Es gilt

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1.$$

(2) Es ist $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.
(3) Wenn der Winkel β eine Vierteldrehung bezeichnet, so ist $\cos \beta = 0$ und $\sin \beta = 1$.
(4) Es ist $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Dabei bezeichnet $-\alpha$ den durch den gegenläufigen Strahl definierten Winkel.[1]
(5) Die Werte von Sinus und Kosinus wiederholen sich nach einer Volldrehung.

Diese Definition ist zwar intuitiv klar, sie ist aber in verschiedener Hinsicht unbefriedigend.

(1) Es ist nicht klar, wie der Winkel zu messen ist.
(2) Es gibt keinen analytischen „berechenbaren“ Ausdruck, wie zu einem gegebenen Winkel die Werte von Kosinus und Sinus berechnet werden müssen.
(3) Damit fehlt die Grundlage, um Gesetzmäßigkeiten dieser Funktionen zu beweisen.



Die Graphen von Kosinus und Sinus. Der qualitative Verlauf ist von der naiven Definition her klar. Mit der unten folgenden analytischen Definition über Reihen kann man die Funktionswerte beliebig genau ausrechnen. Für viele wichtige qualitative Eigenschaften wie die Periodizität mit der Periodenlänge 2π muss man aber die analytische Definition genauer studieren.

Mit diesen Defiziten hängt auch zusammen, dass wir noch keine präzise Definition für die Kreiszahl π haben. Diese ist bekanntlich gleich dem Kreisinhalt des Einheitskreises und gleich der Hälfte des Kreisumfanges. Doch sind sowohl der „Flächeninhalt ebener berandeter Gebiete“ als auch die „Länge von gebogenen Kurven“ problematische Begriffe. Von daher ist es in der höheren Mathematik sinnvoll, die Kreisfunktionen über ihre Potenzreihen einzuführen und nach und nach zu beweisen, dass sie die gewünschten Eigenschaften

[1] Dieser Winkel ist $\alpha + \pi$ im Bogenmaß.

erfüllen. Sodann kann man auch die Kreiszahl π über Eigenschaften dieser Funktionen einführen und letztlich den Winkel als Länge des zugehörigen Kreisbogens einführen, nachdem diese Länge exakt definiert wird (was wir erst im zweiten Semester tun).

Wir besprechen einige wichtige Anwendungen der trigonometrischen Funktionen wie Polarkoordinaten, wobei wir die Winkel naiv verstehen und die trigonometrischen Funktionen als geometrisch definiert betrachten.

Polar- und Zylinderkoordinaten

Beispiel 13.9. Ein Winkel α und eine positive reelle Zahl r definieren einen eindeutigen Punkt

$$P = (x,y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = r(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$. Dabei bedeutet r den Abstand des Punktes P vom Nullpunkt $(0,0)$ und $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ bedeutet den Durchstoßungspunkt der durch P definierten Halbgeraden mit dem Einheitskreis. Jeder Punkt $P = (x,y) \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und mit einem Winkel α, der je nach dem gewählten Winkelmaß geeignet zu wählen ist, also beispielsweise aus $[0, 2\pi[$ ist (der Nullpunkt wird durch $r = 0$ und einen beliebigen Winkel repräsentiert). Die Komponenten (r, α) heißen die *Polarkoordinaten* von P.

Beispiel 13.10. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, kann man eindeutig schreiben als

$$z = r(\cos\alpha, \sin\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = r\cos\alpha + (r\sin\alpha)\mathrm{i}$$

mit einer eindeutig bestimmten positiven reellen Zahl r, nämlich dem Abstand von z zum Nullpunkt (also $r = |z|$) und einem eindeutig bestimmten Winkel α zwischen 0 (einschließlich) und 360 Grad (ausschließlich), der ausgehend von der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Man spricht von *Polarkoordinaten* für die komplexen Zahlen.

Polarkoordinaten der reellen Zahlenebene und für komplexe Zahlen unterscheiden sich nicht. Allerdings erlauben Polarkoordinaten eine Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen: Wegen

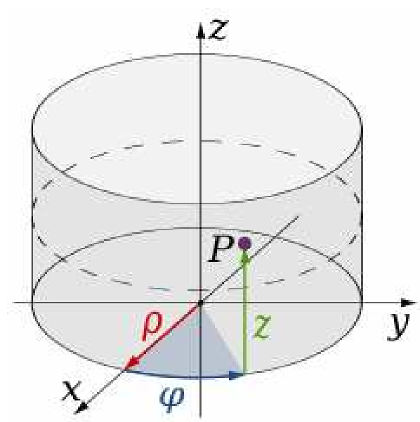
$$\begin{aligned} & (r\cos\alpha + \mathrm{i}r\sin\alpha)\cdot(s\cos\beta + \mathrm{i}s\sin\beta) \\ = \;& rs(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}rs(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \\ = \;& rs(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

(dabei wurden im letzten Schritt die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwendet) multipliziert man zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Diese Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen führt auch zu einem neuen Verständnis der Wurzeln aus komplexen Zahlen, die es aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra geben muss. Wenn $z = r\cos\alpha + r\mathrm{i}\sin\alpha$ ist, so ergibt sich, dass

$$w = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\alpha}{n} + \sqrt[n]{r}\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{n}$$

eine n-te Wurzel von z ist. D.h. man muss für den Betrag der komplexen Zahl die reelle n-te Wurzel nehmen und den Winkel durch n teilen.



Beispiel 13.11. Eine räumliche Variante von Beispiel 13.9 wird durch *Zylinderkoordinaten* gegeben. Ein Tripel $(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ wird dabei auf die kartesischen Koordinaten

$$(x, y, z) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, z)$$

abgebildet.

Die trigonometrischen Reihen

Wir besprechen nun den analytischen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen.

Definition 13.12. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu x.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes x absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen. Der Hintergrund ist, dass man in Potenzreihen stets auch komplexe Zahlen einsetzen kann (der Konvergenzbereich ist dann nicht ein reelles Konvergenzintervall, sondern eine Kreisscheibe). Für die Exponentialreihe und $z = \mathrm{i}x$ (wobei x reell oder komplex sein kann) ist (wir verwenden Rechenregeln für Potenzreihen, die wir für komplexe Zahlennicht behandelt haben)

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0,\, k \text{ gerade}}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} + \sum_{k=0,\, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i}(-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x + \mathrm{i} \sin x.
\end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung zwischen komplexer Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (die die *eulersche Formel* heißt) lassen sich viele Eigenschaften der letzteren besonders einfach beweisen. Prominente Spezialfälle dieser Beziehung sind

$$e^{\pi \mathrm{i}} = -1$$

und

$$e^{2\pi \mathrm{i}} = 1.$$

Aufgrund von 12 2. sind Sinus und Kosinus stetige Funktionen. Weitere wichtige Eigenschaften werden in der folgenden Aussage zusammengefasst.

SATZ 13.13. *Die Funktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos x,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x,$$

besitzen für $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(2) *Es ist* $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$.

(3) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y\,.$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\,.$$

(4) *Es gilt*

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1\,.$$

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (3). Der $2n$-te Summand (also derjenige Term, der sich auf die Potenz mit Exponenten $2n$ bezieht) in der Kosinusreihe (die Koeffizienten zu x^i, i ungerade, sind 0) von $x+y$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n(x+y)^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}x^i y^{2n-i} \\
&= (-1)^n \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!(2n-i)!}x^i y^{2n-i} \\
&= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}y^{2n-2j}}{(2j)!(2n-2j)!} \\
&\quad +(-1)^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{2j+1}y^{2n-2j-1}}{(2j+1)!(2n-2j-1)!},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzen Schritt die Indexmenge in gerade und ungerade Zahlen aufgeteilt haben.

Der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\cos x$ und $\cos y$ ist

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j(-1)^{n-j}}{(2j)!(2(n-j))!}x^{2j}y^{2(n-j)} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}y^{2(n-j)}}{(2j)!(2(n-j))!}$$

und der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\sin x$ und $\sin y$ ist

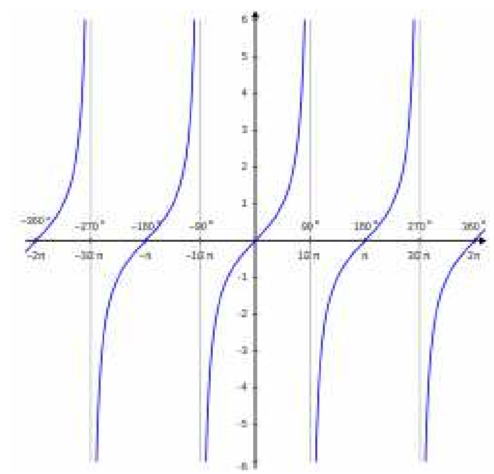
$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j(-1)^{n-1-j}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!}x^{2j+1}y^{2(n-j)+1} \\
= \;& (-1)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{2j+1}y^{2(n-1-j)+1}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!}.
\end{aligned}$$

Daher stimmen die beiden Seiten des Additionstheorems im geraden Fall überein. Bei einem ungeraden Index ist die linke Seite gleich 0. Da in der Kosinusreihe nur gerade Exponenten vorkommen, kommen im Cauchy-Produkt der beiden Kosinusreihen nur Exponenten der Form x^iy^j mit i,j gerade vor. Da in der Sinusreihe nur ungerade Exponenten vorkommen, kommen im Cauchy-Produkt der beiden Sinusreihen nur Exponenten der Form x^iy^j mit $i+j$ gerade vor. Deshalb kommen Ausdrücke der Form x^iy^j mit $i+j$ ungerade weder links noch rechts vor. Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (4). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $y := -x$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \cos(x - x) \\ &= \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) \\ &= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x. \end{aligned}$$

$\square$

Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass das Paar $(\cos x, \sin x)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(u, v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos x, \sin x)$ schreiben lässt, wobei man x als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.



In der folgenden Definition für Tangens und Kotangens verwenden wir in der Formulierung der Definitionsbereiche bereits die Zahl π.

DEFINITION 13.14. Die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

heißt *Tangens* und die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

heißt *Kotangens*.

Abbildungsverzeichnis