始

中學基本科全集　第參編

模範幾何學

上卷

東京　京都

數學研究社

最もよくわかる・最も實力のつく
試驗に必ず出る

模範幾何學

指導講義と最新研究

星野華水著

東京・京都
數學研究社發行

愛讀諸君へ

I. 世間で完全に出來上がる場合には「三柏子揃ふ」と謂ひます．洵に重要な方面が三つ揃つて完備することは容易ではありません．中學課程に於ては申すまでもない，高等諸校の受驗の難關は數學といふ堡壘を奪取することによつて突破することが出來るのです，そして其の成功が人生を左右することになると思ふと，此の數學をどうにかして征服して優者とならねばならぬことになります．實にそういふ勇士に缺くことの出來ぬ武器として本書が現はれました．世間にある參考書何れもよろしい，併し又一短がないでもありますまい．第一に「最もよくわかる」といふことが參考書として主な使命である，と同時に第二にそれによつて「最も實力のつく」といふ條件が必要と思ひます．入りもしない教材なら如何に「よくわかつて」もだめです，少くも一問一問が讀者に實力をつけるもので，其の解答が實力を涵養して行かねばなりません．しかし諸君は悠々數學をおもちゃ遊びにしてゐる暇はありません，毎日の課程に逐はれてゐて其の餘暇を捻り出すですから，實力をつけるその問題が「試驗に必ず出る」といふのでない時には世にいふ骨折り損になることにもなりませう．此の三ッの條件は鼎の三足と同じに數學參考書には必然的に具備さねばなりません．

II. 私は廿年の星霜を敎職に奉じ，其の間常に受驗者の苦痛に同情し，少しでも其の苦痛を輕減させて所謂活き活きした，のびのびした人物を作りたいと考へ五年前帝國入學試驗研究會を創設し，續いて數學研究社を設立して洽く苦界の受驗者を幾分でも援助することに盡して來ました．そうしてゐる間に「成る程生徒はこのやり方がわるいから，不測の失敗をする」「かういふことをも知つてゐないのか」「これで進んだらよいのに」といふ樣なことを痛切に直覺することが出來て，前項に述べた三つの要素を含んだ數學を．雜誌受驗數學を發行して受驗者に會得させようと致しました所幸にも私の衷心の發露が世の受驗者にためになつて盛に歡迎を受け，本年の高校を始め專門學校の試驗問題に的中するものが頗る多かつたのです．それで「早くそれを單行本として出版せよ」との熱望者も出るやうになつたのです，只今修正增補して，表題に其の編纂の主旨を表して一本としました．

III. 本書の世に出る徑路は前述のやうで私と愛讀者とは一渾し三つの條件が融合して目的を達する日もあらうと思ひます．しかし主旨はそれでも愛讀方法が拙であると私の深意を甘く捉へて下さりかねることになるかも知れぬと心配して一言します．

本書を學ぶ諸君は先づ

【指導】 をよく會得して下さい，恰も敎室に於ける先生の講義と思つて．一度で不明であつたら二度三度，又忘れたらもう一度といふ樣に繰返して下さい．

【主題】 は重要な基礎問題ですから，着眼，考へ方，進み方等を根抵に「斯く考へるのが自然の常道である」といふ點を味ふ，即ち「自分のものにする」ことにして下さい．答案は單に見る丈でなく，又讀む丈でなく，實力をつけると同時に答案調製の力を作る資料として下さい．

【批評】 は諸君がする心持ちになつて讀んで下さい，著者の單なる意見でなく「そうだ僕も同感だ」といふ所まで急所を抑へる，そして他人の拙な點を知ると同時に自分の進む道を，正しく，そして近か廻りにして下さい．

【研究】 鹽燒の鯛もおいしいが，その鯛をつけ燒きにもする，又刺身にもする，煮ても食べる，羮にもする．そうすると鯛のうま味がしつかり分ると同じやうに，數學も，あゝも，こうもと諸方面から味ふといふことが實力をつける所以となるのです．そのつもりで味つて下さい．

【試練】 實力はそれを腕試しするに於いて其の實力のつき方が知られる．單に類問といふ輕い見方でなく，主題について得た實力の「試し」と思つてやつて下さい．それで解は全部をつけてないのです．

【こなし方】 實力の使ひ方，それが即ち「よくわかつた」か否か

の程度を示すもので,「こんな風に應用して見よう」といふ點から，消化する意味で書いたのです.

【標準練磨問題】 自力で解を試みて私の解答を批評して下さい,其の意氣が諸君自身を恵むのです.

IV. 本書征服の心持は大體前項で把捉されたと思ひますが，之を初めから征服するには先づ指導を了解して主題丈を縦に全部讀んで見る，それから今一度指導と主題そして一つ丈附屬の試練を自分のものにして行つて，三度目又指導主題，こんどは試練を皆して行つて下さい．勿論〔應用〕などは試練と一緒にするのです．最後に標準練磨問題にぶつかつて下さい．その時に詰つたら更めて主題を繙くことがよいと信じます.

V. 下巻は本年の秋，丁度受験者が血眼になられる頃暖い同情と後援との抱負を以つて出版します，どうか續いて愛して下さい.

大正十五年五月五日

華水亂筆

目　次

下　卷　項　目

比及ビ比例　　軌跡　　作圖題

京都の本社

最もよくわかる、最も實力のつく

必ず試驗に出る

模範幾何學

指導講義と最新研究

緒　　論

系統的基礎

學ビ方ノ出發

千里ノ道モ一歩ヨリトイフ通リ難問ヲ容易ニ解決スルコトガ出來ル様ニナルノモ毎日ノ眞摯ナ努力ガ積ツテ大成スルノデアル．併シ同ジ毎日努力ヲスルニモ，努力ソノモノヲ善用スルコトガ大切デ，所謂能率増進主義デ努力スルコトガ大切デアル．今ヨリ系統的ノ進ミ方デ出發シマセウ．

I. 定　理　ト　系

幾何ニ於ケル仕事ハ既定事項ヲ土臺ニシテ新シイ特殊ノ場合ニ之ヲ適用シテ行ク創作的ノ演繹推理ヲスルコトデアル．即チ定理ヤ系ヤ又ハ特殊ノ問題ヲ用ヒテ與ヘラレル問題ヲ證明シテ行クコトデアル．ソコデ基礎トナル，換言スルト頭を働かせるソノ源泉デアルモノヲ整理セネバナラヌ．ソレガ定理ト系トノ分類デアル．定理ヤ系ハ敎科書ニヨツテ多少變ツテハヰル，又其ノ配列モ違ツテハヰルガ諸子ハ諸子ノ習ツタ本ニ據ルノガ便利デアル．ソシテ目次ノ通リデモヨシ又或方法ニ總合シテデモヨイカラ分類シテ見ル．

今便宜上本書ニ次ノ樣ニシテ一括スル.

(一) 直線ト角

A. 平行線ト交線ニ關スル錯角, 同位角, 同傍內角
B. 一角二邊ト他角ノ二邊ノ平行關係

(二) 三角形類

A. 三角形ノ合同（二邊夾角, 二角一邊, 三邊）
B. 直角三角形（合同. 斜邊ト一鋭角又ハ一邊), 斜邊中點
C. 三角形ノ角邊ノ大小, 二邊和ト差, 二等邊二等角
D. 不等邊不等角, 二邊不等夾角, 二邊中點線
E. 內, 外, 重, 垂, 傍心

(三) 平行四邊形類

A. 二双邊平行, 二双對邊相等, 二双對角相等, 對角線二等分, 一双平行相等 B. 平行四邊形ノ斷定 (同上定理ノ適用逆)

(四) 多角形類

A. 內角和ト外角和 B. 對角線

(五) 圓類

A. 圓周角ト中心角 B. 弦ト中心距離
C. 圓內四邊形, 外角內對角, 環座, 圓座
D. 切線ト半徑, 切線ト隣弓形角, E. 二圓內外切ト中心線

(六) 比例類

A. 比例式ノ變化, 內外項交換

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ヨリ $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, $\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$

B. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\frac{la\pm mc\pm ne\pm\cdots\cdots}{lb\pm md\pm nf\pm\cdots\cdots}$

C. 平行線ト交線切取 D. △ノ內外角ノ二等分線ト底

(七) 相似類

A. 三角形ノ相似（二角相等, 二邊比夾角, 三邊比）
B. 多角形相似（注意：同順等角及ビ邊比例ト中心）

(八) 面積類

A. $ma\pm mb\pm mc=m(a\pm b\pm c)$, $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$
B. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $a:b=c:d$ ヨリ $ad=bc$
C. 圓內交二弦ノ分積, 圓外二割線ノ分積, 切線自乘割線分積
D. $\triangle=\frac{1}{2}$底×高, ▱＝底×高サ, 梯形＝(上＋下)×高÷2
E. ピタゴラス系 $a^2+b^2=c^2$, $a^2+b^2\pm 2ad=c^2$

F.　△ノ（二邊）^{2} 和 $=2(\overline{\text{中線}}^2+\overline{\text{半底}}^2)$

G.　同底等積△ノ頂點線，ロノ餘形　　H.　相似形$\overline{\text{應邊}}^2$比

K.　オイラー，メネラウス，チエヴア定理

（九）ヌ　圓　類

A.　正多角形ノ內外接　　B.　周$=2r\pi$　　C.　積$=r^2\pi$

（十）軌　跡　類

A.　必要，充分二件　　B.　範圍限界吟味

C.　二點距（比，アポロニウス圓）　　D.　二直線等（比）距離

E.　一點定距離　　F.　一直線へ定距離

（土）作　圖　題

基本作圖ト特殊題，　解析（答案ニ書ク要ナシ），作圖，證明，吟味

以　上

ノ樣ニ大項目ニ分ケ，ソノ中ニ含マレル主ナ定理類ヲ常ニ頭ノ中ニ浮ばせる樣ニスル．

2. 定理類ノ諳誦法

上ノ分類ヲ常ニ記憶セヨト云ハレテ困ルノハ未ダ熱心ト努力ガ足ラナイ．

碁打ガ負ケタ其ノ夜ハ碁盤面ノ烏鷺ノ石ガ歷然ト天井ニ浮ンデ「惜イコトシタ，彼處ヲ此ニ打ツタラヨカツタ」ト繰返シテ殘念ガルガ碁力ノ發達スルノハ此ノ天井ニ碁面ノ浮ぶ間デアルトイフ，諸君自ラ此ノ話カラ何等カ目覺メルコトガアラウ．ケレド諳記トイツテモ內容知ラズノだらだら讀ミハイケナイ．むしやふなデ一升ノ立方分ヲ覺エ，胃袋から (12960) 尺デ一里ノ尺數ヲ記憶スル樣ニ心理學デ云フ聯關記憶ヲスル，上ノ十一項類ノ頭字ヲトルト直三平多四比相面又圓軌跡作デアルカラ之ヲ

直さん平太や丸い素麵

ヌ緣奇績を作らうか

トシテオケバ縱ノ筋丈ハ諳記ガ出來ル，之レニ橫ノ內容ハ，面積類ガ多クテ煩イガ他ハ難儀シナクトモ整頓ガ出來ル．

3. 特　殊　問　題

定理ヤ系ニナツテ井ナイ問題デモ其ノ應用價値ハ中々定理系ニ劣ラナイノモアル．之ヲ證明ニ使用スルトキハ勿論略證丈デモシナケレバナラヌケレド，其ノ命題ヲ知ツテヰルタメ次々ト推理ノ進メラレルモノガアル．今茲ニ列記ハシナクテ後章ニ於テ「記憶セヨ」「略證ハ斯クセヨ」ト云フ註ヲ附スルコトニスルカラ其ノ問題ニツイテハ確ナ力ヲ整理シテオクガヨロシイ．

4. 假設ト終結

答案ニハドノ程度迄ニ假設ト終結ヲ記述スルモノカト云フ質問ハ時々地方カラ來ル，誠ニ答案ヲ認メルニハ尤ノコトデアル．書物ノ樣ニ書ク必要ノアルトキト，略シテモヨイ塲合トガアル．

【問題】 圓外ノ一點ヨリ之ニ二ツノ切線ヲ作リ，切點ヲ結ブ弦ヲ作リ，圓周上ノ一點ヨリ之ニ垂線ヲ下セバ此ノ垂線ハ其ノ點ヨリ二切線ニ下ス垂線ノ比例中項ナリ.

ト云フノハ特殊名ガ附シテナイ，ソレデ解答者ガ證明ヲ發表スルタメニ用フル具體名ヲ命ジナケレバナラヌカラ之ヲ假設（說ニアラズ）終結トシテ示スノデアル.

假設 PA, PB ヲ二切線，C ヲ $\overset{\frown}{AB}$ 上ノ點トシテ

$CE \perp AB$, $CD \perp PA$, $CF \perp PB$ ナラシム

終結 $\overline{CE}^2 = CD \cdot CF$

トシテ命名シタ文字ニヨツテ示ス. 之ヲ又特述又ハ題意トシテ假設，終結ノ文字ヲ省イテモ宜シ. トコロガ上ノ問題ガ次ノ樣ニシテ出サレル.

【問題】 圓外ノ一點 P ヨリ二ツノ切線 PA, PB ヲ作リ弧 AB 上ノ一點 C ヨリ AB, PA, PB ニ垂線 CE, CD, CF ヲ下セバ CE ハ CD, CF ノ比例中項ナリ.

トシテ出サレルト最早ヤ文字ヲ指定サレテ井ルカラ解答者ハ之ニ依リ此ノ上入用ニナル補線ニハ隨意ノ文字ヲ附ケルニシテ【題中ニナイ文字ヲ使用スルトキハ必ズ如何ナル文字カ，如何ニ作圖セシモノカヲ明記セネバナラヌ】ガ假設終結ヲ書クノヲ略シテ直グニ證明トシテ始メテヨイ. 實際入試ニハ後者ノ樣ニ符號ガ命名シテアル（無暗ミニ勝手ナ符號ヲ附ケラレルト採點者ガ見ルニ困ルカラ）ノガ大多數デアル.

5. 練習ノ態度

實力ヲ養フニハ一ツノ問題ヲ縱カラモ横カラモ苟モ種々ノ研究ヲ忽諸ニセズ，着眼ト發見，發見ト進ミ方，補線ノ運用等ハ十分味ツテ「成ル程ココハ甘ク考ヘタ」「之レヨリカウシテハ如何」ト云フ樣ニ所謂妙趣ヲ味フノガ

ヨイ，一問ニ 1 時間，2 時間ヲカケテモ決シテ惜シクナイ，2 時間モカヽツテ一題位シテキテハ到底ヤリ切レナイ，馬鹿ナコトダト思フ者ガアル樣デアルガ，夫レハ謬見デアツテ 2 時間ノ頭ノ働キハ成程主ナル一題ニ傾注セラレタニ違ヒナイガ，傾注シテ往ク念々ノ間，刹那刹那ニハ人間生活ノ全部ヲ盡シ自分ヲ呼バレテモ知ラズニ居ルト云フ程ノ強イ執着デ縱ニハ色々ノ定理ヲ整理シテ見テ居ル，又既知ノ類似問題ヲ展ゲテ見テ居ル，恐ク幾何ノ既習材料ヲ全部つついて見テ居ル. ソレデ 2 時間デ不出來デアツテモ輕卒ノ解答讀ミニ比シ數倍ノ收穫ヲシテ居ル. 此ノ故ニ諸子ハ決シテ深究，攻究ノ時間ヲ惜ンデナラナイ. 併シ乍ラ受驗期ヲ控ヘタル諸君ニハ之レト同時ニ多クノ問題ニぶつかるト云フコトヲセネバナラン. 何モシテ見テ置イタノカラ其ノ儘問題ガ出ナクトモヨイ，澤山シタソノ推理力ヲ働カセサヘスレバヨイ. ソレデ「多ク讀ンデ置ケバ一ツヤ二ツハ出ヨウ」ト云フ態度ハ甚ダヨクナイ，一問一問讀ンデ往クノデハナク考ヘテ往ク，味ツテ往クトイフ態度ハ必ズナクシテハナラヌ. 數學ハ讀ム學科ニアラズ，觀賞スル學科ニアラズ，最後迄考へる學科デアルコトヲ忘レテナラヌ.

證　明　法

1. 假設ノ整理 問題ガ示ス假設事項ヲ知ラナイデ井タリ，落トシテ井タリスル者ガヨクアル. 終結計リニ目ヲツケテ終結ニ呑まれて井ル者ガ多イ. 終結ハ假設ノ展開ニヨツテ成立スルモノデアル. ソコデ題中詳細ノ符號ガ附イテ井ルトキハ特述ヲ記サナクトモ得點ハアルケレドモ自分ガ考ヘテ往クト云フ方カラ事項ヲ一ツニハ何，二ツニハ何，三ツニハ…ト略記スル，ソシテ考ヘテ往クトキ第二假設ハ展開シタガ第三ガドウモウマク往カナイ，暫ク放つて第一ヲ再考シテ展開スル，第一ト第二トノ聯絡的展開ガ，預つてアツタ第三假設事項ヲ誘導スルコトモアル. 兎ニ角三

ツナリ四ツナリノ事項ヲ洩れなく展開スルコトヲ忘レテナラヌ．幾何ハ假設事項ノ全部ヲ展開シ得タトキニ曙光ヲ認メテ凱歌ヲ叫ビ得ルモノデアル．出來ナイトキトイフノハソノ展開ガ完結シナイガ吾人オ互ニ嘗メテ居ル事實デアル．

2. 終結ノ整理 終結事項ヲ熟察シテ「之レガ云ヒ得ラレサヘスレバ出來ルガ」ト逆行整理ヲスル，ソシテ其ノ邊ノ證明ニ必要ナ定理，系又ハ類似問題ハアルマイカト既習事項ヲ浮べる，ソシテ整理サレテ居ル假設事項ト彼此對照ヲスル．幾何ニハ「該問題ハ之ニ屬ス」ト云フ定ツタ公式ハナイ，シカシ逆行整理ニ當ツテハ當然考ヘテ見ル（タトヘソレガ成功ハシナイニシテモ）義務ガアル件々ハ電光石火ノ如クニ，反射的ニ思ヒ出ス，迅速ナ展開ガ出來ルト出來ヌトハ日頃ノ勉强ノ度ニ依ルモノデ，多讀的ノ素通リ勉强者ハ此ノ反射的展開ハ上達シナイ．じつくりト攻究的態度デ努力シタ人ハ自ラ惠マレルノハ此處デアル．

3. 條件ノ展開 假設事項デモ，終結事項デモ整理セラレタ上ハ夫々展開セネバナラヌ． 分類的定理系ノ何レヲ引き擔へて見るベキカヲ考ヘネバナラヌ． 大體展開ノ緒口をよりわけるニハ次ノ總合的展開ヲ道具トシテ常ニ所持シテ居ル．

1. 二角ノ大小ト二線分ノ大小
2. 角ノ相等ト其ノ移動
3. 直交二直線
4. 平行二直線
5. 線分ノ相等ト其ノ移動

6. 切線ト切圓
7. 圓周上ノ一點ト二ツノ直角
8. 線分ノ比ト面積ノ比
9. 面積ノ移動
10. 二ッ以上ノ正方形

上ノ十類ノ展開事項ヲ處理セネバナラナイ時ニハドンナコトヲ思ヒ浮べネバナラヌカ，次ノ圖判ジデ忽チ判斷ガツキ，ソシテ又夫等ノ圖ヲ必要ニ應ジテ思ヒ出シ，圖形ノ煩雜ナ時デモ各部分毎ニ上ノ事項ヲ適用スルノデアル．

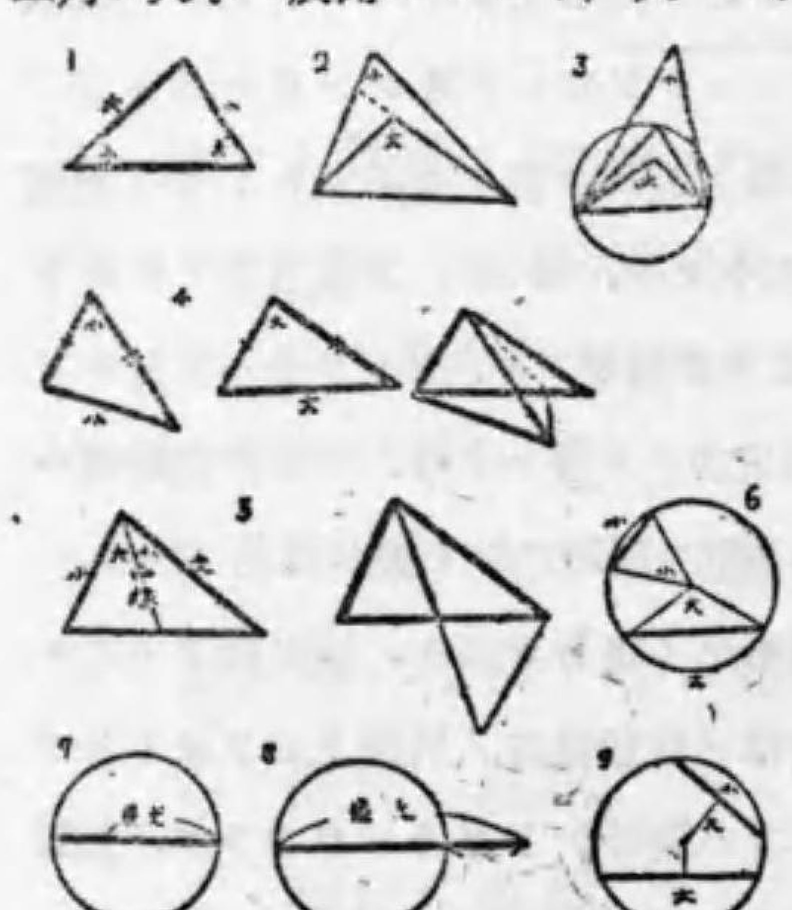
假設ト終結トノ展開

幾何解法ノ成功ハ最早諸子ノ經驗シテ知ツテ居ラレル樣ニ，假設ノ展開ト終結ノ逆展開トガ具合ヨク迎合シ合ツタ時ニ出來上ガルモノデアル．假設ハ如何ニ展開スベキカ，終結ハ如何ナルコトガ知レテ居レバ足ルカト云フコトガ一定シタ即チ據ルベキ基準，代數ノ公式ニ當ルモノガナイカラ幾何ハ推理ノ中デモ創作的發明ノ頭ガ入用トナル，シカシ或假設ガアツタラ「當然ニ義理トシテモ考ヘテ見ル」ト云フ事柄ガアル．ソレヲ考ヘテ見ナイノハ不當デアリ，不義理デアル．到底成功スル筈ハナイ．ソコデ當然考ヘテ見ル事柄ハ色々アル，甲，乙，……其ノ甲ヲ展開ヲシテ必ズ成功スルカ，乙ノ展開デ成功スルカ前以テ豫測ノ出來ナイ場合ガアル．途ガ幾ツモアルトキハ甲，乙，……ト順ニ展開ノ模樣ガ他ノ假設條件ノ展開トピツタリ合ツテ行クカ，終結ノ迎合ニハドレガヨイカハ實行シテ見ネバワカラヌ．終結ノ方モ逆進展ガ只一途ノ場合ハヨイガ途ガ幾ツモアルト甲，乙，……ト色々考ヘテ見ネバナラヌ．例ヘバ $AB \cdot CD = BC \cdot DE$ ヲ證シヨウ云フトキハ

$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{DC}$ ヲ證スベク，ソレニハ $\frac{AB}{BC}$ カラ A, B, C ニ着眼シ，$\frac{DE}{DC}$ カラ C, D, E ニ着眼シテ $\triangle ABC \backsim \triangle CDE$ ヲ證ショウト努メル．之ハ當然ノ道デアツテ方針ハ一途デアルガ $\angle\alpha=\angle\beta$ ヲ證セヨト云フトキハ色々ノ道ガアル．α, β ヲ各移動スルノニ平行線ノ角ニスルノモアレバ二等邊三角形ノ等角ニスル途モアリ，曰ク何，曰ク何トアル．此ノ中デドレガ好都合カ問題ニヨツテ不明デアルガ，苟モ $\angle\alpha=\angle\beta$ ヲ證シ得ル總テノ途ヲ片端カラ吟味シテ見ルコトハ義理デアル．上ノ理由デ當然ニ考フベキ展開ヲ分類スルコトニシヨウ．ソシテ當然ニ思フベキコト，考ヘネバナラヌコトハ電光石火ノ如ク，光線ノ反射ノ如クニ即時ニひらめかせるコトガ肝要デアルコトヲ知ツテ下サイ．

1. 二角ノ大小ト二線分ノ大小

二角ノ大小ニ展開スルコト，又ハ二線分ノ大小ニ展開スルニハドンナコトヲ考ヘテ見ルカトイフト，次ノ圖ノ樣ニ九ツノ途ノアルコトヲ知ツテオク．



(1) 三角形ノ大小邊トソノ對角ノ大小．

(2) 一邊ノ同側ニ於ケル配置ニヨツテ定メラレルトキ．

(3) 圓ノ內，上，外ニアル角ヲ形ヅクルトキニ用フ．

(4) ソレヲ夾ム二邊ガ等シイトイフコトデアツタラ夾角ノ大小ト對邊ノ大小トガ定マル．

(5) 三角形ノ二邊ト其ノ中線關係ニナルトキニ用フル． (13海軍)

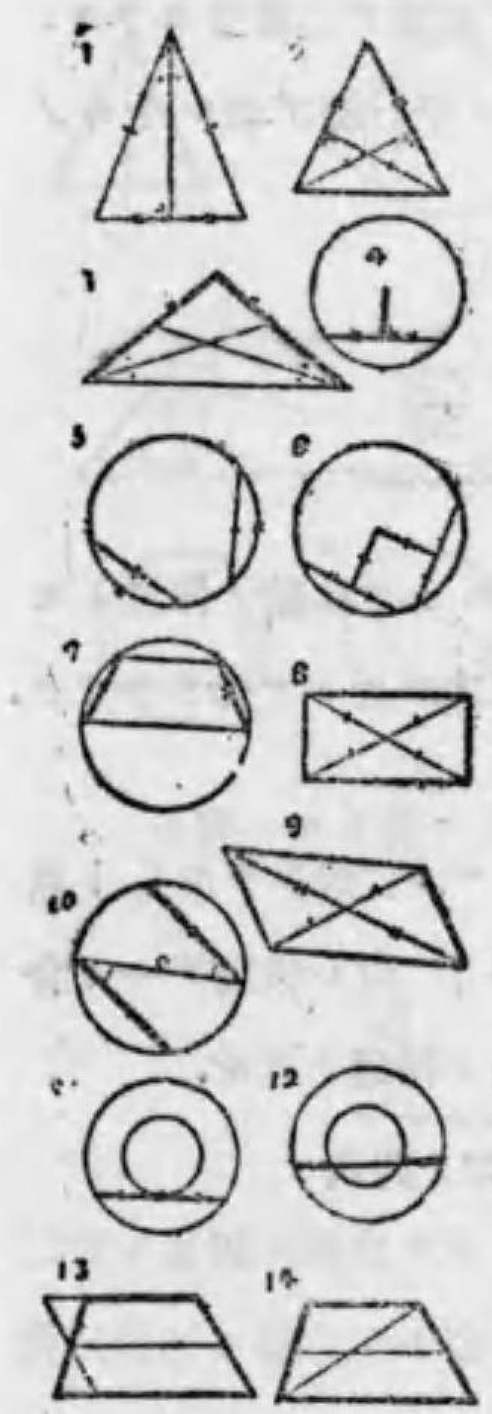
(6) 弧ト中心角トノ大小ニ歸セラレルトキ．

(7) 圓ノ中心線上デ大小ヲ定メル線分ヲ考ヘルトキ．

(8) 弦ト中心距離ノ引用ガ出來ルトキニ用フ．

2. 二線分ノ相等

二線分ノ等シイコトヲ證スルガ終結デアル場合ハ云フマデモナク，之ヲ手段ニ使フガ便利ナトキハ次圖ノ樣ニ中々色々ノ場合ガアル．



(1) 二等邊三角形ノ性質ノ一ツデ頂角ノ二等分線ト底邊ノ二等分．又ハ底邊ノ垂直二等分線トシテ兩底端ヨリノ等距離．

(2) 上ノ性質ノ一ツデ等角頂ヨリノ垂線．

(3) 同上等角頂ヨリ出ヅル中線．

(4) 中心ヨリ弦ニ下ス垂線ガ弦ヲ二等分スルコト．

(5) 等弧ノ弦ニナルトキ．

(6) 中心ヨリノ等距離弦トナツテ等シイトキ．

(7) 圓ノ平行弦デ切リトル弧ノ弦ハ等シク正梯形ヲ作ル．

(8) 矩形ノ對角線トナルトキ．

(9) 平行四邊形ノ對角線ノ交點ニヨル二ツノ分．

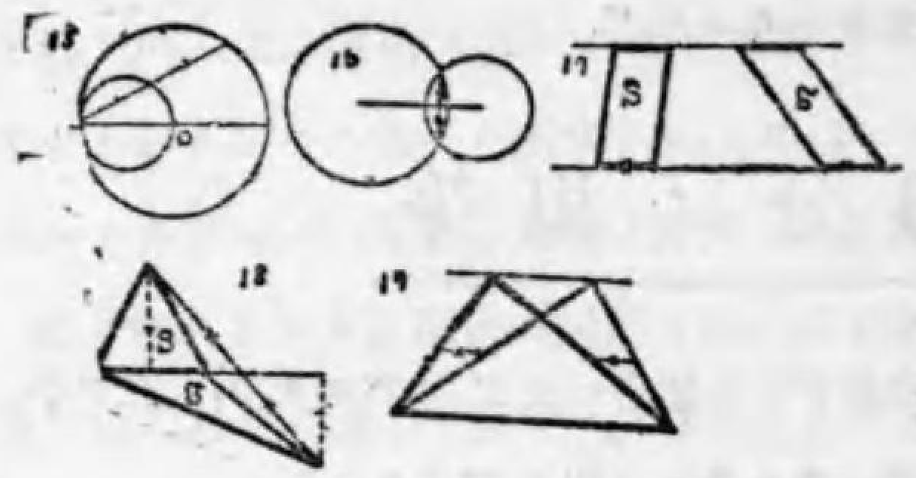
(10) 圓ノ直徑ト等角ヲ成スコトノ利用ノ出來ルトキノ二弦．

(11) 同心圓ノ內圓ノ切線ガ外圓弦トナツテ切點デ二等分スルコト．

(2) ニハ倚合同△ノ對應邊，▱ノ對邊，△ノ二邊中點線

(12) 同心圓ノ割線ガ環狀形內ニアル部分トナルトキ.

(13), (14) 梯形ノ平行ナラザル邊ノ中點線トシテ平行邊ト比シテ和ノ半分トナルトキ.



(15) 原圓ノ弦ハ半徑ヲ直徑トスル圓デ二等分セラル.

(16) 二圓交點線ハ中心線デ二等分セラル.

(17) 等高ノ平行四邊形ガ等積ノトキ一邊宛ガ等シイ.

(18) 等積三角形ガ一邊ノ兩側ニアルトキ頂點線ガ底邊デ二等分セラル.

(19) 等積等高ノ三角形ガ同等底上ニ立ツトキ底ノ平行線デ切ルトキノ邊間ノ部分ノ相等.

3. 二角ノ相等

二角ノ相等ハ終結トシテ證スル場合ヨリモ之ヲ手段ニシテ移動ノ仲媒トセネバナラヌニ用フルコトガ多イ. 次ノ十六ノ場合ヲ用フルコトヲ知ツテオク.

(1) 對頂角.

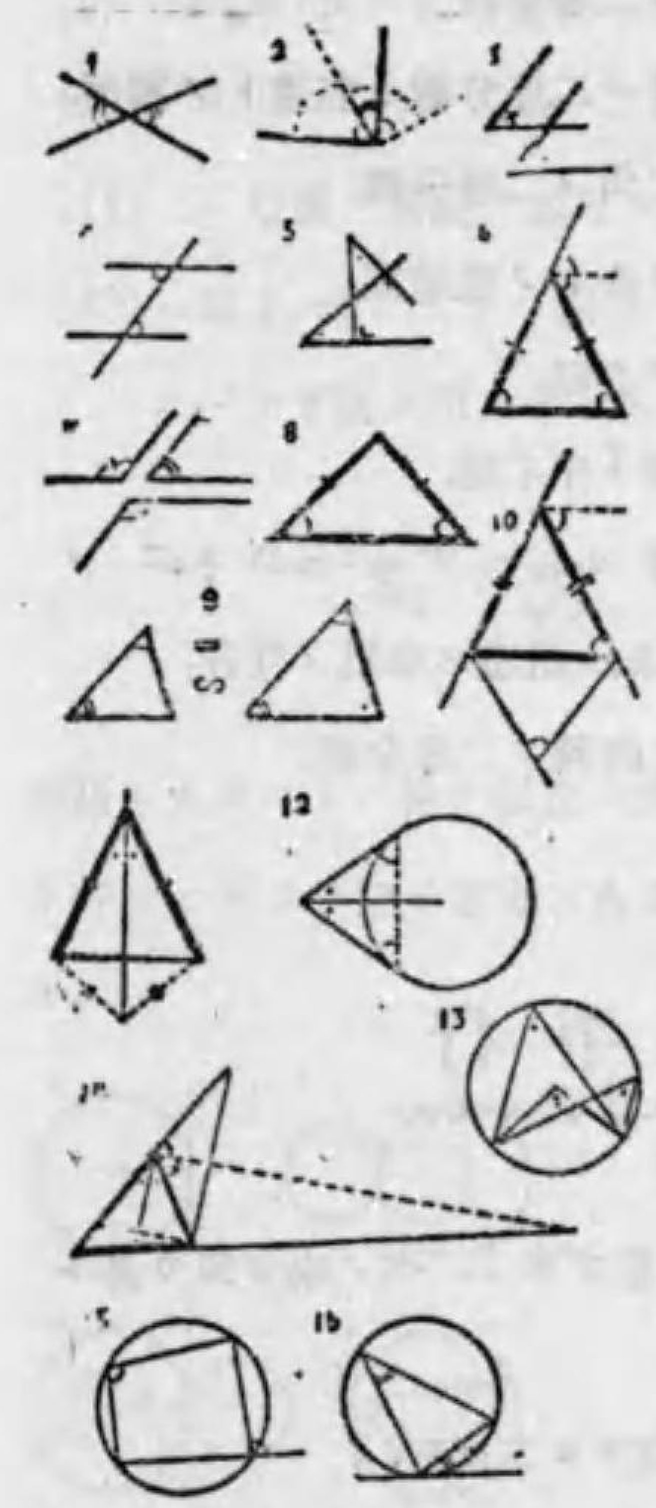
(2) 等角カラ共通部分ヲ引イタ殘リ. 之丈デ「フーン, 知ツテル」ト思フデアラウガ應用ヲスル段ニナルト中々出ナイ! 何レ後篇デ一々合點サセヨウ. 又ハ同ジ角ノ餘角トナルトキ. 角ノ轉廻トスル.

(3) 夾邊ガ互ニ平行ニナル二角. 合同△ノ對角, ロノ對角

(4) 之ハ誰モ得意ノ平行線ノ錯角, 同位角.

(5) 夾邊ガ互ニ直交スル二角.

(6) 二等邊三角形ノ等角ハ頂外角ノ半分ニ等シイコトモ難問解法ノ手段ニヨク使ハレル.



(7) 同ジ角ノ補角トナルトキ.

(8) 二等邊三角形ノ底角トナルトキ.

(9) 相似三角形トシテ相應角.

(10) 二等邊三角形(一般三角形デヨイ)頂外角半ト他ノ二外角ノ二等分線ノナス角. (14京城商)

(11) 垂直二等分線ニヨル二等邊三角形ノ底角.

(12) 二切線ト中心線トノ角, 切點ヲ結ブ線分ノ角.

(13) 周角, 之ハ實ニヨク使ハレル.

(14) 三角形ノ二邊ノ比ガ底ノ內外分二部分比ニ等イトキニ頂點ト分點トヲ結ブトキ頂角ヲ二等分スル. (14高ノ逆)

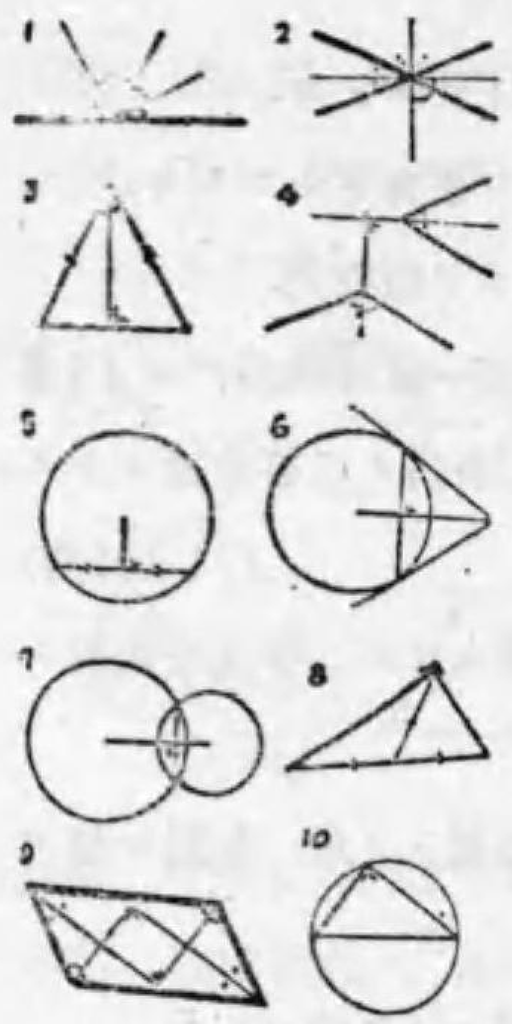
(15) 圓內四邊形外角ト內對角, 之モ實ニヨク使ハレル.

(16) 切線ト弦ト成ス角ト隣弓形內角, 之モ實ニヨク使ハレル.

4. 二直線ノ直交

二ツノ直線ノ直交スルコト自身ガ終結ニナラヌモ之ヲ利用スル場合又ハ直角三角形ニ導キタイ場合, 矩形ヲ作リタイ場合ニハ是非共次ノ十ノ場合ヲ平常カラ考ヘテオク.

(1) 隣接角ノ二等分線.



(2) 對頂二双角ノ二等分線.

(3) 二等邊三角形ノ二等分線ト底邊トノ關係.

(4) 夾邊平行ノ二角ノ二等分線.

(5) 弦ノ中點ト中心トノ連結線.

(6) 二切點線ト中心線.

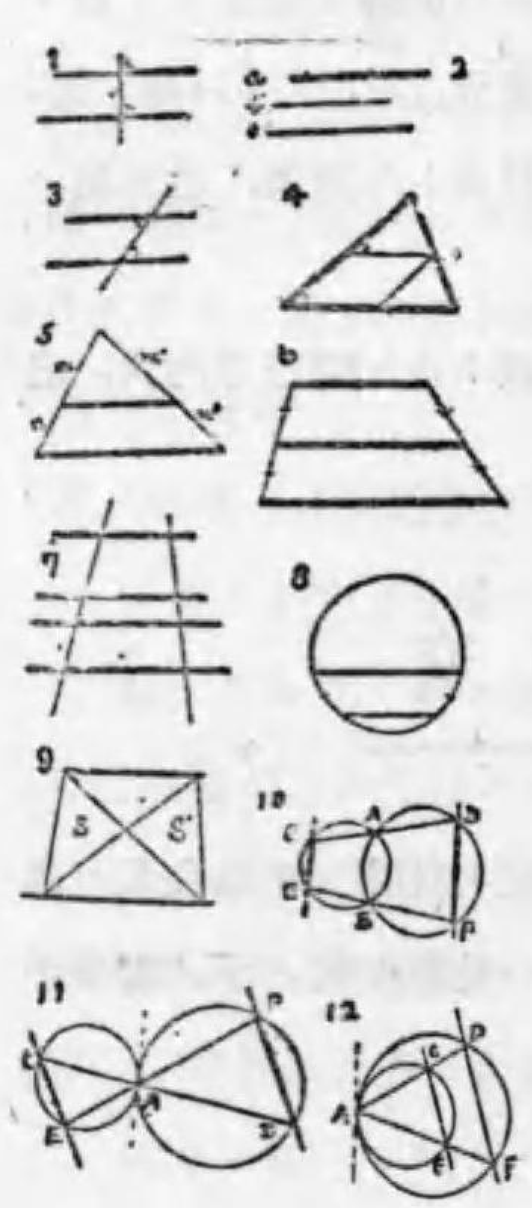
(7) 二圓ノ交點線ト中心線.

(8) 三角形ノ三邊 a, b, c デ $a^2=b^2+c^2$ ノ成立スルノトキ, 斜邊ノ中點ノ性質.

(9) 平行四邊形ノ四角ノ二等分線.

(10) 半圓角.

5. 二直線ノ平行



之ハ終結トスル場合ガ多イ. 次ノ場合位ガ基本デアル.

(1) 一直線ニ直交スル二直線.

(2) 一直線ニ平行ナル二直線.

(3) 一直線トナス錯角, 同位角ノ等シイトキ, 同傍內角和ノ $2\angle R$ ノトキ.

(4) 三角形ノ二邊中點線,之ハ實ニ實ニ多ク使ハレル.

(5) 三角形ノ二邊ヲ等比ニ分ツ分點線.

(6) 梯形ノ平行ナラヌ二邊ノ中點線.

(7) 二直線ヲ等連比ニ分ツ相應分點線.

(8) 等弧ノ二端ヲ結ブ直線.

(9) 等(同)底ニ立ツ等積三角形ノ頂點線.

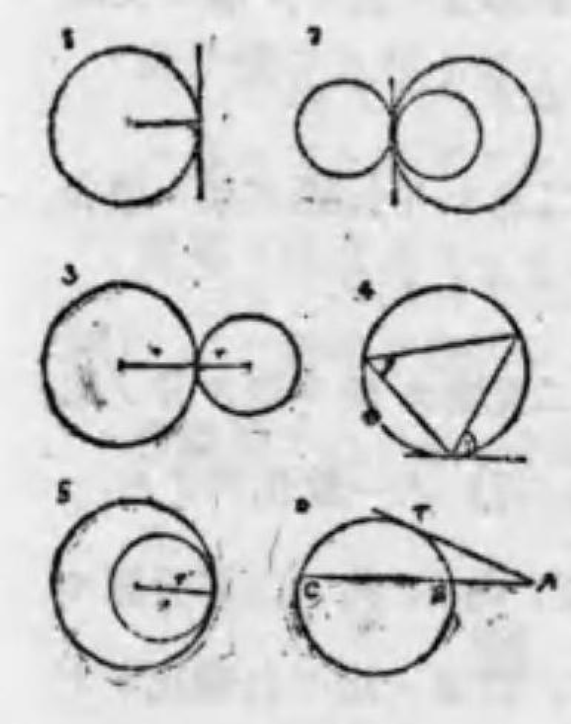
(10) A, B デ交ル二圓ノ二割線デ CE ∥ DF

(11) 二切圓ノ切點ヲ過ギル二割線デ CE ∥ DF

(12) 同上, 此ノ三ツハ獨立ノ問題トナルガ普通デ, 手段トナルノハ最後ノ一ツガ偶ニ用ヒラレル位デアル.

6. 切線ト切圓

終結トナルコトハ稀デ假設ノ展開ニヨク用ヒラレル. 從ツテ切線! 切圓! ト呼バハツタラ忽チ電光石火次ノ反射的聯想ヲスルコトガ解法ノ秘訣デアル.



(1) 一切線! ト呼ブトキデ半徑ト直角! ト答ヘル, 從ツテ直角ガ出來ルコトヲ思フ.

(2) 二切圓! ト呼ンダラ共通切線ガ出來ルゾト受ケル.

(3) 又中心線上ニ切點ガアルコトヲ應ヘル.

(4) 一切線ヲ (1) トシテ面白クナイトキハ, 弦トナス隣弓形角ト高唱スル.

(5) 半徑ノ長サノアルトキ (3) ト一緒ニ切點ヲ基トシテ半徑和, 半徑差.

(6) 切線自乘ト割線分ノ積トソノ逆.

以上ノ外ニ二切線ト云ウタラ 3 ノ(12), 4 ノ(6) ヲ思ヒ出シ尙直角ガ二ツ出來ルコト, 從ツテ一點, 二切點, 中心ハ圓內四邊形ヲ成スコトヲ手段ニ用フ.

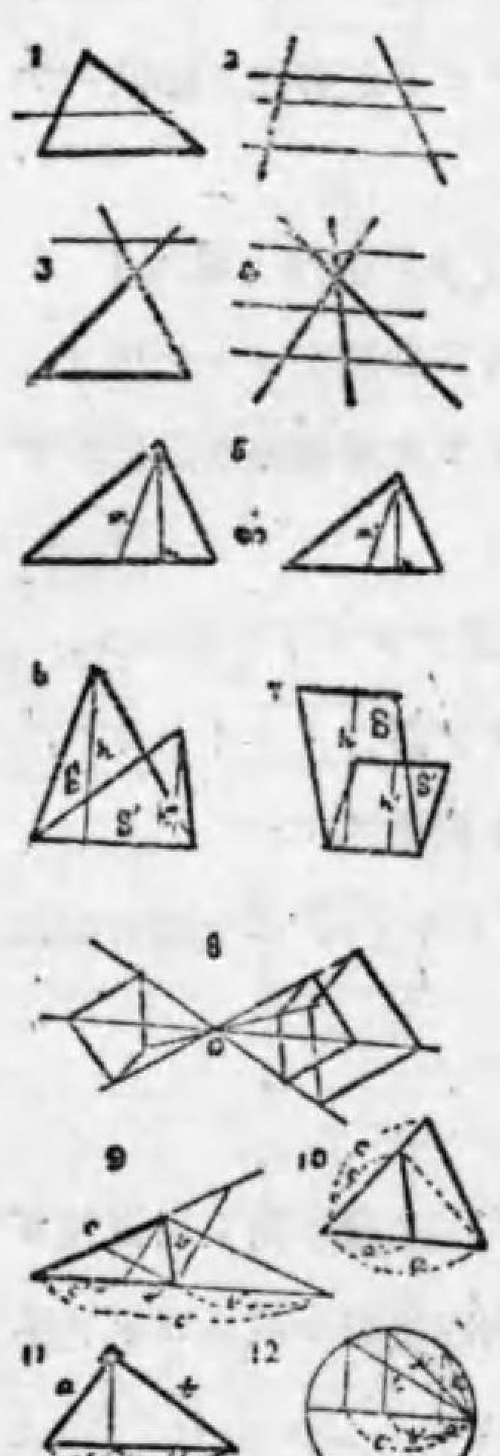
7. 比 例

比例ハ殆ド總テノ場合ニ手段ニ使ハレルモノデ $a:b=c:d$ ガアツタラ代數ノ樣ニ左 $=k$ ハ用ヒナイデ $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ ヲ用ヒ，圖形上ニハ相似形トシテ出テ來ル.

$a:b=c:d$ カラ $ad=bc$

$a:b=b:c$ カラ $b^2=ac$

トシテ面積ニナル，普通ハ此ノ逆デ $ad=bc$, $b^2=ac$ ノ形ガアツタラ比例式ニ化シテ相似形カ，切線ノ自乘ト割線トスル. ソシテ直線形又ハ圓ノ周角ノ相等ニ導クノデアル. 入試問題ノ主要部分ヲ占メテ居ル丈此ノ材料ハ大ニ昧ツテオカネバナラヌ.



(1), (3) ハ三角形ノ二邊ヲ平行線デ切ル場合デ內分ト外分トノ二ツトナル.

(2), (4) ハ平行線ガ二直線ヲ切リ取ル分ノ比例スルコトデ (1), (3) ノ一般化デアル.

(5) 相似形ノ場合中線，高サ，角ノ二等分線モ邊ノ比トナルコト. 面積ノ比ハ自乘比トナルコトヲ知ツテ居ルガヨイ.

(6) 等 (同) 底三角形ノ高サノ比ハ面積ノ比トナル.

(7) 等 (同) 底平行四邊形ノ高サノ比ト面積ノ比デ前項ト同ジ.

(8) 相似ノ中心ニ就イテデアル. 此デ特ニ注意シテオカネバナラヌコトハ，相似形デアルトイフ斷定ヲスルニハ三角形ノトキ丈ニ限ツテ二角 (當然三角トナル) ノ等シイコトデ成立スルガ，四邊形以上ノ多角形ハ角ノ相當ニ對應邊ノ比例スルコトヲ述ベテ初メテ相似形トナルモノヲ，ヨク角丈デ相似デアルト云ヒ濟ス者ガアル. 大ニイケナイ. 四邊形以上ノ相似ハ殆ド受驗ニハ用ガナイ.

(9) 三角形ノ一角ノ內外角ノ二等分線ガ對邊ヲソノ二夾邊比ニ內分又ハ外分スルモノデ調和列點ノ關係ニ引用セラル. (14高)

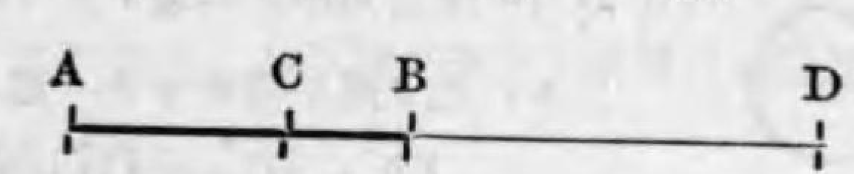
(10) 一角等シキ二ツノ三角形ノ比ハ夾邊ノ積ノ比トナル. 可ナリ使ハレル定理デアル.

(11) 直角三角形デ ($a^2:b^2=a':b'$ a',b' ハ a,b ノ正射影) ハ中々利用方面ガ多イ.

又 $a^2=a'(a'+b')$ $b^2=b'(a'+b')$ ハ又大ニ用ヒラレル. 諸子ハ此ヲ使フト甘イ考ヘガ展開スルノニ，用ヒナイデ不成功ニナツタコトハ多々アル筈デアル. 愛讀ノ諸子ハ後篇如何ニ之ヲ利用スルカヲ其度每ニ注意セラレヨ.

(12) 之ハ前項ヲ應用シタモノデ $a^2:b^2:c^2=a':b':b'$ デアル. 作圖題デ△ヲ底ニ平行ナ直線デ分割スルトキニ用フル位デアル.

調 和 列 點

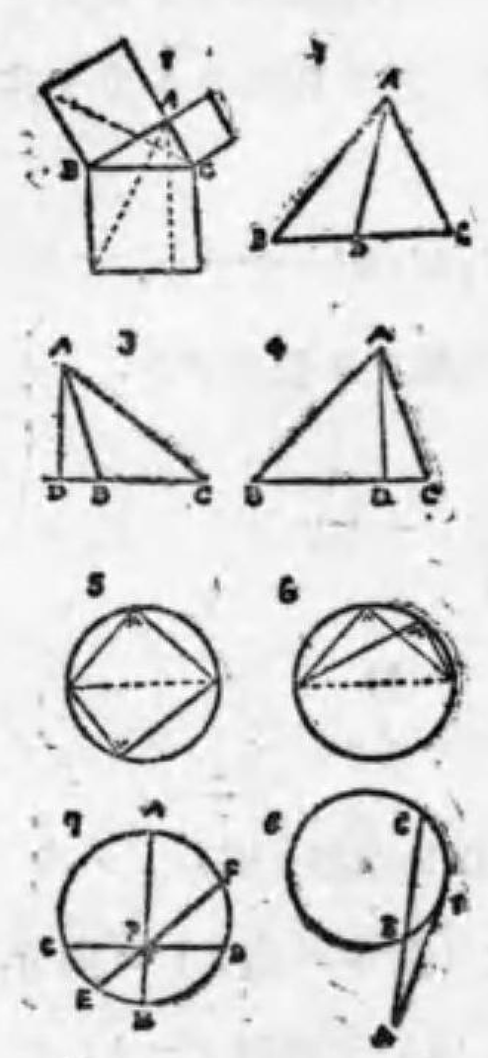


AB ヲ C, D デ定比ニ內分，外分シタトキ AC:BC=AD:BD ハ AC:AD=BC:BD トシテ CD ヲ B, A デ定比 (前トハ違フ) ニ內分，外分シタ點トナル. A, C, B, D ヲ調和列點ト云フ. (9) ヲ參照ノコト.

$\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}=\dfrac{EF}{GH}$　ノ形チ終結トスル場合ノ逆進法ハ二ツノ三角形チ睨ム．此ノ二ツノ三角形ハ大抵複雑シタ圖形中ニ隠レテ居ルモノデアル．ソレチ探シ出ス，ソレニハ $\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}$ ノ AB, CD チ邊トスルモノデ EF, GH ニ線ノアルモノチトリ，同ジ二ツノ三角形ノ面積ノ比チ一方カラハ相似形トシテ對應邊ノ自乘比トシ，他方カラハ (6) ノ如クニ同等底トシテ高サノ比又ハ等高トシテ底比ニ導イテ即チ EF:GH チ作ツテ成立サセルモノデアル．

8. 面　　　積

大多數ノ面積ハ前項ニ含マレルガ又純粋ノモアルカラ之チ纏メテ直角類チ總合シマス．



(1)　オナジミノピタゴラス君，(3)，(4) ハ (1) チ利用シテ鋭角，鈍角ノ對邊上ノ正方形チ表ス DB（チ正射影トシテ）之ハ單獨ニハ用チナサナイ (2) ノ下役デアル．

(2)　大ニ大ニ重要定理デアル．c^2+b^2 ノ形ガ出テピタゴラス君ノ引用ガ出來ナイトキニハ a, b ガ三角形ノ二邊トナリ得ルカ否カチ檢スル．△チ成シ得ルトキハ電光石火

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$$

チ持チ出スモノデアル．

(5)，(6)　直角ガアツテモピタゴラス君ニ引キツケラレナイトキハ必ズ半圓角トスル，直徑チ浮ベル，二ツノ直角ガアツタラ必ズ必ズ環座即チ圓座チ思フ，即チ圓内

四邊形ガ出來ル，ソレカラ周角ガ出來テ角ノ移動チ行フコトニスル．

(7)　圓内ノ一點ト來タラそら來たト受ケテ二弦ノ分ノ積ガ等シイ！ト返ス．直徑ニ直角ナ弦ト來タラ　$ab=c^2$　ノ形ガ出來ル．

(8)　圓外ノ一點ト來タラ切線，割線ノ面積關係デ前項ト同ジデ $ab=c^2$ ノ形チ作ル．之ハ作圖ニモ大ニ利用セラレルモノデアル．

$l^2=\cdots\cdots$ ノ形

ニハ $l=a+b$ チ考ヘテ $l^2=l(a+b)$ トシ $la+lb$ トシテ la, lb ノノ形ハ相似三角形デ他ノ cd, ef ノ積ニ移ス．

$$\overline{AD}^2=AD(AE+ED)$$
$$=AD\cdot AE+AD\cdot ED$$

トスル材料ハ思ヒ出セルカ，必ズぶつかつたコトガアル筈デアル．之チ $l^2=a^2+b^2+2ab$ トスルコトモナイデハナイガ，之ハ役立ハ少イ．

以上圖形チ以テ假設終結ノ展開ノ一般分類法チ述ベタ．一々證明ハシテナイガ諸子ハ圖チ見タラ「之レハ斯樣ナ問題デ斯ウシサヘスレバ證明出來ル」トイフコトチすらすら浮バセル樣ニシテオカネバナラヌ．道ハ近キニアリデス，千里ノ道モ一歩ヨリスベキモノデアル．此ノ基礎的知識チ確實ニシテ，ソノ上電光石火ノ言葉ノ樣ニ諸君ノ頭ニ上ノ基本事項ガ日夜浮ンデ居ルト云フ樣ニシテ下サイ．以下篇チ逐ツテ練習スル際的確ニ解法ノ力ガしつかりツイテ行キマス．

以上ノ圖ハ時々復習的ニ一瞥チ怠ラズ，自分ガ出遇シ乍ラ當然思ヒ浮ベラレナカツタノニハ特ニ度々ノ睨ミチシテ下サイ．

複雑ナ圖　ニ對シテハ假設事項ガ幾ツモ込ミ入ツテ表レルノデアルカ

ラ，之ヲ整理スルノニ困難ナモノデアル，ソノ時ハ，其ノ部分丈ヲひきぬいて別ニ作圖シテソノ事項ノ展開ヲスル，本書ノ一大特徴トシテハ此ノ補題的ニ別ノ補圖ヲ多ク提供シ，總合的ト同時ニ**分解的**ノ指導ヲスルコトガ從來ノ類書ニナイ一革命的ノ改良デアル．學ブ士ハヨク此ノ消息ヲ體シテ研究セラレタイ．尙ホ注意シタイコト，指導シタイコトガ澤山アル．答案作製上大ニ警告ヲ與ヘネバナラヌコトモ多クアル，ケレド之等ハ主題ヲこなす時ニ具體事項ヲ上ゲテ導クコトニシテ以上ヲ以テ緒言トスル．

第二篇

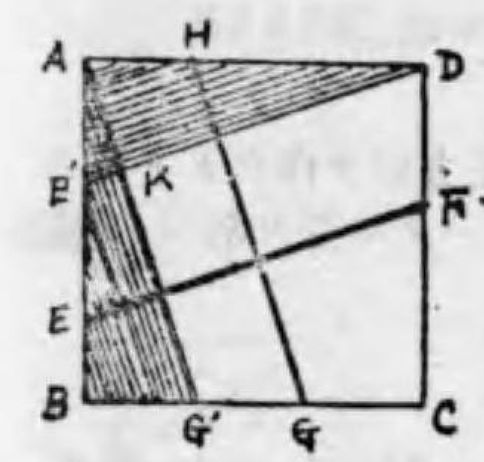
直線形

1. 線分ト角トノ相等

緒論デ上ゲタ相等ノ證明ニ要スル**基本圖形**ヲ利用シテ次ノ主題ヲヨクこなしテ下サイ．本編デ用フル**平行移働法**；**半分移動法**；**角ノ轉回法**ノ發揮振リト，ソノ利用ノ環境トヲ系統的ニ味ツテ下サイ．

【主題】 1. 正方形 ABCD ノ邊 AB, CD 上ニ夫々任意ノ點 E, F ヲ設ケテ之ヲ結ビ，其ノ直線ニ垂線ヲ引キテ BC, DA 或ハ其ノ延長トノ交ヲ夫々 G, H トセバ GH＝EF ナリ．

着眼 E, F ガ任意點デアルコトカラ本問ハ「直交二直線ノ正方形內ニアル部分ハ等シイ」ト云フコトニナル．ソレデ一度ソノ方向ヲ定メタラドコニ動イテモ等シイコトニナル．EF ヲソノマヽノ方向デずらしテ DE′ ニ持チ行キ，GH ヲ同樣ニ G′A ニ移動サセルト，比ベルモノハ $\triangle ADE'$, ABG' ノ一邊トナル．



答案 證 $DE' \parallel EF$, $AG' \parallel HG$ トシ，DE', AG' ノ交點ヲ K トス．$DF \parallel EE'$, $AH \parallel GG'$（假設）ナル故 $DFEE'$, $AHGG'$ ハ ▱

$\therefore\ DE'=EF \quad AG'=HG$

$\triangle ADE'$, $\triangle ABG'$ ニ於テ

$$\begin{cases} AD=AB \quad \angle A=\angle B=\angle R \\ \angle ADE'=\angle BAG' \ \text{〔∵ AK⊥DE′ ニシテ ∠AE′K ノ餘角トナル〕} \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ADE' \equiv \triangle ABG'$ 從ツテ $DE'=AG'$ 即チ $GH=EF$

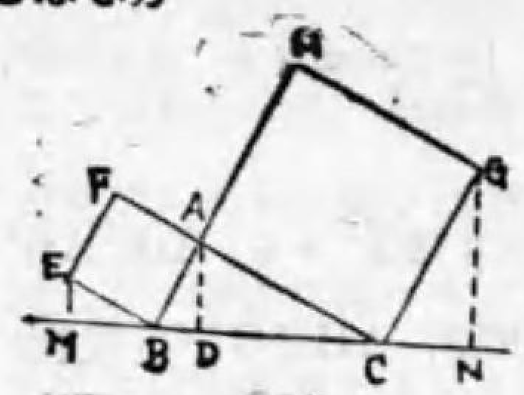
要領 平行線ガアル處ヘ，比較シタイ線分ノ入リ込ンダトキハ平行移動ヲスルコトガ線分比較ノ重要事項デアル．

研究 二ツノ三角形ノ三邊ガ直交スルトキハ三ツノ角ガ夫々等シクナル．ソレデ相似形ニナルノガ一般デアル．此ノトキドレデモヨイ相應邊ガ一ツ等シイトキハ大キサガ決定シテ全等形トナル．
之ヲ少シ變ヘテ直交デナクテ平行ニシテモ，或角度（例ヘバ 30°, 60°）丈傾ケテモ同ジデアル．

【試練】 1. 直角三角形 ABC ノ直角ノ二邊 AB, AC ノ上ニ其ノ外方ニ正方形 ABEF, ACGH ヲ作リ，E, G ヨリ斜邊 BC ノ延長ニ垂線 EM, GN ヲ下ストキハ

BM=CN ナリ.

こなし方



AD⊥BC トシテ △ABD≡△BEM

△ADC≡△CNG カラ AD ヲ仲媒トシテ

BM=AD=CN ヲ考ヘル.

ツマリ F, H ハ不要デ, 正方形ヲ作ツタトシテおどかしテアル.

【試練】 2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテ生ズル四邊形ハ平行四邊形ニシテ其ノ周ハ原四邊形ノ對角線ノ和ニ等シ.

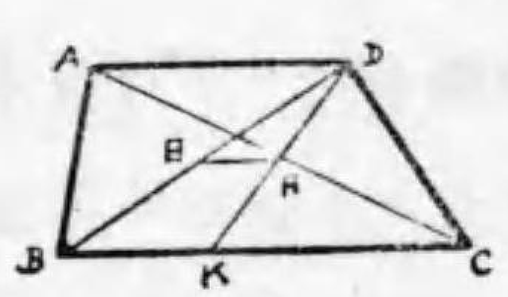
(神商•海經)

こなし方 △ノ二邊ノ中點線トシテ線分ノ半分移動ト方向ノ平行ナルコトヲ用ソ.

【主題】 2. 梯形ノ對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ平行邊ニ平行ニシテ且ツ其ノ差ノ半分ナリ.

(13海軍)

着眼 平行線, 中點, 此ノ二ツヲ聯結スルト△ノ二邊中點線ノ關係ニナル.



答案 **假設** 四邊形 ABCD ニテ AD∥BC,

E,F ヲ BD, AC ノ中點トスレバ

終結 EF∥BC, EF=$\frac{1}{2}$(BC−AD)

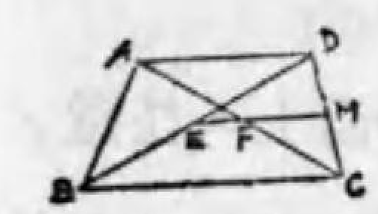
證 DF ヲ結ビ延長シテ BC ト K ニ交ラシム.

△AFD≡△CFK

〔∵ AF=FC, 此ノ兩底角ハ對頂角ト錯角トヨリ等シ〕

i. DF=FK	ii. AD=CK
E, F ハ △DBK ノ二邊	∴ BK=BC−AD
ノ中點ナル故	△DBK ヨリ EF=$\frac{1}{2}$BK
EF∥BK 即チ EF∥BC	∴ EF=$\frac{1}{2}$(BC−AD)

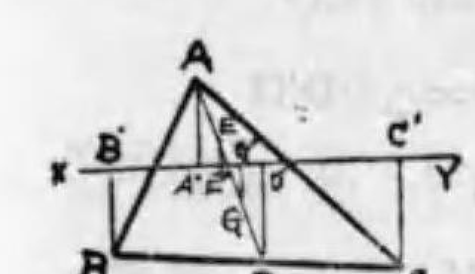
研究 一點ヲ過ツテ一定直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル. トイフ公理ヲ用フルト CD ノ中點ヲ M トシ, △BAD ノ二邊中點ヨリ ME∥AD, △ABC ノ二邊中點ヨリ MF∥BC 然ルニ AD∥BC デアルカラ ME, MF ハ俱ニ BC ニ平行トナツテ MEF ガ一直線ヲナスコトニスル. 之ハ三點在一直線ノ證明法ノ一ツデアル.



MF−ME=$\frac{1}{2}$BC−$\frac{1}{2}$AD ∴ EF=$\frac{1}{2}$(BC−AD)

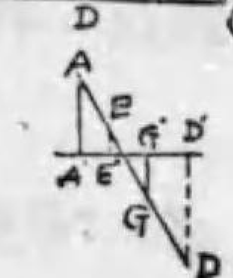
【試練】 3. △ABC ノ截線 XY ニ A, B, C, 及ビ重心 G ヨリ垂線ヲ下シ其ノ足ヲ A′, B′, C′, G′ トスレバ B, C ガ XY ノ同側ニアルトキ BB′+CC′−AA′=3GG′

こなし方 中線ヲ AD トシ, AD ノ三等分點ヲ E, G トシテ EE′ ヲ XY ニ下ス垂線トシ, 六ツノ垂線ヲ對應名 a, b, c, g, d, e トシテ



$b+c=2d$

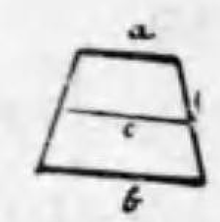
$$\left.\begin{array}{l} a-g=2e \\ d-e=2g \end{array}\right\}\text{之ヲ前問ノ應用トシテ作ル.}$$



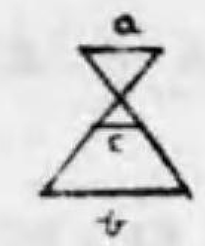
$b+c-a=2d-(2e+g)=2d-2e-g$

$=2(d-e)-g=4g-g=3g$

エキス 平行線ガ出來テ線分ノ長サヲ比ベル場合ハ



$a+b=2c$



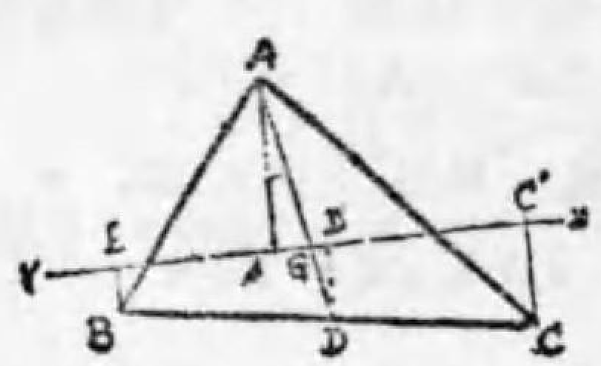
$b-a=2c$

之ト三角形ノ二邊中點線ヲ使フコトニナル.

【主題】 3. 三角形ノ重心ヲ過ギリ其ノ平面上ニ任意ノ直線ヲ引キ其ノ同ジ側ニアル二ツノ頂點ヨリ此ノ直線ヘ下セル垂線ノ和ハ反對ノ側ニアル頂點ヨリ同ジ直線ニ下セル垂線ニ等シキコトヲ證セヨ. (山商・14大分商・宮農)

要領 重心ハ中線ガ 2:1 ニ内分セラレルコト, ソレニ中線ノ足ガ一邊ノ中點ナルコトヲ使フト 11頁(13)圖即チ又上ノ二圖ガ思ヒ出サレル.

答案 特題 中線 AD ナル △ABC ニ於テ頂點ヨリ BB′, CC′, AA′ ヲ重心 G ヲ過ギル任意ノ直線 XY ニ下ス垂線トスレバ AA′=BB′+CC′



證 梯形 B′BCC′ ニ於テ DD′⊥XY トセバ　2DD′=BB′+CC′

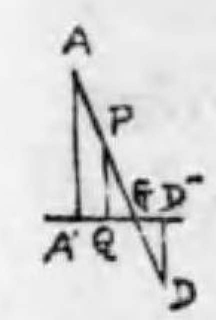
而シテ △AA′G∽△DD′G

∴ AA′:DD′=AG:GD=2:1……………(A)

∴ 2DD′=AA′　　∴ BB′+CC′=AA′

研究 i. 本問ハ命辭丈デアツテ指定ノ文字符號ガナイ. ソレデ答案ヲ認メルニハ所要ノ用字ノ說明ヲ必要トスルカラ答案ノ様ニ特述トカ又ハ假設, 終結トカヲ明記セネバナラヌコト前主題ト同ジ. ii. 垂線ノ代リニ或定直線ニ平行ナル三直線ヲ三頂ヲ過ギツテ引クモ同様.

批評 受驗答案トシテハ是非 (A) ノ様ニシテ下サイ, ソノ方ガ早イカラ.



多クノ答案ニハ AG, A′G ノ中點ヲ作ツテ P, Q トシ PQ∥A′A ト PG=GD トカラ △PQG≡△GDD′ ヲ證シテ DD′=PQ トシ, PQ=$\frac{1}{2}$AA′ ナル故 2DD′=AA′ トスル. しかし之ハ手數ガカヽルカラ避ケタガヨイ.

【試練】 4. △ABC ノ截線 XY ニ下ス垂線 AA′, BB′, CC′ ニ於テ BB′+CC′=AA′ ナルトキハ XY ハ重心 G ヲ過ギル. (7高・14帝)

こなし方 中線 AD ヲ作ツテ AA′=2DD′ ヨリ AD ノ $\frac{2}{3}$ ノ點ヲ通過スルコトヲ證ス.

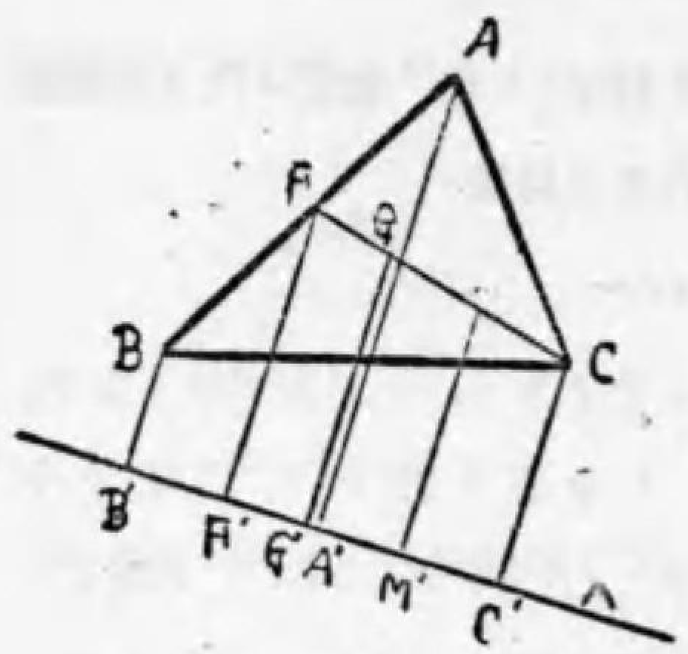
【試練】 5. ▱ABCD ノ四角頂ヨリ形外ノ一直線ニ到ル平行線 AA′, BB′, CC′, DD′ ヲ作レバ

AA′+CC′=BB′+DD′ (海經)

【試練】 6. G ヲ △ABC ノ重心トシ, A, B, C, G ヨリ形外ノ直線 XY ニ平行線 AA′, BB′, CC′, GG′ ヲ作レバ

AA′+BB′+CC′=3GG′ (商船)

こなし方 中線 CF ヲ作リ M ヲ CG ノ中點トシテ CF ヲ F,G デ三等分スルコトガ G ニ關スル展開デ, 平行線ニ準ジテ FF′, MM′ ヲ作ツテ



見ル.

11頁(13)圖ニ依ルコトハ何レモ前問ト同ジデ, ソノ適用ハ

BB'A'A, GG'M'M, FF'M'M

ノ三ツヲ捕ヘル. 解者モ採點者モ一見シテ明ナノハ AA', BB',……ノ二文字ノ表示ハ運算用トシテハ不便デアルカラ小文字ニシテ a, b, c, f, m, g トスルノガ得策デアル.

$c+g=2m,\cdots\cdots(1)\qquad m+f=2g,\cdots\cdots(2)\qquad b+a=2f\cdots\cdots(3)$

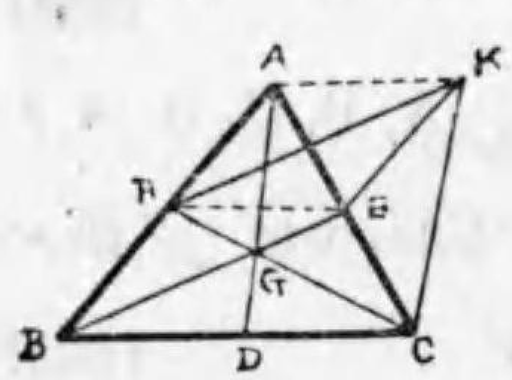
此ノ三式カラ m ト f トヲ消去シタラ他ノ關係ハ出テ來ソウナモノト云フ見當ヲツケル. (2)2 = (1), (3) ヲ代入スル

$a+g+b+c=4g\qquad\therefore\ a+b+c=3g$

【主題】 4. 三角形ノ三中線ハ三角形ヲ決定ス.

著眼 三角形ヲ決定ス. ト云フ言葉ヲ吟味スルト三ツノ線分デ三角形ヲ作リ得ルトイフコトデアル. ソノ三ツノ線分ノ與ヘラレル長サニハ制限ガアル. 即チドノ一ツモ他ノ二ツノ和ヨリ小デ差ヨリ大ト云フコトデアル. 三角形ノ三中線ニ於テ此ノ關係ノ成立スルカ否カヲ見ルコトニナル.

答案 **假設** AD, BE, CF ヲ △ABC ノ三中線トス.



終結 AD, BE, CF ハ△ヲ決定ス.

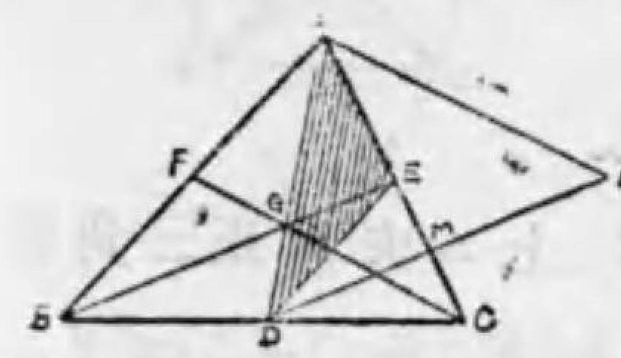
證 BE, BF ヲ二隣邊トスル ▱FBEK ヲ作リ, KC ヲ結ベ KE⫫AF ナリ.

∴ AFEK ハ▱ニシテ AK⫫FE⫫$\frac{1}{2}$BC

∴ AK⫫CD　∴ ADCK ハ▱　∴ CK=AD

△FCK ノ FK, CK ハ夫々 BE, A∪ ニ等シク, 三中線ハ△ヲ決定ス.

研究 本問ハ AD, BE, CF ノ中ノ一ツ丈原位置ニ止メテ他ノ二ツヲ平行移動ヲシタ. ソレデ AD ヲ原位置ニ止メルト次ノ移動ニナル.

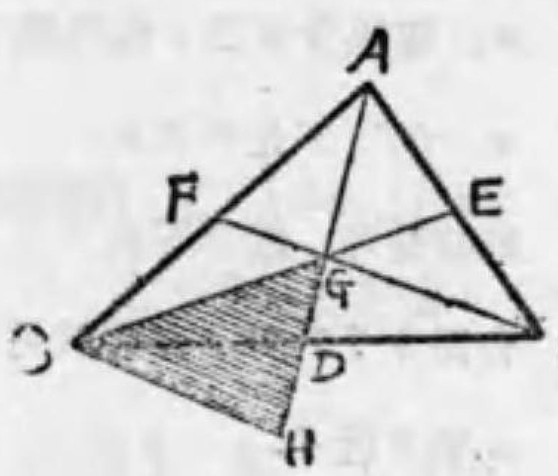


AH⫫CF ヲ作ルト CH⫫AF 即チ CH⫫BF⫫DE　∴ EDCH ハ▱

∴ EH⫫CD⫫BD　∴ EBDH ハ▱　∴ BE=DH

トシテ ADH ガ決定ノ三角形トナル.

併シ AD, BE, CF デ決定出來ルコトヲ證スルノニ各其ノ三分ノ二宛ガ△ヲ決定スルナラ相似關係デ之ヲ$\frac{3}{2}$倍ノ廓大ヲサヘスレバ成立スルカラ, 此考ヘデスルト左圖ニ依ツテ次ノ證トナル.



GD=DH ニ延長スルト GBHC ハ▱

∴ BH=CG デアツテ △BGH ノ三邊ハ三中線ノ三分ノ二トナル.

要領 何レノ方法ヲ執ルモ三邊トナルベキ線分ノ平行移動ヲスル.

【應用】 三中線ヲ知ツテ三角形ヲ作レ.

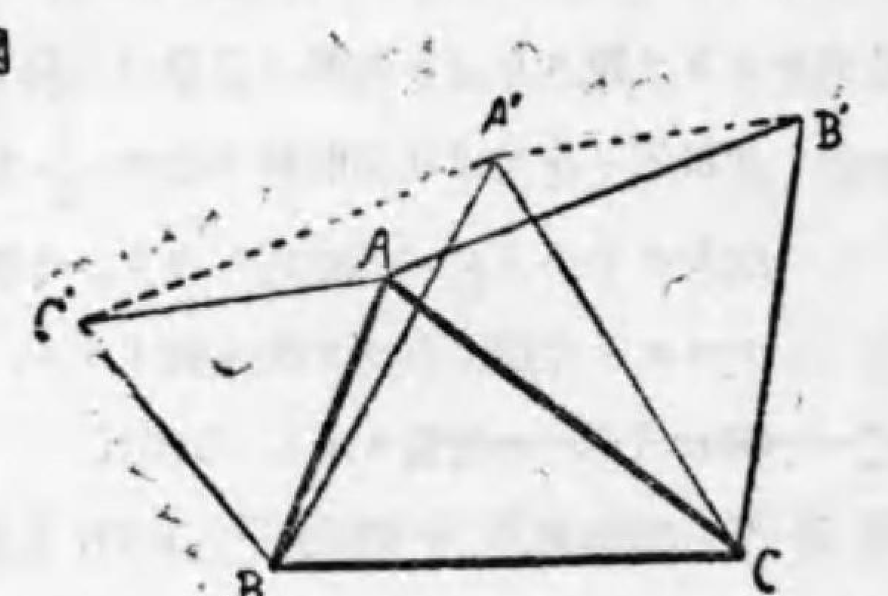
こなし方 上ノ何レノ圖ヲトルモヨロシイガ第二圖デ AM ヲ中線トシテ MC=$\frac{1}{3}$AM トシテ C ヲ決定シ, CD=DB デ B ヲ決定スル方ガヨロシイ. ツマリ G ナル重心ヲ使フガ便デアル.

【應用】 三角形トソノ三中線ニヨル三角形ノ面積ノ比ハ $\frac{4}{3}$ ナリ.

こなし方　第二圖デ　AM : AC　ノ比デ三中線三角形ト原三角形ノ半分ノ比ヲ作ッテ　3 : 4

【主題】 5.　$\triangle ABC$　ノ邊　AB, AC　上ニ夫々正三角形 ABC′, B′CA　ヲ原三角形ノ外方ニ作リ，BC　ヲ一邊トシテ　A　ノ側ニ正三角形　A′BC　ヲ作ルトキハ　$AC'=A'B'$, $AB'=C'A'$　ナルコトヲ證セヨ．　(15京商)

着眼



假設整理正三角形ガ三ツアル．等線分ガ三ツ宛三組アル．60°　ガ九ツアル．
終結整理　線分等長ヲ△ノ合同カラスルノガ假設利用ニ緣ガ近イ．

答案 ●　$\triangle ABC$, $\triangle C'BA'$　ニ於テ

$AB=BC'$,　$BC=BA'$,　$\angle ABC=\angle C'BA'$　〔∵　$=60°-\angle ABA'$〕

∴　$\triangle ABC\equiv\triangle C'BA'$　從ッテ　$AC=A'C'$　而シテ　$AC=AB'$

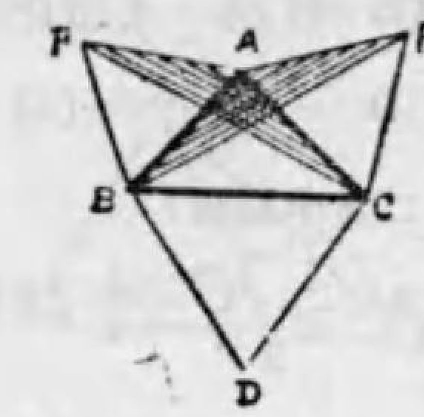
∴　$AB'=A'C'$　同樣ニ二邊夾角ノ等シキコトヨリ

$\triangle ABC\equiv\triangle B'A'C$　　$AC'=A'B'$

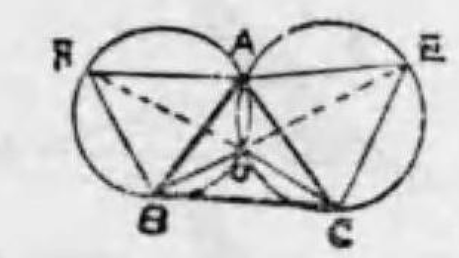
【試練】 7.　$\triangle ABC$　ノ各邊ヲ一邊トシ外方ニ正三角形 BCD, CAE, ABF　ヲ作ルトキ　$AD=BE=CF$　ナリ．

(2海經・3東工・5神商)

こなし方　前主題同樣ニ二邊夾角ノ等シイコトヲ捕ヘル．



研究　本問ハ又作ラレタ正三角形ノ外接圓ガ一點デ交ルコト及ビ　AD, BE, CF　ノ一點會合ヲ證スルコトニ變更スルコトガ出來ル．三直線ガ一點ヲ共有スルコトハ中々ムツカシイ證明ヲ要スルガ今ソノ一例トシテヨク知ッテオカネバナラヌ一ツノ型ヲ考ヘナサイ．ABF, ACE　圓ヲ　O　デ交ラセル



$\angle AOB+\angle AOC=240°$　ニ目ヲツケル．ソシテ　$\angle FOC+\angle BDC=2\angle R$　ヲ證スル．
$\angle BOA+\angle AOE=2\angle R$カラ　BE　ガ　O　ヲ通ルコト，同樣ニ　CE, AD　モ　O　ヲ通ルコトニスル．

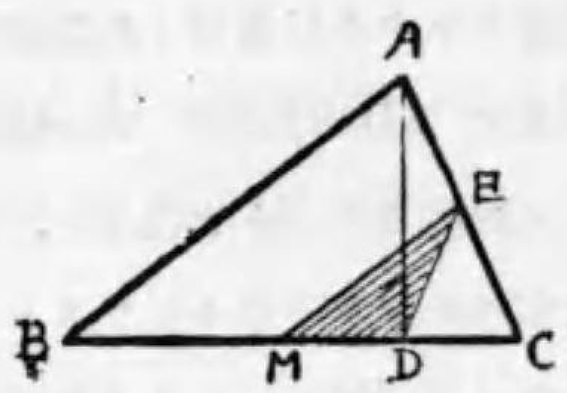
エキス　$\angle FAC=\angle BAE$　ヲ證シタガ，60°　ノ轉回デ重ル．13頁(2)ニ當ル．之ヲ角ノ轉回法トイフ．

【主題】 6.　$\triangle ABC$　ニ於テ　$\angle C=2\angle B$　ニシテ　AD　ヲ高サトシ，M　ヲ　BC　ノ中點トスレバ　$DM=\frac{1}{2}AC$　ナリ．

(陸士)

着眼　$DM=\frac{1}{2}AC$　ノ形ハ　AC　ノ半分ヲドコカニ移シテソレト　DM　ト比ベルカ，DM　ニ等シイモノヲドコカニ作ッテソレガ　AC　ノ半分ニナルコトヲ探スカ，又　2DM　ヲ作ッテ　AC　ニ等シクナルコトヲ證スルノデアル．ソウ方針ヲ分類シテ假設ヲ整理スルト　M　ガ　BC　ノ中點デアルコトハ△ノ邊ノ中點ノ展開ヲ考ヘ　　14頁ノ(4)圖ニ依ルベシトシ，暫ク　AD　カラ直角三角形ヲ利用スルカ，垂直二等分線ヲ作ルカデアル．
$\angle C=2\angle B$　ヲ預ル．

答案 ●　E　ヲ　AC　ノ中點トセバ　$\angle R\triangle$　ノ斜邊ノ中點トナル．



$\therefore\ ED=\frac{1}{2}AC\cdots\cdots(1)$

$\angle EDC=\angle ECD\cdots\cdots(2)$

$ME \parallel AB$ (△ノ二邊中點線)

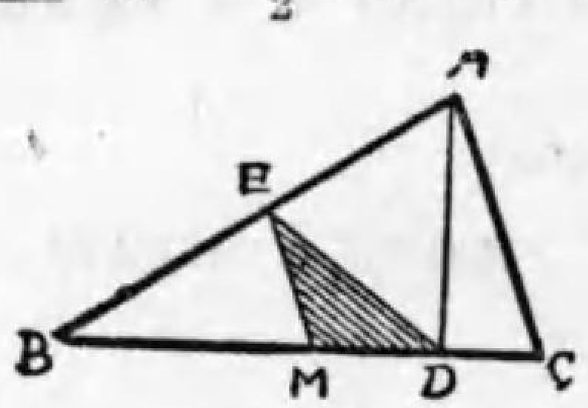
$\therefore\ \angle EMD=\angle B=\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle EDC$

△EMD ヨリ

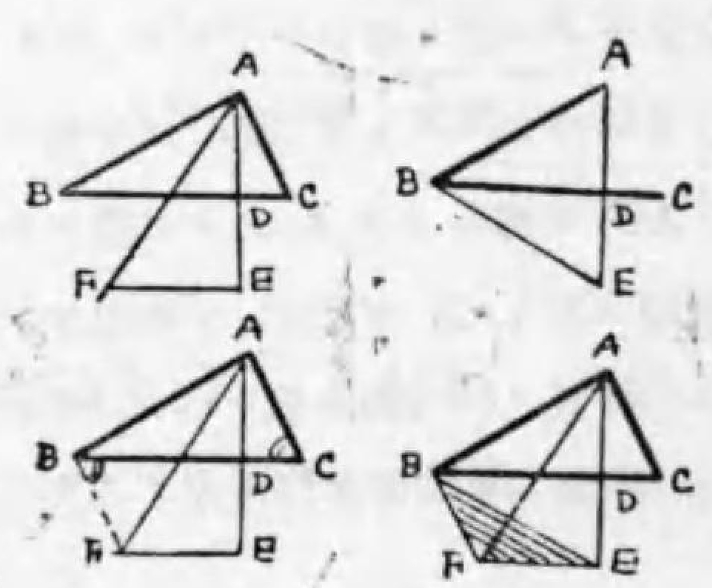
$\angle MED=\angle EDC-\angle EMD=\angle EMD$

$\therefore\ DM=DE \qquad \therefore\ DM=\frac{1}{2}AC$

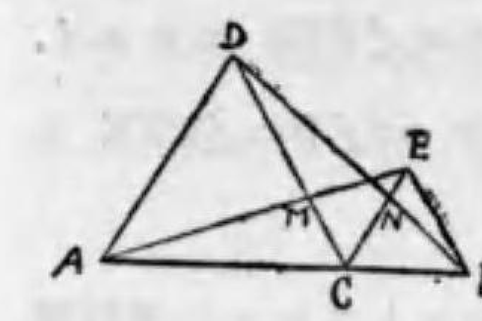
研究 上ハ $\frac{1}{2}$AC ヲ考ヘルノニ ∠R△ ヲ利用シタガ AB ノ中點 E ヲ利用スルト $\frac{1}{2}$AC ハ EM ニ移ル. EM=MD ヲ云フコトニスルト △EMD デ ∠MED=∠MDE ニナルコトヲ考ヘル. 2∠B=∠C ハ ∠B=$\frac{1}{2}$∠EMB (EM ∥ AC) ニ展開サレ, ∠D=∠R ハ △ABD ガ ∠R△ デ, E ガ斜邊ノ中點デアルコトニ着目シタラ ∠B=∠EDM ニ移リ. 上ト同樣ニ △EMD ノ外角ト内角關係ニナル.



シカシ DM ノ二倍ヲ作ル方カラ考ヘルト, M ヲ利用シテ AD=DE, AM=MF トシテ △AEF カラ EF=2DM トナル. 玆デ EF=AC ヲ證スル. ソレニハ AM=MF ハ中線ノ2倍ノ延長デデルカラ 14頁 (4) 圖ヲ適用シテ ∠C ヲ ∠CBF ニ移スト同時ニ AC ガ BF ニ移ル. ソコデ $\frac{1}{2}$ ∠CBF ヲ作ッテ ∠B ト比スルコトニスル.



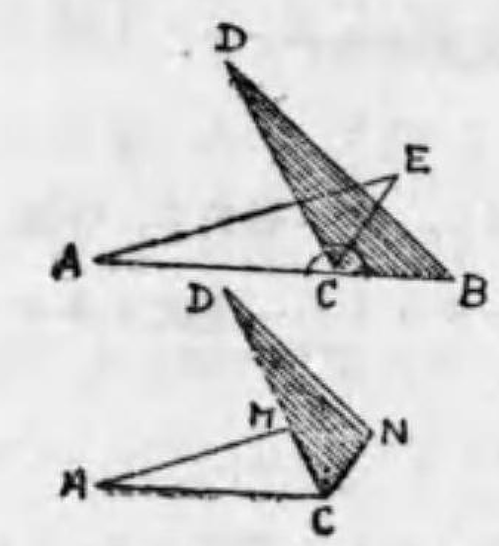
【應用】 線分 AB 上ニ一點 C ヲ取リ, AC, BC ヲ底邊トシ, 正三角形 DAC, EBC ヲ AB ノ同側ニ作リ, AE ト CD トノ交點ヲ M; BD ト CE トノ交點ヲ N トセバ CM=CN ナリ.



こなし方 C 點デ 60° ノ角ノ轉廻法ヲ行フ.

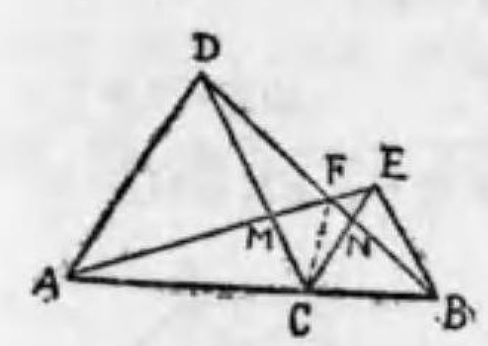
△ACE≡△DCB 〔AC=DC, CE=CB

∠ACE=120°=∠DCB〕

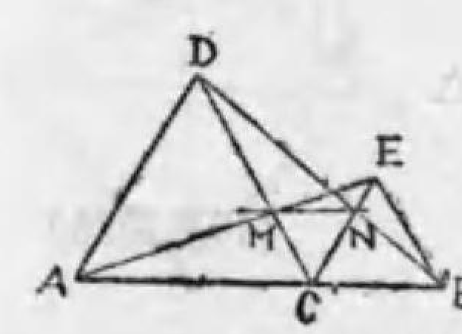


カラシテ ∠CAE=∠CDB……(1) ガ得ラレル. 次ハ △ACM≡△DCN ガ考ヘラレル. 之ハ AC=DC ノ兩底角ガ等シイカラデアル. 夫レデ **CM=CN**

研究 上ノ證ハ又次ノ樣ニモ考ヘラレルカラ上ノ (1) カラ CF ヲ弦トシテ D, A, C, F ハ圓座, 同ジク F, C, B, E モ亦圓座之レカラ ∠AFC=60°=∠BFC



∠MFN=120°, ∠MCN=60° 又 F, M, C, N ガ圓座ソシテ MC ト NC トハ 60° ヲ周角ニスル弦トシテ等シクナル. 之ヲ比例デスルト簡單イ.



AB : AC=BE : CM………(1)

AB : BC=AD : CN

即チ AB : AD=BC : CN………(2)

AC=AD, BE=BC ヲ見ルト上ノ (1), (2) ハ順ニ第三項マデ等シクテ **CM=CN**

併シ MN ∥ AB ヲ考ヘル人モアル. ソシテ ∠CMN=∠CNM ヲ 60° ニシテニ CM=CN ニシタイト云フノデアル.

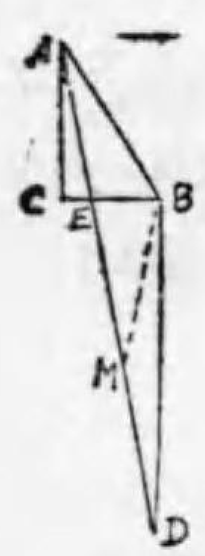
ソレニハ $\frac{ME}{AM}=\frac{CE}{AD}=\frac{BE}{CD}=\frac{NE}{CN}$ $\therefore\ \frac{ME}{AM}=\frac{NE}{CN}$ トナッテ MN ∥ AC

A,E ハ BC ヲ軸ニシタ對稱點デアルコトカラ $\angle B=\angle DBE$ トスルト $\angle FBE=\angle B$ トナル. $BF=FE$ ヲ云フタメ $\angle FBE=\angle FEB$ ニシタイ. トコロガ $BC \parallel EF$ カラ $\angle FEB=\angle EBD$ デアツテ $=\angle B=\angle FBE$ トナル.

工夫 何レノ方法ヲトルモ M ヲ△ノ二邊中點ノ一ツトスルコト,平行線ガ出來ルコト. 等角ニ導クコトハ何處カデ出會フ展開條件デアル.

要領 ∠R ガアルトキハ 直角△ ガ必ズ出來テ居ル. 之ニ等角カ, 等線分カヲ作リタイトキハ 直角△ ノ斜邊ノ中點ヲ捕ヘルコトハ一應試ミネバナラヌコトデアル.

【試練】 8. 直角三角形 ABC (C 角ハ直角) ニテ A ヨリ AD ヲ引キ BC ヲ E ニテ截ラシメ, 且ツ $DE=2AB$ $AC \parallel BD$ナラバ $\angle DAC=\frac{1}{3}\angle BAC$ ナリ. (5高・13金工)



こなし方 二倍ト ∠R トヲ運ネテ考ヘ, $EM=MD$ ヲ ∠R△ ノ斜邊上ニトル,

$EM=MD=MB=AB$,

△BMD, △ABM ガ二等邊△

$\angle BMA=2\angle MDB=\angle BAE$,

之ニ $AC \parallel BD$ ヲ持込ム. (15高岡商)

【試練】 9. A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ノ外方ニ正方形 ABDE, BCFG, CAHK ヲ作ルトキハ AG, CD ハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. (15旅工)

こなし方 AG, CD ガ M デ交ルト $\triangle ABG \equiv \triangle DBC$

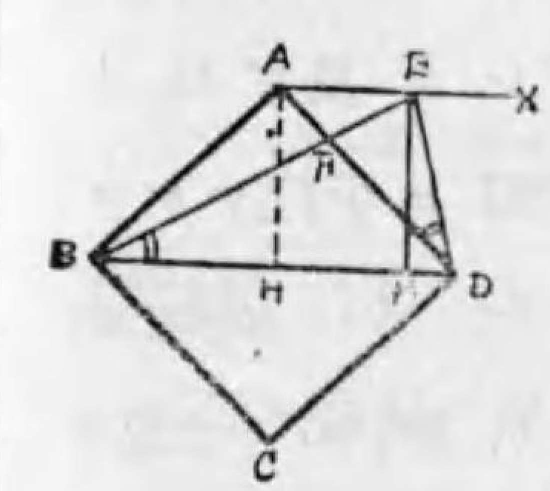
〔∵ $AB=BD$, $BG=BC$, $\angle ABG=\angle DGC$〕 ∴ $\angle BAG=\angle BDC$

∴ AMBD ハ一圓ヲ成シ $\angle ABD=\angle R=\angle AMD$

【主題】 7. 正方形 ABCD ノ一頂點 A ヨリ對角線 BD ニ平行線 AX ヲ作リ, ソノ上ニ E ヲトリテ $BE=BD$ ナラシメ BE ト AD トヲ F ニ交ラシメバ $DE=DF$ ナリ.

着眼 正方形ヲ展開シテ $AB=AD$, $\angle BAD=\angle R$, $\angle ABD=\angle ADB=45°$, $BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AD$ デアルコト, $AX \parallel BD$ カラ平行距離ノ等シイコト, ソノ距離ハ $AH \perp BD$ トスル, AH ハ對角線ノ半分デ $\frac{1}{\sqrt{2}}AB$ デアルコト, BD ノ半分デアルコトデアル. ソシテ二等邊三角形ガ 三ツ ABD, BDE, DEF ガ出來ルコトニ目ヲ注グ.

答案 ❶ A,E ヨリ BD ニ垂線 AH, EK ヲ下ス.



$AH=EK=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BE$ ナリ.

△BEK ニ於テ $\angle K=\angle R$ ニシテ斜邊 BE ノ半分ガ一邊 EK ナルヲ以テ

$\angle BEK=60°$ 〔正△ノ高サニ依ル半分〕

$\angle EBD=30°$

而シテ $\angle BED=\angle BDE=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$

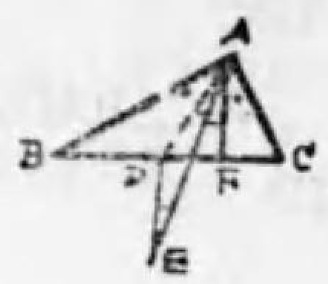
次ニ △BDF ノ外角トシテ $\angle EFD=\angle FBD+\angle FDB=30°+45°=75°$

∴ △DEF ニ於テ $\angle E=\angle F$ ∴ $DE=DF$

【試練】 10. 直角三角形 ABC ノ直角 A ノ二分線 AD ト斜邊ノ垂直二等分線トノ交リヲ E トセバ $DA=DE$ ナリ.

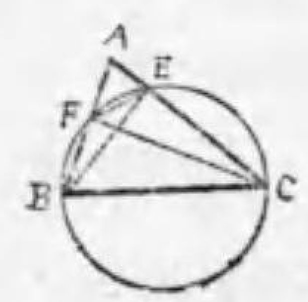
(15福商)

こなし方



AF⊥BC トスルト ∠BAF=∠C, 斜邊ノ中點ヨリ ∠C=∠DAC ヲ考ヘル.

【試練】 11. 三角形 ABC ノ B, C ヨリ對邊ニ下ス垂線ノ足 E, F ヲ結ブ線分ノ中點 M ト底ノ中點 O トヲ結ブ線分ハ EF ニ直交ス.

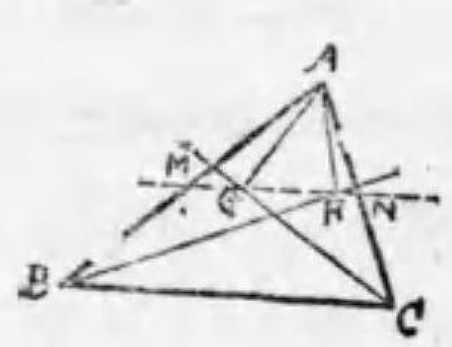


こなし方 圓ヲ考ヘルコトハ結構デ中心ト弦ノ中點トヲ結ブ直線トナル. シカシ圓ヲ使ハナイナラ, 斜邊ノ中點カラ △OEF ハ二等邊△トナッテ頂 O ト底ノ中點 M トヲ結ンダコトニナル.

【主題】 8. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ角 B 及ビ角 C ノ二等分線ニ下セル垂線ノ足ヲソレゾレ F 及ビ G トスレバ F ト G トヲ結ブ直線ハ底邊 BC ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

(14東師)

着眼 FG ∥ BC ヲ證スルノニハ ∠GFB=∠FBC カ, BF, CG ノ交點ガ同ジ比ニ内分スルコトヲ持ツテ來ル. 所ガ本問ノ假設ハ ∠AFB=∠R=∠AGC ガアル, ∠R ガ二ツアツテモ此ノ場合環座ハ不可能ノ配置デアルカラ △AFB, △AGC ガ ∠R△ デアルコトヲ據ヘル, ト同時ニ斜邊ノ中點ノ利用ヲ講ズル.



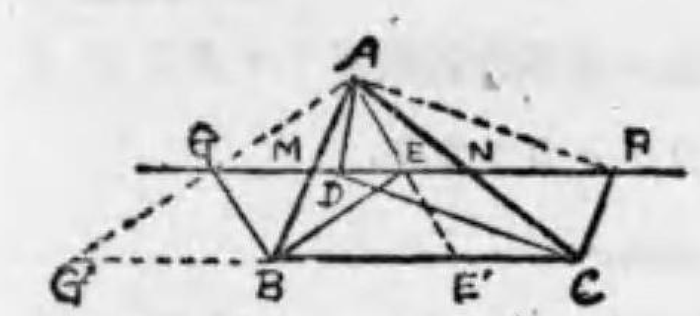
答案 △ABF, △ACG ハ ∠F, ∠G ガ ∠R ナル△ニシテ AB, AC

ハ夫々斜邊ナリ. 其ノ中點ヲ M, N トス. MF ヲ結ブ, MB=MF ヨリ ∠MBF=∠MFB, 而シテ假設 ∠FBM=∠FBC ∴ ∠MFB=∠FBC ∴ MF ∥ BC 同様ニ △AGC ヨリ N ヲ用ヒテ NG ∥ BC 然ルニ MN ハ △ABC ノ二邊中點線ニテ MN ∥ BC ∴ MF, NG ハ MN ニ重ル. ∴ FG ∥ BC

(15京商)

【試練】 12. △ABC ノ A ヨリ ∠B, ∠C 及ビソノ外角ノ二等分線 BE, CD, BG, CF ニ下ス垂線ノ足 E, D, G, F ハ BC ニ平行ナル一直線上ニアリ.

こなし方 主題ニ外角ガ増シタ, 同ジク四點ノ各ガ MN 上ニ在ルコトニスル. 又 AE ヲ延長シテ BC ト E′ ニ交ラシメルト △ABE≡△BEE′ トナツテ E ハ AE′ ノ中點, 同様ニ D, F, G モ A ヨリ BC ニ至ル線分ノ中點トナルコトヲ用ヒテモヨロシイ.

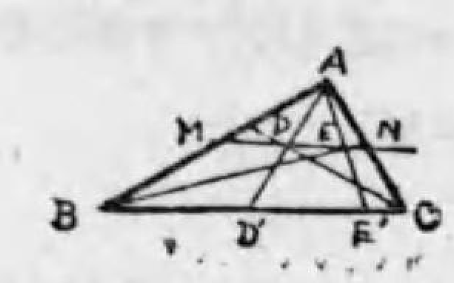


前主題ノ解ヲ之ト同ジニスルト面白イ.

【試練】 13. △ABC ノ A ヨリ ∠B, ∠C ノ二等分線ニ下ス垂線ノ足ヲ E, D トセバ

$$DE=\frac{1}{2}(AB+AC-BC) \quad ナリ.$$

こなし方 2DE=D′E′, AB=2ME=BE′; AC=2ND=CD′ 〔∠R△ ノ斜ノ中點ヲ利用〕

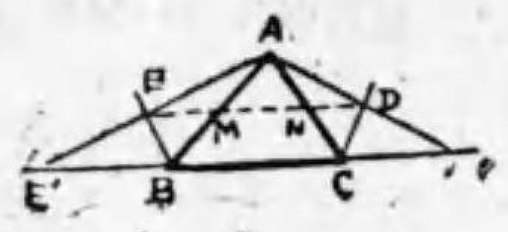


BE′+CD′=D′E′+BC=AB+AC

∴ D′E′=AB+AC−BC

【試練】 14. $\triangle ABC$ ノ B, C ノ外角ノ二等分線ニ A ヨリ下ス垂線ヲ AE, AD トセバ $DE=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

こなし方 $2DE=D'E'$



$AB=2ME=BE',\ AC=2ND=CD'$

$BE'+CD'=\underset{*}{\underline{D'E'-BC}}=AB+AC$

$\therefore\ D'E'=AB+BC+CA$

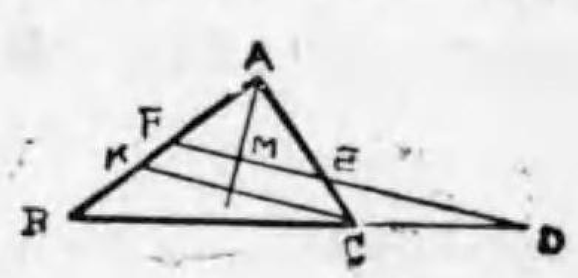
エキス 上ノ二問ハ内角二等分，外角二等分ト云フコトハ違ッテモ證明ノ方式ハ全ク同一デ＊ノ～～～ノ部分ガ＋，－ノ異リニナツタ丈デアルコトヲヨク味ツテ，「内角デ出來タコトハ外角デモ出來ル」ト云フコトヲ確メテオクガヨロシイ．十四年度入試高校ノ第三問ニ對シテ「内角ノ方丈ハシタガ外角ノ方デ詰ッタト云ツテ來ル受験失敗談ガ中々多クアッタ．之等ノ人ハ上ノ要領ヲ味ツテ置カナカツタカラデス．

【主題】 9. $AB>AC$ ナル $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ 二等分線ニ直角ナル直線ガ BC トナス角ハ $\angle C-\angle B$ ノ半分ナリ．

（海軍・神商・東船）

着眼 角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ヲ底ト見做スト二等邊三角形ガ出來ル．方向ヲ考ヘルノデアルカラ平行線ヲ作ツテ位置ヲ移ス．

答案 $\angle A$ ノ二等分線 AH ニ垂直ナル直線ガ三邊ト D, E, F ニ交ルトス．$\triangle AFE$ ハ二等邊 $AE=AF$ ナリ



$CK \parallel DF$ ヲ作レバ $\triangle AKC$ モ亦二等邊三角形ニシテ $AK=AC$

$\therefore\ \angle AKC=\angle ACK=\angle C-\angle BCK$

$\triangle KBC$ ノ外角ヨリ $\angle AKC=\angle ABC+\angle KCB$

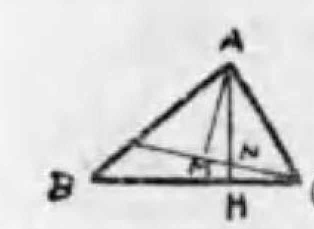
$\therefore\ \angle ACK=\angle ABC+\angle KCB$ 即チ $\angle C-\angle BCK=\angle B+\angle BCK$

$\therefore\ 2\angle BCK=\angle C-\angle B$ 而シテ $\angle BCK=\angle BDF$ 〔$ED \parallel CK$〕

$\therefore\ \angle D=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$

研究 $BK=AB-AC$ ニナルカラ二邊ノ差，底邊，ソノ兩隣角ノ差ヲ知ルトキハ三角形ヲ作圖スルコトガ出來ル．之ハ作圖題トシテ大切デアル，

【試練】 15. 三角形ノ一角頂ヨリ出ヅル對邊ヘノ垂線トソノ角ノ二等分線トノ成ス角ハ他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ，



こなし方 $\triangle AMN,\ \triangle NCH$ ニ着目シテ $\angle BCM$ ヲ利用スル．

【試練】 16. $\triangle ABC$ ニテ $AB>AC$ トシ $\angle A$ ノ二等分線トソノ外接圓ニ於ケル BC ニ垂直ナル直徑トノ成ス角ハ $\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$ ニ等シ．

こなし方 前問ノ AH ト直徑 DE トハ平行スルコトカラ聯想スルト

$\angle EDA=\angle DAH$ カラ前問ト同様ニナルガ周角デスルト $\angle A'DE=\angle EDA$ ヲ作リ $\angle C-\angle B$ ハ $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC}$ ノ周角，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BA'}$ ヲ用ヒテ

$\angle ADA'=\angle C-\angle B$

【試練】 17. $\triangle ABC$ ニテ $AB>AC$ ナラバ BC 上ノ任

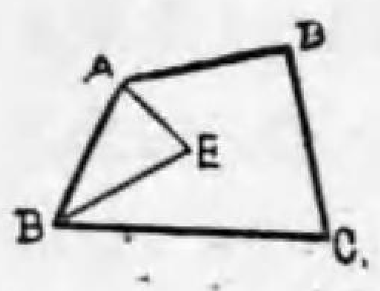
意ノ點ヲ D トセバ AD<AB　(高)

こなし方　$\angle ADB=\angle(C)+\angle CAD>\angle(B)$ ヲ考ヘル

【主題】 10. 四邊形 ABCD ニ於テ ∠A 及ビ ∠B ノ二等分線ノ交點ヲ E トセバ $\angle AEB=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$ ナリ.　(東師)

着眼 角ノ關係デアルカラ内角ノ和ノ $4\angle R$ デアルコトヲ使フヨリ外ハナイ.

答案 證 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$



$$\therefore\ \frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle D=2\angle R$$

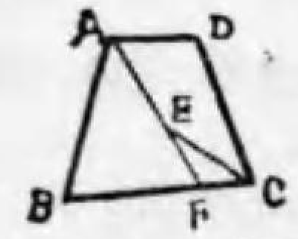
△ABE ノ内角ヨリ $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\angle AEB$

$=2\angle R$　　$\therefore\ \angle AEB=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$

要領 13頁ノ(10)圖モ此ノ要領デアル. 他ノ圖形中デソノ一部分トシテモ之ヲ使ツテ奇麗ニ行クコトハ中々多イ.

【試練】 18. 四邊形 ABCD ニ於テ ∠A, ∠C ノ二等分線ガ E ニテ交ルトキ AE, CE ノナス鋭角ハ ∠B〜∠D ノ半ニ等シ.　(海機・盛農・海軍・東船)

こなし方　AE ヲ延長シテ BC ト F デ交ラセル.



$\angle CEF=\angle AFB-\frac{1}{2}\angle C$

$\angle AFB=2\angle R-\frac{1}{2}\angle A-\angle B$

$\therefore\ \angle CEF=2\angle R-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle C-\angle B$

然ニ　$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C=2\angle R-\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$

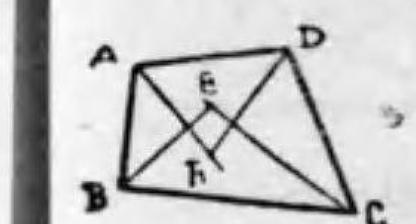
$$\therefore\ \angle CEF=2\angle R-\left\{2\angle R-\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)\right\}-\angle B$$

$$=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)-\angle B=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$$

∠B, ∠D ノ大小デ AF ガ CD ト交ルコトモアル. ソウスルト ∠B−∠D ニナル.

【試練】 19. 四邊形ノ各角ノ二等分線ニテ成ル四邊形ノ對角ハ補角ヲナス.　(海經・盛農・6海軍)

こなし方　△AFD, △BCE ノ内角ヨリ

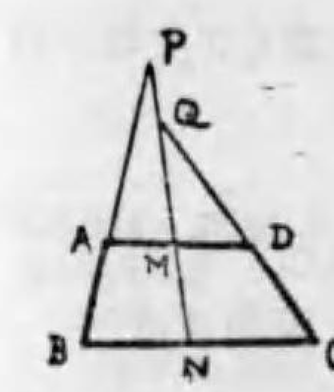


$$\left(\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle D+\angle F\right)+\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\angle E\right)=4\angle R$$

然ルニ $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=2\angle R$

$\therefore\ \angle E+\angle F=2\angle R$

【主題】 11. 四邊形 ABCD ニ於テ AB=CD ナルトキ AD 及ビ BC ノ中點 M, N ヲ通ル直線ハ AB 及ビ CD ト等角ヲナス.　(14神商)

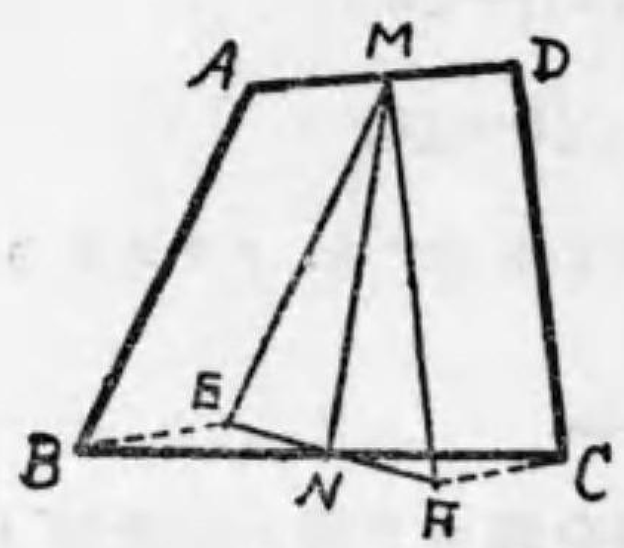


着眼 BA, CD ヲ延長シテモ MN 上デ交ラナイノガ普通デアルカラ AB, CD ヲ方向ヲ變ヘナイデ何處カヘ移動サセルカ, MN ニ等角ヲ成ス二直線ガ丁度 AB, CD ニ平行ニナツテ居テクレルコトヲ證スルカノ二途デアル.

答案 證 ▱ABEM, ▱DCFM ヲ作リ, EN, NF ヲ結ブ.

BE=AM=MD=CF〔假設ト作圖ヨリ〕

∴ BE=CF……………(1)



$BE \parallel AD \parallel CF$

$\therefore$ $\angle EBN = \angle FCN$ ……………(2)

$BN=NC$〔假設〕ナルヲ以テ (1), (2) ト合セテ $\triangle BEN \equiv \triangle CFN$　從ツテ $EN=NF$, $\angle ENB = \angle FNC$

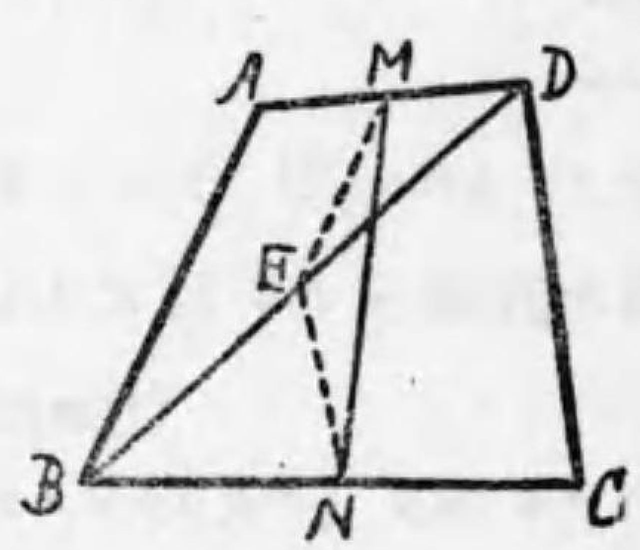
之レヨリ ENF ハ一直線ヲナス.

$\triangle MEF$ ニ於テ **$ME=AB=CD=MF$**

$\therefore$ $\triangle MEN$, $\triangle MFN$ ハ三邊等シク全等形　$\therefore$ $\angle EMN = \angle FMN$

$\therefore$ MN ハ ME, MF ニ等角ヲナスヲ以テ夫等ニ平行ナル AB, CD トモ等角ヲナス.

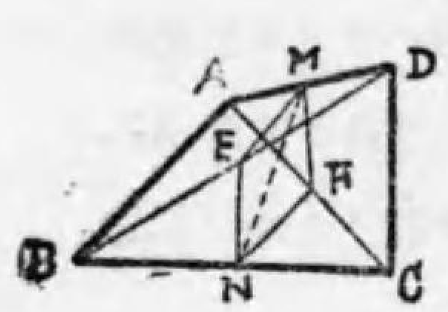
研究 後者ノ考ヘデ進ムト邊ノ中點ヲ重視シテ△ノ二邊中點線ハアルマイカヲ考ヘル. ソシテ AB ノ平行線ト聯想スルト BD ヲ結ンデソノ中點



E ガホシクナル. 自然 $EN \parallel CD$ モ得ラレルカラ EM ト EN トガ MN ト等角ヲ成スコト,

即チ $\angle EMN = \angle ENM$ ヲ考ヘル.

ソレニハ $EM=EN$ ガ入用デ $2EM=AB=CD=2EN$ ガアツテ誂ヘ向キニナツテ居ルノヲ利用シテモヨイ.



又 AC ノ對角線ノ中點 F ヲモトルト菱形 MENF ガ作ラレテ MN ハソノ對角線デ邊ト等角ヲ成ス.

要領 平行四邊形ノ對邊, 三角形ノ二邊中點線トハ方向ト長サトヲ移動スル武器デアル.　(15慶大)

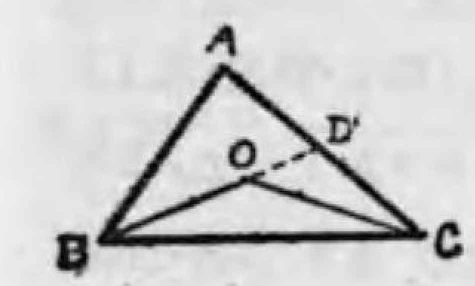
2. 線分又ハ角ノ不相等問題

要領 第 10 頁ノ九ツノ圖ノ取使ヒトナル. ソレヲ復習シテカラ入ラウ.

【主題】 12. $\triangle ABC$ 内ノ一點 O ヲトレバ

$$AB+BC+CA>OA+OB+OC$$

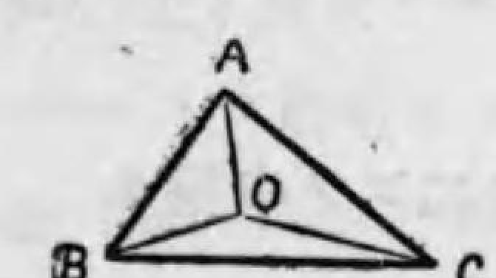
着眼 10 頁 (2) 圖ヲ今一度復習シテ見ルト本問ニ緣ノ近イコトモ自然ト知ラレル.



略證 $\begin{cases} \triangle ABD \text{ デ } AB+AD>BO+OD \\ \triangle ODC \text{ デ } OD+DC>OC \end{cases}$

邊々加ヘテ $AB+AC>BO+CO$

答案 略證……………………〔上ヲ入レル〕…………



$AB+AC>BO+CO$

同様ニ $AC+BC>AO+BO$

$AB+BC>AO+CO$

邊々相加フレバ

$2(AB+BC+CA)>2(AO+BO+CO)$

$\therefore$ **$AB+BC+CA>AO+BO+CO$**

【試練】 20. $\triangle ABC$ 内ノ一點ヲ O トセバ

$$AO+BO+CO>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

こなし方 $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CAO$ ニテ二邊和ト一邊ト比ベテ

$AB<AO+BO$,　$BC<BO+CO$,　$CA<CO+AO$

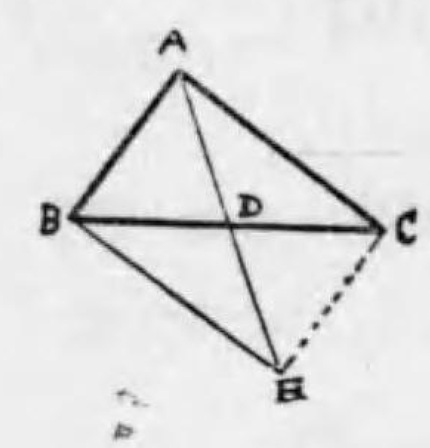
【試練】 21. △ABC ノ三中線 AD, BE, CF ト周ト比スルニ $AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$

こなし方 上ノ主題ノ O ヲ重心 G トスルト

$\frac{2}{3}(AD+BE+CF)>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

$\therefore\ AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$

【試練】 22. △ABC ノ中線ヲ AD トセバ AB<AC ナルトキ ∠BAD>∠CAD, AB+AC>2AD (陸士・商船・東工)

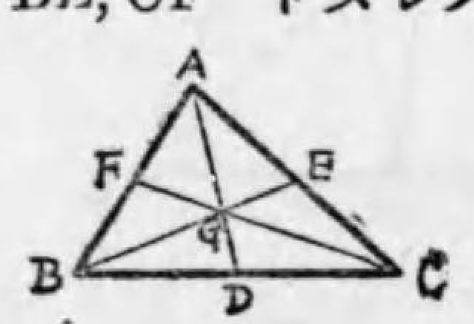


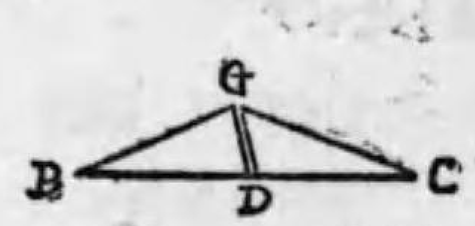
こなし方 AD=DE ノ延長ヲスルト △ABE デ BE=AC, ∠BEA=∠EAC カラ AB<BE

$\therefore\ \angle BAD>\angle CAD;$

又 AB+BE>AE

【試練】 23. AC>AB ナル △ABC ノ二ツノ中線ヲ BE, CF トスレバ CF>BE (高)





こなし方 G ヲ重心, AGD ヲ作ルト △ABD, △ACD ハ二邊ガ等シク他ノ一邊ハ AB<AC

∴ ∠ADC<∠ADB 之ハ中々大切ナ部分證デアル.

次ニ △GBD, △GCD ハ二邊等シク夾角大小デアルカラ CG>BG

$\therefore\ \frac{3}{2}CG>\frac{3}{2}BG$

即チ CF>BE

【試練】 24. △ABC ノ重心ヲ G トシ, 三中線ヲ AD,BE,CF トセバ $AB+BC+CA>AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

(海兵・商船・醫專・東工)

こなし方 i. 前問カラ AB+AC>2AD, AB+BC>2BE, BC+CA>2CF

邊々相加ヘテ 2 デ割ルト AB+BC+CA>AD+BE+CF

ii. △ABD, △BCE, △CAF ニ於テ

AB−BD<AD, BC−CE<BE, CA−AF<CF

即チ $AB-\frac{1}{2}BC<AD,\ BC-\frac{1}{2}CA<BE,\ CA-\frac{1}{2}AB<CF$

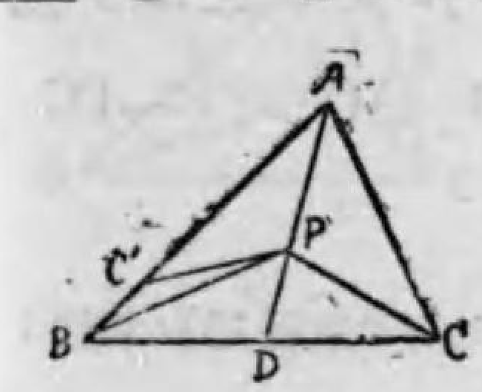
邊々加ヘテ $\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<AD+BE+CF$

【主題】 13. △ABC ニ於テ AB>AC ナリトシ, 中線 AD 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ AB−AC>PB−PC ナルコトヲ證明セヨ. (14千醫)

着眼 **設假** △ABC デ中線ト夾不等邊トノ展開ハ 10 頁ノ (5) 圖ヲ捕ヘル.

終結 AB−AC>PB−PC ヲ移項シテ AB+PC>AC+PB トスルコトト AB−AC, PB−PC ヲ其ノママ使フコトノ二ツデアル. 前者ハ AB ト PC トガ離レテ居テ線ヲツケルノニ不便デアルカラ AB−AC ヲ作ッテ P ヲ持込ムコトニスル.

答案 i. ∠BAD<∠CAD 〔∵ AD ヲ延長シテ AD=DA′ トス.



△ABA′ ニ於テ AB>A′B ヨリ

∠BAD<∠BA′D=∠CAD〕

ii. AC=AC′ ニ C′ ヲ AB 上ニ定ム. △APC, △APC′ ニ於テ二邊等シク夾角 CAP>C′AP

∴ PC>PC′ ∴ PB−PC′>PB−PC

然ルニ △PBC′ ニ於テ BC′>PB−PC′ 即チ BC′ =AB−AC′

∴ AB−AC>PB−PC′>PB−PC　∴ AB−AC>PB−PC

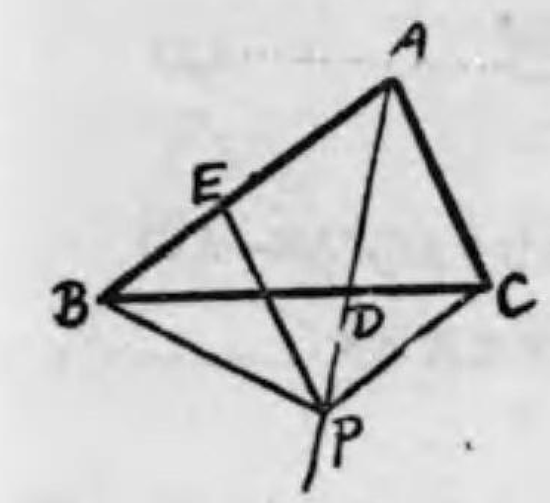
提示 i. ノ證ヲ略スルハヨロシクナイ略證デヨイカラ理由ヲ書イテオクガヨイ.

こなし方 終結ノ形ハ $a-b>c-d$ デアルカラ整理ノ樣ニ $a+d>b+c$ ヲ考ヘルノハ當然デアル. 此ノ $a-b>c-d$ 即チ $a+d>b+c$ ノ形ノ解決法ハ (1) 作圖上差ヲ作ルコト本題ノ樣ニスルカ, $a+d$ ト $b+c$ トヲ作ツテ比ベルカ (2) $a>c$ 又ハ $b>d$ ノ假設ノアルトキニハ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 又ハ $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$ ヲ利用スル. 之ハ比例ノ形デ $\frac{a+d}{a}=\frac{b+c}{b}$ ノ方モ同ジ考ヘテ出來ルガ $a:b=c:d$ ガアルト $\frac{a+b}{a}=\frac{b+c}{b}$ ガ得ラレル. (3) $a+b<c+d$ ガアルカ, 之ヲ知ルコトガ出來ルトキハ $a^2-b^2=c^2-d^2$ ニ着眼シテ $(a+b)(a-b)=(c+d)(c-d)$ ヲ邊々 $a+b<c+d$ デ除スト $a-b>c-d$ ガ浮ンデ來ル.

以上ノ三ツノ何レカニ歸スル樣ニ努メル.

【試錬】 25. △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ ∠A ノ二等分線上ノ任意ノ點ヲ P トセバ AB−AC>PB∼PC

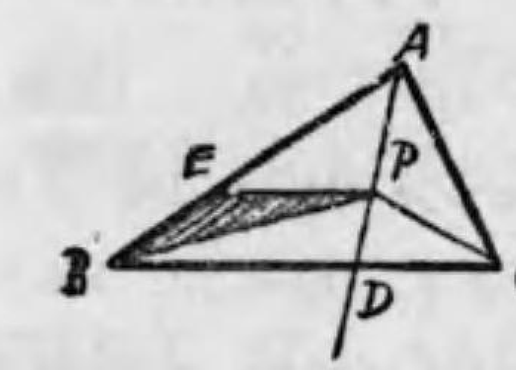
誤道 次ノ答案ガアル. 諸子ノ正シイ判斷ヲ望ム, ソシテ主題15ノ誤道ト比照シテ決シテ此ノ厄ニ遇ハナイ樣ニシテ下サイ.



△ABP ニテ AB>BP−AP,

△ACP ニテ AC>PC−AP

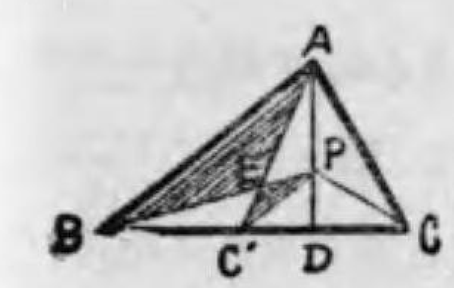
∴ 邊々減シテ AB−AC>PB−PC



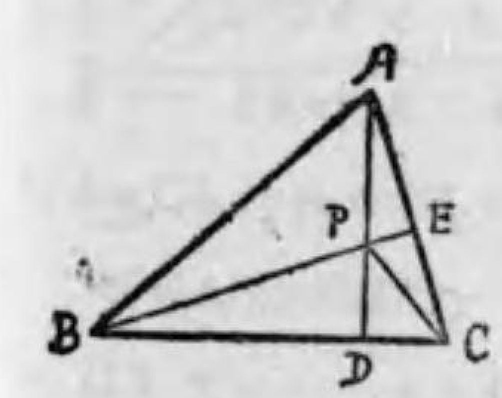
【試錬】 26. △ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ A ヨリ BC ヘ下ス垂線 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ

PB−PC>AB−AC　(14京醫)

こなし方 (一) 法ヲ考ヘルト PB+AC>AB+PC トシテ見ル. AC, PC ヲソノマヽ移動スルタメニ CD=DC′ トスル. CC′ ノ垂直二等分線カラ AC=AC′, PC=PC′ トナル. ソコデ PB+AC′ ヲ考ヘルト △ABE, △PEC′ ヲ捕ヘテ見テ BE+EP+AE+EC′>AB+PC′ ヲ作ルコトニナル. 二分シテ BE+AE>AB, EP+EC′>PC′ ヲ作ツテ元ニ戻シタラ成功スル.



(三) 法ヲ考ヘルニ $\overline{PB}^2-\overline{PC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$ ト PB+PC<AB+AC トガアツタラ PB−PC>AB−AC ガ得ラレル. 垂線ガアツテピタゴラス定理ノ引用ガアルラシイコトニ着眼スルト



△BPD, △PCD ニ於テ ∠D=∠R カラ

$\overline{PB}^2-\overline{PC}^2=\overline{BD}^2+\overline{PD}^2-\overline{PD}^2-\overline{CD}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$ ……………(1)

△ABD, △ACD ノ ∠D=∠R カラ

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-\overline{AD}^2-\overline{CD}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

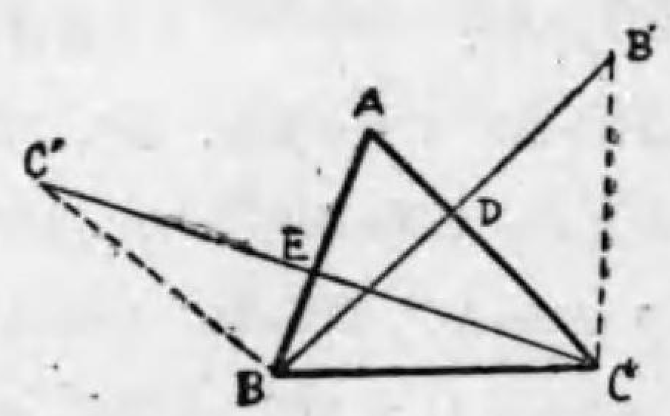
(1), (2) カラ　$\overline{PB}^2-\overline{PC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$,

$$(PB+PC)(PB-PC)=(AB+AC)(AB-AC)$$

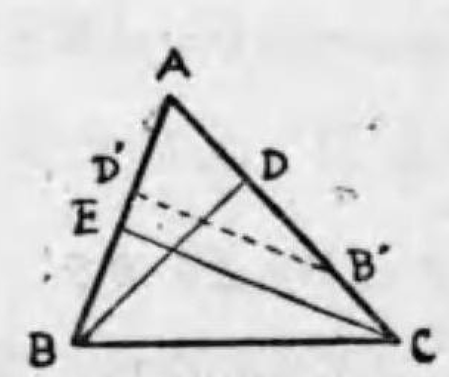
之ニ 10 頁(2)圖ヲ用ヒテ $PB+PC<AB+AC$ ヲ畧證スル.

【主題】 14. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB<AC$ トシ, BD, CE ヲ高サトスレバ $BD<CE$ ナリ.　(海機)

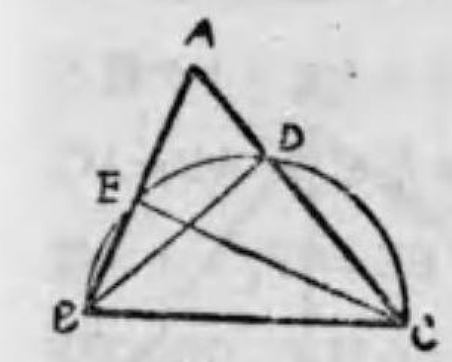
答案 $DB'=DB$, $EC'=CE$ ニ BD, CE ヲ延長スレバ CA ハ BB′ ノ垂直二等分線トナリ $BC=CB'$ トシテ $\triangle BCB'$ ハ $2\angle C$ ヲ頂角トスル二等邊三角形ナリ. 同様ニシテ $BC=BC'$ ヲ得テ $\triangle BCC'$ ハ $2\angle B$ ヲ頂角トスル二等邊三角形ナリ. 而シテ $\triangle BCB'$, $\triangle BCC'$ ハ等邊ガ相等シク其ノ頂角ハ $\angle B>\angle C$ 〔$\because$ $AC>AB$〕　$\therefore$ $\triangle BCC'$ ノ頂角ガ $\triangle CBB'$ ノ頂角ヨリ大ナリ.　$\therefore$ $CC'>BB'$ 即チ **$CE>BD$**



研究 上ハ比ベヨウトスル BD, CE ノ二倍ヲ作ツタ. シカシ BD ヲ他ニ移動スルト左圖ノ解トナル. $AC>AB$ デアルカラ, $AB'=AB$ ニ AC 上ニ B′ ヲトリ, $AD=AD'$ ニ D′ ヲ AB 上ニトル. $\triangle ABD\equiv\triangle AB'D'$ 〔$\because$ 二邊夾角等シ〕 トナル. ソレデ BD ハ B′D′ ニ移動シタ. ソシテ $\angle D=\angle R=\angle D'$ デアルカラ $B'D'\parallel CE$ デアル. ソシテ B′ ガ AC 上ニアルカラ當然



$CE>B'D'$ トシテ **$CE>BD$** ガワカル. 又圓ヲ使フト D, E ハ BC ヲ直徑トスル半圓上ニアル. ソシテ $\angle B>\angle C$ デアルカラ $\overset{\frown}{CE}>\overset{\frown}{BD}$, ソレデ同ジ半圓内デ弧ガ大小デアルカラ, ソノ截リトル弦トシテ　**$CE>BD$**



批評 又面積ヲ使フト早ク出來ル.　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot CE$

然ルニ　$\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BD}>1$　　$\therefore$ **$CE>BD$**

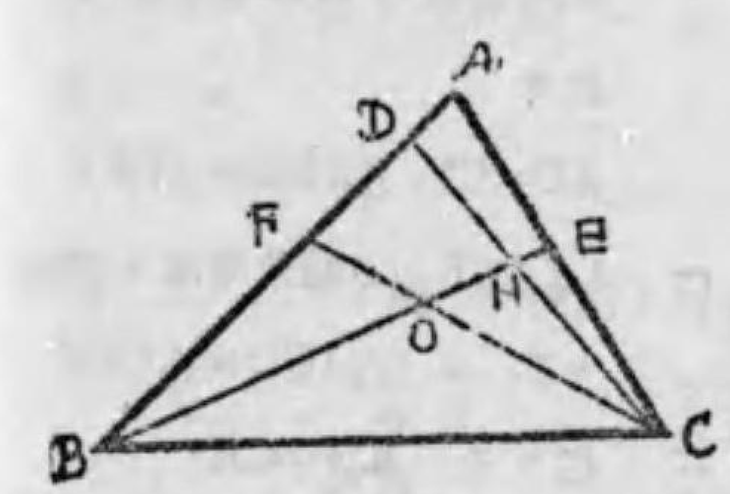
受驗答案トシテハ之レガ一番ヨロシイ.

【試練】 27. $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ トシ, $\angle B$, $\angle C$ ノ二等分線ヲ BE, CF トスレバ $BE>CF$ ナリ.　(盛農)

こなし方 $\angle C>\angle B$ カラ $\frac{1}{2}\angle C>\frac{1}{2}\angle B$ デアル. ソレデ $\angle ACF$ 内ニ $\frac{1}{2}\angle B=\angle FCD$ トシテ CD ヲ作ル. $\triangle DBC$ ノ兩底角ヲ比ベルト $\angle DBC<\angle BCD$ デアツテ

$$BD>CD\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\triangle DBH$ ト $\triangle DFC$ トヲ比ベルト $\angle D$ 共通, $\angle DBH=\angle DCF$ デアルカラ, 相似トナル ソレニ (1) ヲ用フルト $BH>CD$・況ヤ BE ト CD ヲ比ベルニ於テヲヤト云フコトニナル. 相似デスルノガイヤデアツタラ $CD=DC'$ ニ C′ ヲ BD 上ニトツテスル.



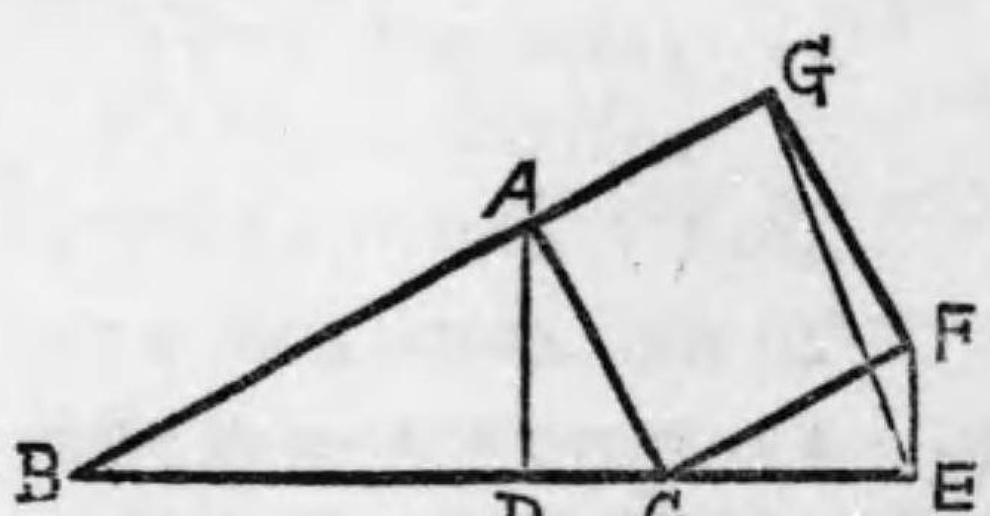
研究 上ノ二問ノ逆ハ成立スル. 主題ノ方ハ面積デスレバ忽チ出來ルガ, 試練ノ方ハ中々容易ニ行カナイ.　$AB \gtreqless AC$ ノ三ツノ中ノ何レカガ成

立スル=違ヒナイ. $AB>AC$ =成ル=違ヒナイガ, ソレガ直接ト云ヒ=クイトキ=ハ $AB=AC$ デモナク, $AB<AC$ デモナイトイフコトヲ證スルト必然= $AB>AC$ ガ成立スル. ソレデ歸謬法ヲ用ヒテ $AB=AC$, $AB<AC$ ヲ否定スル. $AB=AC$ =ナツテ居ル=ハ $BE=CF$ トイフ假設ガアル筈デ, 之ハイケナイ, $AB<AC$ ダトスルト本命題デ $BE<CF$ デアル筈, 之モイケナイ. ソコデ後ノ文句ハナクテ $AB>AC$ トスル此ノ歸謬法ノ使ヒ方ヲ**轉換法**ト云フ.

【主題】 15. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC =垂線 AD ヲ下サバ $AB+AC<BC+AD$

着眼 $AB+AC$, $BC+AD$ ノ各ヲ一本=シテ比ベルカ, $BC-AC>AB-AD$ ヲ證スルカデアル. 前法ヲ考ヘルト $BAG=AB+AC$, $BDCE=BC+AD$ ヲ作ツテ $\triangle BGE$ デ $\angle BGE>\angle BEG$ ヲ證スルコト=ナル.

答案 AC 上=正方形 ACFG ヲ作リ, BC ノ延長= EF ナル垂線ヲ下ス



直角三角形 ACD,CEF =於テ

$AC=CF$, $\angle ACD=\angle CFE$ 〔$\angle FCE$ ノ餘角同志トナル〕 $\therefore$ $\triangle ACD\equiv\triangle CEF$

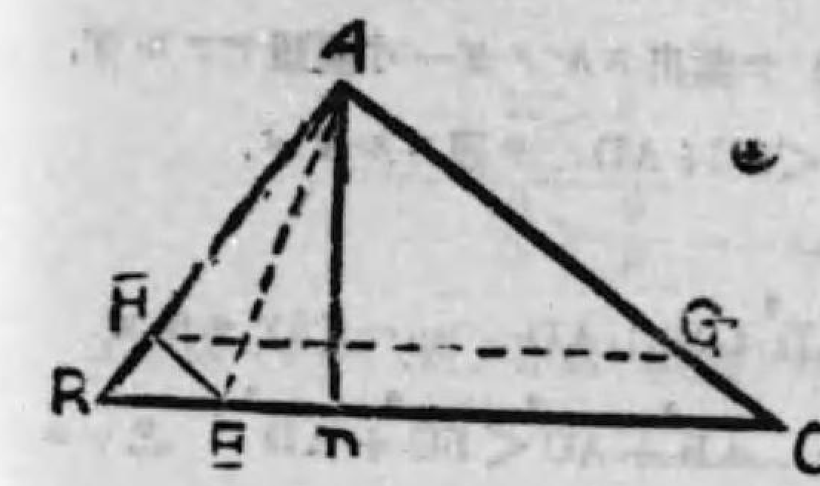
從ツテ $AD=CE$

$\therefore$ $AB+AC=BG$, $BC+AD=BE$ ………………(1) $EF<CF$ ナレバ $\triangle EFG$ =於テ $FG>EF$ $\therefore$ $\angle FEG>\angle FGE$,

各餘角ヨリ $\angle BEG<\angle BGE$ $\therefore$ $\triangle BGE$ =於テ $BE>AG$

即チ (1) ヨリ $BC+AD>AB+AC$ (15大阪商)

研究 後法ヲトルト $BC-AC$ ト $AB-AD$ ヲ作ツテ見ル, $CA=CE$ = E ヲ BC =定メルト

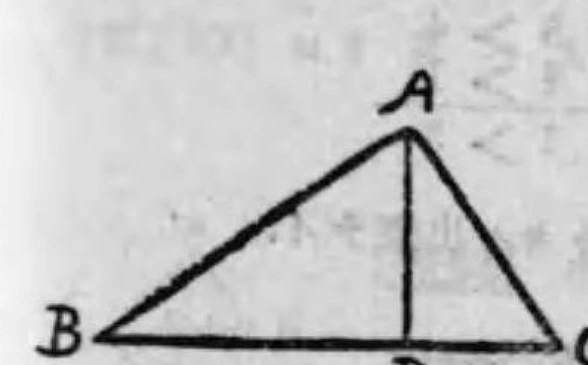


$BC-AC=BE$ ……………(1)

$AD=AF$ = F ヲ AB 上=定メルト $AB-AD=BF$ ……………(2)

ソコデ BE ト BF ヲ比ベル, ソシテ $BE>BF$ ガ證シタイ. ソレ=ハ $\angle BFE>\angle BEF$ ヲ考ヘル. AE ヲ結ブト $\triangle CAE$ カラ $\angle AEC=\angle EAC$ デアル. 此ノ兩角ノ餘角ヲ考ヘルト $\triangle AED$ ノ $\angle E$ ト $\angle A$; $\angle A=\angle R$ カラ $\angle EAC$ ト $\angle BAE$ =着眼シテ $\angle BAE=\angle DAE$, ソレ= $AF=AD$ デアルカラ $\triangle AEF\equiv\triangle AED$ トナツテ $\angle AFE=\angle ADE$, $\therefore$ $\angle F=\angle D=\angle R$ ソコデ目的ノ $\angle BFE>\angle BEF$ カラ (1), (2) ヲ $\triangle BEF$ =適用スル. 或ハ $EC\parallel FG$ ヲ作ツテ直角三角形 ACD, AGF ガ二角ト一邊ヲ等シクスルコト=目ヲツケテ全等ヲ證シ, $FG=AC$ ヲ得テ FECG ハ ▱, $AC\parallel FE$ カラ $\angle F=\angle R$ トスルモ一案デアル.

批評 上ノ三ツノ解ハ受驗用トシテハ香シクナイ, ソレハ時間ヲトルカラデアル. 面積ヲ考ヘルノガ一番早イ.



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD \cdots\cdots(A)$$

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AC}{AD}$ ヲ得テ ヨ

$$\frac{BC-AB}{AB}=\frac{AC-AD}{AD} \cdots\cdots(B)$$

之レ= $AB>AD$ ヲ用ヒテ $BC-AB>AC-AD$ $\therefore$ $AB+ACA<BC+AD$ コンナ=簡單=行ク. 之レハ又十四年度=三校（長商・朝豫・滿醫）ヘ出

タ代數ノ「$a:b=c:d$ ナルトキ，a ガ最大ナルトキ $a+d<b+c$ ナリ」ノ問題ト解法ガ一致シテ居ル．只 (B) ヲ案出スルノガ一寸困難デアルガ，ソノ時ハ試練26ノ三法デ $AB+AC<BC+AD$ ヲ證スルタメ，

$(AB+AC)^2<(BC+AD)^2$，　即チ

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\cdot AC<\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+2BC\cdot AD$…………(3) ヲ作ル．

ソレニハ　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$　$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2<\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$　之レニ (A) ヲ加ヘルト (3) ガ出來ル．

誤答 次ノ答案ガ中々多イ，諸子ハ之レニ批評ヲ加ヘヨ．

$\triangle ABC$ ニテ $BC>AC$　$\therefore\ BC>AC-BD$…………(1)

$\triangle ABD$ ニテ $AB>AD-BD$,………………………………(2)

$\therefore$ (1)−(2) ヨリ $BC-AB>AC-AD$ 移項シテ $BC+AD>AB+AC$

ドコガ惡イカ．試練25ニ於ケル誤リト同ジデアル．決シテ次ノコトヲ忘レテナラヌ．

【指導】 不等式ノ四則ハ謹ムベシ．ソウデナイト大ニ**不當しき**トナル．

i. 同ジ向キノ二ツノ不等式ノ和ハ心配ナク作ツテヨイ．

ii. 減法ハ出來ナイ．

$$\begin{array}{c|c} & 5>4 \\ - & 3>2 \\ \hline & 2>2 \end{array}\ \cdots\cdots\text{不成立}\cdots\cdots\ \begin{array}{c|c} & 5>4 \\ - & 4>1 \\ \hline & 1>3 \end{array}$$

iii. 正量ノ乘法ハ出來ル．シカシ正負不明ノトキハ出來ナイ．

$$\begin{array}{c|c} & 5>-10 \\ \times & -3>-4 \\ \hline & -15>40 \end{array}\ \cdots\cdots\text{不成立}\cdots\cdots\ \begin{array}{c|c} & 5>-10 \\ \times & 2>-3 \\ \hline & 10>30 \end{array}$$

a, b, c, d ガ正デ $a<b$, $c<d$ ノトキハ $ac<bd$ ハ立派ニ成立スル．正量ノミノ場合ハ乘法ハシテモヨイ．

iv. 除法ハ出來ナイ．

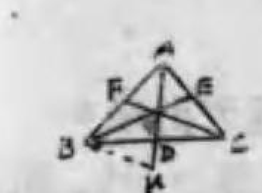
$$\begin{array}{c|c} & 10>9 \\ \div & 9>8 \\ \hline & \dfrac{10}{9}>\dfrac{9}{8} \end{array}\ \cdots\cdots\text{不成立}\cdots\cdots\ \begin{array}{c} 10>-7 \\ 5>-1 \\ \hline 2>7 \end{array}$$

上ノ樣ニナル．前ノ答案ハ減法ヲ平氣デシタカラ**誤答**ニ陷ツタ．

3. 一點會合問題

要領 先ヅ二直線ヲ交ラシテ，ソノ交點ヲ第三直線モ過ギルコトニスル．此ノ内デ重心，内心，傍心，外心，垂心ハ定理トシテ問題解法ニ引用シテヨロシイ．

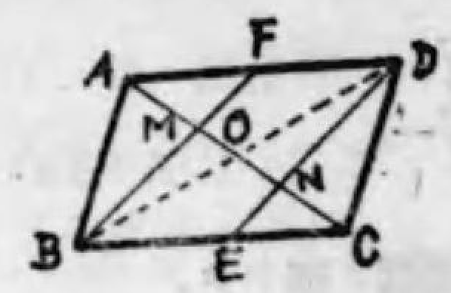
【重心】 $\triangle ABC$ ノ三ツノ中線ハ一點 G ニ交ル．而シテ各中線ハ G ニテ 2:1 ニ内分セラル．



こなし方 AD, CF ノ交リヲ G トシ，$GD=DK$ ノ延長カラ GBKC ガ□，$FG \parallel BK$，F ハ AB ノ中點 $\therefore\ AG=GK$　BG ヲ延長スルニ $\triangle AKC$ カラ $GE \parallel KC$ ヨリ E ハ AC ノ中點トナル．

參考圖 中線ニ關スル問題ハ，ソノ二倍ノ延長，又ハ $\frac{1}{3}$ ノ延長ガ有力ナ手掛リトナル．重心ハ二ツノ中線ノ交リトスル場合ト，單ニ一ツ丈デ其ノ 2:1 ノ内分點ヲ用フルノガ便利ナ場合トガアル．

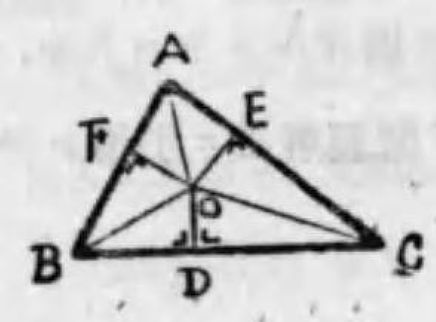
【試練】 28.　平行四邊形 ABCD ノ BC, DA ノ中點ヲ E, F トセバ BF, DE ハ AC ヲ三等分ス.



こなし方　M, N ガ二ツノ △ABD, △BCD ノ重心タルコトヲ捕ヘル. 14頁下段4圖△ノ二邊中點線ニスルナラ, ▱BEDF ヲ決定シ △BCM, ADN カラ MN=NC　MN= M

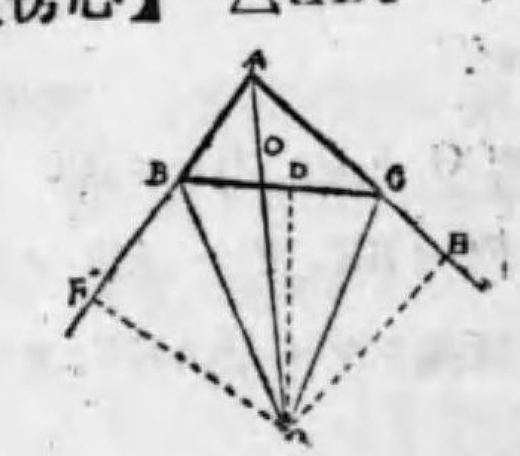
【內心】 △ABC ノ各角ノ二等分線ハ一點 O ニテ交ル.

こなし方　∠B ノ二等分線上ノ點トシテ OF=OD, ∠C ノ二等分線上ノ點トシテ OD=OE　∴ OF=OE　ソレデ O ハ ∠A ノ二等分線上ニアルコトニナル.



OD=OE=OF カラ O ヲ中心ニシテ內切圓ガ出來ル.

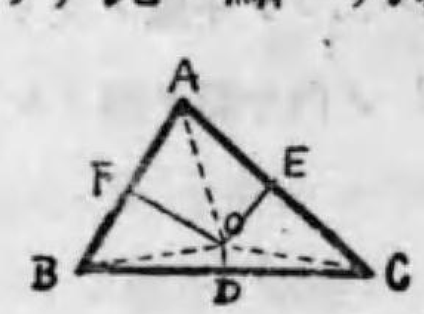
【傍心】 △ABC ノ二外角ノ二等分線ハ他ノ角ノ二等分線ト一點 O ニ交ル.



こなし方　上ノ證ト全ク同ジ途デ出來ル.

O ハ二邊ノ延長ト一邊トニ切スル傍切圓ノ中心トナル.

【外心】 △ABC ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點 O ニテ交リ, 此ノ點ハ角頂ヨリ等距離ニアリ.

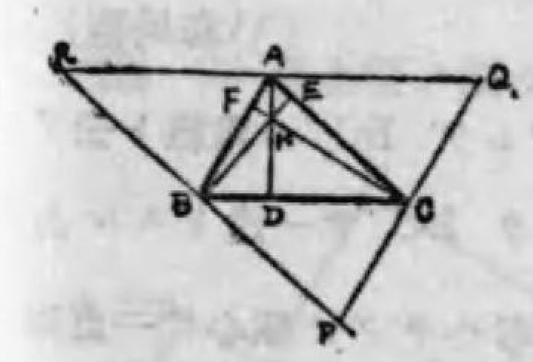


こなし方　DO, EO ヲ BC, CA ノ垂直二等分線トスル. 〔相交ル BC, AC ニ直角トナルカラ必ズ交ル ∵ 交ラナイトスルト EO ∥ DO′, 平行ナル二直線ニ直交スル BC, CA ハ平行カ一致スルカラ△ノ二邊ニハナラヌ〕 BO=OC, OC=OA　∴ BO=OA, O ハ AB ノ垂直二等分線ガ通ル.

研究　OA=OB=OC デアルカラ O ハ外接圓ノ中心トナル.　ソレデ外心ノ假設又ハ終結ノ展開ハ邊ノ垂直二等分線利用カ, 三頂點ヘノ等距離ヲ用フルカデアル. 圓心ノ方カラ O ハ鈍角△ノトキ形外ニアルコトモ知ラレル. 鈍角△ノトキデアツテモ萬事銳角ト同樣デアル.

【垂心】 △ABC ノ三ツノ高サ AD, BE, CF ハ一點 H ニ會ス.

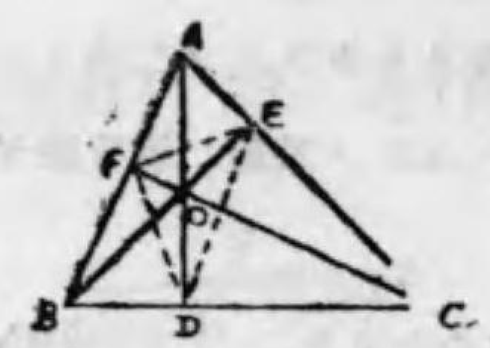
こなし方　BC ∥ QR, CA ∥ RP, AB ∥ PQ ヲ作ルト ▱ABPC, ▱ABCQ ガ出來 PC=AB=QC CF⊥PQ トナル. 斯クシテ元ノ三垂線ハ △PQR ノ各邊ノ垂直二等トナツテ △PQR ノ外心即チ △ABC ノ垂心 H トナル.



研究　H ハ應用問題ニ改作サレル重要ナ性質ガアル. 鈍角△ノ垂心ハ形外ニ出テ, 直角三角形ノトキハ直角項トナル. 又三頂點ト垂心ト四點ヲ點トシテ考ヘルト何レノ一點ヲトルモ他ノ三點デ作ル△ノ垂心トナル事ヲ必ズ研究セラレヨ.

【試練】 29.　△ABC ノ垂心 O ハ垂足三角形ノ內心トナリ, A, B, C ハ傍心トナル.

こなし方　本來訓ノ篇デスル問題デアルガ 67頁47 ノ解ニモ使ハレルカラ



象ネテ此ニ上ゲタ．三垂線ヲ AD, BE, CF トスル．F, B, D, O；O, D, C, E；F, B, C, E ハ環塞

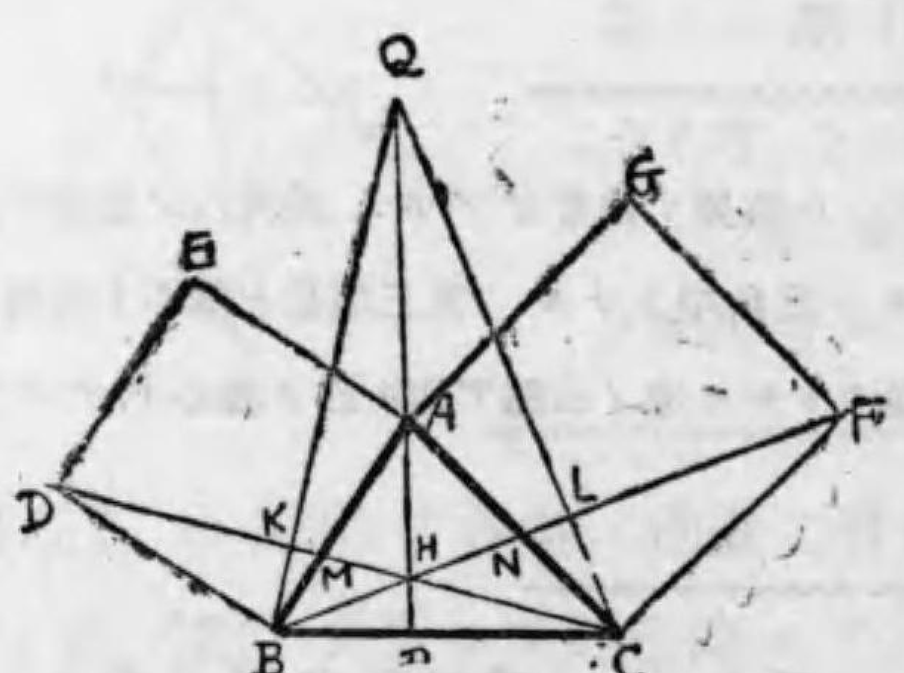
$\therefore$ $\angle FDO=\angle FBO$,　$\angle ODE=\angle OCE$,

$\angle FBO=\angle OCE$

$\therefore$ $\angle FDO=\angle ODE$　DO ハ $\triangle FDE$ ノ $\angle D$ ノ二等分線トナル．他モ同樣ニシテ O ハ內心 $BC\perp OD$　$\therefore$　OB ハ D ノ外角ノ二等分線トナル．同樣ニ CA, AB ガ E, F ノ外角ノ二等分線トナツテ A, B, C ハ傍心トナル．

【主題】 16. $\triangle ABC$ ノ AB, AC 上ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ形外ニ作リ A ヨリ BC ニ垂線 AP ヲ作ラバ AP, BF, CD ハ一點ニテ交ル．(15海兵經)

着眼 $AP\perp BC$ ヲ捕ヘルト△ノ一垂線トナル．ソレデ BC ニ垂線ト云フカラ BC ヲ一邊トスル△ヲ考ヘテソノ垂心デ三直線ガ交ルノデナイカ？ ト思ツテ見ル．ソノ△ハ ABC デハイケナイ．$CD\perp BQ$, $BF\perp CQ$ ヲ作ルト $\triangle QBC$ ノ垂心トナルラシイ．此ノ $\triangle QBC$ ヲ何トカ CD, BF ト線ヲツケル．



答案 AP, CD ヲ H ニ交ラシメ．$BK\perp CD$ ナラシメ，PA ノ延長ト Q ニ交ラシム．

i. $\triangle BCD$, BAQ ニ於テ BD=AB

$\angle BQA=\angle BCD$〔$\because$ $\triangle QKH$ ト $\triangle CPH$ トハ對頂角ノ等シイ直角三角形ノ其ノ一角ナル故〕

$\angle ABQ=\angle BDC$〔$\because$ KC ト AB トガ M ニ交ルトキ，BK ハ直角三角形 BMD ノ斜邊ヘノ高サ〕

$\therefore$ $\triangle BCD\equiv\triangle BAQ$

從ツテ AQ=BC

ii. $\triangle ACQ$, BCF ニ於テ

AQ=BC, AC=CF, $\angle QAC=\angle BCF$

〔$\because$ $\angle QAC=\angle APC+\angle ACP$

$=\angle R+\angle ACP=\angle BCF$〕

$\therefore$ $\triangle ACQ\equiv\triangle BCF$

從ツテ　$\angle ACQ=\angle BFC$,

BF ガ AC ト N, CQ ト L ニ交ルトス．直角三角形 NCF, NCL ニテ一角共通，他角等シクシテ

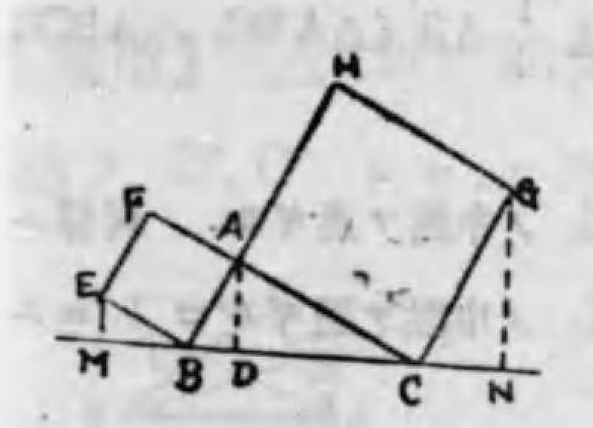
$\angle NCF=\angle NLC=\angle R$

$\therefore$ $BL\perp CQ$

$\triangle BCQ$ ニ於テ $PQ\perp BC$, $CK\perp BQ$, $BL\perp CQ$

$\therefore$ 三直線 CD, AP, BF ハ $\triangle BCQ$ ノ三垂線ニ相當シ一點 H ニテ交ル．

研究 22 頁上段ノ圖ガ之ニ似テ井ルコトニ氣ガツクト比例デ次ノ樣ナ解モ得ラレル．BM=CN ヨリ BN=CM 下ノ圖デ DM=BP, FN=PC



CD ト AP トガ H ニ交ルトスル．

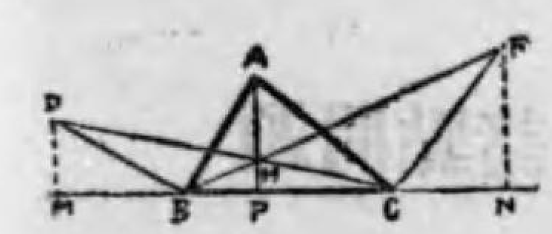
CM : CP=DM : HP

$\therefore$ CM : FN=BP : HP……………(1)

BF ト AP トガ H′ ニ交トスル．

BN : BP=NF : PH′

$\therefore$ BN : NF=BP : PH′……………(2)

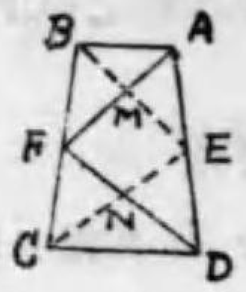


(1), (2) ノ右邊カラ PH=PH′ トナツテ H ト H′ ト一致スル．

【試練】 30. 梯形 ABCD ニ於テ　$AB\parallel CD$ ニシテ $AB+CD=BC$ ナルトキ $\angle ABC$ 及ビ $\angle BCD$ ノ二等

分線ハ AD 上ニ於テ交ル.

こなし方 AB=BF ニ F ヲ BC 上ニトル. ソシテ △ABF, △CDF ガ二等邊デアルコトヲ考ヘ, AB∥CD カラ

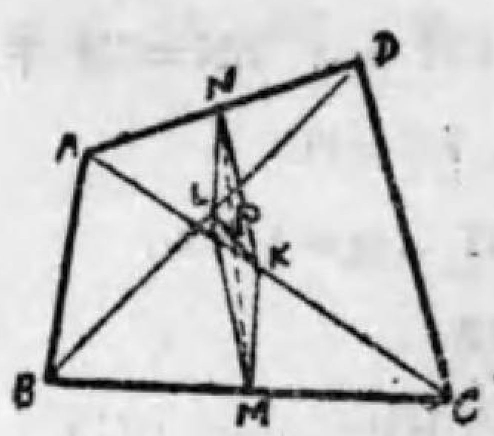


∠ABF+∠FCD=2∠R ∴ ∠BFA+∠CFD=∠R

∴ ∠AFD=∠R, BE, CE ヲ ∠B, ∠C ノ二等分線トシテ見ルト BE ハ AF ヲ, CE ハ DF ヲ垂直ニ二等分スルカラ AD ノ中點デ交ル.

【試練】 31. 四邊形 ABCD ノ AB, BC, CD, DA, AC, BD ノ中點ヲ夫々 F, M, G, N, K, L トスレバ MN, GF, KL ハ一點ニテ交ル.

こなし方 MKNL ガ ロ デアルコトヲ考ヘル.



$MK \perp\!\!\!\!\!\perp \frac{1}{2}AB$, $NL \perp\!\!\!\!\!\perp \frac{1}{2}AB$ 〔△ABC, △ABD〕

∴ $MK \perp\!\!\!\!\!\perp NL$

ソレデ MN ハ KL ノ中點ヲ過ギル. 同様ニシテ FG モ亦 KL ノ中點ヲ過ギルコトニスル.

4. 一直線ヲ共有スル諸點問題

要領 二點ハ一直線ヲ決定スルガ, 第三ノ點ガソノ直線ニ乘ルコトハ相當面倒ナ證明ガ入ル. 38 頁ノ主題 8 モ試練 12モ四點ナリ六點ナリガ一直線上ニアルコトヲ證シタモノデアル. 或條件ニ適スル諸點ガ一直線上ニ乘ルト之レハ其ノ條件ノ軌跡トナル.

1. 定線分ノ兩端ヨリ等距離ニアル點ハ定直線上ニ在リ.

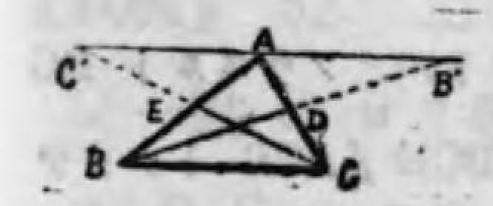
研究 垂直二等分線デアル. 之ハ軌跡計リデナク應用ガ擴イ. 等距離ヲ變ヘテ一定ノ比ヲナスコトニスルト「アポロニウス圓」トナル.

2. 一直線ヨリ等距離ニアル點ハ平行ナル二ツノ直線上ニ在リ.

3. 二ツノ直線ヨリ等距離ニアル點ハ一ツ又ハ二ツノ定直線上ニ在リ.

研究 平行二直線カラ等距離デアルト一直線トナルガ相交二直線デアルト角ノ二等分線デ, 補角ノ方ノトニツノ二等分線デアル.
一定ノ比ヲ有スルトシテモ變リハナイ.

【應用】 △ABC ノ中線 BD, CE ヲ各二倍ニ延長シタル點ヲ B′, C′ トセバ B′, A, C′ ハ一直線上ニアリ. (海經)



こなし方 ABCB′, ACBC′ ハ ロ

∴ AB′∥BC∥AC′

5. 一 定 問 題

要領 假設ノ材料ヲ睨ンデ一定ナルモノヲ探シ, 之ニ比較ショウト努メル.

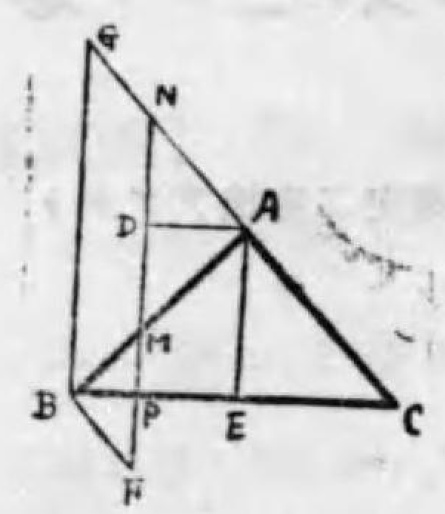
【主題】 17. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點

P ニ於ケル垂線ガ他ノ二邊 AB, AC ト交ル點ヲ M, N トセバ PM ト PN トノ和ハ高サノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ. 又此ノ和ガ底邊ニ等シクナル場合如何.

（6小商•13福商•14海兵）

着眼 $PM+PN$ ヲ $PM=PF$ ヲ作ツテ重ツタ部分ヲ取除ケテ一本ニスル工夫ヲスルカ, AE ナル高サヲ作ツテ $(PM+PN)\div 2$ ヲ調ベル.

答案 ㊀ $AE\perp BC$, $MN\perp AD$ ヲ作ル. 然ラバ DPEA ハ矩形ニシテ



$DP=AE$ 　二等邊三角形ヨリ $\angle CAE=\angle BAE$

$AE\parallel PMN$ トナルヲ以テ

$\angle ANM=\angle CAE$ 　$\angle AMN=\angle BAE$

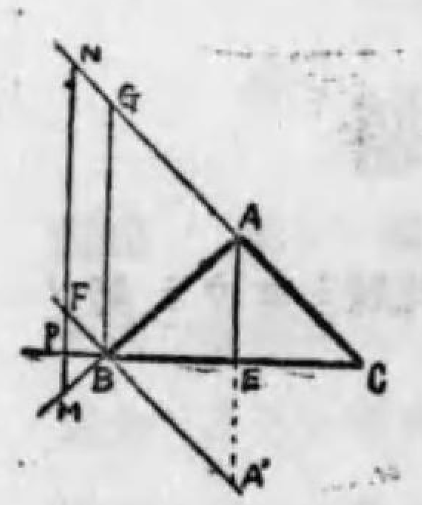
$\therefore$ $\triangle AMN$ ハ $\angle M=\angle N$

$\therefore$ $AM=AN$, $MD=DN$

$PM+PN=(PD-DM)+(PD+DN)=2PD=2AE$

又 $BC=2AE$ ナルタメニハ $BE=AE=EC$ ニシテ $\angle A=\angle R$ 即チ直角二等邊三角形ノトキナリ.

研究 上圖デ MP ノ延長上ニ PF ヲ MP ニ等シクトル. ソウスルト BC ハ MF ノ垂直二等分線デ $BM=BF$, $\angle ABC=\angle FBC=\angle ACB$ トナツテ $BF\parallel CA$; $GB\perp BC$ ヲ作ツテ G ヲ CA ノ延長上ニトルト GBFN ハ對

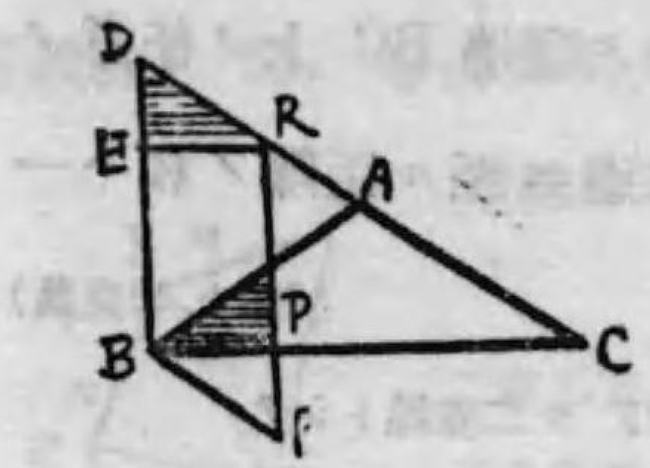


邊ガ平行デ ▱, 　$\therefore$ $GB=NF=PM+PN$ トナル.

$\triangle CEG$ カラ EA ハ BC ノ中點ヲ通ツテ底 BG ニ平行トナルカラ $BG=2AE$

$\therefore$ $PM+PN=2AE$ 　トシテモヨイ.

P ヲ BC ノ延長上ニトルト, 研究ノ解ト同様ニシテ $PN-PM=2AE$ トナツテ和デナクテ差トナル.



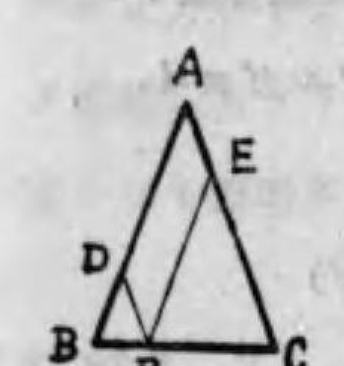
要領 BC 上デモ, 其ノ延長上デモ證明ノ手續ニハ變リハナクシテ出來ル. A′ ヲ BC ニ關シテ A ノ對稱點トスルト $AC\parallel BA'$ トナル. 定方向ノ二平行線ニヨツテ定方向ノ直線ガ切リトラレル線分ニナル. 〔左圖ハ主題ノ別解圖〕

エキス 延長上ノ證明デアツテモ決シテ恐レルニ足ラヌ, 元ノ上デシタ通リノ手段ヲ盡セバいやでも出來ル. 和ガ差ニナル位デ, 或一方ノ正負ヲ考ヘルト正ガ負ニナル位ノ違ヒデアルガ代數的ニハ一ツモ變ラナイ.

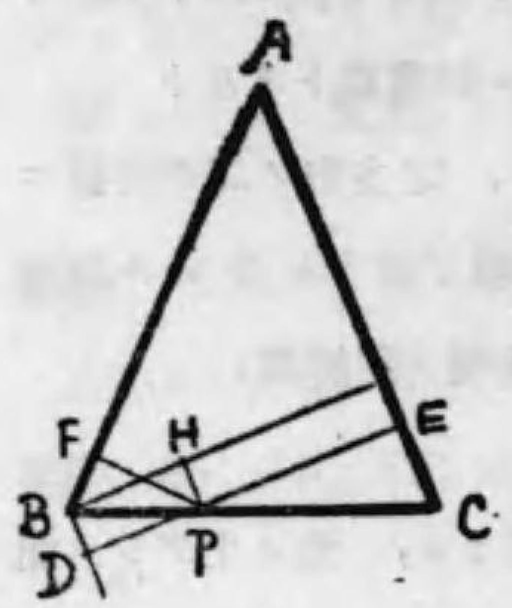
【應用】 P ヲ過ギリ二交線 AB, AC ニテ截ル直線 BPC ヲ作リ, $\triangle ABC$ ヲ A ガ頂ナル二等邊 △ナラシメ, $PB+PC$ ヲ一定スル軌跡ヲ求ム.

【試練】 32. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ一點 P ヨリ等邊ニ平行ナル PD, PE ヲ作リ, AB, AC ト D, E ニテ交ラシメバ $PD+PE$ ハ一定ナリ.

こなし方 $PD=DB$ ヲ考ヘ $PD+PE=AB$ トスル. **研究** 或ハ本間ハ ▱ADPE ノ周ハ定長ナリトスルモ同ジデアル. 又交線 AB, AC アリテ, 此ノ二邊ニ平行線ヲ作リ其ノ和ヲ定長ニ等シカラシムル點ノ軌跡ヲ求メヨ. 又ソノ和ガ定長ヨリ長キタメニハ P ノ存スル範圍如何. ト云フ問題ガ創作サレル.



【試練】 33. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點 P ヨリ二邊ニ至ル距離ノ和ハ一定ナリ. (8陸士. 13鹿農)



こなし方 PE, PF ヲ二垂線トシテ PE+PF=EPD ヲ作ルカ, PF=BH, PE=HG デモ作ルカ要スルニ底角頂ヨリ對邊ニ下ス垂線トナル.

研究 P ガ BC ノ延長上ニアルトキハ差ガ一定ナルコトハ前問ニ同ジ.

【應用】 相交ル二直線ニ至ル距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

こなし方 P ヲ過ギリ二交線ヲ二邊トスル如キ二等邊△ヲ作ル. (軌跡ハ四ツノ群トナル) 差ニシタラ前ニ得ル軌跡ノ延長トナル

【試練】 34. 正三角形内ノ任意ノ點ヨリ三邊ニ下ス垂線ノ和ハ一定ナリ.

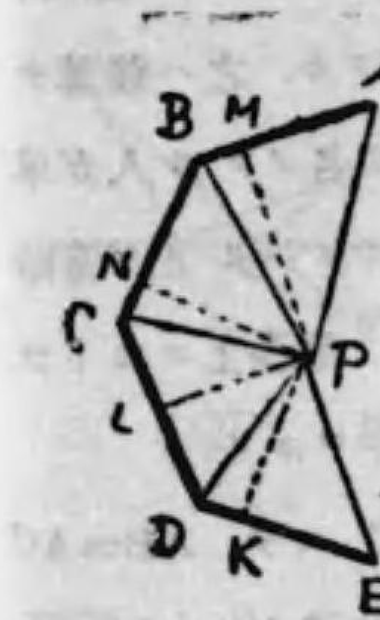
こなし方 MPN∥BC ヲ作リ, 前問ヨリ PE+PF=NK ヲ證シ. NK+NH ハ原△ノ高サトナル. シカシ受驗答案トシテハ邊ガ等シイトキハ正△ニ限ラズ面積ヲ用フルガヨイ.

$\triangle ABC = \triangle BCP + \triangle CAP + \triangle ABP$

$= \frac{1}{2}(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF)$

$= \frac{1}{2} BC(PD + PE + PF) = \text{Const.}$

【試練】 35. 等邊多角形内ノ任意ノ一點ヨリ各邊ニ至ル垂線ノ和ハ恒ニ一定ナルコトヲ證明セヨ (9商・13千園)



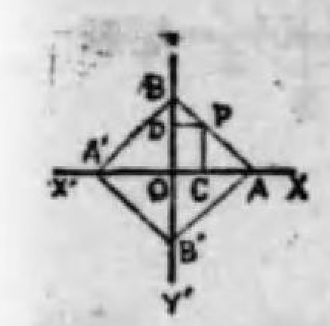
こなし方 等邊ヲ a トシテ面積ヲ利用スル

正多角形 $= \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CDP + \cdots\cdots$

$= \frac{1}{2} a \cdot PM + \frac{1}{2} a \cdot PN + \frac{1}{2} a \cdot PL + \cdots\cdots$

$= \frac{1}{2} a(PM + PN + PL + \cdots\cdots) = \text{Coust.}$

【試練】 36. 互ニ垂直ニ交ル二定直線ニ至ル距離ノ和ガ定長ヨリ小ナル如キ點ハ如何ナル範圍内ニアルカ. (11高)



こなし方 定長 l ニ等シキ點ハ軌跡ノ篇デ詳述スベケレド OX, OY ヲ二邊トスル二等邊三角形ノ底トナル. 之ヲ四象限ニ作ルト正方形ノ周上トナル. 之ヨリ近キ位置ハ此ノ正方形ノ内デアル.

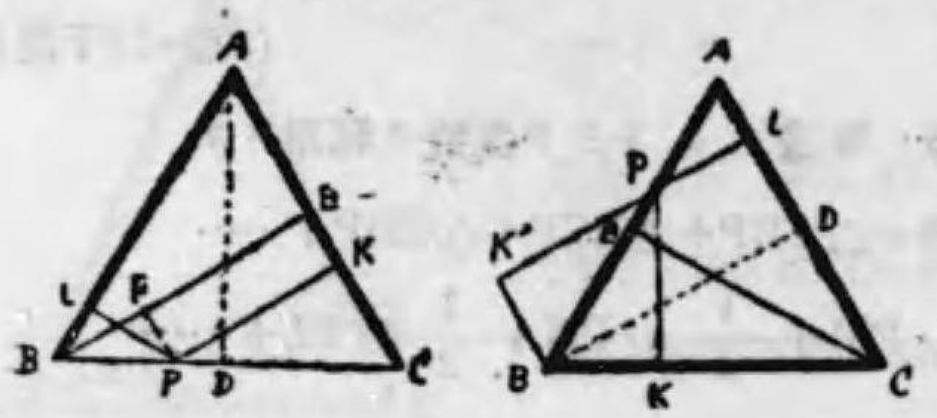
批評 本問ニ對シ大畧次ノ樣ナ採點官ノ批評ガアツタ.

完全ナ答案ハ稀デ白紙ガ多ク, 二直線ノ交點ト云ヒ, $\frac{1}{2}l$ ナル半徑ノ圓内トイヒ, 或ハ交點ヨリ二定直線上ニ $\frac{1}{2}l$ ノ長サヲトツテ之ヲ二邊トスル正方形ト云ヒ, 或ハ二定直線ノ成ス角ノ二等分線ナリト云ヒ, 或ハ此ノ直線以外ナリト云フ, 少シヨロシキハ一象限内ノミヲ上ゲタ. 範圍ハ斷定シテモ證明ガナイノモ多カツタ. (福高教授米山博士)

【試練】 37. 二等邊三角形ノ邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ引ケル垂線ノ和ガ其ノ高サニ等シキトキハ此ノ三角

形ハ正三角形ナルコトヲ證セヨ.　(14陸士)

こなし方 邊上 ヲ底ノ上ニノミトルトキハ前問ノ應用デアル. 之ハ雜誌ナドデ日本デ名ノアル人ガ單ニ之丈デスマシタノガ當時見エタガ, 等邊上ニモトツテ見ナイトワルイ.



i. $\triangle ABC$ ニテ $AB=AC$ トシ, 底邊上ノ點ヲ P トシ, 垂線ヲ PK, PL トス. 底邊上ニ一點ヲトルトキ BE, AD ヲ高サトス, $PF \perp BE$, $PK+PL=BE=AD$〔$BF=PL$〕

$\therefore\ \angle A=\angle B$

ii. P ガ AB 上ニアルトキ LP ノ延長ニ $PK'=PK$ ナラシム.

$BD=CE$ ナレバ $LK'=BD$, $\angle L=\angle D=\angle R$　$\therefore$ BDLK' ハ矩形

$\therefore\ \angle K'=\angle R$, $\triangle PBK$, $\triangle PBK'$〔斜邊等シキ $\angle R\triangle$〕

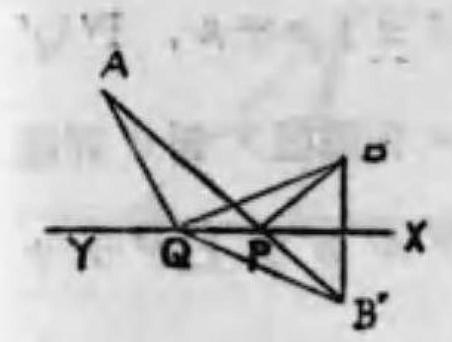
$\therefore\ \angle PBK=\angle PBK'=\angle A$　$\therefore\ \angle A=\angle B=\angle C$

6. 極 大・極 小 問 題

要領 本篇ノ練習題ハ「三角形ノ二邊和ハ一邊ヨリ大ナリ」ニ歸スルモノデ, 對稱移動ヲ行ツテ最短通路ノ發見ヲスルコトニナル.

【主題】 18. 定直線 XY ノ同側ニアル二定點 A, B ヲ XY 上ノ點 P ニ結ビ $\angle APY=\angle BPX$ ナラシムレバ $AP+BP$ ハ A ヨリ XY 上ニ至リ B ニ達スル最短通路ナリ.

答案 XY ニ關スル B ノ對稱點ヲ B' トス. $\angle BPX=\angle XPB'=\angle APY$



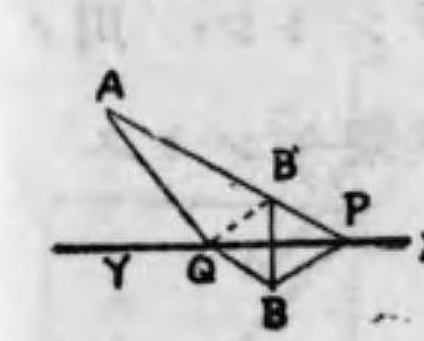
$\therefore$ APB' ハ一直線ヲナシ $AP+PB=AB'$

XY 上ノ任意ノ點ヲ Q トス. Q ハ BB' ノ垂直二等分線上ノ點ナル故 $BQ=QB'$

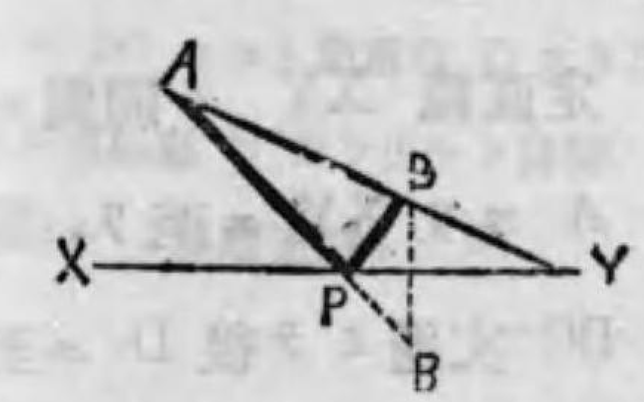
$\therefore\ AQ+QB=AQ+QB'$

$\triangle$ AQB' ニ於テ $AQ+QB'>AB'$　$\therefore$ **$AQ+BQ>AP+BP$**

研究 A, B ガ XY ノ異側ニアラバ $\angle APY=\angle YPB$ ノトキ $AP\sim BP$ ヲ最大ナラシメルコトニナツテ, B' ヲ XY ニ對シテ B ノ對稱點トスルト $\angle YPB=\angle B'PY=\angle APY$ カラ AB'P ハ一直線トナツテ差ハ **AB'** トナル. Q ヲ他ノ點トスルト $AQ-QB=AQ-QB'$ デ $\triangle AQB'$ ヲ捕ヘル.



研究 一直線 XY ノ同側ニアル二點ヲ XY 上ノ一點 P ニ結ビ $\angle APX=\angle BPY$ ナラシメヨ.



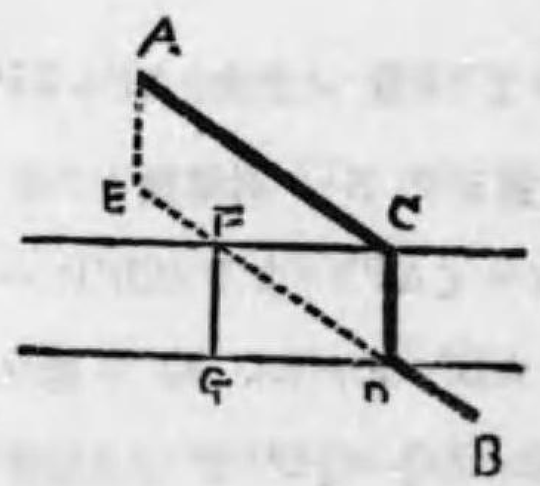
トイフ作圖題ハ上ノ問題ト離レルコト出來ヌ間柄デアル.

【試練】 38. $\angle AOB$ 内ニ二點 P, Q アリ. AO, BO 上ニ C, D ヲトリ, $PC+CD+DQ$ ヲ最小ナラシメヨ.

こなし方 上ノ主題ヲ二ケ所ニ應用シタモノデ OA, OB ニ對シ P, Q ノ

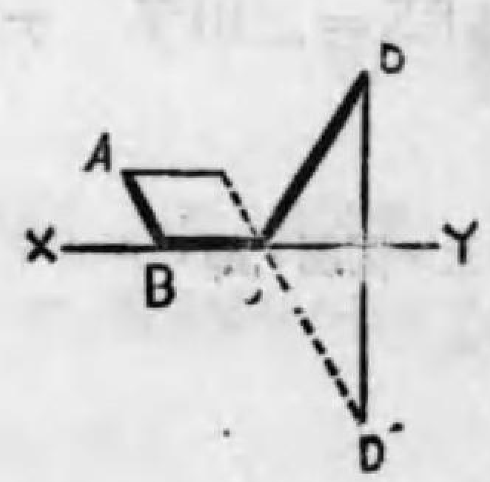
對稱點 P′, Q′ ヲトツテ, P, Q カラ OA, OB 上ニ行ク長サハ P′, Q′ カラ行クノト等シイコトニナル, P′Q′ ガ最短通路トナル. 以下ノ問題ハ作圖題デ再ビ詳述スルケレド主題ト groop デアルカラ上ゲテオクコトニシタ.

【試練】 39. 川ノ兩側ニ A, B ノ二家アリ. A ヨリ B ニ行クニ最小徑ナル道路ヲ作ラントシ, 川ノ流レニ直角ナル橋ヲ架ケントス. 其ノ位置如何.



こなし方　川幅ダケハドコカデ川ニ直角ニ歩ク夫デアルカラ, 初ニ AE ダケ歩キ EB ノ最短通路ヲ求ムルコトニナリテ D ヲ決定スル.

【試練】 40. 定直線 XY ノ同側ニ A, D アリ. A ヨリ XY ニ至リ, 其ノ上ヲ定長 BC 丈進ミテ後 D ニ至ル最短通路ヲ決定セヨ.

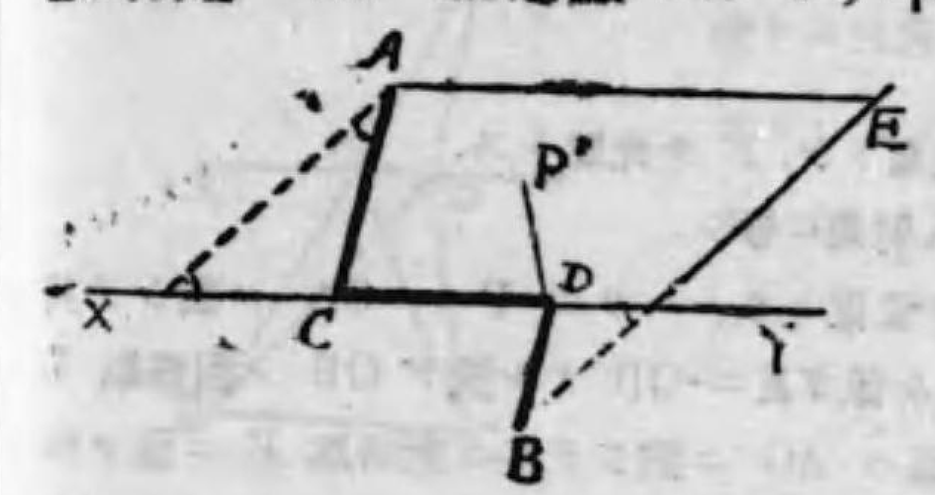


こなし方　一度ハ BC ノ方向ニソレ丈進ムノデアルカラ, 初メソレダケヲ歩イテ後 XY ニ至リテ B ニ達スル最短通路ヲトル.

【試練】 41. 二定點 AB ヨリ平行線ヲ引キ, 定直線 XY トノ交リヲ夫々 C, D トシ,

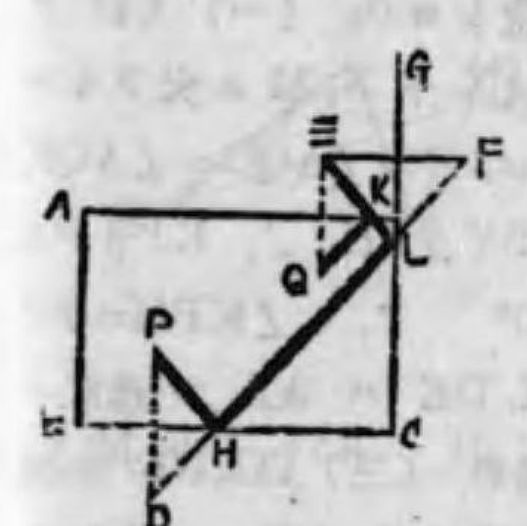
$$AC+CD+BD$$

ヲ定長 l ナラシメヨ.



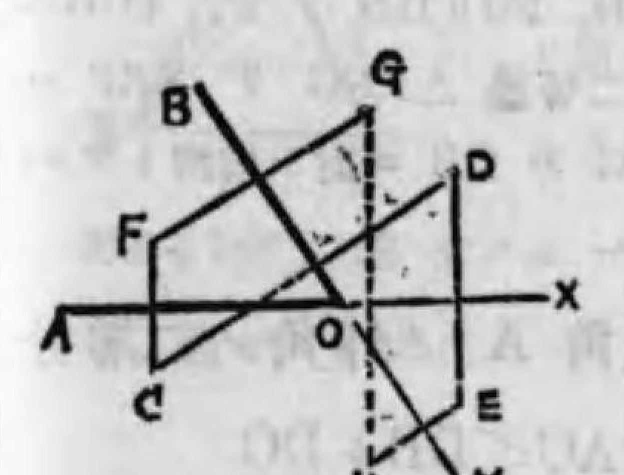
こなし方　A, B ガ XY ノ異側ニアルトキ, i. AE∥XY, AE＝l ナラシム. ii. EB ト XY トヲ G ニ交ラシメ. iii. ∠G＝∠B トシテ BD ヲ作リ, iv. BD∥AC ナラシム. 同側ノトキハ B′ トシテ B ニ移セバ同ジニナル.

【試練】 42. 矩形ノ玉突臺上ニ紅白二球アリ. 紅球ヲ突キテ一邊, 二邊, 三邊又ハ四邊ニ當テ然ル後白球ニ當ラシメヨ.



こなし方　玉ノ反射ハ入射ト等角ヲシテ最短通路ヲ運動スル. P ヨリ出タノハ BC ニヨル對稱點 D カラ出ルト同一, Q ヨリ出ルト思ヘバ AD ニヨル對稱點 E カラ出ルト同様, ソレハ又 CD ニヨル F カラ出ルト同ジデ DF ノ最短通路トナル.

【試練】 43. 60° ヲ成スニツノ平面鏡ノ間ニアル蠟燭ノ像ハ幾ツ出來ルカ.



本問ハサマデ大切デナイ，物理トシテ趣味ノアル人丈研究セラレ，他ノ人ハ書イテヨロシイ．

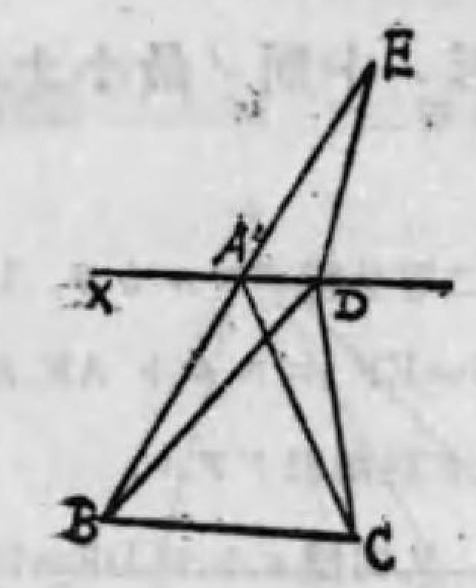
解 OA, OB ヲ 60° ヲ成ス二鏡面トシ，F ヲ光點トス．

<u>物理定則</u>　光ノ反射角ハ入射角ニ等シ．

之ヲ用ヒテ考フルニ，見ル人ノ位置ニカヽハラズ F ハ OA ニ對シテ其ノ對稱點 C ニ像ヲ作ル．C ナル像ガ更ニ OB ナル鏡デ OB ノ對稱點 D ニ像點ヲ作ル．更ニ D ナル像ハ AO ニ對シテ其ノ對稱點 E ニ像ヲ作ル．更ニ E ハ OB ニ對シテ其ノ對像點 H ニ像ヲ作ル．H ハ更ニ OA ニ對シテ G ニ像ヲ作ル．ソコデ OB ニ對シテ G, F ハ對稱デアルコトヲ證スルト像ハ五ツト定メラレル．

● 諸子ハ本書ノ圖ニ次ノ順序ニ補線ヲ入レテ Note ニ大キク作圖セラレヨ．FG⊥OB，ソノ交點ヲ L トス．FM=MG ヲ證ショウ．(一) CD ヲ AX, BY, GH ト Q, K, P ニ交ラセ，HG ヲ BY, AX ト N, M ニ交ラセルト △KQO ハ ∠K=∠R, ∠O=60°，∴ ∠KQO=30°=∠AQC=∠AQF，ソシテ CQ=FQ ∴ △QFC ハ正△．(二) CD⊥BY⊥EH ∴ KP∥HE 即チ ∠QPH=∠PHE 又 △PQM デ ∠Q=30° ∴ ∠KPH=60° =∠GPD=∠GHE 又 GH⊥AX⊥DE 且 GH, DE ハ AX デ垂直ニ二等分セラレル．∴ 四邊形 GHED ハ正梯形 (三) FC, DE ノ垂直二等分線ガ AX デアルカラ四邊形 FCED ハ正梯形，CD ハ XA トハ一點 Q デ交ル．∴ ∠PQE=∠QEH=∠EHP=∠HPQ=60°
(四) ∠HGD=∠GHE=60°=∠GPD ∴ △PGD ハ正△
又 ∠PNK=∠HNY=30°=∠YNE ∴ △NHE ハ正△ ∴ FQNE ハ一直線 ∠FNB=∠BNG=30° (五) CHED ハ正梯形 ∴ ∠DCH =∠CDE=60°=∠CPH ∴ △CPH ハ正△ ∴ CH=PH=NG
(六) ∠GHC=∠FNG=60° ∴ FN∥CH, FC∥HN ∴ FCHN ハ□ ∴ CH=FN ∴ GN=FN (七) 二等邊 △FNG デ NBP ハ頂角ノ二等分線トナル．故ニ FL=FG, F, G ハ OB ニ對シ對稱トナル．

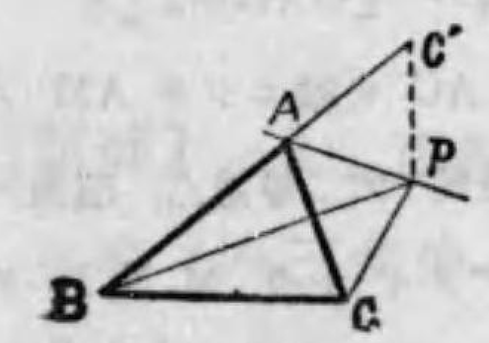
【試練】 44. 二等邊 △ABC ノ頂角 A ノ外角ノ二等分線上ノ一點ヲ D トセバ　AB+AC<DB+DC



こなし方　本問ハ改作シテ「等底上ニ立ツ等積ナル三角形ノ周ノ最小ナルハ二等邊三角形ナリ」トナル．BA ノ延長上ニ AC=AE ヲトルカ，AX ニ對シ C ノ對稱點ヲ E トスルコトデ比較スル．次問モ之ニ準ズル．

△BDE デ BE<BD+DE

【試練】 45. △ABC ノ A ニ於ケル外角ノ二等分線上ニ一點 P ヲトレバ

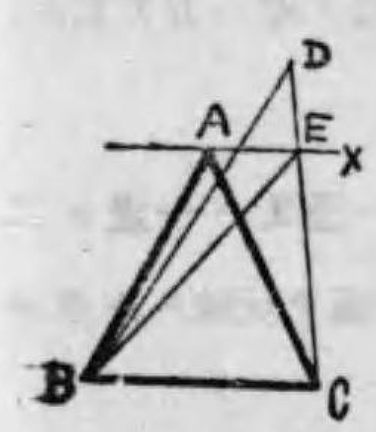


PB+PC>AB+AC

こなし方　BA ノ延長上ニ C′ ヲ AC′=AC ニトル．PC=PC′ デ BP+PC=BP+PC′

【試練】 46. BC ヲ底トシテ立ツ周ノ等シキ三角形ノ中ニテ高サハ二等邊三角形ガ最高ナリ．

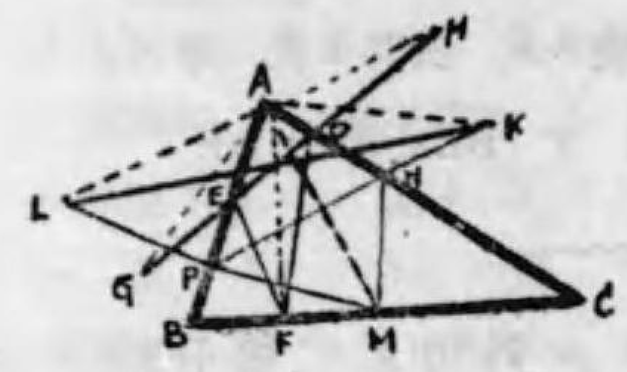
こなし方　本問ヲ改作スルト「面積ノ最大ナルハ二等邊三角形ナリ」トナル．二等邊三角形ヲ ABC トシ，AX∥BC トシテ他ノ等周三角形ヲ DBC トスルニ D ノ位置ヲ AX ニツイテ考ヘ歸謬法ヲ用フル．i. AX 上ニアルトスルト前々問デ不都合ニナル．ii. AX ノ BC ノ反對側ニアルトスルト DC ハ AX ト交ル．交點 E トスル．



DB+DE>BE デアル．BE+EC 既ニ AB+AC(+BC デ定周) ヨリ長イ，況ヤデアル．

【試棟】 47. 三角形ニ内接スル三角形ノ中周ノ最小ナルハ垂足三角形ナリ.

こなし方 53頁試棟29カラ AB ハ E ノ外角ノ二等分線デアルカラ, DE ヲ延長シテ $EG=EF$ ニスルト AF, AG ハ AB ヲ軸トシタ對稱形デアル.



$\angle GAE=\angle FAE$, 又同様ニシテ $DF=DH$ ニスルト AF ト AH トハ AC ニ對シテ對稱トナリ, $\angle HAC=\angle CAF$

∴ $\triangle AGH$ ハ $AF=AG=AH$ デ二等邊△, 頂角ハ $\angle GAH=2\angle A$

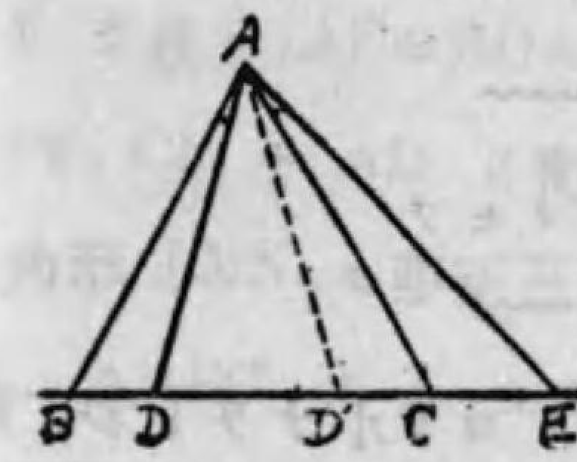
次ニ AB ヲ軸トシテ AM ノ對稱形ヲ AL トシ, AC ヲ軸ニシテ AM ノ對稱形ヲ AK トスルト $\triangle LAK$ ハ $AM=AL=AK$ デ二等邊△, 頂角ハ $2\angle A$ トナル. ソシテ $\triangle PMN$ ハ垂足三角形デナイカラ M, N, P デ PM, MN; MN, NP; NP, PM ハ等角ニナラヌ. ソレデ LPNK ハ屈折線デアル. タトヘLPNK ガ一直線トシタトテ $AF<MA$ デ頂角ノ等シイ二等邊△ノ長イ脚ノ底ガ大デアル.

要領 等角ヲ作ルト對稱點ガ出來ル. 自然等長線分ノ移動ガ出來ル. 之ヲ對對移動法ト云フ. 移動法トシテ平行移動法ト倶ニ大切ナ考ヘ方デアル.

エキス 二線分ノ大小ヲ證スル關鍵ハ三角形ノ二邊和ト一邊又ハ一邊ト二邊差ニ歸サセルコトデアル. 主題18ヲモ併セテソノ要領ヲ玩味スルガヨロシイ.

【主題】 19 頂點ヲ共有シ, 一定直線上ニ等底ヲ有スル三角形ノ中, 頂角ノ最大ナルハ二等邊三角形ナリ.

答案 $\triangle ABC$ ヲ二等邊トシテ頂ヲ A トスル. $\triangle ADE$ ヲ他ノ△トシテ $BC=DE$　$BD=CD'$ ナラシメルト



$\angle BAD=\angle CAD'$　$BC-CD=DE-CD$ デ $BD=CE=CD'$, AC ハ $\triangle AED'$ ノ中線デアル. A ガ BC ヘノ垂足カラハ D', C, E ト順ニ遠クナル. ソレデ $AD'<AE$ ソレデ10頁ノ(5)圖デ $\angle CAD'>\angle CAE$, $\angle BAD>\angle CAE$

∴ $\angle DAC+\angle BAD>\angle DAC+\angle CAE$ トナツテ $\angle BAC>\angle DAE$

【試棟】 49. 頂點ヲ共有シ頂角等シク, 底邊ヲ一直線上ニ有スル三角形ノ底邊ノ中二等邊ノガ最小アリ.（14早稻田）

こなし方 前問ノ逆デアル. $\angle BAC=\angle DAC$ カラ $\angle BAD=\angle CAE$ ガ得ラレル. ソシテ $\angle CAD'=\angle CAE$ トナツテ AC ハ $\angle EAD'$ ノ二等分線トナル. ソレデ $AD'<AE$ デアルカラ $D'C<CE$〔13頁14圖〕カラ $BD<CE$ トナリ, $BC<DE$

標準練磨問題

自力試練ノ努力ヲシマセフ

1. 三角形 ABC ニ於テ AB ハ AC ヨリ小ナリトシ，M ヲ BC ノ中點トスレバ角 CAM ハ角 BAM ヨリ小ナルコトヲ證セヨ． (1東船・4東工・6神商・13海軍)

2. 三角形ノ二ツノ邊ノ中點ヲ結ビツケル線分ハ第三邊ニ平行ニシテ其ノ半分ニ等シキコトヲ證明セヨ．(13農實)

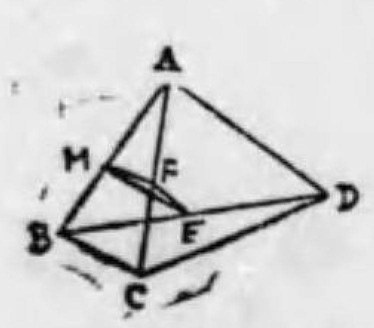
3. 四邊形ノ兩對角線ノ中點ヲ結ビツクル直線ハ相對スル二邊ノ差シ半分ヨリモ小ナラザルコトヲ證セヨ． (13陸士)

4. 三角形 ABC ノ B 及ビ C ニ於ケル外角ヲ二等分スル二ツノ直線ノ夾ム角ハ A ニ於ケル外角ノ半分ニ等シ． (14京城商)

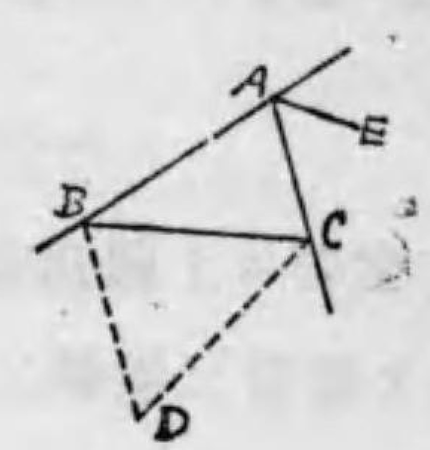
---

1. 10頁5圖　　2. 14頁4圖

3. △MEF ヲ作リ一邊ト二邊差　　4.



$MF=\frac{1}{2}BC$, $ME=\frac{1}{2}AD$



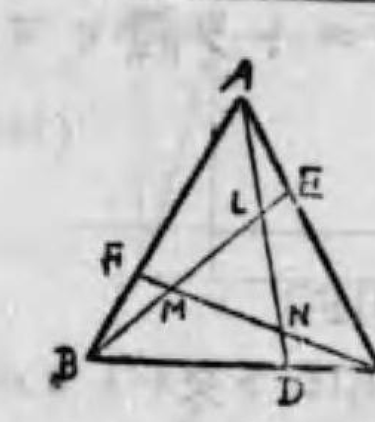
外角ノ和 4∠R，ソノ半分寵 2∠R △BCD 內角ハ 2∠R

5. 正三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々一點 D, E, F ヲ截リ AF=BD=CE ナラシメ，AD ト BE，BE ト CF，CF ト AD ノ交點ヲ夫々 L, M, N トスルトキハ三角形 LMN モ亦正三角形ナルコトヲ證セヨ． (14彥商)

6. △ABC ノ A ヨリ出ヅル高サ，中線，ソノ角ノ二等分線ノ位置ノ關係ヲ述ベテ之ヲ證セヨ． (1東商・5廣師)

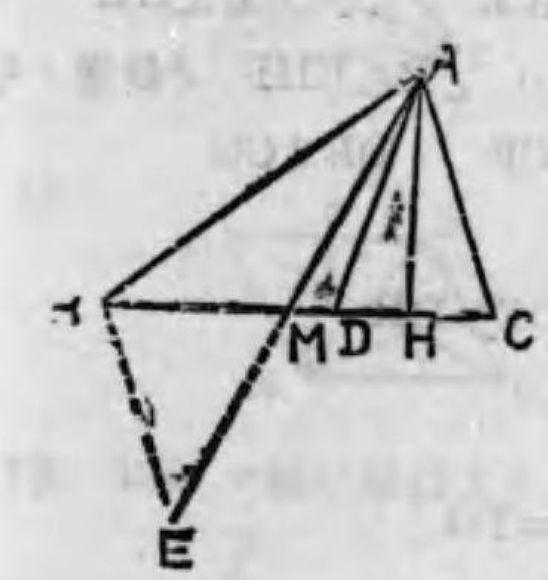
7. △ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ D トス．邊 AC 上ニ AE ヲ AC ノ三分ノ二ニ取リ，CD ト BE トノ交點ヲ O トセバ $OE=\frac{1}{4}BE$ (海兵)

5.



△BCF, △CAD, △ABE;
△BMF, △CND, △AEL
全等ヨリ ∠M=∠N=∠L

6.

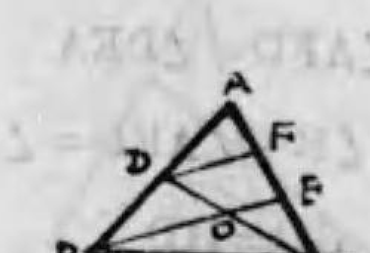


10 頁 (5)圖デ ∠BAM<∠CAM トシテ ∠A ノ等分ト比較，∠B, ∠C ノ餘角トシテ ∠BAH>∠CAH カラ AD ト比ス．又 ∠A ノ二等分カラ

AB : AC=BD : DC>1

ヲ用フルト早イ．

7.



AF=FE=EC, AD=DB ∴ $DF=\frac{1}{2}BE$

$OE=\frac{1}{2}DF$ ヲ用ヒテ求メル．

8. A ヲ頂點トスル二等邊三角形 ABC ニ於テ，邊 AB 上ノ任意ノ一點ヲ D トシ，AC 上ニ BD ニ等シク CE ヲトリ，DE ヲ結ベバ

(1) BC ハ DE ヲ二等分ス.

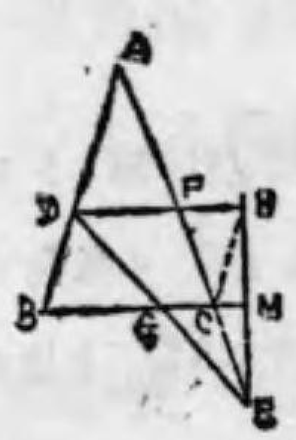
(2) DE ハ BC ヨリ大ナリ.　(13和商)

9. $\triangle ABC$ ノ三邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トシ，E ヨリ AC ニ垂線ヲ立テ $\triangle ABC$ ノ形外ニ EH ヲ AC ノ半分ニ等シクトレ，同樣ニ F ヨリ AB ニ垂線ヲ立テ $\triangle ABC$ ノ形外ニ FG ヲ AB ノ半分ニ等シクトレ．然ルトキハ DH ト DG トハ等長ナルコトヲ證セヨ.

(14和商)

---

8. $DH \perp BC$ トスル，$\angle B = \angle DHC = \angle ACB = \angle HFC$



$\therefore$ FC=HC=CE; BCM ガ EH ト交ルトセバ

$\angle B = \angle C = \angle HCM = \angle MCE$　$\therefore$ $CM \perp HE$

$\therefore$ $DH \perp HE$　$\therefore$ C ハ $\angle R\triangle EHF$ ノ斜邊ノ中點

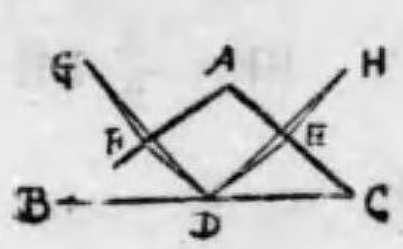
(1) $\triangle DEF$ ニテ EC=CF　$DE \parallel CG$

$\therefore$ DG=GE

(2) $\angle R\triangle DHE$ ニテ DE>DH

$\therefore$ DE>BC

9. $DF = \frac{1}{2}AC = EH$　　$DE = \frac{1}{2}AB = FG$



$FD \parallel AC$, $AB \parallel ED$　$\therefore$ $\angle AFD = \angle DEA$

$\therefore$ $\angle R + \angle AFD = \angle GFD = \angle R + \angle AED = \angle DEH$

$\therefore$ $\triangle GFD \equiv \triangle DEH$　$\therefore$ GD=HD

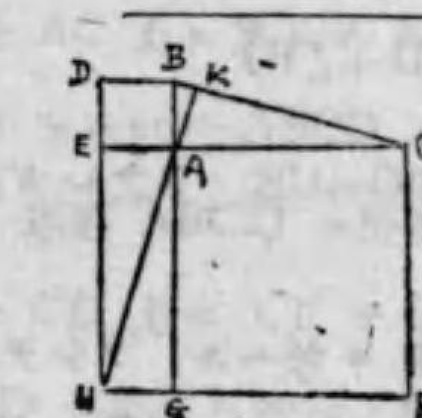
10. 直角三角形 ABC ノ直角ノ二邊 AB, AC 上ニ，三角形ノ外側ヘ，正方形 ABDE, ACFG ヲ作リ，DE, FG ヲ延長シテ H ニ交ラシムレバ H ト A トヲ過グル直線ハ斜邊 BC ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.　(13商大豫)

11. 對角線ガ相等シキ梯形ノ平行ナラザル邊ハ相等シ.(7山商)

12. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AD, CD ノ中點ヲ E, F トスレバ BE, BF ハ對角線ヲ三等分ス.　(水產)

13. 四邊形 ABCD ニ於テ BA, CD ノ延長ノ交點ヲ E ト

10.



$\triangle ABC = \triangle AHG$ (二邊等シキ $\angle R\triangle$)

$\angle GAH = \angle ACB$

$AK \perp BC$ トセバ $\angle ACB = \angle BAK$

$\therefore$ $\angle GAH = \angle BAK$

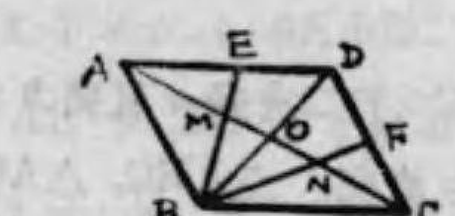
$\therefore$ HAK ガ一直線トナル.

11.

$AE \perp BC \perp DF$ トスル，$\angle R\triangle AEC$, BDF ハ斜邊ト一邊等シク全等

$\angle ACB = \angle DBC$，次ニ $\triangle ABC \equiv \triangle BCD$

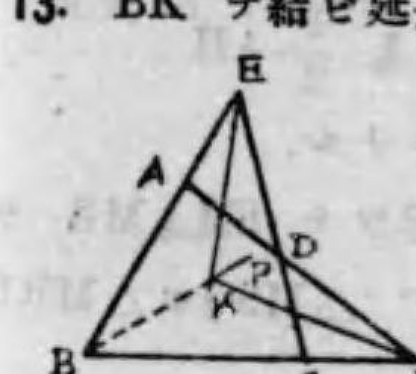
12.



$\triangle ABD$ ニテ AO, BE ハ中線，M ハ重心

$\therefore$ $AM = 2MO = \frac{2}{3}AO$　　同樣ニ $CM = 2OM = \frac{2}{3}OC$

13. BK ヲ結ビ延長上ニ P ヲトル.



$\angle EKP = \angle EBK + \frac{1}{2}\angle E$

$\angle FKP = \angle FBK + \frac{1}{2}\angle F$

$\therefore$ $\angle EKF = \angle B + \frac{1}{2}(\angle E + \angle F)$

シ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トシ, ∠E, ∠F ノ二等分線ガ K ニテ交ラバ　$\angle EKF=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$

14. △ABC ノ邊 AB, AC 上ニ其ノ外側ニ正方形 ABDE, ACFG ヲ作リテ其ノ中心ヲ P, N トシ, 又 BC, EG ノ中點ヲ M, Q トセバ PMNQ ハ正方形ナリ.　(名工)

15. 四邊形 ABCD ノ各邊上ニ其ノ外側ニ正方形 ABEF, BHGC, CRLD, DNOA ヲ作ルトキハ, 對邊上ノ正方形ノ中心 P, R; Q, S ヲ結ブ直線ハ直交ス.　(陸經)

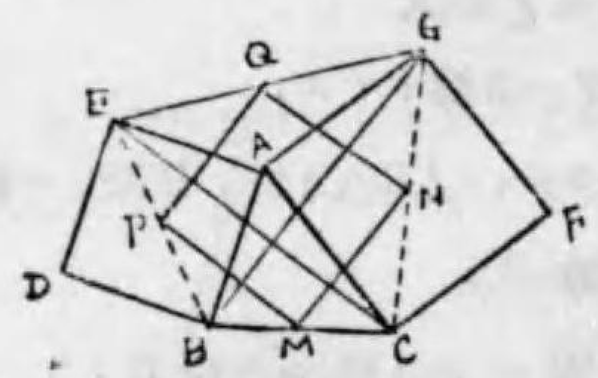
$\angle EAF=\angle B+\angle BFA$　△ABF ノ外角

$\angle ADC=\angle EAF+\angle AED$　△AED ノ外角

$\therefore\ \angle ADC=\angle B+\angle F+\angle E$　$\therefore\ \angle E+\angle F=\angle D-\angle B$

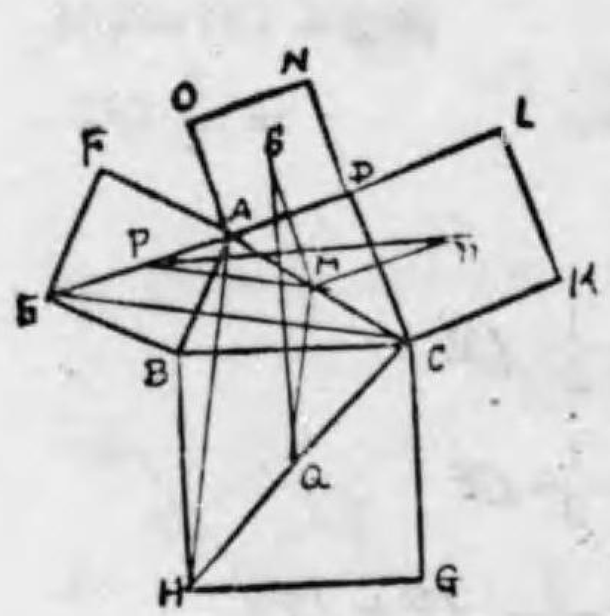
$\therefore\ \angle EKF=\angle B+\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)=\frac{1}{2}(\angle D+\angle B)$

14. $MP \perp \frac{1}{2}CE$, $PQ \perp \frac{1}{2}BG$ デアルカラ BG=CE ト之レガ直交スルコトヲ證ス.



△ACE≡△AGB ヲ考ヘル. ソシテ二邊ガ夫々直交スル $\angle EAB=\angle R=\angle CAG$ ソレデ GB, CE モ亦直交スル 即チ AGCK ガ環座 $\angle GAC=\angle R=\angle GKC$ (K ハ BG, CE ノ交點)角ノ轉回法ヲ味ヘ.

15. 前問デ使ツタ頭ノ働キヲ二ケ所ニ使フ.



△ABH≡△EBC デ二邊夫々直交カラ AH=EC デ互ニ直交, △AEC, △ACH ノ二邊中點線カラ AC ノ中點 M ヲトツテ $PM \perp \frac{1}{2}CE$,　$MQ \perp \frac{1}{2}AH$

ソレデ $PM \perp MQ$ トナル.

同ジコトヲ D 點デ行ツテ $SM \perp MR$ ヲ得, 再ビ角ノ轉回法デ △MSQ≡△MRP カラ $SQ \perp RP$.

16. 邊數ガ夫々 m, n, p ナル三通リノ正多角形ヲトリ, 各多角形ノ一ツノ頂點ヲ共有セシメ, 其ノ頂點ノ周リヲ隙間ナク, マタソレ等ノ正多角形ガ重リ合フコトモナキヤウニ置キ得ルトキハ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ ナルコトヲ證セヨ.　(15慈醫)

17. 二ツノ梯形ニ於テ同ジ順ニトリタル四邊相等シキトキハ兩形ハ全ク相等シキコトヲ證明セヨ.　(15同志豫)

18. 三角形 ABC ノ二邊 AB, BC ノ中點ヲ夫々 E, F トシ, 二點 G, H ハ邊 AC 上ニアリテ AG=GH=HC ナリトス. EG, FH ノ延長ノ交點ヲ D トスレバ ABCD ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ.　(15陸士)

19. 矩形 ABCD ニ於テ短邊 BC ハ長邊 AB ノ半分ヨリハ大ナリトス. 今 CD 上ニ CE ヲ AB, BC, CE ガ等差級數ヲナス如クトリ, EF ヲ CD ニ垂直ニ矩形ノ内方ニ引ク. 然レバ内角 A, B, C 及ビ ∠CEF ノ二等分線ハ正方形ヲ作ルコトヲ證セヨ.　(15横工)

20. 鋭角三角形 ABC ノ二邊 BC, AC ニ於テ BC＞AC ナルトキ A 點ヨリ邊 BC ニ下セル垂線ヲ AE トシ, B 點ヨリ邊 AC ニ下セル垂線ヲ BD トスレバ AE+BC＞BD+AC ナルコトヲ證セヨ.　(15小商)

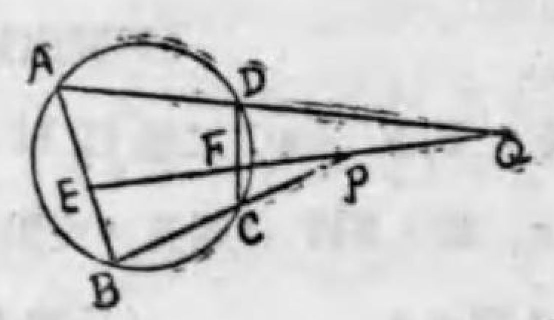
21. AB ト AC トガ相等シカラザル三角形 ABC ニ於テ角 A ノ二等分線 AD ハ, 角 A ヨリ BC ニ引ケル垂線 AN ト中線 AM トノ間ニアリ. 又角 A ガ直角ナルトキハ AD ハ角 MAN ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.　(15長工)

第二編

圓

1. 角ヲ主ニスル問題

【主題】 20. 圓ニ內接スル四邊形ノ對邊ト等角ヲ成ス直線ハ他ノ二邊トモ等角ヲ成ス. （商船・小商）



答案 假設 ABCD ヲ圓內四邊形トシ, 割線 QPFE ガ AD, BC ト Q, P ニテ交リ

∠AQE＝∠BPE

終結 ∠DFQ＝∠BEP

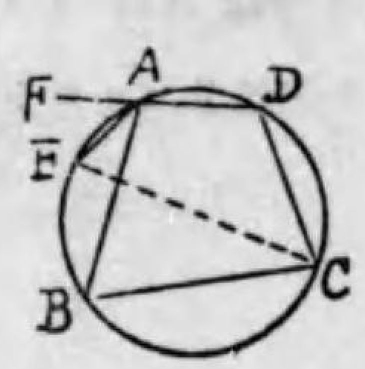
證 △PEB, △DFQ ニ於テ

$$\begin{cases} \angle EPB = \angle DQF & \text{（假設）} \\ \angle EBC = \angle FDQ & \text{（圓內四邊形 DABC ヨリ）} \end{cases}$$

∴ ∠BEP＝∠DFQ

【試練】 50. 圓ニ內接スル四邊形ノ一ツノ外角ヲ二等分スル直線ガ圓周ト交ル點ヲ此外角ノ內對角ノ頂點ニ結ビツクル一直線ハ其ノ角ヲ二等分ス.

こなし方



四邊形 ABCD ノ A ノ外角ノ二等分線ヲ AE トシテ CE ガ ∠C ヲ二等分スルコトデアル.

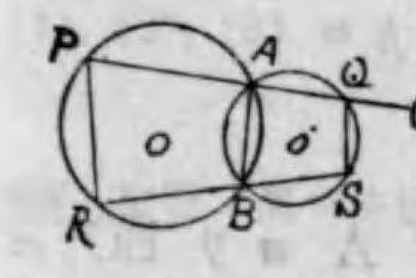
圓內四邊形 AECD カラ ∠FAE＝∠ECD

$\overset{\frown}{BE}$ ノ周角カラ ∠EAB＝∠ECB

【主題】 21. A, B ニテ相交ル二圓 O, O′ ニ於テ交點ヲ過ギリ PAQ, RBS ヲ引キ, 一ツノ圓ト P, R ニ於テ, 他ノ圓ト Q, S ニ交ラシメバ PR ト QS トハ平行ナリ. （東商・海兵）

着眼 同位角カ錯角カヲ睨ンデ等シイコトヲ證スル.

答案 AQ ヲ C マデ延長ス.



PRBA ハ圓內四邊形ナル故

∠APR＝∠ABS……………………(1)

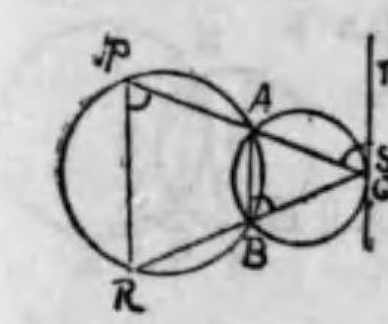
ABSQ ハ圓內四邊形ナル故

∠CQS＝∠ABS……………………(2)

∴ ∠APR＝∠CQS

PR, QS ガ PC ニ交ツテ同位角等シキ故 PR ∥ QS

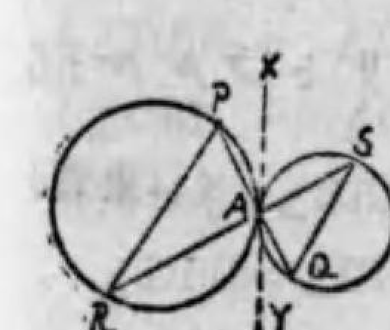
研究 位置ニヨツテ一見證明ガ違フ樣デアルガ要領ハ變ラナイ.



∠RPA＝∠ABS＝∠AQS（$\overset{\frown}{AS}$ ノ周角）

ソシテ同位角ガ錯角ニナルコトモアル.

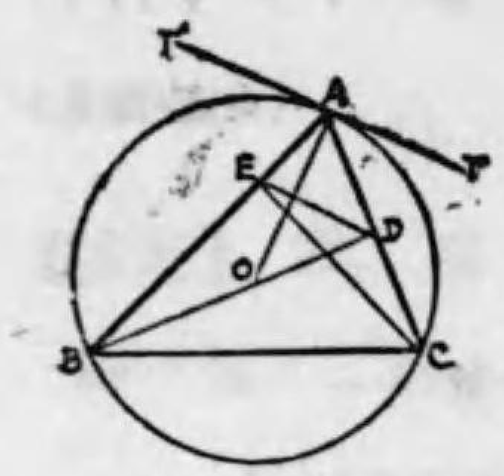
S, Q ガ一致スルトキハ切線ト弦トノナス角ヲ持込ムコトニナル.



A, B ガ一致スルトキ, 即チ二圓ノ切スルトキハ切線ト弦ト成ス角ヲ二度ト對頂角トデ解決ガ出來ル.

〔注意〕 受驗答案ハ色々ノ場合ノ吟味的證明ハ不要デアル. 一般ノ場合ヲ一ツ上ゲタラソレデ充分デアル.

【試練】 51. $\triangle ABC$ ノ B, C ヨリ對邊ニ垂線 BD, CE ヲ下シ. 外心ヲ O トセバ $DE \perp AO$ ナリ.（なーげるノ定理）



こなし方 ∠R ガ二ツアルコトニ目ヲツケテ

E, B, C, D ガ環坐, $\angle ABC = \angle ADE$

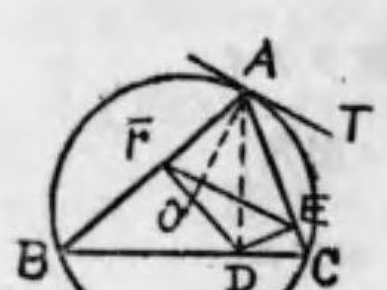
A ニ於テ外接圓ニ切線 TT′ ヲ作レバ

$\angle ABC = \angle TAC$ ∴ $\angle TAC = \angle ADE$

∴ $TT' \parallel DE$

ソコヘ $AO \perp TT'$ ヲ持込ム.

【試練】 52. 外心ヲ O トスル $\triangle ABC$ ノ A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下シ, D ヨリ AB, AC ニ垂線 DF, DE ヲ作レバ $EF \perp AO$ ナリ.（醫專）



こなし方 後ニ解說スルガ FBCE ハ圓內四邊形デアルカラ $\angle AEF = \angle ABC$

A ニ於テ外接圓ニ切線 AT ヲ作ルト

$\angle TAC = \angle ABC$

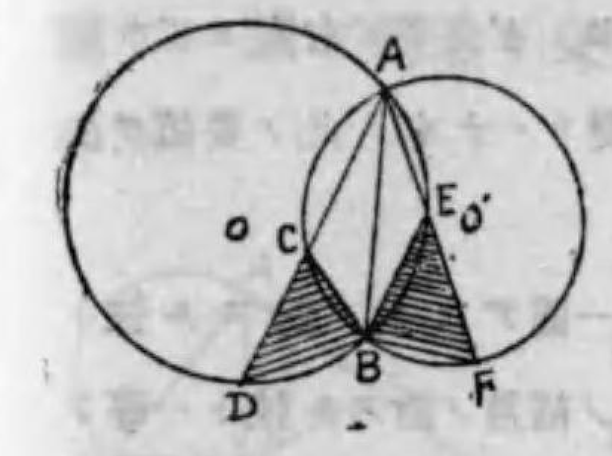
∴ $\angle AEF = \angle TAC$ ヨリ $TA \parallel EF$

【主題】 22. 相交ル二ツノ圓周ノ一交點 A ヲ過リ, 共通弦 AB ト等角ヲ成ス割線ガ兩圓ニテ切リトラルル部分 CD, EF ハ相等シ.（11東實）

答案 ○ $\angle DAB = \angle BAE$（假設）ハ O 圓ノ周角ナリ.

∴ $BD = BE$ ……………(1)

同樣ニ $\angle CAB = \angle BAF$ ヨリ



$BC = BF$ ……………(2)

而シテ O 圓內四邊形 ADBE ヨリ

$\angle DBE$ ハ $\angle DAE$ ノ補角

O′ 圓內四邊形 ACBF ヨリ

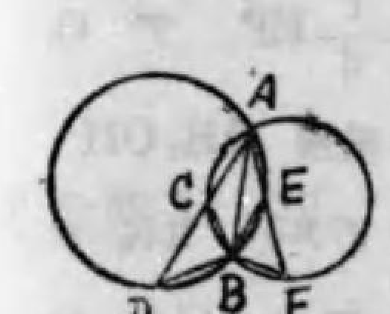
$\angle CBF$ ハ $\angle CAF$ ノ補角

此ノ各ヨリ $\angle CBE$ ヲ減ジテ

$\angle DBC = \angle EBF$ ……………(3)

(1), (2), (3) ヨリ $\triangle BCD \equiv \triangle BFE$ ∴ $CD = EF$

研究 位置ノ異ツタ場合 受驗者ノ多クガ圖ガ自分ノ得意ナ向キニナツテ井ナイトへこたれテシマフ. 自分ノ都合ノヨイトキニ出來タモノナラ, 自分ノいやな形, いやな格恰ノトキニモ出來ル筈デアル. 之ハ本問バカリデナイガ此處デ諸君ノ蒙ヲ啓クタメニ次圖ニツイテ研究スル. ソノタメ對照ニ都合ヨクスル.



$\triangle BCD$, $\triangle BEF$ ニテ $\angle DAB$, $\angle BAE$ ハ等シ.

∴ $BD = BE$

$\angle CAB$, $\angle BAF$ ハ等シ

∴ $BC = BF$

$\begin{cases} \angle DBE \text{ ハ } \angle DAE \text{ ノ補角} \\ \angle CBF \text{ ハ } \angle CAF \text{ ノ補角} \end{cases}$

兩角ヨリ $\angle CBE$ ヲ減ジテ

$\angle DBC = \angle EBF$

∴ $\triangle BCD \equiv \triangle BEF$

從ツテ $CD = EF$

$\triangle BCD$, $\triangle BEF$ ニテ $\angle DAB$, $\angle BAE$ ハ補角

∴ $BD = BE$ *

$\angle CAB$, $\angle BAF$ ハ補角

∴ $BC = BF$

$\begin{cases} \angle DBE \text{ ハ } \angle DAE \text{ ニ等シ} \\ \angle CBF \text{ ハ } \angle CAF \text{ ニ等シ} \end{cases}$

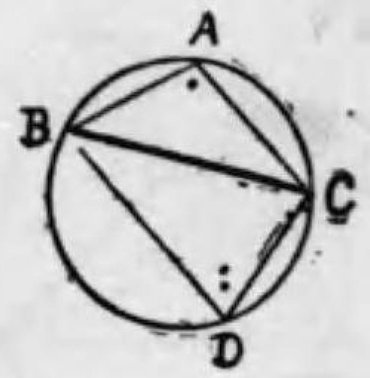
兩角ニ $\angle CBE$ ヲ加ヘテ

$\angle DBC = \angle EBF$

$\triangle BCD \equiv \triangle BEF$

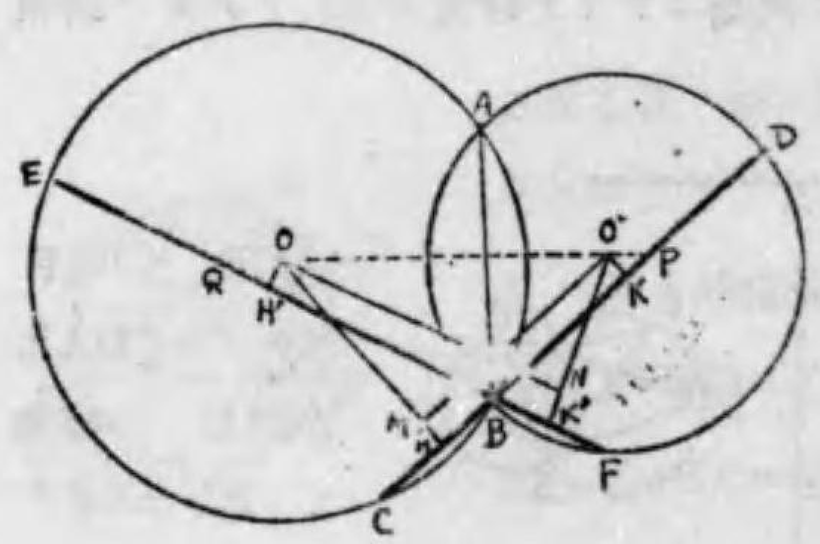
從ツテ $CD = EF$

要領 左右比較シテ實ニ痛快ナノハ 等シ 補角 ガ公平ニ右左ニ二ツ宛出來タ. 考ヘ方ナリ揃ヘル材料ニハ更ニ更ニ變リハナイ. 此ノ要領ヲ決シテ決シテ忘レテハナラヌ.



同一圓デ α 角ノ對スル弦トα ノ補角ノ對スル弦トハ等シイコトヲ左圖デ知ラレヨ. ソウスルト上ノ * 印ガ氷解スル.

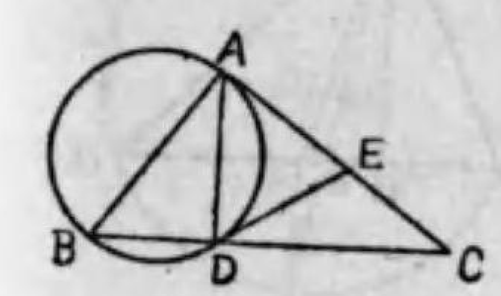
研究 又ノ問題ヲ次ノ樣ニ考ヘテモヨイ. 今度ハ B ヲ過ギラシメヨウ. 假設カラ推定セネバナラヌコトハ BA ガ ∠EBD ノ二等分線デアルカラ OO′ ニヨリ BA⊥OO′ カラ二等邊△ガ作ラレルコト, ソコデ CO′ ヲ延長シテ CD, EF ト P, Q デ交ラス. 次ニ終結カラ考ヘルコトハ $\frac{1}{2}$CD$=\frac{1}{2}$EF デ O; O′ カラ二弦ニ垂線 OH, OH′, O′K, O′K′ ヲ下ス. ソシテ HK=H′K′ ヲ證シヨウトスル. ソシテ ON=O′M ヲ證スルコトニスル. ソレニ假設ノ展開ガ持込マレネバナラヌ. △BPQ ガ二等邊△デ ∠P=∠Q デアルカラ CD∥O′M, EF∥ON ニ着眼シタラ ∠NOO′=∠MO′O ガ知レル. ソコデ二ツノ∠R△ONO′, △OMO′ ヲ比べ斜邊ト他ノ一鋭角ノ相等カラ全等トナツテ目的ヲ達スル.



【試練】 53. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一邊ヲ直徑トシテ

書ケル圓ガ斜邊ト交ル點ニ於テノ切線ハ, 他ノ邊ヲ二等分ス.

(京工・秋鑛)



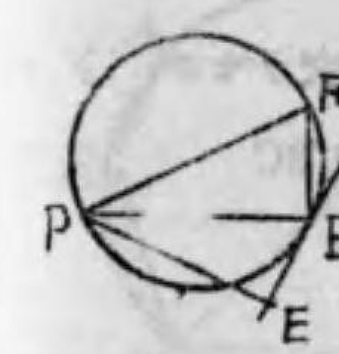
こなし方 △ADC ガ AD ノ周角カラ直角三角形ニナルカラ斜邊ノ中點ヲ云ヒタイ.

E カラ AB 圓ヘノ切線トシテ

∠EAD=∠ADE

【試練】 54. 圓ノ弦 PB ノ一端 P ヨリ, B ニ於ケル切線ヘ垂線 PE ト直徑 PF トヲ引クトキ, PB ハ ∠EPF ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

(6商船)



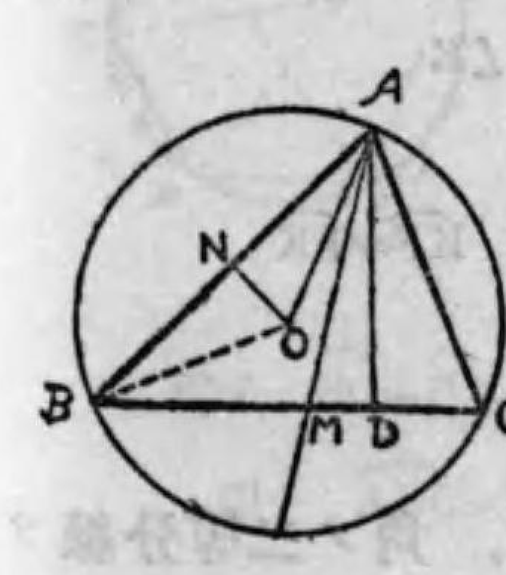
こなし方 二ツノ直角三角形 PEB, PFB ヲ揃ヘル.

∠PBE=∠PFB (切線ト弦トノ角)

カラ ∠EPB=∠BPF

【主題】 23. △ABC ノ外心ヲ O, A ヨリ對邊ヘノ垂線ヲ AD トセバ ∠A ノ二等分線 AM ハ ∠OAD ヲ二等分ス.

(15臺醫)



着眼 外心ハ外接圓ヲ作ツテ半徑カ直徑カニ展開スル.

答案 補 ON⊥AB トス.

△AON, △ACD ニ於テ

∠N=∠R=∠D

∠AON=∠ACD

∵ $\angle AOB$ ハ $\overset{\frown}{AB}$ ノ中心角ニシテ

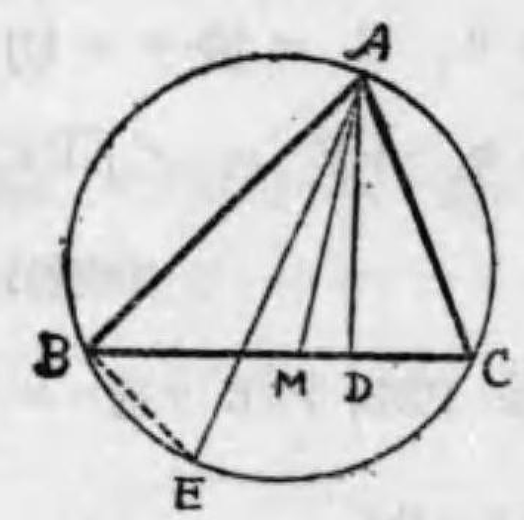
$\frac{1}{2}\angle AOB=\angle AON=\angle ACD$(周角)

∴ $\angle OAB=\angle CAD$ ……………… (1)

$\angle BAM=\angle CAM$ ………………… (假設)

邊々相減ジテ $\angle OAM=\angle MAD$

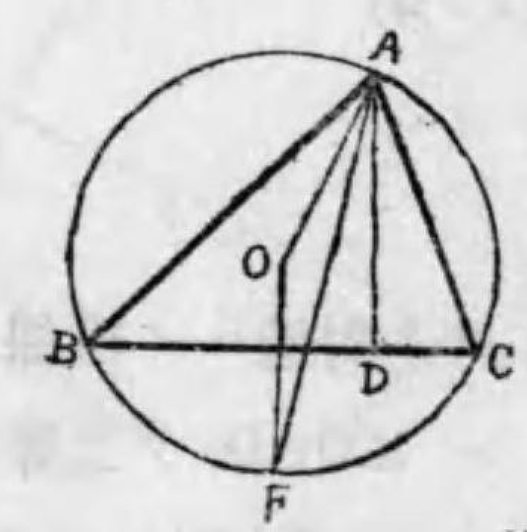
研究 $\angle BAO=\angle CAD$ ヲ證スルノガ眼目デアルガ ソレニハ又色々ノ道ガアル.



i. AE ナル直徑ヲ作ル

$\triangle ABE$, $\triangle ADC$ ナル $\angle R\triangle$ デ $\angle E=\angle C$ ハ弧 AB ノ周角トスル.

ii. AM ヲ延長シテ周ト F ニ交ラセル. F ハ $\overset{\frown}{BC}$ ノ中點デアルカラ $OF\perp BC$



∴ $AD \parallel OF$

∴ $\angle OFA=\angle FAD$

$OA=$半徑$=OF$

∴ $\angle OFA=\angle OAF$

∴ $\angle FAD=\angle OAF$

iii. AD ヲ延長シテ圓ト K デ交ラセルト

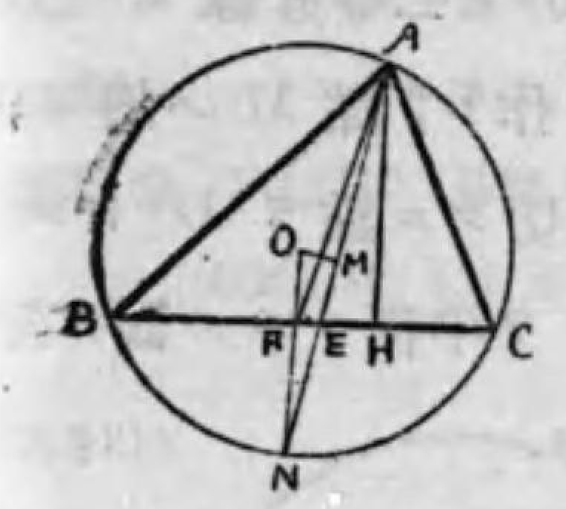
直徑 AE カラ $\angle AKE=\angle R$

∴ $BC \parallel EK$

∴ $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CK}$ ∴ $\overset{\frown}{KF}=\overset{\frown}{FK}$

∴ $\angle EAF=\angle FAE$

【應用】 一角頂ヨリ出ヅル中線, 高サ, 角ノ二等分線ヲ

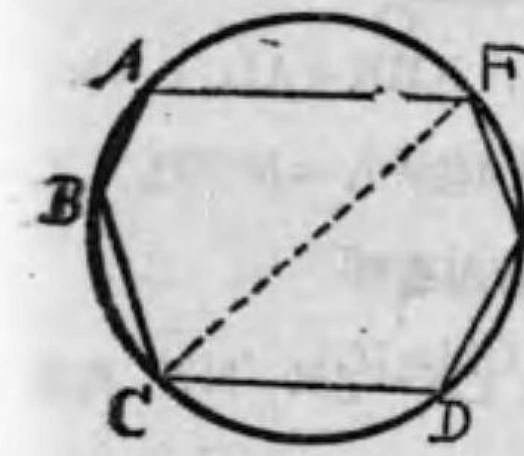


知ツテ△ヲ作レ.

こなし方 $\angle R\triangle AFH$ ヲ中線, 高サデ決定スル. AE ヲ定メテ延長シテ $FN\perp HF$ ノ FN ト交ラセル. O ハ NF ト AN ノ垂直二等分線トノ交リトナル.

【試練】 55. 圓ニ內接スル六邊形ノ二組ノ對邊ガ夫々互ニ平行ナルトキハ第三組ノ對邊モ亦平行ナリ. 之ヲ證セヨ.

(14三農)



こなし方 圓內六邊形 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ デアルトキ $AF \parallel CD$ ヲ云フノデアルカラ

$\angle AFC=\angle FCD$

ヲ證シタラヨロシイ. $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{FED}$ ヲ晛ム.

「圓ノ平行弦ハ等弧ヲ切リトル」ヲ利用スル.

$AB \parallel DE$ カラ $\overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{AFE}$

$BC \parallel EF$ カラ $\overset{\frown}{CDE}=\overset{\frown}{BAF}$

即チ $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FE}$

$\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AF}$

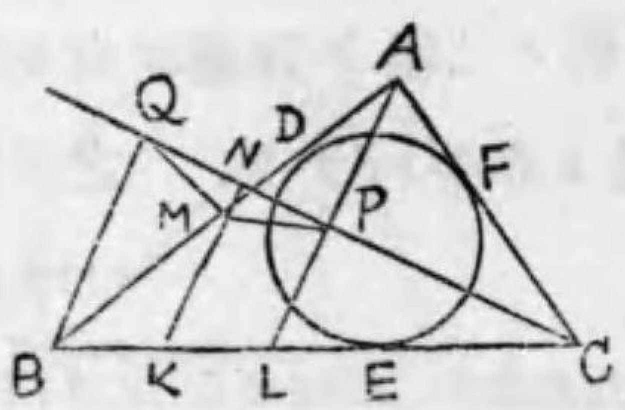
邊々減ジテ, $\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{FE}-\overset{\frown}{BA}$

即チ $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{DE}$

即チ $\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{FED}$

【試練】 56. 三角形 ABC ノ一角 C ノ二等分線 CP ニ頂點 A, B ヨリ夫々垂線 AP, BQ ヲ作レ, 點 M ハ邊 AB ノ中點ニシテ, 邊 AB ガ内接圓ニ切スル點ヲ D トス. 然ルトキハ M ヲ中心トシ, MD ヲ半徑トスル圓ガ點 P 及ビ Q ヲ過ギルコトヲ證明セヨ. (13名商)

こなし方 $BQ \parallel APL$, $QM=PM$ ヨリ M ハ NM トイフ BQ ト AL トノ中央平行線, 内切圓ニ對シテ二切線ノ長サノ等シイコトニ目ヲツケル.



$\angle C$ ノ二等分線 BP ニ A ヨリ垂線ヲ下シテ延長スル. ソシテ BC ト L ニ交ラセル. $AP=PL$; $NMK \parallel AL$ トスル.

$\triangle BAL$ デ二邊ノ中點カラ MK ハ AL ニ平行線トナル.

$\therefore\ MK=\frac{1}{2}AL=PL$　　$\therefore$ MKLP ハ平行四邊形

$\therefore\ MP=KL$; $\triangle MQN$, $\triangle MPN$ ハ $QN=PN$, $\angle N=\angle R$ MN 共通

$\therefore\ \triangle MQN\equiv\triangle MPN$　　從ツテ $MP=MQ$　　$MD=BE-\frac{1}{2}c$

$=\frac{a+b+c}{2}-b-\frac{1}{2}c=\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(BC-AC)=\frac{1}{2}(BC-CL)$

$=KL=MQ=MP$　　$\therefore$ M ヲ中心トスル圓ハ P, Q, D ヲ過ギル.

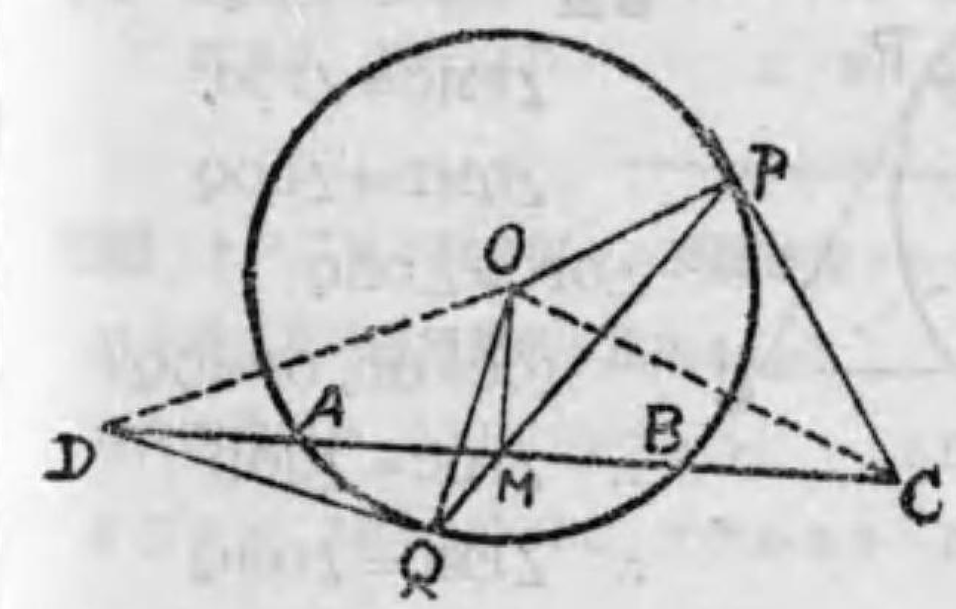
2. 線分又ハ弧ノ長サ

【主題】 24. 圓 O ノ弦 AB ノ中點 M ヲ通ル任意ノ弦 PQ ノ兩端ニ於ケル切線ガ AB ノ延長ト交ル點ヲ C, D トセバ $BC=AD$　　(高・14神商)

着眼 M ガ AB ノ中點デアルカラ $AM=BM$ デアル. ソレデ $MC=MD$ ヲ證スルコトニナルカラ, $\triangle OCD$ ガ二等邊デアルコトヲ證スル.

答案 ⑮ $PC\perp OP$ (切線ト半徑)

$OM\perp MC$ (M ガ AB ノ中點)



$\therefore$ OMCP ハ圓内四邊形

$\therefore\ \angle OCM=\angle OPM\cdots\cdots(1)$

$QD\perp OQ$ (切線ト半徑)

$OM\perp MC$

$\therefore$ OMQD ハ圓内四邊形

$\therefore\ \angle ODM=\angle OQM\cdots\cdots(2)$

而シテ $\triangle OPQ$ ハ

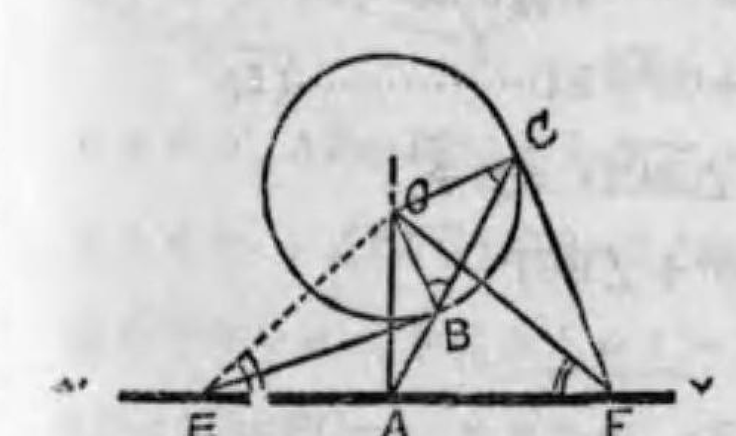
$OP=OQ=$半徑

$\therefore\ \angle OPM=\angle OQM$　　(1), (2) ヨリ　$\angle OCM=\angle ODM$

$\therefore\ \triangle OCD$ ハ $OC=OD$ ナル二等邊△

$\therefore\ CM=MD$　然ルニ　$MA=MB$　　$\therefore\ BC=AD$

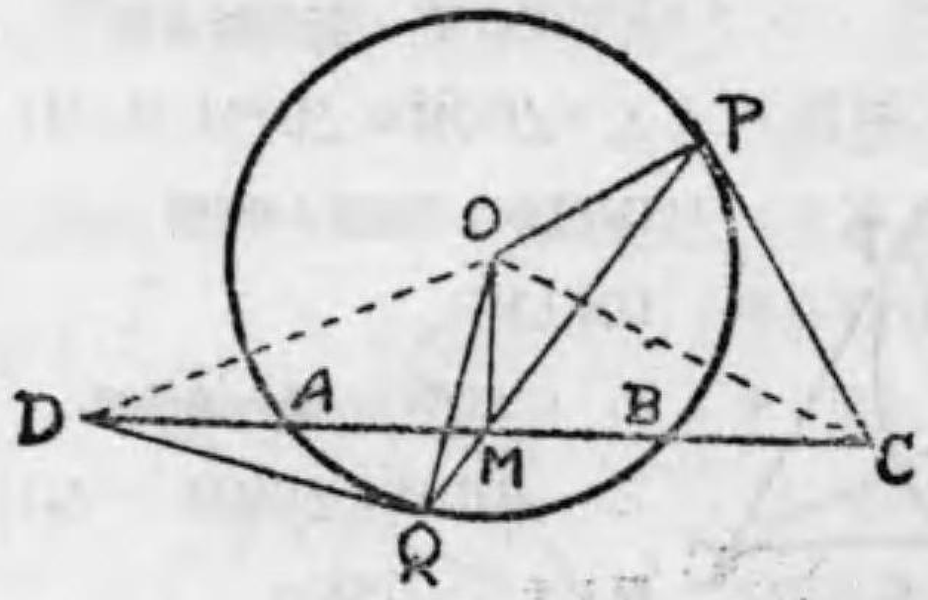
【試練】 57. O 圓外ノ直線 XY ニ O ヨリ垂線 OA ヲ下シ, A ヲ過ギル O 圓ノ割線 ABC ヲ作リ, B, C ニ於ケル O 圓ノ切線ガ XY ト E, F ニ交ルトキ $AE=AF$



こなし方 主題ノ位置ヲカヘタニ止マル.

要領 垂線ガ二ツアルトキ, 即チ直角ガ二ツアルトキハ必ズ圓内四邊形ヲ作ラウト思フ.

【試練】 58. O圓ノ弦 AB ヲ双方ヘ等シク延長シテ AD, BC トシ, CP, DQ ナル切線ヲ作ルトキ PQ ハ AB ノ中點ヲ過ギル.



こな方し $OM \perp AB$ トスル

環坐 OMCP, OMQD カラ

$\angle PMC = \angle POC$,

$\angle QMD = \angle DOQ$

$\triangle OPC \equiv \triangle ODQ$

$(OC = OD,\ OP = OQ)$

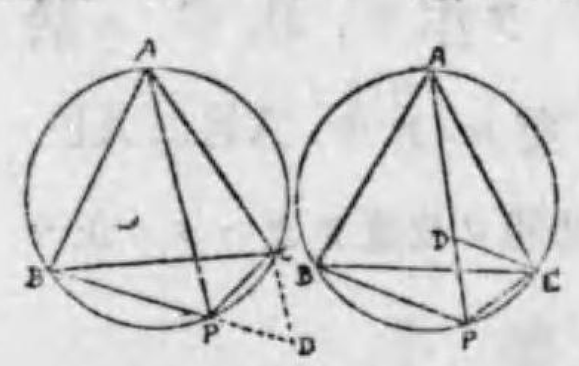
$\therefore\ \angle POC = \angle QOD$

$\therefore\ \angle PMC = \angle DMQ$

【主題】 25. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ劣弧 BC 上ノ一點ヲ P トセバ $AP = BP + CP$ ナリ. (15大阪商)

着眼 AP ヲ二ツニ分ケテ BP, CP ト等シイ部分ニシテ比ベルカ, BP+CP ヲ一本ニシテ AP ト比ベルカデアル.

答案 ㊀ CP ヲ一邊トシテ正 $\triangle CPD$ ヲ外ニ作ル.



$\angle CPD = 60^\circ$, $\angle BPC = 120^\circ$

$\therefore$ BPD ハ一直線ヲ成ス.

$\therefore\ BP + CP = BD \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$\triangle ACP$, $\triangle BCD$ ニ於テ

$AC = BC$, $CP = CD$ $\angle ACP = \angle BCD = 60^\circ + \angle BCP$

$\therefore\ \triangle ACP \equiv \triangle BCD$

從ツテ $AP = BD$ (1) ヨリ $BP + CP = AP$

研究 $\angle PCD = 60^\circ$ ナル CD ヲ内側ニ作ツテ AP ト D デ交ラセル.

$\angle APC = 60^\circ$ デアルカラ PCD ハ正三角形トナル.

$\therefore\ PC = PD \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$\triangle ACD$, $\triangle BCP$ ニ於テ $AC = BC$, $CD = CP$

$\angle ACD = 60^\circ - \angle BCD = \angle BCP$ $\therefore\ \triangle ACD \equiv \triangle BCP$

從ツテ $BP = AD$ $\therefore\ BP + CP = AP$

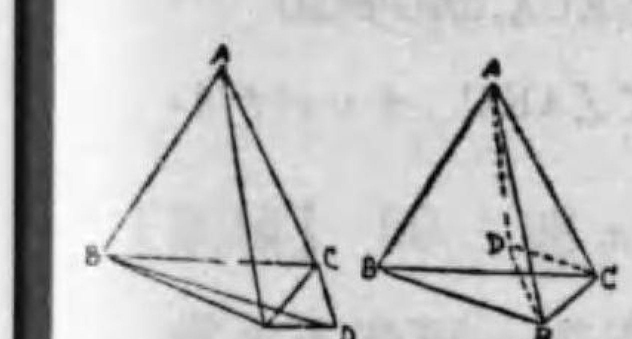
批評 上ノ二ツノ解ノ何レモ受驗答案トシテ不得策デアル. トレミーノ定理ヲ用フルト至極簡單ニ出來ル.

圓内四邊形ヲ ABPC トスルト $AB \cdot PC + AC \cdot BP = AP \cdot BC$

正△カラ $AB = AC = BC$ デアルカラ $PC + BP = AP$

【試練】 59. 正三角形 ABC 外ノ一點 P ヲ A, B, C ニ結ブトキ $AP = BP + CP$ ナルトキハ P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ニアリ.

こなし方 之ハ歸謬法ノ例ニ出サル問題デアル. P ガ外接圓周上ニアルコトヲ證スルノニハ $\angle BPC = 120^\circ$ ヲ證スルニアル. 今 PC ノ△外ニ正△ヲ作ル. $\triangle BDC$, $\triangle APC$ ハ $BC = CA$, $DC = PC$ ソノ夾角ガ $60^\circ + \angle BCP$ デ全等 $\therefore\ AP = BD$



トコロガ $AP = BP + PC$ デアルカラ $BD = BP + PC$ トナツテ P ハ BD 上ニアル. $\angle BPC + 60^\circ = 2\angle R$ デアルカラ $\angle BPC = 120^\circ$ 内ニ作ルモ同ジデヤレル. シカシトレミーノ逆命題ヲ使フト $BP + CP = AP$ 之ニ $AB = AC = BC = a$ ヲカケテ $aBP + aCP = aAP$ トナツテ直ニ適用ガ出來ル. 此方法ハ正五邊形ノ場合ニモ適用スルカラ何レ後編更メテ引用スル.

【主題】 26. 中心 O ナル圓ノ弧 AB ヲ三等分シ, O ヨリ此ノ分點ヲ過ギル半徑ヲ引ケバ弧 AB ヲ三ツノ部分ニ分ツベシ. 此ノ三ツノ部分ノ大小如何. (8 高)

着眼 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$ ハ容易デアルカラ預ツテオイテ $\overset{\frown}{AE}<\overset{\frown}{EF}$ ヲ證スルコトニナルガ

弧ノ大小ハ**中心角**ノ大小ヲ決定スルカ, 弦ノ大小デ決定スルカノ二途デアル

答案 ❶ i. $\triangle OAC$, $\triangle OBD$ ニ於テ

$OA=OB$, $AC=BD$, $\angle OAC=\angle OBD$

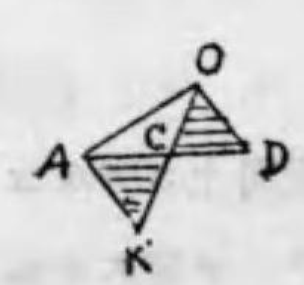
$\therefore \triangle OAC \equiv \triangle OBD$

従ツテ $\angle AOC=\angle BOD$ $\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$,

$OC=OD$……………………(1)

ii. D ハ AB 上ニアルヲ以テ圓内ニアリ. $\therefore OA>OD$

$\triangle AOD$ ニ於テ OC ハ中線ナリ.



$\therefore \angle AOC<\angle DOC$ $\therefore \overset{\frown}{EF}>\overset{\frown}{AE}$

$\because OC=CK$ トシテ $\triangle OCD \equiv \triangle KCA$, $AO>OD$

即チ $AO>AK$ $\therefore \angle AOC<\angle AKC$ ナレバナリ.

總合シテ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}<\overset{\frown}{EF}$

批評 中ノ部ト兩側ノ部トノ大小ヲ比較シタガ兩側同志 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$ ヲシナカツタ者ガ多イガ, 忘レタノカ不注意ナノカ甚ダヨクナイ (一高教授渡邊博士) 中ト側トノ比較ハ中々不出來デ勝手ナ定理ヲ作ツテごまかした者モアルガ試驗官ヲ瞞着シヨウト思ツテ書ク答案ハヨクナイ (竹内博士)

研究 證明色々 i. AOK ナル直徑ヲ作ツテ O ヲ中點ト考ヘタラ

$\triangle ADK$ ニ於テ $OC \parallel KD$

$\therefore \angle COD=\angle ODK$, $\angle AOC=\angle OKD$

而シテ $OD<OK$ ヨリ

$\angle ODK>\angle OKD$

$\therefore \angle AOC<\angle COD$

ii. $\triangle OCD$ ハ二等邊デアルカラ $\angle C<\angle R$

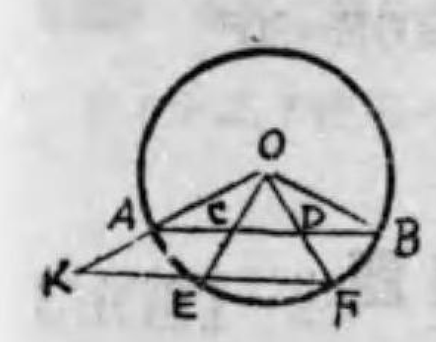
$\therefore \angle ECD>\angle R$

$\therefore \triangle CDE$ ニ於テ $ED>CD$

即チ $AC<ED$……………………(1)

$\triangle AOC$, $\triangle EOD$ ニ於テ二邊等シク, 第三邊ハ(1)ノ樣デアルカラ $\angle EOD>\angle AOE$

iii. 弦 $AE<EF$ カラ $\overset{\frown}{AE}<\overset{\frown}{EF}$ ヲ證シヨウトスル.



FE ト OA トガ K デ交ルトスルト

$AC:CD=KE:EF$ ヨリ $KE=EF$

$\triangle OAE$ ハ二等邊カラ $\angle OAE<\angle R$

$\therefore \angle KAE>\angle R$ $\therefore KE>AE$ $\therefore AE<EF$

【試練】 60. 圓ニ內接スル正五邊形ノ對角線ノ交點ヨリ成ル五邊形ハ等邊ナリ. (6 山商)

こなし方 五ツノ對角線ノ等シイコトヲ押ヘテオイテ, $\triangle ABF$, $\triangle BCG$ ヲ比ベテ一邊兩底角ノ等シイコトカラ全等 $AF=CG$

又 $\triangle ABF$ ハ二等角カラ二等邊

$\therefore AF=BF=BG=CG=CH=$…………

ヲ對角線カラ引イタラ等邊ニナル.

【試練】 61. AB ガ圓ニ内接スル正六角形ノ一邊ナルトキ, A ニ於ケル同圓ノ切線上ニ AB ト反對ノ側ニテ AD ヲ AB ト等シキ長サニトリ, 直線 BD ト圓トノ交點ヲ E トスレバ, 弦 AE ハ同圓ニ内接スル正十二邊形ノ一邊ナルコトヲ證セヨ. (9 神商)

こなし方 ∠AOB ハ 60° デアル. ∠AOE=30° ガ證セラレタラヨイ.

∠AOE=2∠EBA(中心角ト周角)

△ABD ハ二等邊デ

2∠B=∠BAF　∴ ∠AOE=∠BAF

2∠BAF=∠AOB(切線ト弦トノ角ト中心角)

∴ 2∠AOE=∠AOB　∴ ∠AOE=30°

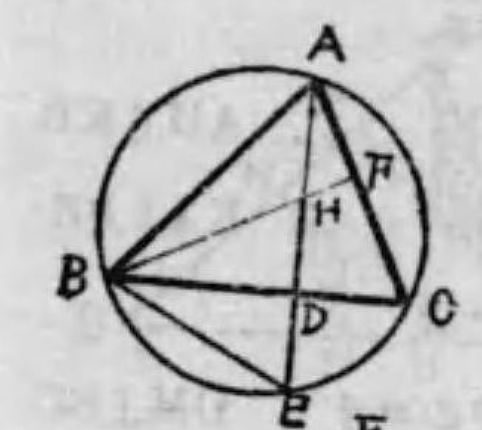
3. 垂心内心ニ關スル問題

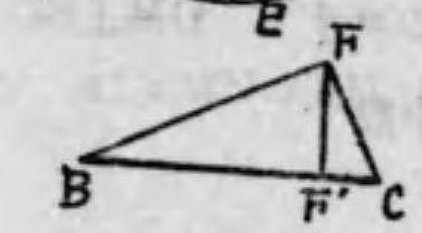
【主題】 27. 三角形 ABC ノ高サ AD ヲ延長シテ外接圓ト E ニ交ラシメ垂心ヲ H トセバ HD=DE ナリ.

着眼 BC ガ HE ノ垂直二等分線ニナッテ居ルコトヲ眺ムト BC 上ノ點カラ H, E ニ到ル距離ガ等シイ. 即チ二等邊△ガ出來ルニ相違ナイ. B ヲ頂トスルト ∠BEH=∠BHE ヲ考ヘル. ∠E ハ周角移動用ニ預ルトシテ垂心ノ性質ヲ展開シテ ∠D=∠R=∠F ヲ持込ム.

答案 證 BHF⊥AC ヲ作ル. BF⊥AC トナル.

△BFC ニテ FF′⊥BC トセバ





∠BFF′=∠BCF(∠FF′ ノ餘角)

又 FF′∥AD トナル.(共ニ BC ヘノ垂線)

∴ ∠BHD=∠BFF′=∠ACB

∠ACB=∠AEB　($\overset{\frown}{AB}$ ノ周角)

∴ ∠BHD=∠BED

∴ △BEH ハ二等邊ニシテ BC ハ頂點ヨリ底ニ下ス垂線ナリ.　∴ HD=DE

研究 △BEH デモ △CEH デモ同樣ニ出來ルガ, 二等角二等邊ヲ用ヒナイナラ, ∠HBD=∠EBD ヲ用フル方ガ早イ.

△AHF ト △BHD トカラ對頂角ノ餘角トシテ ∠HBD=∠HAF

∠HAC=∠EBC ($\overset{\frown}{EC}$ ノ周角移動)　∴ △HDB, △EDB ガ全等トナル.

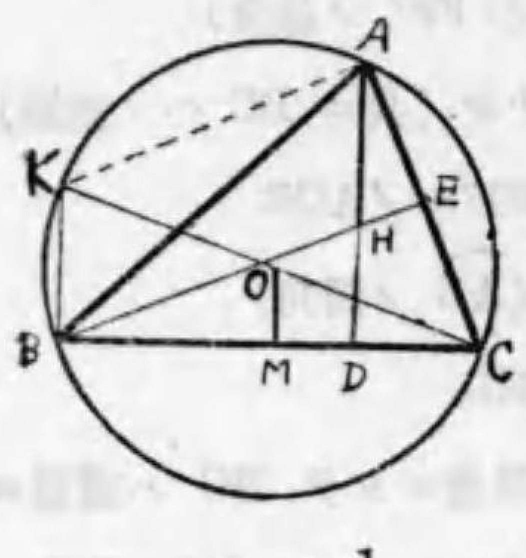
要領 垂直二等分線ノ適用ハ二等邊三角形ニアル. 本問ノ應用ハ甚ダ多イ. シカシ之ヲ使用スルトキハ定理デナイカラ略證ヲシテオカネバナラヌ.

【主題】 28. 三角形ノ頂點ヨリ垂心マデノ距離ハ其ノ外接圓ノ中心ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ長サノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ. (14東醫)

着眼 外心ヲ主トシテ考ヘルト外接圓ト直徑ヲ引用シ, 直徑ノ展開ハ半圓内角ノ直角ヲ利用スル, 垂心ハ二ツノ高サノ交點デアルコトヲ捕ヘル, ソシテ終結ノ二倍ノ關係ハ前編ノト主題6同一ニスル.

答案 假設 △ABC ニテ AD⊥BC, BE⊥CA, 垂心 H, 外心 O, OM⊥BC トス.

終結 AH=2OM



解 COK ヲ直徑トス.

∠KBC＝∠R＝∠ADC　∴ AH ∥ KB

∠KAC＝∠R＝∠BEC　∴ KA ∥ BE

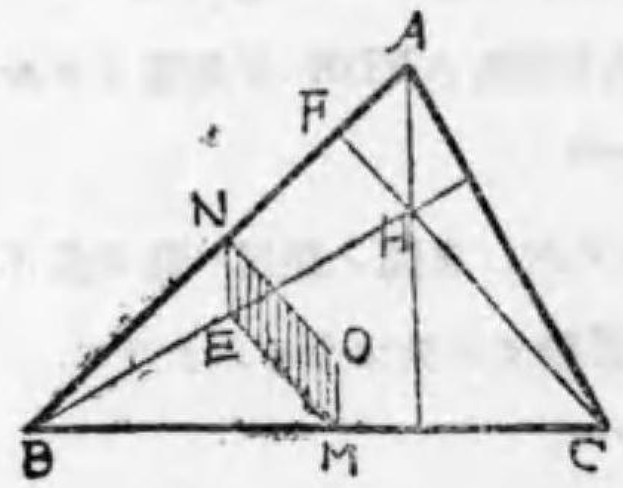
∴ AKBH ハ▱

次ニ △CBK ニテ中心ヨリト OM⊥BC

ヨリ O, M ハ二邊ノ中點

∴ $OM=\frac{1}{2}BK$　∴ AH＝2OM　（15高松商）

研究 上ノ解ハ BK ヲ仲媒トシテ▱ト△ノ二邊中點線トヲ利用シテ移動比較ヲシタガ. AH ノ半分ヲ OM ニ比べ樣トスルト



N, E ヲ AB, HB ノ中點トスル.

△ABH ニ於テ　$NE=\frac{1}{2}AH$,

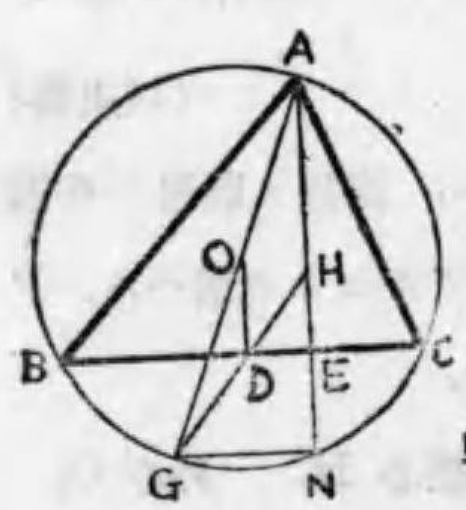
NE ∥ AH　∴ NE ∥ OM

△BCH ニ於テ EM ∥ CH ∥ OM

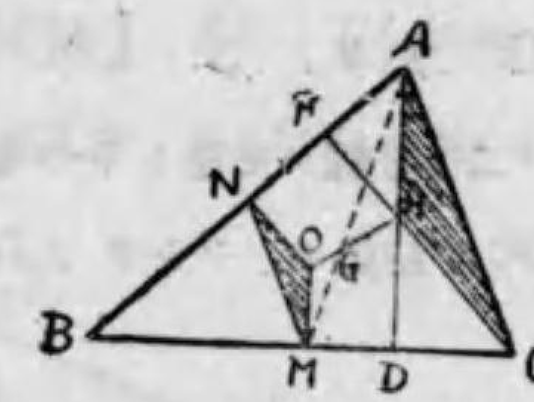
∴ NEMO ハ▱　∴ NE＝OM

∴ AH＝2OM

又前主題ヲ使フト AHEN ヲ作リ, HE＝EN ヲ利用スル. AOG ナル直徑ヲ作ル. ∠ANG＝∠R カラ △HGN ニ於テ EB ハ底 NG ニ平行トナルカラ HG ノ中點 D ヲ過ギル. △AGH デ O ハ AG ノ中點, D ハ HG ノ中點デアルカラ $OD \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AH$, 即チ OD⊥BC トナッテ D ハ BC ノ中點即チ M デアッタコトニナル.（15海兵經）



批評 上ノ三ツノ解ハ答案トシテハ手數ガカヽル. 答案カラ見ルト次ノ超



越的ノ考ヘガヨイ.

△ACH, MNO トカラ

2MN ╨ AC〔△BAC ノ二邊中點〕

OM ∥ AH, ON ∥ HC ヨリ三邊平行デ

△ACH∽△MNO

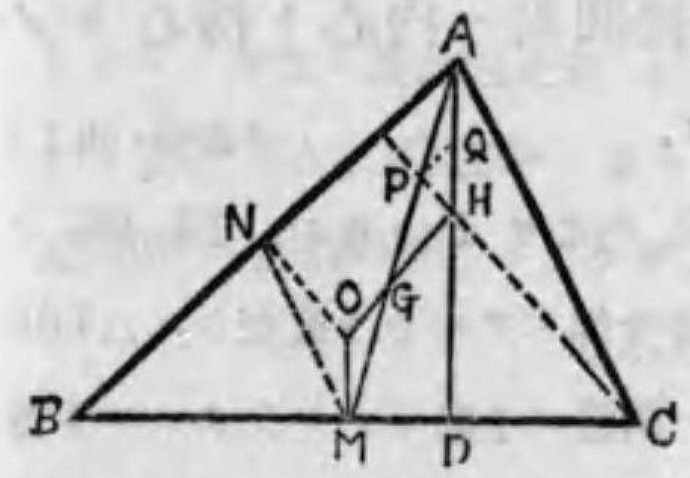
∴ AC : MN＝AH : OM＝2 : 1　∴ AH＝2OM ガ簡潔デヨイ.

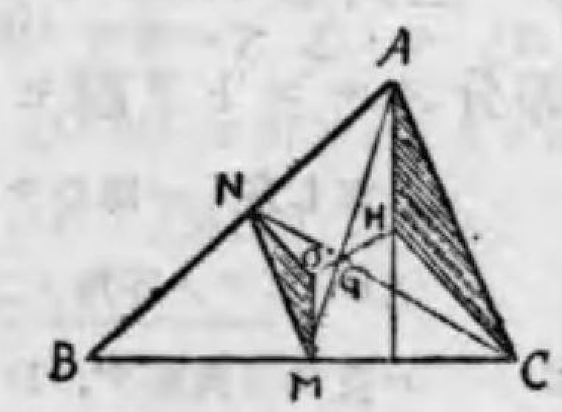
エキス 平行線ノ利用箇所ガ二ツ, 之ハ垂心ノ性質ガ二ツノ高サノ交點デアルコトカラ來タ. 中點二ツ, 之ハ外心性質ガ二弦（△ヨリハ二邊）ノ垂直二等分線ノ交點デアルコトカラ來タ.

要領 解法ノ根本ハ與ヘラレタ材料ノ本質ヲ明ニスル, ソシテ終結ヲ睨ンデ本質間ノ聯結ヲ作ルノガ幾何解法ノ要領デアル.

【試練】 62. 三角形ノ垂心, 重心, 外心ハ一直線上ニアリ.

こなし方 詳細ハ共線點ノ所デ研究スルコトニシテ上ノ最後ノ解カラ G ガ相似ノ中心トナルコトヲ用フルト早イ.



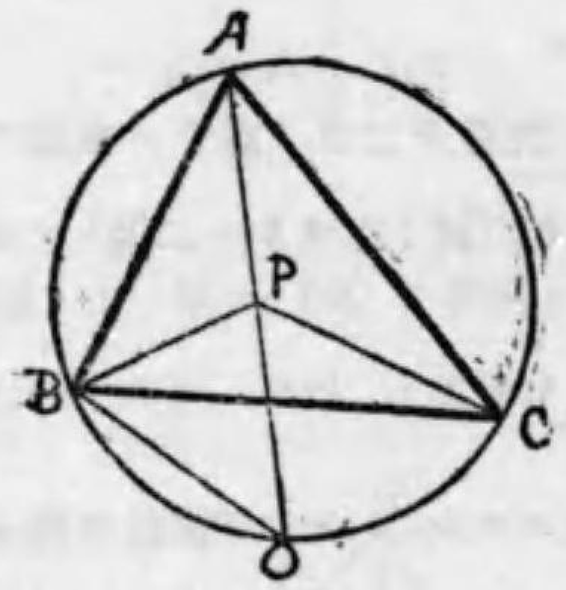


【主題】 29. 三角形 ABC ノ內心ヲ P トシ, 弧 BC ノ

中點ヲ O トスレバ $PO=OB=OC$ ナリ.

着眼 內心ノ性質ヲ展開ニ持込ムノニハ各角ノ二等分線ノ交點トシテ等角ノアルコト, $\overset{\frown}{BC}$ ノ中點ハ $\overset{\frown}{BO}=\overset{\frown}{OC}$, $BO=OC$ ヲ持込ム. ソシテ $\triangle OBP$ ガ二等角デアルコトニスル.

答案 ㊥ P ハ $\angle A$ ハノ二等分線上ニアリ, 而シテ此ノ二等分線ハ $\overset{\frown}{BC}$ ノ中點ヲ過ギルヲ以テ APO ハ一直線ヲナス.



$\angle BPO=\angle PBA+\angle BAP$($\triangle ABP$ ノ外角)

而シテ

$\angle PBA=\angle PBC$, $\angle PAB=\angle CAO$〔內心ヨリ〕

$=\angle OBC$〔同弧周角〕

$\therefore\ \angle BPO=\angle PBO$

$\therefore$ $\triangle OBP$ ニ於テ　$BO=OP$　$\therefore$ **$PO=BO=CO$**

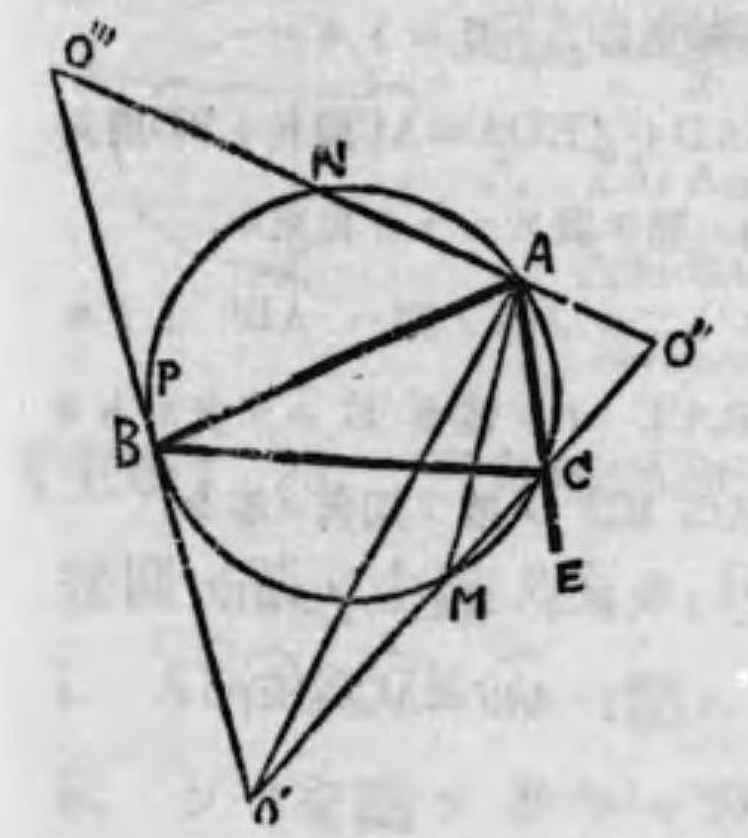
研究 BO ガ一定デアルカラ P ハ固定點 O カラノ距離ガ一定デアル. 從ツテ此ノ一定ヲ利用スルト三角形ノ內心 P ノ軌跡ハ BPC ナル圓弧トナル.

【試練】 63. 三角形 ABC ノ外接圓周ハ內心ト傍心トノ距離ヲ二等分スルコトヲ證セヨ. (專檢・仙工)

こなし方 一傍心ヲ E, 內心ヲ I トスル. BI, BE ハ $\angle B$ トソノ外角ノ二等分線デアルカラ直交シ, $\triangle IBE$ ハ直角三角形デ, D ハ斜邊ノ中點トナツテクレルト都合ガヨイ. ソコデ前問ヲ持込ムト, $\angle DBI=\angle DIB$ ガ證セラレル.

【試練】 64. 三角形ノ外接圓周ハ傍心ノ距離ヲ二等分ス.

こなし方 $\triangle ABC$ ノ傍心ヲ O', O'', O''' トシ, $O'O''$ ガ圓ト M ニ交ルトスル. O', O'' ハ $\angle C$ ノ外角ノ二等分線デアルカラ $O'MCO''$ ハ一直線ヲシテヰル. $AO''\perp AO'$ トヲ考ヘルト $\triangle AO'O''$ ノ斜邊ノ中點ガ M デアルコトヲ證スル. ソレニハ



$\angle AO'M=\angle MAO'$ ヲ知リタイ.

傍心カラ $\angle BAO'=\angle CAO'$ ヲ使ヒ込マナクテハナラヌ. $\triangle ACO'$ デ $\angle ACO''$ ハ外角デアツテ外角 C ノ半分デアルカラ $=\angle BCM$ トナル. 同弧周角カラ $=\angle BAM$　$\triangle ACO'$ カラ

$\angle MO'A=\angle ACO''-\angle O'AC=\angle BAM-\angle O'AB=\angle MAO'$

或ハ又 $\triangle O'BO''$ ヲ考ヘテ其ノ斜邊ノ中點トスルモヨイ. ソレデアルト $\angle MBO'=\angle MO'B$ ヲ證スルコトニナル.

$\angle MO'B=\angle BOO''-\angle O'BC$

$\angle BCO''=\angle ACO'$

トナルト今度ハ圓內四邊形 ABMC ヲ考ヘテ $\angle C$ ヲ $\angle B$ ノ補角ニトルト $\angle O'''BA+\angle MBO'$ カラ $\angle O'BC$ ヲ引クコトニナル.

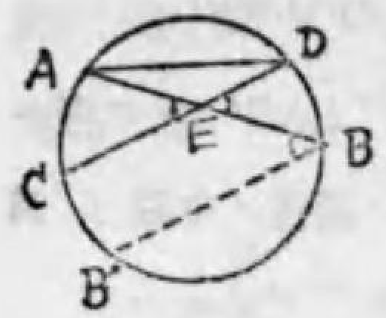
$\angle CBO'=\angle ABO'''$ トナツテ之レハ $\angle MBO'$ トナル.

4. 弦ノ成ス角

【指導】 圓內又ハ圓外デ交ル二ツノ弦ノ成ス角ヲ考ヘル場合ハ次ノ定理ヲ

思ヒ出サネバナラヌ.

圓內ニテ交ル AB, CD ナル弦ガ E ニテ交ルトキ ∠AEC ハ $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ ノ和ノ周角ニ等シ.



△ADE ノ外角 AEC ヲ見ルトキハ

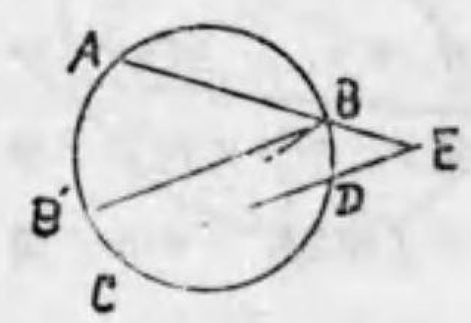
∠AEC＝∠EAD＋∠EDA＝$\overset{\frown}{AC}$周角＋$\overset{\frown}{BD}$周角

ソレデ弦ノ成ス角ハ周デ表スコトガ出來ル.

BB′∥DC トスルト二ツノ弧ノ和ハ $\overset{\frown}{AB'}$ トナル.

圓外ニテ交ル AB, CD ナル弦ガ E ニテ交ルトキ

∠AEC ハ $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ ノ差ノ周角ニ等シ.



BB′∥DC トスルト ∠E＝∠ABB′

$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CB'}$　∴ $\overset{\frown}{AB'}=\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}$

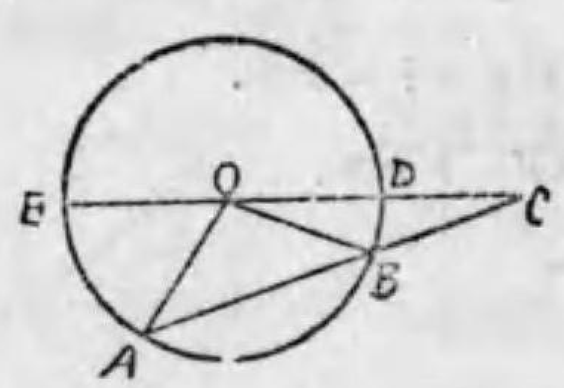
ソノ周角 ABB′ トナル.

又 △DCE ノ一角ト考ヘテモ同樣ニナル.

【試練】 64. 圓ノ弦 AB ヲ延長シテ BC ヲ半徑ニ等シカラシメ C ト中心トヲ結ブ直線ガ圓周ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ弧 AE ハ BD ノ三倍ニ等シ. (13明專)

こなし方 中心角ノ比較ヲスル. △OBC, △OAB ハ二等邊

∴ ∠BOD＝∠BCD



∠OBA＝∠OAB

∠OBA＝2∠BCO＝∠OAB

∠AOE＝∠OAB＋∠ACO

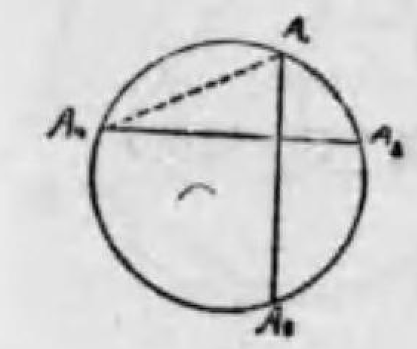
＝2∠BCO＋∠BCO＝3∠BCO

∴ $\overset{\frown}{AE}=3\overset{\frown}{BD}$

【試練】 65. 正二十邊形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{20}$ ニ於テ A_1A_8

ト A_3A_{16} ト直交ス. (14廣師)

こなし方 A_1A_8 ト A_3A_{16} トノ交リヲ B トス



$\overset{\frown}{A_1A_3}=\dfrac{圓周}{10}$　　$A_8A_{16}=\dfrac{4}{10}$圓周

∴ $\angle A_1A_{16}A_3=18^\circ$　　$\angle A_8A_1A_{16}=72^\circ$

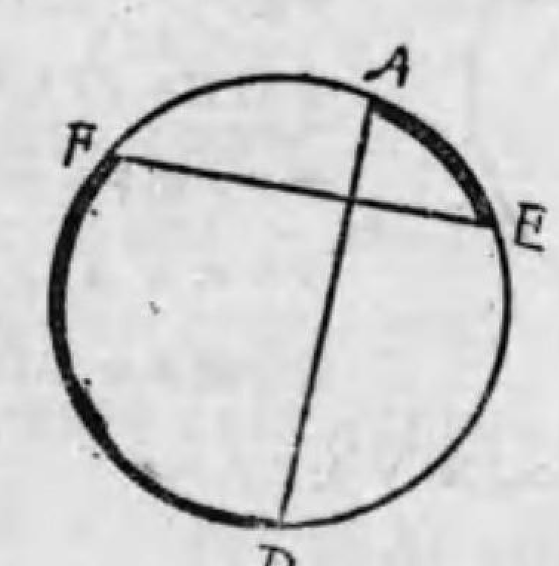
∴ $\triangle A_1BA_{16}$ ヨリ ∠B＝90°

【主題】 29. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ニ對スル外接圓ノ弧ノ中點ヲ夫々 D, E, F トセバ

i. AD, BE, CF ハ一點ニテ交ル.

ii. ソノ交點ヲ I トセバ I ハ △ABC ノ內心ニシテ △DEF ノ垂心ナリ. (13帝)

着眼 AD ハ ∠A ノ二等分線デアルカラ交點ガ內心ニナルコトハ容易ニワカル.



要ハ EF⊥AD ヲ證スルノデアルカラ, 此ノ EF, AD 丈ヲ引キ拔イテ考ヘテ見ルナラ, 交點ヲ H トスルト「圓內ニテ交ル二弦」ヲ考ヘネバナラヌ. AD, EF ノナス ∠H ハ前ノ指導ヲ思ヒ出ス.

答案 i. BD＝CD(假設) ヨリ ∠BAD＝∠CAD

∴ AD ハ ∠A ノ二等分線ナリ.

同樣ニ BE, CF ハ ∠B, ∠C ノ二等分線ナリ. ∴ 一點內心ニテ交ル.

i. EF ナル弦ノ兩側ニアル A, D ヲ結ベバ AD ハ EF ニ交ル. 交點ヲ H トス.

$\angle FHD=\angle AFE+\angle FAD$

$=$(弧 AE ノ周角)+(弧 DF ノ周角)

而シテ　$\overset{\frown}{AE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$,

$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BF}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

$\therefore$　$\angle FHD=$半圓ノ周角$=\angle R$　　$\therefore$　$EF\perp DA$

同樣ニ　$EB\perp DF$,　　$\therefore$ I ハ $\triangle DEF$ ノ垂心ナリ.

〰〰〰〰〰〰

研究　i.「圓 O ノ二弦 AB, AC ガ截リトル弧 AB, AC ノ中點ヲ F, E トスレバ EF ハ AB, AC ト等角ヲ成ス」ト云フ既知問題ヲ思ヒ出スト　$\angle AKL=\angle ALK$ ヲ證スル. $\triangle AFK$, $\triangle AEL$ ノ外角カラ

$\underline{\angle AFE}+\angle FAB=\underline{\angle EAC}+\angle AEF$　ガ出來テソノ和トシテ　$\angle AKL=\angle ALK$ トナル. ソウスルト $\triangle AKL$ ハ二等邊△デ頂角ノ二等分線タル AD ハ EF ト直交スル.

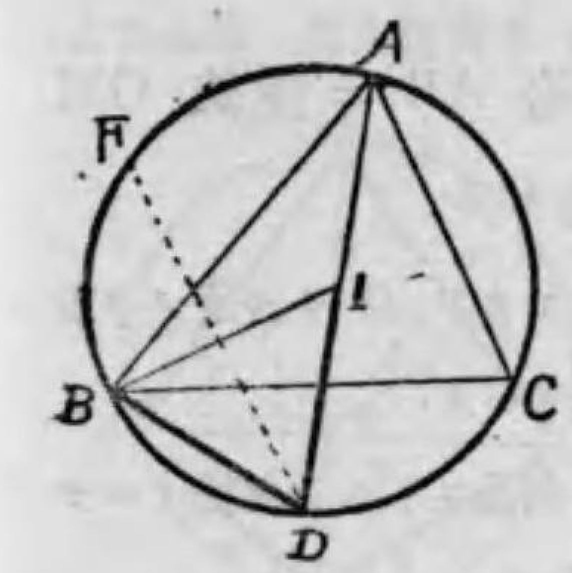
ii. 又　$\angle FHD=\angle R$ ヲ云フノニハ

$\angle HED+\angle HDE=\angle R$

ヲ證シヨウトシタラ

$\angle HED=\angle FEB+\angle BED$

ヲ考ヘテ　$\angle BED$, $\angle FEB$, $\angle BED$　ノ和ハ前ト同ジク半周ノ上ニ立ツ周角トナルカラ戻シテ　$\angle B$, $\angle C$, $\angle A$ ノ半分ノ和トナツテ　$\angle R$ トナル.



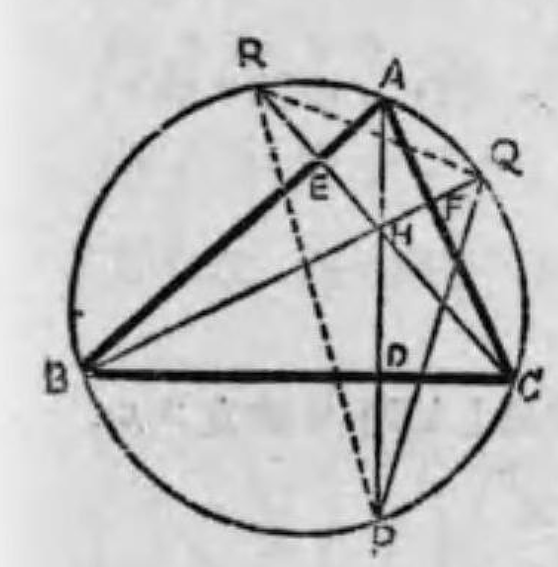
iii. 或又考ヘテ $BD=ID$ ヲ思ヒ出ス. 之ハ獨立シタ問題デモアリ, 又 $\angle A$, BC ノ一定ナルトキノ內心 I ノ軌跡ニモ用フ. ソウシテ $\angle BDF=\angle FDA$ カラ $BI\perp DF$ ヲ證シテモヨイ.

〰〰〰〰〰〰

【試練】 66. 鋭角三角形 ABC ノ垂心 H ヲ各頂ニ結ビツクル直線ガソノ外接圓ト交ル點ヲ P, Q, R トセバ H ハ $\triangle PQR$ ノ內心ナリ.

こなし方　本問ヲ考ヘテ困難ナトキハ

「三角形 ABC ノ頂 A ヨリ BC ニ下セル垂線 AD ガ外接圓ト交ル點ヲ E トスレハ $HD=DP$」ヲ思ヒ出ス. (主題27)



四邊形 HDCF ニテ　$\angle D=\angle R=\angle F$

$\therefore$　$\angle BHD=\angle ACB$

同弧ノ周角カラ　$=\angle APB$

$\therefore$　$\triangle BPH$ ハ $BP=BH$

從ツテ　$\angle PBC=\angle CBQ$　ソシテ周角カラ

$\angle PBC=\angle PRC$,　$\angle CBQ=\angle CRQ$

$\therefore$　$\angle PRC=\angle CRQ$　同樣ニシテ BQ, AP ガ $\angle RQP$, $\angle RPQ$ ノ二等分線デアルコトヲ證スル.

〰〰〰〰〰〰

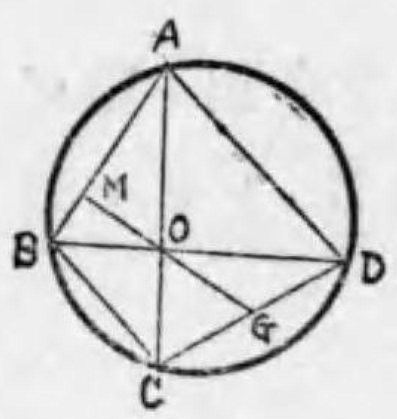
5. 特　殊　題

【主題】 30. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 BD,

AC ガ直交スルトキ，交點 O ヨリ一邊 AB ニ垂線 OM ヲ下セバ MO ハ CD ノ中點 G ヲ過ギル.

着眼 △OCD ガ O ヲ直角トスル直角三角形デアルカラ，G ヲ斜邊ノ中點トスルニハ ∠ODG=∠GOD ヲ證スルコトヲ考ヘル.

答案 證 △ABO ニ於テ OM ハ直角頂 O ヨリ斜邊ニ下セシ垂線ナルヲ以テ ∠ABO ノ餘角トシテ



∠BOM=∠BAO

次ニ ∠BAO=∠BDC (弧 BC ノ周角)

∠BOM=∠DOG (對頂角)

∴ ∠GOD=∠GDO

∴ **GO=GD**………………(1)

同様ニシテ ∠ABO=∠MOA ヨリ

∠OCG=∠COG　∴ **GO=GC**

∴ **GC=GD** 故ニ MO ハ CD ノ中點ヲ過ル.

【注意】 本問ヲブラーメグプタノ定理トイフ.

研究 本問ノ逆「G ガ CD ノ中點ナルトキハ GOM⊥AB」モ成立スル.

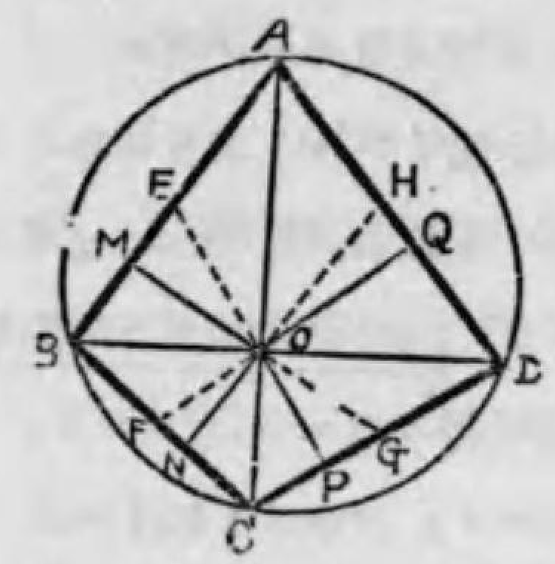
こなし方 ∠GDO=∠GOD ヨリ ∠BAC=∠BOM

△ABO ト △OAM トカラ一角共通，一角等シク

殘リ ∠AOB=∠BMO トナル.

【試練】 67. 四邊形 ABCD ガ圓ニ內接シ，對角線 AC, BD ガ直交スルトキ各邊ノ中點ヲ E, F, G, H；AC, BD ノ交點 O ヨリ各邊ニ下ス垂線ノ足 M, N, P, Q ハ同一圓周上ニアリ.

こなし方 前主題カラ EOP, FOQ, GOM, HON ハ皆一直線デアル.



ソシテ四邊形 EFGH ヲ眺ムト

EH ∥ BD ∥ FG,　EF ∥ AC ∥ HG

デ EFGH ガ矩形トナッテ圓ニ內接スル.

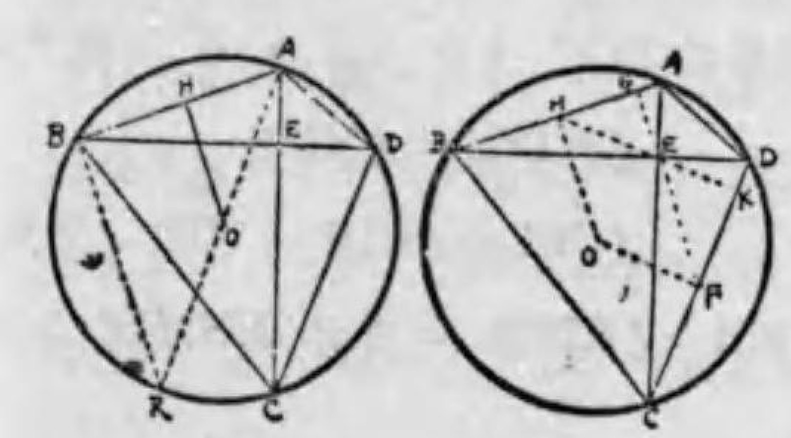
ソレデ EG ヲ直徑トスルト ∠EPG=∠R デ P ハ直徑 EG ノ圓周上即チ EFGHP ハ五點圓トナル，同様ニ Q, M, N モ此ノ上ニ乘ルコトヲ述ベル.

要領 矩形ノ外接圓ト，ソノ對角線ガ直徑トナッテ他ノ點ヲ此ノ圓周上ニ載セル解法ハ後ニ出ル主題ト比ベテ見ルガヨイ.

【試練】 68. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ガ直交スルトキハ，此ノ圓ノ中心ヨリ一邊マデノ距離ハ對邊ノ半分デアル.

(陸經)

こなし方 圓ニ內接スル四邊形デ對角線ノ直交スルトイフコトカラぶらーめぐぶたノ定理ヲ利用シ得ソウナモノト云フ見當ヲツケル.



i. 中心 O ヲ過ギッテ直徑 AR ヲ考ヘル．中心ノ假設展開ハ直徑デモ作ッテ見ルノガ義務デアル.

OH ノ 2 倍ガ △ABR ノ二邊ノ中點 M, O ヨリ出テ BR=CD ヲ云ヒサヘスレバ足リルコトニナル．ソウスルニハ $\overset{\frown}{BR}=\overset{\frown}{CD}$ ガ云ヒタクナル．自然 ∠BAR=∠CAD ヲ云フコトニナルガ，之レハ直接ウマク行カナイ．ソコデ今一度假設ヲ取調ベテ ∠AED=∠R ヲ持込ムコトニス

ル．$\angle B=\angle R$ ガ並ブ，ソレナラ $\angle ARB=\angle ADE$ ガ云ヒ得タラヨイ（餘角ノ等シイコト）ソコデ $\overset{\frown}{AB}$ ノ周角チイヤデモ見ネバナラヌ．

ii. $OH=\frac{1}{2}CD$ ニ着眼スル．F チ CD ニ中點トスルトぶらーめぐぷたノ定理デ $FEG\perp AB$ ガ知レテ利用セラレル．$FE \parallel OH$，次ニ $\angle R\triangle$ ノ斜邊ノ中點ト云ツタラ電光石火（オイ來タト）三ツノ角頂カラ等距離ニアル．$CF=FE$ ト出ス．$FE=OH$ サヘ云ヒ得タラヨイ．ソレニハ $FE \parallel OH$ ガワカツテ井ルカラ HOFE ガ□デアレバヨイト考ヘル．ソウシタラ OF, HE ガ結ビタクナル．結ブト $OF\perp CD$, $HEK\perp CD$ ガ出テ來ル．

【主題】31．中心 O ナル圓ノ弦 AB ノ中點 M ヲ通ル任意ノ二弦 CD, EF ヲ作ルトキ，CE, DF ガ AB ト夫々 P, Q ニ交ラバ $MP=MQ$ ナルコトヲ證セヨ．

着眼 $OM\perp AB$ ハ必ズドコカヘ使ヒタイ，ソシテ OM チ軸トシテ折重ネタトキ Q ガ P ノ上ニ乘ルコトガ知リタイ，ソノタメニ OM ニ關スル DF ノ對稱 $D'F'$ チ CE ト交ラシテ見ルコトニスル．

答案 ● OMK ニ關シテ DF ノ對稱弦 $D'F'$ トシ CE ト N ニ交ラシムレバ

$\angle F'D'M=\angle MDF$

$\angle CEF=\angle CDF$ （$\overset{\frown}{CF}$ ノ周角）

∴ $\angle NEM=\angle ND'M$ ニシテ ENMD' ハ共圓點ナリ．

∴ $\angle END'=\angle EMD'$ （$\overset{\frown}{ED'}$ ノ周角）………(1)

$\angle ED'N=\angle EMN$ （$\overset{\frown}{EN}$ ノ周角）………(2)

又同樣ニシテ $\angle DCE=\angle DFE=\angle NF'M$ （對稱關係等ヨリ）ヨリ NMCF' ハ共圓點ニシテ

$\angle CNF'=\angle CMF'$……………………………(3)

$\angle NCF'=\angle NMF'$……………………………(4)

i. 而シテ $\angle END'=\angle CNF'$（對頂角），(1),(3) ヨリ $\angle EMD'=\angle CMF'$

ii. $\angle ED'N=\angle ECF'$（O 圓 $\overset{\frown}{EF'}$ ノ周角），(2),(4) ヨリ $\angle EMN=\angle NMF'$

iii. 又 $\angle CMK=\angle OMD$（對頂角）$=\angle OMD'$（對稱ヨリ）

∴ $\angle OMD'=\angle CMK$

此ノ邊々加ヘテ $\angle OMN=\angle NMK$　∴ $\angle OMN=\angle R$

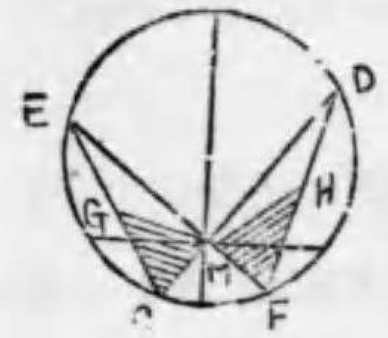
∴ N ハ OM ニ關シテ Q ノ對稱點トナル．∴ CE ガ AB ト交ル P 即チ N ナリ．∴ $MP=MQ$

研究 本問ハ實ニ難問デアル．中々初對面トシテハ出來ルモノデナイ．本社ノ通信講習ノ十二年十二月ニ課題シテ置イタ所，翌年三月名工ニ出題セラレタガ本問ノ別解デアル．

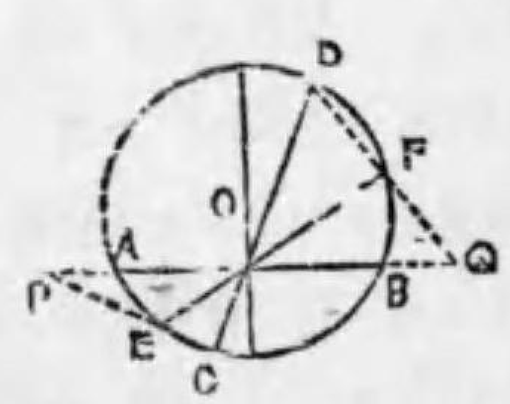
之チ相似形ノ借用デスルト割合早ク出來ル．ソレニハ $MP=MQ$ チ證スルノニハ $\triangle OPQ$ ニ於テ $OP=OQ$ 即チ $\angle OPM=\angle OQM$ チ證シサヘスレバヨイ．之ハ OM ガ PQ ノ**垂直二等分線**トナルコトカラ自然ノ考ヘ方デアル．ソコデ $\angle OPM$ ト $\angle OQM$ トチ他ノ角ノ仲媒デ等シイトシテ見タイ氣ニナル．今 $CE\perp OG$, $DF\perp OH$ チ作ルト $\angle R$ ガ四ツ出來テ居ルノチ二ツ宛トナルト OGPM ト OHQM ガ各夫々圓內四邊形トナル．ソレデ $\angle OPM=\angle OGM$, $\angle OQM=\angle OHM$ ノ移動ガ出來ル．今度ハ $\angle OGM=\angle OHM$ チ證スルコトニナル．ソコデ其ノ餘角チトツテ $\angle MGC=\angle MHF$ チ證スルコトチ工夫スル．

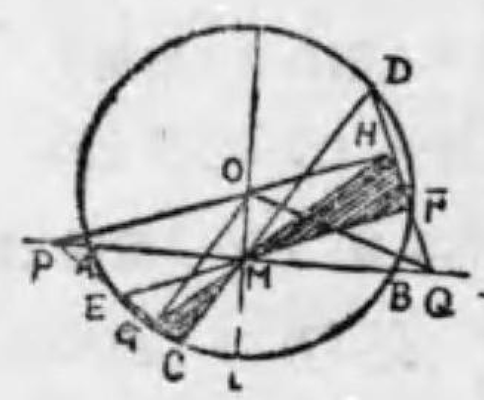
此ノトキ $\angle ECD=\angle EFD$ チ持チ込ムト．$\triangle MGC$;$\triangle MHF$ チ捕ヘテ二角ガ等シイコトニナル．ケレド

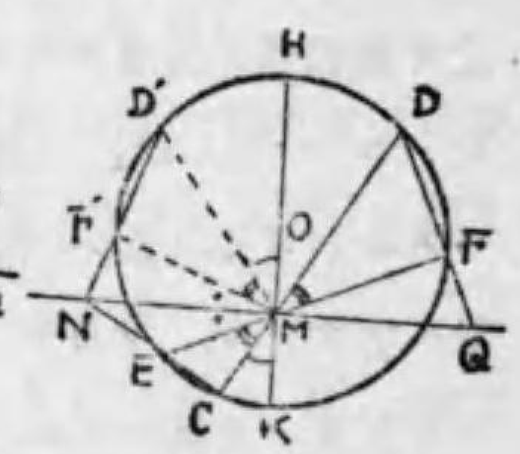
全等デないらしい．ソレナラ等角デ相似ニナツテ居ル筈デアル．此ノ時 G, H ノ性質ヲモウ一度調ベテ見ルト $OG \perp CE$, $OH \perp DF$ デアルカラ G ハ CE ノ中點デ，H ハ DF ノ中點デアル．$\angle ECD=\angle EFD$ ヲ弧 ED ノ周角トシテ使ツタカラ公平ニ $\overset{\frown}{CF}$ ノ周角モ考ヘテヤルト $\angle CEF=\angle CDF$ デ $\triangle CEM \backsim \triangle FDM$ ガ出ル，勿論最初ニ之ヲ見付ケタラ尚ホノコト，又 $\overset{\frown}{CF}$ ヲ考ヘナイデモ $\angle CME=\angle FMD$ カラデヨイ．ソウスルト $\triangle MCG \backsim \triangle MHF$ ガ押ヘラレル．



ソシテ此ノ相似カラ $\angle CGM=\angle FHM$ ヲ使ヒ，ソノ餘角デ $\angle OGM=\angle OHM$ ヲ得，之ヲ $\angle OPM=\angle OQM$ ニ移ス．以上ハ別解ヲシタガ，何レモ P, Q ハ弦 AB 上デ交截シタ點デアツタ．シカシ弦ノ位置ニ依ツテハ延長上ニナルコトモアル．ソレデ同ジ道程ヲ







辿ツテ證明ガ出來ル筈デアル．此所デ外分ニナツテモ同シクやれるト云フ確信ヲ一般ノ場合ニ持チタイ．

諸子ハ必ズ實行シタマヘ，上ノ解ヲ讀ミ圖ハ延長上ニアルモノヲ見ル．其ノ間寸隙ノ差ナシト云フ程ニ途ハ同ジデアルコトヲ．

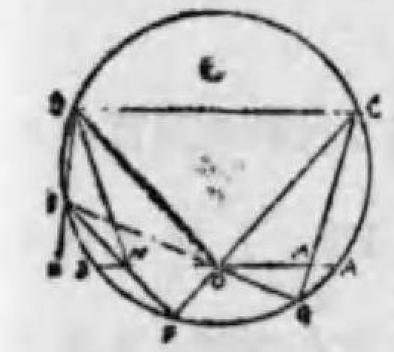
【試煉】69．AB, CD ヲ與ヘラレタル圓ノ平行ナル二定弦，O ヲ弦 AB ノ中點トス．今弧 BD 上ニ任意ノ點 E

ヲ取リ，弦 COF 及ビ EOG ヲ引ク，次ニ弦 AB ト弦 CG, EF トノ交點ヲ夫々 M, N トスレバ

（イ）四邊形 ODEN ハ圓ニ内接ス

（ロ）$OM=ON$　(13名工)

こなし方　主題ノ $MP=MQ$ ハ本問ノ（ロ）$OM=ON$ ニ相當シテ居ル．（イ）ヲ證スルト（ロ）ハ自然ト出來ル．此ノ（イ）ヲ證スルノガ主題ノ別解トナル．$CD \parallel AB$ ハ如何ニ展開スルカ，



$$\angle AOC=\angle OCD=\angle CDO=\angle DOB$$

ソシテ終結ノ ODEN ガ圓内四邊形トイフコトハ DE ノ延長上ニ H ヲトリ $\angle HEN=\angle DON$ ヲ證シタラヨイ．$\angle HEF=\angle FCD$（圓内四邊形CFEDヨリ）ソレデ $\angle DOB=\angle HEN$ ガイヒ得ル．ソノ結果トシテ $\angle ODN=\angle OEN$ 之ニ $\overset{\frown}{FG}$ ノ周角ヲ持チ込ンデ $\angle OEN$ 即チ $\angle GEF=\angle GCF$ ヲ關係サセルト

$$\triangle OMC \equiv \triangle OND$$

ハ $OC=OD$ ヨリソノ兩底角ノ等シイコトガ成立スル．（ロ）ハ直チニ出ル．

【試煉】70．圓ニ内接スル四邊形 ABCD アリ．B ヲ通リ AB ト角 DAC ニ等シキ角ヲナス直線 BE ヲ引キ，AC ト交ル點ヲ E トシ，D ヲ通リ AD ト角 BAC ニ等シキ角ヲナス DF ヲ引キ，AC ト交ル點ヲ F トスレバ AF ハ CE ニ等シキコトヲ證明セヨ．　(14東工)

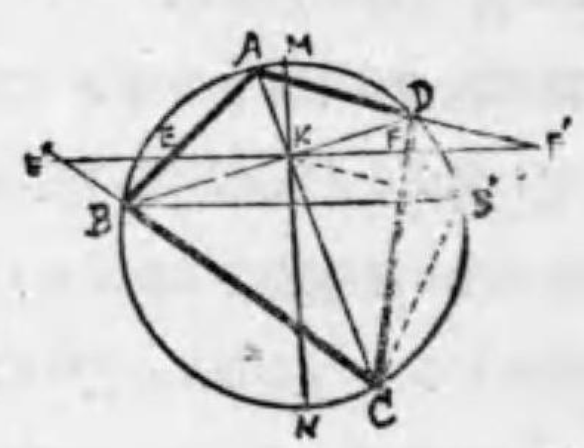
こなし方　DF, BE ヲ圓ト E′, E′ デ交ラセルト

∠BAC＝∠ADE′　カラ　$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE'}$,

ソシテ　AC ∥ BE′　ヲ得ル.　AC ∥ DF′　モ同ジク公平ニトル.

△AEF′≡△CDF　ガ成立シテ　AF＝CE

【應用】　圓内四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點 K ヲ通ル直徑 MN ニ垂線ヲ作ルトキ，此ノ垂線ガ對邊ニヨリテ截リトラル線分ハ K ニテ二等分セラル.



こなし方　主題ト同ジ材料ヲ換置シタノミデアル.　BB′ ∥ EF　トシテ前ノ解ヲ見ナイデ解イテ彼此對照シテ見ラレヨ.

6. 切　線　切　圓

【指導】　切線ニツイテ

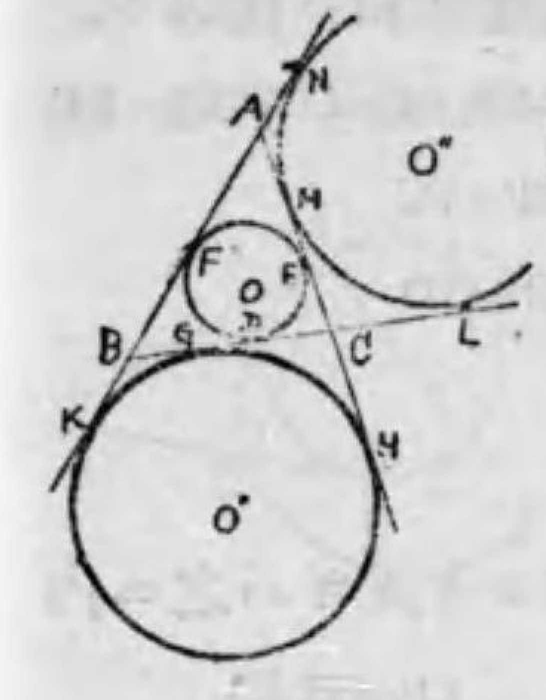
i.　一ツノ切線ハ半徑ト直角ヲ成スコトカ，一弦ト成ス角ヲ隣弓形角ニ移スノガ當然ノ考方デアル.

ii.　二ツノ切線ハ長サガ等イコト，中心線ト等角ヲ成スコト，中心線ハ切點線分ヲ垂直ニ二等分スルコトナドニ展開スル.

【指導】　三角形ノ内切圓ト傍切圓ニツイテ

△ノ三邊ヲ a, b, c　トシテ　$2s=a+b+c$　トスルノハ慣習デアル.

i.　O′ ヲ傍切圓トシ　△ABC　ノ三邊ト　G, H, K　ニ切スルトキニ



AK＝AH, BG＝BK, CG＝CH　デアルカラ

AK＋AH＝2s　　∴　AK＝AH＝s

ii.　O ヲ内切圓トシ　D, E, F　デ切スルトキ

AF＋AE＋BF＋BD＋CD＋CE＝2s

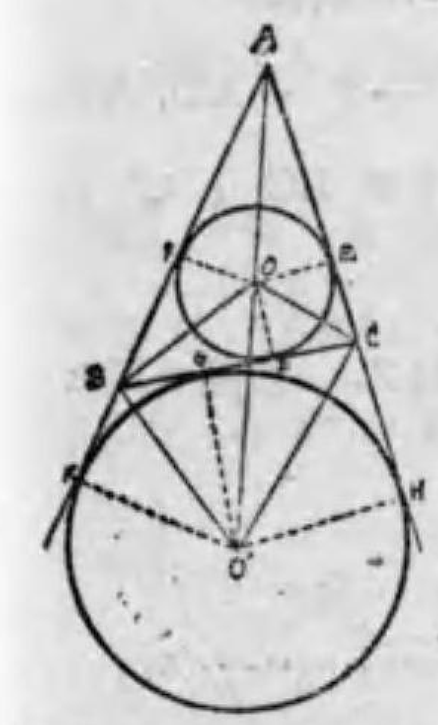
トシテ　AF＝AE, BF＝BD, CD＝CE

デアルカラ　AF＋BD＋CD＝S

∴　s－BD－CD＝AF

∴　$s-a$＝AF

同様ニ　$s-b$＝BF　　$s-c$＝CE



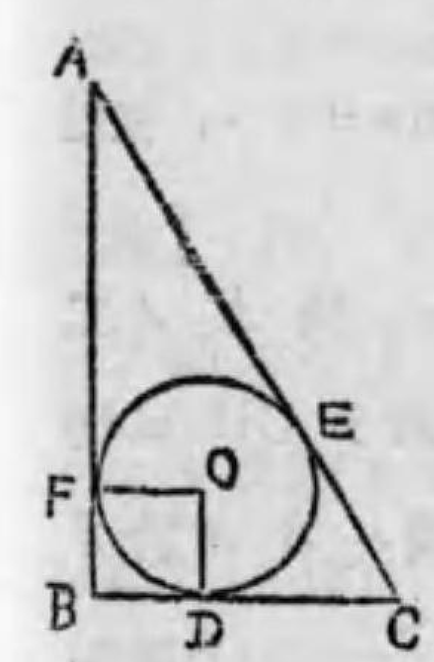
iii.　O″ ヲ AC 邊ヘノ傍切圓トシテ L デ BC ニ切スルトキ

BL＝s＝AK　　BK＝BG　デアルカラ

AB＝GL　　c＝GL

【反復】　左圖デ上ノ事實ヲ特筆拔抄シテ見ラレヨ.

【試練】　71.　B ヲ直角トスル　△ABC　ノ内切圓ノ半徑ヲ r トセバ　AB＋BC－AC＝2r



こなし方　D, E, F　ヲ切點トスルト

AF＝AE, BF＝BD, CD＝CE

∴　AB＋BC－AC

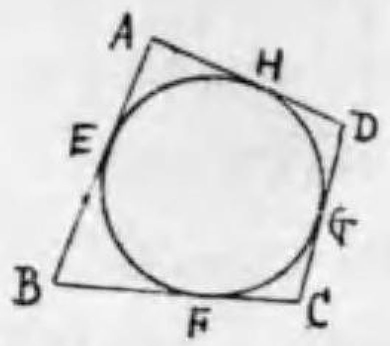
＝AF＋FB＋BD＋CD－CE－AE

＝BF＋BD

而シテ　ODBF　ハ正方形ナルヲ以テ

BF＋BD＝2r

【試練】 72. 圓ニ外切スル四邊形ノ對邊ノ和ハ相等シ.



こなし方 $AH=AE,\ BE=BF,\ CF=CG,\ DG=DH$

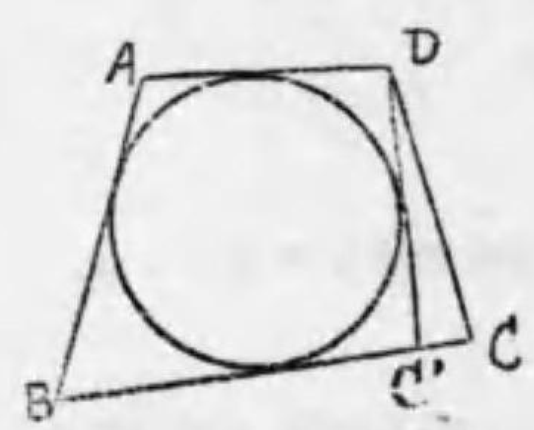
$AD+BC=AH+HD+BF+FC$

$AB+CD=AE+EB+CG+GD$

$\therefore\ AD+BC=AB+CD$

【試練】 73. 四邊形ノ對邊ノ和ガ相等シキトキハ之ニ内切スル圓ヲ作ルヲ得. (さびーノ定理)　　(15成蹊高)

こなし方 $\angle A$, $\angle B$ ノ二等分線ノ交點ヲ中心トスル圓ノ一ツハ AD, AB, BC ニ同時ニ切スル. D ヨリ此ノ圓ニ切線 DC′ ヲ作ッテ BC ト C′ ニ交ラセル. C′ ハ C ト一致スル.



ソレヲ證スルニハ歸謬法ヲ用フ. 前問ヲ用ヒテ

$$\begin{array}{r|l} - & AD+BC=AB+DC \\ & AD+BC'=AB+DC' \\ \hline & CC'=DC-DC' \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \end{array}$$

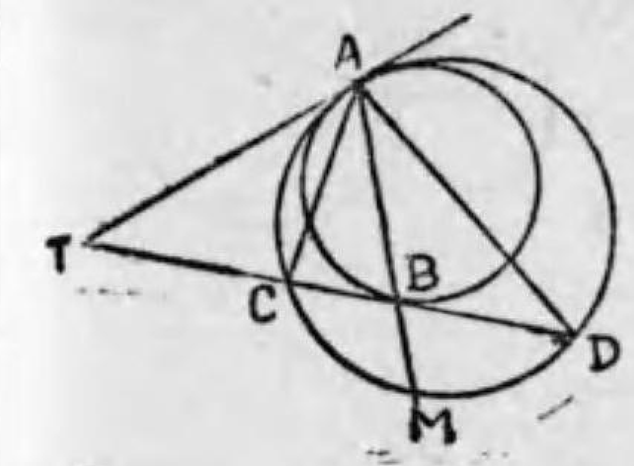
C, C′ ガ一致シナイトキハ $\triangle CDC'$ ガ成立スル筈デアルガ (A) デソレハ出來ナイ. C,C′ ハ一致スル.

【指導】 二圓ノ切スルコトヲ證スルノニハ共通切線ガ出來ルコトヽ, 交點ガ二圓ノ中心線上ニアルコトヲ證スルノデアル.

【主題】 32. 三角形 ADC ハ圓 O ニ内接シ, 角 A ノ二等分線ハ CD ト B ニ於テ交ル. 今 B ニ於テ CD ニ切シ, 且ツ A ヲ過ギル圓ヲ書クトキハ此ノ圓ハ A ニ於テ圓 O ニ内切スルコトヲ證セヨ.　　(14海兵)

着眼 指導ノ第一段共通切線ヲ持チ出ス.

答案 證 A ニ於ケル後圓ノ切線ヲ AT トシ, DC トノ交點ヲ T ト



$\angle TAB=\angle TBA$ (切線ヨリ)

$\angle CAB=\angle BAD$ (假設)

邊々相減ジテ

$\angle TAC=\angle CBA-\angle BAD=\angle CDA$

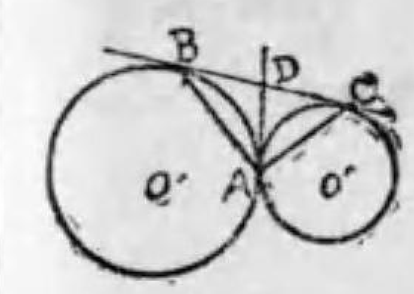
($\triangle BDA$ヨリ)

$\therefore$ TA ハ 圓 ACD ニ切ス

二圓ハ A ニ於テ共通切線 AT ヲ有シテ互ニ切ス.

【試練】 74. A ヲ共有點トスル二圓 O, O′ ノ外公切線 BC ヲ作ルトキ $\angle BAC=90^\circ$ ナラバ O, O′ ハ Aニテ切ス.

こなし方 A デ O 圓ニ切線ヲ作リ BC トノ交リヲ D トス.



$DB=DA$ カラ $\angle DBA=\angle DAB$

$\therefore\ \angle DAC=\angle DCA$

弓形角ガ等シクナルカラ

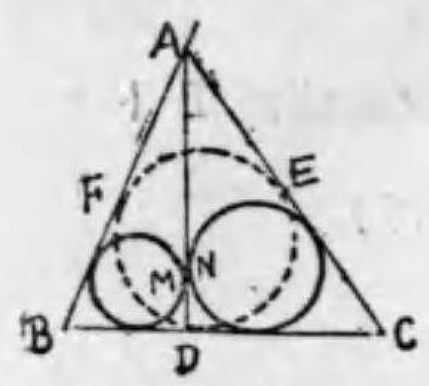
$\therefore$ DA ハ O′ 圓ノ切線トナル.

ソコデ共通切線ヲ有スルコトニナッテ二圓ハ切スル. ソノ上 BC ガ外公切線トイフカラ外切スル.

【試練】 75. $\triangle ABC$ ノ内切圓ガ BC, CA, AB ト D, E, F ニテ切スルトキ, $\triangle ABD$, ACD ノ内切圓ハ互ニ外切スルコトヲ證セヨ.

こなし方 $\triangle ABD$ ノ内切圓ガ AD ト M デ切スルトスル.

$\triangle ACD$ ノ……………………N…………………



$AM=\frac{1}{2}(AD+AB-BD)$

$AN=\frac{1}{2}(AD+AC-CD)$

(指導 ii ヲ參照ノコト)

又 △ABC ノ内切圓カラ

$$\left.\begin{array}{l}AB-\underset{\sim}{BD}=AB-\underset{\sim}{BF}=AF\\ AC-\underset{\sim}{CD}=AC-\underset{\sim}{CE}=AE\end{array}\right\}\quad AF=AE$$

ソレデ $AM=\frac{1}{2}(AD+AF)$ $AN=\frac{1}{2}(AD+AE)$

$\therefore$ **AM=AN**

【主題】 33. 二圓ガ P ニ於テ内切シ, 一ツノ割線ガ二圓周ヲ A, B, C, D ニ於テ切ルトキハ

$\angle APB=\angle CPD$ (廣師・長商)

答案 證 P ニ於テ切線 PT ヲ作レバ弦 PB, PA トナス角ヨリ

$\angle TPB=\angle PCB,\ \angle TPA=\angle PDA$

邊々相減ジテ

$\angle APB=\angle PCB-\angle PDA$

而シテ △PCD ニ於テ外角關係ヨリ

$\angle PCB-\angle PDA=\angle CPD$

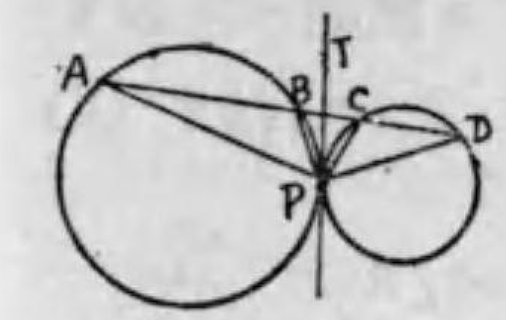
$\therefore\ \angle APB=\angle CPD$

研究 PB, PC ヲ延長シテ外圓ト B′, C′ ニ交ラセ AD ∥ B′C′ トナルコトヲ利用シテ見ラレヨ.

【試練】 76. 外切スル二圓ノ切點ヲ P トシ, 一直線ヲ引キ二圓ト交ル點ヲ順次ニ A,B,C,D トセバ

$\angle APD+\angle BPC=2\angle R$

こなし方 TP ナル切線ヲ作ルト



$\angle TPB=\angle PAB,\ \angle TPC=\angle PDC$

邊々加ヘテ $\angle BPC=\angle PAD+\angle BPC$

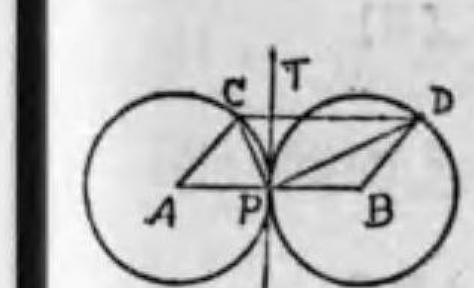
△APD ニ於テ

$\angle APD+(\angle PAD+\angle BDC)=2\angle R$

$\therefore\ \angle APD+\angle BPC=2\angle R$

【試練】 77. P ニ於テ外切スル二等圓ノ中心ヲ A, B トス. 線分 CD ハ AB ニ等シク, 且ツ平行ニシテ其ノ兩端ヲ各圓周上ニオクトキハ $\angle CPD=\angle R$

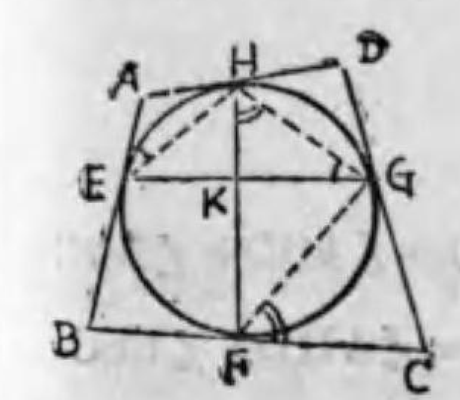
こなし方 TP ヲ共通切線トスル.



$$\left.\begin{array}{l}\angle CPT=\frac{1}{2}\angle CAP\\ \angle DPT=\frac{1}{2}\angle PBD\end{array}\right\}\text{邊々相加ヘ}$$

$$\angle CPD=\frac{1}{2}\underbrace{(\angle CAP+\angle PBD)}_{2\angle R}$$

【主題】 34. 一ツノ四邊形ニ内切圓及ビ外接圓ノ畫キ得ルトキハ其ノ内切圓ノ相隣ラザル切點ヲ結ビツクル二ツノ直線ハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ. (13富藥)



着眼 内切圓カラ見ルト二弦ノ直交スルコトヲ證スノデアルカラ $\overset{\frown}{GF}+\overset{\frown}{EH}=$半圓 ヲ捕ヘル.

ソレニ圓内四邊形ノ條件ト切圓ノ關係トヲ持込ム.

答案 特述 ABCD ハ内接四邊形ニシテ, E, F G, H ニテ他圓ニ外切スルトキ $HF\perp EG$

$\triangle AEH$, $\triangle DFG$ ニ於テ

$\angle AEH+\angle AHE+\angle CFG+\angle CGF+\angle A+\angle C=4\angle R$

AE, AH ハ切線ナルヲ以テ　$\angle AEH=\angle AHE$

同樣ニ　$\angle CFG=\angle CGF$

$\therefore\ 2\angle AEH+2\angle CFG+\angle A+\angle C=4\angle R$

$\square ABCD$ ハ圓ニ內接スルヲ以テ　$\angle A+\angle C=2\angle R$

$\therefore\ \angle AEH+\angle CFG=\angle R$

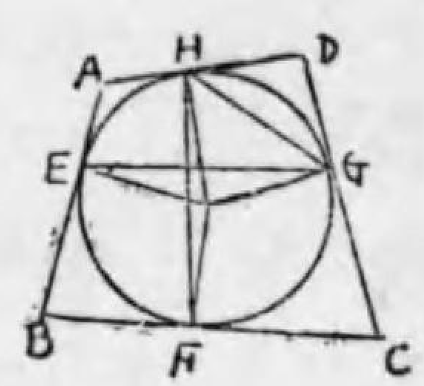
AE ハ切線 EH ハ弦ナルヲ以テ　$\angle AEH=\angle HGK$

同樣ニ　$\angle CFG=\angle GHK$　$\therefore\ \angle HGK+\angle GHK=\angle R$

$\triangle HKC$ ニ於テ　$\angle HKG=\angle R$

依テ FH, EG ハ互ニ垂直

研究　內圓ノ中心ヲ O トスルト $\angle HOE$, $\angle FOG$ ハ $\angle A$, $\angle C$ ノ補角トナル. (H, E, F, G ノ角ガ $\angle R$)



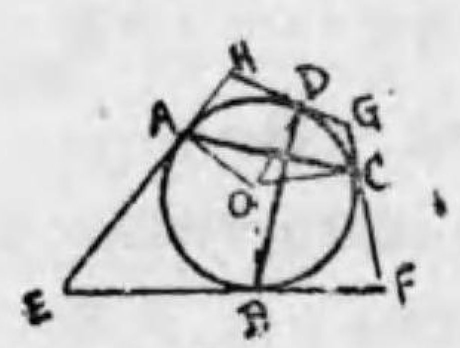
$\therefore\ \angle HOE+\angle FOG=2\angle R$

$$\left.\begin{array}{l}\angle HGE=\frac{1}{2}\angle HOE\\ \angle GHF=\frac{1}{2}\angle GOF\end{array}\right\}\text{中心角ト周角}$$

トスルノモヨロシイ.

【試練】 78. 四邊形 HEFG ガ A,B,C,D ニテ圓ニ外切スルトキ $AC\perp BD$ ナラバ四邊形 HEFG ハ他圓ニ內接ス.

こなし方　主題ノ逆命題デアル. $\angle H+\angle F=2\angle R$ ヲ證シタラヨイ



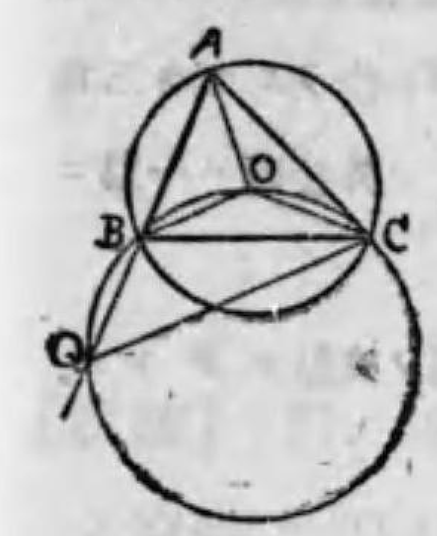
$2\angle ACD=\angle AOD$

$2\angle BDC=\angle BOC$

デアルカラ $2(\angle ACD+\angle BDC)=\angle AOD+\angle BOC$

$\cdots\cdots\ 2\angle R\cdots\cdots=\angle AHD+\angle BFC$

【試練】 79. 三角形 ABC ノ二項點 B, C 及ビ外心 O ヲ過ギル圓周ガ AB 又ハ其ノ延長ト交ル點ヲ Q トシ, CQ ヲ結ブトキ QA=QC ナルコトヲ證セヨ. (14商大)



こなし方　$\angle OCQ=\angle ABO$ (圓內四邊形カラ)

$=\angle BAO$ (OA=OB カラ)

$\angle OAC=\angle OCA$ (OA=OB ヨリ)

$\therefore\ \angle OAC+\angle OAB=\angle OCA+\angle OCQ$

$\therefore\ \angle QAC=\angle QCA$

$\therefore\ \triangle QAC$ カラ QA=QC

【試練】 80. 圓ノ弧 BC ノ中點 M ヨリ二弦 MA, MD ヲ引キ, 弦 BC トノ交點ヲ E, F トセバ四點 A, E, F, D ハ同一圓周上ニアリ. (新醫・山商)

こなし方　MT ヲ M 點ニ於ケル切線トスル.

$MT\parallel BC$ カラ $\angle TME=\angle MEF$,

切線 TM ト弦 MA カラ

$\angle TMA=\angle MDA$

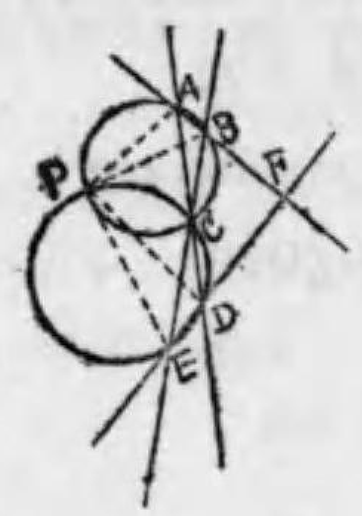
ソコデ　$\angle MEF=\angle ALC$ ヲ四邊形 EADF ニ持込ム.

6. 共點圓問題

【主題】 35. 平行ナラザル四ツノ直線ガ作ル三角形ノ外接圓ハ同一點ニテ交ル.

【着眼】 四ツノ直線ハ幾ツノ△ヲ作ルカヲ吟味シテソノ内ノ任意ノ二圓ノ交點ヲ第三ノ圓モ通過スルカドウカヲ調ベル. ソレニハ四邊形ガ圓ニ内接シ得ル條件デアル對角補角カ, 一外角ト内對角ト等シイコトヲ使フ.

【答案】【特述】 四ツノ直線ヲ一, 二, 三, 四トス. 此ノ四直線ガ圖ノ如ク A, B, C, D, E, F ノ六點ニテ交リ, 作ラルベキ三角形 ABC, CDE, ADF, BEF ノ外接圓ハ一點ニ交ル.



△ABC, △CDE ノ外接圓ノ交點ヲ P トス.

i. 圓内四邊形 ABCP ヨリ

$\angle PCE=\angle PAB \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

圓 PCDE ノ弧 PE ヨリ $\angle PCE=\angle PDE \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$\therefore\ \angle PAB=\angle PDE$

四邊形 APDF カラ見ルトキ一外角ガソノ内對角ニ等シキヨリ

四邊形 APDF ハ圓ニ内接ス

∴ △ADF ノ外接圓ハ P ヲ過ギル.

ii. 同樣ニシテ圓内四邊形 PCDE ヨリ $\angle DEP=\angle PCA$,

弧 AP ヨリ $\angle PCA=\angle PBA$ ∴ $\angle FEP=\angle PBA$

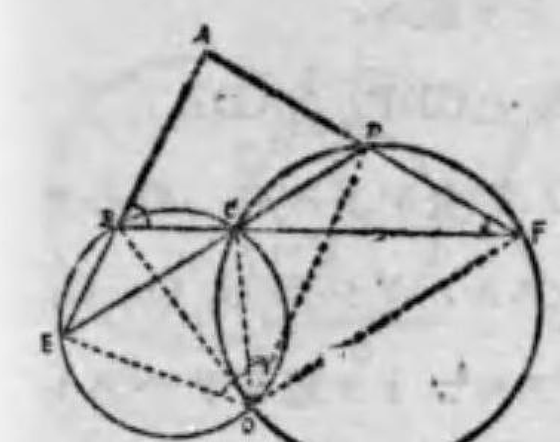
∴ 四邊形 PEFB ハ圓ニ内接ス

∴ △BEF ノ外接圓ハ P ヲ過ギル.

總合 四ツノ△ノ外接圓ハ一點 P ニテ交ル.

【要領】 同一點デ圓ノ交ルトキハ圓内四邊形ノ構成ヲ考ヘル.

【研究】 本問ハ「四邊形 ABCD ノ二双ノ對邊ヲ延長シテ E, F ニ交ラシムルトキ生ズル △AED, △ABF, △BCE, △CDF 外接圓ハ O デ會ス」トイフ命題トナル.



本主題ノ證ト少シ變ヘテ考ヘテ見ルト

$\angle A+\angle EOD=2\angle R$ ヲ云ツテ △AED ノ外接圓ガ O ヲ過ギルコトニスルノニハ

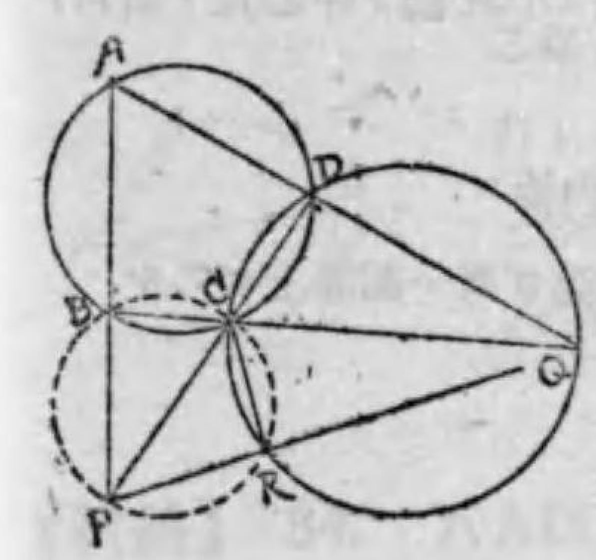
$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC=\angle EOC\\ \angle CFD=\angle COD\end{array}\right\}\ \angle EOD=\angle ABC+\angle AFC$$

トナツタカラ △ABF ノ内角トナル.

【試練】 81. 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ノ二双ノ對邊ノ交點ヲ P, Q トスルトキ △BCP, △CDQ ノ外接圓ハ PQ 上ニテ交ル. (14東醫)

こなし方 二圓ノ交點ヲ R トシテ R ガ PQ 上ニアルコトヲ考ヘルノニハ

$\angle PRC+\angle CRQ=2\angle R$



ヲ考ヘテ行ク. ソレデ假設ノ圓内四邊形 ABCD ヲ利用スル. ソノ利用ハ對角關係デアル.

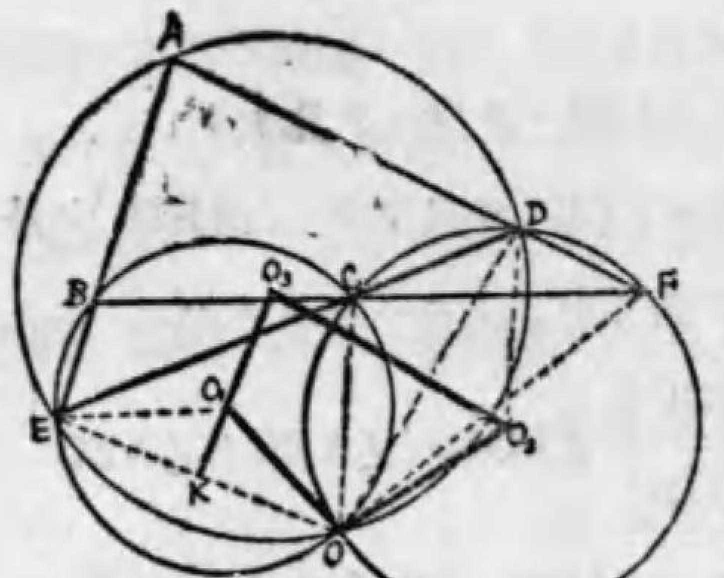
$\angle ABC=\angle PRC$ (圓内四邊形 BPRC)

$\angle ADC=\angle CRQ$ (圓内四邊形 DCRQ)

トシテ $\angle ABC+\angle ADC=2\angle R$ (圓内四邊形 ABCD)

$\therefore\ \angle PRC+\angle CRQ=2\angle R$

【試練】 82. 四邊形 ABCD ノ對邊 AB, CD ノ延長ノ交點ヲ E, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トスレバ, 四ツノ △BCE, △CDF, △ABF, △ADE ノ外心ハ此ノ四ツノ三角形ノ外接圓ノ交點ト共ニ同一周上ニアリ.



こなし方 主題ノ研究圖ガ適用サレルモノデアルコトヲ睨ム.

△BCE, △CDF, △ADE ノ外接圓ガ O デ交ルトスル. 外心ヲ O_1, O_2, O_3 トスル. ソシテ O, O_1, O_2, O_3 ガ環座デアルコトヲ證シサヘスレバ O_4 ヲ考ヘ込ムノモ同一デアル.

「二圓ノ交點ヲ結ブ線分ハ中心線ニテ垂直ニ二等分セラル」

ヲ用ヒルト $O_3O_1 \perp EO$ K デ交ルトスル.

$\angle KO_1O = \frac{1}{2}\angle EO_1O$ (中心角) $= \angle ECO$ (圓周角) $= \angle OFD$

(四邊形 COFD ハ圓内四邊形圓) $= \frac{1}{2}\angle OO_2D$ (O_2 圓ノ中心角ト周角)

$= \angle O_3O_2O$ ($O_3O_2 \perp OD$ デアル)

∴ 四邊形 $O_1OO_2O_4$ ハ圓ニ内接ス.

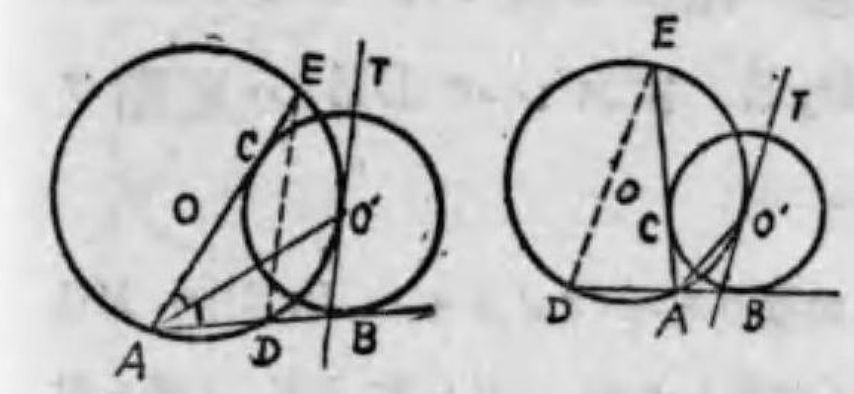
同樣ニ O, $O_1O_2O_4$ モ圓内四邊形トナツテ五點ガ同一圓周上ニアル.

【注意】 之ヲみけーるノ定理トイフ.

7. 定 方 向 問 題

【主題】 36 定圓 O ノ周上ノ定點 O′. ヲ中心トスル定圓ニ, O 圓周上ノ A ヨリノ二ツノ切線 AB, AC ガ O 圓ト D, E ニテ交ラバ DE ハ定方向ナリ.

着眼 A ガ O′A 上ニアルコトヲ考ヘルト DE ハ O′ ニ於ケル O 圓ノ切線ニ平行デアルカラ, A ガ何處ニ動クモ同一デアルコトヲ考ヘル.



答案 ❹ $\angle CAO' = \angle BAO'$

∵ 二切線ト中心線ヨリ

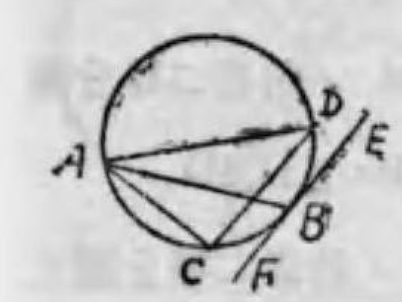
之等ハ O 圓ノ二ツノ周角ニシテ

$\angle EAO' = \angle DAO'$

∴ $\overset{\frown}{EO'} = \overset{\frown}{DO'}$ ∴ $EO' = DO'$

O,O′ ハ E,D ヨリ等距離ニアリ. 故ニ OO′ ハ ED ノ垂直二等分線ニシテ DE ハ OO′ ト直交ス. 故ニ定方向ナリ.

【試練】 83. 定圓ノ一定弦 AB ノ一端 A ヨリ二弦 AC, AD ヲ引キ AB ト等角ヲナサシメバ CD ハ定方向ヲ成ス.

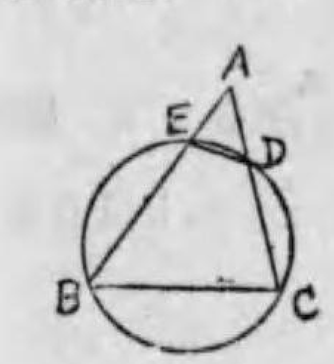


こなし方 主題ノ一部分デアル. B ノ切線 EF ニ平行トイフノナラ $\angle DCB = \angle CBF$ ヲ云ヘバ足ル.

$\angle DCB = \angle DAB$ ($\overset{\frown}{DB}$ ノ周角)

$\angle CBF = \angle CAB$ (切線ト弦ノ角)

【試練】 84. △ABC ノ BC ヲ弦トスル任意ノ圓ガ AC, AB ト D, E ニテ交ラバ DE ハ定方向トナル.



こなし方 $\angle AED = \angle C =$ 一定

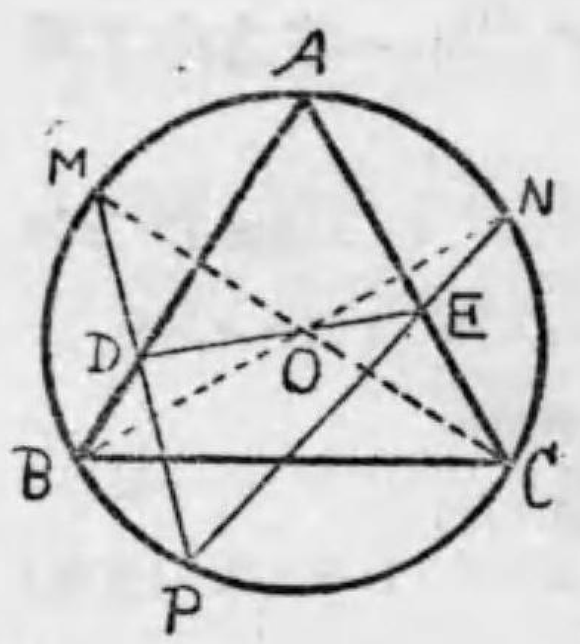
8. 定 點 通 過 問 題

【主題】 37. 正三角形 ABC ノ外接圓 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ ノ中點

ヲ M, N トシ, $\widehat{BC}$ 上ノ任意ノ點ヲ P トス. PM, PN ガ AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ DE ハ定點ヲ過ギル.

着眼 P ガ B, C ニ重ル特種ノ位置ヲ考ヘル. ソノトキハ D, E ハ MC, NB ノ上ニ乘ツテ MC ト NB トノ交點トナル. ソレデ DE ノ通ル定點ハ MC, NB ノ交點デアルト睨ミヲツケル. ソシテ正三角形ノ展開トシテ重, 垂, 内心ガ一致スルコトヲ使フ.

答案 ㊗ MC, NB ノ交點ヲ O トシ, DO, OE ヲ結ブ



$\widehat{AN}=\widehat{CN}$ ヨリ $\angle ABN=\angle CBN$

∴ BN ハ $\angle B$ ノ二等分線

同樣ニ CM ハ $\angle C$ ノ二等分線

∴ O ハ $\triangle ABC$ ノ垂心ナリ

* 而シテ AB ハ OM ノ垂直二等分線ナルヲ以テ $\angle DOM=\angle DMO$

同樣ニ AC ハ ON ノ垂直二等分線ナルヲ以テ $\angle EOC=\angle ECO$

而シテ $\angle PMC=\angle PNC$ ($\widehat{BC}$ ノ周角)

∴ $\angle MOD=\angle EOC$ ∴ DOE ハ一直線ヲナス

DE ハ常ニ O ヲ過ギル.

〔補題 * ハ 90 頁主題 27 ノ略解ヲ試ミオクコト〕

【試練】 85. A, B ハ定圓周上ノ二定點ナリ. 此ノ圓周上ノ任意ノ一點ヲ C トスレバ $\angle ACB$ ノ二等分線ハ二ツノ定點ノ中ノ一ツヲ過ギル.

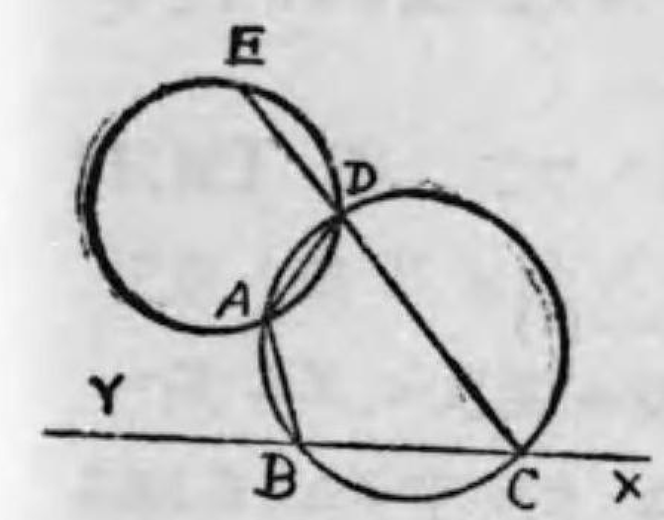
こなし方 $\angle ACP=\angle BCP$

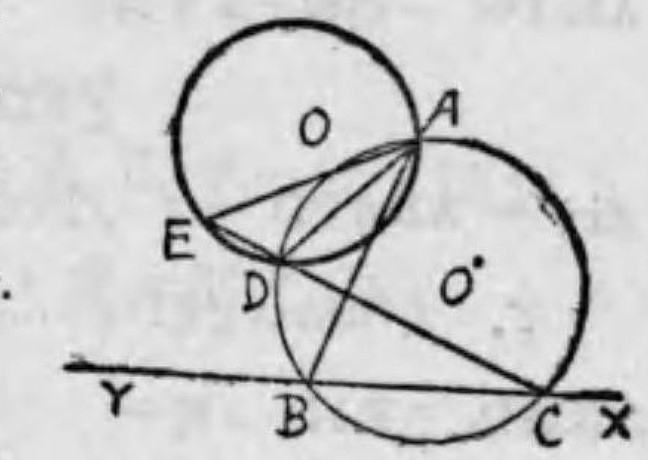
∴ $\widehat{AP}=\widehat{BP}$

∴ P ハ $\widehat{AB}$ ノ中點デ定點, C ガ共軛弧上ニ行クト共軛弧 AB ノ中點ヲ過ギル.

【試練】 86. A ハ定圓周上ノ定點, B ハ定直線 XY 上ノ定點ナリ. A, B ヲ過ギル任意圓ガ原圓ト D, XY ト C ニテ交ラバ CD ハ定點 E ヲ過ギル.

こなし方 任意圓ニ於テ内接四邊形 DABC ハ形ハ變ジテモ一角 B ハ A, B, XY ガ定メラレテ居ルカラ一定デアル. ソレデ $\angle ADE$ ハ一定トナル. A 圓周上ニ E ヲトルトキニハ E ハ定點トナル.



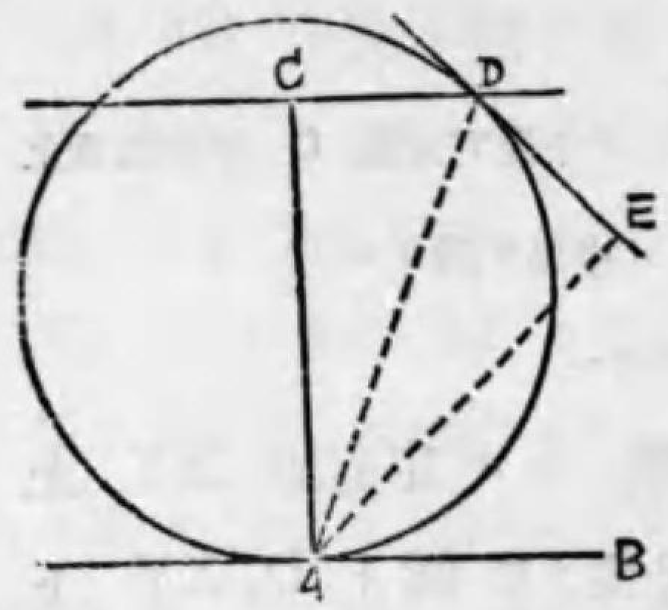


參照 E ノ定點トナルコトハ主題 39 デモ用ヒテアルカラ彼此對照シタガヨロシイ.

8. 一 定 切 圓 問 題

【主題】 38. 定直線 AB 上ノ A ニ於テ AB ニ切スル任意ノ圓ガ AB ニ平行ナル CD ト D ニテ交ル時, DE ナ

ルソノ圓ノ切線ヲ作レバ DE ハ或定圓ニ切ス.



着眼 定圓ニ切スル直線ヲ考ヘルノニハ定點カラノ距離ヲ一定ナラシメルノデアルカラ, 定點ヲ眼ムト本問デハ A ヨリ外ハナイ, ソレデアルカラ

$$\angle DEA=\angle R$$

ヲ作ツテ AE ヲ定長線トスルノデアル.

答案 D ニ於ケル任意切圓ニ切線 DE ヲ作リ, AE⊥DE トシ, AC ヲ AB, CD ノ距離トス.

AB, DE ハ切線ナルヲ以テ

$$\angle EDA=\angle BAD$$

而シテ AB∥CD ヨリ $\angle CDA=\angle DAB$

$$\therefore\ \angle CDA=\angle EDA \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

△CAD, △EAD ニ於テ

$$\angle C=\angle R=\angle E,\quad AD\ 共通$$

之ニ (1) ヲ用フレバ合同 $\therefore\ AC=AE$

然ルニ AC ハ定平行線距離ニテ一定ナル故 AE 亦一定ナリ.

$\angle E=\angle R$ 故ニ ED ハ A ヲ中心トシ半徑 AC ノ圓ニ切ス.

【試練】 87. X, Y ナル定平行線アリ. X 上ニ及ビ D Y 上ニ B, C ヲ AB=BC=CD ニトレバ CD ハ常ニ定圓ニ切ス.

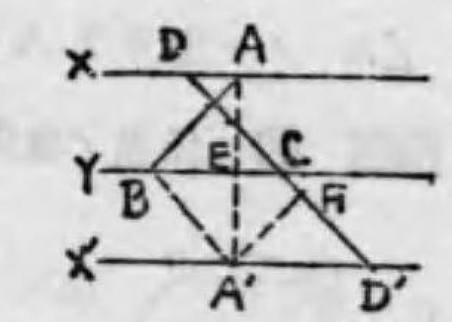
こなし方 B ヲ定メルト C ハ定マリ, D ハ二ツノ位置ノ何レカニナル. 第一, 二圖ニツイテ考ヘル.

BC, CD ヘ A ヨリ垂線 AE, AF ヲ下ス

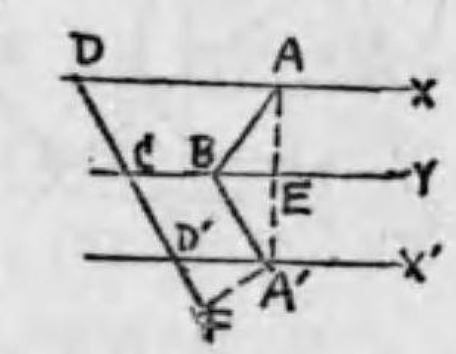
菱形 ABCD ノ平行邊間ノ距離トナルカラ

AE=AF 定量

ソレデ A ヲ中心トシ, 平行距離ヲ半徑トスル圓ニ切スルコトトナル.



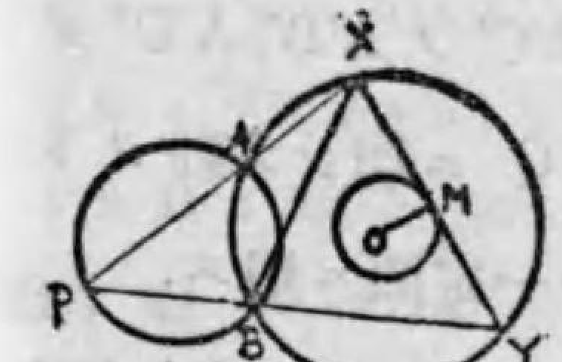
第二ノ位置ノトリ方デハ第三, 四圖ノ場合トナル.



コノトキハ Y ニ關シ A ノ對稱點 A′ ヲ中心トシ, 菱形關係 A′BCD′ ハ上ト同ジニナリ A′ ヲ中心トスル等圓ニ切スル.

【試練】 88. 二ツノ與圓ノ交點 A, B ヲ一ツノ圓周上ノ任意ノ點 P ニ結ブ直線ガ他圓ト交ル點ヲ XY トスレバ弦 XY ハ定圓ニ切ス. (13同大)

こなし方 △XPB カラ $\angle XBY=\angle APB+\angle AXB$



ソシテ $\overset{\frown}{AB}$ ノ周角トスルト

$\angle APY$, $\angle AXB$ ガ一定デアルカラ

$\angle XBY$ ガ一定デ XY ガ一定長,

ソウスルト中心 O カラノ距離ガ決定シテ O ノ同心圓ニ切スル.

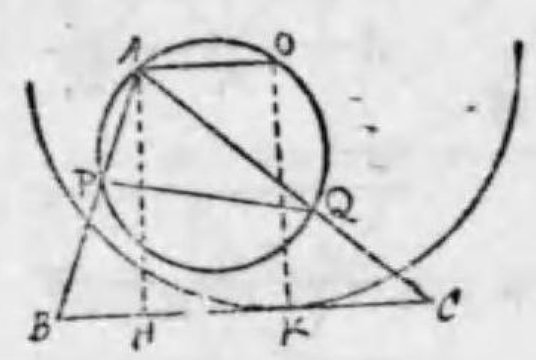
【主題】 39. 形及ビ大サガ一定ナル三角形 ABC アリ. 其ノ二邊 AB, AC ハ夫々二定點 P, Q ヲ通ル樣ニ動クトキハ底 BC ハ一定圓ニ切ス.

着眼 BC ガ固定點カラ一定距離ニアルコトヲ決定セネバナラン.

ソコデ第一ニ**固定點**ノ發見, 第二**一定線分**ノ發見デアル.

P, Q ガ定點デアルカラ PQ ハ有力ナ材料ニナルニ違ヒナイ. ソレト ∠A ノ一定カラ A ノ軌跡ガワカル.

答案 證 任意ノ位置ニ於ケル △APQ ノ外接圓ヲ作ル. PQ 固定, ∠A ノ大サ一定ナルヲ以テ A ノ位置ニカヽハラズ APQ 圓ハ決定シ, A ハ此ノ圓弧上ニアリ.



AH⊥BC, AH⊥AO ヲ作リ BC ト H, 圓ト O ニテ交ラス. OK⊥BC ナラシメバ AHKO ハ矩形ニシテ　**OK=AH=一定**

AO ∥ BC トナルヲ以テ　∠OAC=∠ACB=一定

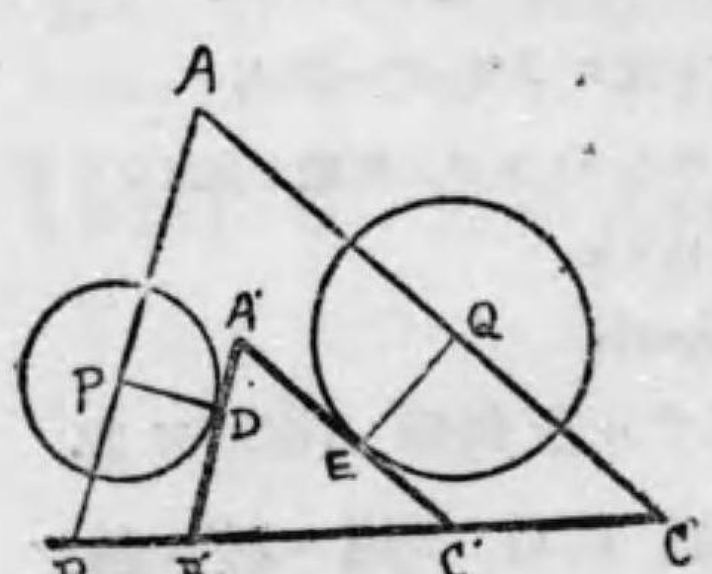
∴ 圓 APQ ニ於テ ∠OAQ ガ一定トナル.

ヲ以テ $\overset{\frown}{QO}$ ハ決定セルレ, O ハ定點トナル.

BC ハ O 點ヨリノ距離ガ (高サ AH) 一定ナルヲ以テ

BC ハ O ヲ中心トシ AH ヲ半徑トスル圓ニ切ス.

【試練】 89. 形, 大サノ一定セル △A′B′C′ ノ A′B′, A′C′ ガ二定圓 P, Q ニ切シテ動クトキ B′C′ ハ一定圓ニ切ス.



こなし方 P, Q ヲ過ギリ A′B′, A′C′ ニ平行線 AB, AC ヲ作リ A デ交ラセ, B′C′ ヲ延長シテ B, C デ交ラセル. △A′B′C′ ノ位置ニカヽハラズ PD, QE ナル二圓ノ半徑ガ平行距離ナル故 △ABC ハ形, 大サ一定トナル.

ソコデ本問ハ AB, AC ガ定點ヲ通ルトキ, BC ガ一定圓ニ切スルコトニナツテ主題ト同ジニナル.

10. 共線點問題

【指導】 三點 (例ヘバ A, B, C) ガ一直線上ニアルコトノ證.

〔1〕 A, C ヲ結ブ直線上ニ B ガアルコト, 〔2〕 A, B 及ビ B, C ヲ結ベバ ∠ABC ガ 2∠R ヲ成スコト, 〔3〕 AC ト BC トガ合致スルコト, 〔4〕 AB, BC ガ B ヲ過ギル定直線ニテ對頂角ヲ成スコト, 〔5〕 AB, BC ガ定直線ニ平行ナルコト, 〔6〕 比例ニ於ケルメネラウスノ定理ヲ思ヒ出ス.

【主題】 40. A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ニ於テ斜邊上ノ任意ノ點 D ヨリ AC, AB ニ垂線 DF, DE ヲ下シ, 延長シテ C, B ニテ BC ニ立ツル垂線ト H, G ニ交ラシメバ G, A, H ハ同一直線上ニアリ.

着眼 三點ガ一直線上ニアルコトヲ證スルニハ上ノ指導ノ何レカニ依ラネバナラヌ. ∠GAH=2∠R ノコト, ∠GAE+∠CAH=∠R ノコトヲ ∠A ノ ∠R ナルコトカラ導クカ, GA, GH ガ重ルコトカ, GAH′ ヲ作ツテ H ト H′ トー致スルコトカ, メネラウス君ヲ利用スル.

答案 證 GA ヲ延長シテ BC ト H′ ニ交ラシム.

AK⊥GA ナラシメテ斜邊ト K ニ交ラシム.

∠GBK=∠GAK=∠R

∴ AGBK ハ圓內四邊形

∴ ∠AKG=∠ABG……………………………(1)

同樣ニシテ AKCH′ ハ圓ニ內接シ

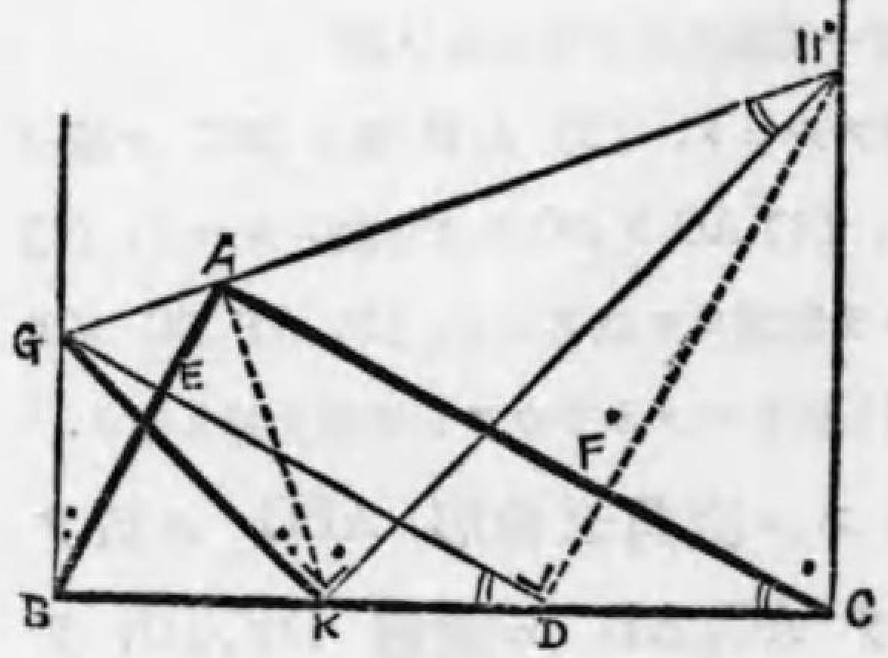
$\angle AKH' = \angle ACH' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

(1)+(2) ヨリ　$\angle AKG + \angle AKH' = \angle GKH' = \angle ABG + \angle ACH'$

而シテ　$GB \parallel CH'$　ニシテ　$\triangle ABC$　ヨリ

$\angle B + \angle C = \angle R$

ナルヲ以テ　$\angle ABG + \angle ACH' = \angle R$　$\therefore\ \angle GKH' = \angle R$



今 DH' ヲ結ブ

$DE \perp AB \perp AC$　$\therefore\ AC \parallel DE$

$\therefore\ \angle BDG = \angle BCA$　ニシテ

$\angle BCA = \angle KH'A$ (AKCH′圓)

$\therefore\ \angle KDG = \angle KH'G$

$\therefore$ D, H′ ハ GK ヲ弦トスル圓周上ニアリ.

$\therefore$ 四邊形 GKDH′ ニ於テ

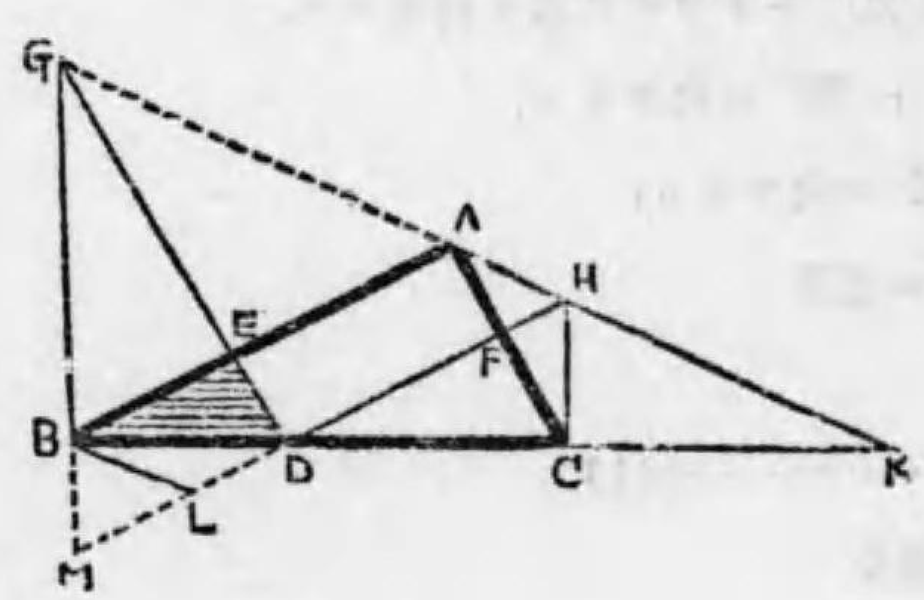
$\angle CDH' = \angle KGA$

而シテ AGBK 圓ヨリ　$\angle KGA = \angle KBA$

$\therefore\ \angle ABC = \angle CDH'$　　$\therefore\ AB \parallel DH'$

從ツテ　$\angle BAC = \angle R$ ヨリ DH′ ハ AC ト $\angle R$ ニ交ル.

即チ DH′ ハ DH ト一致ス. H′ ハ H ト一致シ, GAH ハ一直線ヲ成ス.



研究　i.　メネラウスノ定理ニヨルニハ AH ガ BC ト K ニ交ルトスル.

K, A, G ガ一直線ニナルコトヲ云ヘバヨイ.

$DG \parallel CA$,　$BA \parallel HD$

ハ比例式ヲ作ラセルひんとト見ル.

△BED ヲ原三角形ト見テ GB ト HD ヲ M ニ交ラセルト.

$\triangle ABC \backsim \triangle BED$, $\triangle CDH \backsim \triangle BDM$ ヨリ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BE}{BD}$, $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{DH}{DM}$

$\dfrac{BK}{KD} = \dfrac{AB}{DH}$, $\dfrac{DG}{GE} = \dfrac{DM}{BE}$, $\dfrac{EA}{AB} = \dfrac{CD}{BC}$ ノ邊々ヲカケテ

$$\therefore\ \frac{BK}{KD} \cdot \frac{DG}{GE} \cdot \frac{EA}{AB} = \frac{AB}{DH} \cdot \frac{DM}{BE} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{DM}{BE} \cdot \frac{CD}{DH}$$

$$= \frac{BE}{BD} \cdot \frac{DM}{BE} \cdot \frac{CD}{DH} = \frac{DM}{DH} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$$

$\therefore$ K, A, G ハメネラウスノ逆定理ニヨリテ一直線上ニアル.

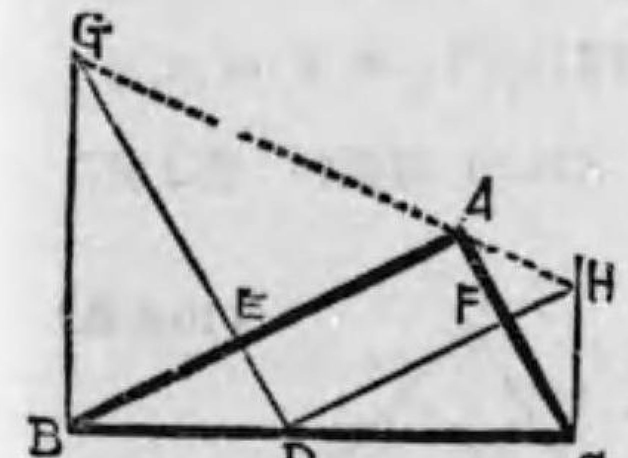
ii.　又比例デ解クノニハ　$BE : BA = MD : MH$

ヲ證シタラ $AB \parallel HM$ デアルカラ MB, DE, HA ハ一點ニ交ルコトニナル. 此ノ考ヲ進メルナラバ　$\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BD}{BC}$　($\triangle BED \backsim \triangle BAC$)

$\dfrac{BD}{MD} = \dfrac{CD}{DH} = \dfrac{BD+CD}{MD+DH} = \dfrac{BC}{MH}$　($\triangle BDM \backsim \triangle CDH$)

$\therefore\ \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{MD}{MH}$　ナレバ　$\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{MD}{MH}$

iii.　又 △AEG, △HFA ハ E, F ガ ∠R デアルカラ相似トスルニハ



$\triangle GBE \backsim BDE \backsim DCF \backsim CHF$ カラ

$\dfrac{GE}{BE} = \dfrac{BE}{ED} = \dfrac{DF}{FC}$

$\therefore\ \dfrac{GE}{DF} = \dfrac{BE}{FC} = \dfrac{ED}{FH}$

之ニ矩形 AEDF カラ $AE = DF$, $ED = AF$

$\therefore\ \dfrac{GE}{AE} = \dfrac{AF}{FH}$　ヨリ相似トナル.

談道　終結ヲ證スルノガ幾何ノ仕事デアルノニ終結ヲ以テ終結ヲ證スル, さ

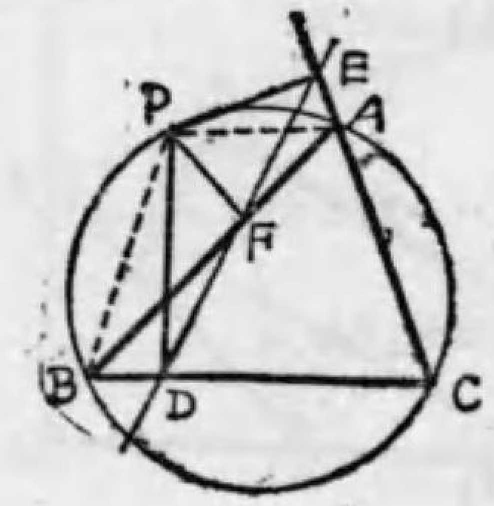
云ふことが知りたいトイフコトヲ平氣デ既知ノ如クニ用ヒハ大ニ多カツタ.（△GDH ヲ使フノニ A ガ GH 上ニアル如クスル）

【主題】 41. 三角形ノ外接圓周上ノ一點ヨリ三邊ニ下ス垂線ノ足ハ一直線上ニアリ.　(14千圓)

着眼 垂線ガ二ツ以上アルトキハ ∠R ガ二ツ以上アルカラ, 環坐ガ用ヒラレル. 外接圓周上ノ點ハ周角ニ移ス.

答案 **設假** △ABC ノ外接圓周上ノ點ヲ P トシ,

PD⊥BC, PE⊥CA, PF⊥AB



終結 DFE ハ一直線ヲナス

證 ∠PDB=∠R=∠PFB

∴ P,B,D,F ハ環坐

從ツテ　∠BPD=∠BFD……………(1)

∠PEA=∠R=∠PFA

∴ P,E,A,F ハ環坐

從ツテ　∠APE=∠AFE……………(2)

而シテ △PBD, PAE ニ於テ ∠D=∠R=∠E

∠PBC=∠PAE〔∵ 圓內四邊形 PBCA ヨリ〕

∴ ∠BPD=∠APE……………(3)

(1),(2),(3) ヨリ **∠BFD=∠AFE**

∴ **DFE** ハ一直線ヲ成ス　(15水農)

研究 本問ノ逆「△ABC 外ノ一點 P ヨリ三邊 BC, CA, AB ニ下ス垂線ノ足 D, E, F ガ一直線上ニアラバ P ハ △ABC ノ外接圓周上ニアリ」ハ成立スル.

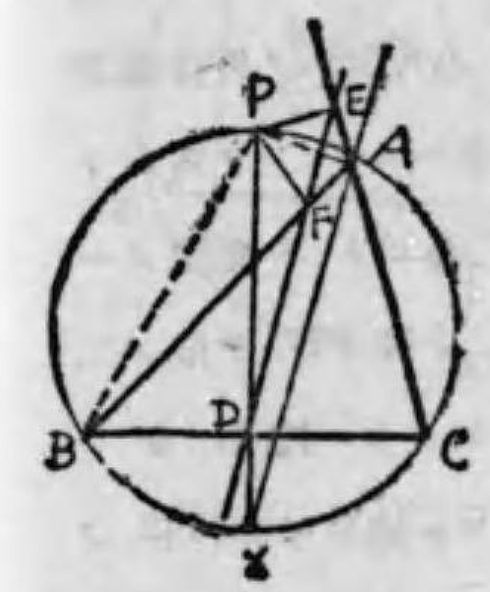
こなし方 ∠PBC=∠PAE ヲ證シタラヨイ. ソレニハ

∠BPD=∠BFD=∠AFE=∠APE

之レニ ∠D=∠R=∠E カラ △BDP, △AEP ノ內角ヲ比較スル.

〔注意〕 DFE ヲ Simsou's line トイフ.

【試練】 90. △ABC ニ關スルシムソン線ハ PD ガ外接圓ト K ニ交ルトキ AK ト平行ス.



こなし方 P,B,D,F ガ環坐デアルカラ

∠PDF=∠PBF=∠PKA（$\overset{\frown}{AP}$ ノ周角）

∴ ED ∥ AK

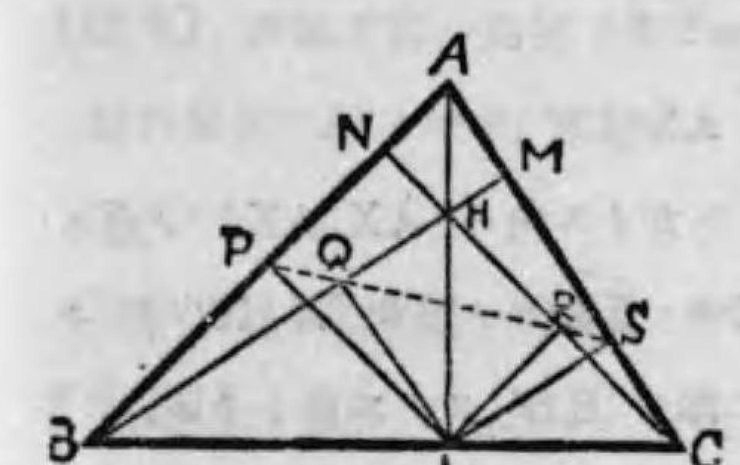
【試練】 91. △ABC ノ三ツノ高サヲ AL, BM, CN トシ,

LP⊥AB, LQ⊥BM

LR⊥CN, LS⊥CA

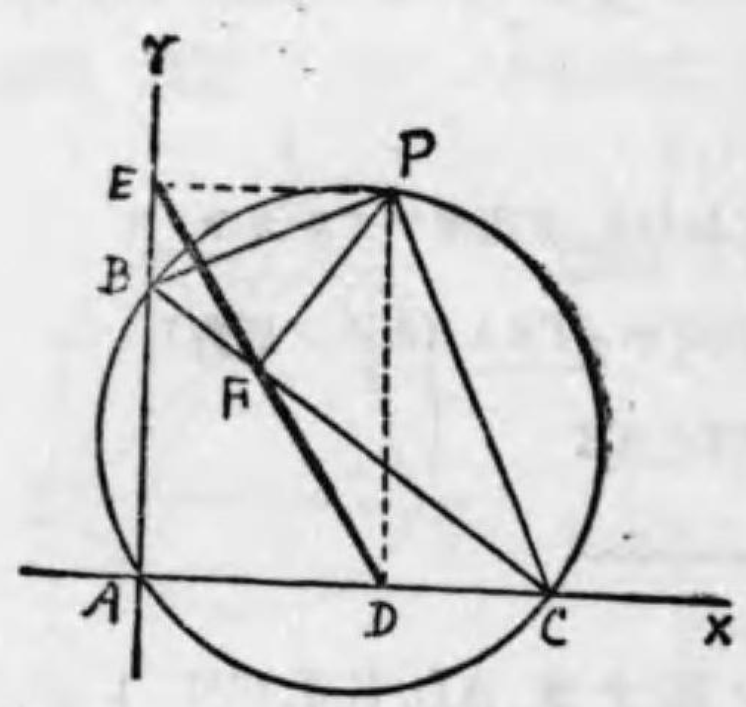
トスルトキ, PQRS ハ一直線ナリ.

こなし方 四邊形 BLHN ハ ∠L=∠R=∠N デアルカラ圓內四邊形デ, L ハ △BHN ノ外接圓周上ニアルコトニナル. L カラ三邊ニ下シタ垂線ガ LP, LQ, LR デアルカラ PQR ハシムソン線トナル. △CHM ノ外接圓周上ノ L トシテ QRS ガシムソン線デアルカラ QR ハ共通スルニ



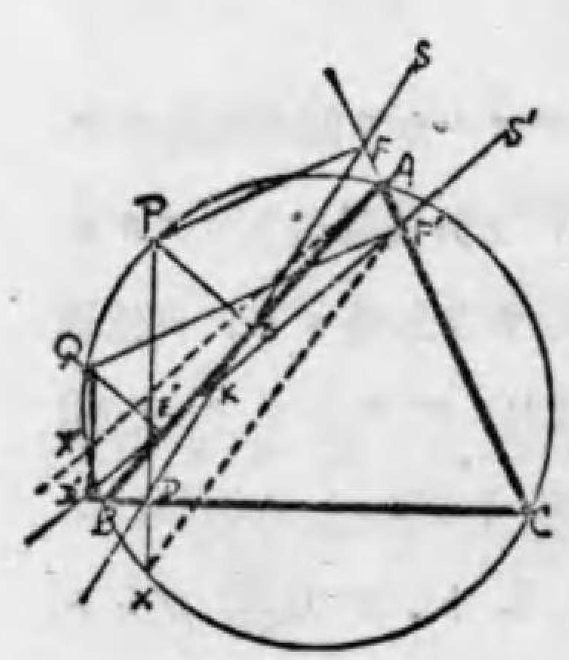
ツノシムソン線ハ合致スルコトニナル.

【試練】 92. AX, AY ハ A ニテ直交ス. 定點 P ヲ頂トスル直角 △BPC ノ二邊ガ AX, AY ト交ル點ヲ C, B トスルトキ, P ヨリ PC ニ下ス垂線ノ足 F ハ一定直線上ニアリ.



こなし方 P ガ △ABC ノ外接圓周上ニアルコトヲ考ヘル. ソウスルト PF ハ P カラ三邊ニ下ス垂線ノ一ツデアルカラ, PE, PD ヲ他ノ二邊ニ下ス垂線トスルト EFD ガ △ABC ノシムソン線トナル. P ノ定點デアルコトカラ E, D ガ定點トナル.

【試練】 93. △ABC ノ外接圓周上ノ點 P, Q ニ關スルシムソン線 S, S′ ノ交角ハ $\overset{\frown}{PQ}$ ノ周角ニ等シ.



こなし方 QD′ ガ外接圓ト X′ ニ交ルトスル.

$PX \perp BC$, $QX' \perp BC$

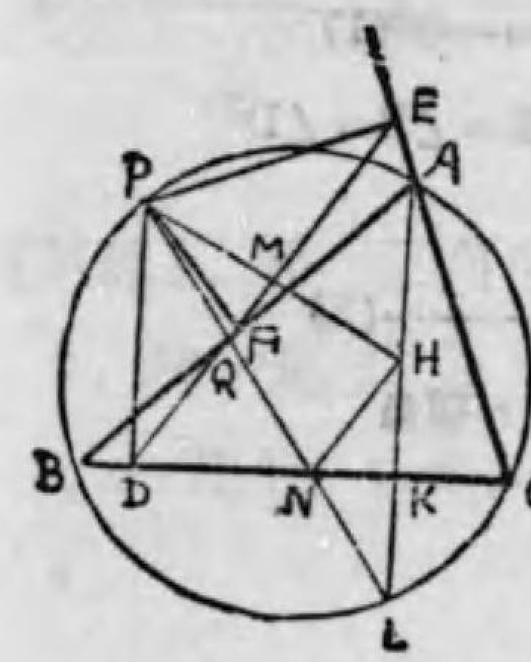
$\therefore \overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{XX'}$

$\therefore AX \parallel S$, $AX' \parallel S'$

∴ S ト S′ トガナス角ハ AX, AX′ ノ成ス角デアル. 即チ $\overset{\frown}{XX'}$ ノ周角 XAX′ 即チ $\overset{\frown}{PQ}$ ノ周角, 即チ S, S′ ノナス角トナル.

【試練】 94. △ABC ノ外接圓周上ノ點 P ニ關スルしむそん線 EFD ハ垂心 H ト P トノ距離ヲ二等分ス.

こなし方 i. 90 頁主題 27 ヲ思ヒ出シテ AHKL ヲ作ルト HK=KL トナルコトヲ用フル. M ヲ PH ト ED トノ交點トシ, PL ガ ED, BC ト Q, N デ交ルトスル.



$PD \parallel AL$ カラ $\angle DPL = \angle PLA = \angle NHL$

$\overset{\frown}{PA}$ ノ周角カラ $\angle PLA = \angle PBA$

B, D, F, P ガ環坐デアコトカラ

$\angle PBA = \angle PDF$

$\therefore \angle PDQ = \angle DPQ$ ∴ $PQ = QD$

之レカラ直角三角形 PDN ヲ睨ンデ,

$\angle QDN = \angle QND$ ∴ $QD = QN$ 即チ Q ハ PN ノ中點

ii. KH=KL デアルカラ CB ハ HL ノ垂直二等分線, 之レデ $\angle NHK = \angle PDQ$ カラソノ餘角トシテ $\angle QDC = \angle HNC$ ∴ $DQ \parallel NH$ △PNH デ PN ノ中點 Q ハ底 NH ニ平行トナツテ PH ハ M デ FD ニ二等分セラレル.

11. 共圓點問題

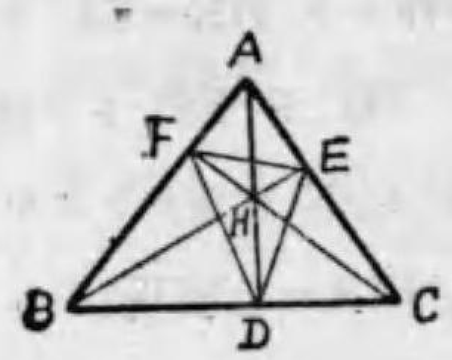
【指標】 四點ガ同一圓周上ニアルコトヲ證スルニハ, 四點ガ作ル四邊形ノ對角關係ヲ用フルカ, 二點ヅツヲ結ブ線分ノ交點ヲ利用シテ面積ヲ使フカデアル.

三點以上ノ點ガ同一圓周上ニアルトキ, 夫等ノ點ヲ環坐, 圓坐トイフ

【主題】 42. △ABC ノ三ツノ高サヲ AD, BE, CF トスレバ垂心 H ハ △DEF (垂足三角形トイフ) ノ内心ナ

ルコトヲ證セヨ.

答案 i. 四邊形 HFBD ハ ∠F=∠R=∠D



∴ 圓ニ內接ス.

∠HDF=∠HBF……………………(1)

ii. 四邊形 HDCE ハ ∠E=∠R=∠D

∴ 圓ニ內接ス.

∠HDE=∠HCE……………………(2)

iii. ∠BFC=∠R=∠BEC ∴ F, B, C, E ハ環坐

∴ ∠FBE=∠FCE……………………(3)

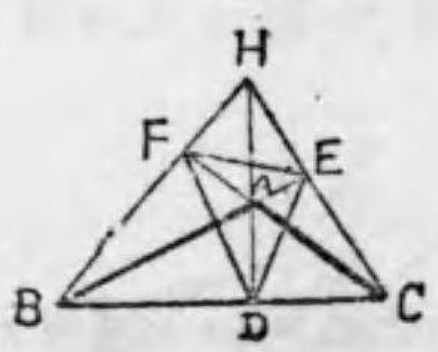
(1), (2), (3) ヨリ ∠HDF=∠HDE

DH ハ ∠FDE ヲ二等分ス

同樣ニシテ EH, FH ハ ∠DEF, ∠EFD ヲ二等分ス

∴ H ハ △DEF ノ內心ナリ

研究 ∠A>∠R デアルトキハ H ハ △ABC ノ外ニ出ル.



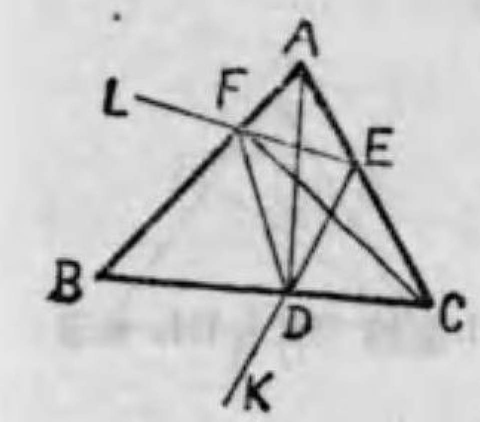
ソシテ主題ノ圖ノ A ガ H ニナリ, H ガ A トナルカラ H ハ內心トハナラナイ.

內心ノ一族ハ傍心デアル. H ハ此ノ場合傍心トナル. 頂點自身ガ △DEF ノ內心ニナル.

ソシテ H ガ傍心ナルコトハ次ノ試練デ研究シテ下サイ.

【試練】 95. 鋭角三角形ノ三ツノ頂點ハ垂足三角形ノ傍心ナリ.

こなし方 主題デ H ガ內心デアルコトヲ知ツタ.

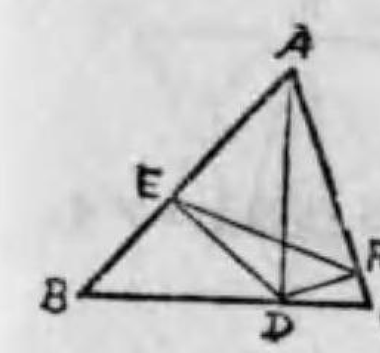


∠FDB=∠EDC=∠BDK

∴ DB ハ △DEF ノ D 外角ノ二等分線トナル.

同樣ニ FB ハ F ノ外角ノ二等分線デアルカラ B ハ傍心デアル.

【試練】 96. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ對邊ヘ垂線ヲ引キ, 其ノ足 D ヨリ邊 AB, AC ニ垂線ヲ下シ, 其ノ足ヲ夫々 E, F トスレバ四點 B, E, F, C ハ同一圓周上ニアリ.



こなし方

∠E=∠R=∠F ナルヲ以テ AEDF ハ圓內四邊形

∴ ∠AEF=∠ADF

而シテ ∠ADF, ∠ACD ハ ∠CDF ノ餘角ニテ等シク

∠AEF=∠FCB

∴ 四邊形 EBCF ハ圓ニ內接スル.

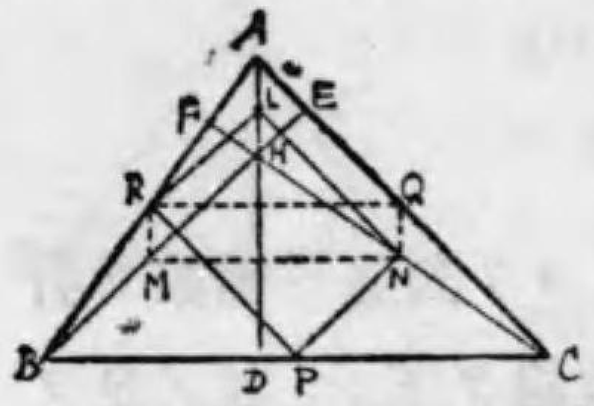
【主題】 43. △ABC ニ於テ各邊ノ中點ヲ P, Q, R, 高サノ足ヲ D, E, F, 垂心ヲ H トシテ AH, BH, CH ノ中點ヲ L, M, N トスレバ P, Q, R, D, E, F, L, M, N ハ同一圓周上ニアリ.

着眼 △ノ邊ノ中點ヲ結ビツケルト何ヲ浮バセルカ?

然カモ中點ガ六ツモアルカラ, 例ノ二邊中點線ヲ捕ヘル.

答案 i. 二ツノ中點ヲ考フルトキ

$\triangle ABC$ ヨリ $PR \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CA$
$\triangle AHC$ ヨリ $NL \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CA$　$\therefore\ PR \mathrel{\underline{\parallel}} NL$



$\therefore$ PNLR ▱ ハナリ.

而シテ $\triangle AHB$ ノ二邊中點線 $BE \parallel RL$ ヨリ

$RL \perp LN$

$\therefore$ PNLR ハ矩形ニシテ PNLR ハ圓內四邊形, LP, RN ハソノ圓ノ直徑トナル.

$\angle LDP = \angle R$　（假設） ナルヲ以テ D ハ LP 圓周上ニアリ, 同樣ニシテ $\angle RFN = \angle R$ ナルヲ以テ F ハ RN ノ周上ニアリ………………(1)

ii. $\triangle ABC$, $\triangle HBC$ ノ二邊中點線ヨリ

$RQ \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC \mathrel{\underline{\parallel}} MN$

$\triangle ABH$ ヨリ, $RM \parallel AD \perp BC$　　$\therefore\ RM \perp MN$

$\therefore$ RMNQ ハ矩形　　$\therefore$ M, Q ハ直徑 RN 圓周上ニアリ.

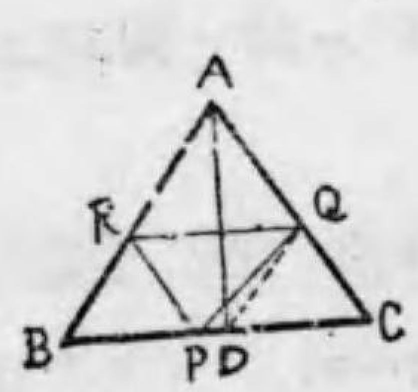
又 $\angle MEQ = \angle R$ ヨリ E ハ MQ 圓周上ニアリ.

而シテ RN 圓, MQ 圓 ハ (1) ト同一ナル故

P, Q, R, D, E, F, L, M, N ハ同一圓周上ニアリ.

研究 此ノ九點ヲ過ギル圓ヲぽんすれーノ圓, 即チ九點圓トイフ.

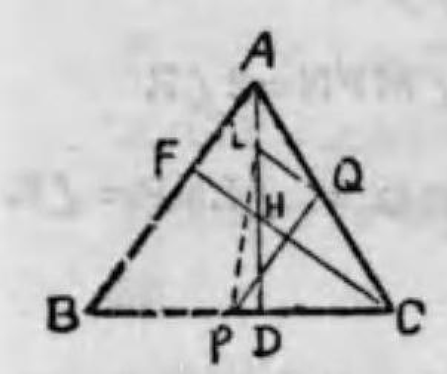
【別ノ着眼】 最初中點 P, Q, R ヲ過ギル圓ヲ描ヘテ D ガソノ上ニ乘ルコトヲ證ショウトス, ソレニハ RPDQ ヲ圓內四邊形ト云ヒサヘスレバヨイ, ソノタメニ



$\angle PRQ = \angle QDC$

ヲ考ヘル, $\triangle ADC$ ハ $\angle D = \angle R$ デ, Q ハ斜邊ノ中點デアルカラ $\angle QDC = \angle QCD$

トコロガ RPCQ ハ ▱ デ $\angle QCD = \angle PRQ$



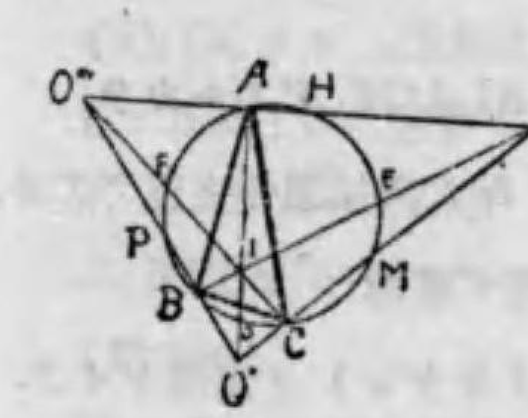
ソコデ $\angle PRQ = \angle QDC$　$\therefore$ D ハ PQR 上ニ乘ル, 他ノ垂足モ同樣ニ乘ル, 之レデ六點圓ガ出來タワケデアル,

次ニ LP ニ對シテ $\angle D$ ハ $\angle R$ デアルカラ, $\angle PQL$ モ又 $\angle R$ ニナツテ井テクレル筈, ソレヲ證スルノニ $\triangle ACH$ カラ $QL \parallel CH$, $CH \perp AB$, $AB \parallel PQ$　$\therefore\ QL \perp QP$

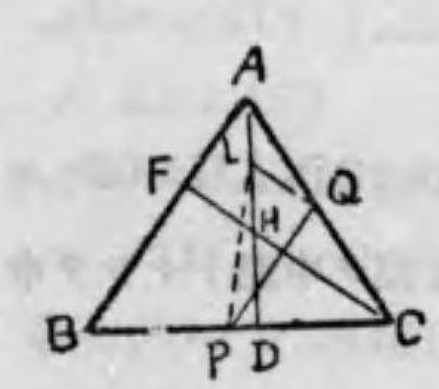
$\therefore$ L,P,D,Q ハ環座, PDQ 圓ハ前ノ六點圓デアルカラ L ハソノ上ニ乘ル, 同樣ニ M,N モ此ノ圓ニ乘ル.　（15廣師）

【別ノ着眼】 又試練 63 試練 64 トヲ持込ムト容易ニ出來ル.

O′, O″ O‴ ガ $\triangle ABC$ ノ傍心デアルトキ



$\triangle O'O''O'''$ デ $O'A$, $O''B$, $O'''C$ ハ三ツノ垂線, 內心 I ハ垂心トナル. 主題カラ IO′ ノ中點 D ハ圓 ABC ニ乘リ, （垂心ト頂點トノ中點）, O′ O″ ノ中點 M モ乘ル（邊ノ中點） ソコデ $\triangle ABC$ ノ外接圓即チ $\triangle O'O''O'''$ ノ九點圓トナル.



〔別ノ着眼〕 上ノ考ヘハ結局最初ニ垂足圓, 即チ垂足三角形ノ外接圓ヲ作ツテ他ノ六點ヲ待セタガ, 最初ニ頂點ト垂心トノ距離中點 L, M, N ヲ過ギル圓ヲ考ヘルノモ一興デアル. ソシテ其ノ圓周上ニ他ノ六點ガ乘ルコトヲ證シヨウ.

i. LMN 圓ニ P ガ乘ルコトハ

$\angle MLN + \angle MPN = 2\angle R$ ヲ證スル.

$LM \parallel AB$ ($\triangle ABH$), $LN \parallel AC$ ($\triangle ACH$) ヨリ $\angle MLN = \angle BAC$

$MP \parallel CH$ ($\triangle BCH$), $PN \parallel BH$ （同） ヨリ ▱MPNH ヲ定メ

$\angle MPN = \angle MHN$ 對頂角 $\angle EHF$,

トコロガ四邊形 AEHF ノ E, F ガ $\angle R$ デアルカラ

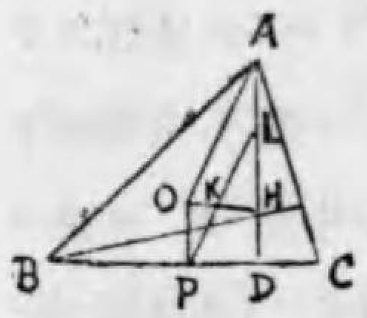
$$\angle A+\angle EHF=2\angle R \qquad \therefore \quad \angle MLN+\angle MPN=2\angle R$$

之ハ又 $PM \parallel CF \perp AB \parallel ML$ カラ $\angle LMP=\angle R$, 同樣ニ $\angle LNP=\angle R$ ヲ得テモヨイ. トニカク之レハ證スルコトデ

ii. ソレカラ LMPN 圓デ LP ガ直徑デアル. 之レニ $\angle LDP=\angle R$ デアルカラ D ハソノ圓周上ニアルコトヽナル.

研究 LP, MQ, NR ハ三ツトモ九點圓ノ直徑デ同一點即チ中心デ交ル.

【試練】 67 九點圓ノ直徑ハソノ三角形ノ外接圓ノ半徑ニ等シ.



こなし方 主題 28 ニ於テ $AL \perp OP$ デアルカラ ▱ALPO ヲ知ツテ井ル, OA 即チ外接圓ノ半徑デアル, トコロガ LP ガ九點圓ノ直徑デアル

(注意) 本問ヲ *Terquem* (テルケン) ノ定理トイフ.

【試練】 98 九點圓ノ中心ハ垂心, 外心ト共ニ一直線上ニアリ.

こなし方 OH ヲ結ンデ LP ト K デ交ラセルト $LH \parallel OP$, $LH=OP$ カラ $\triangle LHK \equiv \triangle OPK \quad \therefore \ LK=KP$ K ハ直徑ノ中點トナツテ中心デアル.

【注意】 OH ヲ △ABC ノニウトン線ト云フ.

【試練】. 99 △ABC ノ各邊ニ對スル高サノ足 D, E, F ヨリ他ノ二邊ニ下ス垂線ノ足六點ハ同一圓周上ニアリ.

D, E, F ヨリ下ス垂足ヲ夫々 L, P; N, K; M, G トスル

i. AD ヲ直徑トスル圓ヲ考ヘルト L, P ハソノ上ニアル. 故ニ周角ヨリ $\angle ALP=\angle ADP$, 然ルニ $\angle R$ △ABD ノ直角頂 D ヨリ斜邊 AB ニ垂線ヲ下ス故

$\angle ADP=\angle B=ALP$

ii. 四邊形 AFHE ハ $\angle F=\angle R=\angle E$ ナレバ圓內四邊形, 故ニ

$\angle AEF=\angle B$ ………………(2)

又 $\angle M=\angle R=\angle N$ ナル故 NFEM ハ環座

$\therefore \angle AEF=\angle ANM$ ………(3)

(2), (3) ヨリ $\angle ANM=\angle B$

〔∴ $NM \parallel BC$ 參考〕

$\therefore \angle ANM=\angle ALP$

∴ NPLM ハ環座……………(4)

〔第三圖〕

iii. 前項參考ト同樣ニシテ $AC \parallel PG$,

$\angle BPG=\angle A$ ……………………(5)

$\angle C=\angle ADL$ [$\angle D=\angle R$ ナル △ADC ノ $AL \perp AC$]

$\angle ADL=APL$ [APDL ハ圓內四邊形]

$\therefore \angle APL=\angle C$ ………………(6)

(5), (6) ヨリ $\angle GPL=\angle B$ ………(7)

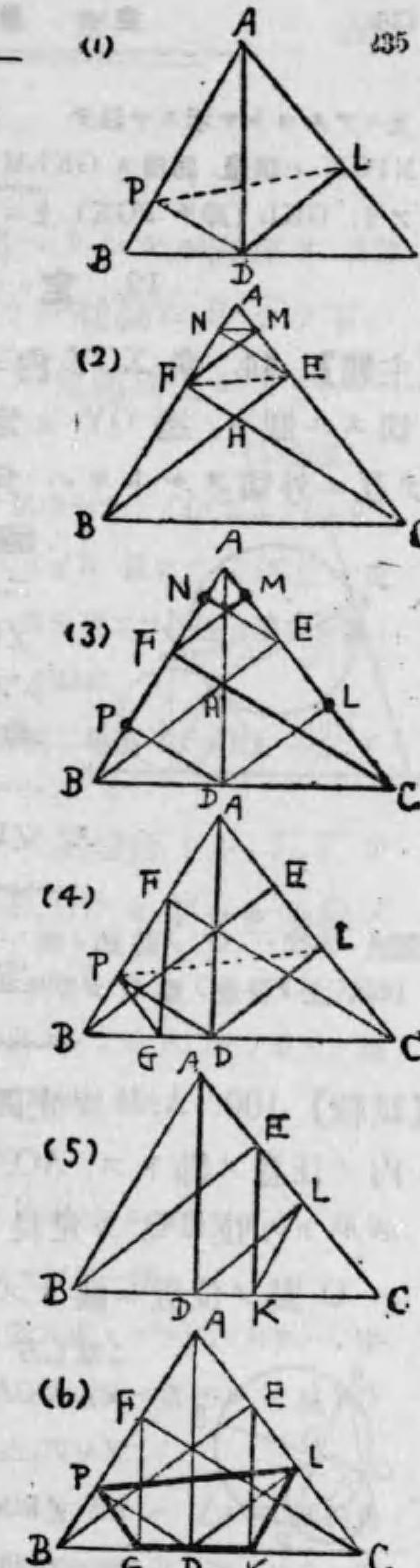
〔第四圖〕

iv. 前々ヨリ參考ト同樣ニシテ

$KL \parallel AB \quad \therefore \angle B=\angle LKC$ 〔第五圖〕

(7) ト合セテ. PGKL ハ同一圓上ニアリ. 〔第六圖〕

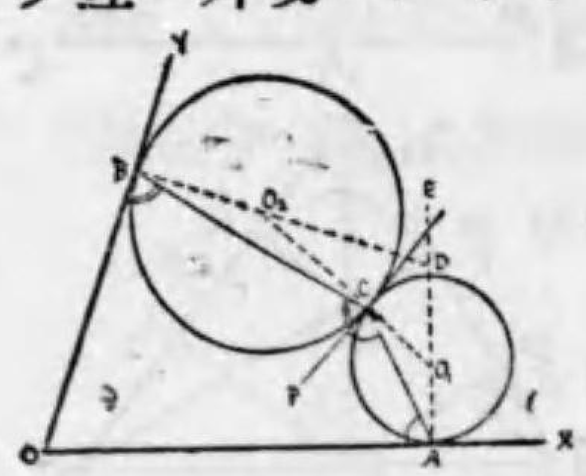
總括 (4) ハ隣邊上ノ四點ガ同一圓周



上ニアルコトヲ示スヲ以テ
NPGK ハ環壘, 同様ニ GKLM モ環壘, 即チ PGK 圓上ニ N アリ, L アリ. GKL (即チ PGK) 上ニ M アリテ六點ハ同一圓周上ニアル.

12. 定量問題

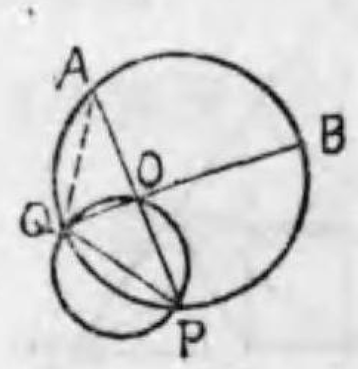
【主題】 44. 角 XOY 內ニアリテ, 邊 OX ニ定點 A ニテ切スル圓ト, 邊 OY ニ定點 B ニテ切スル圓トガ C ニテ互ニ外切スルトキハ 角 BCA ハ一定ナリ.



答案　C ニテ共通切線 CP ヲ作ル.
二ツノ切線ヨリ
$\angle OBC=\angle BCP,\quad \angle OAC=\angle ACP$
$\therefore\quad \angle BCA=\angle OBC+\angle OAC$
而シテ　$\angle O+\angle BCA+(\angle OBC+\angle OAC)=4\angle R$
$\therefore\quad \angle BCA=\frac{1}{2}(4\angle R-\angle O)=$一定

研究　本問ハ C ノ軌跡ノ第一段ヲ證シタコトニナツテ居ル, 試ミニ弧 BCA 上ノ任意ノ點 C ガ要件ニ適スルコトヲ證シテ見ラレヨ.

【試練】 100. A, B ヲ定圓周上ノ二定點トシ, O ヲコノ圓內ノ任意ノ點トス, AO, BO ガ再ビ圓ト交ル點ヲ P, Q トスルトキ弦 PQ ガ定長ナレバ △OPQ ノ外接圓ノ大サハ O 點ノ位置ニ關セズ一定ナリ,

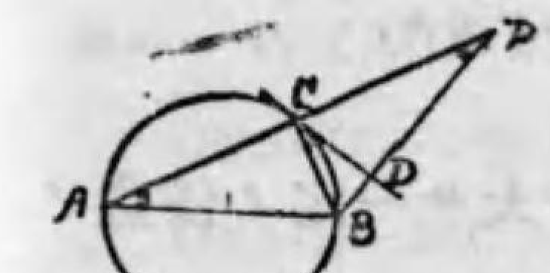


こなし方　PQ ガ一定デアルカラ OPQ 圓ヲ一定トスルニハ $\angle POQ$ ヲ一定トセネバナラヌ.
ソレデ △AOQ カラ
$\angle POQ=\angle PAQ+\angle AQB$
コヽデ PQ, $\overset{\frown}{AB}$ ノ一定ヲ持チ込ンデ周角ノ大サガ

一定デアルコトニスル.

【試練】 101. 與ヘラレタル圓ノ與ヘラレタル直徑ヲ AB トシ, コノ圓周上ノ一點 C ニ於ケル切線ニ B ヨリ下シタル垂線 BD ト AC トノ交點 P ハ定圓周上ニアリ.

(13福商)



こなし方　切線ヲ展開シテ $\angle DCB=\angle CAB$,
直徑ノ展開ガ $\angle C=\angle R$ 從ツテ △BCP ハ直角三角形デ CD ハ直角頂カラ斜邊ニ下ス垂線
$\angle CPD=\angle BCD=\angle BAC$
∴ △ABP ハ二等角二等邊 BP=BA 一定

【主題】 45. AB, CD ヲ定圓ノ二ツノ定直徑トシ, E, F ヲ夫々圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ AB, CD ニ下セル垂線ノ足トスレバ線分 EF ノ長サハ一定ナリ.　(14大分商)

着眼　二ツノ $\angle R$ ヲ睨ムト圓內四邊形ヲ持チ出ス. ソシテ二ツノ直徑ハ固定シテ居ルカラソノ夾角ノ一定ガ關係スルモノヲ考ヘル.

答案　四邊形 PEOF ハ $\angle E=\angle R=\angle F$

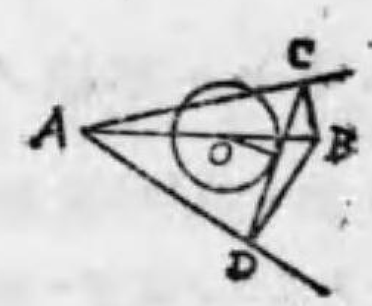
∴ OP ヲ直徑トスル圓ニ內接スル四邊形ナリ, 而シテ PO ハ原圓ノ半徑ナルヲ以テ一定
∴ PE OF 圓ハ P ノ位置ニカヽハラズ, 大サハ一定ナリ. 而シテソノ周角 AOD ガ一定ナルヲ以テ弦 EF ハ一定ナリ.

吟味　P ガ $\overset{\frown}{AC}$ 上ニ來ルトキ EF ハ $\angle AOC$ ヲ周角トスレドモ $\angle AOD$ ノ補角ナルヲ以テ弦ノ長サハ異

ラズ.

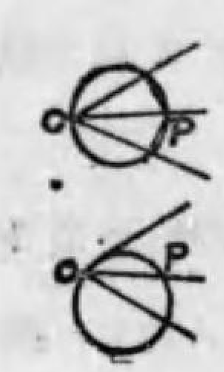
〔研究〕 PE, PF ヲ延長シテ PEQ, PFR ナル弦ヲ作ルト PQ⊥OE カラ E ハ PQ ノ中點トナル. F ハ同様 PR ノ中點トナル. 二ツノ線分ノ中點デアルカラ「△ノ二邊中點ニハナルマイカ」ト思フ △PQR ヲ作ルコトニナツテ EF=$\frac{1}{2}$QR デアルカラ, EF ヲ一定デアルトスルニハ QR ノ一定デアルコト, ソレニハ ∠QDR ヲ一定ニスル.
之レハ ∠AOD ノ補角デ一定デアルコトハ容易ニワカル.

【試練】 102. 一定點 A ヲ頂點トスル大サ一定ノ任意ノ位置ノ角ノ二邊ニ定點 B ヨリ下ス垂線ノ足ヲ C, D トセバ CD ハ定長ニシテ且ツ一定圓ニ切ス.



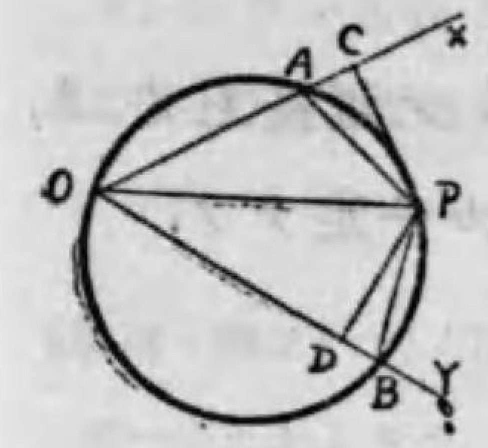
こなし方 ∠C=∠R=∠D デアルカラ CADB ハ圓內四邊形トナル. AB ガ圓ノ直徑トナル. 此ノ直徑ガ一定デアルカラソノ大サハ一定デ CD ノ對スル ∠CAD ガ定角デアルカラ弦トシテ CD ハ一定トナル.

【主題】 46. 定角 XOY ノ頂點 O トソノ角ノ二等分線上ノ定點 P トヲ過ギル任意ノ圓ガ OX, OY ト A, B ニテ交ラバ OA+OB ハ一定ナリ. (14長工)



〔着眼〕 OP ヲ過ギル特殊圓ニツイテ考ヘテ見テ OA+OB ニ相等スル和ヲ考ヘル. ソレニハソノ特殊圓ハドンナノヲトルカ, 角ノ二等分線ヵラシテ OP ヲ直徑トスルモノカ, O 點デ邊ニ切スルモノカガ特殊デアル.

〔答案〕 任意圓ヲ OAPB トス. PC⊥OA, PD⊥OB トスレバ



△ACP, △ABD ニ於テ

$\begin{cases} \text{AP=BP (周角 ∠AOP=∠BOP ヨリ} \\ \text{CP=DP (角ノ二等分線ヨリノ高サ)} \\ \text{∠C=∠R=∠D} \end{cases}$

∴ △ACP≡△ABD

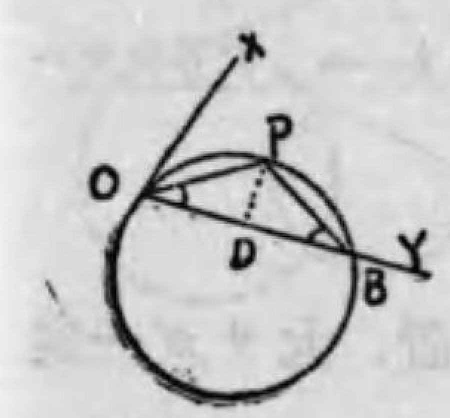
∴ AC=BD

然ルニ P, ∠XOY ガ定メラレタルヲ以テ

OC=OD ハ一定トナル.

∴ OA+OB=2OC ニテシ一定ナリ.

〔研究〕 上ノ解ハ特殊圓トシテ OP ヲ直徑トスル圓ヲ考ヘタコトニナツテ居ルガ, O 點デ OX ニ切スル圓ヲ考ヘルト次ノ樣ニナル.



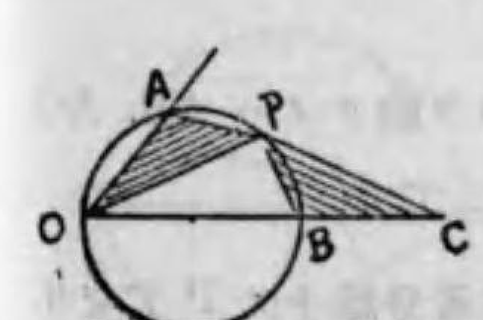
OX ノ上ノ A ハ O ニ一致スルカラ OB ガ特別ノ長サデアルコトニナル.

∠XOP=∠OBP=∠POB

∴ OP=PB　∴ △POB ハ決定 △ トナル.

此ノ考ヲ持チ込ンダノガ次ノ解トナル.

OP=OC ニ C ヲ OY 上ニ定メル.



ソウスルト角カラ

∠POC=∠PCO

△PAO, △PCB デ

PA=PB,

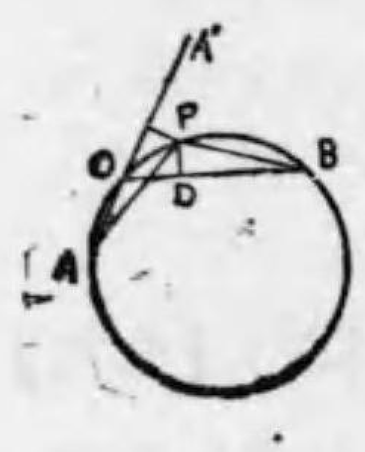
∠OAP=∠PBC (圓內四邊形 PAOB ヨリ)

∠AOB=∠POB=∠PCO

ソレデ合同, OA=BC　　∴ OA+OB=OC 一定トスル

【試練】 103. 上問ニ於テ OP 圓ガ OX ノ延長上ノ A, OY 上ノ B ニテ交ルトキハ OB−OA ガ一定ナリ.

こなし方　延長デアラウト進ムベキ道ハ同ジデアル.



△APC, △PBD ニ於テ

$$\begin{cases} OC=OD, \\ \angle C=\angle R=\angle D \\ \angle OAP=\angle OBP \text{ (弧 OP ノ周角)} \end{cases}$$

∴ 合同　∴ BD=CA　ソレニハ OC=OD ヲ持込ンデ OB−OA=(OD+DB)−(AC−OC)

=2OC 一定.

要項　諸君ハやりにくい方ヲスルトキハやりよい方デシテ, ソレヲソノマヽ持込ンダラ,「道ハ同ジ」デ出來ル, 延長ニ驚イタリ, へこたりシテハナラヌ.

【試練】 104. △ABC ニ於テ頂角 A ノ位置, 大サガ一定シ, AB+AC ガ一定ナル トキハ此ノ三角形ノ外接圓ハ定點ヲ過ギル.

こなし方　前問ノ逆デアル. 角ノ位置ガ一定デアルカラ動クノハ AB, AC ノ長サデアル.

今或ル位置デ外接圓ト ∠A ノ二等分線トヲ P デ交ラセル, PD, PE ヲ AB, AC ノ垂線トスルト

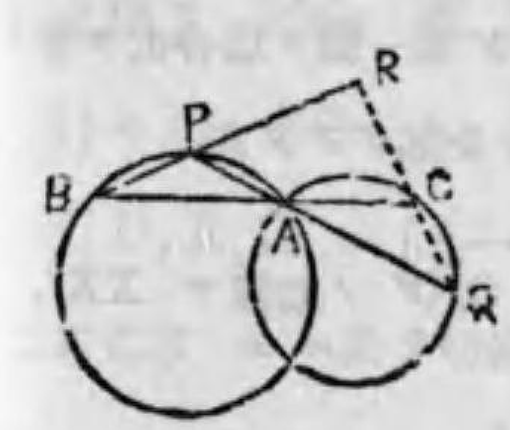
△BPD=△CPE

∴ AB+AC=2AD=2AE

ソレデ P ハ定點 D, E デ AB, AC ニ立テル垂線ノ交點, 即チ ∠A ノ二等分線上ノ定點トナル.

【軌跡ニ變形】 △ABC ニ於テ ∠A ノ位置, 大イサ一定ナルトキ AB+AC ガ一定ナルトキハ, 外心ノ軌跡ハ AP ノ垂直二等分線ナリ.

【主題】 47. A ニテ交ル二圓ノ割線 IC, ΓQ ガ二圓ト B, C 及ビ P, Q ニテ交ルトキ, BP, CQ ノ交點ヲ R トスレバ IC ガ一定ナルトキハ PQ ノ位置ニカヽハラズ ∠PRQ ハ一定ナリ.



答案　$\overset{\frown}{AC}$ 一定ナル故 ∠AQC 一定

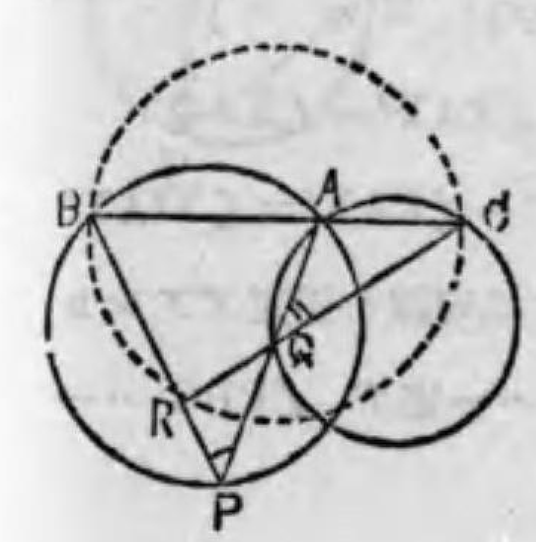
$\overset{\frown}{AB}$ 一定ナル故 ∠APB 一定從ツテ

∠RPA ハ一定ナリ

∴△RPQ ニ於テ二角一定ナルヲ以テ

∠R ハ一定ナリ.

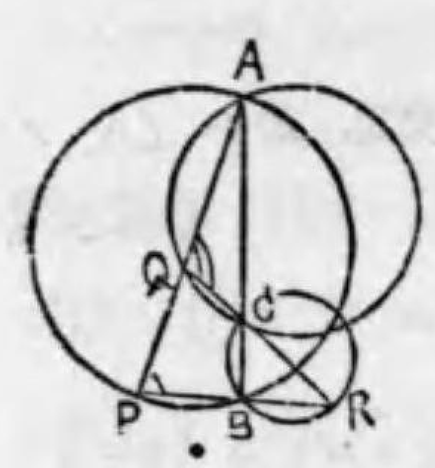
研究　PQ ノ位置ニヨツテ次ノ三圖ニ示ス樣ナノニナル.



∠BRC ハ一定デアルコトハ主題ノ證ト同様ニ出來ル. ∠AQC=∠RQP 一定

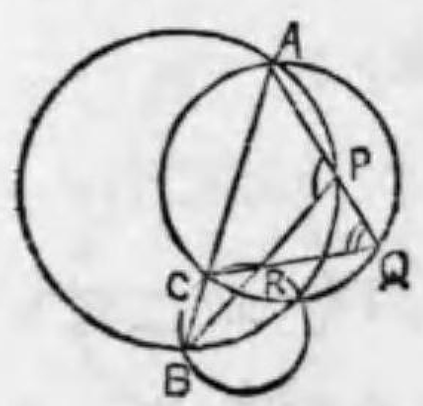
∠BPA モ一定カラ △RPQ ノ外角デアル.

∠BRC ハ一定トナル.



$\angle AQC$, $\angle APB$ ガ一定デアルカラ $\triangle PQR$ カラ $\angle BRC$ ガ一定トナル.

ソレデ ABC ノ位置モ二種アルガ, PQ ハ位置ヲ變ヘルカラ R ノ位置ハ變ハル.



今ドンナニ變ル カ ヲ見ルノニ主題ノ圖ノ場合ハ

$\angle ARC=2\angle R-(\overset{\frown}{AC}$ ノ周角$+\overset{\frown}{AB}$ ノ周角$)$

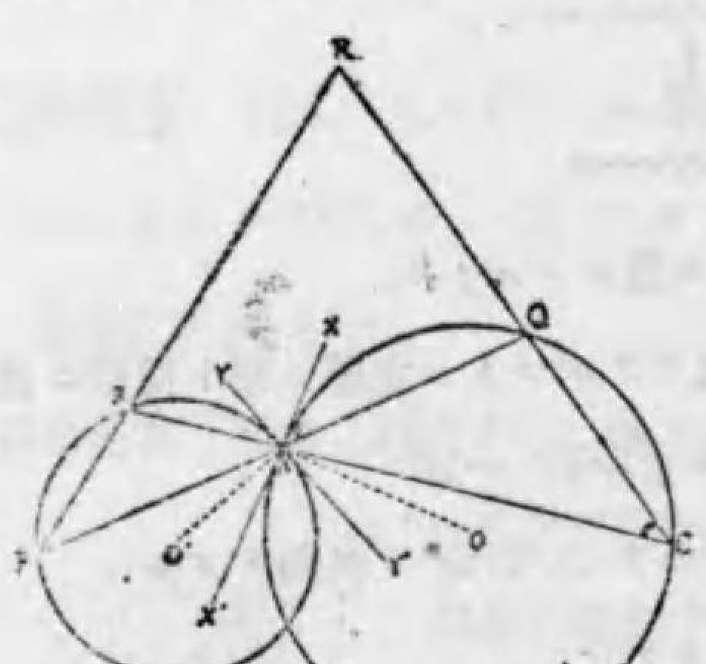
R ハ弧 BRC ナル上ニアルガ, PQ ノ位置ガ第二圖ノトキデハ $\angle BRC$ ハ $\overset{\frown}{AC}$ ノ周角ト $\overset{\frown}{AB}$ ノ周角トノ和デアル.

ソレデ第一, 二圖デハ互ニ補角ヲ成スカラ, BC ヲ弦トスル完全圓周上ニアルコトニナル.

【軌跡構成】 R ハ BC ヲ弦トスル圓ニナル.

注意 本問ヲ時々講習員ニ出シテ答案ヲ認メサシタガ 第一圖ノ場合丈ヲ考ヘテ軌跡ハ完全圓デナク弧デアルトスルモノガ殆ド全部デアツタ.

【別解】 O,O′ ヲ二圓ノ中心トシ, A 點ニ於ケル O,O′ ノ切線ヲ XX′, YY′ トスル.



$\angle PRC=\angle PBC-\angle BCQ$

$\angle PBC=\angle PAY'$(弦ト切線トナス角)

$\angle BCQ=\angle XAQ$(〃)

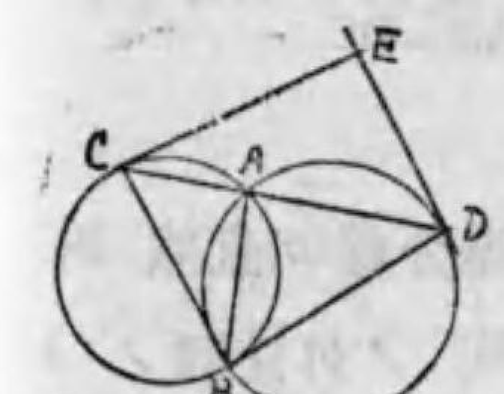
$\therefore\ \angle PRC=\angle PAY'-\angle XAQ$

$=\angle PAY'-\angle PAX'=\angle X'AY'$

然ルニ A 點ノ二切線ハ固定デアルカラ $\angle X'AY'$ ハ一定デ $\angle PRC$ ハ一定トナル

【注意】 二圓ノ交角トイフノハ交點ニ於ケル切線ノ成ス角ノコトデアル.

【試練】 105. A,B 二點ニテ交ル二ツノ圓アリ. A ヲ過ギル任意ノ直線ガ兩圓ノ周ト交ル點ヲ C,D トシ, C,D ニ於ケル各圓ノ切線ノ交點ヲ E トセバ C,B,D,E ハ同一圓周上ニアリ. (14臺商・京城醫)



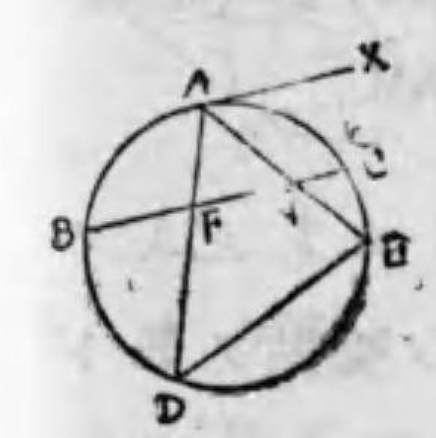
こなし方 $\angle DEC+\angle CBD=2\angle R$ ニ着眼シ, 切線ノ展開ハ隣ノ弓形ヲ睨ム. $\angle EDC=\angle DBA$, $\angle ECD=\angle CBA$

$\therefore\ \angle CBD=\angle ECD+\angle EDC$

$\therefore\ \triangle ECD$ ノ內角トナル.

【試練】 106. 弧 BC ノ中點 A ヨリ二ツノ弦 AD, AE ヲ引キ弦 BC ト 夫々 F,G ニ於テ交ラシムレバ四點 F,D,E,G ハ同一圓周上ニアリ. (14神船)

こなし方 A ニ於テ切線ヲ作ツテスルノガ要訣デアル.



A ガ BC ノ中點デアルカラ $AX \parallel BC$

$\therefore\ \angle XAG=\angle AGF$

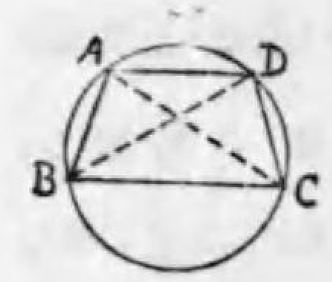
又切線ト弦トノ關係カラ $\angle XAG=\angle ADE$

$\therefore\ \angle AGF=\angle ADE$

$\therefore$ 四邊形 FGED ハ同一圓周上ニアルコト、ナル.

標準練磨問題二

1. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ相等シキトキハ此ノ四邊形ハ等脚梯形ナリ. (14慈醫)

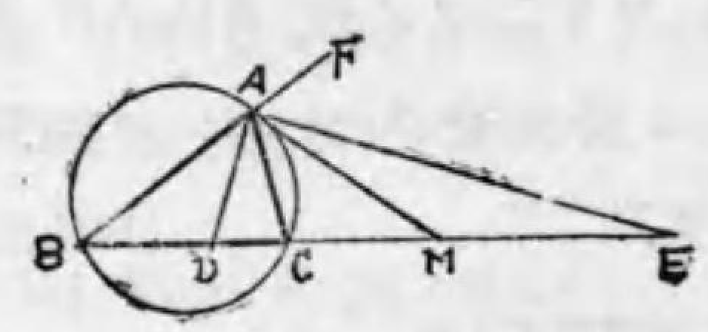


$AC=BD$ トスルト $\angle ABC=\angle BCD$

$\angle BAD=\angle ABC$ ノ補角　$\therefore\ AD \parallel BC$

$\therefore\ \angle BDA=\angle DAC$　$\therefore\ AB=DC$

2. $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ 及ビソノ外角ノ二等分線ガ直線 BC ト交ル點ヲ夫々 D, E トスレバ, $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ A ニ於ケル切線ハ ED ノ中點ヲ過ギル.



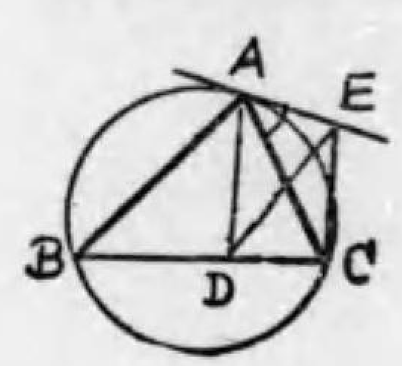
$\angle DAE=\angle R$ カラ

$AM=DM=EM$ ヲ證スル

$\angle ADM=\angle DAM$ ヲ考ヘル

$$\begin{aligned}\angle ADM&=\angle BAD+\underline{\angle ABD}\\&=\angle DAC+\underline{\angle CAM}\\&=\angle DAM\end{aligned}$$

3. $\triangle ABC$ ノ外接圓ニ切線 AE ヲ引キ, C ヨリ $\angle A$ ノ二等分線 AD ニ平行線ヲ引キ前ノ切線トノ交點ヲ E トスレバ DE, AB ハ平行ナリ.



切線 AE カラ $\angle EAC=\angle ABC$

$\angle B=\angle EDC$ ヲ證スルノデアルカラ

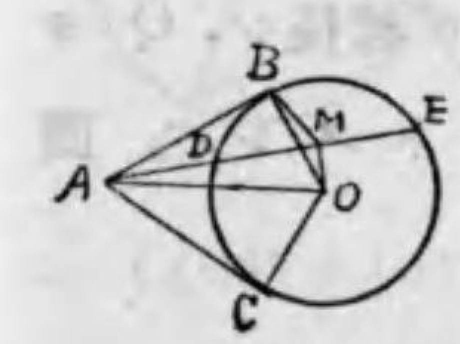
$\angle EAC=\angle EDC$ ヲ發見シタイ.

$\angle EAD=\angle EAC+\underline{\angle CAD}$

$\angle ADC=\angle B+\underline{\angle BAD}$

右邊等シク $\angle EAD=\angle ADC$　$\therefore$ ADCE ハ等脚梯形トナル.

4. 圓外ノ一點 A ヨリ二ツノ切線ヲ引キ. ソノ切點ヲ B, C トス. A ヨリ任意ノ割線ヲ引キ圓周ト D, E ニ交ラス, DE ノ中點ヲ M トセバ MA ハ $\angle BMC$ ヲ二等分ス. (水產)



$OM \perp DE$ デアルカラ

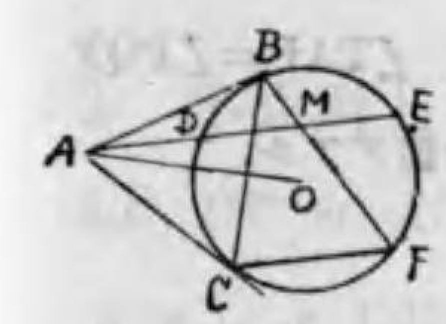
$\angle ABO=\angle AMO=\angle ACO=\angle R$

$\therefore$ A, B, M, O, C ハ環座

而シテ $AB=AC$　$\therefore$ 弧 AB = 弧 AC

$\therefore\ \angle AMB=\angle AMC$

5. 上問ニ於テ $AE \parallel CF$ トセバ BMF ハ一直線ヲ成ス.



$\angle AMB=\angle ACB$ (前問ノ AB ノ周角)

$\angle ACB=\angle BFC$ (切線ト弦トノ角)

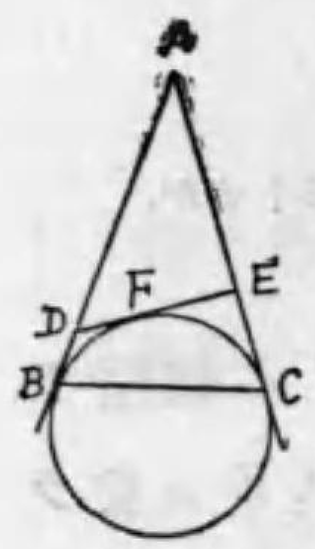
$\therefore\ \angle AMB=\angle CFM$

$\therefore\ \angle AMF+\angle AMB=2\angle R$

6. A ヲ頂トスル二等邊三角形 ABC ニ於テ, 邊 AB, AC 上ニ D, E ヲトリ, $BD+CE=DE$ ナラシメバ B, C ニ於テ夫々 AB, AC ニ切スル圓ハ DF ニ切ス.

$\triangle ADE$ ノ傍切圓 O ヲ作ル.

DE ト F, AB, AC ト B', C' デ



切スルトスル, $AB'=C'A$

$DF=DB'$, $EF=EC'$

$DF+EF=DB'+EC'$

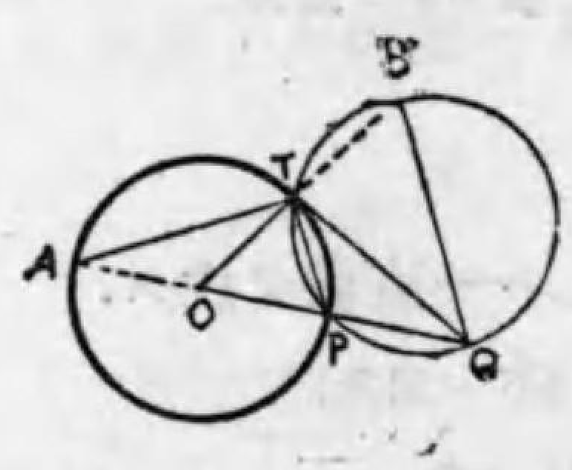
$DB' \gtreqless DB$ ニヨリ $EC' \gtreqless EC$

$\therefore$ $DF+EF=BD+CE$ ヨリ

$DF=BD$, $EF=EC$

$\therefore$ B, C ニテ切ス.

7. 圓 O ノ半徑 OP ヲ之ト等長ニ Q マデ延長シ, Q ヨリ此ノ圓ニ切線ヲ引キ, ソノ切點ヲ T トスレバ, 圓 PQT ハ 圓 O ニ等シ.



$\triangle OTQ$ ニ於テ

$\angle T=\angle R$ $OP=PQ$ デアルカラ

$OP=PT=PQ$ $\therefore$ $\angle PTQ=\angle PQT$

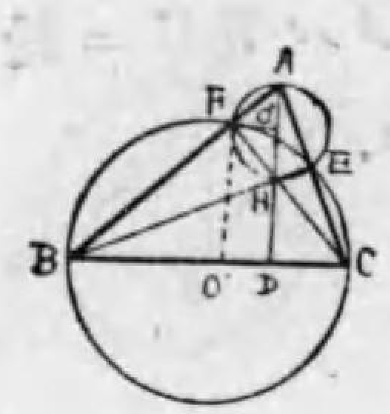
POA ヲ直徑トスルト

$\angle TAP=\angle PTQ$ $\therefore$ $\angle TAP=\angle PQT$

即チ二圓 APT, PQT ハ弦 PT ガ共通デ周角等シク合同デアル.

又ハ PA, QB ヲ直徑トシテ比較スルノモ一方法デアル.

8. H ヲ $\triangle ABC$ ノ垂心トシ, BC, AH ヲ直徑トスル二ツノ圓ハ互ニ直交ス.



圓周交角ハ交點ニ於ケル兩圓ノ切線ノ成ス角ニヨル. 直交ノ場合ハ半徑ノ成ス角ヲ $\angle R$ トスル.

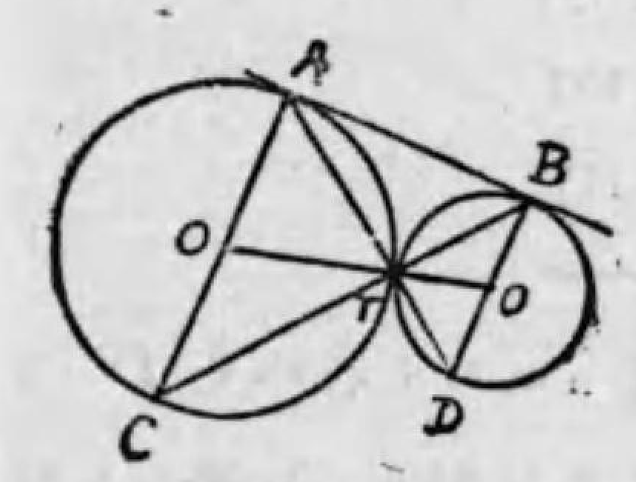
O, O′ ヲ二圓ノ中心トスルト

$\angle OBE=\angle OEB$, $\angle O'AE=\angle O'EA$

$\angle BEO'+\angle O'EA=\angle R$

$\therefore$ $\angle BEO+\angle BEO'=\angle R$, $\angle OEO'=\angle R$

9. T ニテ外切スル二圓 O, O′ ノ外公切線ヲ AB トシ, AOC, BO′D ヲ直徑トセバ BTC, ATD ハ一直線ヲ成ス.



OT, O′T ヲ結ブ OTO′ ハ一直線,

$AB \perp AC$, $AB \perp BD$

$\therefore$ $AC \parallel BD$

$\angle AOO'+\angle OO'B=2\angle R$

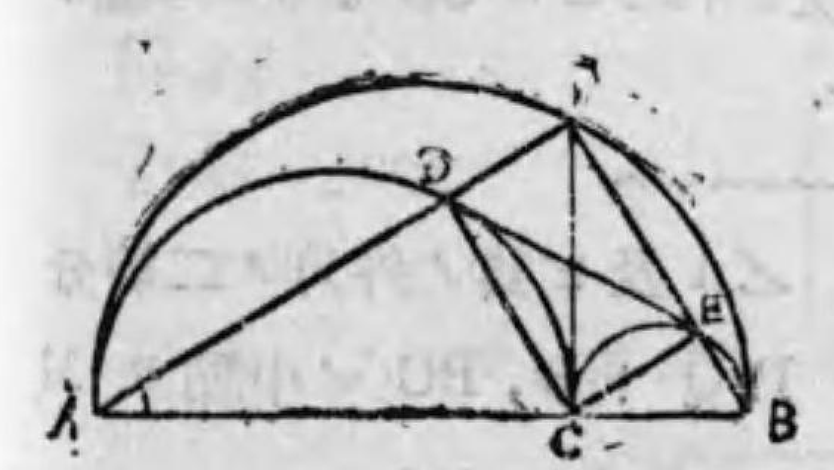
$\therefore$ $(\angle OAT+\angle OTA)+(\angle O'BT+\angle O'TB)=2\angle R$

$\therefore$ $\angle OTA+\angle O'TB=\angle R$

トコロガ $\angle OTA+\angle OTC=\angle R$

$\therefore$ $\angle O'TB=\angle OTC$ $\therefore$ BPC ハ一直線

10. 半圓周上ノ一點 P ヨリ直徑 AB ニ垂線 PC ヲ引キ, AP, BP ガ AC, BC ヲ直徑トスル圓ト交ル點ヲ夫々 D,E トスレバ DE ハ後ノ二圓ノ共通切線ナリ.



直徑ト半圓ト云フコトカラ三ツノ $\angle R$ ヲ考ヘル

$\angle ADC=\angle APB=\angle CEB$

$\therefore$ PDCE ガ矩形

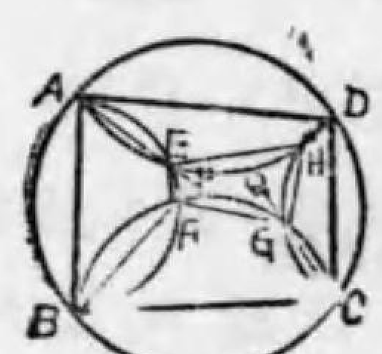
$\therefore$ $\angle CPB=\angle CDE$

然ルニ $\angle CPB=\angle PAC$

$\therefore \angle CDE = \angle CAD$

$\therefore$ DE ハ ADCE 圓ニ切スル. E ニ於テモ同樣

11. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ヲ各弦トスル四ツノ圓ノ交點ニテ成ル四邊形ハ亦圓ニ內接ス.



$\angle ABF = \angle FEP$

$\angle ADH = \angle HEP$

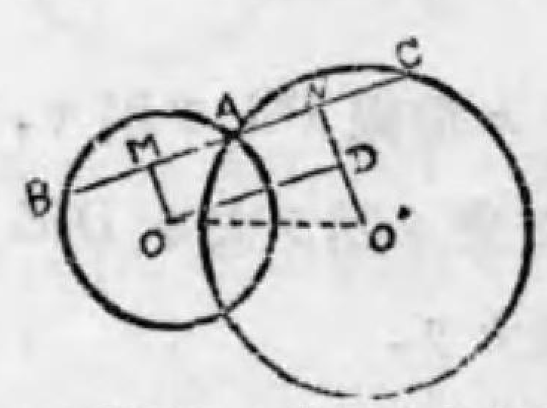
$\angle FBC = \angle FGQ$

$\angle HDC = \angle QGH$

邊々加ヘテ

$\angle FEH + \angle FGH = \angle ABC + \angle ADC$

12. A ニテ交ル二圓 O, O′ ノ割線ガ二圓ト B, C ニ交ルトキ BC ノ最大ハ $BC \parallel OO'$ ノトキナリ.



AB, AC ノ中點ヲ M, N トスルト

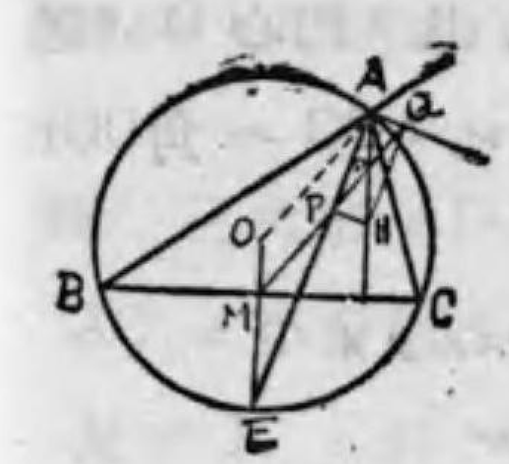
$OM \perp AB$, $O'N \perp AC$ トナル.

$OD \perp NO'$ トスルト 矩形 MODN ガ出來テ

$OD = MN = \frac{1}{2} BC$

$\triangle OO'D$ ト直角三角形デ OD ヲ極大ニスルノニハ OD ガ OO′ ニ重ルトキデ即チ $BC \parallel OO'$ ノトキデアル.

13. $\triangle ABC$ ノ垂心 H ヨリ ∠A 及ビ其ノ外角ノ二等分線ヘ引ケル垂線ノ足ヲ夫々 P, Q トシ, BC ノ中點ヲ M トスレバ三點 P, Q, M ハ同一直線上ニアリ.



APHQ ハ矩形トナル

$\angle APQ = \angle PAH$ 　 $AD = DH$

又 $\angle OAP = \angle PAH$ 　(主題 23)

$\therefore AO \parallel PQ$ ……………………… (1)

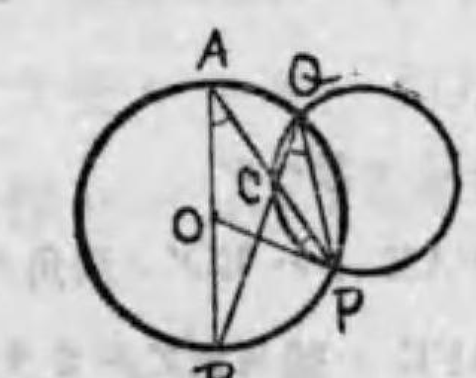
$AD \perp OM$ 　(主題 28)

$\therefore$ ▱AOMD ヲ決定シテ

$DM \parallel AO$ ……………………… (2)

(1), (2) カラ QDPM ハ一直線

14. O ヲ中心トスル一圓ノ直徑 AB ノ兩端 A, B ヲ任意ノ一點 C ニ結ビテ AC, BC ヲ作レバ AC, BC 又ハ其ノ延長ガ圓周ト交ル點ヲ P, Q トセバ OP, OQ ハ CPQ 圓ニ切ス.



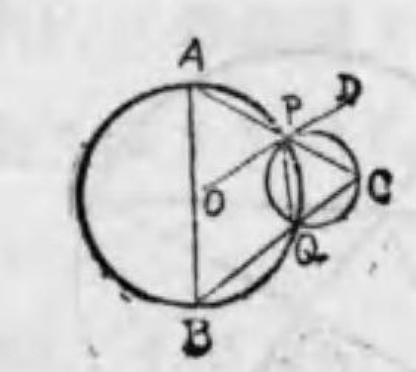
$\triangle AOP$ 二等邊

$\angle OAP = \angle OPA$

$\overset{\frown}{BP}$ ヨリ

$\angle BAP = \angle BQP$

$\therefore \angle APO = \angle CQP$



$\triangle AOP$ 二等邊

$\angle OAP = \angle OPA$

圓內四邊形 ABQP ヨリ

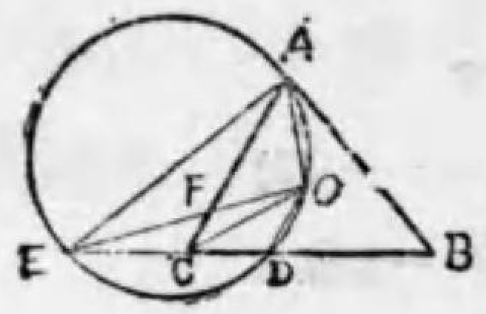
$\angle OAP = \angle PQC$

$\angle OPA = \angle DPC$

$\therefore \angle DPC = \angle PQC$

$\therefore$ OP ハ圓 PCQ ニ切ス. OQ モ同樣

15. $\triangle ABC$ ノ A ニ於テ AB ニ切シ，且ツ内心 O ヲ通ル圓ガ直線 BC ト交ル點ヲ D, E トスレバ OC ハ角DOE ヲ二等分ス.



$\angle ACO=\angle OCD$ ヲ利用スルタメ

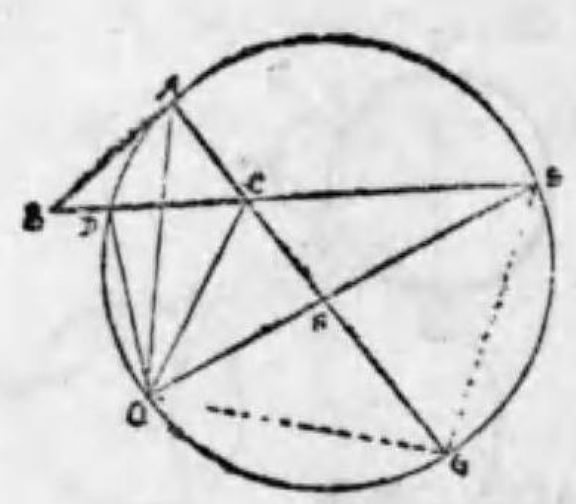
$\angle ODC=\angle OFC$ ヲ考ヘル

$\angle ODC$ ト $\angle OAE$ トハ圓内四邊形カラ補角

$\angle OFC=\angle AFE$ デアルカラ

$\angle CAE+\angle AEF$ ガ $\angle OFC$ ノ補角

ソコデ $\angle OAC+\angle CAE=\angle CAE+\angle AEO$ ガ證セラレタラヨイ，即チ $\angle OAC=\angle AEO$ ヲ證シタラヨイ，トコロガ假設 O ガ内心ハ $\angle BAO=\angle OAC$ デ展開シ得ルカラ $\angle BAO=\angle AEO$ ガ云ヒ得タラヨイ，ソレニハ A デ圓ガ切シテヰルコトヲ用フルノデアル



研究 O ノ代リニ O′ ナル傍切心ヲ考ヘテモ出來ル.

$\angle O'DC=\angle O'FC$ ヲ考ヘル

$\angle O'DC$ ト $\angle O'AE$ トハ $\overset{\frown}{EO'}$ ノ周角デ等シ

$\angle O'FC$ ト $\angle AFE$ ハ補角デアルカラ

$\angle CAE+\angle AEF$ ハ $\angle AFO'$ ニ等シ

ソコデ $\angle O'AC+\angle CAE=\angle CAE+\angle AEO'$ ガ證セラレタラヨイ. 即チ $\angle O'AC=\angle AEO'$ トコロガ假設 O′ ノ傍心ハ $\angle BAO'=\angle O'AC$ デ開展シ得ルカラ $\angle BAO'=\angle AEO'$ ガ云ヒ得タラヨイ，ソレニハ A デ圓ガ切レテヰルコトヲ用フルノデアル.

要領 上ノ解ト研究ノ解トハ全ク一字一句ガ對照シテ，内心デ云ヘルコトハ傍心デモ出來ルコトヲヨクヨク繰リ返シテ味ヒナサイ.

16. 三角形 ABC ノ外心ヲ O トシ，O ヨリ邊 AB 及ビ AC ニ平行線ヲ引キ，B 及ビ C ニ於ケル切線ト夫々 D, 及ビ E ニ於テ會セシムルトキハ直線 DE ハ此ノ圓ニ切スルコトヲ證セヨ.　(11盛農)

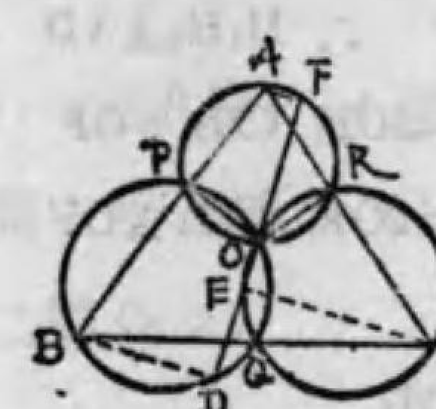
AO ヲ延長シテ圓周ト F ニ交ラセル.

$\angle OAB=\angle OBA$ 又 $\angle OBA=\angle BOD$

$\therefore\ \angle BOD=\angle DOF$

$\therefore\ \triangle BOD\equiv\triangle DOF$　　$\therefore\ DF\perp OF$

17. 三角形 ABC ノ邊 AB, BC, CA 上ニ P, Q, R ナル三點ヲ取リ $\triangle BPQ$, $\triangle CQR$, $\triangle ARP$ ノ外接圓ヲ書キテ O ニテ交ルトキ，FOED ナル割線ヲ作リテ AF, CE, BD, ヲ作レバ $AF \parallel CE \parallel BD$ ナリ.



$\angle AFO=\angle ARO$　($\overset{\frown}{AO}$ 周角)

$=\angle CEO$　(圓内四邊形 OECR)

$\therefore\ AF \parallel CE$

$\angle AFO=\angle BPO$ ハ $\angle BDO$ ノ補角

$\therefore\ AF \parallel BD$

18. 圓内四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ヨリ對邊ニ下ス垂線ハ同一ノ點ヲ過ギル.

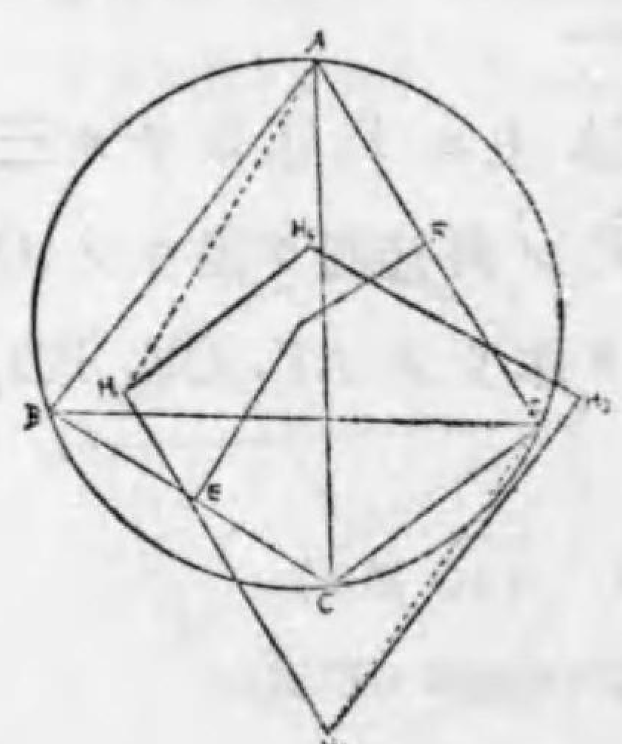
EG, HF ノ交點ハ ▱HEFG ノ對角線ノ交點デアル.

O ヲ中心トシテ $OK=KO'$ トスルト O' ハ特殊點 $HOFO'$ ハ對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルカラ▱

$OH \parallel FO'$ $\quad OH$ (弦ヘノ垂線) $\perp AD$

トナツテ $FO' \perp AD$ 他モ同樣

19. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ四ツノ三角形 ABC, BCD, CDA, DAB ノ垂心ヲ頂點トスル四邊形ハ原圓ニ合同ナリ.



$\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ ノ各垂心ヲ H_1, H_2, H_3, H_4 トシ, BC, AD ノ中點ヲ E, F トス.

$\triangle ABC$ ニテ $AH_1=2OE$, $AH_1 \parallel OE$

(O ヲ圖ニ入レヨ)

$\triangle BCD$ ニテ $DH_2=2OE$ $DH_2 \parallel OE$.

$\therefore$ AH_1H_2D ハ ▱ $\quad \therefore$ $H_1H_2 \perp\!\!\!\!= AD$

$\triangle CDA$ ニテ $CH_3=2OF$, $CH_3 \parallel OF$

$\triangle DAB$ ニテ $BH_4=2OF$, $BH_4 \parallel OF$

$\therefore$ BCH_3H_4 ハ▱ニシテ $BC \perp\!\!\!\!= H_3H_4$

CD, AB ノ中點ヲ K, L トスルト同樣ニ $CD \perp\!\!\!\!= H_4H_1$

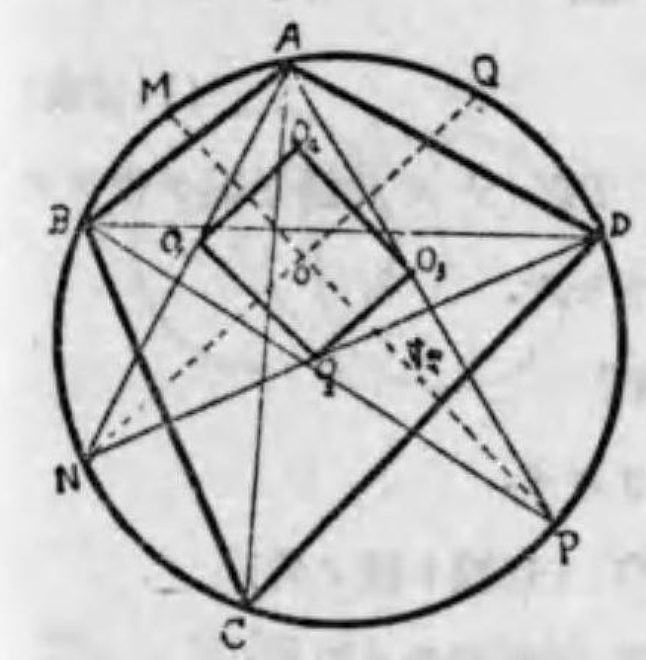
$AB \perp\!\!\!\!= H_2H_3$ ヲ得. ソシテ $\angle BCD=\angle H_3H_4H_1$

$\angle CDA=\angle H_4H_1H_2$, $\quad \angle DAB=\angle H_1H_2H_3$ $\quad \angle ABC=\angle H_2H_3H_4$

$\therefore$ 四邊形 $ABCD \equiv H_1H_2H_3H_4$

20. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ ノ內心ヲ夫々 O_1, O_2, O_3, O_4, トスレバ四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ ハ矩形ヲ成スコトヲ證セヨ.

$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$ ノ中點ヲ M, N, P, Q トス. O_1 ハ $\angle A$ ノ二等分線



上ニアリテ AO_1N ハ一直線ヲナシ, 同樣ニ DO_2N, BO_2P, AO_3P 等モ一直線ヲナス. ソシテ $NB=NO_1=NC=NO_2$

(93頁主題 29) $\therefore$ $\triangle NO_1O_2$ ハ二等邊

又 $\overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{QD}$ ヨリ $\angle ANQ=\angle QND$

$\therefore$ $O_1O_2 \perp NQ$ ……………… (1)

同樣ニ $O_4P=PC_3$ ヨリ $O_2O_3 \perp PM$;

$QC_3=QO_4$ ヨリ $O_3O_4 \perp QN$; $MO_4=MO_1$

ヨリ $O_4O_1 \perp MP$

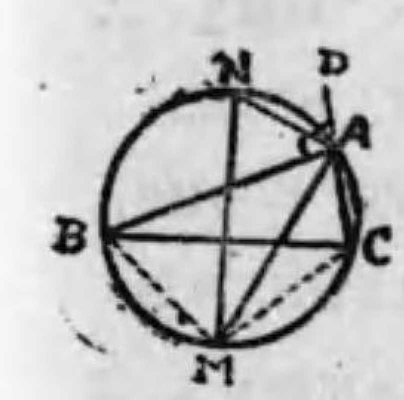
然ルニ MP; NQ ヲ O ニテ交ルトセバ $\angle MON=\angle MQN+\angle QMP$

ニシテ $\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}\right)$ ニシテ此ノ周角ハ $\angle R$

$\therefore$ $\angle O=\angle R$ $\quad \therefore$ $O_1O_2 \perp O_2O_3 \perp O_3O_4 \perp O_4O_1$

21. $\triangle ABC$ ノ頂角 A 及ビ其ノ外角ノ二等分線ガ外接圓ト交ル點ヲ M, N トスレバ MN ハ底邊 BC ヲ垂直ニ二等分ス.

(14海經)



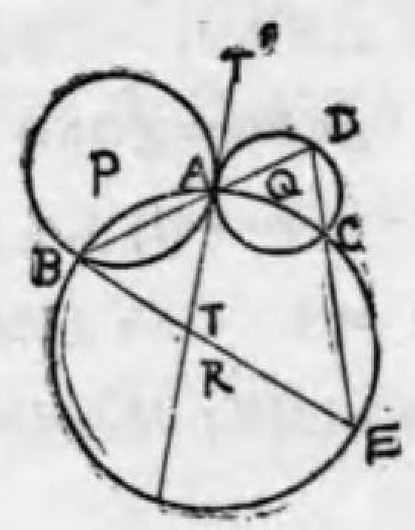
3. ● M ハ $\overset{\frown}{BC}$ ノ中點ニシテ, $BM=CM$

$\angle MAN=\angle R$ ナルヲ以テ MN ハ直徑トナル.

$\therefore$ $\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{CN}$ ニシテ $BN=CN$

$\therefore$ MN ハ BC ノ垂直二等分線ナリ

22. 三ツノ圓 P,Q,R アリ. P圓, Q圓 ハ A ニ於テ外切シ, R圓ハ A ヲ通リテ P圓, Q圓ト夫々 B,C ニ於テ交ルモノトス. 今 B,A ヲ通ル直線ガ Q 圓 ト D ニ於テ交リ D,C ヲ通ル直線ガ R 圓ト E ニ於テ交ルトキハ直線 EB ハ P 圓ニ切ス. (14富高)



外切ノ條件カラ TT′ ナル共通切線ヲ作ツテ BE ト T デ交ラセル.

$\angle ABT=\angle BAT$

ガ云ヒ得ラレタラヨイ.

$\angle T'AD=\angle ACD$ (切線ト弦ノ角)

$\angle T'AD=\angle BAT$ (對頂角ヲ用ヒ)

$\angle ABE=\angle ACD$ (圓內四邊形 ABEC)

$\therefore\ \angle ABE=\angle BAT$ ガ得ラレル.

23. 圓 O ノ互ニ垂直ナル直徑ヲ AB, CD トシ, OA, OC 上ニ相等シク夫々 OM, ON ヲトリ, DM ノ延長ト AN トノ交點ヲ P トスレバ OMPN ハ內接四邊形ナリ. (14農實)

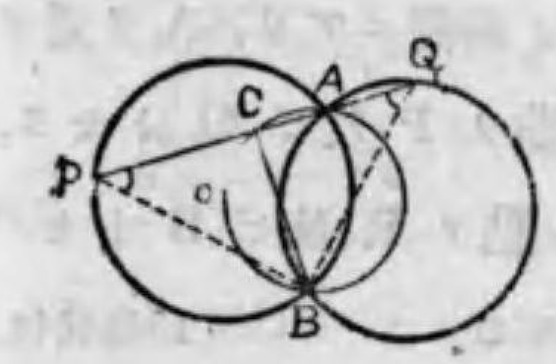
$\angle OMD=\angle PNO$

ヲ證スルコトヲ考ヘル.

$\triangle ANO\equiv\triangle ODM$

ハ容易ニ考ヘラレヨウ.

24. 相交ルニツノ等圓アリ. 其ノ交點ヲ A,B トス. A ヲ過ギル直線ガ此ノ二圓ト交ル點ヲ夫々 P,Q トシ, AB ヲ直徑トスル圓ガ PQ ト交ル點ヲ C トスレバ CP=OQ ナリ. (14大阪外)



B,P; B,Q; B,C ヲ結ベバ

O′圓≡O圓 デアルカラ

$\angle BPA=\angle BQA$ $\therefore\ \triangle BPQ$ ハ二等邊

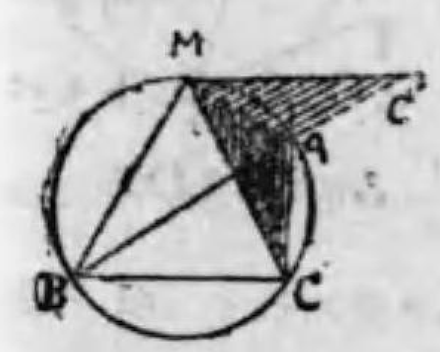
而シテ $\angle ACB$ (圓 AB ノ半圓角)$=\angle R$

$\therefore\ PC=QC$

25. 定圓 O ニ內接スル三角形ノ中ニテ周圍ノ極大ナルモノハ正三角形ナリ.

i. 「圓ニ內接スル與底ノ三角形ノ中, 二等邊ノ周ガ極大デアル」ノ證

M ヲ $\overset{\frown}{BC}$ ノ中點トシ, A ヲ他ノ點トスル.



$MB+MC>AB+AC$ ヲ證スル.

今 BA ヲ延長シテ $AC=AC'$ トスルト

$\triangle MAC$, $\triangle MAC'$ ニ於テ MA 共通, $AC=AC'$

$\angle MAC$ ハ圓內四邊形 BMAC ノ $\angle B$ ノ補角

$\angle MBC=\angle MCB=\angle MAB$ ($\overset{\frown}{MB}$ ノ周角)

$\therefore\ \angle MAC'$ ハ $\angle B$ ノ補角トナル.

$\triangle MAC\equiv\triangle MAC'$ $\therefore\ MC=MC'$

$\triangle BMC'$ デ $BM+MC'>BC'$

即チ $BM+MC>AB+AC$

ii. 之ヲ應用スルト BC ヲ一定シテ居ルトキ O 圓ニ內接スル三角形ノ

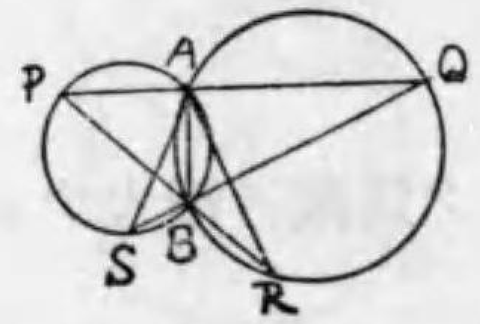
周ノ中，二等邊△ノ周ガ極大トナル．之ヲ換言スルト

「隣邊ノ等シカラザル△ノ周ハ極大ナラズ」トナル．

ソコデ三邊ヲ a, b, c トスルト $a=b=c$ ニナルマデハ極大デハナイ．

$a=b=c$ ノトキ初メテ極大トナル．

26. 相交ル二圓ノ中心ハ其ノ共通弦 AB ノ兩側ニアリ，A ヲ通リ AB ニ垂直ナル割線ヲ引キ兩圓トノ交點ヲ P 及ビ Q トセヨ，今 PB, QB（或ハ其ノ延長）ガ圓ト交ル點ヲ R 及ビ S トセバ AB ハ角 RAS ヲ二等分スルコトヲ證セヨ．　(15海兵經)



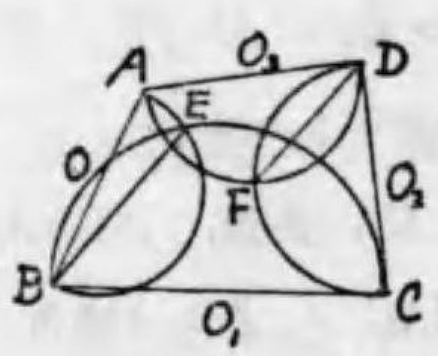
$\angle PBS=\angle QBR$, $\angle PBS=\angle PAS$,

$\angle QBR=\angle QAR$ ヨリ $\angle PAS=\angle QAR$

而シテ $\angle PAB=\angle R$　∴ $\angle SAB=\angle RAB$

27. 四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC ヲ直徑トスル圓ノ共通弦ト CD, DA ヲ直徑トスル圓ノ共通弦トハ互ニ平行ナルコトヲ證セヨ．

(15商大豫)

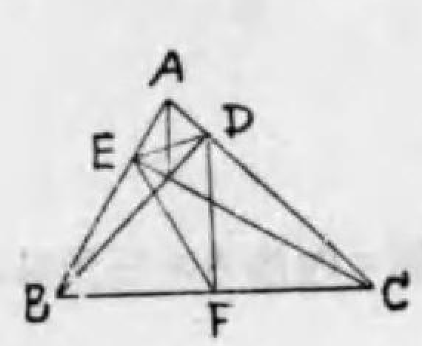


AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ O, O_1, O_2, O_3 トセバ

$BE \perp OO_1$　$DF \perp O_2O_3$　∴ $BE \parallel DF$

28. 鋭角三角形 ABC ニ於テ B, C ヨリ對邊ヘ下セル垂線ヲ夫々 BD, CE トシ，F ヲ邊 BC ノ中點トスレバ $\angle FED=\angle EDF=\angle A$

(15臺商)

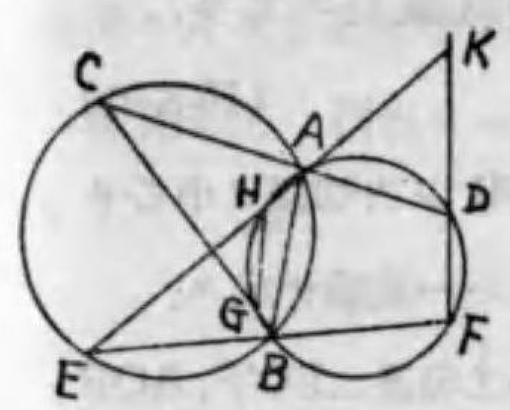


共圓點 A,E,O,D；E,B,C,D カラ $\angle EDO=\angle EAO$,

$\angle DEO=\angle DAO$, $\angle DEC=\angle DBC$, $\angle R\triangle$ ノ斜邊

中點カラ $\angle DBC=\angle BDF$　∴ $\angle EDF=\angle A$

29. 兩圓ノ交點ヲ A, B トシ，一圓周上ノ二點 C 及ビ E ヨリ直線 CA, CB 及ビ EA, EB ヲ引キ D, G 及ビ H, F ニテ他ノ圓周ヲ截レバ GH ハ DF ニ平行ナリ．　(15高松商)



EA ト FD トヲ K ニ交ラシメルト $CE \parallel DF$

〔∵ 圓内接四邊形ヨリ $\angle CEB \angle CEB=\angle BAD$,

$\angle BAD+\angle BFD=2\angle R$ ∴ $\angle CEB+\angle BFD=2\angle R$〕 ∴ $\angle CEA=\angle EKF$

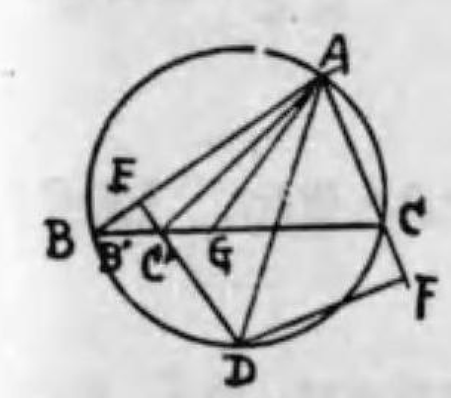
$\angle CEA=\angle CBA$, 圓内接四邊形 AHGB ヨリ

$\angle ABG=\angle EHG$　∴ $\angle EHG=\angle CEA=\angle EKF$　∴ $\angle EHG=\angle AKF$

∴ $HG=DF$

30. 不等邊三角形 ABC 内ノ一點 P 及ビ邊 BC 上ニ二點 B', C' ヲ適當ニ選ビテ $PB'+PC'>AB+AC$ ナル如クナシ得ルコトヲ證セヨ．

(15仙工)

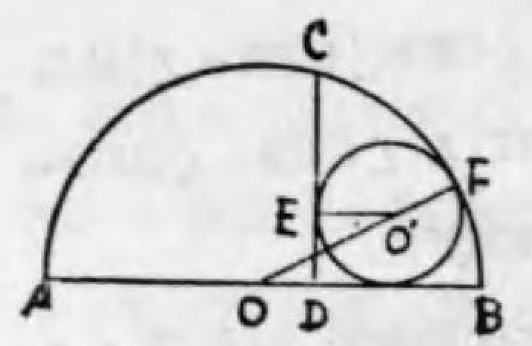


$\triangle ABC$ ノ外接圓ヲ作リ $\angle A$ ノ二等分線ガ圓周ト交ル點ヲ D, D ヨリ AB, AC ニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲ夫々 E, F トス．此ノトキ $AB>AC$ トセバ E ハ AB 上，F ハ AC ノ延長上ニアルベシ，

而シテ $AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC)$ 故ニ A ヲ中心，AE ヲ半徑トスル圓ハ BC ト必ズ交ル，ソノ點ヲ G トス．BG ノ間ニ一點 C' ヲトレバ (G ニ近キ方ニ) $AC'>AE$　∴ AC' 上ニ P 點ヲ求メ $C'P=AE$ ナラシメ得．M ヲ中心，PC' ヲ半徑トスル圓外ノ BG 上ニ B' 點ヲ定ムレバ明ニ $PB'>PB'$ 即チ $PB'>AE$　∴ $PB'+PC'>AB+AC$

31. 圓周上ノ一點 C ヨリ直徑 AB ニ下シタル垂線ノ足ヲ D トス. 圖形 CDB ニ內切スル圓ガ直線 CD 及ビ弧 BC ニ切スル點ヲ夫々 E, F トスレバ三點 A, E, F ハ同一直線上ニアリ.

(15名工)



AB ノ中點ヲ O, CDB ノ內切圓ノ中心ヲ O' トスレバ O, O', F ハ一直線ヲ成ス.

$EO' \parallel AO$ ∴ 二ツノ二等邊 $\triangle EO'F$, AOF ニ於テ $\angle AOF = \angle EO'F$

∴ $\angle O'FE = \angle OFA$ ∴ F, E, A ハ一直線ヲ成ス.

第 四 編

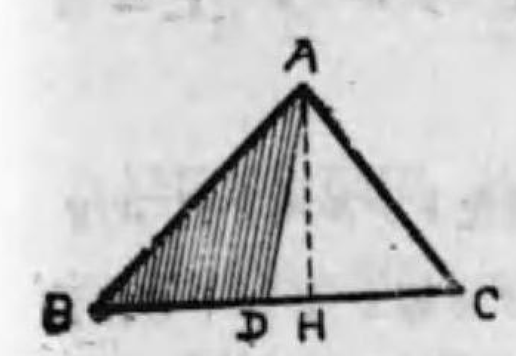
面 積

面積ニ入ルト前項迄ノ問題ト趣ヲ異ニスルカラ, 先ヅ最初ニ緒論ノ定理類ノ復習ヤラ, 圖形ニヨツテ表サレタ基礎事項ヲヨク調ベテヤリカケテ下サイ.

I. 基 礎 問 題

【試練】 170. 三角形 ABC ノ中線ヲ AD トセバ

$\triangle ABD = \triangle ACD$



こなし方 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ ノ項ヲ A トシテ高サ AH ヲ考ヘルト同一ニナルカラ BD=CD ト合セテ $\triangle ABD = \triangle ACD$

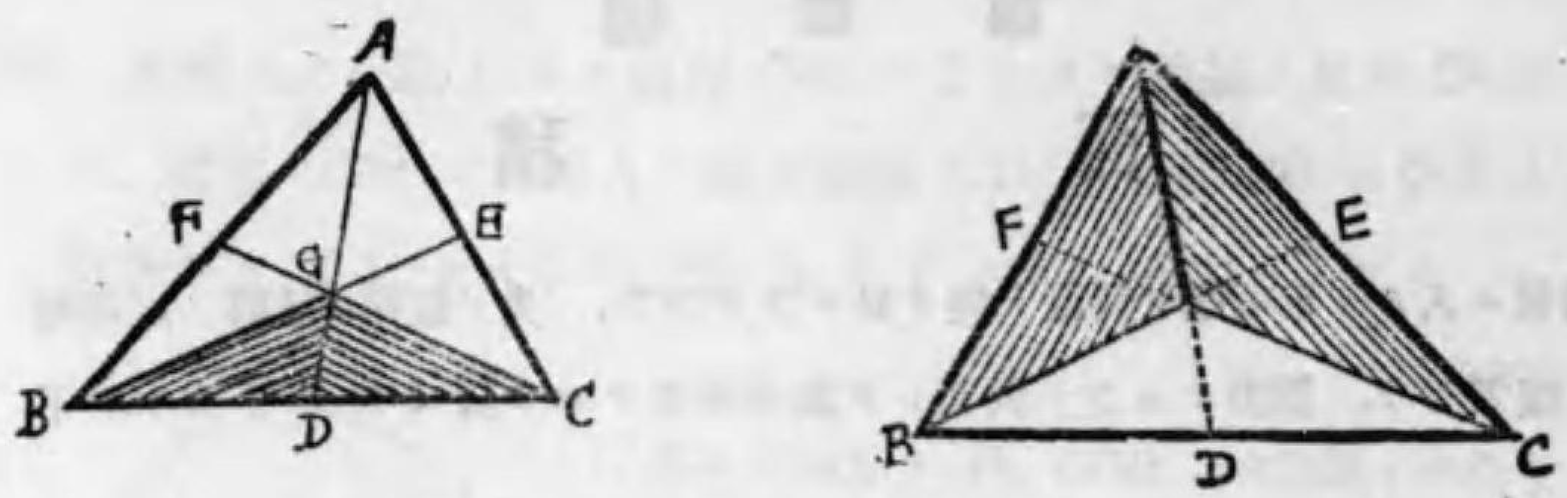
【注意】 三角形ノ高サノ足ハ底角ガ鈍角ノ場合ハ底ノ延長上ニ落チル.

研究 本問ハ等底等高ノ三角形（矩形及ビ平行四邊形）ハ相等シトイフ定理ニ基クモノデ, 面積移動ニハ此ノ理ヲ盛ニ使フカラ等底・等高ヲシツカリ掴ヘテオイテ下サイ.

【應用】 $\triangle ABC$ ノ中線ヲ AD, BE, CF トシ重心ヲ G トセバ $\triangle BGD = \triangle CGD$, $\triangle ABG = \triangle ACG$

こなし方 GD ガ $\triangle GBC$ ノ中線ドナルコトヲ考ヘルト

$\triangle BGD = \triangle$(GD



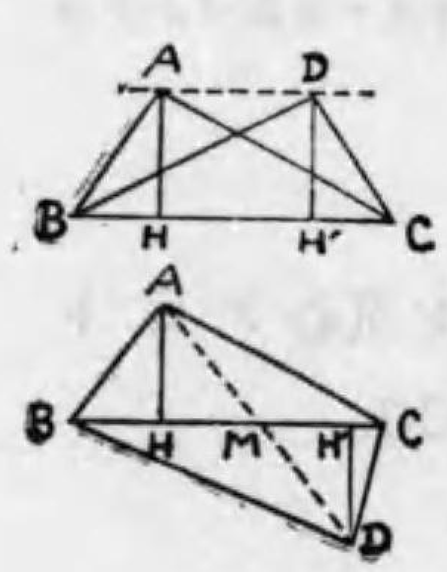
之ヲ $\triangle ABD=\triangle ACD$ ヨリ邊々減シテ　　$\triangle ABG=\triangle ACG$

【試煉】 108. 等底ナル三角形 ABC, DEF ガ底邊 BC, EF ヲ X 上ニオキ, 頂 A, D ヲ $x \parallel y$ ナル Y 上ニオクトキハ此ノ兩三角形ハ等積ナリ.

こなし方　前問ノ一般化トナルモノデ x, y ハ AH, DH′ ナル高サガ等シイコトノ換言デ等底・等高ニ歸スル.

【試煉】 109 等積ナル三角形 ABC, DBC ノ頂點線 AD ハ底 BC ニ平行ナルカ, 又ハ BC ニテ二等分セラル.

(13濱工)



こなし方 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AH \cdot BC$

$=\triangle DBC=\frac{1}{2}AH' \cdot BC$

$\therefore$ AH=AH′ ヨリ同側ニアルトキ AHH′D ガ矩形トナッテ　　$AD \parallel BC$

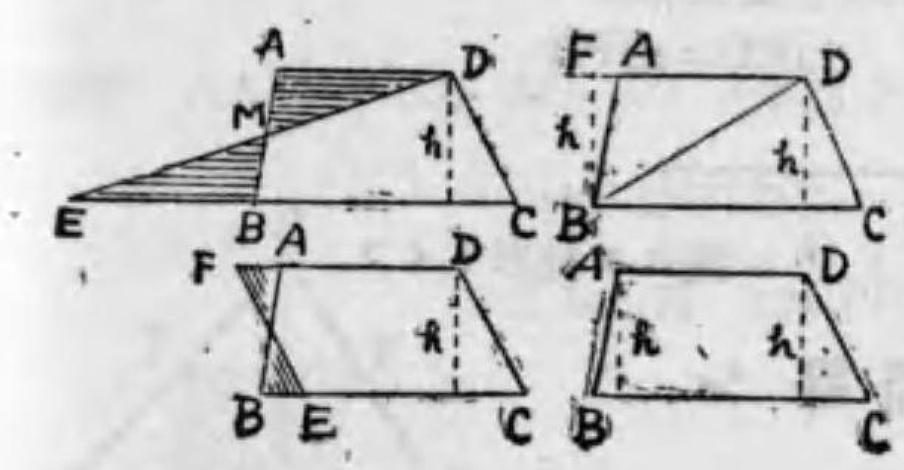
ナルガ, 反對ノ側ニアルトキハ

$\triangle AHM \equiv \triangle MDH'$ ヨリ AM=MD

要領 高サ h, 底 b トスルト $\triangle=\frac{1}{2}bh$ ノ取扱ニ歸スル.

【試煉】 110. 梯形ノ面積ハ上下底和ニ高サヲ乘ゼシモノノ半ナリ.

こなし方 (1) AB ノ中點ヲM トシテ DME ヲ BC ト交ラシメルト



$\triangle AMD \equiv \triangle BME$

梯形$=\triangle DEC$

$=\frac{1}{2}(EB+BC)h$

$=\frac{1}{2}(AD+BC)h$

(2) $FME \parallel DC$ トスルト

$\triangle AMF \equiv \triangle BME$　梯形$=\square FECD$ $=EC \cdot h$

$=\frac{1}{2}(FD+EC)h=\frac{1}{2}(AD+BC)h$

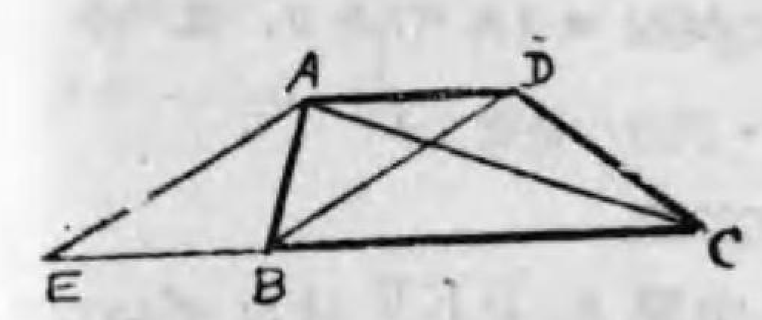
(3) $BF \perp AD$, $DE \perp BC$　梯形$=\triangle BAD+\triangle DBC$

$=\frac{1}{2}h \cdot AD+\frac{1}{2}h \cdot BC$

$=\frac{1}{2}h(AD+BC)$

(4) $AE \perp BC$, $DF \perp BC$　梯形$=\triangle ABE+$矩形$AEFD=\triangle DFC$

$=\frac{1}{2}BE \cdot h+EF \cdot h+\frac{1}{2}FC \cdot h$



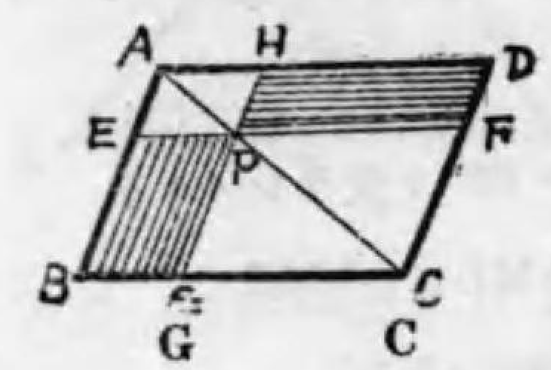
$=\frac{1}{2}h(BE+\overline{AD+EF}+FC)$

$=\frac{1}{2}h(AD+BC)$

(5) $\square AEBD$ ヲ作ルト, $\triangle AEB \equiv \triangle ABD=\triangle ACD$

$\therefore$ 梯形$=\triangle AEC=\frac{1}{2}h(EB+BC)=\frac{1}{2}h(AD+BC)$

【試練】 111. ▱ABCD ノ對角線 AC 上ノ P ヲ過ギリ AD ∥ EPF, AB ∥ HPG ヲ作レバ ▱PD = ▱PB



こなし方 △CDA ≡ △ABC……………………(1)

又 △AEP ≡ △PHA, △PGC ≡ △CFP

ヲ (1) ヨリ減ジテ

▱PD = ▱PB

【注意】 ▱PB, ▱PD ヲ ▱ABCD ノ P ニ關スル餘形トイフ.

餘 形 ハ 相 等 シ

ハ定理トシテ用ヒテヨロシイ.

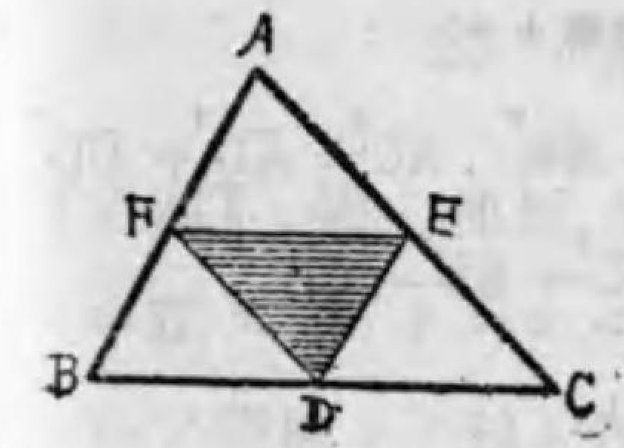
【試練】 112. ▱ABCD 內ノ一點 P ヲ過ギリ, 二隣邊ニ平行ナル EPF, HPG ヲ作ルトキ, ▱PB = ▱PD ナラバ P ハ AC 上ニアリ.

こなし方 前問ノ逆デアル. △APE ≡ △APH, △PCG ≡ △PCF デアルカラ ▱PB = ▱PD ヲ邊々加ヘルト APCB = APCD トナル. P ガ AC 上ニナイトスルト (歸謬法) APCB ハ △ABC ヨリ大デアルカ, 又ハ小トナリ, 何レモ ▱AC ノ半分ニハナラヌ.

【試練】 113. △ABC ノ各邊ノ中點ヲ D,E,F トセバ

$$\triangle DEF = \frac{1}{4}\triangle ABC$$

こなし方 EF $\underline{\parallel}$ $\frac{1}{2}$BC ∴ FBDE, FDCE, FDEA



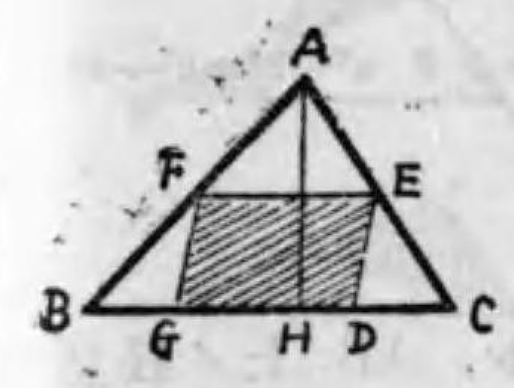
ハ▱デ, 各 BD・h ニ等シイ.

h ハ △ABC ノ高サトスル.

△AEF = △DEF = △BDF = △EDC

∴ $\triangle DEF = \frac{1}{4}\triangle ABC$

研究 △ABC ノ二邊 AB, AC ノ中點 F, E トスルトキ,



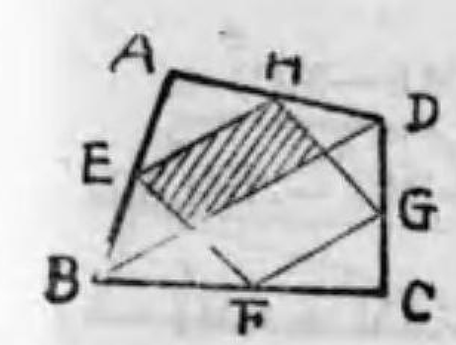
內接 $▱FGDE = \frac{1}{2}\triangle ABC$

こなし方 $▱DEFG = MH.EF = \frac{1}{2}MH.BC$

$= \frac{1}{4}AH.BC = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AH.BC)$

$= \frac{1}{2}\triangle ABC$

【試練】 114. 四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點線ニテ作ラルル四邊形ハ平行四邊形ニシテ原形ノ二分ノ一ノ面積ヲ有ス. (15大分商)



こなし方 EFGH ニ於テ

EH $\underline{\parallel}$ $\frac{1}{2}$BD, FG $\underline{\parallel}$ $\frac{1}{2}$BD

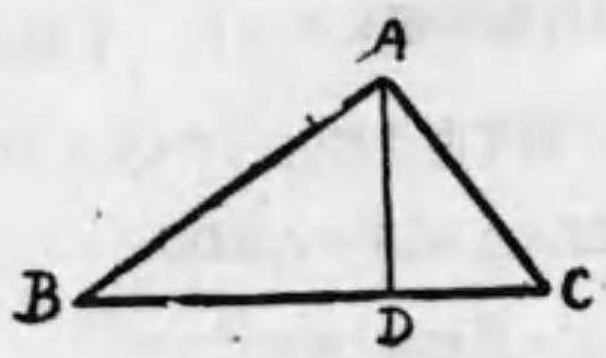
∴ EH $\underline{\parallel}$ FG ∴ EFGH ハ ▱

面積ハ前問ニヨリ $▱EFGH = \frac{1}{2}\triangle ABD + \frac{1}{2}\triangle BCD$

【試練】 115. △ABC ノ A ヨリ BC ヘノ垂線ヲ AD トセバ

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{CD}^2$$

こなし方 △ABD, △ACD ニ於テ



ピタゴラスノ定理カラ

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2,\quad \overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$

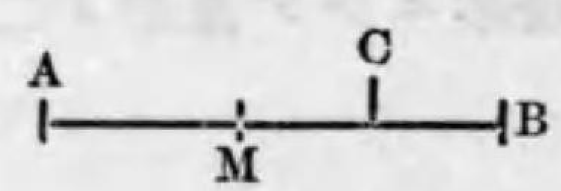
$\therefore\quad \overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$

要領 本問ハ面積解法中ニ利用スルト偉大ナ奏効ガアルカラ，ヨク玩味シテオイテ下サイ．

エキス a^2-b^2 ノ形ハ a, b ガ作ル正射影ヲ c, d トシテ $a^2-b^2=c^2-d^2$ ノ形ニ化ス．

【試錬】 116. 線分 AB ノ中點ヲ M トシ，AB 上ノ任意ノ點ヲ C トセバ

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)$$



こなし方 $\overline{AC}^2=(AM+MC)^2$ $=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2+2AM.MC$ ｛ $\overline{BC}^2=(MB-MC)^2$ $=BM+\overline{MC}^2-2\overline{BM}^2.MC$

ソシテ AM=BM ヲ持込ンデ $\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{CM}^2)$

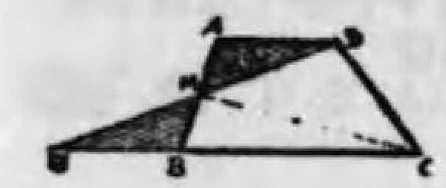
エキス 上ノ諸問ハ易問計リデアルガ基礎トナル上カラ殆ド定理ノ様ニ應用的ノこなし方ガ出來ル樣ニシテオクコトガ肝要デス．

ソシテ何時デモ反射的ニ出ル樣ニ エキス トシテ頭ニ入レテオクコトヲ工夫スル．

2. 等積移動問題

【主題】 48. 梯形 ABCD ニ於テ AD∥BC トシ，AB ノ中點ヲ M トスレバ梯形ノ面積ハ CD ト，M ヨリ CD ヘノ垂線トノ包ム矩形ニ等シ． (15鹿農)

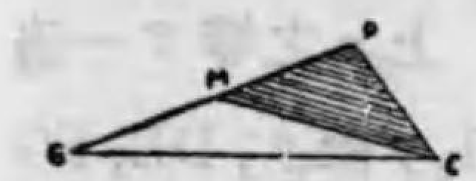
答案 ❻ DM ヲ延長シテ CB ノ延長ト E ニ交ラシム．



$\triangle AMD\cong\triangle FME$

$\because$ AM=MB, 角ハ平行線錯角等シ

従ッテ MD=ME



$\therefore$ 梯形積 $S=\triangle DEC$

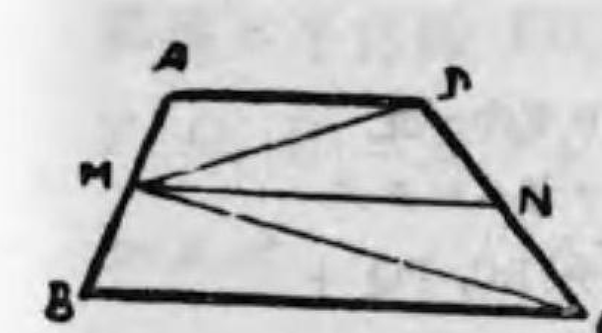
扨 $\triangle DEC$ ニ於テ M ハ ED ノ中點ナレバ

$2\triangle CDM=\triangle CDE=S$

M ヨリ CD ヘノ高サヲ h トセバ

$\therefore\ 2\triangle CDM=CD.h=S$

研究 又 N ヲ CD ノ中點トスルト，2MN=BC+DA，原形ノ高サヲ h トスル．



AD, MN; MN, BC ノ平行距離 $\frac{1}{2}h=l$ シテ表スト．

$\triangle MDN=\triangle MCN=l.MN+l.MN=h.MN$

$\triangle AMD+\triangle BMC=lAD+lBC=l(AD+BC)$

$=l(2MN)=h.MN$

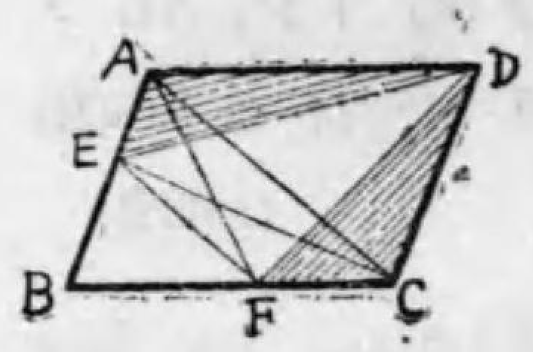
$\therefore\ \triangle MDC=\triangle AMD+\triangle BCM$

$\therefore\ S=2\triangle MCD=2\cdot\frac{1}{2}CD.$(M ヨリ CD ヘノ高サ)

【主題】 49. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC ニ平行ナ

ル EF ガ AB, BC ト E,F ニテ交レバ　△ADE＝△CDF

着眼　平行線ガ出テ面積關係デアッタラ前試練ノ頂點移動ヲスル.



答案　證　△AED＝△AEC　（同底等高）

△CDF＝△ACF　（ 〃 ）

而シテ　AC ヲ底トシテ △AEC, △ACF ノ高サハ AC∥EF ノ距離ナルヲ以テ等シク

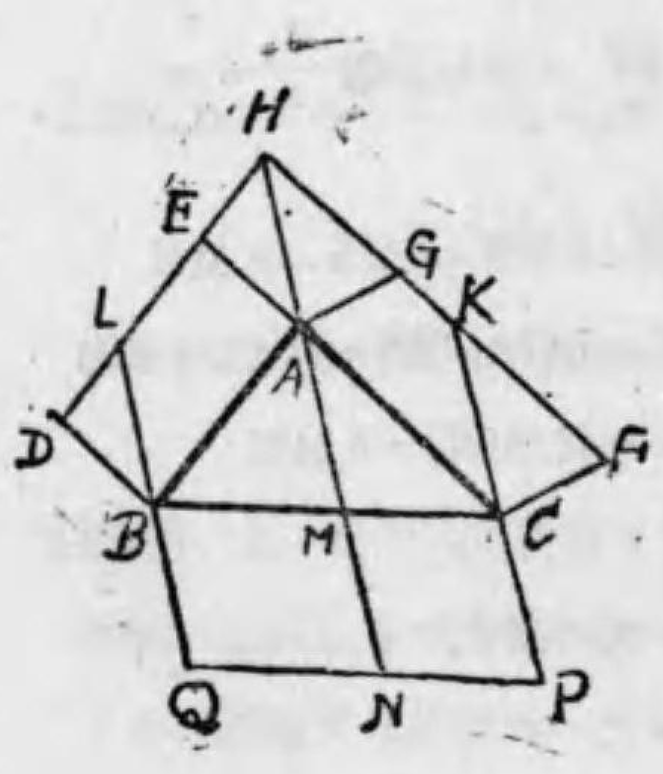
△AEC＝△ACF

∴　△ADE＝△CDF

【試練】 117.　△ABC ノ二邊　AB, AC 上ニ之等ヲ一邊トスル任意ノ平行四邊形 ABDE, ACFG ヲ作リ, DE, FG ヲ延長シテ H ニ交ラシメ, HA ニ平行ニシテ且ツ之レト等シク BQ, CP ヲ引キテ ▱BCPQ ヲ作ルトキハ

▱BP＝▱BE＋▱CG

こなし方　PC, QB ヲ延長シテ FG, DE ト K, L ニ交ラサセル.



▱BE＝▱LA

▱CG＝▱KA

トナル. トコロガ今一度

等底等高ノ▱ヲ考ヘルタメ

HA ヲ延長シテ BC, PQ ト

M, N ニ交ラセル.

MN＝AH　トナルカラ

▱LA＝▱BN, ▱KA＝▱CN

∴　▱LA＋▱KA＝▱BP

∴　▱BE＋▱CG＝▱BP

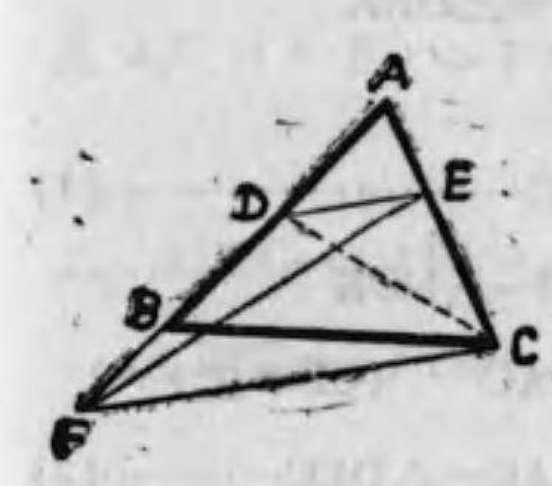
之ヲぱつぷすノ定理トイフ.

【主題】 50.　三角形 ABC ノ C 及ビ AB ノ中點 D ヲ過ギル任意ノ平行線 CF, DE ヲ引キテ邊 AB, AC 或ハ其ノ延長ト交ハル點ヲ F, E トスレバ三角形 AEF ハ三角形 ABC ノ半分ニ等シ.　（14臺商）

着眼　△AEF ガ DE デ二分サレテ居ルコト, ソシテ其ノ一部ガ DE∥CF ノ間ニはさまるト云フコトハ移動ヲひんさしテ居ルシ, 又 CD ナル中線カラ終結ノ半分ヲ持込ム.

答案　證　D ガ AB ノ中點ナル故

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\triangle ABC$



又 △DEF＝△CDE　（底DEトシテ等高）

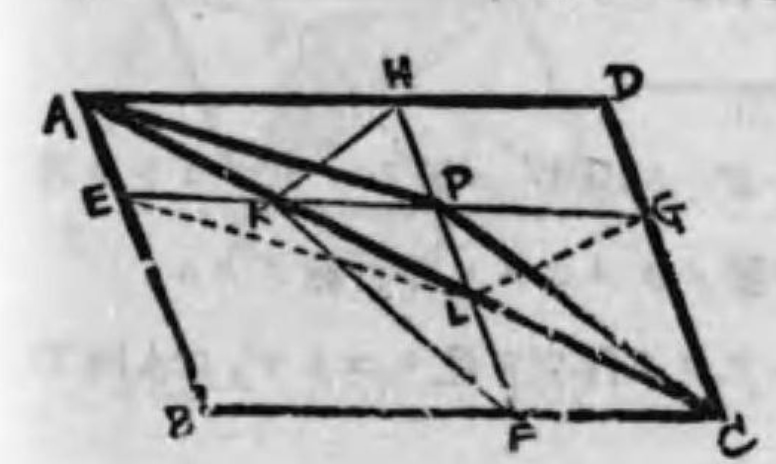
∴　△AEF＝△AED＋△DEF

＝△AED＋△CDE

＝△ADC

∴　$\triangle AEF=\frac{1}{2}\triangle ABC$

【試練】 118.　平行四邊形 ABCD 內ノ一點 P ヲ過ギリ, 隣邊ニ平行線 FH, EG ヲ作リ AB, BC, CD, DA ト E, F, G, H ニ交ラシメ, EG, FH ヲ AC ト K,L ニヲ交ラシメバ　△ELG＝△HKF



こなし方　△ACP ヲ仲媒トスル

△ELG＝△ELP＋△LPG

＝△ALP＋△LPC

＝△ACP

△HKF＝△HKP＋△HPF

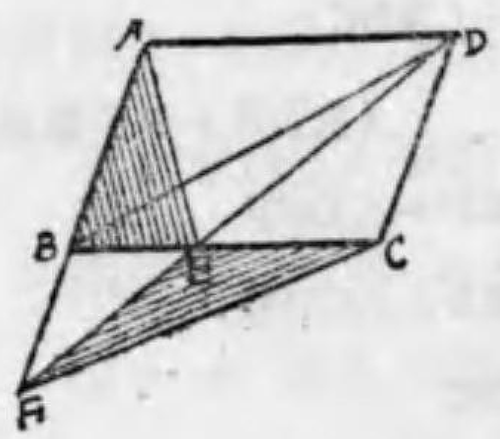
$=\triangle APK+\triangle PKC$

$=\triangle ACP$

【試棟】 119. 平行四邊形 ABCD ノ D 點ヲ通リテ直線ヲ引キ，邊 BC ト E ニ於テ，又 AB ノ延長ト F ニ於テ交ラシムレバ

$\triangle ABE=\triangle CEF$　　（名工・14編工）

こなし方　平行四邊形ニ關スルカラ頂點移動ノ等積移動ヲ試ミル．



$\triangle ABE$（同底等高）$=\triangle DBE$

$=\triangle DBC-\triangle DEC$

$=\frac{1}{2}\,\square AC-\triangle DEC$ ……………………(1)

又　$\triangle FEC=\triangle FCD-\triangle DCE$

$\triangle FCD=\frac{1}{2}\,\square AC$　（CD ヲ底トス）

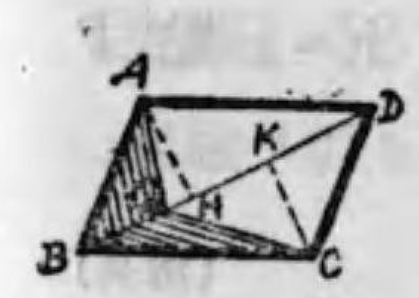
$\therefore\ \triangle FEC=\frac{1}{2}\,\square AC-\triangle DEC$ …………(2)

(1), (2) カラ　$\triangle ABE=\triangle CEF$

【主題】 51. 平行四邊形 ABCD ニ於テ P ヲ $\triangle ABD$ 内ノ一點トセバ

$\triangle BPD=\triangle PCB\sim\triangle PAB$ ナリ．　　（高・14編商）

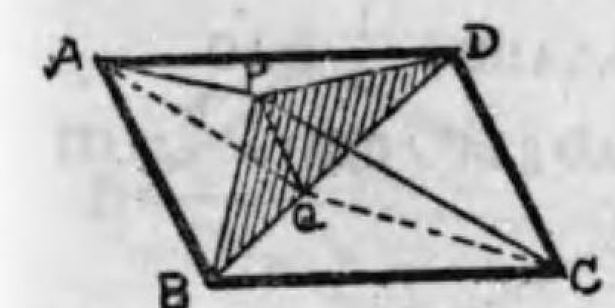
着眼　$\triangle PBC-\triangle ABP$ ヲ作ツテ，之レガ $\triangle BPD$ ニ等シクナルコトヲ考ヘル，□ニ關係ヲツケル補線ハ等積移動ノタメニスル平行線デアル，$\triangle PAB$ ヲうつすニハ $AB\parallel PQ$ ヲサシアタリ作ツテ見レコトデ，□ABCD ノ BD 上ノ一點ヲ Q トスルト



$\triangle ABQ=\triangle CBQ$

デアル．之レハ $AH\perp BD$, $CK\perp BD$ トスルト $AH=CK$ トナル．

答案　❶ $PQ\parallel AB(\parallel CD)$ ナラシメ，Q ニテ BD ト交ラシム．PQ ヲ底トシテ等高ヨリ



$\triangle PQD=\triangle PQC$ ……………………(1)

AB ヲ底トシテ等高ヨリ

$\triangle ABP=\triangle ABQ$ ……………………(2)

又 A,C ヨリ BD ニ下ス垂線ハ相等シキニヨリ BQ ヲ底トシテ

$\triangle ABQ=\triangle BCQ$ ……………………(3)

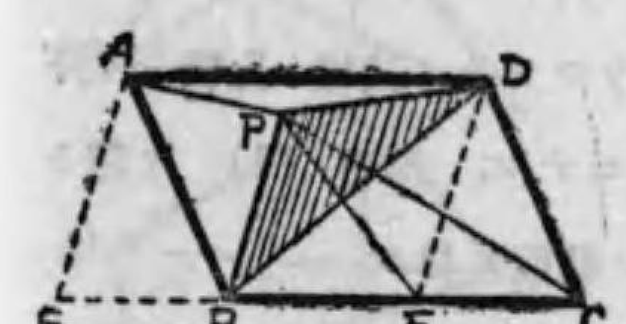
$\therefore\ \triangle PBC-\triangle ABP=\triangle PCB-\triangle BCQ=$ 凹四邊形 BPCQ

$\triangle PBD=\triangle PBQ+\triangle PDQ=\triangle PBQ+\triangle PCQ$

$=$ 凹四邊形 BPCQ

$\therefore\ \triangle PBC-\triangle ABP=\triangle PBD$

研究　或ハ又三ツノ△ヲ見テ，之ヲ BC 上ニ底ヲ持ツ△ニ移動スル考ヘニスルト，$PB\parallel AE\parallel DF$ ヲ作ツテ BC ト E,F ニ交ラセル．



ソウスルト $EF=AD=BC$ カラ

$\triangle PBC=\triangle PEF$　$\triangle ABP$ ハ底ヲ PB ト見テ頂點線 $AE\parallel PB$ デアルカラ

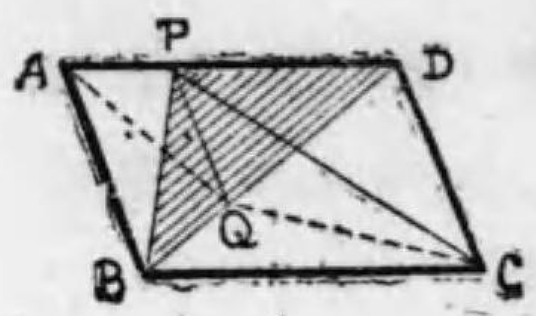
$\triangle ABP=\triangle PBE$

ソシテ P ヲ頂トスル三ツノ　△トシテ

$\triangle PEF-\triangle PEB=\triangle PBF$　之レカラ原形ニ復サセル．

【試練】 120. 平行四邊形 ABCD ノ邊 AD 上ニ一點 P ヲ取リ, PC, PB ヲ引ケバ

$$\triangle PBD = \triangle PBC \sim \triangle PAB \qquad \text{(海兵)}$$



こなし方　主題ノ特別ナ位置デ P ガ AD 上ニ乘ツタ場合デアル.

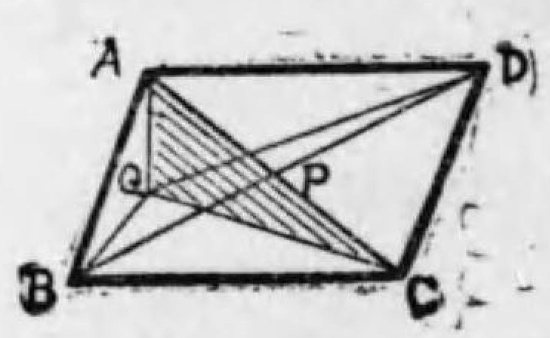
$\triangle PBD + \triangle PAB = \triangle ABD = \frac{1}{2}\,\square AC$

$\triangle PBC = \frac{1}{2} BC \cdot ((AD \parallel BC ノ距離) = \frac{1}{2}\,\square AC$

【試練】 121. 平行四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ P トシ, Q ヲ $\triangle ABP$ 內ノ任意ノ一點トセバ

$$\triangle AQC + \triangle BQD = \triangle CQD - \triangle AQB$$

こしな方　主題ノ圖ノ位置ヲ變ヘタト見ルト



$\triangle QCD = \triangle BQC + \triangle ACQ$

ガ成立スル(主題ノ圖ヲ向キ變ヘテ)

ソコデ本問終結ヲ移項スルト

$\triangle QCD = \triangle AQB + \triangle BQD + \triangle ACQ$

トナルカラ　$\triangle AQB + \triangle BQD = \triangle BCQ$…………………(1)

ヲ證シタラヨクナル. ソコデ再ビ主題ノ P ノ代リニ Q トスルト (1) ハ立派ニ成立シテ居ル. ソレデ主題ヲよくがんみシテ此ノ試練ト比較シテ下サイ. 試驗ニ出タトシタラ主題ヲ證スルコトニナル. 即チ (1) ヲ證シ(主題ト同樣) デ次ニ此ノ位置ヲカヘテ本問ノ前段ニ移ル

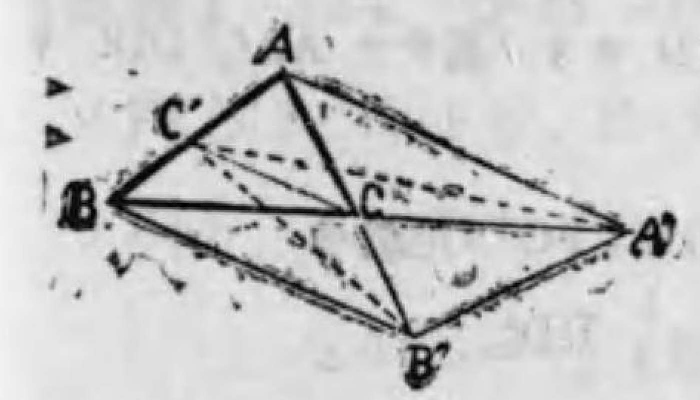
> エキス　平行線ト面積トガ一緒ニナルトキハ上ノ諸問ノ解法要領ノ樣ニ平行距離ヲ高サニスル樣ナ△二ツヲ捕ヘル.

【主題】 52. △ABC ノ頂點 A, B, C ヨリ互ニ行平スル直線ヲ引キ, 對邊ト夫々 A′,B′,C′ ニ交ラシメバ

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\triangle A'B'C'$$

着眼　平行線ガ二ツ以上アルカラ面積ノ移動ガ出來ル.

答案　$\triangle ACC'$, $\triangle A'CC'$ ヲ底 CC′ トシテ



$AA' \parallel CC'$ ナル故

$\triangle ACC' = \triangle A'CC'$

同樣ニシテ

$\triangle BCC' = \triangle B'CC'$

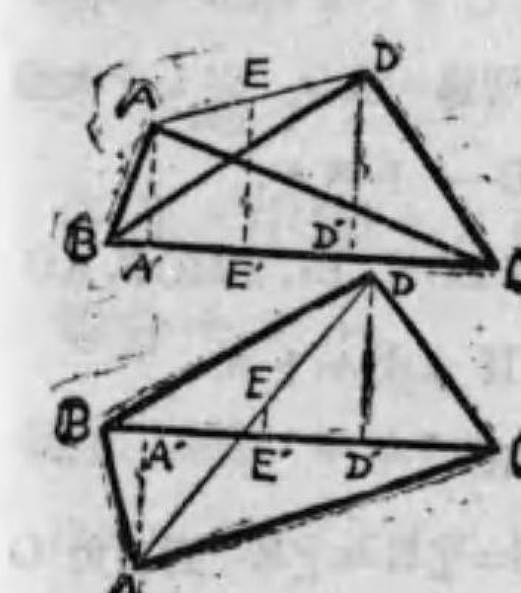
$\therefore$ $\triangle ABC =$ 凹四邊形 $A'C'B'C$

又 $\triangle ABB' = \triangle A'BB'$ 之レヨリ $\triangle ABC = \triangle A'B'C$

$\therefore$ $\triangle A'B'C' =$ 凹四邊形 $A'C'B'C + \triangle A'B'C = 2\triangle ABC$

$\therefore$ $\triangle ABC = \frac{1}{2}\triangle A'B'C'$

【試練】 122. 三角 ABC, DBC ノ頂點線 AD ノ中點ヲ E トセバ　$\triangle CBE = \frac{1}{2}(\triangle DBC \pm \triangle ABD)$



こなし方　A, D, E ヨリ底 BC ヘノ垂線ヲ AA′, DD′, EE′ トスルト

$\triangle DBC \pm \triangle ABC$

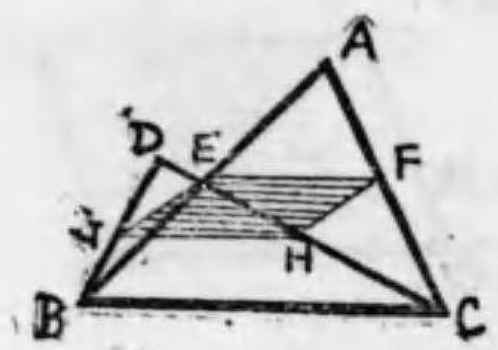
$= \frac{1}{2} BC \cdot DD' \pm \frac{1}{2} BC \cdot AA'$

$= \frac{1}{2} BC(DD' \pm AA')$

圖ノ位置ニヨツテ±ヲ適當ニ用フ.

ソシテ $DD' \pm AA'$ ハ 24 ノ エキス カラ 2EE′ デアルカラ題意ノ如クナル.

【試練】 123. 同底同側ニ立ツ △ABC, △DBC ノ AB, AC, DB, DC ノ中點ヲ E, F, G, H トセバ EFHG ハ平行四邊形ニシテ, 其ノ面積ハ二ツノ三角形ノ差ノ半ニ等シ.



こなし方 $EF \underline{\perp} \frac{1}{2}BC \underline{\perp} GH$

$\therefore$ EFHG ハ ▱

二ツ△ノ A, D ヨリノ高サヲ AA′, DD′ トスレバ

EF ∥ BC, GH ∥ BC ノ距離ハ

$\frac{1}{2}AA'$, $\frac{1}{2}DD'$

$$\therefore \ \square EFHG=\frac{1}{2}BC\left(\frac{1}{2}AA'-\frac{1}{2}DD'\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}BC\cdot AA'-\frac{1}{2}BC\cdot DD'\right\}$$

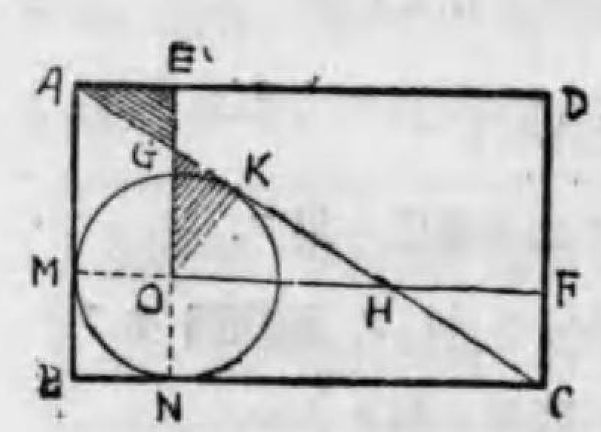
$$=\frac{1}{2}\left\{\triangle ABC-\triangle DBC\right\}$$

【主題】 53. 矩形 ABCD アリ. △ABC ノ内切圓ガ AC ト K ニ切スルトキ 矩形 ABCD=2AK.CK ナリ.

(9早稻田・11神船)

着眼 切線ガ出來テヰルコトカラ CK, AK ヲ他ノ切線ニ移シ, ソシテ次圖ニヨッテ MO=NO ニ目ヲツケテ AK=AM=AB−r トスル.

答案 **特設** 内切圓ノ半徑 r, 中心ヲ O トシ, AB ∥ EON, BC ∥ MOF, AC ハ OE, OF ト G, H ニ交ルトス



● △AGE ≡ △OGK

$\because$ AE=r=OK, ∠E=∠R=∠K 對頂角 G

同樣ニ △CHF ≡ △OKH

$\therefore$ △ACD= 矩形 EOFD……………(1)

O 圓外ノ點 A, C トシテ AK=AM, CK=CN

$\therefore$ AK・CK=AM・CN=EO・OF= 矩形 EOFD

=△ACD

$\therefore$ 矩形 AC=2AK・CK

【試練】 124. 矩形 ABCD ノ對角線 AC ヲ作リ, △ABC ノ内心ヲ P トシ, P ヲ過ギリテ各邊ニ平行線 EF, GH ヲ引キ, AB, BC, CD, DA ト G, F, H, E ニ交ラシメバ

$$\triangle APC=\frac{1}{2}(\text{矩形 }AP+\text{矩形 }CP)$$

こなし方 前圖ノ △AOC=△AOK+△KOC トシテ

△AOK=$\frac{1}{2}$ 矩形 AO トスルモノデアル.

3. 面 積 ノ 分 割

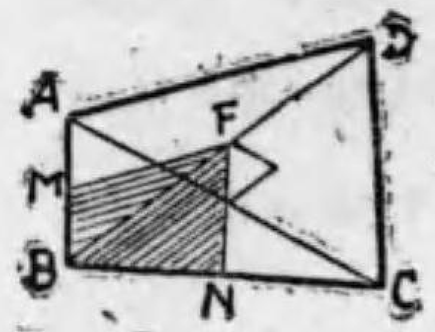
【主題】 54. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ夫々 E, F トシ, E ヲ過ギリ BD ニ平行ナル直線ト, F ヲ過ギリ AC ニ平行ナル直線ト O ニ交ラシム. O ト各邊ノ中點トヲ結ブトキハ此ノ四直線ニヨリ原形ハ四等分セラル.

(陸士)

着眼 四邊ノ中點ヲ考ヘテ見ルト平行關係ガ澤山アルカラ例ノ平行移動ハ出來ルニ違ヒナイガ, 扨四邊形ノ四分ノ一ヲ考ヘテ見ルコトガ急務デアル. △ABD ト △BCD トニ二分シテ見ル.

M, N ヲ AB, BC ノ中點トスルト

F ヲ持込ンデ試錬 109 ニ歸シテ



$\triangle BMF=\frac{1}{4}\triangle ABD$

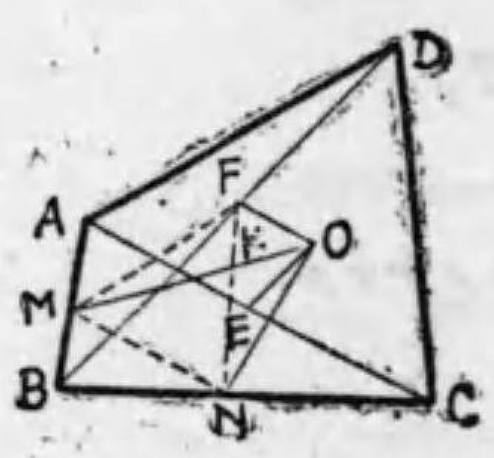
$\triangle BNF=\frac{1}{4}\triangle BCD$

$\therefore\ \triangle BMF+\triangle BNF=\frac{1}{4}(\triangle ABD+\triangle BCD)$

$\therefore$ 四邊形 $MBNF=\frac{1}{4}$ 四邊形 ABCD

トナルコトヲ考へ出シタラ，モウ易問化スル.

答案 ◯ AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々 M, N, P, Q トス.



I. $\triangle BMF=\frac{1}{2}MF\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AD\frac{1}{2}2h$

〔$2h$ ハ $\triangle ABD$ ノ B ヨリノ高サトス.〕

$\therefore\ \triangle BMF=\frac{1}{4}\triangle ABD$ ……………………(1)

同様ニシテ $\triangle BNF=\frac{1}{4}\triangle BCD$…………(2)

(1)+(2) ヨリ

四邊形 $MBNF=\frac{1}{4}$ 四邊形 ABCD………(3)

II. $\triangle ABC$ ニ於テ $MN \parallel AC \parallel OF$

$\therefore\ \triangle OMN,\ \triangle MNF$ ハ底 MN トセバ等高

$\therefore\ \triangle OMN=\triangle MNF$

之ニ $\triangle BMN$ ヲ加ヘ

四邊形 MBNO= 四邊形 MBNF

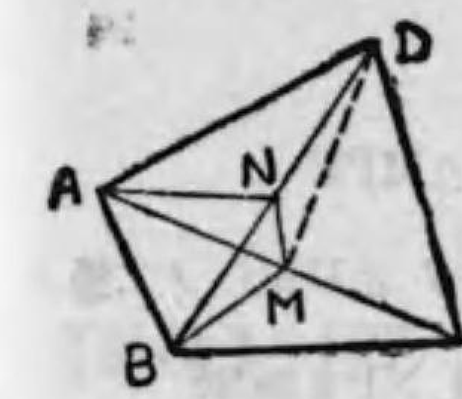
$\therefore$ 四邊形 $MBNO=\frac{1}{4}$ 四邊形 ABCD

同様ニシテ四邊形 NCPO, PDQO, QAMO モ亦 $\frac{1}{4}$ 原形トナル.

【試錬】 125. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ M, N トセバ 四邊形 ABMN, ADMN, CMND, NBCM

ノ何レカ三ツハ原形ノ四分ノ一ナリ.

こなし方 MD ヲ結ブト M ガ AC ノ中點トイフコトデ



$\triangle ABM=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$\triangle AMD=\frac{1}{2}\triangle ACD$

$\therefore\ \triangle ABM+\triangle AMD=\frac{1}{2}$ 四邊形 ABCD

$\therefore$ 四邊形 $ABMD=\frac{1}{2}$ 原形

此ノ理ヲ再ビ 四邊形 ABMD ニ適用スルト，BD ノ中點ヲ N トシテ，

$\triangle ABN=\frac{1}{2}\triangle ABD,\quad \triangle BMN=\frac{1}{2}\triangle BMD$

$\therefore\ \triangle ABN+\triangle BMN=\frac{1}{2}$ 四邊形 ABMD

$\therefore$ 四邊形 $ABMN=\frac{1}{4}$ 原形 ……………………………………(1)

同時ニ $\triangle AND+\triangle DMN=\frac{1}{2}$ 四邊形 ABMD

$\therefore$ 凹四邊形 $ADMN=\frac{1}{4}$ 原形……………………………………(2)

凹四邊形 $BCNM=\triangle BCM+\triangle CMN$

$=\triangle ABM+\triangle AMN=$ 凸四邊形 ABMN $=\frac{1}{4}$ 原形

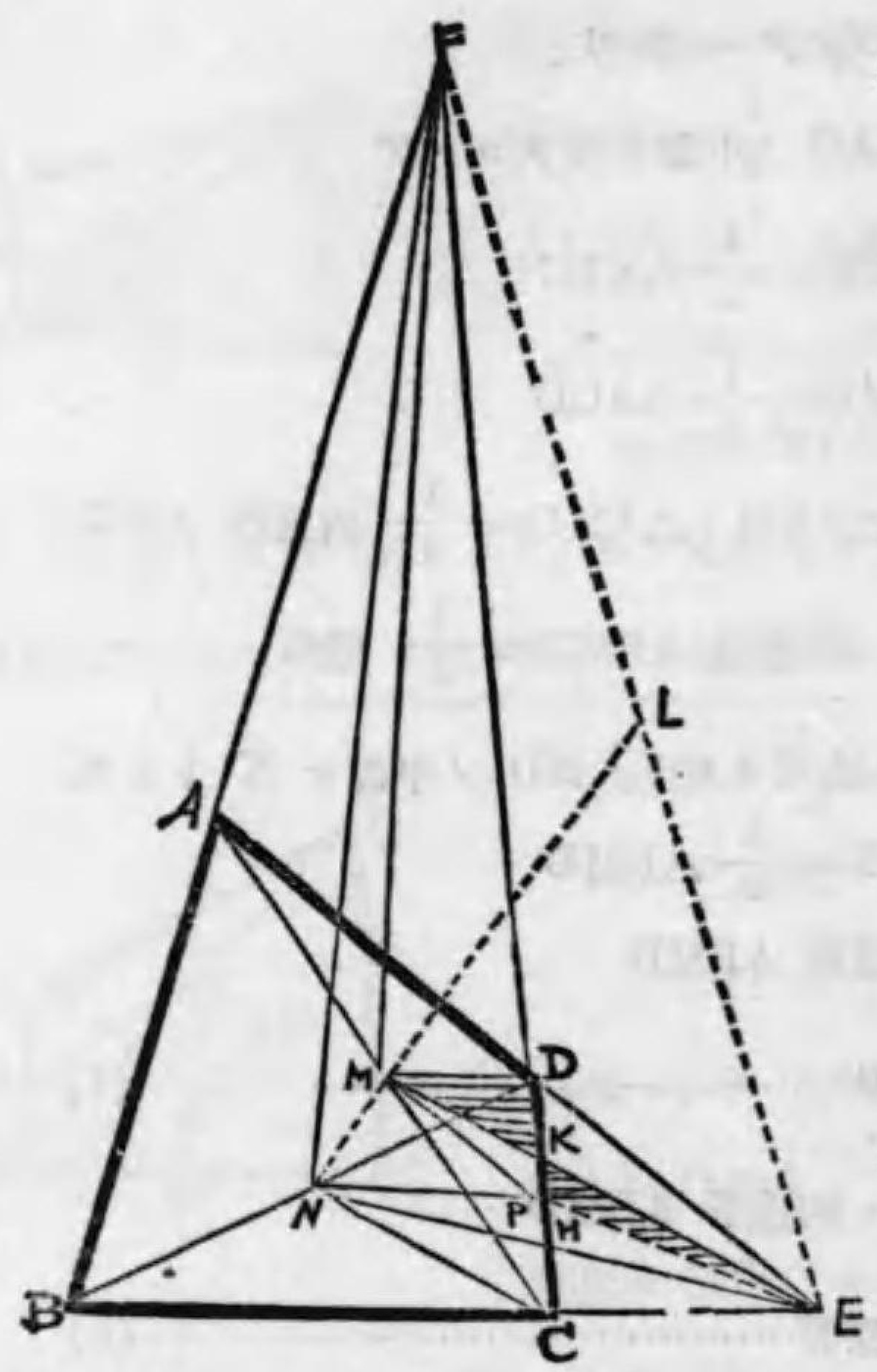
又四邊形 $CDNM>\triangle CDM=\frac{1}{2}\triangle ACD>\frac{1}{4}$ 原形

($\because$ N ガ $\triangle ACD$ 内ニアル故)

【試錬】 126. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ中點ヲ M, N トシ; BC, AD ノ交點ヲ E; BA, CD ノ交點ヲ F トスレバ

$$\triangle MNE=\triangle MNF=\frac{1}{4}\text{ 四邊形 }ABCD$$

こなし方 CD ノ中點ヲ P トスル. $MP \parallel AD$



$\therefore$ $\triangle MPD$, $\triangle MPE$ ヲ底邊 MP トスルト頂 D, E ハ底ノ平行線上ニアルカラ

$\triangle MPD=\triangle MPE$

又 N, P ガ $\triangle DBC$ ノ二邊ノ中點ナル故 $NP \parallel BCE$

$\therefore$ 底ヲ PN トシテ

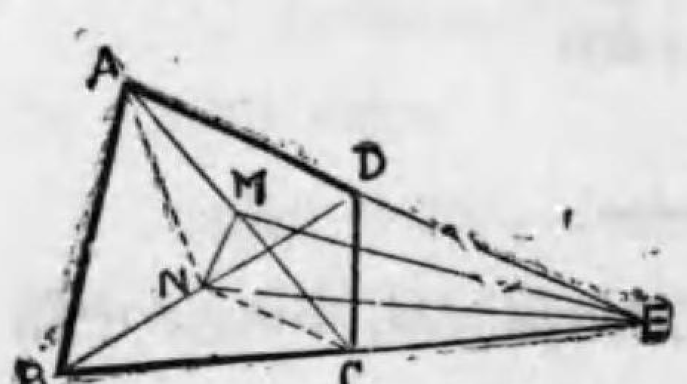
$\triangle NCP=\triangle PNE$

$\therefore$ $\triangle MNE$

$=$ 四邊形 MNCD

之レガ原形ノ四分ノ一ナルコトハ前試錬カラ知ラレル.

研究　又前問ヲ用ヒズニ本問ヲ解クナラバ



$\triangle AND=\frac{1}{2}\triangle ABD$(△ABDノ中線カラ)

$\triangle NED=\frac{1}{2}\triangle BED$(△BEDノ中線カラ)

$\therefore \triangle ANE=\frac{1}{2}\triangle ABE$……………(1)

$\triangle ANM=\frac{1}{2}\triangle ACN$(△ACNノ中線カラ)……………(2)

$\triangle AME=\frac{1}{2}\triangle ACE$(△ACE ノ中線カラ)……………(3)

(1), (2), (3) ヨリ　$\triangle MNE=\frac{1}{2}\left\{\triangle ABE-\triangle ANC-\triangle ACE\right\}$

$=\frac{1}{2}$ 凹四邊形 ABCN

$=\frac{1}{2}\left\{\triangle ABN+\triangle BCN\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\triangle ABD+\frac{1}{2}\triangle BCD\right\}$

$=\frac{1}{4}$ 原形

【試錬】 127. 前問ニ於テ MN ハ EF ノ中點ヲ過ギル.

こなし方　$\triangle MNE=\triangle MNF=\frac{1}{4}$ 原形　　$\therefore$ EF ハ試錬 109 デ MN ニ二等分セラレル.

[illegible]　一般四邊形ノ四等分ハ對角線ノ中點ヲ利用スルコトヲ味ツテ見ル.

【主題】 55. 三角形ノ重心ヲ過ギル直線ハ常ニソノ三角形ノ面積ヲ二等分ズルカ.　(14詳大豫)

「恒ニ」ノ語ハ「如何ナル場合モ」ト云フコトニシテ或特殊ノトキニ成立セザルコトヲ述ベタラバ「恒ニハ」破ルコトヲ得, G ナル重心ヲ過リ一邊 AC ニ平行線 XY ヲ作リ相似形ヲ作ツテ面積ノ比ハ對應邊ノ自乘比ニ等シヲ用フルトキ $\overline{AB}^2:\overline{PB}^2=3^2:2^2=9:4$ ナレバ不成立ハ明ナリ. 併シ獨立シテ證スルモ妙味アルコトナレバ以下之ヲ述ブ

$\triangle ABC$ ノ重心ヲ通ル任意直線ガ二邊ヲ切ルモノヲ PQ トス, i. P ガ $\frac{1}{3}$ AB 上ニアルトキ PQ ハ $\triangle ABC$ ノ面積ヲ二等分セズ.

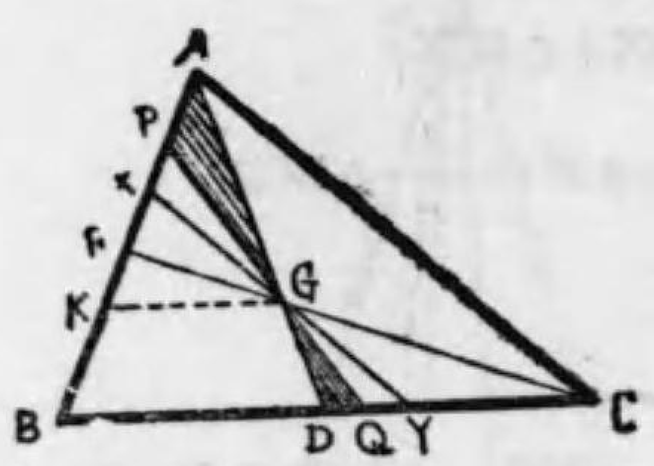
理由 $GK \parallel BC$ トス. $\triangle PBQ$ ニ於テ　$PG:GQ=PK:KB$

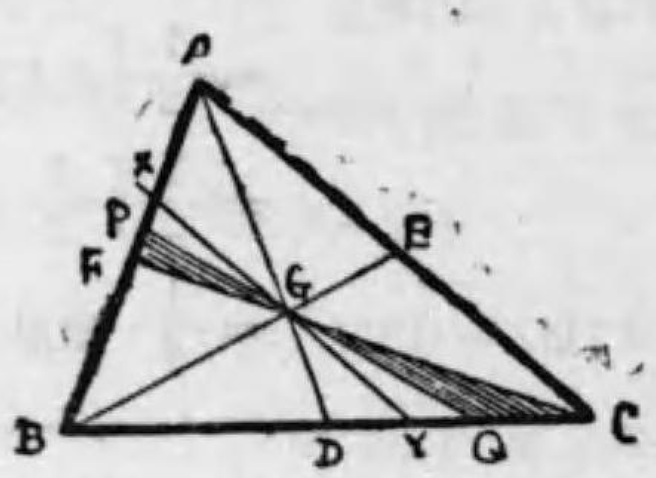
而シテ $BK=\frac{1}{3}AB$ 〔$AG:GD=2:1=AK:KB$〕 $XY \parallel AC$ トセバ

$BK=KX=XA$　今 P ハ XA 上ニアルヲ以テ $PK>KB$

$\therefore$ $PG>GQ$…………(1)

$\triangle APG$, $\triangle DQG$ ハ $\angle PGA = \angle DGQ$ ナルヲ以テ





$\frac{\triangle APG}{\triangle DQG} = \frac{AG}{GD} \cdot \frac{PG}{GQ}$…………(2), 而シテ右邊ノ二ツノ比ハ 1 ヨリ大ナリ. $\therefore \triangle APG > \triangle DQG$ 扨 $\triangle ABD = \frac{1}{2} \triangle ABC$

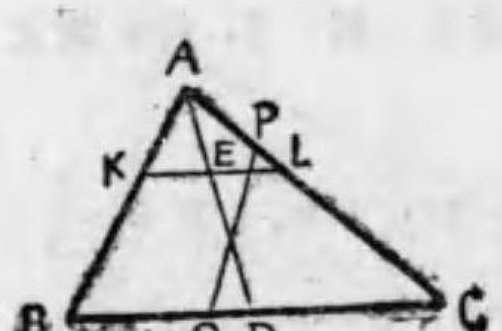
$\therefore$ $\triangle PBQ \neq \triangle ABD$ $\therefore$ PQ ハ $\triangle ABC$ ヲ二等分セズ.

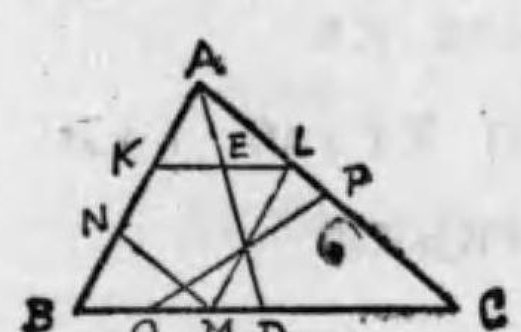
P ガ X ニ重ルトキモ (2) ハ右邊 1 ヨリ大ナレバ同様ナリ.

ii. P ガ AB ノ中點 F ニアルトキハ PQ ハ中線トナルヲ以テ二等分ス.

iii. P ガ XK 上 (Fヲ除ク) ニアルトキハ Q ハ YC 即チ $\frac{1}{3}$ BC 上ニアリ. (i) ト同様ニシテ $\triangle GCQ > \triangle GPF$ トナリテ PQ ハ $\triangle ABC$ ヲ二等分セズ. iv. P ガ KB 上ニアルトキハ Q ハ AC 上ニアリテ前證ト同様ヲ繰返シテ $\triangle ABC$ ハ PQ ニテ二等分セラレズ.

總括. 中線以外ハ二等分セズ. 或ハ又次ノ如ク證スルヲ得





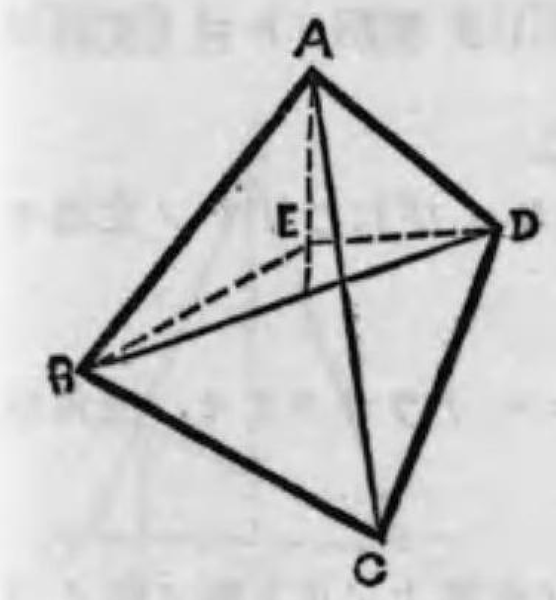
AD ノ $\frac{1}{3}$ ヲ AE トシ, KEL $\parallel$ BC トシテ PQ ガ KL ト交點ヲ有スルトキ, 又ハ P ガ K, L ニ合致スルトキ, $\triangle APG \neq \triangle DQG$ ハ明ニシテ, 今 MN $\parallel$ AC, M ハ BC ノ $\frac{1}{3}$ ノ分點ナルトキ P ガ L ニ乘ルトキハ Q ハ M ニ乘ル. 〔$\because$ ML $\parallel$ AB, DM : MB = 1 : 2 $\therefore$ DG : GA = 1 : 2 LGM ハ一直線ヲ成ス〕

P ガ LC 上ニアルトキハ Q ハ MB 上ニアリテ

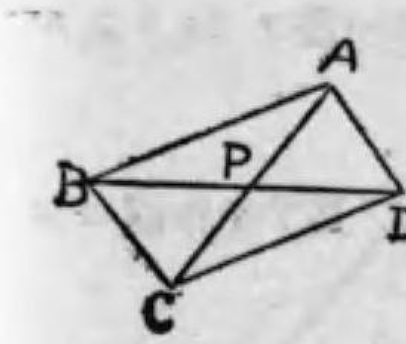
恰モ P ガ AL 上ニ於ケルトキ Q ガ MC 上ニアリシトキト同ジナル故 $\triangle APG \neq \triangle DQG$ ハ常ニ成立ツ. 故ニ中線以外ハ原形ヲ二等分セズ.

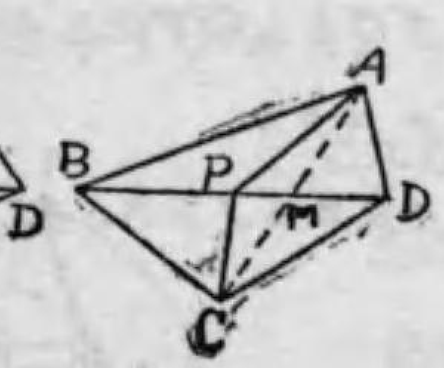
【主題】 56. 任意ノ四邊形 ABCD 内ノ一點 E ヲ此ノ四邊形ノ頂點 A, B, C, D ニ結ビツケルトキ生ズル四ツノ三角形ガスベテ等積トナル様ニ點 E ヲ定メ得ルカ. (高)

答案 AB, AD ヲ一邊トシ, 一邊ヲ共通シ $\triangle ABE = \triangle ADE$ ナルヲ以テ AE ハ頂點線 BD ヲ二等分ス.



$\triangle ABE = \triangle ACE$ ナルニハ E ハ $\triangle ABD$ ノ A ヨリノ中線上ニアラザルベカラズ. (試練109) 而シテ又 $\triangle BEC = \triangle CED$ ナルヲ以テ (i) E ハ $\triangle BCD$ ノ C ヨリノ中線上ニアラザルベカラズ. 此ノ兩中線ノ上ニ同時ニ在ルニハ E ハ BD ノ中點ナルベシ. (ii) 偶然ニモ此ノ兩中線ガ一致シテ AC トナルトキ即チ一對角線 AC ガ原形ヲ二等分スルトキニハソノ上ノ點ハ總テ要件ニ適ス. $\triangle ABE = \triangle BEC$, $\triangle AED = \triangle DEC$ ナルタメニハ (i) ニ對シテハ E ハ AC ノ中點ニアルベク, 即チ兩對角線ノ中點ガ一致シタルトキノミ所要ノ四等分ヲナスヲ得. (ii) ノトキハ AC ノ中點ガ成立セシム. 故ニ平行四邊形屬, 又ハ一對角線ガ原形ヲ二等分スルモノノミナリ.





批評 當年ノ八問中ノ最大難問デアツタラシイ, 解キ得タ者ハ極メテ少數デアル. 要件ノ點 P ヲ定メ得ナイコトハ又軌跡ヲ用ヒテモ出來ルガ, 之ハ甚ダ少數デアツタ. 本問ノ各種ノ場合トシテ正方形, 菱形, 矩形ヲ上ゲ,

更ニ平行四邊形ヲ上ゲテ前者ハ平行四邊形デアルコトヲ念頭ニオカナカツタラシイモノガ多カツタノハ注意スベキコトデアル．（水高相馬敎授）

4. 正方形ノ和差問題

〔指導〕 正方形ニハ云フマデナクぴたごらすノ定理ハ主デアルガ，之ヲ應用シタ次ノ四要領デ考ヘルコトガ大切デアル．

要領 i. 同一直線上ノ線分上ノ正方形ニハ試練 119 ヲ用フルコトガ大切デス．

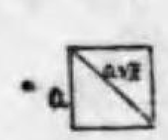
ii. 二ツノ正方形ガ直角三角形ノ邊上ニアルトキハ ぴたごらす ノ定理ヲ用フルガヨイ．

iii. 二ツノ正方形ヲ形ヅクル邊ガ直角三角形ニハ ナラナクテモ，三角形ノ二邊トナルトキハ

「△ノ二邊上ノ正方形ノ和ハ第三邊半ト之レヘノ中線上ノ正方形ノ和ノ 2 倍」ヲ用フルノデス．

iv. 45°, 二等邊直角三角形ニハ $\sqrt{2}$ ガつきものデアル 正方形ノ一邊ヲ a トスルト $a^2+a^2=(\text{對角線})^2$, ∴ 對角線 $=\sqrt{2}\,a$

又 30°, 60°, 正三角形ニハ $\sqrt{3}$ ガつきものデ正△ノ一邊ヲ $2a$ トスルト高サハ $\sqrt{3}\,a$ ニナル．

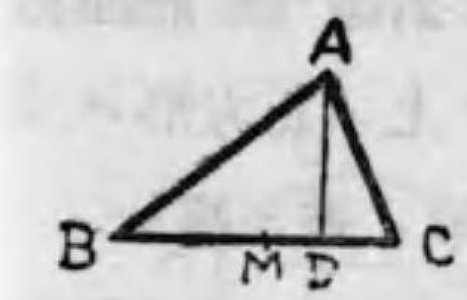



「a ハ長サノ單位ヲ表スモノトス．次ノ長サヲ作圖ニヨリテ求メヨ」

イ) $a\sqrt{2}$　　ロ) $a\sqrt{3}$　　ハ) $a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　(14秋饋)

【試練】 128. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點ヲ M, A ヨリ BC ヘノ垂線ノ足ヲ D トセバ

AB＞AC トシテ $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BC.DM$

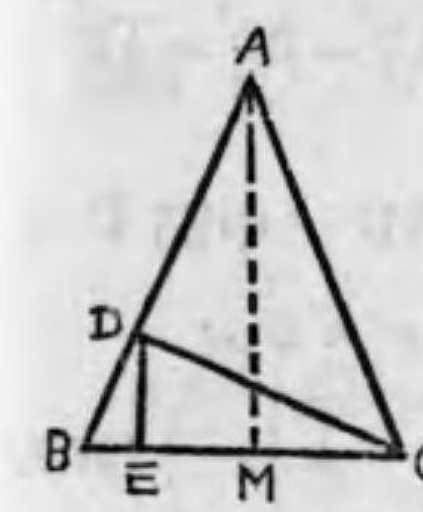


こなし方 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$ （試練）

$=(BD+CD)(BD-CD)$

$=BC\cdot 2DM=2BC\cdot DM$

【試練】 129. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC, 或ハ其ノ延長上ノ一點ヲ E トセバ $\overline{AB}^2-\overline{AE}^2=BE.CE$ （山商）



こなし方 $\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$

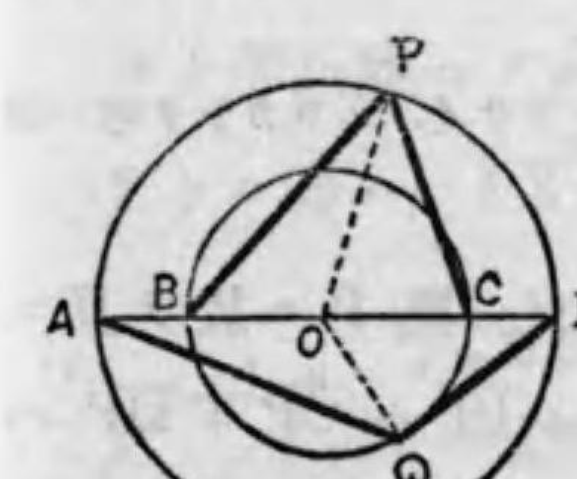
$\overline{AE}^2=\overline{AM}^2+\overline{ME}^2$

$\therefore\ \overline{AB}^2-\overline{AE}^2=\overline{BM}^2-\overline{ME}^2$

$=(BM+ME)(BM-ME)$

$=BE.CE$

【試練】 130. 同心圓ノ直徑ガ二圓ト A, B, C, D ノ順ニ周ト交ルトキ，外圓周ノ點ヲ P, 小圓周上ノ點ヲ Q トセバ　$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{AQ}^2+\overline{DQ}^2$



こなし方 中心ヲ O トシテ中線ヲ作ルト

△PBC ヨリ

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PO}^2+\overline{BO}^2)$

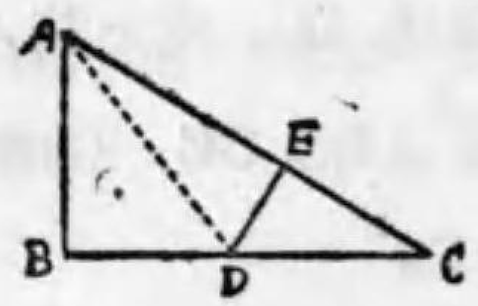
△AQD ヨリ

$\overline{AQ}^2+\overline{DQ}^2=2(\overline{QO}^2+\overline{AO}^2)$

トコロガ PO=OA, OB=OQ (半徑)

【試練】 131. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ヲ BA, BC トシ其ノ一（例ヘバBC）ノ中點 D ヨリ斜邊ヘ至ル垂線ヲ DE トスルトキ他邊（例ヘバBA）ノ上ノ正方形ハ E ニヨリテ分タルル斜邊ノ分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ.

(14大阪商)

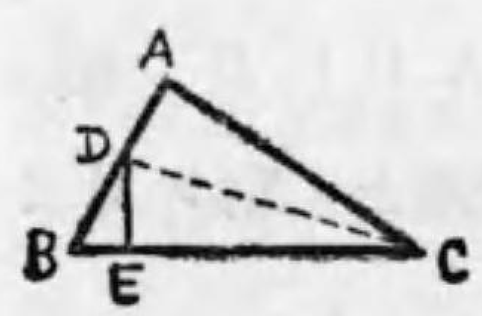


なこし方

$$\overline{AE}^2-\overline{EC}^2=(\overline{AD}^2-\overline{DE}^2)-(\overline{CD}^2-\overline{DE}^2)$$
$$=\overline{AD}^2-\overline{CD}^2=\overline{AD}^2-\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$$

【試練】 132. 直角三角形 ABC ノ底邊 AB ノ中點 D ヨリ斜邊 BC ヘ垂線ヲ下シ, 其ノ足ヲ E トスレバ

$$\overline{AC}^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2$$ (神商)



こなし方 ぴたごらす定理ニ頼ルト

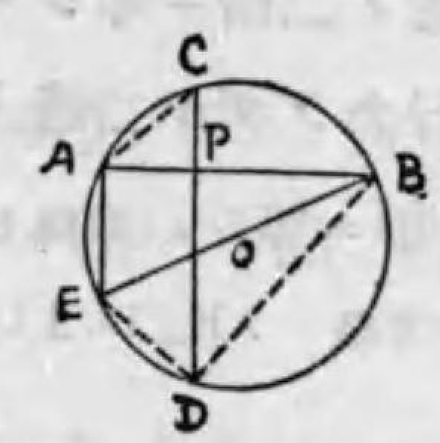
$$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2-\overline{AD}^2=\overline{CD}^2-\overline{BD}^2$$
$$\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{EC}^2,\quad \overline{BD}^2=\overline{DE}^2+\overline{BE}^2$$
$$\therefore \overline{AC}^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2$$

要領 上ノ要領デ次ノ主題及ビ試練チこなしテ下サイ. ムツカシク考ヘ過ギナイデ.

【主題】 55. 圓 O ノ二弦 AB, CD ガ一點 P ニ於テ互ニ直交スル二ツノ弦ナルトキハ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2$ ハ直徑上ノ正方形ニ等シ (14海經・神船)

着眼 正方形計リノ整理デアルカラ勿論ぴたごらす君ノ援助ニ待ツベキデハアルガ, 四ツアルカラ適當ニ二ツ宛ニシテ斜邊チ考ヘルコトニスル.

答案 AE∥CD ナル弦チ作レバ

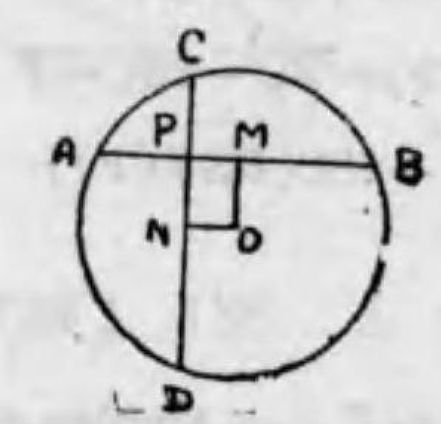


$\angle P=\angle R \quad \therefore \quad \angle BAE=\angle R$

∴ BE ハ直徑トナル.

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AC}^2=\overline{DE}^2$$
$$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=\overline{BD}^2$$
$$\therefore \overline{DE}^2+\overline{BD}^2=\overline{BE}^2$$ (15廣師)

研究 或ハ OM⊥AB, ON⊥CD トスル.



$$\overline{AP}^2=(BM-MP)^2,\quad \overline{BP}^2=(BM+MP)^2$$
$$\overline{CP}^2=(DN-PN)^2,\quad \overline{DP}^2=(DN+PN)^2$$

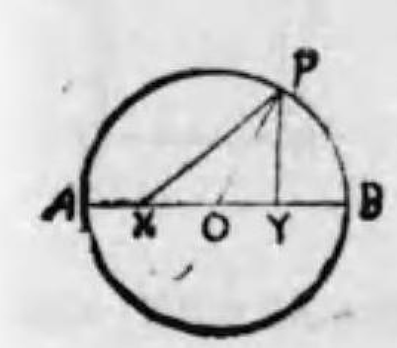
∴ 上ノ四式ノ邊々ノ和カラ

$$左邊和=2(\overline{BM}^2+\overline{MP}^2+\overline{DN}^2+\overline{PN}^2)$$
$$=2\{(\overline{BM}^2+\overline{OM}^2)+(\overline{DN}^2+\overline{ON}^2)\}$$
$$=2(\overline{OB}^2+\overline{OD}^2)=4\overline{OB}^2=(直徑)^2$$

【試練】 133. 圓ノ直徑ヲ AB トス. 此ノ直徑上ニ中心ヨリ等距離ニアル X, Y ヲトル, 又圓周上ニ任意ノ點 P ヲトル時ハ, $\overline{PX}^2+\overline{PY}^2=\overline{AX}^2+\overline{AY}^2=\overline{BX}^2+\overline{BY}^2$ ナリ.

(14京工)

こなし方 $\overline{AO}^2=4\overline{OB}^2$

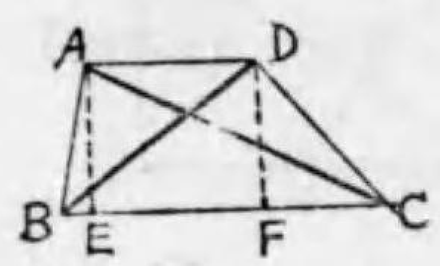


$$\overline{AX}^2+\overline{AY}^2=\overline{BY}^2+\overline{AY}^2$$
$$=\overline{AB}^2-2AY\cdot BY=\overline{AB}^2-2(\overline{OB}^2-\overline{OY}^2)$$
$$=2\overline{OB}^2+2\overline{OY}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OY}^2)$$

$$=\overline{PX}^2+\overline{PY}^2$$

【試練】 134. 梯形ノ一ツノ底ガ他ノ底ノ二倍ニ等シキトキ兩對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ平行ナラザル二邊上ノ正方形ト大ナル底ノ上ノ正方形トノ和ニ等シ. (13陸士)

こなし方 △ABC, △BCD ニ於テ一邊上ノ正方形ニ着眼 AE⊥BC⊥DF トスル



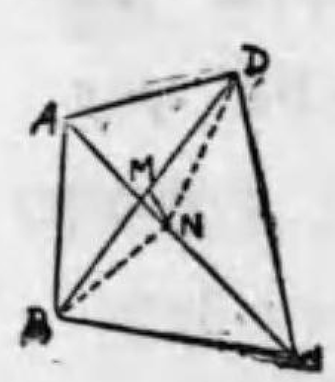
$$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2=BC(CE-BE)$$
$$=BC(BC-2BE)=\overline{BC}^2-2BC\cdot BE$$
$$\overline{BD}^2-\overline{CD}^2=\overline{BF}^2-\overline{CF}^2=BC(BF-CF)$$
$$=BC(BC-2CF)=\overline{BC}^2-2BC\cdot CF$$

邊々加ヘテ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\{\overline{BC}^2-2BC(BE+CF)\}$

之ニ $BE+CF=\frac{1}{2}BC$ ヲ持込ム

【主題】 56. 四邊形ノ各邊上ノ正方形ノ和ハ其ノ兩對角線上ノ正方形ノ和ヨリ兩對角線ノ中點ヲ結ブ線分上ノ正方形ノ4倍丈大ナリ. (13京醫)

着眼 此ノ種類ハ指導ノ第三項ヲ考ヘ込ムノデアル.



答案 △ABC ヨリ $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{BN}^2+\overline{AN}^2)$

△ACD ヨリ $\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2(\overline{DN}^2+\overline{AN}^2)$

尙ホ △BND ニヨリ

$$2(\overline{BN}^2+\overline{ND}^2)=4(\overline{MN}^2+\overline{BM}^2)$$

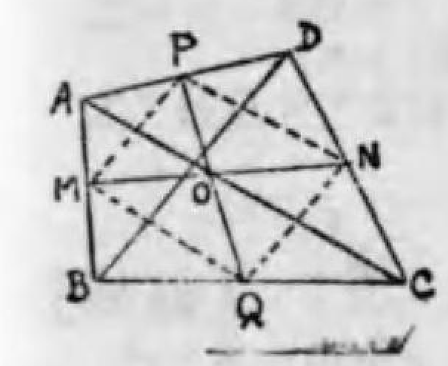
而シテ $4\overline{BM}^2=\overline{BD}^2,\quad 4\overline{AN}^2=\overline{AC}^2$

$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2$

$$=4(\overline{MN}^2+\overline{BM}^2+\overline{AN}^2)$$
$$=4\overline{MN}^2+4\overline{BM}^2+4\overline{AN}^2=4\overline{MN}^2+\overline{BD}^2+\overline{AC}^2$$

【試練】 135. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ平方ノ和ハ相對スル邊ノ中點ヲ結ブ二ツノ線分ノ平方ノ和ノ二倍ニ等シ. (13水產)

こなし方 對邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ ▱MQNP ノ對角線ナルコト,

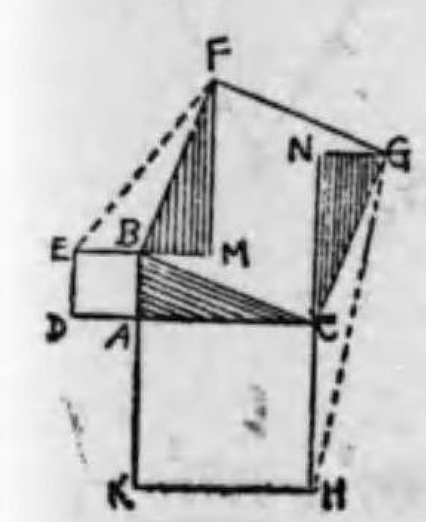


$4\overline{MP}^2=\overline{BD}^2,\ 4\overline{MQ}^2=\overline{AC}^2$ ヲ考ヘル.

$$\overline{BD}^2+\overline{AC}^2=4(\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2)$$
$$=4\{2(\overline{MO}^2+\overline{PO}^2)\}$$
$$=2\{4\overline{MO}^2+4\overline{PO}^2\}=2(\overline{MN}^2+\overline{PQ}^2)$$

【試練】 136. A ヲ直角トスル直角三角形 ABC ノ各邊上ニ外側ヘ正方形 BADE, CBFG, ACHK ヲ作リ, EF, GH ヲ結ベバ $\overline{EF}^2+\overline{GH}^2=5\overline{BC}^2$ (13旅工)

こなし方 △BEF, △CGH ハ ∠B, ∠C ガ鈍角デアルコトニ着眼シテ



EBM⊥FM, HCN⊥GN トスルト

△ABC≡△BFM≡△CGN

マデ假設ヲ展開シ, $5\overline{BC}^2$ ニハたいした變形法ヲ考ヘナイデ, 左邊ヲ變形スル.

$$S=\overline{EF}^2+\overline{GH}^2=(\overline{EB}^2+\overline{BF}^2+2EB\cdot BM)$$
$$+(\overline{CH}^2+\overline{CG}^2+2CH\cdot CN)$$

茲ニ EB=BA=BM, HC=CA=CN

デアルカラ $S=\{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2\overline{BA}^2\}+\{\overline{CA}^2+\overline{BC}^2+2\overline{CA}^2\}$

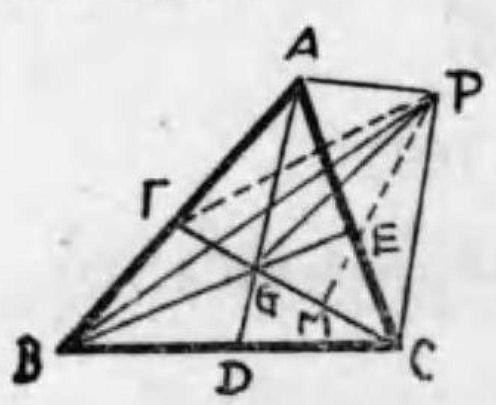
$$=2\overline{BC}^2+3(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)$$

$$=2\overline{BC}^2+3\overline{BC}^2=5\overline{BC}^2$$

【主題】 59. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシ，任意ノ一點 P ヲトレバ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{GP}^2$

着眼 指導第三項ヲ充分利用スルタメニ正方形ノ項數ガ奇數デアルカラ，之ヲ按配スルタメニ $\overline{GP}^2$ ヲ兩邊ニ加ヘルコトニスル.

答案 **構造** △ABC ノ BC, CA, AB ノ中點ヲ D, E, F トス.



證 i. △ABP ヨリ

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PF}^2+2\overline{AF}^2$$

△PCG ニテ M ヲ CG ノ中點トスレバ

$$\overline{FC}^2+\overline{FG}^2=2\overline{PM}^2+2\overline{CM}^2$$

$$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{GP}^2=2\{\overline{PF}^2+\overline{AF}^2+\overline{PM}^2+\overline{CM}^2\}\cdots(A)$$

而シテ △PFM ニ於テ G ハ FM ノ中點トナリ得ルヲ以テ

$$\overline{PF}^2+\overline{PM}^2=2\overline{FG}^2+2\overline{PG}^2$$

$\therefore$ (A) ノ右邊 $=2\{2\overline{FG}^2+2\overline{PG}^2+\overline{AF}^2+\overline{CM}^2\}$

$$=4\overline{PG}^2+4\overline{FG}^2+2(\overline{AF}^2+\overline{FG}^2)$$

此ニ △AGB ヨリ $2(\overline{AF}^2+\overline{FG}^2)=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2$

$$4\overline{FG}^2=(2FG)^2=(2CM)^2=\overline{CG}^2$$

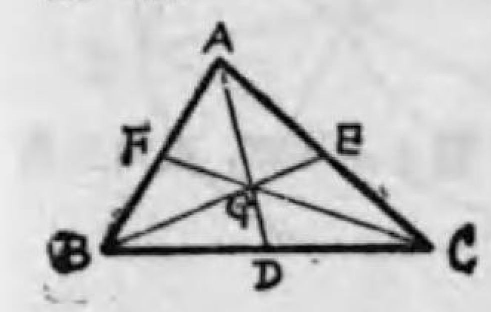
$\therefore$ (A) ノ右邊ヲ整理シテ

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{GP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+4\overline{PG}^2$$

$$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{PG}^2$$

【試練】 137. 三角形ノ三邊上ノ正方形ノ和ノ三倍ハ中線上ノ正方形ノ和ノ四倍ナリ. (13鹿農)

こなし方 △ABC ノ BC, CA, AB ノ中點ヲ D, E, F トスル. 指導第三項ニ依ツテ

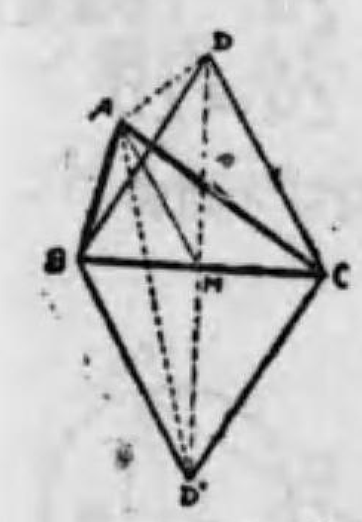


$$\begin{cases}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{BD}^2=2\overline{AD}^2\\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{CE}^2=2\overline{BE}^2\\ \overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\overline{AF}^2=2\overline{CF}^2\end{cases}$$

之レニ $\overline{BD}^2=\dfrac{1}{4}\overline{BC}^2,\quad \overline{CE}^2=\dfrac{1}{4}\overline{AC}^2,\quad \overline{AF}^2=\dfrac{1}{4}\overline{AB}^2$

之ヲ持込ンデ分母拂フ.

【試練】 138. 三角形 ABC ノ邊 BC ノ兩側ニ正三角形 BCD, BCD′ ヲ作ルトキハ $\overline{AD}^2+\overline{AD'}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$ ナリ. (14陸士)



こなし方 DD′ ト BC トヲ M ニ交ラセル.

M ハ BC ノ中點デ

$DM=\sqrt{3}\,BM,\qquad \overline{DM}^2=3\overline{BM}^2$

△ADD′ ニ於テ

$$\overline{AD}^2+\overline{AD'}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)$$

又 △ABC デ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$$\overline{BC}^2=4\overline{BM}^2$$

$$\therefore\ \overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{AM}^2+3\overline{BM}^2)=2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)$$

エキス 直角ヲ夾ム二邊トハナラナイ線分上ノ正方形ノ移動ハ必ズ指導第三項ニ依ルノデアル.