トシテ近ヅク.

同様ニ (14) モ同ジ極限ニ近ヅク. 故ニ P ハ此極限ニ等シ, ソウシテ (12) ハスベテノ場合ニ通ズ.

---

7. 曲線ノ長サ 第六編ノ第8款デ曲線ノ長サヲ

$$s=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

デ見出シタ. 又和ノ極限トシテ表ハスコトガ出來ル, $x=a$ カラ $x=b$ マデ間隙ヲ n 等分シ, 其分點ニ於テ縦線ヲ立テ折線ヲ曲線ニ內接セシメルノデアル.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2_k}$$

$$=\sqrt{\triangle x^2+\triangle y_0^2}+\sqrt{\triangle x^2+\triangle y_1^2}+\cdots\cdots+\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2_{n-1}}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y_0}{\triangle x}\right)^2}\,\triangle x+\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y_1}{\triangle x}\right)^2}\,\triangle x+\cdots\cdots$$

$$+\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y_{n-1}}{\triangle x}\right)^2}\,\triangle x.$$

此長サノ極限ハ定ムベキ弧ノ長サ s デアル.

此最後ノ式ハ其極限ガ定積分ノ形式トハ「ヅウハメル」ノ公式デ上ノ極限ト恒等ナル極限ヲ有スル新ラシキ和ヲ暗示ス, 卽チ $\triangle y_k/\triangle x=f'(x_k)$ デアルカラ

$$\sqrt{1+f'(x_0)^2}\,\triangle x+\sqrt{1+f'(x_1)^2}\,\triangle x+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\sqrt{1+f'(x_{n-1})^2}\,\triangle x,$$

何トナレバ

$$\alpha_k=\sqrt{1+f'(x_k)_2}\,\triangle x,\qquad \beta_k=\sqrt{1+\frac{\triangle y_k^2}{\triangle x^2}}\,dx$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}=1.$$

(16) $$S=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

卽チ以前ニ得タ結果ト一致ス.

---

8. 廻轉面ノ面積 廻轉面ノ周圍ノ面積ヲ求ムルニハ第3款ニ說イタ體積ヲ求メルノト同ジコトデアル. $x=a$ カラ $x=b$ マデ間隙ヲ n 等分シ縦線ヲ立テ前款ノヤウニ母曲線ニ內接スル折線ヲ作リ廻轉軸ノ周リニ廻轉セシメルト截頭圓錐體ノ曲面ガ出來ル. 圓錐體ノ傍面積ハ底ノ周圍ト斜高トノ積ノ半 πrl ニ等シク, 截頭圓錐體ノ面積ハ二ツノ底ノ中央ノ點ヲスグ圓ノ周圍ト斜高トノ積ニ等シ, 卽チ

$$\pi(r+R)l.$$

故ニ問題ノ傍面積ハ

(17) $$\pi(y_k+y_{k+1})\sqrt{\triangle x^2+\triangle y_k^2},$$

従テ計算スベキ面積 S ハ

(18) $$S=\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\pi(y_k+y_{k+1})\sqrt{\triangle x^2+\triangle y_k^2}.$$

今一般ノ (17) ナル加原

$$\beta_k = \pi(y_{k+1} + y_k)\sqrt{1+\frac{\triangle y_k^2}{\triangle x^2}}\ \triangle x$$

ハ簡單ナ式

$$\alpha_k = 2\pi\, y_k \sqrt{1+f'(x_k)^2}\ \triangle x$$

ヲ導キ, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n$ ハ極限トシテ

$$\int_a^b 2\pi\, y\sqrt{1+f'\,x_l^2}\,dx$$

トナリ,

$$\lim_{n=\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k} = 1$$

デアルカラ「ヅウハメル」ノ公式カラ $\beta_1+\beta_2+\ldots\ldots+\beta_n$ モ同ジ極限ヲ有スルコトガワカル, 故ニ

$$\text{(19)} \qquad S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx.$$

例ヘバ立體幾何學ノ一定理デアル所ノ球帶ノ面積ハ球帶ガ置カレタ大圓周ニ高サヲ乘ジタモノデアル

$$x^2+y^2=r^2$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2} = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$S = 2\pi\int_a^{a+h} y\cdot\frac{r}{y}\,dx = 2\pi r x\Big]_a^{a+h} = 3\pi r h \qquad q.e.d.$$

2

全球ノ體積ハ $4\pi r^2$ デアル.

演習

1. 廻轉ノ拋物體ノ面積ヲ頂ヨリ計算セヨ.

答 $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{m(m+2x)^3}-m^2)$.

2. 廻轉ノ楕圓體ノ面體ヲ求メヨ.

答 $2\pi\left(b^2+\frac{ab}{e}\sin^{-1}e\right)$.

3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ルナ曲線ヲ x 軸ノ周リニ廻轉セシメルト其面積ハ如何, 答 $\frac{12\pi a^2}{5}$.

4. 擺線ヲ底ノ周リニ廻轉スルト一弓形ノナス表面積如何. 答 $\frac{64\pi a^2}{3}$.

5. 極坐標ニ於テ

$$\text{(20)} \qquad S = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}}\,d\theta.$$

6. 心臟線

$$r = 2a(1-\cos\theta)$$

ヲ軸ノ周リニ廻轉スルトキ生ズル面ノ積ヲ求メヨ.

答 $\frac{128\pi a^2}{5}$.

7. 廻轉體ノ面積ハ

$$\text{(21)} \qquad S = 2\pi\int_{s_0}^{s_1} y\,d\theta$$

ナルコトヲ證明セヨ, 但シ母曲線ノ一點ノ坐標 x, y ガ弧 s ノ長サノ函數トシテ表ハサレタルモノナリ.

9. 重心 靜重力ノ法則　質量 $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ ノ n 個ノ分子ガ一直線ニ置カレタトキニソレヲ x 軸トシテ其坐標ヲ $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ トスルトキ重心ノ坐標 $\bar{x}$ ハ

$$\bar{x} = \frac{mx_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n} \tag{22}$$

ナル公式デ與ヘラレル.

モシ分子ガ $(x_1, y_1), \ldots\ldots (x_n, y_n)$ ナル坐標デ平面上ニ與ヘラレタルトキ, $(x_1, y_1, z_1), \ldots\ldots (x_n, y_n, z_n)$ デ空間上ニ與ヘラレタトキニモ $(\bar{x}, \bar{y})$ 或ハ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z},)$ ナル重心ノ坐標ノ $\bar{x}$ ハ同樣ナル公式デ與ヘラレル, $\bar{y}, \bar{z}$ モ同ジ.

---

10. 立體及ビ廻轉體ノ面ノ重心　微積分學ノ助デ, 分子ノ若干個カラ作ラレテキナイ物體ヤ, 重心ガ知ラレテアル物體カラ作ラレテキナイモノヽ重心ヲ計算スルコトガ出來ル. 今廻轉ノ等整的物體ノ重心ヲ求メンニ重心ハ常ニ對稱ノ軸ノ上ニアリ, 第3款ノ圖ノヤウニ立體ヲ薄片ニ分チ第 k 番ノ薄片ノ重心ノ横線ヲ x'_k ニテ表ハシ其物ノ密度ヲ ρ トスレバ第 k 番ノ薄片ノ質量ヲ $\rho \triangle V_k$ トスルト

$$x = \frac{\rho \triangle V_0 . x'_0 + \rho \triangle V_1 . x'_1 + \ldots\ldots + \rho \triangle V_{n-1} . x'_{n-1}}{\rho \triangle V_0 + \rho \triangle V_1 + \ldots\ldots + \rho \triangle V_{n-1}}$$

$$= \frac{x'_0 \triangle V_0 + x'_1 \triangle V_1 + \ldots\ldots + x'_{n-1} \triangle V_{n-1}}{V},$$

但シ

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

上ノ分子ヲ計算スルノガ殘ツテキル. 此和ハ n ノ値ノ如何ニ關セズ同樣デアル. n ヲ無限ニ増加サセルト

$$\lim_{n=\infty} [x'_0 \triangle V_0 + x'_1 \triangle V_1 + \ldots\ldots + x'_{n-1} \triangle V_{n-1}] = \bar{x}V. \tag{23}$$

今此括弧内ノモノハ積分デ計算セラレル和ヲ暗示スル.

$$x_k < x'_k < x_{k+1}.$$

$$\pi y'^2_k \triangle x \leqq \triangle V_k < \pi y''^2_k \triangle x,$$

但シ y'_k 及ビ y''_k ハ第 x 番目ノ薄片ノ横斷面ノ最短, 最長ノ半徑ヲ表ハス.

$$\pi x_k y'^2_k \triangle x < x'_k \triangle V_k < \pi x_{k+1} y''^2_k \triangle x,$$

故ニ

$$a_k = \pi x_k y^2_k \triangle x, \qquad \beta_k = \pi k'_k \triangle V_k$$

トスルト

$$\frac{\beta_k}{a_k} = \frac{x'_k}{x_k} \cdot \frac{\triangle V_k}{\pi y^2_k \triangle x}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\beta_k}{a_k} = 1.$$

「ヅウハメル」ノ定理ニ依ツテ (23) ニ於ケル和ノ個々ノ項 $\beta_k = x'_k \triangle V_k$ ヲ $a_k = \pi x_k y^2_k \triangle x$ デ置キ換ヘルコトガ出來ル.

$$\lim_{n=\infty} [\pi x_0 y^2_0 \triangle x + \pi x_1 y^2_1 \triangle x + \ldots\ldots + \pi x_{n-1} y^2_{n-1} \triangle x] = \bar{x}V$$

トスルコトガ出來キ, 此此方程式ノ左邊ハ定積分デアルカラ

$$\bar{x} = \frac{\pi \int_a^b x y^2 dx}{V}. \tag{24}$$

例ヘバ廻轉圓錐體ノ重心ハ

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h, \qquad y=\frac{r}{h}x,$$

$$\int_a^b x\,y^2dx=\frac{r^2}{h^2}\int_a^b x^3dx=\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big]_0^h=\frac{r^2h^2}{4},$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{4}\pi r^2h^2}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{3}{4}h.$$

演　習

1. 半球ノ重心ハ球ノ中心ヨリ何程距タルカ. 答 $\frac{3}{8}r$
2. 廻轉ノ拋物體ノ一片ノ重心ヲ求メヨ.
3. 球ノ一片ノ重心ヲ求メヨ.
4. 截頭圓錐體ノ重心ヲ求メヨ.

答 小底カラノ距離 $\frac{h}{4}\cdot\frac{3R^2+2Rr+r^2}{R^2+Rr+r^2}$.

5. $y=\sin x,\ 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ ニ於テ x 軸ノ周リニ廻轉シタトキ重心ヲ見出セ. 答 $\bar{x}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}$

6. 軸ニ垂直ナル二平面ニテ堺セル廻轉面ノ重心ハ次ノ公式ニテ與ヘラレル:

$$\bar{x}=\frac{2\pi\int_{s_0}^{s_1}xy\,ds}{s}=\frac{2\pi\int_a^b xy\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{s}dx.$$

7. 球帶ノ重心ハ二ツノ底ノ中間ニアルコトヲ證明セヨ.

---

11. 平面ノ重心 $y=f(x)$ ナル曲線ノ下ノ面積ノ重心ヲ求ムルトセン(第1款ノ圖). 晝イタヤウニ等シキ幅ヲ有スル n 個ノ薄片ニ分チ, 各部分ノ重心ヲ求ムルモノトセバ, 各面積ヲ $\triangle A_k$ トシ其密度ハ常數デ ρ トセバ其第 k 番ノ薄片ノ質量ハ $\rho\triangle A_k$ デアル. 重心ノ横線ヲ x'_k トスルニ

$$\bar{x}=\frac{\rho\triangle A_0x'_0+\rho\triangle A_1x'_1+\dots\dots+\rho\triangle A_{n-1}x'_{n-1}}{\rho\triangle A_0+\rho\triangle A_1+\dots\dots+\rho\triangle A_{n-1}}$$

$$=\frac{x'_0\triangle A_0+x_1\triangle A_1+\dots\dots+x'_{n-1}\triangle A_{n-1}}{A}.$$

但シ

$$A=\int_a^b y\,dx,$$

今分子ノ値ヲ計算セシニ, 其理論ハ前款ノモノト相似デアル. n ヲ無限ニ大ナラシメルト,

$$\lim_{n=\infty}\Big[x'_0\triangle A_0+x'_1\triangle A_1+\dots\dots+x'_{n-1}\triangle A_{n-1}\Big]=\bar{x}A$$

$$x_k<x'_k<x_{k+1}$$

$$y'_k\triangle x\leqq\triangle A_k\leqq y''_k\triangle x,$$

從テ

$$\alpha_k=x_ky_k\triangle x,\quad \beta_k=x'_k\triangle A_k$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}=1.$$

故ニ「ヅウハメル」ノ定理カラ

$$\lim_{n=\infty}\left[x_0 y_0 \triangle x + x_1 y_1 \triangle x + \ldots\ldots + x_{n-1} y_{n-1} \triangle x\right] = \bar{x} A$$

(25)
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xydx}{A}.$$

演習

1. 半圓ノ重心ヲ求メヨ. 答 $\bar{x} = \dfrac{4r}{3\pi}$.

2. 軸デ堺セル半楕圓ノ重心ヲ求メヨ.

答 $\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$.

3. 任意ナル平面圖形ニ於テ縦軸ニ平行セル直線ガ其境ト多クトモ二點デ交ハルモノナラバ其圖形ノ重心ノ横線ハ

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(y''-y')dx}{A},$$

但シ $y'=\phi(x)$ ハ下ノ境ノ方程式デ, $y''=f(x)$ ハ上ノモノヽ方程式ヲ表ハス.

---

12. **一般ノ公式** 上述ノ諸例ハ一般公式ニマトメルコトガ出來ル, ソウシテ種々ノ密度ト種々ノ形ヲ有スルモノニ適用セラレル. 物體ヲ小サイ部分ニ分チ, 或部分ノ質量ヲ $\triangle M_k$ トシ重心ノ横線ヲ x'_k トスレバ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x'_k \triangle M_k}{M}.$$

其故ニ

(26)
$$\bar{x} = \frac{\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x'_k \triangle M_k}{M}.$$

コノ極限ハ常ニ積分ニ依ツテ計算スルコトガ出來ル. シカシ二重或ハ三重ノ積分ヲ用フルノガ必要デアル (次編ヲ比較セヨ) (26) ナル公式ハ時トシテハ次ノ形ヲナス:

(27)
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dM}{M}$$

13. **惰率. 或ハ慣性能率** 空間ノ軸ニ於ケル諸分子ノ惰率トハ

(28)
$$\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots + m_n r_n^2$$

ナル量ヲ表ハス, 但シ r_k ハ k 番目ノ分子デ質量 m_k アルモノノ軸ヨリノ距離ヲ云フ.

針金, 板金, 立體ノヤウニ物體ノ連續的配置カラ成立ツテオルトキハ惰率ハ次ノヤウニ定メラレル. 物體ガ m_k ナル質量ヲモツヤウナ小サイ小片ニ分タレルモノトセヨ, ソウシテ各小片ノ質量ハ其一點ニ關スルモノト見做シ其點ハ軸カラ距離ガ r_k ナリトセヨ. スベテノ小片ノ爲メニ (28) ナル和ヲ作ルトセバ此小片ガ小サクナルトキ此和ノ極限ハ物體ノ惰率デアル:

$$\mathrm{I} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \qquad (29)$$

惰率ノ物理的意義ハ其習慣性ヨリ物體ガ軸ノ周ノ廻轉ニ對抗スル抵抗力ノ量デアル. 惰率ハ物質ノ强サノ理論ニ重要ナル應用ヲ有スル.

微積分ニ依リテ物體ノ惰率ヲ計算スルコトガ出來ル.

半徑 r デ其質量ガ m デアル圓ルキ針金ガアルトシヤウ. 其針金ノ平面ハ軸ニ垂直デ圓ノ中心ハ軸ヲスグルトセヨ.

針金ノ物質ノ各點ハ軸カラ等距離デアルカラ惰率ハ

$$\mathrm{I} = mr^2.$$

一樣ナル圓盤ヲ論ジヤウ　其半徑ヲ $r_0 = 0,\ r_1,\ r_2, \ldots\ldots r_n = a$ ニ等分シ, 圓盤ヲ $r_1, r_2, \ldots\ldots r_{n-1}$ ナル半徑ノ同心圓ニテ分ツトキハ全惰率ハ此等ノ環狀ノ惰率ノ和ニ等シ, 第 k 番目ノ環ノ惰率 $\triangle \mathrm{I}_k$ ハ其外ノ界ノ環ノ惰率ヨリ小サイ, 内ノ界ノ環ノ惰率ヨリ大キイ. 故ニ

$$r_k^2 \triangle \mathrm{M}_k < \triangle \mathrm{I}_k < r_{k+1}^2 \triangle \mathrm{M}_{k+1} \qquad (30)$$

又 $\triangle \mathrm{M}_k = \rho \triangle \mathrm{A}_k$ ナリ, 但シ ρ ハ密度デ $\triangle \mathrm{A}_k$ ハ面積ナリ

$$\triangle \mathrm{A}_k = \pi r_{k+1}^2 - \pi r_k^2 = \pi (r_k + \triangle r)^2 - \pi r_k^2 = 2\pi r_k \triangle r + \pi \triangle r^2,$$

$$\triangle \mathrm{M}_k = 2\pi \rho r_k \triangle r + \pi \rho \triangle r^2. \qquad (31)$$

今「ヅウハメル」ノ定理ヲ適用スルト

$$\mathrm{I} = \lim_{n=\infty} [\triangle \mathrm{I}_0 + \triangle \mathrm{I}_1 + \ldots\ldots + \triangle \mathrm{I}_{n-1}].$$

偖 $\alpha_k = 2\pi \rho r_k^3 \triangle r$ トスレバ (30), (31) ハ $\triangle \mathrm{I}_k$ ニ代用スベキモノヲ暗示ス. (30) ヲ α_k ニテ除スルト:

$$\frac{r_k^2 \triangle \mathrm{M}_k}{2\pi \rho r_k^3 \triangle r} < \frac{\triangle \mathrm{I}_k}{2\pi \rho_k r_k^3 \triangle r} < \frac{r_{k+1}^2 \triangle \mathrm{M}}{2\pi \rho r_k^3 \triangle r},$$

此不等式ノ兩端ノ極限ハ 1 ナリ,「ヅウハメル」ノ定理ノ β_k ヲ $\triangle \mathrm{I}_k$ トスルト, $\lim\limits_{k=\infty} \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} = 1$ デアルカラ

$$\mathrm{I} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \rho r_k^3 \triangle r = 2\pi \rho \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi \rho a^4}{2}.$$

盤面ノ質量ハ $\mathrm{M} = \pi \rho a^2$ デアルカラ, I ハ

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}a^2}{2}. \qquad (32)$$

〔**定義**〕 物體ノ惰率ガ

$$\mathrm{I} = \mathrm{M}k^2$$

ノヤウニ書カレタトキニ k ヲ<u>廻轉ノ半徑</u>ト云フ. 然ルトキニハ廻轉ノ半徑ハ $\sqrt{\mathrm{I}/\mathrm{M}}$ トシテ定メラレル. ソレハ次ノ意義ヲ有スル. スベテノ質量ヲ k ナル半徑ノ針金ニ擴ガツテ其軸トガ其平面ニ垂直ニシテ圓ノ中心ガ其軸ヲスギルト惰率ハ $\mathrm{I} = \mathrm{M}k^2$ デアル.

上ノ圓面ノ廻轉ノ半徑ハ $a\sqrt{2}$ デアル.

演　　習

1. 長サ $2a$ ノ一樣ニ分子ノ配置セラレタ棒ガアル, 垂直ナル横斷線ノ惰率ヲ定メヨ.

2. $2a$ ナル邊ヲ有シテヲル正方形ガ中心ヲスギテ邊ニ平行

ナル軸ノ周リニ於ケル惰率ヲ求メヨ.

3. l ナル長サヲ有スル一樣ナル棒ノ一端ヲスグル垂直線ノ周リニ於ケル惰率ヲ求メヨ.

4. 一ツノ頂點ヲスグル中線ノ周リニ於ケル二等邊三角形ノ惰率ヲ求メヨ.

5. 一ツノ直徑ノ周リニ於ケル圓板ノ惰率ヲ求メヨ.

---

14. 一般ノ定理. 一ツノ軸ノ周リニ於ケル一物體ノ惰率 I_0 ガ知レテ居ルト, 平行軸ノ周リニ於ケル惰率ハ新ラシキ積分ヲ求メナクトモ求メラレル.

[定理] 一ツノ軸ニ於ケル一物體ノ惰率ヲ I_0 トシ, 重心ヲスグル平行軸ニ於ケル惰率ヲ I トスルト:

$$I_0 = I + Mh^2 \tag{33}$$

但シ h ハ二ツノ間ノ距離ヲ表ハス.

先ヅ分子ノ一系統ヲ取リ定理ヲ證明シヤウ. (x, y, z) ナル坐標ヲ有スル一組ヲ取リ z 軸ヲ定理ノ第一ノ軸トスルト, (x', y', z') ガ坐標デアル所ノ第二ノモノハ第一ノモノニ平行ス (原點ハ重心デアル) ルトセバ

$$I_0 = \Sigma mr^2 = \Sigma m(x^2+y^2),$$

$$I = \Sigma mr'^2 = \Sigma m(x'^2+y'^2).$$

尙 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ヲ (x, y, z) 軸ニ關スル重心トセバ

$$x = x'+\bar{x}, \qquad y = y'+\bar{y}, \qquad z = z'+\bar{z}.$$

$$\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(x'^2+y'^2)+2\bar{x}\Sigma mx'+2\bar{y}\Sigma my'+M(\bar{x}^2+\bar{y}^2).$$

今 $\qquad \Sigma mx' = o, \qquad \Sigma my' = o,$

コレハ第9款ノ公式(22)カラワカルコトデアル, 卽チ $(x' y' z')$ 軸ニ關スル分子ノ現在ノ系統ニ公式ヲ適用シテ $\bar{x}'$ ナル重心ノ横坐標ヲ知ル.

$$\bar{x}' = \frac{\Sigma mx'}{M}.$$

シカシ重心ハ坐標ノ新原點デアルカラ $\bar{x}' = o$, 從テ $\Sigma mx' = o$ 同樣ニ $\Sigma my' = o$ ヲ得ル.

今殘ツテキル項ヲ說明セネバナラヌ, ソウシテ定理ハ分子ノ系統ニ證明セラレル.

今物體ハ物質ノ連續ノ配置ヨリ成リ立ツトシ, 各部分ノ質量ヲ其重心ニ集中シタモノト見テ上ノ和ヲ形成シ其極限ヲ取レバ $\Sigma mx' = o$, $\Sigma my' = o$ ナリ. 故ニ

$$\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(x'^2+y'^2)+Mh^2,$$

$$\lim \Sigma m(x^2+y^2) = \lim \Sigma m(x'^2+y'^2)+Mh^2, \ldots\ldots q.\ e.\ d.$$

演　習

次ノ惰率ヲ定メヨ.

1. 圓周上ノ一點ノ周リニ於テ圓板ノ. 答 $\dfrac{3Ma^2}{2}$

2. 二邊ガ夫々 $2a, 2b$ ナル矩形但シ其中心ニツキテ.

答 $\dfrac{1a^2by}{3}$

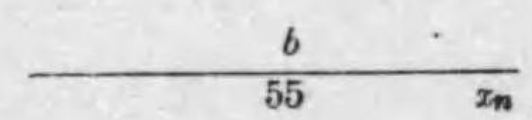
15. 重力. 「ニュートン」ハ一般引力ノ法則ヲ發見シタ此法則ハ二ツノ分子ハ其質量ニ比例シ距離ノ平方ニ反比例スル力デ引キ合フ:

$$f \propto \frac{mm'}{r^2}, \quad f = \mathrm{K}\frac{mm'}{r^2}, \tag{34}$$

K ハ物理的常數ナリ.

微積分學ノ手段ニ依リテ物質ノ連續的配置ニ依ル所ノ物體ノ互ニ引ク力ヲ計算スルコトガ出來ル. M ナル質量ノ一樣的ノ棒ガ其直線上ニアリテ質量 m ナル分子ニ及ボス力ヲ定メル爲ニ棒ヲ n 個ニ等分シ其 k 番目ノ截片ノ引力ヲ $\triangle \mathrm{A}_k$ トセヨ.

此截片ノ質量ハ $\rho\triangle x$ ナリ, 但シ ρ ハ棒ノ密度ヲ表ハス. $\rho\triangle x$ ナル質量ガ m ニ近キ一端ニ集中セラレタトスルト其引力ハ $\triangle \mathrm{A}_k$ ヨリ大キイ, モシ遠キ一端ニ集中セラレタトスルト其引力ハ其レヨリ小サイ. 故ニ



$$\mathrm{K}\frac{m\rho\triangle x}{x_{k+1}^2} < \triangle \mathrm{A}_x < \mathrm{K}\frac{m\rho\triangle x}{x_k^2}.$$

「ヅウハメル」ノ定理ヨリ

$$\beta_k = \triangle \mathrm{A}_k, \quad \alpha_k = \mathrm{K}\frac{m\rho\triangle x}{x_k^2}$$

ト置キ, 又

$$\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n-1}\triangle \mathrm{A}_x = \lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\triangle \mathrm{A}_k$$

$$= \lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{K}\frac{m\rho\triangle x}{x_k^2} = \mathrm{K}\,m\rho\int_a^b\frac{dx}{x^2}$$

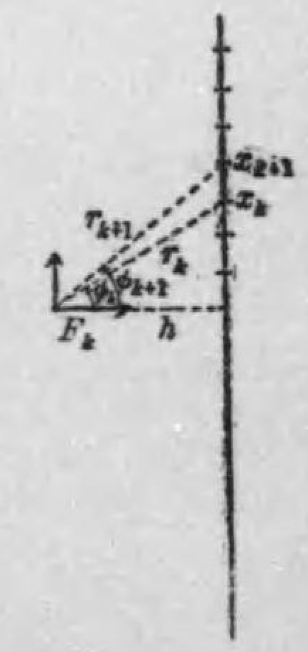
$$= \mathrm{K}\,m\rho\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = \frac{\mathrm{K}\,m\rho(b-a)}{ab},$$

此結果ハ次ノ形ニ書カレル:

$$\mathrm{A} = \mathrm{K}\frac{m\mathrm{M}}{ab}$$

コレハ丁度 m カラ棒ノ兩端マデノ距離 a, b ノ等比中數ニ等シキ距離ニアツテ質量 M ナル質點ノ引力ト等シキ力ヲ以テ引イテヰルコトヲ示シテキル.

次ニ棒ノ垂直二等分線上ニオイテアル分子ヲ想像セヨ, 前ノヤウニ棒ヲ等分シ, 其 k 番目ノ截片ノ引力ヲ論ゼン. 今ハ引力ヲ二ツノ部分ニ分ネバナラヌ, ソノ一ツハ棒ニ垂直ナルモノ, 一ツハ平行ナルモノデアル. 此第二ノモノハ對稱ノタメニ互ニ消滅スルカラ第一ノモノノミノ和



$$\Sigma\triangle \mathrm{F}_k$$

ヲ論ズレバヨイ, シカモ棒ノ半分ノミヲ論ジ其和ヲ 2 倍スレバヨイ

$$\mathrm{K}\frac{m\rho\triangle x}{r_{k+1}^2}\cos\phi_{k+1} < \triangle \mathrm{F}_k < \mathrm{K}\frac{m\rho\triangle x}{r_k^2}\cos\phi_k.$$

之ヲ普通ノ方法ニテ論ズルト

$$\frac{1}{2}\mathrm{F} = \mathrm{K}\, m\rho \int_0^a \frac{\cos\phi\, dx}{r^2},$$

但シ　$r^2 = h^2 + x^2,\qquad \cos\phi = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$

ナルヲ以テ

$$\mathrm{F} = 2\mathrm{K}\, m\rho h \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}}.$$

シカルニ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(h^2+x^2)^3}} = \frac{x}{h^2\sqrt{h^2+x^2}},$$

從テ

$$\mathrm{F} = \frac{2\mathrm{K}\, m\rho}{h} \cdot \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\bigg|_0^a = \frac{2\mathrm{K}\, m\rho a}{h\sqrt{h^2+a^2}} = \mathrm{K}\frac{m\mathrm{M}}{h\sqrt{h^2+a^2}}$$

演　習

1. 一ツノ棒ガアル,其密度ハ其一端カラノ距離ニ比例シ變テズル,其線上ノ一分子ニ於ケル引力ヲ定メヨ.

答　$\dfrac{2k\, m\mathrm{M}}{l^2}\left[\log\dfrac{l+h}{h} + \dfrac{h}{l+h} - 1\right]$

2. 半圓形ノ針金ガアル,ソノ中心ニアル分子ノ上ニ及ボス引力ヲ算セヨ.　　答　$\dfrac{2k\, m\mathrm{M}}{\pi a^2}$.

16. (3) ナル公式ノ證明. 次ノヤウニ (3) ヲ證明スルコトガ出來ル. 圖ノヤウニ y ガ x ト共ニ增加スルモノデアルナラバ,多クノ矩形ハ曲線ニ內接シ其和ハ A ヨリ小サイ.

$$(35)\qquad f(x_0)\triangle x + f(x_1)\triangle x + \dots\dots + f(x_{n-1})\triangle x < \mathrm{A}.$$

A ヲ分ケタ小片ニ外接シタ矩形ノ第二ノ組ヲ考フレバ其ハ A ヨリ大キイ:

$$(36)\qquad \mathrm{A} < f(x_1)\triangle x + \dots\dots + f(x_{n-1})\triangle x + f(x_n)\triangle x.$$

從テ A ハ二ツノ變ズル和 (35) ト (36) トノ間ニアル. 其差ハ (35) ノ初項 $f(a)\triangle x$, (36) ノ末項 $f(b)\triangle x$ ノ差ニ等シイ即チ

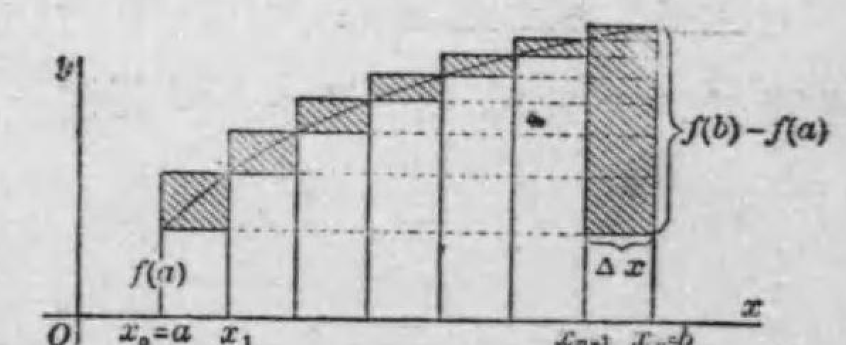
$$(37)\qquad [f(b) - f(a)]\triangle x$$

ニ等シイ,シカルニ此モノハ $n=\infty$ デアルトキ 0 ニ近ヅクカラ (35) ト (36) トノ各ハ A ニ近ヅク,即チ

$$\mathrm{A} = \lim_{n=\infty}[f(x_0)\triangle x + f(x_1)\triangle x + \dots\dots + f(x_{n-1})\triangle x]$$

$$(38)\quad = \lim_{n=\infty}[f(x_1)\triangle x + f(x_2)\triangle x + \dots\dots + f(x_x)\triangle x]$$

幾何學ニ云フト,內接外接ノ矩形ノ差ハ小サイ黑部ノ和デアル,此外接矩形ノ終リノ小截片ノ內ニ此黑キ部分ヲ作ルコトガ出來ル,即チ高サガ $f(b)-f(a)$ デ,底ガ $\triangle x$ デアルモノデアル. コレハ(37)ト等シキ $x_1 - x_0 = \triangle x_0$, $x_2 - x_1 = \triangle x_1$, ...ナル間隙ノ長サハ本



來等シクナイノデアル此長サノ最モ大キイモノヲ h トスル168頁ノ圖ト同ジ樣ナ圖デ見ラレルヤウニ

$$f(x_0)\triangle x_0+f(x_1)\triangle x_1+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\triangle x_{n-1}$$

及ビ

$$f(x_1)\triangle x_0+f(x_2)\triangle x_1+\cdots\cdots+f(x_n)\triangle x_{n-1}$$

ノ差ハ

$$[f(b)-f(a)]h$$

ヨリ小サイコトガワカル,從テ A ハ其和ノ極限デアル.

y ガ x ノ增加ト共ニ減少スルトキモ同樣ナリ,タダ其時ニハ內接矩形ノ和ガ (36) デ,外接矩形ノ和ガ (35) デアルコトガ異ルノミデアル,又 (35) ト (36) ノ不等式ノ不等記號ガ變ジ (37) ノ記號ガ變ズルバカリデアル.

終リニ曲線ガ極大,極小ノ有限數ヲ有スルトキニハソレヲ恒ニ增加シ,恒ニ減少シ(或ハ常數ナル)モノニ分チ,其等ノ部分ニ上ノ理論ヲ適用スルト,其場合ニモ (3) ト (5) トガ成立スルコトガワカル.

積分ノ變ズル極限　$f(x)$ ハ $a\leqq x\leqq b$ ナル間隙ニ於テ連續デアルトシ,其ウチニ x ヲ任意ニ選ブトスルト

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx$$

ハ x' ノ函數デアル,之ヲ $\phi(x')$ トシヤウ. 積分ノ變數ヲ t ニテ表ハシ x' ヲ x ニ變ズルコトガ出來ル:

(39) $$\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

右邊ノ積分ハ橫坐標ガ x デアル曲線ノ下ノ面積ヲ表ハス.其微係數ガ $f(x)$ ナル値ヲ有スルカラ

(40) $$\phi'(x)=f(x) \quad \text{或ハ} \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

終リニ積分變數 t ハ上ノ限界ト同ジ文字デ表ハサレル,卽チ (40) ハ

(41) $$\phi(x)=\int_a^x f(x)\,dx.$$

演　習

1. 擺線ヲ其頂點ニ於ケル切線ノ周圍ニ廻轉セシメテ出來ル立體ノ體積ヲ求メヨ.

2. y ノ軸ノ周リニ曲線ヲ廻轉セシメテ出來ル立體ノ體積ヲ求メヨ.

3. 曲線

$$y^2(x-4a)=ax(x-3a)$$

ヲ x 軸ノ周リニ廻轉セシムルトキ環狀ニテ生ジタル體積ハ $\pi a^3(7\frac{1}{2}-8\log e)$ デアルコトヲ證明セヨ.

4. 曲線

$$x^3-3axy+y^3=o$$

ノ環ノ面積ヲ求メヨ.　　答 $\frac{3}{2}a^2$.

5. 或仕方デ動ク分子ノ系統ノ動力的「エナージ」ハ個々分子ノ動力的「エナージー」ノ和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k v_k^2$ デアルコトヲ證明セヨ.

6. 軸ノ周リニ廻轉スル「ホモゼン」ノ圓柱體ノ動力的「エナージー」ヲ求メヨ.

第 十 編

平均ノ法則. 不定形狀.

1. 「ロール」ノ定理. 微積分學ノ理論發展ノ基礎トナル定理ハ平均ノ法則ガ出テ來ル「ロール」ノ定理デアル.

[「ロール」ノ定理] $\phi(x)$ ガ $a \leqq x \leqq b$ ナル間隙ニ於テ連續デアリ, 且其兩端デ o トナル, 即チ

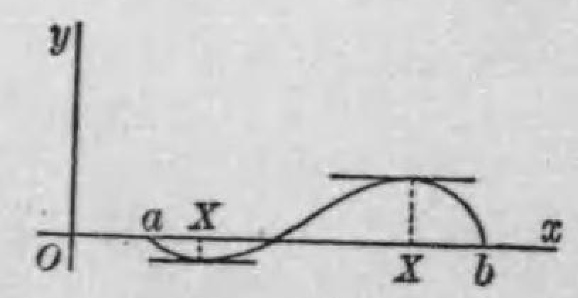
$$\phi(a)=o, \qquad \phi(b)=o$$

デアルトセン. 其間隙中ノ各點デ微係數 $\phi'(x)$ ヲ持ツナラバ, $\phi'(x)$ ハ少ナクモ間隙中ノ一點ニ於テ o トナラネバナラヌ, 即チ

$$\phi'(X)=o, \qquad a<X<b.$$

何トナレバ其間隙ノ或部分ニ於テ函數ハ正ノ數或ハ負ノ數トナラネバナラヌ, モシ常ニ o トナレバ定理ハ無論成立スル.

$\phi(x)$ ハ間隙ノ或部分ニ於テ正デアリトスルト其內ノ或一點 X デ極大トナリ,



$\phi'(x)=\tan\tau$ ハ

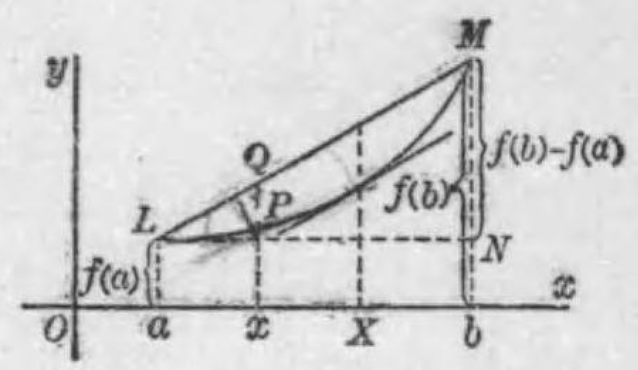
$$\phi'(X)=o, \qquad a<X<b.$$

同樣ニ $\phi(x)$ カ負數デアルト, 極小ヲ有シ, 即チ定理ハ證明セラル.

2. 平均法則. $f(x)$ ハ $a<x<b$ ナル間隙ニ於テ連續

ナリトシ且間隙ノ各所ニ於テ微係數 $f'(x)$ ヲ有スルトセン.「グラフ」ヲ作リ LM ハ其兩端ヲ結ビ付ケル割線ナリトセバ少ナクモ其中間ノ點 X ニ於テ切線ガ LM ニ平行スル場合ガアルデアラウ.

何トナレバ曲線ノP點カラ割線ニ至ル距離ヲ縦線 PQ ニ沿ヒラ取ルトキハ此距離ハ代數的ニ極大, 極小値ヲ有シ而カモ其點ニ於テ切線ハ割線ニ平行デアルコト明カナコトデアル. 今縦線ノ傾度ハ



$$\tan \angle \mathrm{NLM} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

X ニ於ケル切線ノ傾度ハ $f'(\mathrm{X})$ デアルカラ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\mathrm{X}),$$

即チ (A)　　$f(b)-f(a) = (b-a)f'(\mathrm{X}),\qquad a<\mathrm{X}<b.$

コレガ平均ノ法則デアル. 之ヲ他ノ形デ書クコトガ出來ル, 即チ

$$b-a=h,\qquad b=a+h$$

トシ, θ ヲ1ヨリ小サキ正數トスレバ $\mathrm{X}=a+\theta h$ 従テ (A) ハ

(A′)　　$f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h)$

トスルコトガ出來ル. 平均ノ法則ハ次ノヤウニ解析的ニ證明セラレル.

$$\phi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-[f(x)-f(a)]$$

ナル函數ヲ作レ. 此函數ハ「ロール」ノ定理ノスベテノ條件ヲ有ス. ソレカラ

$$\phi'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$$

ハ a ト b トノ中間ノ $\triangle x=\mathrm{X}$ ノタメニ o トナラネバナラヌカラ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(\mathrm{X}) = o,$$

即チ定理ハ證明セラレタ.

此證明ハ單ニ幾何的證明ヲ其マヽ解析的ニ移シタマデノコトデアル, 何トナレバ $\phi(x)$ ハ PQ ニ當ルカラデアル.

3. 應用. 平均法則ノ第一ノ應用トシテ, 第六編, 第2欵ノ定理Aノ證明ヲナスコトガ出來ル. 假設ニ依リ x ノスベテノ値ニ對シテ或ハ或間隙ノスベテノ點ニ於テ $\phi'(x)=o$.

然ルトキハ a 及ビ $b=x_1$ ガ此間隙ノ二點デアルナラバ平均法則 (A) カラ

$$\phi(x_1)-\phi(a) = o,$$

即チスベテノ點 x_1 ニ於テソウデアルカラ $\phi(x)$ ハ常數デアル.

4. 不定形狀. $\frac{o}{o}$ ナル形狀. 分數

(1)　　$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$$

ノ分母分子ガ $x=a$ ナル x ノ特種ノ値ニ對シテ

$$f(a)=o, \qquad \mathrm{F}(a)=o$$

デアルトキニハ分數ハ $\frac{o}{o}$ ナル形狀ヲナシ, 如何ナル意味ヲ有スルカガ不明トナル, 然シ x ガ a ニ近ヅクトキニ分數ガ何ニ近ヅクカヲ求メ得ル. 例ヘバ

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\frac{x-a}{x^2-a^2}$$

ニ於テ $x-a$ ニテ約シテ

$$\lim_{x\doteq a}\frac{x-a}{x^2-a^2}=\lim_{x\doteq a}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{2a}.$$

又
$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\frac{\tan x}{x}$$

ニ於テ $x=o$ ナルトヲ

$$\lim_{x\doteq 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1.$$

シカシ上ノヤウニ簡單ナ方法ヲ用ヒルコトガ出來ナイ場合ニハ平均法則ヲ用ヒル. $b=x$ カ a ニ近キ或點デアルトスルト $f(a)=o$, $\mathrm{F}(a)=o$ トナルコトヲ記憶シテ

$$f(x)=(x-a)f'(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{F}(x)=(x-a)\mathrm{F}'(\mathrm{X}'),$$

但シ X ト X' トハ a ト x トノ中間ニアリトスル.

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\frac{f'(\mathrm{X})}{\mathrm{F}'(\mathrm{X}')}.$$

x ガ a ニ近ヅクト X ト X' モ亦 a ニ近ヅクカラ $f'(x)$, $\mathrm{F}'(x)$ ガ連續デアルト (實際ニハ此ンナ場合ガ多イ),

$$\lim_{x\doteq a}f'(\mathrm{X})=f'(a), \qquad \lim_{x\doteq a}\mathrm{F}'(x)=\mathrm{F}'(a).$$

$\mathrm{F}'(a)\neq o$ ダト

(2)
$$\lim_{x\doteq a}\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\frac{f'(a)}{\mathrm{F}'(a)}.$$

此樣ナ分數ノ極限ヲ $\frac{o}{o}$ ナル極限トシテ取扱フ

[例] $\lim_{x\doteq 1}\frac{\log x}{1-x}$ ヲ見出セ.

$$f(x)=\log x, \qquad f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad f'(1)=1,$$

$$\mathrm{F}=(1-x), \qquad \mathrm{F}'(x)=-1, \qquad \mathrm{F}'(1)=-1.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\doteq 1}\frac{\log x}{1-x}=-1.$$

演 習

微分シナイデ次ノ極限ヲ得ヨ.

1. $\lim_{x\doteq a}\frac{x-a}{x^3-a^3}=\frac{1}{3a^2}$.

3. $\lim_{x\doteq 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$.

2. $\lim_{x\doteq 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4. $\lim_{x\doteq 0}\frac{\tan x-\sin x}{1-\cos x}=o$.

微分シテ次ノ極限ヲ求メヨ.

5. $\lim_{x\doteq 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

6. $\lim_{x\doteq 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\log\frac{a}{b}$.

7. $\lim_{x\doteq -1}\frac{\sin \pi x}{1+x}=-\pi$.

8. $\lim_{x\doteq \frac{1}{2}}\frac{\cos \pi x}{2x-1}=-\frac{\pi}{2}$.

5. $o\times\infty$ **及ビ** ∞/∞ **ナル形狀.** $f(x)\mathrm{F}(x)$ ナル積ニ於テ $x=a$ ノタメニ $f(x)$ ハ o トナリ, $\mathrm{F}(x)$ ハ ∞ トナルトキハ之ヲ

$$\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\mathrm{F}(x)}}$$

ト書クトキハ $\dfrac{o}{o}$ ナル形トナル.

$f(x)/\mathrm{F}(x)$ ノ分母分子ガ $x=a$ ノタメニ ∞ トナルトキモ

$$\frac{\dfrac{1}{\mathrm{F}(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} \quad 或ハ \quad \frac{\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{\mathrm{F}(x)}}$$

トスルトキハ $\dfrac{o}{o}$ トナル.

従テ二ツノ場合ニ於テハ第4款ノ場合ニ移サレル.

6. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ **及ビ** $\infty-\infty$ **ノ形狀.**

(3) $$f(x)^{\phi(x)}$$

ハ $f(x)$, $\phi(x)$ ガ一双ノ或値ヲ有スルトキ一ツノ意味ヲ有シナイコトガアル.

$$f(x)=e^{\log x}, \qquad f(x)^{\phi(x)}=e^{\phi(x)\log f(x)}$$

ト書クト, e ノ指數ガ $o.\infty$ ナル形ヲ取ルト (3) ハ不定ノ形ヲ取ル, 即チ

(a) $f(a)=o$, $\phi(a)=o$ デアルト o^0,

(b) $f(a)=1$, $\phi(a)=\infty$ デアルト 1^∞,

(c) $f(a)=\infty$, $\phi(a)=o$ デアルト ∞^0,

即チ e ノ指數ガ前題ノ方法デ得ラレルト $f(x)^{\phi(x)}$ ノ極限ガ得ラレル.

[例] $\lim\limits_{x\doteq0}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}$ ヲ見出セ.

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{\log\cos x}{x^3}},$$

$$\lim_{x\doteq0}\frac{\log\cos x}{x^3}=\lim_{x\doteq0}\frac{-\sin x}{3x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\doteq0}-\frac{1}{3x\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

モシ x ガ正數ノ側カラ o ニ近ヅクトキハ e ノ指數ハ $-\infty$ トナリ従テ

$$\lim_{x\doteq0}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}=o.$$

モシ x ガ負數ノ側カラ o ニ近ヅクトキニハ e ノ指數ハ ∞ トナルカラ

$$\lim_{x\doteq0}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}=\infty$$

此ノ區別ヲ次ノヤウニ書ク:

$$\lim_{x\doteq0+}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}=o, \qquad \lim_{x\doteq0-}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}=\infty$$

$\infty-\infty$ ナル形狀.

$$\log(x+1)-\log x$$

ノヤウニ $x=\infty$ ノトキ各項ガ ∞ トナルトキハ簡單ナル變形

デ極限ヲ求メルコトガ出來ル. 例ヘバ

$$\log(x+1)-\log x=\log\left(1+\frac{1}{x}\right),\qquad \lim_{x\doteq\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=o$$

ナルガ如シ. サレド級數展開法ヲ用ヒルト更ニ便デアルコトガアル.

演　習

次ノ極限ヲ問フ.

1. $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{2-3x+4x^5}{7x+x^3+7x^5}$.

2 $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{\sqrt{9+2x^4}}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x=\infty}\left[\dfrac{x^2}{a-x}+\dfrac{x^2}{a+x}\right]$.

4. $\lim\limits_{x\doteq1}\dfrac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $\lim\limits_{x=\infty}n\sin\dfrac{x}{n}$.

6. $\lim\limits_{x\doteq0}\sin x(\log x)^2$.

7. $\lim\limits_{x\doteq1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

8, $\lim\limits_{x=\infty}a^{-x}\log x$.

9. $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{x^2-x}{1-x+\log x}$.

10. $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^6}}{1-x+2\sqrt{1+x^2+x^4}}$.

11. $\lim\limits_{x\doteq0}\csc x\sin(\tan x)$.

12. $\lim\limits_{x=\infty}\mathrm{G}(x)e^{-x}$.

但シ $\mathrm{G}(x)$ ハ多項式ナリ.

13. $\lim\limits_{x\doteq0}x^{\alpha}(\log x)^{\beta}$, $\alpha>o$, $\beta>o$.

14. $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{(\log x)^m}{x^n}$, $m>o$, $n>o$.

15. n ガ常ニ常數デアルト,

$$\lim_{x\doteq0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=o$$

ナルコトヲ證明セヨ.

16. $\dfrac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ ノ分母分子ガ $x=a$ ノタメニ ∞ トナルトキニモ其極限ハ $\dfrac{f'(x)}{\mathrm{F}'(x)}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

第十一編

無限級數ノ收斂

1. 等比級數. 代數學ニ於テ等比級數

$$a+ar+ar^2+\dots\dots$$

ニ於テ最初ノ n 項ノ和ハ

$$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}$$

ナリ，例ヘバ $a=1,\ r=\frac{1}{2}$ トスルト

$$S_1=1 \qquad =1$$

$$S_2=1+\frac{1}{2} \qquad =1\frac{1}{2}$$

$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1\frac{7}{8}$$

....

モシ $S_1, S_2, S_3, S_4,\dots\dots$ ヲ表ハス點ヲ線上ニ作圖スルト S_n ハ之ニ先ダッタ S_{n-1} カラ作圖シ得ル，即チ S_{n-1} ト2トノ中央ニアル，從テ n ガ大キクナレバナル程 S_n ハ 2 ニ近ヅク

一般ニ r ノ數値ガ1ヨリ小サイト，即チ

$$|r|<1 \quad 即チ \quad -1<r<1$$

デアルト n ガ無限ニ大キクナルト，r^n ハ極限トシテ o ニ近ヅキ S_n ハ $a/1-r$ ニ近ヅク:

$$(1) \qquad \frac{a}{1-r}=a+ar+ar^2+\dots\dots \qquad |r|<1,$$

2. 無限級數ノ定義. $u_0, u_1, u_2,\dots\dots$ ヲ正或ハ負ノ値ノ一組トシヤウ．今和ヲ作ル

$$(2) \qquad S_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots$$

n ヲ無限ニ大ナラシメルト S_n ガ極限トシテ U ニ近ヅクトセン:

$$\lim_{n=\infty} S_n=U.$$

コノ場合ニハ此式ノ左邊ノ級數ハ收斂スト云ヒ Uナル値ヲ有スルト云ハレル．此事實ヲ次ノ方程式ニ書キ表ハス

$$(3) \qquad U=v_0+u_1+\dots\dots$$

然シモシ S_n ガ極限ニ近ヅカザルトキニハ級數ハ發散スト云ハレル．

此ノ如キ級數ハ無限級數ト名ヅケラレル．無限級數ハ n 項ノ和カラ成立スル變數デアル，S_n ガ極限ニ近ヅクトキハ收斂ナリト云ハレ，否ラザルトキハ發散スト云ハレル．收斂ノ場合ニ於テ其値ヲ $\lim_{n=\infty} S_n$ トシテ定メ，モシ何等ノ値ヲ有シナイトキハ發散級數デアル．

發散級數ノ例ハ

$$1+2+3+4+\ \dots,$$

$$1-1+1-1+\ldots\ldots$$

デアル. (3)ナル級數ノタメニ普通用ヒラレル記法ハ

$$\Sigma u_n \quad 或ハ \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

デアル(1)ナル等比級數ハ

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

デアル.

3. 收斂級數ノ驗シ. 無限級數

$$(4) \qquad 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\ldots$$

但シ $n!$ ハ $1.2.3\ldots\ldots n$ ヲ表ハス.

ニ於テ第二項以下 n 項ノ和

$$\sigma_n=1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3..n}$$

ヲ取リ來ルトシヤウ

之ヲ次ノ等比級數ト比較セバ

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\underbrace{2.2.2\ldots2}_{n-1\text{ 因數}}}$$

$$=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

σ_n ノ項ハ最初ノ二項ノ後ハ S_n ノ項ヨリ小サイカラ

$$\sigma_n<S_n<2.$$

捨テタ項ヲ挿入シ(4)ノ n 項ノ和ヲ S_n デ表ハスト

$$S_{n+1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}<3.$$

ソコデ斯ウ云ハレル, S_n ハ n ノ増加ト共ニ増加スル變量デ, 其値ハ 3 ニ達スルコトハナイ. n ノ値ヲ線上ニ作圖スルト上ノ事實ガ明カデアル.

$$S_1=1 \qquad =1$$

$$S_2=1+1 \qquad =2$$

$$S_3=1+1+\frac{1}{2}=2.5$$

$$S_4=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2.667$$

$S_5=2.708,\quad S_6=2.717,\quad S_7=2.718,\quad S_8=2.718.$

斯様ニ n ガ 1 ダケ大キクナルトキ S_n ヲ表ハス點ハ右方ニ動キ而カモ決シテ 3 ヨリ進マナイ. 故ニ S_n ハ 3 ヨリ小サイ和 e ニ近ヅキ, ソウシテ級數ハ收斂デアル. S_n ノ四個ノ有效ノ數字ハ 2.718 デアルコトハ後ニ説明シヤウ.

上ノ例デ示シタ極限ノ存在ニ關係シタ理論ハ無限級數及ビ解析ノ他ノ分派ニ於テ第一ノ必要ナモノデアル. 次ノヤウニ公式ヲ作ル.

[基礎ノ原則] (1) S_n ハ n ガ増加スルトキ常ニ増加シ

$$S_{n'}>S_n, \qquad n'>n$$

ニシテ, (2)或有限數 A ヲ超過シナイトキ, 即チ

$$S_n<A$$

デアルトキ

$$\lim_{n=\infty} S_n = U.$$

極限 U ハ A ヨリ大キクナイ:　　$U \leqq A$

$$S_1 \quad S_2 \qquad U \quad A$$

［注意］　變數ガ常ニ減少シツヽアルトキモ同様ナリ

上ノ原則ニ依テ正項ノ無限級數ノ收斂ニ就テ簡單ナ驗シヲ說明シヤウ.

直接ノ比較.　收斂スルヤ否ヤヲ試ミル正項ノ級數ヲ

$$u_0 + u_1 + \cdots\cdots$$

トシヤウ. 收斂スルコトガ解ツテヰル正項ノ他ノ級數

$$a_0 + a_1 + \cdots\cdots$$

ノ相當スル項ヨリ小サキコトヲ(少ナクモ等シイ)知ツテヰルト, 卽チ $u_n \leqq a_n$ デアルト驗スベキ級數ハ收斂シ, 其値ハ第二ノ級數ヨリ超過シナイ.

何トナレバ

$$V_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{n-1}$$

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1}$$

$$\lim_{n=\infty} S_n = A$$

然ルニ　　$S_n < A$　及ビ　$V_n \leqq S_n$

デアルカラ　　$V_n < A$,

從テ V_n ハ $U \leqq A$ ナル極限ニ近ヅク.

級數ノ收斂ヲ研究スルトキ初メノ若干項ヲ捨テタモノヲ論ズルコトノヨイコトガ度々アル

$$S_n = (u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_{m-1}) + (u_m + \cdots\cdots + u_{n-1})$$

$$= \bar{u} + S_{n-m}.$$

コヽニ $\bar{u}$ ハ常數デアルカラ $\bar{S}_{n-m}$ ガ收斂スルトキ S_n ハ一ツノ極限ニ近ヅク.

演　　習

次ノ級數ガ收斂スルカ否カヲ試ミヨ

1. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots\cdots$

2. $r + r^4 + r^9 + r^{16} + \cdots\cdots,\quad 0 \leqq r < 1$

3. $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots\cdots$

4. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots\cdots$

5. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots\cdots$

6. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\cdots$

7. $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots\cdots \qquad p > 2.$

4. 發散級數. 級數ガ收斂スルコトガ解ツテキルナラ明カニ其項ハ0ナル極限ニ近ヅク. 何トナレバ然ラザルトキニハ其極限トシテ單ナル點ニ近迫シナイカラデアル. 從テ非常ニ簡單デアル試法ヲ得ル,而カモ項ガ正デアルモ負デアルモ成立スル.

級數ノ諸項ガ極限トシテ0ニ近ヅカナイトキハ發散デアル.

此條件ハ必要デアルケレドモ次ノ例ガ示スヤウニ十分ナモノデナイ.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

ナル級數ノアル項カラソノ前ニアル項ノ數ニ等シイ項數ダケ取リ

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}$$

ノ和ヲ作ルト之ハ$\frac{1}{2}$ヨリモ大キイ. 何ゼト云フト各項ハ$\frac{1}{2n}$ヨリ大キク,其項數ハn項アルカラデアル. 斯樣ニ項數ヲ集メルト何億ト云フ數ヲモ超過スルカラ級數ハ發散デアル.

夫レ故ニ各項ガ次第ニ小サクナルニ拘ハラズ發散ス. 上ノ級數ヲ調和級數ト云フ.

第3款ニ述ベタ收斂級數ノ驗メシニ相當スル發散級數ノ驗メシハ次ノ如シ

直接ノ比較 今

$$u_0+u_1+\cdots\cdots$$

ハ發散スルカ否カヲ驗メス正項ヨリ成ル級數ナリトセン. 發散級數ナルコトガ知レタ第二ノ正項ノ級數

$$a_0+a_1+\cdots\cdots$$

ノ相當スル項ヨリ大ナキイカ或ハ等シイトキニハ,即チ

$$u_n \geqq a_n$$

ナルトキハ前級數ハ發散ナリ.

コノ證明ハ收斂級數ニ於ケル第3款ノモノト同ジコトデアル.

演習

次ノ級數ハ發散デアルコトヲ證明セヨ.

1. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots$

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

3. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$

4. $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\cdots \qquad p<1$

---

5. 試驗比. 級數ノ收斂或ハ發散ニ關スル要用ナル驗メシハ項ガ正ナルモ負ナルモ用ヒラレル一般ノ項ヲ前ノ項ニ比

較スルナリ．其試驗比ト云フノハ u_{n+1}/u_n ナル比ノコトナリ．

試驗比 今無限級數

$$u_0+u_1+\cdots\cdots$$

ノ試驗比ノ近ヅク極限ヲ t トシ，即チ

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=t$$

トスルトキハ

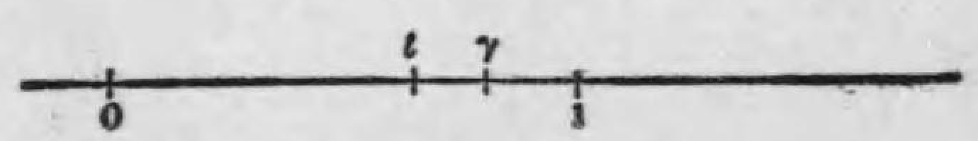
$|t|<1$ ナルトキ級數ハ收歛ナリ，

$|t|>1$ ナルトキ級數ハ發散ス，

$|t|=1$ ナルトキ級數ノ驗メシハ不能ナリ．

スベテノ項ガ正ノ數ナルトキ收歛スル場合ヲ證明シヤウ，即チ $t\geqq o$ 及 $|t|=t$ トス．

$t<1$ ナリトシ γ ハ t ト 1 トノ間ニアルトシヤウ．u_{n+1}/u_n ハ極限トシテ t ニ近ヅクカラ此變量ヲ表ハス點ハ t ノ周リニ群ガル，終極ニハ $n>m$ ナル n ノ定値カラハ γ ナル點ヨリ左ニアルコトヽナル．



$n=m,\ m+1,\cdots\cdots$ ヲ與ヘルト

$$n=m,\qquad \frac{u_{m+1}}{u_m}<\gamma,\quad u_{m+1}<u_m\gamma$$

$$n=m+1.\quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<\gamma,\quad u_{m+2}<u_{m+1}\gamma<u_m\gamma^2$$

$$n=m+2\ \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<\gamma,\quad u_{m+3}<u_{m+2}\gamma<u_m\gamma^3$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ u_m カラノ項ハ收歛等比級數ノ項

$$u_m+u_m\gamma+u_m\gamma^2+\cdots\cdots$$

ヲ超過スルコトハナイ．

故ニ級數ハ收歛デアル．

次ニ $|t|>1$ デ，項ハ正或ハ負デアルトスルト，$n>m$ デアルト

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1 \quad 或ハ \quad |u_{n+1}|>|u_n|,$$

即チ其後ノ項ハ常數 u_m ヨリ數値ハ段々大キクナルカラ極限ハ o ニ近ヅカナイ．故ニ級數ハ發散デアル．

終ニ $|t|=1$ デアルト級數ノ收歛ニ就テハ手掛リガナイ，假使ハ調和級數ノ如キハ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},\qquad \lim_{n=\infty}\frac{u_{m+1}}{u_m}=1$$

トナリ，而カモ發散ス，然レドモ第3款ノ演習題6ニ於テハ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2,\quad \lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

トナレドモ級數ハ收歛スル．

演　習

次ノ級數ハ收歛スルカ發散スルカヲ述ベヨ．

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots\ldots$ 答 收斂ス.

2. $\frac{1.2}{100^2}+\frac{1.2.3}{100^3}+\frac{1.2.3.4}{100^4}+\ldots\ldots$ 答 發散ス.

3. $\frac{1}{3}+\frac{1.2}{3.5}+\frac{1.2.3}{3.5.7}+\ldots\ldots$ 4. $\frac{3}{5^3}+\frac{3^2}{10^3}+\frac{3^3}{15^3}+\ldots\ldots$

次ノ級數ハ x ノ如何ナル値ヲ有スルトキ收斂スルカ,發散スルカ.

5. $1+x^2+x^4+\ldots\ldots$ 6. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$

---

6. 交代級數. 定理. 級數ノ諸項ガ交ル々正負ヲ異ニスルトセヨ:

$$u_0-u_1+u_2-\ldots\ldots$$

若シ各項ハ前ノ項ヨリ小(或ハ等シク)且ツ

$$\lim_{n=\infty} u_n=0$$

ナルトキハ收斂ナリ.

例ヘバ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

ナルトキノヤウナモノデアル. 初メノ n 項ノ和ヲ S_n トスレバ $n=2m$ ノトキハ

$$S_{2m}=(u_0-u_1)+(u_2-u_3)+\ldots\ldots+(u_{2m-2}-u_{2m-1}),$$

卽チ S_{2m} ハ m ガ增加スルトキ常ニ增加ス(或ハ不變ナリ).

$n=2m-1$ デアルトキ

$$S_{2m+1}=u_0-(u_1-u_2)-\ldots\ldots-(u_{2m-1}-u_{2m}),$$

卽チ S_{2m+1} ハ m ガ增加スルトキ減少ス(或ハ不變ナリ).

又 S_{2m} ハ一定ノ量 S_1 ヲ超過スルコトナシ, 何トナレバ

$$S_{2m}=S_{2m+1}-u_{2m}\leqq S_{2m+1}\leqq S_1,$$

故ニ第3款ノ基礎ノ原則ニ依リ S_{2m} ハ一ツノ極限ニ近ヅク.

同樣ニ S_{2m+1} ハ S_2 ヨリ小サイコトハナイ, 何トナレバ

$$S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m}\geqq S_{2m}\geqq S_2.$$

終リニ此等ノ極限ハ等シイ, 何トナレバ

$$S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m},\quad \lim_{m=\infty} S_{2m+1}=\lim_{m=\infty} S_{2m}+\lim_{m=\infty} u_{2m}$$

然ルニ假定ニ依リテ $\lim u_n=0$. 故ニ S_n ノ n ガ奇數偶數ヲ經テ無限大トナルトキ一ツノ極限ニ達ス.

交代級數ヲ或項ニ於テ切リ離ナストモ其誤差ハ其最後ノ項ノ絕對値ヨリ大キクナイコトハ容易ニ證明セラレル.

---

7. 正項或ハ負項ノ級數一般ノ場合 初メノ正ノ m 項ノ和ヲ

$$\sigma_m=v_0+v_1+v_2+\ldots\ldots+v_{m-1}$$

トシ, 初メノ p 個ノ負項ノ和ヲ

$$-\tau_p=-w_0-w_1-\ldots\ldots-w_{p-1}$$

トセン, 然ルトキハ m 及ビ p ノ適當ノ選擇ニ依ツテ

$$\mathrm{S}_n = \sigma_m - \tau_p$$

トナル, 例ヘバ u ノ級對ガ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots,$$

トセバ v ノ級數ハ

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$$

デ, w ノ級數ハ

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdots\cdots$$

デアルヤウナモノデアル.

$n=\infty$ ノトキ m ト p トハ一般ニ何程ニテモ大キクナル, ソウシテ二ツノ場合ガ出來テクル.

第一ノ場合. σ_m 及ビ τ_p ガ極限ニ近ヅクトキ, 即チ v 級數ト w 級數ガ收斂スルトキハ u 級數ハ收斂シ

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{S}_n = \mathrm{U}, \quad \mathrm{U}=\mathrm{V}-\mathrm{W}$$

第二ノ場合. σ_m, τ_m ノ少ナクモ一ツガ發散級數ナルトキ, 上ノ例デ示ス樣ニ u 級數ハ收斂スルコトアリ.

補助級數ノ一ツガ收斂シ, 一ツガ發散スルトキハ

$$1-r+\frac{1}{2}-r^2+\frac{1}{3}-r^3+\cdots\cdots, \quad 0<r<1$$

ノヤウニ S_n ハ一ツノ極限ニ近ヅクコトナシ.

絕對收斂級數. u 級數ノ各項ノ絕對値ヲ取リ一ツノ級數ヲ作ルトセン:

$$|u_0|+|u_1|+\cdots\cdots,$$

コヽニ $|u_m|$ ハ u_n ガ正ナレバ或 v ニシテ, 負ナレバ或 w デアル.

$$\mathrm{S}'_n = |u_0|+|u_1|+|u_2|+\cdots\cdots|u_{n-1}|,$$

トセバ

$$\mathrm{S}'_n = \sigma_m+\tau_p,$$

v 級數, w 級數ガ收斂スルトキハ絕對値ノ級數ハ收斂スル.

逆ニ絕對値ノ級數ガ收斂スルトキハ v 級數ト w 級數トガ收斂ス, 何トナレバ後者ガ二ツナガラ正項デアルト, 何程多クノ項數ヲ加ヘルトモ其和ハ何レモ絕對値ノ級數ノ U' ヲ超過スルコト能ハズシテ第3款ノ原則ニ依リテ其等ノ級數ハ收斂ス.

絕對値ノ級數ガ收斂スルモノヲ絕對收斂級數ト云ヒ或ハ無條件收斂級數ナリトモ云ハレル.

即チ第5款ノ定理ヲ完成スルコトガ出來ル, 即チ

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \quad |l|<1$$

ニ於テ絕對値ノ級數ハ收斂ス, 何トナレバ

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|, \text{ソレカラ } \lim_{n=\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=|l|<1$$

從テ u 級數ハ絕對ニ收斂ス.

〔例 1〕 級數

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots$$

ノ收歛ヲ試ミヤウ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{n}{n+1}x,\quad \lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=-x$$

デアルカラ級數ハ $-1<x<1$ デアルトキ收歛シ, 此間隙ノ外方ニ於テ發散ス.

發散 -1 — 0 1 發散
收歛

此間隙ノ兩端ニテハ此タメシハ失敗ス. 然シ $x=1$ ニ於テハ級數ハ收歛交代級數ニシテ, $x=-1$ ニ於テハ負ノ調和級數トナルカラ發散ス.

〔例 2〕 級數

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

ノ普通項

$$u_k=\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{k!}x^k$$

n ガ正整數ナルトキハ終リノ項ハ 0 トナリ級數ハ多項式ニ變ジ, $(1+x)^n$ ノ二項定理ニ歸ス. n ガ正ノ整數デナイトキハ試驗比ノ値ハ

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{n-k}{k+1}x \quad 及ビ \quad \lim_{k=\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=-x$$

トリ $-1<x<1$ デアルト收歛シ, $|x|>1$ デアルト發散ス.

收歛ノ間隙ニ於テ級數ガ收歛スルカ發散スルカノ試ミハ頗ル思考ヲ要ス.

演　習

次ノ指數ガ正デ且ツ次第ニ增加スル單項式ヲ項トスル級數ハ x ノ値如何, 又圖ニテ收歛ノ範圍ヲ定メヨ.

1. $1+x+2x^2+3x^3+\ldots\ldots$ 　答 $-1<x<1$.
2. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$ 　答 $-\infty<x<\infty$.
3. $2.1x+3.2x^2+4.3x^3+\ldots\ldots$
4. $1-mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$
5. $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\ldots\ldots$

---

8. 冪級數 正デ次第ニ增加スル次數ヲ有スル單項式カラ成ル級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$$

ヲ冪級數ト云フ. 此ヤウナル級數ハ 0 ナラヌ x ノ凡ベテノ値ニ對シテ收歛スルコトモアリ, 或ハ 0 デナイ或値ノトキニ收歛シ他ノ値ノトキニ發散スルコトモアル.

上ノ第二ノ場合ニハ收斂ノ間隙ハ $x=0$ ノ兩側ニ擴ガル. コレハ實際ニ起ル所ノ羃級數デ證明セラレルコトガ容易デアル, 卽チ二ツノ連續スル係數ノ比ガ一ツノ極限ニ近ヅクコトヲ假想ス:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\mathrm{L}.$$

試驗比ハ

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}x=\mathrm{L}x.$$

故ニ $\mathrm{L}=0$ デアルト級數ハ x ノスベテノ値ニ對シテ收斂ス. モシ $\mathrm{L}\neq 0$ ナルトキ,

$$|\mathrm{L}x|<1 \quad 卽チ \quad -|\mathrm{L}|<x<|\mathrm{L}|$$

ナルトキ收斂シ, 他ノ場合ニ於テ發散ス.

---

9. 無限級數ニ於ケル運算 無限級數ノ値ハ多項式ノ値ニ異ナリテ變ズル多項式ノ極限デアルカラ多項式ノ樣ニ項ノ順序ヲ變ジテモ可ナリト云フヤウナ譯ニイカヌ. 然シ無條件級數デアルト級數ノ値ヲ變ジナイデ順序ヲ變ズルコトガ出來ル.

又或二ツノ收斂級數ハ各項相加ヘルコトガ出來ル.

$$\mathrm{U}=u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{V}=v_0+v_1+v_2+\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{U}+\mathrm{V}=u_0+v_0+u_1+v_1+u_2+\ldots\ldots.$$

二ツノ無條件級數ハ多項式乘法ノヤウニ乘ズルコトガ出來ル.

$$\mathrm{UV}=u_0v_0+v_0v_1+u_1v_0+u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0+\ldots\ldots$$

特ニ羃級數ニ於テハ

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots,$$

$$\phi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots,$$

ニ於テ

$$f(x)\,\phi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x^2+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_1)x^2+\ldots.$$

此ヤウニシテ得タ二ツノ級數ハ少ナクモ二ツノ級數ノ收斂ノ間隙ノ小サイモノノ內ニ含マレタル x ノスベテノ値ニ對シテ收斂ス.

一ツノ羃級數ヲ他ノ羃級數デ除スルコトガ出來ル, コレハ次ノ編デ $\tan x$ ヲ展開スルトキニ說明シヤウ.

特ニ大切ナモノヲ羃級數ノ各項ヲ夫レ々々微分シ或ハ積分スルコト多項式ノ場合ノヤウニナスコトナリ. 例ヘバ等比級數

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots$$

ヲ x ニ就テ微分スルト,

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$$

ヲ得ル，コレハ上ノ級數ヲ自乘シテ檢證シ得ラレルモノデアル.

又方程式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots$$

ノ兩邊ヲ 0 ト h トノ間ニ積分スルト

$$\int_0^h \frac{dx}{1+x}=\log(1+x)\Big|_0^h=\log(1+h)$$

デアルカラ

$$\log(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{3}-\cdots\cdots.$$

此級數ト其レカラ直ニ得ラレル他ノ級數ニ依ッテ自然對數ガ得ラレル.

同樣ニ

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots\cdots$$

カラ $\tan^{-1}h$ ヲ得ラレル:

$$\int_0^h \frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}h=h-\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5}-\cdots\cdots$$

此級數ニ依ッテ π ノ値ヲ精密ニ得ラレル.

級數ノ研究ニ從事スル前ニ此際如何ナル簡單ナ級數ガ計算ノ一手段トシテ實際用ヒラレルカヲ見ルコトガ價値アルコトガアル.（原著者ノ書ニ於ケル無限級數ノ第二編ニ於テ"計算ノ一手段トシテノ級數"ト云フ表題ヲ見ヨ）

演習

1. $\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\cdots\cdots$ ハ x ノスベテノ値ニ對シテ絕對ニ收斂スルコトヲ證明セヨ.

2. $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots$ 及ビ $b_1+b_3+\cdots\cdots$ ガ或二ツノ絕對收斂級數デアルトキハ

$$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots\cdots,$$

$$b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots\cdots$$

ハ絕對ニ收斂ス

3. 級數

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{4-x^2}+\frac{2x}{9-x^2}+\cdots\cdots$$

ハ其項ガ意義ヲ有スル x ノスベテノ値ニ對シテ收斂ナリ.

4. 級數

$$\left(\frac{1}{x+1}-1\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots$$

ハ收斂ナリヤ發散ナリヤ.

第十二編

「テーラー」ノ定理

1. 「マクローラン」ノ級數 前編ニ於テ計算ノ目的トシテ級數デ或函數ヲ表ハスコトガ要用デアルカヲ示シタ.又斯樣ナ表現法ハ函數ノ性質ヲ研究スル上ニ一ツノ助ケトナル.故ニ今多クノ函數ヲ冪級數デ表ハス一般ノ方法ヲ說明シヤウ,而カモ普通ノ表ハシ方デ函數ヲ展開シヤウ.

函數ガ冪級數デ表ハサレタリトシヤウ:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots$$

コヽニ係數ハ何トナスカ. $x=0$ ト置クトキハ

$$f(0) = c_0.$$

次ノ係數ヲ求ムルタメニ微分スルト

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots\ldots.$$

再ビ $x=0$ ト置ケバ

$$f'(0) = c_1,$$

此仕方デ進ムト

$$f''(x) = 2.1\,c_2 + 3.2\,x + 4.3\,c_4 x^2 + \ldots\ldots$$

$$f''(0) = 2.1\,c_2 \qquad \therefore\ c_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$

以下同樣ニシテ一般ノ係數ハ

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

ソレカラシテ $f(x)$ ガ x ノ冪級數ニ表ハサレルナラバ,級數ハ次ノ形ヲナス:

$$(1) \qquad f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots,$$

此級數ハ「マクローラン」ノ級數トシテ知ラレテヲル.

例ヘバ $f(x) = e^x$ ニ於テ

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ f^{(n)}(x) = e^x, \ldots\ldots$$

從テ $f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1, \ldots\ldots$

デアルカラ展開ハ次ノヤウニナル.

$$(2) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

此級數ハ x ノスベテノ値ニ對シテ收斂ス.

演 習

函數ハ「マクローラン」ノ級數デ展開セラレルモノト見テ次ノ展開式ヲ得ルコトヲ證明セヨ.

1. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots$

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots$

3. $a^x = 1 + x \log a + \dfrac{x^2(\log a)^2}{2!} + \dfrac{x^3(\log a)^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$

4. $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$

5. $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\cdots$

6. $e^{\sin x} = 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots\cdots$

---

2. 「テーラー」ノ級數 函數ガ x ノ冪級數トシテ表ハサレ得ナイコトガアル. 例ヘバ

$$f(x) = \log x$$

ニ於テハ $f(0)=-\infty$ トナル. 然シ冪級數ハ連續函數ヲ表ハシソウシテ x ノ冪級數ガ $\log x$ ヲ表ハスコトハ豫期サレナイ.

一般ニ函數或ハ微係數ガ $x=0$ ノタメニ不連續トナルトキ「マクローラン」ノ級數トシテ表ハスコトガ出來ナイ.

其目安(自變數)ニ割當テル値ガ小サイトキ冪級數ハ其計算ノタメニ要用デアル. $x=x_0$ ナル單一ノ點デ函數及ビスベテノ微係數ノ値ガ知レルトカ或ハ容易ニ計算シ得ラレルナラバ $x=x_0+h$ ニ相應シタ近所ノ點デ h ノ冪級數トシテ表ハサレル(x ノ冪級數デナク). 然ルトキニハ

$$x=x_0+h, \quad h=x-x_0$$

ト置クト, 展開ガ出來ルナラバ

$$f(x)=f(x_0+h)=c_0+c_1h+c_2h^2+\cdots\cdots$$

「マクローラン」ノ級數ノ場合ノヤウニ係數ヲ定メルコトガ出來ル. $h=0$ トスレバ

$$f(x_0)=c_0$$

h ニ就テ微分ス (x_0 ハ常數ナリ)

$$\frac{df(x)}{dh}=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dh}=f'(x)$$

$$f'(x_0+h)=c_1+2c_2h+3c_3h^2+\cdots\cdots,$$

$$f'(x_0)=c_1.$$

$$f''(x_0+h)=2.1c_2+3.2c_3h+4.3c_4h^2+\cdots\cdots$$

$$f''(x_0)=2.1c_2, \quad c_2=\frac{f''(x_0)}{2!},$$

....

$$c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

$f(x)$ ガ h ノ冪級數ニ展開セラレルナラバ級數ハ次ノ形ヲ有ス:

(3) $$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots\cdots$$

h ヲ $x-x_0$ ニ還原スルナラバ

(3′) $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\cdots$$

コレガ「テーラー」ノ級數トシテ知ラレタモノデアル.

例ヘバ

$$f(x)=\log x, \qquad x_0=1$$

トセバ

$$f'(x)=\frac{1}{x},\qquad f'(1)=1$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2},\qquad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2.1}{x^3},\qquad f'''(1)=2!,$$

....

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n},\quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

従テ級數ハ次ノ形ヲ有ス

$$\log(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\cdots\cdots$$

コレハ前編ニ於テ積分デ得タモノデアル. 級數ハ1ヨリ小サイ h ノ値ノタメニ收歛ス.

「マクローラン」ノ級數ハ $x_0=0$ トシテ得ラレル「テーラー」ノ級數ノ特別ノ場合デアル. 逆ニ「テーラー」ノ級數ハ上ニ示シタヤウニ x ヲ h ニテ置換ヘ $f(x_0+h)$ ヲ「マクローラン」ノ級數ヨリ得ラレル.

演　習

函數ガ「テーラー」ノ級數デ展開シ得ラレルモノトシテ次ノ展開ヲナセ.

1. $e^{a+h}=e^a+e^a h+\frac{e^a}{2!}h^2+\cdots\cdots$

2. $x^n=(a+h)^n=a^n+n\,a^{n-1}h+$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-1}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}h^2+\cdots\cdots$$

3. $\log x=\log 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{2^3}-\cdots\cdots$

4. $\tan x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$ トシテ展開セヨ.

---

3. 「テーラー」ノ定理ノ證明.

$f(x)$ ナル函數ハ $a\leqq x\leqq b$ ナル間隙ニ於テ連續ナリトシ且其間隙ニ於テスベテノ階級ノ微係數ヲ有スルトシヤウ.

其間隙中ニ一點 x_0 ヲ任意ニ取リ之ヲ固定シ x_0+h ハ同ジ其間隙ニアリトシ,「テーラー」ノ最初ノ $n+1$ 項デ函數ノ値ニ近似ナルモノヲ得タモノトシヤウ.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\mathrm{R}. \tag{4}$$

此 R ハ函數ト近似値トノ誤差ヲ表ハス. 此近似値ハ最好ナルカヲ見ルタメニ此量ノ數値ヲ明カニスルヤウナ R ノ式ヲ有セネバナラヌ.

R ヲ次ノヤウニシテ見出ス.

$$\mathrm{R}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{P},\quad 即チ\quad \mathrm{P}=\mathrm{R}\div\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

然ルトキハ(4)ハ

$$(5)\quad f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)-\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{P}=0$$

今次ノ z ノ函數ヲ任意ニ作ルトセン：

$$\phi(z)=f(\mathrm{X})-f(z)-(\mathrm{X}-z)f'(z)-\frac{(\mathrm{X}-z)^2}{2!}f''(z)-\ldots\ldots$$
$$-\frac{(\mathrm{X}-z)^n}{n!}f^{(n)}(z)-\frac{(\mathrm{X}-z)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{P}.$$

但シ $\mathrm{X}=x_0+h$ ニシテ X 及ヒ P ハ常數デアル. 此函數ハ $x_0\leqq z\leqq \mathrm{X}$ ナル間隙ニ於テ「ロール」ノ定理ノスベテノ條件ヲ具ヘテオル, 卽チ $\phi(\mathrm{X})$ ハ明カニ 0 デアル, マタ (5) ノ左邊ト比較スルト $\phi(x_0)$ ハ 0 デアル. 故ニ間隙ノ或一點ニ於テ $\phi(z)$ ノ微係數ガ 0 トナルベシ.

今此微係數ヲ計算シ互ニ消失スル項ノ澤山アルコトヲ見出ス：

$$\phi'(z)=-f'(z)+f'(z)-(\mathrm{X}-z)f''(z)+(\mathrm{X}-z)f''(z)-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\frac{(\mathrm{X}-z)^n}{n!}f^{(n+1)}(z)+\frac{(\mathrm{X}-z)^n}{n!}\,\mathrm{P}$$

從テ最終ノ二項ノミ殘ル.

$$\phi'(z)=-\frac{(x-z)^n}{n!}f^{(n+1)}(z)+\frac{(x-z)^n}{n!}\,\mathrm{P}.$$

「ロール」ノ定理カラ

$$\phi'(z)=0,\quad x_0<z<\mathrm{X}\quad 或ハ\quad z=x_0+\theta h,\quad 0<\theta<1$$

ヲ得ベク次ノ結果ニ導ク

$$(6)\quad \mathrm{P}=f^{(n+1)}(x_0+\theta h),\qquad \mathrm{R}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h).$$

此ヤウニ微積分ニ必要ナル定理, 卽チ餘數ヲ有スル「テーラー」ノ定理ヲ得：

$$(7)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\,h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h),\quad 0<\theta<1.$$

$n=0$ ト置ケバ第二項ニ終ルモノヲ得, 卽チ平均法則ヲ得.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h).$$

$n=1$ トスレバ

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0+\theta h)$$

n ヲ無限ニ大キクスレバ (7) ノ $n+1$ 項ハ $f(x)$ ニ相應スル一ツノ無限級數ナル「テーラー」級數ヲ得. 此級數ガ收斂シ且 $f(x)$ ヲ表ハスニハ

$$(8)\qquad \lim_{n=\infty}\mathrm{R}=0$$

ナルコトガ必要ニシテ十分ナルコトデアル.

(8) ナル條件ガ具備セラレルトキ函數ハ $x=x_0$ ノ周リニ「テーラー」定理ニ依ツテ展開セラレルト云フ.

4. 餘數ノ第二形式　餘數ノ形式ヲ變ズルコトガ出來ル，卽チ

$$\mathrm{R} = h\mathrm{P}$$

トシテ第3款ノヤウニスルノデアル，卽チ

$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)-\ldots\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)-h\mathrm{P}=0$$

トシテ z ノ函數

$$f(z)=f(\mathrm{X})-f(z)-(\mathrm{X}-z)f'(z)-\frac{(\mathrm{X}-z)^2}{2!}f''(z)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\frac{(\mathrm{X}-z)^n}{n!}f^{(n)}(z)-(\mathrm{X}-z)\mathrm{P},$$

ヲ作ル，但シ $\mathrm{X}=x_0+h$ 此函數ハ $x_0 \leqq z \leqq \mathrm{X}$ ナル間隙ニ於テ「ロール」ノ定理ノ條件ヲ具備スルカラ其微係數

$$\phi'(z) = -\frac{(\mathrm{X}-z)^n}{n!}f^{(n+1)}(z)+\mathrm{P}$$

ハ其間隙中ノ或一點 $z=x_0+\theta h$ ニ於テ 0 トナルベシ，卽チ

(9) $$\mathrm{R} = \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h).$$

---

5. e^x, $\sin x$, $\cos x$ ノ展開　函數 e^x ハ $x_0=0$ ノ周リニ「テーラー」ノ定理ニ依ツテ展開ガ出來ル，卽チ

$$f(x)=e^x,\quad f'(x)=e^x,\ldots\ldots f^{(n)}(x)=e^x,$$
$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\ldots\ldots f^{(n)}(0)=1.$$

R ナル餘數ハ (6) ニテ得ラレル：

$$\mathrm{R}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta h}.$$

$h<0$ ナラバ $e^{\theta h}<1$, 且ツ $\mathrm{R}<\dfrac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$.

$h>0$ ナラバ $e^{\theta h}<e^h$ 且ツ $\mathrm{R}<\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}e^h$.

從テ

$$\lim_{n=\infty}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{h}{1}\cdot\frac{h}{2}\ldots\ldots\frac{h}{n}\,\frac{h}{n+1},$$

h ノ絶對値ガ大ナリトモ n ハ何ホドニテモ大ナラシメルコトガ出來ルカラ右端ノ因數ハ右ニ進ムニ從ツテ段々ニ小サク其ノ右端ノモノノ絶對値ハ何程ニテモ小ナラシメル事ガ出來ルカラ

$$\frac{|h|}{n}<\frac{1}{2}$$ ナル正整數 m ガ實存ス.

前式右邊ノ最初ノ m 個ノ因數ノ積ノ絶對値ヲ c トスル.
其ノ他ノ各因數ノ絶對値ハ $\dfrac{1}{2}$ ヨリ小デアルカラ

$$\left|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\right|<c\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m+1}.$$

コレハ n ヲ無限ニ大ナルモノトスレバ 0 ニ近ヅクカラ

$$\lim_{n=\infty}h^{n+1}/(n+1)!=0.$$

然ルトキハ $\lim\limits_{n=\infty}\mathrm{R}=0$ ヲ得, h ヲ x ニ置キ換ヘルト

(10) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$$

級數ハ收斂シ x ノスベテノ値ニ對シテ函數ヲ表ハス.

同樣ニ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots \tag{11}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots \tag{12}$$

演 習

1. e^x ハ「テーラー」ノ定理ニテ x_0 ナル點ノ周リニ展開セラレルコトヲ證明セヨ.

2. $\sin x$ 及ビ $\cos x$ ガ或點 x_0 ノ周リニ展開セラレ得ルコトヲ證明セヨ.

---

6. 應用 今二ツ三ツ「テーラー」ノ定理ノ應用ヲ示サン. 第二,三,四編ノ無限級數ノ應用ハ學生ニ委ネル.

(1) 極大,極小「インフレクション」ノ點 第三編ニ於テ極大,極小「インフレクション」ニツイテ說明シタガ更ニ十分ニ說明シヤウ.

$f(x)$ ハ n 個ノ最初ノ微係數ハ $x=x_0$ ノ近隣ニ於テ連續ナリトシ且ツ

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)=0, \ldots\ldots f^{(n-1)}(x_0)=0$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

トセン, 然ルトキハ餘數ヲ有スル「テーラー」ノ定理ニテ

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h^n f^{(n)}(x_0+\theta h) / n! \tag{13}$$

n ガ偶數デアルナラバ h^n ハ $h=0$, $x=x_0$ ノ兩側ニ於テ正デアル, 又 $f^{(n)}(x)$ ハ連續デアルカラ x_0 ノ周リノ間隙 $x_0-a < x < x_0+a$, $-a < h < a$ ニ於テ $f^{(n)}(x_0)$ ト同記號デアル.

ソレカラシテ (13) ノ右邊ハ正或ハ負デアル.

極大極小ノ試ミ. モシ

$$f'(x_0)=c_0,\quad f''(x_0)=0, \ldots\ldots f^{(2m-1)}(x_0)=0,\quad f^{(2m)}(x_0) \neq 0$$

デアルトキ, 函數 $f(x)$ ハ

$f^{(2m)}(x_0) < 0$ ナルトキ

$x = x_0$ ニ於テ極大,

$f^{(2m)}(x_0) > 0$ ナラバ $x=x_0$ ニ於テ極小

一方ニ n ガ奇數デアルト (13) ノ右邊ハ h ト共ニ記號ヲ變ズルカラ切線ガ x ノ軸ニ平行デアル「インフレクション」ノ點デアル.

モツト一般ニ云ヘバ, 切線ガ x ノ軸ニ平行デアルカ否カヲ問ハズ「インフレクション」ノ點ノ條件ハ $\tan\tau = f'(x)$ ガ極大デアルカ, 極小デアルカデアル. 故ニ一度ナシタ驗シヲ $f(x)$ デナク $f'(x)=\tan\tau$ ニ應用スルノデアル.

「インフレクション」ノ點ノタメノ驗シ.

$$f''(x_0)=0,\ \ f'''(x_0)=0,\ldots\ldots f^{(2m)}(x_0)=0,\ \ f^{(2m+1)}(x_0)\neq 0$$

デアルナラバ $y=f(x)$ ハ $(x_0, y_0)=0$ ナル點ニ於テ「インフレクション」ナリ.

---

2. ニツノ曲線ノ切觸ノ度 二ツノ曲線 c_1 ト c_2 トガ, ソノ共有ノ點デ共通ノ切線 PT ヲ有スルトシ, PT 上ノ M 點ハ非常ニ P ニ近キ點ナリトセヨ (便利上 M ハ P ニ近ク取ラレ P ニ近ヅクコトヲ意味ス) M ニ垂直線ヲ立テ c_1 ニ P_1 ニ於テ交ハリ, c_2 ニ P_2 ニ交ハルトシヤウ PM, 弧 PP_1, PP_2 ハ同ジ階級ノ微小數ナリ. PM ヲ主要微小數トシテ取リ, 微小數 P_1P_2 ノ階級ヲ n トスルト, c_1 ト c_2 トハ $n-1$ 階級ノ切觸ヲナセリト云フ.

例ヘバ拋物線

$$c_1 : y=x^2$$

ト其頂點ニ於ケル切線

$$c_2 : y=0$$

トハ一次ノ切觸ヲスル. 又 $y=x^3$ ト其原點ニ於ケル切線トハ二次ノ切觸ヲナス (原點ハ「インフレクション」ノ點).

又 $y=x^3$, $y=x^3-x^4$ ナル曲線トハ第三次ノ切觸ヲナヘ.

坐標ヲ變ズルト切線 PT ガ x 軸ニ平行スル様ニスルコトガ出來ル, ソウシテ切觸ノ度ニハ影響スルコトガナイカラ,

曲線ノ方程式ガ

$$c_1 : y=f(x)$$

$$c_2 : y=\phi(x)$$

ノヤウニスルコトガ出來ル, 從テ

$$y_0=f(x_0)=\phi(x_0),\quad f'(x)=0,\quad \phi'(x)=0.$$

從テ餘數ヲ有スル (7) ナル「テーラー」ノ定理カラ

$$c_1 : y-y_0=\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)$$

$$c_2 : y-y_0=\frac{h^2}{2!}\phi''(x_0)+\ \ldots\ldots+\frac{h^n}{n!}\phi^{(n)}(x_0+\theta' h)$$

P_1P_2 ナル微小數ハ c_1 ノ y 及ビ c_2 ノ y ノ値トノ差ニ等シ, 即チ

$$\text{(14)}\qquad \frac{h^2}{2}\Big[f''(x_0)-\phi''(x_0)\Big]+\ldots\ldots$$

$$+\frac{h^n}{n!}\Big[f^{(n)}(x_0+\theta h)-\phi^{(n)}(x_0+\theta' h)\Big]$$

故ニ P ニ於テ曲率半徑ヲ異ニスルトキハ $f''(x_0)$ ト $\phi''(x_0)$ トハ等シクナイカラ, P_1P_2 ハ二次ニシテ從テ一次ノ切觸ヲナス.

---

(3) $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$ ノ値ヲ「テーラー」ノ定理ヲ用ヒテ出スコトノ例ヲ示サントス.

[例 1] $\lim\limits_{x\doteq 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$ ヲ求ム.

$$\frac{x-\sin x}{x-\tan x}=\frac{\frac{1}{6}x^3+x\ ノ高次式}{-\frac{1}{3}x^3+x\ ノ高次式}$$

故ニ $x\doteq 0$ ナルトキハ $-\dfrac{1}{2}$ トナル.

[例 2] $\lim\limits_{x=\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)$ ヲ求ム.

之ヲ $x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)$ トセバ根式ヲ「テーラー」ノ定理即チ二項定理ニテ展開スレバ

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^4}+\cdots\cdots$$

デアルカラ $x=\infty$ ナルトキハ $1/x$ ハ 0 ニ近ヅクカラ所題ノ値ハ 0 デアル.

演 習

1. $y=2\cos x+x\sin x$ ハ $x=0$ ナルトキ極大デアルコトヲ證明セヨ.

2. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{3}\sin x+\dfrac{1}{12}\sin 2x$ ノ極大, 極小ノ點, 「インフレクション」ノ點ヲ求メ, 圖形ヲ作レ.

3. $y=\cos x$ ハ $y=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4$ ト $(0,1)$ ナル點ニ

於テ五次ノ切觸ヲナスコトヲ證明セヨ.

4. $y=a+bx+cx^2$ ガ $x=0$ ニ於テ $y=e^x$ ト二次ノ切觸ヲナスヤウニ定メヨ.

5. 次ノ等式ヲ證明セヨ.

(a) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ \cdots\cdots$

(b) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x^b}dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\cdots\cdots(a>0)$

(c) $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+\cdots\cdots$

6. 次ノ極限ヲ求メヨ.

$\lim\limits_{x\doteq 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right).$ 答 0.

$\lim\limits_{x\doteq\infty}(\sqrt{1+x}-x).$ 答 $-\infty$.

$\lim\limits_{x\doteq 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$ 答 1.

$\lim\limits_{x\doteq 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$ 答 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

7. $f(x)<\phi(x)$ ナルトキ $\dfrac{d}{dx}f(x)<\dfrac{d\,\phi(x)}{dx}$?

8. $\dfrac{d\,f(x)}{dx}>\dfrac{d\,\phi(x)}{dx},\ f(x_0)=\phi(x_0)$ ナラバ

$$f(x_0+h)\gtreqless\phi(x_0+h),\quad h>0?$$

9. $\sin\alpha-\alpha$ ハ α ヲ主要微小數トスルト第三次ノ微小數ナルコトヲ證明セヨ.

10. 方程式 $\phi\sin\phi=1$ ハ 0 ト $\pi/2$ トノ間ニ唯一根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

第十三編

偏微分法

1. 多クノ變數ノ函數 極限及ビ連續

本編ニ於テハ一ツヨリ多クノ變數ニ屬スル函數ヲ論ジヤウ. 例ヘバ矩形ノ面積 z ハ二邊 x, y ノ積ニ等シ, 即チ

$$z=xy.$$

又直六面體ノ體積 u ハ三邊 x, y, z ノ積ニ等シ, 即チ

$$u=xyz.$$

獨立變數ノ數ガ二ツアルトキ

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

ハ幾何學的ニハ面ヲ表ハス.

此ノ如キ函數ハ (x_0, y_0, z_0) ナル點ニ於テ x ト y トノ値ノ少許ノ變化ニ伴ヒテ函數ニ少許ノ變化ヲ與ヘルトキ函數ハ連續ナリト云ハレル. (x, y) ナル點ガ (x_0, y_0) ナル點ニ近ヅクトキニハ平面上ノ (x, y) 點ガ (x_0, y_0) ニ近ヅク方法ニ關セズ (1) ナル面ノ (x, y, z) ナル點ハ空間ノ (x_0, y_0, z_0) ナル極限點ニ近ヅクトキ函數ハ z_0 ナル極根ニ近ヅクト云ハレル.

之ヲ比較的精密ナ仕方デ表ハシ且ツ二變數ヨリ多キ函數ニ適用シ得ラレルヤウニスルタメニヲ取リソレヲ正ノ微小數

トシ，且ツ正ノ δ ナル數ヲ取リ x, y ノスベテノ近隣ノ點ニ於テ（勿論 x_0, y_0 ヲ除ク）

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta$$

ナルトキハ

$$|f(x, y)-z_0|<\varepsilon$$

トナルヤウナ δ ガ見出サレルナラバ z_0 ハ $f(x, y)$ ノ極限ト云ハレル，ソウシテ

$$\lim_{x \doteq x_0,\ y \doteq y_0} f(x, y)=z_0$$

コノヤウニ觀念ヲ作ツタ以上ハ $f(x, y)$ ハ (x_0, y_0) ニ於テ連續デアルト云ハレル.

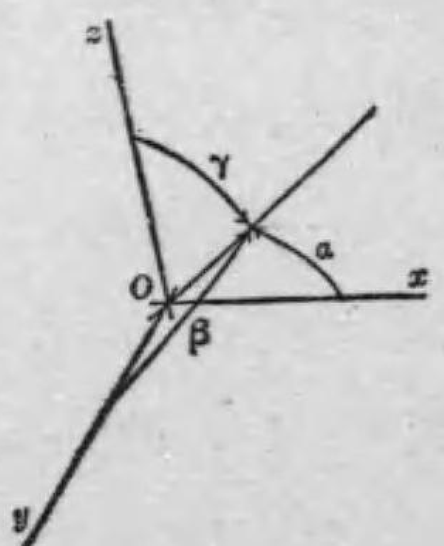
$$\lim_{x \doteq x_0,\ y \doteq y_0} f(x, y)=f(x_0, y_0).$$

---

2. 立體幾何學ノ公式.

次ニ立體幾何學ノ公式ヲ揭ゲヤウ，其證明ハ他ノ解析幾何學ニ就テ知ルノガヨロシイ.

方向餘弦 α, β, γ ハ直線ガ x, y, z ノ軸トナス角デアルトスレバ次ノ關係ガアル.



(2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

二ツノ直線ノナス角ヲ θ トスル

(3) $\cos\theta=$

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

モシ l, m, n 及ビ l', m', n' ガ二直線ノ方向餘弦或ハソレニ比例スル量トスル卽チ

$$l=\rho\cos\alpha,\ m=\rho\cos\beta,\ n=\rho\cos\gamma \text{ 及ビ } l'=\rho'\cos\alpha'$$

等トスルニ直線ガ垂直ナルタメニ十分ニシテ必要ナル條件ハ

(4) $$ll'+mm'+nn'=0$$

ニシテ互ニ平行ナルニハ

(5) $$l:l'=m:m'=n:n'$$

デアル. 又二點ノ距離ハ

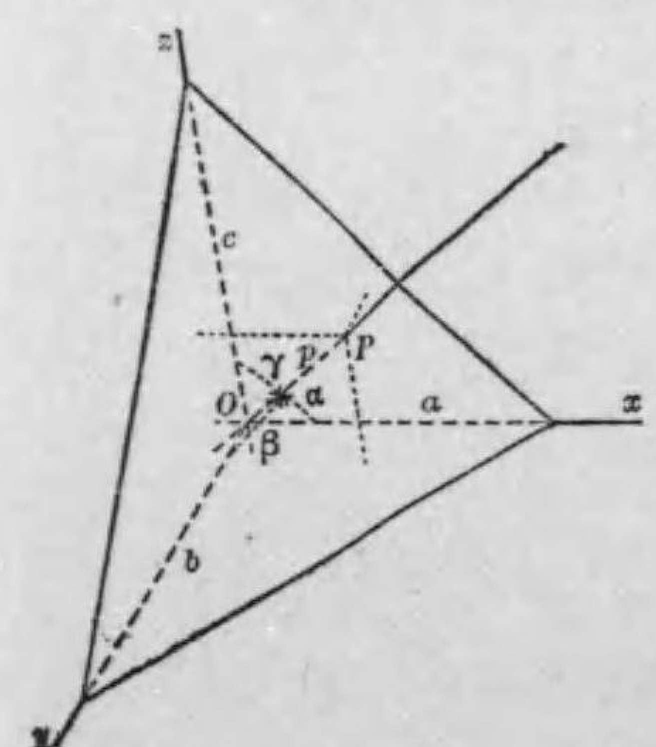
(6) $$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

球ノ方程式ハ（中心ノ座標ハ a, b, c デ，半徑ハ r デアル）

(7) $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

平面ノ方程式ハ原點カラ下シタ垂直線ガ OP デ，OP ガ軸トナス角ガ α, β, γ トスルト

(8) $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p,$$



三ツノ軸ノ截片ヲ a, b, c，トスルト，

(9) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

一次ノ一般ノ方程式

(10) $$Ax+By+Cz+D=0$$

ハ次ノヤウニシテ (8) ニ移サル.

$$(11) \qquad \frac{A}{\triangle}x+\frac{B}{\triangle}y+\frac{C}{\triangle}z=\frac{-D}{\triangle},$$

コヽニ △ ハ $(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}$ デアル. D ガ正ノ數デアルト, スベテノ係數ノ記號ヲ變ズ.

$$(12) \qquad \cos\alpha=\frac{A}{\triangle},\quad \cos\beta=\frac{B}{\triangle},\quad css\,\gamma=\frac{C}{\triangle},\quad p=\frac{-D}{\triangle}.$$

多クノ目的ノタメニ

$$(13) \qquad \cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=A:B:C$$

デアルコトヲ注意スルノガ必要デアル.

二ツノ平面

$$Ax+By+Cz+D=o,$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=o$$

ノ角ハ公式

$$(14) \qquad \cos\theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\triangle\triangle'}$$

デ與ヘラレル從テ二ツノ平面ハ

$$(15) \qquad AA'+BB'+CC'=0$$

ナルトキハ垂直ニシテ

$$A:A'=B:B'=C:C'$$

デアルトキ平行デアル.

P點 (x_1, y_1, z_1) カラ (8) ナル平面ニ至ル距離ハ

$$(17) \qquad d=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p)$$

デアル下ノ記號ハ O ト P トガ平面ノ同ジ側ニアルトキ, 上ノ

記號ハ反對ナル場合ニ用ヒラレル.

直線 一ツノ直線ハ二ツノ平面ノ交リトシテ定メラレル,

$$(18) \quad (a) \qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$$

(b) 其方向ト一點ノ座標トデ定メラレル.

$$(19_a) \qquad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma},$$

或ハ

$$(19_b) \qquad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

但シ $l:m:n=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma$

(c) 二點ノ座標デ定メラレル.

$$(20) \qquad \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0},$$

但シ此場合ニハ

$$(21) \qquad \cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=x_1-x_0:y_1-y_0:z_1-z_0.$$

(18) ナル直線ノ上ノ一點ヲ x_0, y_0, z_0 トスルト方程式ハ (19) ノ形デ書キ表ハサレル.

$$(22) \qquad \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}},$$

(18) ノ方向餘弦ハ次ノ關係ニテ表ハレル:

$$(23) \qquad \cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

一ツノ線ガ夫レ々々 x, y 及ビ x, z ナル平面ニ垂直ナル二平面卽チ

(24) $$y = px + b, \qquad z = qx + c$$

ノ交リトシテ與ヘラレタルトキニハ次ノヤウニ其方程式ハ移サレル.

(25) $$\frac{x-0}{1} = \frac{y-b}{p} = \frac{z-c}{q}.$$

ソレカラシテ

(26) $$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{cases}$$

平面ノ法線. 空間ノ或點 (x_0, y_0, z_0) ヲスギ (18) ナル平面ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

(27) $$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

直線ニ垂直ナル平面. 空間ノ或點 (x_0, y_0, z_0) ヲスギ (19 b) ニ垂直ナル平面ノ方程式ハ

(28) $$l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0.$$

一直線ヲスグル變スル平面. (18) ナル直線ヲスグル變化スル平面ノ方程式ハ

(29) $$(Ax+By+Cz+D)+K(A'x+B'y+C'z+D')=0,$$

但シ K ハ或値ヲ有ス.

一直線ヲスグル三ツノ平面. 三ツノ平面

(30) $$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D &= 0, \\ A'x+B'y+C'z+D' &= 0, \\ A''x+B''y+C''z+D'' &= 0 \end{aligned}$$

ガ一ツノ直線ニ於テ交ル所ノ條件ハ

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

ニシテ又一點ヲスグル.

3. 偏微係數. (1) ナル函數ニ於テ y ヲ固定シ x ニ就テ微分スルト, x ニ關シテ z ノ偏微係數ト稱スルモノヲ得, 之ヲ

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad 或ハ \quad f_x(x, y),$$

同樣ニ x ヲ常數トナシテ y ニ關スル偏微係數ヲ得

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad 或ハ \quad f_y(x, y)$$

[例] $z = e^{-x}\sin y$ ノ偏微係數ヲ作レ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-x}\sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x}\cos y$$

演　習

偏微係數 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ

(a) $z = x \log y$　　(b) $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

---

4. 幾何學的解釋. 二ツノ獨立變數ヲ有スル偏微係數ノ意義ヲ幾何學的ニ解釋シヤウ. y ヲ固定スルト云フノハ (1) ヲ $y = y_0$ ナル平面ニテ截ルノト同ジコトデアル, 即チ其截面ハ

$$z = f(x, y_0)$$

ナル平面曲線ニシテ $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ハ此曲線ノ傾度デ, 同様ニ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ハ

$$z = f(x_0, y)$$

ナル曲線ノ傾度デアル.

此ノ如ク (x_0, y_0, z_0) ナル點ニ於ケル (1) ノ面ノ二ツノ切線ノ傾度ヲ得タ. ソレカラ容易ニ此點ニ於ケル切平面ノ方程式ヲ定ムルコトガ出來ル, 何故ト云フト切平面ハ其點ヲスグル所ノスベテノ切線ヲ含ムモノデ, ソレハ或二ツデ定マルカラデアル.

今不定係數ヲ有スル切平面ノ方程式ヲ

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

トシ, コレガ $y = y_0$, 即チ $z - z_0 = A(x - x_0)$ ナル平面ニテ截ラレテ生ズル直線ノ傾度ガ (x_0, y_0) ナル點ヲスグル切線ノ傾度 $(\partial z/\partial x)_0$ ニ等シケレバヨシ. 上ノ平面ガ $x = x_0$ ナル平面ニテ截ラレル場合モ同様デアル, 故ニ

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0, \qquad B = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0,$$

從テ切平面ノ方程式ヲ得ル:

$$(31) \qquad z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

(28) カラ P 點ニ於テ (1) ナル面ニ法線ナル方程式ヲ得ル.

$$(32) \qquad \frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{-1}$$

法線ノ方向餘弦ハ次ノ關係カラ得ラレル.

$$(33) \qquad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 : \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 : -1.$$

演　習

次ノ面ノ切平面及法線ヲ作レ.

1. $z = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$.　答 $y_0 x - x_0 y + (x_0^2 + y_0^2)(z - z_0) = 0$,

$$\frac{x - x_0}{y_0} = \frac{y - y_0}{-x_0} = \frac{z - z_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

2. $z = ax^2 + by^2$.　答 切平面ハ $z = 2ax_0 x + 2by_0 y - z_0$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ ナル球ト楕圓體 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ トハ $(-1, -2, -3)$ ニテ交ル, 其交角ヲ求メヨ.　答 $23° 33'$

4. 次ノ面カ原點ニ於テ x 軸ニ截ラレル角ヲ求メヨ

$$z = 3xy^2 - 5x^2y - 7x + 3y.$$

---

5. 高次ノ微係數.

$$u=f(x,y)$$

ノ一次ノ偏微係數

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=f_y(x,y)$$

ガ x ト y トノ函數デアルトキハ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\qquad 或ハ\quad f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)\ldots\ldots$$

微係數ガ連續函數デアツタナラ微分ノ順序ニ關セザルコトヲ證明スルコトガ出來ル, 卽チ

$$(34)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

叉變數ノ數ガ何程アリテモ同樣デアル.

今特別ナ場合デ定理ヲ證明シヤウ.

(a) $$u=e^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-e^x\sin y$$

(b) $$u=\frac{x\log z}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\log z}{y},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=\frac{1}{yz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{yz},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{1}{yz}$$

演　　習

1. $u=z\sin xy,\quad u=\log(xy^2),\quad u=y^z$ ノ各ニ就テ上ノ定理ヲ證明セヨ.

2. $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$$ ヲ證明セヨ.

3. $u=\log\sqrt{x^2+y^2}$ ニ就テ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ヲ證明セヨ.

4. $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$ デアルト

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

デアルコトヲ證明セヨ.

---

6. 完全微分. 今

$$u=f(x,y)$$

ノ增加ヲ作ラウ.

$$\triangle u=f(x_0+\triangle x,\,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)$$

今 $f(x_0, y_0+\triangle y)$ ヲ減ジ且ツ加ヘルト

$$\triangle u = f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - f(x_0, y_0+\triangle y)$$
$$+ f(x_0, y_0+\triangle y) - f(x_0, y_0)$$

此等ノ二ツノ差ニ平均ノ法則ヲ適用スルト

$$(35)\qquad \triangle u = \triangle x f_x(x_0+\theta\triangle x, y_0+\triangle y) + \triangle y f_y(x_0, y+\theta'\triangle y)$$

$f_x(x, y)$ ト $f_y(x, y)$ トハ x, y ノ連續函數デアルカラ $f_x(x_0+\theta\triangle x, y_0+\triangle y)$ ハ $\triangle x, \triangle y$ ガ 0 ニ近ヅクトキ $f_x(x_0, y_0)$ ナル極限ニ近ヅク,故ニ $\triangle x, \triangle y$ ガ數的ニ小サクナルト $f_x(x_0, y_0$ ト輕微ノ差ヲ有スル.

$$f_x(x_0+\theta\triangle x, y_0+\triangle y) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon. \qquad \lim_{\triangle x \doteq 0,\ \triangle y \doteq 0} \varepsilon = 0$$

同様ニ

$$f_y(x_0, y_0+\theta'\triangle y) = f_y(x_0, y_0) + \eta,$$

但シ η ハ微小數ナリ. 故ニ

$$(36)\qquad \triangle u = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + \varepsilon\triangle x + \eta\triangle y,$$

但シ附記シタル文字ヲ取リ且ツ $f_x(x, y)$ ト $f_y(x, y)$ トヲ他ノ記法ニテ書キ改メタルモノデアル.

$$(37)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y = du$$

ハ $\triangle u$ ノ主要部分ト云フ. 殘リノ項ハ高次ノ微小數デアル.

〔**定義**〕 $\triangle u$ ノ主要部分ヲ u ノ完全微分ト云フ. コレハ u ノスベテノ函數ニ就テ成立スルカラ $u = x$ トスレバ

$$(38)\qquad dx = \triangle x,$$

同様ニ $u = y$ トスルト

$$(39)\qquad dy = \triangle y.$$

之ヲ (37) ニ入レルト

$$(\mathrm{A})\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

(37) ナル定義ト (38), (39) ナル定理ハ變數ガ何程アリテモ用ヒラレル. 即チ $u = f(x, y, z)$ ニ於テ定義ニ依ツテ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + \frac{\partial u}{\partial z}\triangle z.$$

ヲ導キ上ノ如クシテ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

時トシテ一變數ヲ變ズルトシテ u ノ偏微分ヲ用フルコトガアル,其時ニハ

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x = \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

デ,全微分ハ

$$(40)\qquad du = d_x u + d_y u + \cdots\cdots$$

幾何學的解釋　二ツノ獨立變數ノ函數ノ場合

$$z = f(x, y)$$

ニ於テ其增加ト微分トハ簡易ナル幾何學的解釋ガ出來ル.

(x_0, y_0, z_0) ナル P 點ヲスギテ x, y 平面ニ平行ナル平面ヲ作

リ, z 軸ニ平行ナル直線ヲ引キ $x=x_0+\triangle x,\ y=y_0+\triangle y$ ニテ其平面ニ交ルトシヤウ, 上ノ平面ト其面 $z=z_0$ トノ間ニ於ケル直線ノ線分ハ [256 頁ノ圖]

$$\mathrm{LQ}=f(x_0+\triangle x_0,\ y_0+\triangle y)-f(x_0 y_0)=\triangle z.$$

P ニ於ケル切平面ノ方程式ハ

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(y-y_0)$$

デアル, ソウシテ平面 $z=z_0$ ト此平面トノ間ノ部分

$$\mathrm{LM}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0\triangle x+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0\triangle y=dz$$

デアル

$$\triangle z-dz=\mathrm{MQ}=\varepsilon\triangle x+\eta\triangle y$$

ハ $\triangle x,\ \triangle y$ ヨリハ高次ノ微小數デアル.

7. 變數ノ變化. 前欵ニテハ x, y ガ獨立變數デアルトシタ. モシ第三ノ變數ニ屬スルトシ

(41) $$x=\phi(t),\qquad y=\psi(t)$$

トスルト u ハ單一ノ變數 t ノ函數トナル, ソウシテ此ヤウナ函數ノ微分ハ已ニ定メラレテアツタ (第五編, 第 4 款)

(42) $$du=\mathrm{D}_t u\,\triangle t=\mathrm{D}_t u\,dt.$$

又

(43) $$dx=\mathrm{D}_t\,dt,\qquad dy=\mathrm{D}_t\,y\,dt.$$

コヽニ $dl=\triangle t$ トス, 然レドモ dx, dy ハ夫レ々々一般ニ $\triangle x, \triangle y$ トハ異ナル. 其故 (A) ハ此場合デモ尚成立スルカト云フ疑問ガ起ル, シカシ成立スルト答ヘルコトガ出來ル. ソレヲ説明シヤウ.

t ガ $\triangle t$ ナル增加ヲシタトキ x ト y トガ (41) ニ依テ $\triangle x$, $\triangle y$ ナル增加ヲ受取リタリトシ, 之ヲ (36) ニ代入スルニ u ノ增加ヲ得ル, 之ヲ $\triangle t$ ニテ除スルト,

$$\lim_{\triangle t\doteq 0}\left(\frac{\triangle u}{\triangle t}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\lim_{\triangle t\doteq 0}\left(\frac{\triangle x}{\triangle t}\right)$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y}\lim_{t\doteq 0}\left(\frac{\triangle y}{\triangle t}\right)+\lim_{\triangle t\doteq 0}\left(\varepsilon\frac{\triangle x}{\triangle t}+\eta\frac{\triangle y}{\triangle t}\right).$$

此最後ノ極限ハ 0 デアルカラ

(44) $$\mathrm{D}_t u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{D}_t x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{D}_t y,$$

且ツ $$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q, e, d.$$

カヤウニ (A) ハ t ガ獨立變數デアルトキモ成立ス.

終リニ

(45) $$x=\phi(r,s),\qquad y=\psi(r,s)$$

今 s ヲ固定シ, r ヲ變ズルトキハ獨立變數ハ t ノ代リニ r デアルカラ (44) ハ尚新ラタナル r ニ就テ偏微分デアルコトヲ注意スレバ成立スルコトガワカル, 卽チ

(B) $$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

同樣ニ

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

之ヲ定理ノ形ニ云ヒ表ハス．此レハ變數ノ數何程アリテモ同樣ナリ．

[定理 1] 函數

$$u=f(x,y,z,\ldots\ldots)$$

ニ於テ目安 $x, y, z, \ldots\ldots$ ガ $r, s, \ldots\ldots$ ニ屬スルトキハ含ミタル微係數ガ連續デアル以上ハ

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}+\ldots\ldots,$$

$\frac{\partial u}{\partial s}$ ニ於テハ r ヲ s ニ置キ換ヘレバヨシ．

各組 $(x, y, z, \ldots\ldots)$, $(r, s, \ldots\ldots)$ ノ變數ノ數ハ任意ナリ，例ヘバ初ノ組ニテハ x ナル唯一個ノ變數ヲ有シ，第二ノ組ニテハ種々ノモノヲ有スルトキハ

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}.$$

モシ第一ノ組ニテハ多クノ變數ヲ有シテ第二ノ組ニテハ唯一個ノ t ヲ有スルトキハ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\ldots\ldots$$

[例] $u=e^{xy}$ ニ於テ $x=\log\sqrt{r^2+s^2}$, $y=\tan^{-1}\frac{s}{r}$ トセヨ．

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{xy},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=xe^{xy},$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{r}{r^2+s^2},\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{-s}{r^2+s^2},$$

從テ
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{ry-sx}{r^2+s^2}e^{xy}.$$

但シ x, y ハ驅逐スルコトガ出來ル．

演　　習

1. $u=x^2-y^2$, $x=2r-3s+7$, $y=-r+8s-9$ ナリトシ $\frac{\partial u}{\partial r}$ ヲ求メヨ．　答 $\frac{\partial u}{\partial r}=4x+2y.$

2. $u=xy^2$, $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=b\theta$ トシ $\frac{du}{d\theta}$ ヲ求メヨ．

3. $u=\frac{x+y}{1-xy}$, $x=\tan(2r-s^2)$, $y=\cot(r^2s)$ トシ $\frac{\partial u}{\partial r}$ 及ビ $\frac{\partial u}{\partial s}$ ヲ求メヨ．

4. $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ デアルナラバ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2.$$

デアルコトヲ證明セヨ．

---

8. 終結 (A) ナル定理ハ獨立變數ガ何デアルトモ眞デアルコトヲ證明シヤウ．

$$u = f(x, y)$$

$$x = \phi(r, s), \quad y = \psi(r, s)$$

デアルナラバ(37)ノ定義ニヨツテ

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} \triangle r + \frac{\partial u}{\partial s} \triangle s.$$

デアル，マタ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} \triangle r + \frac{\partial x}{\partial s} \triangle s, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r} \triangle r + \frac{\partial y}{\partial s} \triangle s.$$

故ニ

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) \triangle r + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) \triangle s$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} \triangle r + \frac{\partial u}{\partial s} \triangle s = du. \qquad q.e.d.$$

依ッテ次ノヤウニイハレル.

[定理 2] $u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$ デアリ

$x = \phi(r, s, \ldots\ldots)$, $y = \psi(r, s, \ldots\ldots)$, $z = \omega(r, s, \ldots\ldots)$

デアルナラバ(第一次ノ偏微係數ガ連續デアルナラバ)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \ldots\ldots$$

デアル.

第7款ノ例ニ於テ次ノヤウニスルコトガ出來ル.

[例] $du = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy,$

$$dx = \frac{r}{r^2+s^2} dr + \frac{s}{r^2+s^2} ds,$$

$$dy = \frac{-s}{r^2+s^2} dr + \frac{r}{r^2+s^2} ds.$$

ソレカラシテ

$$du = \frac{ry-sx}{r^2+s^2} e^{xy} dr + \frac{sy+rx}{r^2+s^2} e^{xy} ds$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial s} ds.$$

今 $dr = \triangle r$, $ds = \triangle s$ デアルカラ上ノ方程式ノ係數ヲ等シト置クコトガ出來ル，卽チ

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{ry-sx}{r^2+s^2} e^{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{sy+rx}{r^2+s^2} e^{xy}.$$

演習

$u = f(x)$, $x = 3r + 2s + 7t$ ナリトセバ

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2 \frac{du}{dx}$$

デアルコトヲ證明セヨ.

---

9. 「ホモゼン」函數ニ於ケル「オイレル」ノ定理.

目安ノ各々ヲ同ジ量デ乘ズルト函數ガ其量ノ羃デ乘ゼラレタモノヲ得ルト其函數ハホモゼンデアルト云ハレル：

$$u = f(x, y, z)$$

(46) $$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z).$$

λ ノ指數ヲ「ホモゼン」ノ階級ト云フ.

例ヘバ

$$u = ax^2 + bxy + cy^2, \quad u = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) - \log x,$$

$$u = \frac{ax+by}{cx+dy}, \quad u = z \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ハ夫レ々々 2,0,0,1 ナル階級ヲ有シテオル.

特ニ $\lambda = \dfrac{1}{x}$ デアルト

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n f(x, y, z)$$

(47) $$f(x, y, z) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

「オイレル」ノ定理. u ガ「ホモゼン」ニシテ連續的ノ一次偏微係數ヲ有スルナラバ

(c) $$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial n}{\partial z} = nu$$

デアル.

(46) ニ依ッテ

(48) $$f(x', y', z') = \lambda^n f(x, y, z)$$

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda x, \quad z' = \lambda z.$$

(48) ヲ λ ニテ微分スルト

(49) $$f_x(x',y',z')x + f_y(x',y',z')y + f_z(x',y',z')z = n\lambda^{n-1} f(x,y,z),$$

但シ $f_x(x', y', z')$ ハ x ニ關スル $f(x, y, z)$ ノ偏微係數ヲ取リ, x, y, z ヲ夫レ々々 x', y', z' ニテ置キ換ヘルノデアル, $\lambda=1$ ト置クト (49) ハ (c) ナル形ヲ得ル.

上ノモノハ三ツノ變數ニテ證明シタ, シカシ變數ノ數ハ何程アッテモヨイノデアル.

---

10. 陰函數ノ微分 y ガ x ノ陰函數トシテ定メラレタトキ:

(50) $$F(x, y) = 0.$$

u ヲ次ノヤウニ置イテ全微分ヲ取ル

$$u = F(x, y), \quad du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

第6款ノ定理二ニ依ッテ獨立變數ガ何デアルトモ眞デアルカラ (50) ナル關係ガ成立スルヤウニ選ブコトガ出來ル. ソノ場合ニハ $du=0$ デアルカラ

(51) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad 或ハ \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

同様ニ z ガ

(52) $$F(x, y, z) = 0$$

デ定メラレルト

$$u = F(x, y, z)$$

トスレバ

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

(52) ノタメニ $du=0$ トスレバ

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

然ルニ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

デアルカラ dz ヲ驅逐スルト

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0.$$

コヽニ $dx = \triangle x,\ dy = \triangle y$ ハ獨立變數デアルカラ $dx \neq 0,\ dy = 0$ ト置イテ

$$(53) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \therefore \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

同樣ニシテ $\partial z/\partial y$ ヲ得ル.

各微分ニ於テ獨立變數ガ何デアルカヲ注意セネバナラヌ. $\partial F/\partial x$ ハ三ツノ獨立變數 x, y, z ヲ有スル函數ノ微係數デアル. 此等ノ變數ノ値ハ一般ニ方程式 (52) ヲ滿足シナイ. ソノ場合ニハ (52) ハ不適當デ, 吾人ニ對シテ存在シナイモノデアル. 同ジヤウニ $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ ニ於テモ云ハレル. シカシ $\partial z/\partial x$ ソウデナイ, 此 z ハ x, y ノ函數デアル, 卽チ (52) ガ滿足セラレルヤウナモノデアル.

變數ノ數ガ何程アルモ同樣デアル:

$$F(u, x, y, z, \ldots\ldots) = 0,$$

$$(54) \qquad \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}.$$

〔例〕 次ノ式カラ z ノ偏微係數ヲ求メヨ.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

コヽニ

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

トスレバ次ノモノヲ有ス:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \therefore \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}.$$

$$\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \therefore \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

種々ノ陰函數. 次ノ二ツノ方程式デ定メラレルヤウニ $x, y, z \ldots$ ノ二ツノ陰函數 u, v ガアルトシヤウ.

$$(55) \qquad \begin{cases} F(u, v, x, y, z, \ldots\ldots\ldots) = 0 \\ \Phi(u, v, x, y, z, \ldots\ldots\ldots) = 0 \end{cases}$$

今變數 $x, y, z, \ldots\ldots$ ヲ二ツトシヤウ, 卽チ

$$U = F(u, v, x, y) \qquad V = \Phi(u, v, x, y)$$

トシ，微分スルト

$$(56)\quad \begin{cases} dU = \dfrac{\partial F}{\partial u}du + \dfrac{\partial F}{\partial v}dv + \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy, \\[2ex] dV = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}du + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}dv + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}dy \end{cases}$$

トナル，但シ變數ノ如何ニ關シナイモノデアル．今 u ト v トガ(55)ヲ滿足スルヤウニ定メラレルトキハ $dU=0$, $dV=0$ デアル，ソレノミデナク

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

デアルカラ之ヲ代入シ且ツ dx, dy ノ係數ヲ0ニ等シト置クト：

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

F ヲ Φ ニ置キ換ヘルト二ツノ同樣ナ方程式ヲ得ル．$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ヲ此四ツノ方程式ノ第一ト第三トカラ得，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ヲ第二ト第四トカラ得ル，即チ

$$(57)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ \Phi_x & F_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ \Phi_u & F_v \end{vmatrix}},$$

同樣ニ $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ヲ得ル．之ヲ學生ハ明白ニ一々書クガヨロシイ

此分母ニアル「デテルミナン」ヲ創立者ノ名義ヲ附シテ F, Φ ノ「ヤコビアン」ト云フ．上ノ式ニ於テハ偏微係數ガ連續的ナルコト、「ヤコビアン」ガ0ナラザルコトヲ假定シタ．此理ハ F, Φ, Ψ ノヤウニ三ツノ方程式ニ於テモ同樣デアルノミデナク，何程多クアル場合ニモ同樣デアル．

[注意 1] 上ノ場合ニハ何レノ場合ニモ通用セラレルガ偏微分ヲ取ル場合ニハ何ガ獨立變數デアルカヲ問ハネバナラヌ，例ヘバ x, y ガ獨立變數デアツテ x ノ偏微係數ヲ取ルトキニハ

$$\frac{\partial u_{xy}}{\partial x}$$

ノヤウニ書ク，シカシ y, z ガ獨立變數デアルト

$$\frac{\partial u_{yz}}{\partial x}$$

ハ何等ノ意味ヲ有シナイノデアル．

[注意 2] 「テーラー」ノ定理

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots\ldots$$

ニ於テ $f'(x_0)(x-x_0)$ ナル直線的項ハ觀測ノ小サイ誤差ガ最後ノ結果ノ上ニ及ボス結果ヲ十分精密ニ表ハスタメノ用ニ供セラレル，而シテ此項 $f'(x)(x-x_0)$ ハ $x=x_0$ ニ對シテ df ナル函數ノ微分ニ當ル．

多クノ變數ノ函數ノ微分モ同樣ナ目的デ使用セラレ，例ヘバ $x, y, z, \ldots\ldots$ ガ測ツテ得タ量デ u ガ計算セラルベキモノ

デアルト u ノ精密ナ誤差ハ觀測ノ誤差 $\triangle x=dx, \triangle y=dy\ldots\ldots$ ニ基ク $\triangle u$ デアル, 然ルニ

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots\ldots\ldots$$

ト $\triangle u$ トノ差ハ極メテ微小ナリ

[例] 小サイ振子ノ週期ハ

$$\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

デアル, l ト g トヲ測リタル誤差 (g ハ地球面ニ於ケル誤差, l ハ氣候カラ生ズル l ノ變化) カラ出來キテ來ル T ノ誤差ヲ計ルトセン.

コヽニ

$$d\mathrm{T}=\frac{\pi}{\sqrt{lg}}dl-\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}fg$$

或ハ $$\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\frac{dl}{l}-\frac{1}{2}\frac{dg}{g}.$$

l ヲ測ルトキ正ニシテ小ナル $k\%$ ニ對シテ時ノ誤差 $\frac{1}{2}k\%$ ヲ生ジ, g ヲ測ルトキ $k'\%$ ノ誤差ヲ生ズルトキ時ノ誤差 $\frac{1}{2}k'\%$ ヲ生ズベシ.

演 習

1. 三角形ノ一邊 c ハ他ノ二邊及ビ其間ノ角 ω ニテ定メラレル:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\omega.$$

a, b, ω ヲ測リタル誤差ニ歸セラレル c ノ誤差ヲ近似的ニ出セ.

答 百分的誤差ハ次ノ公式デ與ヘラレル:

$$\frac{dc}{c}=\frac{(a-b\cos\omega)\,da+(b-a\cos\omega)\,ab+ab\sin\omega d\omega}{a^2+b^2-2ab\cos\omega}$$

2. 上ノ問題ニ於テ三角形ノ面積ヲ計算シテ得ル誤差ヲ計算セヨ.

---

12. 正確ノ微分.

$$\mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy \tag{58}$$

ニ於テ P ト Q トハ x, y ノ函數ナリトス. 又 $u=f(x,y)$ ナル函數ガアリテ其全微分

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ガ (58) ト一致スルトセヨ其場合ニハ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{P},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{Q}$$

デアルカラ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

デアル卽チ P ト Q トハ

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} \tag{59}$$

ナル條件ニ從フヲ要ス. 逆ニ此條件ガ存在スルト (58) ガ成立スルコトガ證明セラレル. 然ルトキ (58) ヲ稱シテ正確微分ト云フ.

同樣ニ三ツノ變數ヲ有スル

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

ガ正確微分ナルタメニハ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \tag{60}$$

ナルヲ要ス.

演　　習

1. 次ノ式ノドレガ正確微分デアルカ.

$$\left(e^x\cos y-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx-(e^x\sin y+7\sec^2 y)\,dy.\quad 及$$

$$yze^{xyz}\,dx+zxe^{xyz}\,dy+xye^{xyz}\,dz.$$

2. $u=\dfrac{\cos y}{x},\quad x=r^2-s^2,\quad y=e^x$ デアルト $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ ヲ求メヨ.

3. $u=e^{x\sin y}+x\log(x+y),\quad x=pqr,\quad y=r\sin^{-1}(qr)$ カラ $\dfrac{\partial u}{\partial q}$ ヲ求メヨ.

4. $x^5+v^5+x^5=3y,\quad u^3+v^3+y^3=-3x$ カヲ $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ヲ求メヨ.

5. $x=u+vu^v,\quad y=v-uv^u$ カラ $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ヲ求メヨ.

6. $z=f(x,y),\quad \phi(x,y)=0$ カラ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial \phi}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}}$$

ヲ得ルコトヲ證明セヨ.

7. $u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ヨリ $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ ナルコトヲ證明セヨ.

8. $u=f(x,y)$ ガ n 次ノ「ホモゼン」デアルト

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$$

デアルコトヲ證明セヨ.

第十四編

立體幾何學ニ於ケル應用

1. 一ツノ面ニ於ケル切平面及ビ法線.

巳ニ (x_0, y_0, z_0) ナル點ニ於テ

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

ナル面ノ切平面及ビ法線ノ方程式ハ

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{2}$$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{-1} \tag{3}$$

デアルコトヲ表ハシタ.

面ノ方程式ガ陰函數狀デ表ハサレタトキニハ

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

デアルト上ノ (2), (3) ハ次ノヤウニ表ハサレル.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}. \tag{6}$$

(x, y, z) ニ於ケル法線ノ方向餘弦ハ下ニ記シタ記號ヲ取リテ

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{7}$$

演習

(2, 1, 3) ナル點ニ於テ $z^2 = 2x^2 + y^2$ ナル圓錐體ノ切平面, 法線ノ方程式ヲ見出セ.

答 $4x + y - 3z = 0,\quad \frac{x-2}{4} = y - 1 = \frac{z-3}{-3}$,

2. 空間曲線ノ切線及ビ法平面.

空間曲線ハ解析的ニ與ヘラレル.

(a) 「パラメーター」ノ函數トシテ其座標ヲ表ハサレタトキ:

$$x = f(t),\quad y = \phi(t),\quad z = \psi(t). \tag{8}$$

(b) 二ツノ壔面ノ交リトシテ表ハサレタトキ:

$$y = \phi(x),\qquad z = \psi(x). \tag{9}$$

(c) 二ツノ任意ナ面ノ交ハリトシテ表ハサレタトキ

$$F(x, y, z) = 0,\qquad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{10}$$

方向餘弦 P點 (x_0, y_0, z_0) ニ於ケル空間曲線ノ切線ノ方向餘弦ヲ見出スニハ (x_0, y_0, z_0) ト其近隣ノ點 $(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y, z_0 + \triangle z)$ トヲスグル割線ノ方向餘弦ヲ見出ス:

$$\cos\alpha' = \frac{\triangle x}{\overline{PP'}},\quad \cos\beta' = \frac{\triangle y}{\overline{PP'}},\quad \cos\gamma' = \frac{\triangle z}{\overline{PP'}},$$

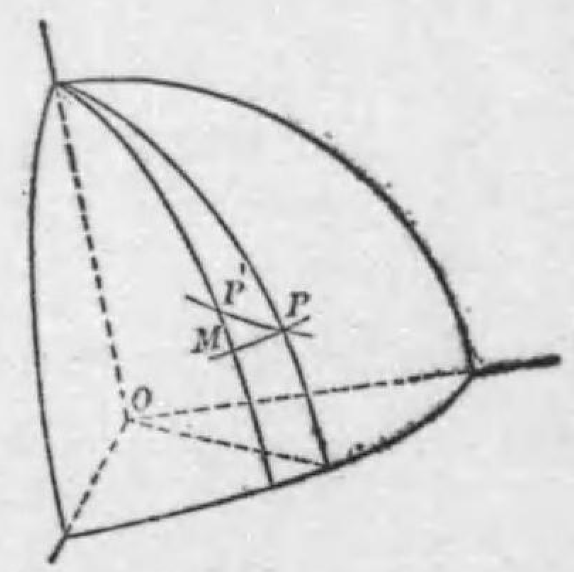
從テ切線トナレバ

$$\cos\alpha = \lim_{\overline{PP'}\doteq 0}\frac{\triangle x}{\overline{PP'}} = \lim_{\overline{PP'}\doteq 0}\left(\frac{\triangle x}{\triangle s}\cdot\frac{\triangle s}{\overline{PP'}}\right) = D_s x,$$

$\cos\beta, \cos\gamma$ デモ同樣デアルカラ

$$(11)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

但シ s ガ增加スル方ニ切線ハ引カレテアル. モシ反對方向ニ引クト負號ヲ用フル.



(11) カラ直チニ

$$(12)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ヲ得.

(a) カラ

$$ds^2 = [f'(t)^2 + \phi'(t)^2 + \psi'(t)^2]\,dt^2$$

及ビ

$$(13)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{f'(t)}{\sqrt{f'(t)^2+\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{\phi'(t)}{\sqrt{f'(t)^2+\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}}, \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{f'(t)^2+\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}}. \end{cases}$$

$$s = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{f'(t)^2+\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

此結果ヲ (9) ニ適用スルト

$$(14)\qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}+\dfrac{dz^2}{dx^2}}}\quad 等.$$

$$(15)\qquad s = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}\,dx$$

<u>切線及ビ法平面ノ方程式</u> 切線ニ就テハ (a) ノ場合ハ

$$(16)\qquad \frac{x-x_0}{f'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\phi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\psi'(t_0)}$$

(b) ニ於テハ

$$(17)\qquad y-y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x-x_0),\quad z-z_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x-x_0).$$

法平面ハ次ノ公式ニテ得ラル: (a) ニ於テハ

$$(18)\qquad f'(t_0)(x-x_0)+\phi'(t_0)(y-y_0)+\psi'(t_0)(z-z_0) = o.$$

又 (b) ニ於テハ

$$(19)\qquad x-x_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (y-y_0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (z-z_0) = o.$$

一方ニハ (c) ノ場合ニ於テハ切線ハ其切點ニ於ケル面ノ切平面ノ交ハリトシテ容易ニ表ハサレル:

$$(20)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x-x_0)+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y-y_0)+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = o. \\[2ex] \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 (x-x_0)+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 (y-y_0)+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = o \end{cases}$$

之ヲ次ノ形ニ表ハスコトガ出來ル:

$$\text{(21)} \qquad \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}_0} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \phi_x \end{vmatrix}_0} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}_0}.$$

其レヨリシテ(10)ナル面ノ交ハリノ曲線ノ切線ノ方向餘弦ハ次ノ比例式デ與ヘラレル:

$$\text{(22)} \quad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix}$$

法平面ノ方程式ハ直ニ得ラレル.

演　　習

1. 曲線 $y^2 = 2mx,\ z^2 = m-x.$ ノ切線及ビ法平面ノ方程式ヲ求メヨ.

2. 曲線 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9,\ z^2 = 3x^2 + y^2$ ニ於テ點 $1, -1, 2)$ ニ於ケル切線及法平面ノ方程式ヲ求メヨ.

3. 上ノ問題デ切線ガ x ノ軸トナス角ヲ問フ.

4. 螺線: $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ 5z = \theta$ ガ圓柱體ヲ一廻轉スルトキ弧ノ長サ如何.

5. 上ノ曲線ハ如何ナル皦シサヲ有スルカ.

6. (10)ナル面ガ直交スル條件ハ次ノヤウデアルコトヲ證明セヨ:

$$\text{(23)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = o$$

7. $x^2+y^2+z^2=3,\ xyz=1,\ z=xy$ ガ $(1, 1, 1)$ ナル點デ截リ合フ角ノ大キサヲ問フ.

8. $x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^4$ ナル曲線ガ $z^2 = x+2y-2$ ニ出會スル點ノスベテヲ求メヨ, 又其レハ切線デアルコトヲ證明セヨ.

---

3. 接觸平面. $P(x_0, y_0, z_0)$ ガ空間ノ曲線 (8) ノ任意ノ點デアルトキ,

$$\text{(24)} \qquad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = o$$

ナル平面ガ其點ヲスグルコトガ明カデアル. 一般ニ曲線上ノ點 P' 卽チ

$$x = f(t_0+h),\quad y = \phi(t_0+h),\quad z = \Psi(t_0+h)$$

カラ平面ニ至ル距離 D ハ $\breve{PP'}$ ガ主要微小數ナルトキ一次ノ微小數デアル. 何トナレバ P' ノ座標ヲ (x, y, z) トスルト

$$\pm D = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

其レカラシテ

$$\pm D = \frac{A[f(t_0+h)-f(t_0)]+B[\phi(t_0+h)-\phi(t_0)]+\dots}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

「テーラー」ノ定理ニ依ルト

$$f(t_0+h)-f(t_0) = hf'(t_0)+\frac{h^2}{2}f''(t_0+\theta h),$$

$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \triangle$ ト置クトキハ

$$\pm D = h[Af'(t_0)+B\phi'(t_0)+C\psi'(t_0)]/\triangle$$
$$+\frac{h^2}{2}[Af''(t_0+\theta h)+B\phi''(t_0+\theta_1 h)+C\psi''(t_0+\theta_2 h)]/\triangle.$$

ソレカラ

$$\lim_{P' \doteq P} \frac{\pm D}{h} = \frac{A f'(t_0) + B\phi'(t_0) + C\psi'(t_0)}{\triangle}.$$

P ハ $f'(t_0)$, $\phi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ ガ 0 デナイヤウナ點デアルナラバ, A, B, C ヲ任意ニ選メバ上ノ式ハ多クノ場合ニ於テ 0 デナイ. 今 0 ナル場合ヲ除ク, $PP' \overset{\frown}{=} \triangle s$, $h = \triangle t$ ハ

$$\lim_{\triangle t \doteq 0} \frac{\triangle S}{\triangle t} = D_t S = \sqrt{f'(t_0)^2 + \phi'(t_0)^2 + \psi'(t_0)^2} \neq 0$$

ノタメ同ジ階級ノ微小數デアルコトガワカル. 今 A, B, C ヲ

$$A f'(t_0) + B\phi'(t_0) + C\psi'(t_0) = 0 \tag{25}$$

トナルヤウニ選ムトスルト $\lim \pm \frac{D}{h}$ ハ 0 トナル

又

$$\lim_{P' \doteq P} \frac{\pm D}{h^2} = \frac{A f''(t_0) + B\phi''(t_0) + C\psi''(t_0)}{2\triangle}.$$

今 (25) ハ (8) ノ切線ガ (24) ナル平面ノ法線ニ垂直ナル條件デアルカラ切線ハ (24) ナル平面上ニアル, 卽チ (24) ナル平面ハ曲線ノ切平面デアル, 又 D ハ一般ニ一次ノ微小數デアル

然レドモ A, B, C ガ

$$A f''(t_0) + B\phi''(t_0) + C\psi''(t_0) = 0 \tag{26}$$

ナル制限ノ下ニ束縛セラレルト $\pm D/h^2 = 0$ デ D ハ高キ階級ノ微小數デアル

$$A f'''(t_0) + B\phi'''(t_0) + C\psi'''(t_0) \neq 0$$

デアルナラバ三次ノ微小數デアル. 方程式 (25), (26) ハ單一ニ A, B, C ナル係數ノ比ヲ定メル, シカモ後者ハ (24), (25), (26) カラ消去セラレ接觸平面ノ方程式

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f'(t_0) & \phi'(t_0) & \psi'(t_0) \\ f''(t_0) & \phi''(t_0) & \psi''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

ヲ得ル.

此ヤウニシテ定メタル接觸平面ハ漫然選ンダ切平面ノ一ツヨリ高イ接觸ヲ有スル切平面デアル. 一般ニ與ヘラレタ點ニ於テハ唯一ツノ接觸ガ平面ヲ有スル, 然レドモ直線ノ場合ニハスベテノ切平面ハ接觸平面デアル. $f''(t_0) = \phi''(t_0) = \psi''(t_0) = 0$ デアルトキハ同ジコトガイワレル. 接觸平面ハ切點デ曲線ヲ截ル, 何トナレバ $\pm D$ ノ分子ハ h ガ 0 ナル値ヲ有スル所ヲスグルト記號ヲ變ズル.

接觸平面ノ上ニ引カレタ空間曲線ノ法線ハ首要法線ト稱セラレル.

曲線ノ方程式ガ (9) ナル形式ニテ與ヘラレタトキニハ接觸平面ノ方程式ハ次ノヤウニナル:

$$\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 (y - y_0) - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (z - z_0) = 0. \tag{28}$$

演習

1. $t=\pi$ ナル點ニ於テ (12) ナル曲線ノ接觸平面ノ方程式ヲ求メヨ.

2. 二ツノ圓柱體

$$x^2+y^2=a^2, \qquad x^2+z^2=a^2$$

ノ交ハリヨリナレル曲線ノ接觸平面ノ方程式ヲ見出シ, 且ツソレヲ説明セヨ.

第十五編

多クノ變數ヲ有スル函數ノ「テーラー」ノ定理

1. **平均値.** $f(x, y)$ ハ二ツノ獨立變數 x, y ヲ有シ且ツ連續的ノ偏微係數ヲ有スルトシヤウ.

$$f(x_0+h\,;\,y_0+h)$$

ニ對シテ第十一編ノ第 2 款ニ於テ述ベタ一變數ニ於ケル平均値ニ似タモノヲ得ヤウト思フ. 第十三編第 6 款ニ簡單ナ場合ガ示サレテアツタ. x_0, y_0, h, k ハ常數デアツテ唯 t ダケガ變數ナル

$$\Phi(t)=f(x_0+th, y_0+tk) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

ヲ論ジヤウ. 平均値ノ法則 (A′) ヲ適用スルト $a=0,\ b=1$ ト置クト

$$\Phi(1)=\Phi(0)+1.\Phi'(\theta)$$

但シ

$$\Phi(1)=f(x_0+h, y_0+k), \qquad \Phi(0)=f(x_0, y_0)$$

$$\Phi'(t)=hf_x(x_0+th, y_0+tk)+kf_y(x_0+th, y_0+tk).$$

ソレカラシテ二ツノ變數ニ關スル平均値ノ法則トシテ

$$f(x_0+h, y_0+k)=$$

$$f(x_0, y_0)+hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k),$$

但シ $0<\theta<1$ ナリトス.

2.「**テーラー**」**定理**　$\Phi(t)$ ニ於ケル相應スル定理ヲ書クト餘數ヲ有スル「テーラー」定理ヲ得ル

$$\Phi(1)=\phi(0)+\Phi'(0)+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta),$$

之レニ Φ 及ビ其微係數ニ其値ヲ入レルト ($n=1$ ナルトキ)

$$(2)\qquad f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left[h^2f_{x^2}(X,Y)+2hkf_{xy}(X,Y)+k^2f_{y^2}(X,Y)\right],$$

但シ $X=x_0+\theta h$, $Y=y_0+\theta k$ 及ビ $0<\theta<1$ ナリトス.

一般ニ　$\phi^{(m)}(0)/n!$　ヲ

$$\frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x,y)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

ト書クナラバ餘數ハ

$$\frac{1}{(n+1)!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x,y)\Bigg|_{\substack{x=x_0+\theta h\\y=y_0+\theta k}}$$

直チニ $n>2$ ノ函數ニ擴張スルコトガ出來ル. 餘數ガ n ガ無限トナルトキハ 0 ノ方ニ收斂スルトキハ其項ガ「ホモゼン」ナル多項式デアル所ノ無限級數トナリ其函數ノ値ニ收斂ス.

各項ヲ整理シテ或極根ノ内ノ h,k ($|h|<H$, $|K|<K$) ノスベテノ値ニ對シテノ收斂スルヤウナ單項式ノ項カラ成ル級數ヲ得タトキニハ函數ハ $h=x-x_0$, $k=y-y_0$ ノ冪級數ニ展開セラレルト云ヒ, 或ハ「テーラー」ノ定理デ展開セラレルト云フ:

$$(3)\qquad f(x,y)=\Sigma C_{mn}(x-x_0)^m(y-y_0)^n,$$

(3) ナル形ノ級數ハ「テーラー」級數ト云ハレル, 然レドモ餘數ガ 0 ニ收斂スルコトヲ實際證明スルコト困難デアルカラ解析學ノ他ノ方法ヲ用ヒネバナラヌ.

3.　**極大, 極小.**　　$u=f(x,y)$

ナル面ノ (x_0,y_0) ニ於ケル切平面ガ x, y 平面ニ平行デアルトキニハ (x_0,y_0,u_0) ナル點ノ近所ノスベテノ點ニ於テ面ハ切平面ノ下ニアル. 夫故ニ (x_0,y_0) ニ於テ

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

ナルトキ $f(x,y)$ ハ極小デアル.

同ジコトガ極大ニ就テイワレル.

(4) ノ内ニアル必要ナル條件ハ $n>2$ ナル數ニ於ケル變數ノ函數ニ擴張セラル, 何トナレバ例ヘバ $(x_0,y_0,z_0\ldots\ldots)$ ニ於テ $\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq 0$ デアル, ト $f(x,y_0,z_0\ldots\ldots)$ ハ x 唯一ツニ就テノ函數ハ $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ノ正負ニ依リテ增加或ハ減少スレバナリ. (4) ナル條件ハ極大, 極小ヲ定メルタメニ充分デアルコトガ度々アル.

[例]　m_1, m_2, m_3 ナル質量ノ點ヲ (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) トシテ, 此等ノ分子ノ惰率ガ極小デアル點ヲ求メヨ.

平面ノ無限距離ノ點ハ惰率ガ無限デアッテ,平面上ノ遠キ距離ナル點ニ於テ惰率ハ大キイコトハ明カデアル,又惰率ハ正ナル連續的函數デアル. 從テ

$$u = \mathrm{I} = m_1\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]+m_2\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\right]$$
$$+m_3\left[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\right]$$

ハ少ナクモ一ツノ極小ヲ有スル. 斯樣ナ點ハ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\left[m_1(x-x_1)+m_2(x-x_2)+m_3(z-z_3)\right] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\left[m_1(y-y_1)+m_2(y-y_2)+m_3(z-z_3)\right] = 0.$$

然ルニ此等ノ方程式ハ分子ノ重心ヲ定メ,他ノ點デ滿足セラレナイカラ,其點ニ於ケル惰率ノ最小ナル點ハ重心デアルト云ッテヨロシイ.

此結果ハ第九編ノ第15款ト一致シ,シカモ點ノ數ニ關シナイ.

演　習

1. 與ヘラレタ體積ヲ有シ極小ナル表面積ノ平行六面體ヲ定メヨ.

2. 與ヘラレタ表面積ヲ有シ極大ノ體積ヲ有スル平行六面體ヲ求メヨ.

3. 函數 $x^4+y^4+4x-55y-7$ ノ極小ヲ定メヨ.

4. 鋭角三角形ノ各項點カラノ距離ノ和ガ極小ナル點ヲ定メヨ.

4. 第二次微係數ニテノ驗メシ. 第二次微係數デ極大極小ヲ驗メソウ. 今(4)ナル必要ナル條件ハ (x_0, y_0) デ滿足セラレタトシヤウ. (2)カラ

$$(5)\qquad f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}h^2+2\mathrm{B}hk+\mathrm{C}k^2),$$

但シ　$\mathrm{A} = f_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$, $\mathrm{B} = f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$,

$$\mathrm{C} = f_{y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

トス. 極小ノタメニハ此(5)ノ左邊ハ (x_0, y_0) ニ近キスベテノ點 $x = x_0+h$, $y = y_0+k$ ニ於テ成立シ $x = x_0$, $y = y_0$ ニ於テ0ナリトス.

變數ガ何程アリトモ二次ノ「ホモゼン」ナル多項式ハ二次形式ト名付ケラレル,ソウシテスベテノ變數ガ0デアルトキニ限リ0トナルトキニハ定メラレテアルト云ハレル.

故ニ

$$h^2+k^2,\qquad 2h^2+3k^2+5l^2$$

ハ二ツ或ハ三ツノ變數ニ於テ定メラレタ二次形式ヲナシ,

$$3h^2+7hk+2k^2 = (3h+k)(h+2k)$$

ハ二ツノ變數ノ二次形式デハアルガ不定デアル. 定マッタ二次形式ハ決シテ記號ヲ變ジナイノデアル.

[定理]　A, B, C ハ h, k ニ關係セザル

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}h^2+2\mathrm{B}hk+\mathrm{C}k^2$$

ガ定形式ヲ有スルタメニ必要ニシテ十分ナル條件ハ

(6) $$B^2-AC<0.$$

ナリ,何トナレバ條件ハ十分ナルコトハ直チニ明カナリ,何トナレバ

$$V=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2]$$

ト書クコトガ出來ル,故ニ

$$Ah+Bk=0,\quad K=0$$

ナルトキハ $h=0,\ k=0$ ナルトキニ限ルカラデアル.

次ニ上ノ條件ハ必要デアルコトノ證明ハ學生ニ遺ス

(6) ガ滿足セラレルトキ A, C ハ同記號デ,又 V ノ記號デアル.

極大極小ニ於ケル適用 (5) ニ歸リ,(x_0, y_0) ニ於テ

(7) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0$$

デアリ,其等ノ微係數ハ連續デアルト假定ス. (x_0, y_0) ニ近イスベテノ點ニ於テ (7) ナル關係ヲ有シ,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及ビ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ハ (x_0, y_0) ニ於テ有スル記號ヲ有スルトシヤウ. 夫レカラシテ (6) ノ左邊ハ (x_0, y_0) ニ於テ 0 トナリ,其近所ノ點ニ於テ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ト共通ノ記號ヲ有スルデアラウ. 次ノ結果ニ達ス.

(x_0, y_0) デ極大極小ヲ有スルタメニ十分ナ要件ハ

(a) $$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

(b) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0,$$

其他二次微係數ガ (x_0, y_0) ニ於テ連續的ナルトキハ

(c_1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0$$

ナルトキハ極大,

(c_2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$$

ナルトキハ極小デアル.

(b) ト (c) トハ必要デナイケレドモ十分ナル條件デアル.

(b) ノ不等記號ガ等號ニ變ジテモ u ハ極大極小ヲ有シ得ル. 然シ (b) ニ於テ不等記號ガ變ズルト u ハ極大モ極小モ有シナイ.

演 習

1. $z=xy$ ハ原點ニ於テ極大モ極小モ有シナイコトヲ證明セヨ.

2. $x^3+3x^2-2xy+5y^2-4y^3$ ノ極大,極小ナル場合ヲ試ミヨ.

3. $x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz=2$ ナル面ノ極大,極小ヲ問フ.

第　十　六　編

包　圍　線

1. 曲線ノ群ノ包圍線. 等シキ半徑ヲ有シテ,中心ガ直線ノ上ニアル圓ノ群

(1) $$(x-a)^2+y^2=1$$

ヲ論ゼン,但シ a ハスベテノ値ヲ有ス.

(2) $$y=1 \quad 及ビ \quad y=-1$$

ハ此群ノ各圓ニ切ス.

又棒ノ一端ハ垂直ナル壁ノ面ニ觸レルヤウニ,他ノ端ハ牀上ニアリテ常ニ棒ハ同一垂直平面上ニアルトキ棒ノ連續的位置ハ或曲線ニ切シ,而シテ此曲線ハ上ノ(2)ニ相當スル. 之ヲ曲線ノ包圍線ト云フ.

今一般ノ場合ニ移リ

(3) $$f(x, y, a)=0$$

ナル曲線ノ群ヲ作ルトセバ a ガ變ズルニ從ヒ群ノ續キタルモノガ切線デアル所ノ一ツ或ハ多クノ曲線ヲ得. 其場合ニハ互ニ少シ異ル a ノ値ニ相應スル群中ノ二ツノ曲線

(4) $$f(x, y, a_0)=0, \qquad f(x, y, a_0+\triangle a)=0$$

ハ上ノ例ニ示シタヤウニ此間ノ曲線ノ切點ニ近キ點ニ於テ包圍線ト交ハルデアラウ. (4) ナル曲線ノ交ハリノ P 點ノ終極

ノ位置ヲ定メルトキハ包圍線ノ點ヲ得. 今 P ヲスグル第三ノ曲線ハ次ノ如シ:

(5) $$0=f(x, y, a_0+\triangle a)-f(x, y, a_0)=\triangle a f_a(x, y, a_0+\theta\triangle d).$$

何トナレバ P 點ノ座標ハ此曲線ノ方程式ヲ滿足スルカラ $\triangle a$ ハ 0 ニ近ヅクトシテ

(6) $$f_a(f, y, a_0)=0.$$

此樣ニシテ包圍線上ノ點ノ坐標ハ次ノ方程式ヲ滿足ス

(7) $$\begin{cases} f(x, y, a)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}=f_a(x, y, a)=0. \end{cases}$$

逆ニ (7) ナル軌跡ハ (3) ナル各曲線ニ切ス,但シ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{/}$ ハ此軌跡ニ沿ヒ 0 ナラズトス). 之ヲ證明スルニ (3) ナル群ノ各曲線ノ傾度ハ

(8) $$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

包圍線ノ傾度ヲ求ムニハ (7) ヲ x, y ニ就テ解キ

(9) $$x=\phi(a), \qquad y=\psi(a)$$

テ得タリトセバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(a)}{\phi'(a)}.$$

今 $f(x, y, a)$ ノ全微分ヲ取ルトセバ

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial a}a,$$

x, y ハ (9) ヲ滿足スルナラバ $df=0,\ dx=\varphi'(a)\,da,\ dy=\psi'(a)\,da$ 及ビ $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$ デアル. 夫レカラシテ

$$(10)\qquad 0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \text{或ハ}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\psi'(a)}{p'(a)}=0.$$

即チ (10) ハ (3) ト同ジ傾度ヲ表ハス,即チ包圍線ハ曲線ニ切ス.

[例一] (7) ナル公式ヲ (1) ナル圓ノ群ニ適用センニ

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2(x-a)=0$$

此方程式ト (1) トノ間ニ a ヲ消去スレバ

$$y^2-1=0 \quad \text{或ハ} \quad y=1 \ \text{及ビ}\ y=-1.$$

[例二] 其軸ガ互ニ一致シ其面積ガ一定シタル橢圓ノ面積ハ不變ナルトキニ生ズル包圍線ヲ求メヨ.

曲線ノ方程式ハ a, b ヲ「パラメーター」トシテ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ナリ,但シ「パラメーター」ハ

$$\pi ab=k$$

ヲ滿足スベキヲ以テ一ツノ「パラメーター」ヲ有スルコトナル. 以下學生ニ委ス.

[注意] ドノ曲線モ其切線ノ包圍線ト見做サレル.

例ヘバ

$$(11)\qquad y^2=2mx$$

ナル拋物線ニ, (x_0, y_0) ナル點デ切スル直線ノ方程式

$$y-y_0=\frac{m}{y_0}(x-x_0)$$

$$\text{即チ (12)}\qquad y=\frac{mx}{y_0}+\frac{y_0}{2}.$$

故ニ (11) ハ y_0 ガ「パラメーター」デアル (12) ノ包圍線ノ方程式デアル.

曲線ノ縮閉線ハ曲率圓ノ中心ノ軌跡ト定メラレ,曲線ノ法線ハ縮閉線ニ切スルト云ッタ. 故ニ縮閉線ハ法線ノ包圍線デアルト云フコトガ解ッタ,ソウシテ縮閉線ヲ定メル新ラシキ方法ヲ得タ.

例ヘバ拋物線

$$y=x^2$$

ノ點 (x_0, y_0) ニ於ケル法線ハ

$$x-x_0+2x_0(y-y_0)=0$$

$$\text{或ハ}\qquad x+2x_0y-x_0-2x_0^3=0$$

此諸線ノ群ノ包圍線トシテ「パラメーター」ヲ $y_1=x_0^2$ ノ x トスル:

$$y=3x_0^2+\frac{1}{2},\qquad x=-4x^3$$

或ハ

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{27}{16}x^2$$

演 習

次ノモノニ於テザツトシタル圖形ヲ書ケ.

1. 抛物線 $y^2=3ax-a^3$ ノ群ノ包圍線ヲ求メヨ.

2. 抛物線ノ縦線ノ 2 倍ヲ直徑トシテ圓ヲ書クトキ其包圍線ハ等シイ抛物線デアルコトヲ證明セヨ.

3. 等シイ長サデアル定圓ノ弦ノ包圍線ヲ求メヨ.

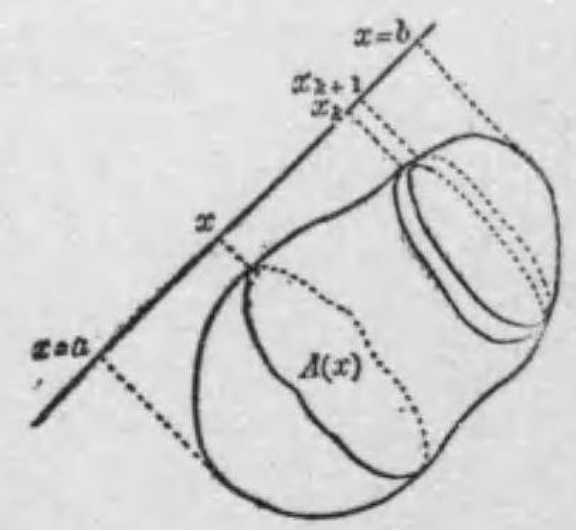
4. 楕圓 $x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$ ノ縮閉線ノ方程式ヲ作レ.

5. 擺線ノ縮閉線ノ方程式ヲ作レ.

第 十 七 編

二 重 積 分

1. 或立體ノ體積. 任意ノ形ノ立體アリトシヤウ. 其方向ガ任意デアル直線ヲ取リ, 其レニ垂直ナ變平面デ立體ヲ截ルトシヤウ. 其直線ノ定點カラ任意點ノ距離ヲ x ニテ表ハスコト丶ナセバ上述ノ横斷面ノ面積ハ x ノ函數デアル之ヲ $A(x)$ 或ハ單ニ A ニテ表ハスコト丶シヤウ. 上ノ平面ノ一ツニ相應スル x ノ極小値ヲ $x=a$ トシ極大値ヲ $x=b$ トシヤウ. a カラ b ニ至ル間隙ヲ n 等分シ $x_0=a, x_1, \ldots\ldots x_n=b$ トシ之レヲスギ垂直平面ヲ作レバ問題ノ立體ノ體積ハ次ノ和デ近似的ニ表ハサレル:



$$A(x_0)\triangle x+A(x_1)\triangle x+\ldots\ldots+A(x_{n-1})\triangle x.$$

n ガ無限大ナルトキニハ此和ノ極限即チ所求ノ體積ハ

$$V=\int_a^b A\,dx \qquad (1)$$

[例] 次ノ楕圓體ノ體積ヲ求メヨ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

コ丶ニハ $x=x'$ ナル任意平面デナシタ横斷面

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x'^2}{a^2}$$

即チ

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x'^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x'^2}{a^2}\right)}=1.$$

其半軸ハ夫レ々々

$$b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}},\qquad c\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}},$$

「アクセント」ヲ取リテ其面積ヲ表ハセバ

$$\mathrm{A}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

體積 V ハ

$$\mathrm{V}=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

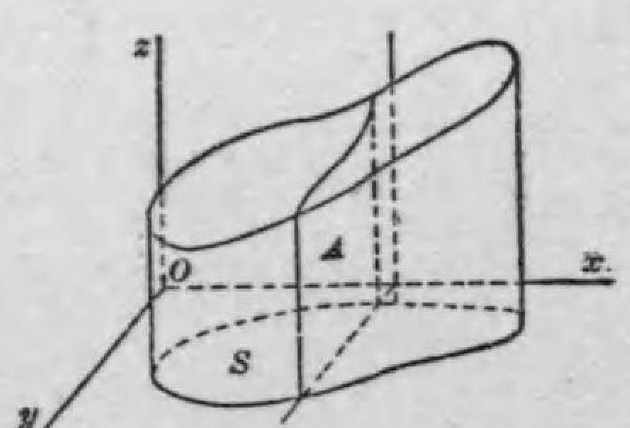
$$=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

---

2. 面ノ下ノ立體ノ二ツノ式——第一法　今或面ノ下ノ立體ノ體積ヲ算スル問題ニ移ラウ．面ノ方程式

(2)　　$z=f(x,y)$

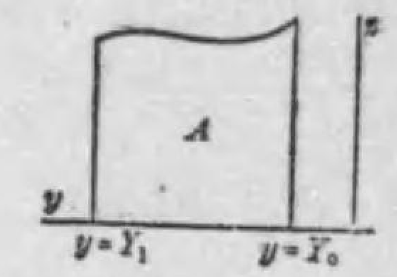
ヲ面ノ方程式トシヤウ．



(x,y) 平面ノ S ナル區域及ビ其中ニ單價的デ連續ナル函數 $f(x,y)$ ヲ與ヘラレタリトシ，現今デハ特ニ f ハ正ナリトシヤウ．S ヲ底トシ (2) ナル面ヲ冠ブレル圓柱體狀ノ柱ヲ考ヘヨ，ソレハ丁度求メントスル體積 V ナリ．

第一ノ法ハ第 1 款ニ述ベタモノデ，即チ $x=x'$ デ立體ヲ截リ其橫斷面，面積 A ヲ計算スルノデアル．A ハ

$$z=\phi(y)=f(x',y)$$



ナル曲線ノ下ノ面積デ，$y=\mathrm{Y}_0$, $y=\mathrm{Y}_1$, ナル橫線ニ相當スル縱線ノ間ノ曲線ノ下ノ面積デアル，即チ

$$\mathrm{A}=\int_{\mathrm{Y}_0}^{\mathrm{Y}_1}f(x',y)\,dy$$

「アクセント」ヲ取リテ

(3)　　$$\mathrm{A}=\int_{\mathrm{Y}_0}^{\mathrm{Y}_1}f(x,y)\,dy,$$

但シ x ハ常數デ，y ハ變數デアル，ソウシテ Y_0, Y_1 ハ x ノ函數デアル．

然ル後ハ A ヲ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ x ニ關シテ積分スルノミデアル，但シ a ハ S ニ於ケルモノヽ極小ナルモノデ，b ハ極大ナモノデアル．之ヲ次ノ形狀デ表ハス：

$$\int_a^b dx\int_{\mathrm{Y}_0}^{\mathrm{Y}_1}f(x,y)\,dy\quad \text{或ハ}\quad \int_a^b\int_{\mathrm{Y}_0}^{\mathrm{Y}_1}f(x,y)\,dy\,dx.$$

コレハ繰リ返ヘサレタ積分ト云フ，（二重積分デハナイ）

何トナレバ二ツノ普通積分ヲ繰リ返ヘサレタモノデアルカラデアル.

［例］ (x, y) ナル平面デ截取ツタ，拋物體

$$z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

ヲ計算シヤウ. (x, z) ト (y, z) ナル平面ノ何レニ關シテモ對稱デアルカラ第一ノ八分ノ一ニ對スル體積ヲ求メ，ソレヲ4倍スレバヨロシイ.

コレハ曲線

$$z = \phi(y) = 1 - \frac{x'^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

ノ下ノ面積デアル，但シ積分ノ限界ハ次ノヤウニ定メラレル.

$z = 0$ トスレバ方程式ハ

$$0 = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$

トナリ. (x, y) 平面ト其面トノ交リヲ表ハス即チSハ此楕圓ノ第一象限ニ於ケル部分デアル. Sノ中ニアル $x=x'$ ナル線分ハ其極小縦線 $Y_0=0$ 極大縦線 Y_1 ヲ有ス，即チ

$$0 = 1 - \frac{x'^2}{4} - \frac{Y_1^2}{9}, \qquad Y_1 = \frac{3}{2}\sqrt{4-x'^2}.$$

從テ

$$A = \int_0^{Y_1}\left(1 - \frac{x'^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)dy = \left(1 - \frac{x'^2}{4}\right)y - \frac{y^3}{27}\Big]_0^{Y_1}$$

$$= \left\{1 - \frac{x'^2}{4} - \frac{Y_1^2}{27}\right\}Y_1$$

$$= \frac{1}{4}(4-x'^2)\sqrt{4-x'^2}.$$

「アクセント」ヲ取リテ

$$A = \frac{1}{4}(4-x'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

S ニ於ケル x ノ最小値カラ其最大値マデ積分スレバ

$$\frac{1}{4}\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\left[x(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 6x\sqrt{4-x^2} + 24\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{3\pi}{4}.$$

從テ全體積ハ $3\pi = 9{,}42$ デアル.

演　　習

二ツノ拋物線

$$x = y^2, \qquad y = x^2$$

ニ共通ナル部分ノ上ニ立チ

$$z = 12 + y - x^2$$

ナル面ニ截ラレタ柱體ノ體積ヲ求メヨ.

3. 續キ. 第二法 上ノ體積ヲ求ムル他ノ法ガアル.

S ナル方面ヲ任意ノ小片ニ分チ之ヲ面積原素ト云ヒ其一ヲ $\triangle S_k$ ニテ表ハストセン. 其上ノ任意ノ點ヲ (x_k, y_k) トシ, 之ヲ底トシ $f(x_k, y_k)$ ヲ高サトセバ此柱狀ノ體積ハ

$$f(x_k, y_k)\triangle S_k$$

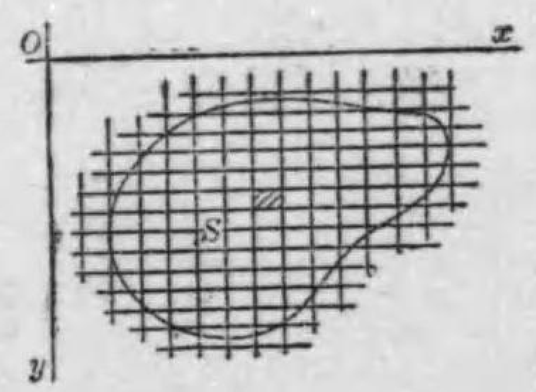
ナリ, 今其全體ヲ作レバ體積ヲ得ル, 之ヲ次ノヤウニ表ハス.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\triangle S_k, \tag{4}$$

但シ此式ノ n ヲ無限ニ大ナラシムレバ面積原素ハ 0 ニ近ヅキ (4) ノ極限ハ V トナル, 卽チ

$$V = \lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\triangle S_k. \tag{5}$$

コレハ所要ノ體積ノ第二ノ式デアル.



且ツ此式ハ原素ガ S ヲ充タサナイデモヨイ. ソコデ $\triangle x$, $\triangle y$ ヲ二邊トスル矩形ヲ面積原素トシテ (a) 全ク S ノ內ニアル矩形ノ集合ト見テモヨク (b). マタ S ノ界ヲ少ナクモ一點デ截ル矩形ノ集合ト見テモヨロシイ (c) 或ハ (a) ト (b) トノ中間ノモノト見テモヨロシイ. 何レノ場合デモ (4) ナル和ハ V ナル體積ヲ極限トスル.

---

4. 積分ノ基礎ノ定理 第九編ノ第 2 款ニ於テ得タモノト同樣ニ面ノ下ノ體積ニ就テ定理ヲ得.

$f(x, y)$ ハ (x, y) 平面ノ一方面 S ノ何レニ於テモ x, y ノ連續函數デアルトセヨ. 此方面ヲ $\triangle S_0$. $\triangle S_1$, $\triangle S_2$, $\ldots\triangle S_{n-1}$ ノヤウニ分ケ

$$f(x_0, y_0)\triangle S_0 + f(x_1, y_1)\triangle S_1 + \ldots\ldots + f(x_{n-1}, y_{n-1})\triangle S_{n-1}$$

ナル和ヲ作ルトシヤウ, 但シ (x_{k1}, y_k) ハ第 k 番ノ面積部分デアル. n ヲ無限ニ增加スルコトガ出來ルナラバ各部分ノ大キサガ 0 ニ近ヅキ其和ハ

$$\int_a^b dx\int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy \quad 或ハ \quad \int_\alpha^\beta dy\int_{x'}^{x''} f(x, y)\,dx$$

ナル極限ニ近ヅク, 但シ積分ノ限界ハ第 2 款ニ書イタヤウニシテ定メラレル.

公式トシテコノ定理ハ次ノヤウニ表ハサレル.

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\triangle S_k = \int_a^b dx\int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy \tag{6}$$

$$= \int_\alpha^\beta dy\int_{x'}^{x''} f(x, y)\,dx.$$

二重積分の定義 上ノ (6) ノ左邊ノ極限ヲ S ナル方面ニ於ケル f ナル函數ノ二重積分ト云ハレル, 之ヲ次ノヤウニ書ク

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k)\triangle S_k = \iint_S f\,dS. \tag{7}$$

コレハ用ヒタ坐標ノ特別ノ系ニ關セザルモノデ「カルテシアン」法デモ極坐標デモコロシイノデアル．一方ニ繰リ返ヘシ積分ハ現在デハ唯「カルテシアン」法ニ限ルノデアル，

二重積分ハ

$$\iint f\,dxdy \quad \text{或ハ} \quad \iint f\,r\,dr\,d\theta$$

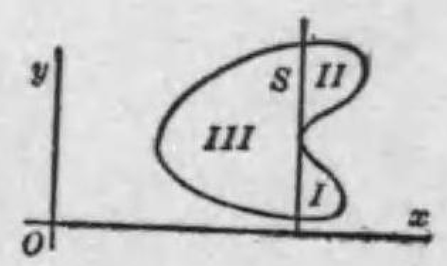
ト書カレル，但シ第二ノモノハ極式デアル．

基礎ノ定理ハ次ノヤウニ書カレル

$$\iint_{S} f\,dS = \int_{a}^{b} dx \int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy. \tag{6'}$$

最初ニ x ニ關シテ積分スルトキモ同ジコトデアル．

〔**注意**〕 今マデハ y 軸ニ平行ナル直線ハ多クトモ唯二點デ直線ニ交ルコトヲ示シタ，シカシ S ガ次ノ圖ノヤウナ場合デモ同樣デアル



又 f ハ常ニ正デアルトシタ，コレモ一ツガ負ノ場合デモ用ヒラレル．

附 錄 第 一

微 分 方 程 式

1. 定義 x, y ナル二ツノ變數ノ間ノ微分方程式トハ x, y 及ビ若干ノ微係數トヨリ成ル方程式デアル．其階級トハ其レガ含ム微係數ノ階級デアツテ，其次數トハ最高階級ノ微係數ノ羃指數ヲ云フノデアル．

微分方程式ノ解法トハ微分ニ依テ所題ノ微分方程式ヲ得ルヤウナ x, y 及常數ノ間ノ關係ヲ求ムル法デアル，此關係ヲ原初ト稱スル．此解法ハ積分ヲ要スルカラ其度毎ニ一個ノ常數ガ入ツテ來ル，從テ n 階級ノ微分方程式ノ解法ニハ n 個ノ任意常數ガ入ツテクル．

同ジ原初ヨリ同ジ階級ノ異ナル微分方程式ヲ生ズ，例ヘバ

$$ay + bx + c = 0 \tag{1}$$

ヲ原初トスルト，微分シテ

$$a\frac{dy}{dx} + b = 0. \tag{2}$$

(1) ト (2) トノ間ニ a ヲ驅逐スルト

$$bx\frac{dy}{dx} + c\frac{dy}{dx} - by = 0 \tag{3}$$

ヲ得(1)ト(2)トノ間ニbヲ驅逐スルト

$$ay + c - ax\frac{dy}{dx} = 0 \tag{4}$$

ヲ得ル, (1) ヲ完全原初ト云ヒ, (2)(3)(4) ヲ變數ノ間ニ同ジ關係ヲ有スル微分方程式ト云フ.

2. 第一階級ノ一次ノ微分方程式 第一階級ノ一次ノ微分程式ノ一般ノ形式ハ

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$$

ヲナス, 但シ M, N ハ x, y ノ函數デアル. 此方程式ハ

$$\mathrm{M} + \mathrm{N}\frac{dy}{dx} = 0$$

ノヤウニオカレル.

コノ様ナ方程式ヲ解ク最モ明カナ方法ハ變數ノ分離ニ依ッテ出來ル. dx ノ係數ハ唯 x ナル變數ヲ有シ, dy ノ係數ハ唯 y ナル變數ヲ有スルトキ, 即チ

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy = 0$$

ニ於テ X ハ x ノミノ函數デ, Y ハ y ノミノ函數デアルトキデアル. 21 トキニハ變數ハ分離セラレタトイフノデアル, 又

$$\mathrm{XY}\,dx + \mathrm{X'Y'}\,dy = 0$$

ニ於テ X, X′ ハ x ノミノ函數, Y, Y′ ハ y ノミノ函數デアルトキニハ變數ハ分離セラレル何トナレバ X′Y デ除スレバ

$$\frac{\mathrm{X}\,dx}{\mathrm{X'}} + \frac{\mathrm{Y'}}{\mathrm{Y}}\,dy = 0$$

[例] $(1-x)^2y\,dx - (1+y)x^2\,dy = 0.$

x^2y ニテ除スレバ

$$\frac{(1-x)^2}{x^2}\,dx - \frac{1+y}{y}\,dy = 0.$$

ソレカラ

$$\frac{dx}{x^2} - \frac{2dx}{x} + dx - \frac{dy}{y} - dy = 0$$

積分スレバ

$$-\frac{1}{x} - 2\log x + x - \log y - y = c.$$

演 習

1. $(1-y)\,dx + (1+x)\,dy = 0.$

答 $\log(1+x) - \log(1-y) = c.$

2. $(1+y^2)\,dx - x^{\frac{1}{2}}\,dy = 0.$ 答 $2x^{\frac{1}{2}} - \tan^{-1}y = c.$

3. $dy + y\tan x\,dx = 0.$ 答 $\log y - \log\cos x = c.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$ 答 $(1+x^2)(1+y^2) = cx^2.$

5. $\sin x\cos y\,dx - \cos x\sin y\,dy = 0.$ 答 $\cos y = c\cos x.$

5. t 時ニ於ケル電流 C ノ强サニ對スル「ヘルムホルツ」ノ方程式ハ $\mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} - \dfrac{L}{\mathrm{R}}\cdot\dfrac{d\mathrm{C}}{dt}$ ナリ, 但シ E, R, L ハ與ヘレタ常數ナリ. 其積分ノ常數ハ其初メノ値ガ 0 トナルト云フ條件デ定マルトキハ上ノ C ノ値如何.

3. 齊次微分方程式 $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$ ニ於テ M ト N トハ x, y ノ同次ノ齊次式デアルトキハ齊次デアルト唱ヘル.

方程式ガ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$$

ナル形式ヲシテオルト右邊ハ $\dfrac{y}{x}$ ノ函數デアル. 今 y/x ヲ v トスルト

$$y = vx \quad \text{及ビ} \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

デアルカラ方程式ハ

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

トナリ變數ハ分離セラレル, 卽チ

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v}$$

[例] $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$ ヲ解ケ.

$y = vx$ トオクト

$$v^2x^2 + \frac{x^2(xdv + vdx)}{dx} = \frac{vx^2(xdv + vdx)}{dx},$$

從テ $\dfrac{dv}{v} + \dfrac{dx}{x} = dv,$

之ヲ積分シ $v = y/x$ ヲオクト

$$\log\frac{y}{x} + \log x = \frac{y}{x} + c$$

$$\log y - c = \frac{y}{x} \quad \text{或ハ} \quad c_1 e^{\frac{y}{x}} = y \quad (\log c_1 = c)$$

演 習

1. $(x-2y)\,dx + y\,dy = 0.$

答 $\log(x-y) - \dfrac{x}{y-x} = c.$

2. $(2\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0.$ 答 $y = ce^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}$

3. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$ 答 $x^2 - y^2 = cx.$

4. 曲線ノ次切線ガドノ點ニ於テモ橫線ト縱線トノ和ニ等シイ曲線ハ何カ. 答 其微分方程式

$$-y\frac{dx}{dy} = x + y$$

ソレカラシテ

$y^2 + 2xy = c$ 卽チ双曲線デアル.

---

4. $\underline{(ax+by+c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0}$ **ナル形式**

$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$ ノ M, N ガ一次デアルトキ, 卽チ

(1) $(ax+by+c)\,dx + (a'x+b'y+c')\,dy = 0$

ナル形式ヲナストキハ $x = x'+h,\ y = y'+k$ トスルト

(2) $$(ax'+by'+ah+bk+c)dx' + (a'x'+b'y'+a'h+b'k+c')\,dy' = 0.$$

此 (2) ガ齊次デアルニハ

$$ah+bk+c=0, \qquad a'h+b'k+c'=0$$

トナルヲ要スル, 即チ

$$h=\frac{cb'-c'b}{a'b-ab'}, \quad k=\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}$$

ナルヲ要スル. 從テ (2) ハ齊次トナリ

(3) $$(ax'+by')\,dx'+(a'x'+b'y')\,dy'=0$$

ナル形式ヲ有スル, ソウシテ前ニ示シタヤウニ變數ハ分離セラレル.

上ノ法ハ $a'b=ab'$ ナルトキニハ適用出來ヌ. コノトキニハ $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$ トナル, 之ヲ m トオケバ $a'=ma$, $b'=mb$ トナリ從テ (1) ハ

$$(ax+by+c)\,dx+[m(ax+by)+c']\,dy=0.$$

今 $ax+by=z$ トナリト $dy=\frac{dz-adx}{b}$ トナル之ヲ(3)ニ代入スルト

$$(z+c)\,dx+(mz+c')\,\frac{dz-adx}{b}=0$$

$$[b(z+c)-a(mz+c')]\,dx+(mz+c')\,dz=0,$$

即チ
$$dx+\frac{(mz+c')\,dz}{b(z+c)-a(mz+c')}=0.$$

演　習

1. $(1+x+y)\,dx+(1+2x+3y)\,dy=0$ ヲ解ケ.

2. $\frac{dy}{dx}=ax+by+c.$　答 $abx+b^2y+a+bc=Ce^{bx}.$

3. $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0.$

答 $x^2-xy+y^2+x-y=C.$

---

5. 第一次階級ノ線的方程式.

方程式ガ P, Q ガ x ノミノ函數デアツテ

(1) $$\frac{dy}{dx}+Py=Q.$$

ナル形ヲナストキハ方程式(1)ハ y ト其微係數トノ一次デアルコノトキ方程式(1)ハ線的デアルト云フ.

線的方程式ハ一般解法ヲ許容スル. 右邊ハ唯 x ノ函數デアルカラ左邊ノ積分因數ハ唯ソレガ x ノ函數デアルト方程式ノ積分因數デアル. 此ヤウナ因數ヲ見出スニハ $y=Xz$ トスル, 但シ X ハ x ノ任意函數デ, z ハ新變數ナリ. ソノトキニハ $dy=X\,dz+z\,dX$ デ(1)ハ

(2) $$X\,dz+z\,dX+PXz\,dx=Q\,dx.$$

今

(3) $$z\,dX=Q\,dx$$

ト取ルトキハ (2) ハ

$$X\,dz+PXz\,dx=0$$

トナル. ソコデ

$$\frac{dz}{z}=-P\,dx \quad 從テ \quad \log z=-\int P\,dx \quad 又 \quad z=e^{-\int P\,dx}$$

(3) ニ z ノ値ヲ入レルト

$$e^{-\int P dx} d X = Q\, dx, \quad 或ハ \quad d X = e^{\int P dx} Q\, dx$$

從テ

$$X = \int e^{\int P dx} Q\, dx + c, \quad 或ハ \quad y = X z = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q\, dx + c \right)$$

演　　習

1. $dy - \dfrac{yx\,dx}{1+x^2} = \dfrac{a}{1+x^2} dx$ ヲ解ケ.

y ニ就テ線的ナル此方程式ハ

$$\frac{dy}{dx} - \frac{yx}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2}$$

ト置クコトガ出來ル. 從テ

$$\int P\, dx = -\int \frac{x\, dx}{1+x^2} = \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

積分因數ハ

$$e^{\int P dx} = e^{\log (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

デ $\displaystyle\int e^{\int P dx} Q\, dx = \int \frac{a(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} dx = \frac{ax}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + c.$

故ニ $\quad y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{ax}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + c \right) = ax + c(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$

2. $x \dfrac{dy}{dx} - ay = x+1.$ 　答 $y = cx^a - \dfrac{x}{a-1} - \dfrac{1}{a}.$

3. $\dfrac{dy}{dx} \cos x + y \sin x = 1.$ 　答 $y = \sin x + c \cos x.$

---

6. 線的方程式ノ擴張.

モット一般ノ形ヲナセル

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + P y = Q y^n$$

アリトシヤウ, P ト Q トハ x ノミノ函數デアル. コレハ前款ノ直線的方程式トナル.

(1) ヲ y^n デ除スルト

$$(2) \qquad \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{P}{y^{n-1}} = Q.$$

$z = y^{-n+1}$ トスレバ $y^{n-1} = z^{-1}$, $dz = -(n-1) y^{-n} dy.$

之ヲ (2) ニ代入スルト

$$\frac{dz}{dx} - (n-1) Pz = -(n-1) Q$$

トナルカラデアル.

演　　習

1. $dy + y dx = xy^3 dx.$

$y^3 dx$ デ除スルト

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^2}=x.$$

$z=y^{-2}$　トシテ

$$\frac{dz}{dx}-2z=-2x.$$

前款ニ依ツテ

$$\int \mathrm{P}\,dx=-2x$$

$$z=-2e^{2x}\int e^{-2x}x\,dx=e^{2x}\left(xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+c\right).$$

故ニ
$$1=y^2\left(ce^{2x}+\frac{1}{2}+x\right).$$

2.　$\dfrac{dy}{dx}=x^3y^3-xy.$　　　答　$\dfrac{1}{y^2}=x^2+1+ce^{x^2}.$

7.　正格微分方程式　方程式.

(1)　　$\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy=0$

ノ M, ト N トガ

(2)　　$\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$

ナル關係ヲ有スルト (1) ハ正格ノ微分方程式デアルト云フ.

(2) ナル關係ヲ有スルト y ヲ常數ト見テ $\int \mathrm{M}\,dx$ ヲ求メ之ニ y ノ或函數ヲ加ヘルトヨロシイ. y ノ不定函數ハ x ヲ常數ト見テ今得タ結果ノ微係數ヲ $\mathrm{N}\,dy$ ニ等シト置キテ定メルコトガ出來ル, 卽チ

$$\frac{\partial}{\partial y}\int \mathrm{M}\,dx+\frac{df(y)}{dy}=\mathrm{N}$$

トシ $f(y)$ ヲ求ムルノデアル.

演　　習

1.　$\dfrac{dx}{y}+\left(2y-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=-\frac{1}{y^2},$$

卽チ (2) ナル條件ハ滿足セラレルカラ正格ナル微分方程式デアル. y ヲ常數トシテ $\int \mathrm{M}\,dx$ ヲ求メ $f(y)$ ヲ加ヘルト $\dfrac{x}{y}+f(y)$ トナル.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{df(y)}{dy}=2y-\frac{x}{y^2},$$

從テ
$$-\frac{x}{y^2}+\frac{df(y)}{dy}=2y-\frac{x}{y^2}.$$

因テ
$$\frac{df(y)}{dy}=2y.\qquad \therefore\ \frac{x}{y}+y^2=c.$$

2.　$(6xy-y^2)\,dx+(3x^2-2xy)\,dy=0.$

答　$3x^2y-y^2x=0.$

3.　$x\,dx+y\,dy+\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0.$

答　$x^2+y^2-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\mathrm{C}.$

---

8. 正格ナル方程式ニスル因數 $\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy=0$ ガ正格ノ微分方程式デナイトキニハ x 或ハ y 或ハ二ツナガラ合ミタル因數ヲ導入シテ正格ナ微分方程式トナシ得ルコトガ度々アル. 導入シタモノヲ積分因數ト云フ.

I. $\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy$ ハ齊次デアルトキ

$$\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy=\frac{1}{2}\Big[(\mathrm{M}x+\mathrm{N}y)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)$$
$$+(\mathrm{M}x-\mathrm{N}y)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\Big]$$

$$(1)\qquad =\frac{1}{2}\left[(\mathrm{M}x+\mathrm{N}y)\,d\log(xy)+(\mathrm{M}x-\mathrm{N}y)\,d\log\frac{x}{y}\right].$$

ソレカラシテ $x=vy$ トオキテ

$$\frac{\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\frac{1}{2}\,d\log(xy)+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}\,d\log\frac{x}{y}.$$

$$(2)\qquad =\frac{1}{2}\,d\,[\log v+\log y^2]+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}\,\frac{dv}{v}.$$

M, N ハ齊次デアルナラバ

$$\frac{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}=f(v)$$

トスルコトガ出來ルカラ (2) ノ右邊ハ正格ナ微分方程式デアル, ソレ故 $\dfrac{1}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ ハ積分因數デアル.

$\mathrm{M}x+\mathrm{N}y=0$ デアルトキハ此方法ハ失敗デアル, シカシ此場合ニハ $\mathrm{M}x=-\mathrm{N}y$ デアルカラ $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$ ノ第一

項ヲ $\mathrm{M}x$ デ除シ, 第二項ヲ $-\mathrm{N}y$ デ除スルコトガ出來ル, ソウスルト

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$$

$$\therefore\quad y=cx.$$

[例] $(xy+y^2)\,dx-(x^2-xy)\,dy=0$ ヲ與ヘタリトシヤウ.

$$\frac{1}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\frac{1}{2xy^2}$$

デアル, 此因數デ乘ズルト

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)dx-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

正格ナ微分方程式ノタメノ條件ガ具備セラル. 故ニ

$$\frac{x}{y}+\log(xy)=c.$$

II. $f_1(xy)\,y\,dx+f_2(xy)\,x\,dy=0$ ナル形.

I ノ方法ト同様ニ $\dfrac{1}{\mathrm{M}x-\mathrm{N}y}$ ガ積分因數デアルコトガ分ル. コレハ $\mathrm{M}x-\mathrm{N}y=0$ デ失敗ス, シカシ I ノヤウニシテ解ハ $xy=c$ ナルコトガ分ル.

シカシ變數ノ分離ノ他ノ法ガ用ヒラレル. 例ヘバ

$$(x^2y^2+xy)\,y\,dx+(x^2y^2-1)\,x\,dy=0$$

ニ於テ $xy=v$ トスレバ

(3) $$(v^2+v)\frac{v}{x}dx+(v^2-1)x\left(\frac{dv}{x}-\frac{v\,dx}{x^2}\right)=0,$$

ソレカラシテ

(4) $$\frac{dx}{x}=-\left(\frac{v-1}{v}\right)dv,$$

即チ變數ハ分離セラレタ. (4) ヲ積分シテ $v=xy$ ト置クト

$$y=c\,e^{xy}.$$

III. $\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy$ ガ正格ノ微分方程式トナルタメニ必要ナ因數ヲ定メヤウ, 但シ其因數ガ唯一變數ノ函數デアルトキトス.

X ガ唯 x ノ函數ナリト假定シヤウ. $\mathrm{XM}\,dx+\mathrm{XN}\,dy$ ガ正格ノ微分デアルカラ

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{XM})=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{XN}).$$

X ハ x ノミノ函數デアルカラ

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}=0$$

デアルカラ

$$\mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}+\mathrm{N}\frac{d\mathrm{X}}{dx}.$$

故ニ

(5) $$\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}}=\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right)dx$$

(5) ノ左邊ハ y ヲ含マナイカラ右邊モ y ニ關係シナイ數デナケレバナラヌ.

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right)=f(x)$$

(5) ヲ積分シテ $\log \mathrm{X}=\int f(x)dx \quad \therefore \quad \mathrm{X}=e^{\int f(x)dx}$

モシ又 Y ガ唯 y ノ函數デアルナラバ, ソレガ原初ノ因數デアツテ $\mathrm{YM}\,dx+\mathrm{YN}\,dy$ ハ正格ノ微分デアル, ソウシテ

$$\mathrm{Y}=e^{\int\phi(y)\,dy}.$$

[例] $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}=0$$

$$\log \mathrm{X}=\int dx=x,\qquad \mathrm{X}=e^x$$

e^x デ與ヘラレタ方程式ヲ乘ズルト

$$e^x(x^2+y^2+2x)\,dx+2e^xy\,dy=0.$$

正格ナル微分方程式ナルタメノ積分條件ハ滿足セラレ, 7 款ノヤウニ積分スルト

$$e^xx^2+e^xy^2=c.$$

演 習

1. $x(x^2+3y^2)\,dx+y(y^2+3x^2)\,dy=0.$

答 $x^4+6x^2y^2+y^4=c.$

2. $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0.$ 答 $x^2-y^2=cx.$

3. $(1+xy)\,y\,dx+(1-xy)\,x\,dy=0.$ 答 $x=cye^{\frac{1}{xy}}$

4. $2xy\,dy=(x^2+y^2)\,dx.$ 答 $x^2-y^2=cx.$

---

9. 第一階級及ビ第二次 之ニ屬スル微分方程式ノ一般ノ形ハ M, N ガ x, y ノ函數デアル.

$$(1)\quad \frac{dy^2}{dx^2}+\mathrm{M}\frac{dy}{dx}+\mathrm{N}=0$$

デアル. 原初カラ得タ直接ノ微分ハ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ第一次ナルモノヲ含ムノミナリ. 故ニ (1) ト恒等ナラズ. 然レドモ原初ノ方程式ガ c ナル常數ノ一次ト二次トヲ含ムトキハ c ニ就テ解ノト c ノ二ツノ値ヲ得, 此 c ノ各値カラ c ガ微分法ニテ消失セシメルトキニハ (1) ヲ得ナケレバナラヌ.

故ニ與ヘラレタ方程式ハ $\dfrac{dy}{dx}$ ノ二次方程式トシテソレヲ解カレル, 即チ凡ベテノ項ヲ左邊ニ移シテ一次デ第一階級ノ二ツノ因數ニ分チ, 各ヲ別々ニ 0 ト置キ積分ス, 但シ各ニ同ジ常數ヲ用フルヲ要ス. 此等ノ積分ノ積ハ完全原初デアル.

[例] (1) $y\dfrac{dy^2}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

之ヲ $\dfrac{dy}{dx}$ ニ關シテ解クト

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

ソレカラシテ

$$(2)\quad dx=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad dx=-\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

(2) ヲ積分スレバ

$$x=\sqrt{x^2+y^2}+c \quad 及ビ \quad x=-\sqrt{x^2+y^2}+c.$$

故ニ

$$(x-c-\sqrt{x^2+y^2})(x-c+\sqrt{x^2+y^2})=0,\ 或ハ\ y^2=c^2-2cx.$$

演習

1. $\dfrac{dy^2}{dx^2}=ax.$ 答 $(y-c)^2=\dfrac{4}{9}ax^3.$

2. $\dfrac{dy^2}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6=0.$

答 $(y-2x+c)(y-3x+c)=0.$

3. $(x^2+1)\dfrac{dy^2}{dx^2}=1.$ 答 $c^2e^{2y}-2cxe^y=1.$

4. $\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}+y\right)=x(x+y).$

答 $(x^2-2y+c)[e^x(x+y-1)+c].$

---

10. 第二階級ノ微分方程式.

I. x ト $\frac{d^2y}{dx^2}$ トノミヲ含ム方程式.

此方程式ガ出來ルナラバ

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{X}$$

ナル形ニオカレ, 但シ X ハ x ノ函數デアル.

(1) ヲ積分スルト

(2) $$\frac{dy}{dx}=\mathrm{X}_1+\mathrm{C}_2.$$

更ニ之ヲ積分スルト

(3) $$y=\mathrm{X}_2+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2.$$

但シ (2) ト (3) トニ於テ X_1, X_2 ハ x ノ函數デ, C_1, C_2 ハ常數デアル.

II. y ト $\frac{d^2y}{dx^2}$ トノミヲ含ミタルトキ.

Y ヲ y ノミノ函數トシテ

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{Y}$$

$2\frac{dy}{dx}$ デ乘ズルト

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=2\mathrm{Y}\frac{dy}{dx}.$$

コレカラ

(5) $$2\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=2\mathrm{Y}\,dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{C}_1.$$

變數ヲ分離シ積分スルト

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int\mathrm{Y}\,dy+c_1}}+c_2$$

III. 直接ニ y ヲ含マナイ方程式.

方程式ガ $\mathrm{F}\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ ナル形ヲナセリトシヤウ.

$$\frac{dy}{dx}=z,\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$$

トスルト z ト x トノ間ノ第一階級ノ方程式ガ得ラレル.

例ヘバ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{a^2}\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}=0$ ガ與ヘラレタトスレバ $\frac{dy}{dx}=z$ トスルト

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}}=-\frac{2x}{a^2}dx$$

トナル, 之ヲ積分スルト

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=-\frac{x^2}{a^2}+\mathrm{C}_1=\frac{c^2-x^2}{a^2},$$

但シ $\mathrm{C}_1=\frac{c^2}{a^2}$ トス. 從テ

$$z=\frac{dy}{dx}=\frac{c^2-x^2}{\sqrt{a^4-(c^2-x^2)^2}} \quad \therefore \quad y=\int\frac{(c^2-x^2)\,dx}{\sqrt{a^4-(c^2-x^2)^2}}$$

IV. 直接ニ x ヲ含マナイ方程式.

$$\frac{dy}{dx}=z \quad \text{トスルト} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}.$$

此代用ヲスルト自變數ハ x カラ y ニ變ジ, z ト y トノ第一階級ノ方程式ガ得ラレル. 例ヘバ

$$\text{(6)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}-a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y$$

ナル方程式ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=z,\ \frac{d^2y}{dx^2}=z\frac{dz}{dy}$ ヲ代入スルト

$$\text{(7)} \qquad z\frac{dz}{dy}-az^2=y$$

$z^2=2v$ トスルト $z\,dz=dv$, 之ヲ (7) ニ代入スルト

$$dv-2\,av\,dy=y\,dy$$

コレハ積分スルニ容易ナリ.

演習

1. $\frac{d^2y}{dx^2}=6x.$ 答 $y=x^3+c_1x+c_2.$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{ay}}.$

答 $x=\sqrt[4]{a}\left[\frac{2}{3}\left(y^{\frac{1}{2}}+\frac{4C_1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)-\frac{8C_1}{a^{\frac{1}{2}}}\left(y^{\frac{1}{2}}+\frac{4C_1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)\right]+C_2.$

3. $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1.$ 答 $y^2=x^2+C_1x+C_2.$

4. $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2\log y.$

答 $\log y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$

附錄第二

積分演習及び表

1.

初步ノ形式

1. $\int (du + dv - dw) = u + v - w.$

2. $\int a dx = ax.$　　4. $\int a\frac{dx}{x} = a \log x.$

3. $\int a df(x) = af(x).$　　5. $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}.$

冪ノ形式

6. $\int a^x \log a\, dx = a^x.$　　7. $\int e^x dx = e^x.$

三角ノ形式

8. $\int \cos x\, dx = \sin x.$　　9. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x.$

10. $\int \sin x\, dx = -\cos x.$　　11. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x.$

12. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x.$　　13. $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x.$

14. $\int \sin x\, dx = \operatorname{vers} x,$　　15. $\int \cos x\, dx = -\operatorname{covers} x.$

逆三角ノ形式

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x.$

17. $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \cos x.$

18, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \tan x.$

19. $\int -\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \cot x.$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x.$

21. $\int -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{vers} x.$

23. $\int -\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{covers} x.$

2.

有理代數ノ形式

$(a+bx)$ ヲ含ム式

24. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log (a+bx).$

25. $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left[a+bx-a\log(a+bx)\right].$

26. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)\,b+x)}$

$\qquad + (a-b)\log(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}).$

27. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\,\mathrm{arc\,sin}\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}.$

28. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+a^2\log(a+bx)\right].$

29. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}.$

30. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}.$

31. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}.$

32. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx)+\frac{a}{a+bx}\right].$

33. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\log(a+bx)-\frac{a^2}{a+bx}\right].$

34. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\log\left(\frac{a+bx}{x}\right).$

$(a+bx^2)$ ヲ含ム式

35. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tan}\,\frac{x}{a}.$

36. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}.$

37. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{arc\,tan}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}$, ($a>0$, $b>0$ ノ時).

38. $\int \frac{du}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\log\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$, ($a>0$, $b>0$ ノ時).

39. $\int \frac{adx}{x^2-a^2} = \log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$

40. $\int \frac{xdx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right).$

41. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{x}{b}-\sqrt{\frac{a}{b^3}}\,\mathrm{orc\,tan}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}.$

42. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax}-\sqrt{\frac{b}{a^3}}\,\mathrm{arc\,tan}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}.$

43. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2\sqrt{a^3b}}\,\mathrm{arc\,tan}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}.$

44. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma}\frac{x}{(a+bx^2)^m}+\frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$

45. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{-x}{2mb(a+bx^2)^m}+\frac{1}{2mb}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$

$(a+bx^n)$ ヲ含ム式

46. $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}-(m-n+1)\,a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx}{b(np+m+1)}.$$

47. $\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx$

$$= \frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}+b(m-np-n-1)\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx}{-a(m-1)}.$$

48. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

$$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p+anp\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx}{np+m+1}.$$

49. $\int x^m(a+bx^n)^{-p}dx$

$$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n+1-np)\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx}{an(p-1)}.$$

3.

無理代數函數

$\sqrt{a+bx}$ ヲ含ム式

50. $\int\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}.$

51. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}.$

52. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}.$

53. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}.$

54. $\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx = 2\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\,log\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)$

55. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}log\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)$ ($a>0$ ノ時)

56. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}.$

57. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2\sqrt{a^3}}log\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right).$

$\sqrt{a^2+x^2}$ ヲ含ム式

58. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}log(x+\sqrt{a^2+x^2}).$

59. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = log(x+\sqrt{x^2+a^2}).$

60. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}.$

61. $\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2+x^2}-a\,log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right).$

62. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a}log\frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}.$

63. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}log(x+\sqrt{a^2+x^2})$

64. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$

65. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$

$$= \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\log(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

66. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$

67. $\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$$= \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{a^2+x^2} + \frac{3a^4}{8}\log(x+\sqrt{a^2+x^2}).$$

68. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right).$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$

70. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \log x + \sqrt{a^2+x^2}.$

$\sqrt{a^2-x^2}$ ヲ含ム式

71. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right).$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$

73. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}.$

74. $\int \frac{ax}{x\sqrt{a^2-x^4}} = \frac{1}{a}\log\left(\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right).$

75. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$

76. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}.$

77. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$= -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right).$$

78. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

79. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$

80. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}.$

81. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\left[x\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right].$$

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}.$

83. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a}.$

84. $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$= -\frac{x^{m-1}}{m}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m-1}{m}a^2\int x^{m-2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

$\sqrt{x^2-a^2}$ ヲ含ム式

85. $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\Big].$

86. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

87. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}.$

88. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}.$

89. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\,arc\cos\frac{a}{x}.$

90. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\,arc\sec\frac{x}{a}.$

91. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

92. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}.$

93. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

94. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\,arc\sec\frac{x}{a}.$

95. $\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx$

$=\frac{1}{4}\Big[x\sqrt{(x^2-a^2)^3}-\frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\Big].$

96. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}.$

97. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

98. $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}.$

99. $\int(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

$\sqrt{2ax\pm x^2}$ ヲ含ム式

100. $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\,arc\,ver\,\frac{x}{a}.$

101. $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=arc\,ver\,\frac{x}{a}.$

102. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\,arc\,ver\,\frac{x}{a}.$

103. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}.$

104. $\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

$=-\frac{3a^2+ax-2x^2}{6}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^3}{2}\,arc\,ver\,\frac{x}{a}.$

105. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\,arc\,ver\,\frac{x}{a}.$

106. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^3}\,dx = -\left(\frac{2ax-x^2}{3ax^3}\right)^{\frac{3}{2}}.$

107. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}$

108. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax-x^3}}.$

109. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = log\,(x+a+\sqrt{2ax+x^2}).$

110. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2}a^2 arc\,ver\,\frac{x}{a}.$

111. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

$$= -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{5}{6}ax + \frac{5}{2}a^2\right)\sqrt{2ax-x^2} + \frac{5}{2}a^3\,arc\,ver\,\frac{x}{a}.$$

$\sqrt{a+bx\pm cx^2}$ ヲ含ム式

112. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,log\,(2cx+b+2\sqrt{c}\,\sqrt{a+bx+cx^2}).$

113. $\displaystyle\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}$

$$-\frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\,log\,(2cx+b+2\sqrt{c}\,\sqrt{a+bx+cx^2})$$

114. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\,sin\,\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}.$

115. $\displaystyle\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx$

$$= \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2+4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\,arc\,sin\,\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}.$$

116. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}$

$$-\frac{b}{2c}\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\,log\,(2cx+b+2\sqrt{c}\,\sqrt{a+bx+cx^2})\right].$$

117. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \sqrt{a+bx+cx^2}\left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)$

$$+\left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

118. $\displaystyle\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{a+bx+cx^2}}{nc}$

$$-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a}{c}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{b}{c}\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

4.

三角函數ト超越函數

119. $\displaystyle\int sin^2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin\,2x.$

120. $\displaystyle\int cos^2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin\,2x.$

121. $\int \tan x \, dx = \log \sec x.$

122. $\int \cot x \, dx = \log \sin x.$

123. $\int \frac{dx}{\sin x} = \log \tan \frac{1}{2} x.$

124. $\int \frac{dx}{\cos x} = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right).$

125. $\int \operatorname{cosec} a \, dx = \log \tan \frac{1}{2} x.$

126. $\int \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left[\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{\frac{1}{2}} \tan \frac{\theta}{2} \right].$

(a>b ノ時)

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \tan \frac{\theta}{2}}.$$

(a<b ノ時)

127. $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x.$

128. $\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x.$

129. $\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x.$

130. $\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x.$

131. $\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3\,\underline{|3}} + \frac{x^5}{5\,\underline{|5}} - \frac{x^7}{7\,\underline{|7}} + \ldots\ldots$

132. $\int \frac{\cos x}{x} dx = \log x - \frac{x^2}{2\,\underline{|2}} + \frac{x^4}{4\,\underline{|4}} - \frac{x^6}{6\,\underline{|6}} + \ldots\ldots$

133. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$

134. $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}.$

135. $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log (1 + x^2).$

136. $\int \operatorname{arc\,cotan} x \, dx = x \operatorname{arc\,cot} x + \frac{1}{2} \log (1 + x^2).$

137. $\int \operatorname{arc\,vers} x \, dx = (x-1) \operatorname{arc\,vers} x + \sqrt{2x - x^2}.$

138. $\int \log x \, dx = x \log x - x.$

139. $\int \frac{dx}{\log x} = \log (\log x) + \log x + \frac{1}{2^2} \log^2 x + \frac{1}{2.3^2} \log^3 x + \ldots.$

140. $\int \frac{dx}{x \log x} = \log (\log x).$

141. $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$

142. $\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{a^2 + 1}.$

143. $\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1}.$

144. $\int e^{ax} \log x \, dx = \frac{e^{ax} \log x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx.$

145. $\int x^m e^{ax}\,dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax}\,dx.$

146. $\int x^m \log x\,dx = x^{m+1}\left[\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right].$

147. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$

148. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$

149. $\int \cos^m x \sin^n x\,dx$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-n}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\,dx.$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\,dx.$$

150. $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx.$

151. $\int x^m \log^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x\,dx.$

152. $\int \frac{x^m\,dx}{\log^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\log^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{\log^{n-1} x}.$

153. $\int a^{mx} x^n\,dx = \frac{a^{mx} x^n}{m \log a} - \frac{n}{m \log a}\int a^{mx} x^{n-1}\,dx.$

154. $\int \frac{a^x\,dx}{x^m} = -\frac{a^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{\log a}{m-1}\int \frac{a^x\,dx}{x^{m-1}}.$

155. $\int e^{ax} \cos^n x\,dx$

$$= \frac{e^{ax}\cos^{n-1} x\,(a \cos x + n \sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\,dx.$$

156. $\int x^m \cos a x\,dx = \frac{x^{m-1}}{a^2}(ax \sin ax + m \cos ax)$

$$- \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2} \cos ax\,dx.$$

大正十四年九月廿七日 印刷
大正十四年九月三十日 發行

不許複製

（微分積分學）

正價金參圓

譯者 樺正董
東京府下西巣鴨町八百四十三番地

發行者 三浦理
東京市神田區錦町一丁目十九番地

印刷者 竹内喜太郎
東京市牛込區榎町七番地

印刷所 日清印刷株式會社
東京市牛込區榎町七番地

發行所 有朋堂書店
東京市神田區錦町一丁目十九番地
振替口座東京七一四八番

終