舒塞斯三氏

平面幾何學題解

青年科學社

舒塞斯三氏

平面幾何學題解

青年科學社

舒塞斯三氏平面幾何學題解

定價國幣

外埠酌加寄費

編譯者　青年科學社

發行者　青年科學社

經售處　新亞書店
上海河南路一五九號

各埠各大書局均有經售

中華民國三十六年十月五版

例　言

1. 舒塞斯三氏平面幾何學一書，淺顯易讀，近來我國各地中等學校皆採用之，惟原書習題衆多，學者每望而生畏，初學幾何者尤甚.因據原著者所作之題解加以演譯，並經整理補充，以備青年學子自修之用.

2. 本書解題，甚少完全演出，亦不仿照課本格式列草，大都僅述大概，指示演習途徑，或略圖形，或缺證明中之一節，或不詳理由所根據之定理，務使學者必須自行思索，補充完全，庶免一般題解書之流弊.

3. 原書譯本極多，頁數多寡不一，茲以英文課本之頁數爲主，並註明在若干節之後，俾讀原本或任何譯本者俱可適用.

4. 本書匆促出版，錯誤自所難免，尙祈海內學者教正.

目　　次

緒論……………………………………………………………………1

第一編　直線與直線形………………………………………………15

第二編　圓……………………………………………………………108

第三編　比例　相似三角形…………………………………………179

第四編　多邊形之面積………………………………………………234

第五編　正多邊形及圓之度量………………………………………273

總複習題……………………………………………………………292

附錄　用代數分析解問題法…………………………………………302

　　　平面圖形之極大與極小………………………………………304

　　　平面幾何之實用題……………………………………………309

　　　三角函數………………………………………………………339

舒塞斯三氏

平面幾何學題解

緒　　論

第　4　頁　　§ 21

習題 1.　一動點所經之路爲何?

[解]　一線.

習題 2.　一動線所經之跡常成何種幾何圖形?又一動面如何?

[解]　一平面.　一立體.

習題 3.　移動一直線能使其所經之路不成爲面否?

[解]　若一直線循線之縱向移動,卽不成一平面.

習題 4.　石匠用一直尺如何得以決定一面之平或不平?

[解]　先將直尺緊抵於石面,再細察尺之各部是否與石面密切接觸.若能全部密接,卽爲平面.

習題 5.　室中牆壁代表何種之面?

[解]　一平面.

習題 6.　煤氣管之外面代表何種之面?

[解]　一曲面.

第 7—10 頁　　§ 36

習題 1.　一直角有幾度?一平角有幾度?半直角有幾度?

[解]　一直角有 90°.　一平角有 180°.　半直角有 45°.

習題 2.　三點鐘時,時針與分針成何種角?六點鐘時如何?兩點鐘時

如何?五點鐘時如何?

[解] $90°$. $180°$. $60°$. $150°$.

習題 3. 一點鐘時,時針與分針成何種角?兩點三十分時如何?又五點三十分時如何?

[解] $30°$. $105°$. $15°$.

習題 4. 車輪旋轉 $\frac{1}{4}$ 周時,輪輻旋轉若干度之角?旋轉 $\frac{1}{6}$ 周時如何?旋轉 2 周時如何?

[解] $90°$. $60°$. $720°$.

習題 5 若分一餅爲 5 等分,則每一等分在圓心處之角大小如何?若分爲 6 等分則如何?

[解] $72°$. $60°$.

習題 6. 若作二直線,一向正北,一向東北,其所成之角如何?若一向正南,一向正東南則如何?又一向西北,一向西南則如何?

[解] $45°$. $45°$. $90°$.

習題 7. 若錶上之長針行 10 分鐘,所成之角如何?行 15 分鐘時如何?行 30 分鐘,45 分鐘,及 1 點鐘時各如何?

[解] $60°$. $90°$. $180°$. $270°$. $360°$.

習題 8. 在習題 9 圖內,試用三個字母表 $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle(a+b)$,及 $\angle(b+c+d)$.

[解] $\angle a = \angle AOB$. $\angle b = \angle BOC$. $\angle c = \angle COD$. $\angle d = \angle DOE$. $\angle(a+b) = \angle AOC$. $\angle(b+c+d) = \angle BOE$.

習題 9. 在與右圖相類之圖形中,求各未知角之數值:

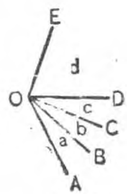
(a) 若 $\angle a = 30°$, 又 $\angle b = 40°$, 求 $\angle AOC$.

(b) 若 $\angle b = 35°$, 又 $\angle c = 10°$, 求 $\angle BOD$.

(c) 若 $\angle b = 40°$, $\angle c = 10°$, 又 $\angle d = 50°$, 求 $\angle BOE$.

(d) 若 $\angle AOC = 60°$, 又 $\angle b = 40°$, 求 $\angle a$

(e) 若 $\angle AOD = 90°$, $\angle a = 35°$, 又 $\angle c = 10°$, 求 $\angle b$.



習題 9

(*f*) 若 $\angle AOE=110°$, $\angle a=20°$, 又 $\angle d=30°$, 求 $\angle BOD$.

(*g*) 若 $\angle AOC=60°$, 又 $\angle a=\angle b$, 求 $\angle a$.

(*h*) 若 $\angle AOD=75°$, 又 $\angle a=\angle b=\angle c$, 求 $\angle c$.

[解] (*a*) $\angle AOC=\angle a+\angle b=70°$.

(*b*) $\angle BOD=\angle b+\angle c=45°$.

(*c*) $\angle BOE=\angle b+\angle c+\angle d=100°$.

(*d*) $\angle a=\angle AOC-\angle b=20°$.

(*e*) $\angle b=\angle AOD-\angle a-\angle c=45°$.

(*f*) $\angle BOD=\angle AOE-\angle a-\angle d=60°$.

(*g*) $\angle a=\angle b=\frac{1}{2}\angle AOC=30°$.

(*h*) $\angle c=\angle a=\angle b=\frac{1}{3}\angle AOD=25°$.

習題 10. 在前圖內, $\angle BOC$ 之鄰角爲何? $\angle COD$ 之鄰角爲何? $\angle BOD$ 之鄰角爲何?

[解] $\angle BOC$ 之鄰角爲 $\angle a$, $\angle c$, 及 $\angle COE$.

$\angle COD$ 之鄰角爲 $\angle b$, $\angle d$, 及 $\angle AOC$.

$\angle BOD$ 之鄰角爲 $\angle a$ 及 $\angle d$.

習題 11. 在與右圖相類之圖形中,若 $\angle O=90°$:

(*a*) 何角爲 $\angle a$ 之餘角?

(*b*) 何角爲 $\angle AOC$ 之餘角?

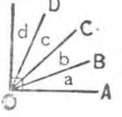
(*c*) 何角爲 $\angle BOE$ 之餘角?

(*d*) 若 $\angle d=20°$, 求 $\angle AOD$.

(*e*) 若 $\angle b=20°$, 又 $\angle COE=55°$, 求 $\angle a$.

(*f*) 若 $\angle AOC=55°$, 又 $\angle d=15°$, 求 $\angle c$.

(*g*) 若 $\angle a=\angle b=\angle c=\angle d$, 求 $\angle a$.



習題 11

[解] (*a*) $\angle BOE$.　　(*d*) $70°$.

(*b*) $\angle COE$.　　(*e*) $15°$.

(*c*) $\angle a$.　　(*f*) $20°$.

(g) $22\frac{1}{2}$.

習題 12. 30° 之餘角爲幾度? 35° 之餘角爲幾度? $\frac{2}{3}$ 直角之餘角爲幾度? n° 之餘角, $\dfrac{1}{n}$ 直角之餘角, $(10+x)^\circ$ 之餘角各爲幾度?

[解] 60°. 55°. 30°. $(90-n)^\circ$. $\left(90-\dfrac{1}{n}90\right)^\circ$. $(80-x)^\circ$.

習題 13. 若一角爲其餘角之 2 倍,則此角有幾度?

[解] 設一角爲 x, 則餘角爲 $90-x$, 依題意得 $x=2(90-x)$,

$$\therefore \quad x=60^\circ.$$

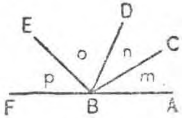
習題 14 在與右圖相類之圖形中,若 FBA 爲一直線,

(a) 何角爲 $\angle p$ 之補角?

(b) 何角爲 $\angle DBF$ 之補角?

(c) 何角爲 $\angle ABE$ 之補角?

(d) 若 $\angle p=40^\circ$, 求 $\angle ABE$.



習題 14

(e) 若 $\angle m=30^\circ$, 又 $\angle p=35^\circ$, 求 $\angle CBE$.

(f) 若 $\angle DBF=100^\circ$, 又 $\angle m=\angle n$, 求 $\angle m$.

(g) 若 $\angle p=30^\circ$, 又 $\angle m=\angle n=\angle o$, 求 $\angle o$.

(h) 若 $\angle FBC=140^\circ$, 又 $\angle ABD=80^\circ$, 求 $\angle n$.

(i) 若 $\angle ABD=80^\circ$. $\angle n=35^\circ$, 又 $\angle CBE=85^\circ$, 求 $\angle p$.

[解] (a) $\angle ABE$.　　(e) 115°.

(b) $\angle DBA$.　　(f) 40°.

(c) $\angle p$.　　(g) 50°.

(d) 140°.

(h) $\angle m=180^\circ-\angle FBC=40^\circ$, $\therefore\ \angle n=\angle ABD-\angle m=40^\circ$

(i) $\angle m=\angle ABD-\angle n=45^\circ$,

$$\angle ABE=\angle m+\angle CBE=130^\circ, \quad \therefore \quad \angle p=50^\circ.$$

習題 15. 20° 之補角爲幾度? 140° 之補角, $\frac{3}{4}$ 平角之補角, n° 之補角. $(50-3x)^\circ$ 之補角各爲幾度?

［解］ 160°. 40°. 45°. $(180-n)^\circ$. $(130+3x)^\circ$.

習題 16. 若一角爲其補角之三倍,則此角爲幾度?

［解］ $x=3(180-x)$, $\therefore$ $x=135^\circ$.

習題 17. 何種角比其補角小?何種角等於其補角?何種角比其補角大?

［解］ 一銳角. 一直角. 一鈍角.

習題 18. 用代數符號記之:

(a) n° 之餘角.　　(c) $(2x)^\circ$ 之補角.

(b) x°餘角之 3 倍.　　(d) n°補角之 6 倍.

［解］ (a) $(90-n)^\circ$.　　(c) $(180-2x)^\circ$.

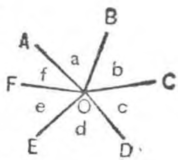
(b) $3(90-x)^\circ$.　　(d) $6(180-n)^\circ$.

習題 19. 在與右圖相類之圖形中,求各未知角之數值:

(a) 若 $\angle a=80^\circ$, $\angle b=50^\circ$, $\angle c=60^\circ$, $\angle d=90^\circ$, 又 $\angle e=50^\circ$, 求 $\angle f$.

(b) 若 $\angle a=\angle b=\angle c=\angle d=\angle e=\angle f$, 求 $\angle f$.

(c) 若 $\angle AOC=130^\circ$, $\angle b=50^\circ$, $\angle BOD=110^\circ$, 又 $\angle DOF=140^\circ$, 求 $\angle f$.



習題 19

(d) 若 $\angle d=90^\circ$, 又 $\angle c=\angle b=\angle a=\angle f=\angle e$, 求 $\angle a$.

［解］ (a) $\angle f=360^\circ-\angle a-\angle b-\angle c-\angle d-\angle e=30^\circ$.

(b) $\angle f=\frac{1}{6}360^\circ=60^\circ$.

(c) $\angle a=\angle AOC-\angle b=80^\circ$, $\angle c=\angle BOD-\angle b=60^\circ$,

$\therefore$ $\angle f=360^\circ-\angle a-\angle b-\angle c-\angle DOF=30^\circ$.

(d) $\angle a=\frac{1}{5}(360^\circ-90^\circ)=54^\circ$.

習題 20. 若二直線 AB 及 CD 相交於 O, 使 $\angle AOC=60^\circ$, 求其他各角.

習題 20,21

［解］ $\angle AOD=120^\circ$, $\angle BOD=60^\circ$, 又 $\angle COB=120^\circ$.

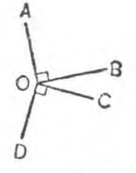
習題 21. 若 $\angle AOC=m$ 度,則 $\angle DOB$ 爲幾度?又 $\angle BOC$

爲幾度?

［解］ $\angle DOB=m°$. $\angle BOC=(180-m)°$.

習題 22. 若 $\angle AOB=\angle COD=90°$, 求 $\angle AOD$:

(a) 若 $\angle BOC=60°$. (b) 若 $\angle BOC=m°$.



習題 22,23

［解］ (a) $\angle AOB+\angle COD+\angle BOC=240°$,

$\therefore\ \angle AOD=360°-240°=120°$.

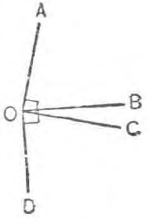
(b) $(180-m)°$.

習題 23. 角 BOC 與角 AOD 有何關係?

［解］ $\angle BOC+\angle AOD=180°$, 故二角互爲補角.

習題 24. 若 AO 垂直於 CO, 又 BO 垂直於 DO, 求 $\angle AOD$.

(a) 若 $\angle COB=40°$. (b) 若 $\angle COB=m°$.



習題 24—26

［解］ (a) $\angle AOD=\angle AOC+\angle BOD-\angle BOC=140°$.

(b) $\angle AOD=\angle AOC+\angle BOD-\angle BOC$

$=180°-m°$.

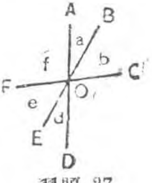
習題 25. 角 AOD 與角 BOC 有何關係?

［解］ 互爲補角.

習題 26. 若 $\angle AOC=\angle BOD=90°$, 又 $\angle AOD=3\angle BOC$, 求 $\angle BOC$.

［解］ 設 $\angle BOC=x$, 則 $3x+x=90°+90°$, $\therefore\ x=45°$.

習題 27. 三直線相交於 O, 成 a, b, c, d, e 及 f 六角.



習題 27

(a) 若 $\angle a=20°$, 又 $\angle b=60°$, 求 $\angle c$.

(b) 若 $\angle a=15°$, 又 $\angle c=95°$, 求 $\angle e$.

(c) 若 $\angle f=100°$, 又 $\angle d=20°$, 求 $\angle b$.

(d) 若 $\angle AOC=85°$, 又 $\angle BOD=155°$, 求 $\angle e$

［解］ (a) $\angle c=180°-\angle a-\angle b=100°$.

(b) $\angle b=180°-\angle a-\angle c=70°$, $\angle d=180°-\angle b-\angle c=15°$,

$\therefore\ \angle e=180°-\angle c-\angle d=70°$.

(c)　$\angle e=180^\circ-\angle f-\angle d=60^\circ$, $\angle a=20^\circ$, $\angle b=60^\circ$.

(d)　$\angle c=180^\circ-\angle AOC=95^\circ$, $\angle d=180^\circ-\angle BOD=25^\circ$,

$$\angle e=180^\circ-\angle c-\angle d=60^\circ.$$

習題 28.　角 AOB 與角 BOC 係互為補角之兩鄰角,求其平分線所成之角:

(a)　若 $\angle AOB=40^\circ$.　　(b)　若 $\angle AOB=60^\circ$.

(c)　若 $\angle AOB=m^\circ$.

［解］　(a)　90°.　　(b)　90°.

(c)　$\angle BOC=180^\circ-m^\circ$,

$$\tfrac{1}{2}\angle AOB+\tfrac{1}{2}\angle BOC=\tfrac{1}{2}m^\circ+\tfrac{1}{2}(180-m)^\circ=90^\circ.$$

習題 29.　互為補角之任意兩鄰角,其平分線所成之角為何?

［解］　90°.

習題 30.　角 AOB 與角 BOC 係互為餘角之兩鄰角,求其平分線所成之角:

(a)　若 $\angle AOB=20^\circ$.　　(b)　若 $\angle AOB=30^\circ$.

(c)　若 $\angle AOB=m^\circ$.

［解］　(a)　45°.　　(b)　45°.　　(c)　45°

習題 31.　互為餘角之任意兩鄰角,其平分線所成之角為何?

［解］　45°.

第 12—13 頁　　§ 39

習題 1.　作二點 A 及 B (用小點或小十字形表之),並過 A, B 作一直線.

習題 2.　作二點 A 及 B,並以 A 為圓心,取等於 AB 之長為半徑作一圓.

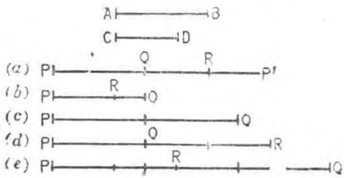
習題 3.　作三點 A, B, 及 C,並過每二點作一直線.

［解］ 習題 1—3，作之極易，故從略.

習題 4. 作定長之二直線 AB 及 CD，但 AB 須略長，試作直線使等於：(a) $AB+CD$. (b) $AB-CD$. (c) $2(AB)$.

(d) $AB+2(CD)$. (e) $3(AB)-2(CD)$.

［解］ 設 AB, CD 爲定長之二直線，作法如下：



習題 4

(a) 先作一直線 PP'，次依 § 39, I，於 PP' 上截取 $PQ=AB$，又 $QR=CD$，則 $PR=AB+CD$.

(b) 作 $PQ=AB$，截取 $PR=CD$，則 $QR=AB-CD$.

(c) 作 $PQ=2AB$.

(d) 作 $PQ=AB$，延長 PQ 至 R，使 $QR=2CD$，

則 $$PR=AB+2(CD).$$

(e) 作 $PQ=3(AB)$，截取 $PR=2(CD)$，則 $QR=3(AB)-2(CD)$.

習題 5. 作一銳角，並平分之.

［解］ 任作一銳角，依 § 39, II 之法平分之，圖從略.

習題 6. 作一鈍角，並平分之.

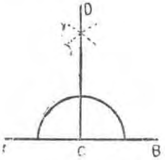
［解］ 作法同習題 5.

習題 7. 作一直角，並平分之.

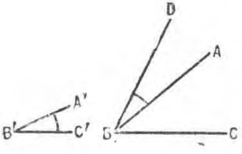
［解］ 作法同習題 5.

習題 8. 作一平角，並平分之.

[解]　已知 ACB 爲一平角,今以 C 爲圓心,依 § 39, II 之法平分 $\angle ACB$, 即得平分線 CD.



習題 8



習題 9

習題 9.　作二角之和.

[解]　ABC 及 $A'B'C'$ 爲已知之二角,以 AB 爲一邊,依 § 39, III 之法作 $\angle DBA = \angle A'B'C'$, 則 $\angle DBC = \angle ABC + \angle A'B'C'$.

習題 10　在 AB 上之定點 C, 畫一直線垂直於 AB.

[解]　作法及圖俱同習題 8, DC 即爲所求之垂線.

習題 11.　分一已知角爲四等分.

[解]　先將已知角依 § 39, II 之法平分之,再用同法將兩角各別平分即得,圖從略.

習題 12.　分一已知角爲八等分.

[解]　將前題分成之角,再各平分之即得.

習題 13.　作一 $90°$ 之角,作一 $45°$ 之角.

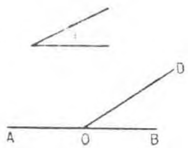
[解]　作一平角,依習題 8 之法平分之,即得二個 $90°$ 之角.再平分 $90°$ 角,即得兩個 $45°$ 之角.

習題 14.　作一 $22°30'$ 之角;作一 $135°$ 之角.

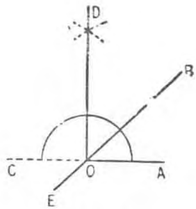
[解]　將前題所得 $45°$ 之角平分之即得兩個 $22°30'$ 之角.如習題 8 之圖,先平分平角 ACB 而得 DCB, DCA 二直角,再將一直角平分之.取其一分與他一直角相合,即得一 $135°$ 之角.

習題 15. 作一 270° 之角;作一 $67^\circ 30'$ 之角.

[解] 依習題 8 之法求得直角 BCD, 則另一大於一平角之 $\angle BCD$ 卽等於 270°. 又依習題 11 之法,四等分一直角,取其四分之三卽爲一 $67^\circ 30'$ 之角.



習題 16



習題 18

習題 16. 作已知角 A 之補角.

[解] 已知 $\angle A=a$. 任作一直線 AB, 在 AB 上任取一點 O, 依 § 39 III 之法作 $\angle DOB=\angle a$. 則 $\angle DOA$ 卽爲所求之補角.

習題 17. 作已知角 A 之補角之半.

[解] 將前題所得之補角 $\angle DOA$ 平分之,則每一等分卽爲所求 $\angle a$, 補角之半.

習題 18. 作一已知銳角之餘角.

[解] 已知一銳角 AOB, 延長其一邊 AO, 再以 O 爲圓心依 § 39, II 之法求得平角 AOC 之平分線 DO, 則 $\angle BOD$ 卽爲 $\angle AOB$ 之餘角.

習題 19. 已知銳角,求作一角等於其餘角之半.

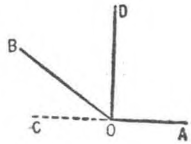
[解] 作法同前題,將所作餘角 BOD 平分之, 卽得 $\angle AOB$ 餘角之半.

習題 20. 已知一銳角,求作其餘角之補角.

[解] 作法同習題 18, 俟求得 DO 後,延長 BO 至 E,則 $\angle DOE$ 卽爲

$\angle AOB$ 餘角之補角.

習題 21. 已知一鈍角,求作其補角之餘角.



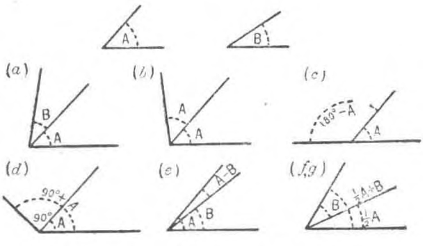
習題 21

〔解〕 已知 AOB 爲一鈍角,延長 AO 至 C, 則 $\angle EO$ 爲 $\angle AOB$ 之補角.再作直角 $\angle AOD$, 則 $\angle BOD$ 爲 $\angle AOB$ 補角之餘角.

習題 22. 作二角 A 及 B, 但 A 較 B 大,試作一角使等於:

(a) $A+B$.	(b) $2A$.	(c) $180°-A$.
(d) $90+A$.	(e) $A-B$.	(f) $\frac{A}{2}$.
(g) $\frac{A}{2}+B$.	(h) $\frac{A+B}{2}$.	(i) $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$.
(j) $\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.	(k) $90°+\frac{B}{2}$.	(l) $\frac{B}{4}$ 之餘角.

〔解〕 已知 $\angle A$ 及 $\angle B$, 作法如次:



習題 22

(a)——(g) 見圖.

(h) 將 (a) 所作之 $A+B$ 平分即得.

(i) 同 (h) 或將 (a) 之 A 與 B 各自平分即得.

(j) 將 (e) 所作之 $A-B$ 平分之即得.

(k) 如 (d), 先作 $\frac{B}{2}$, 再作一 $90°$ 角,加之即得.

(l) 作一 $90°$ 角,再減 $\frac{B}{4}$ 角,則所餘即爲 $\frac{B}{4}$ 之餘角.

第 15—16 頁

§ 45

習題 1. 指明下列每一敍述之假設與結論:

(*a*) 鐵受熱則膨脹.

(*b*) 若三角形之二角相等,則其對邊亦等.

(*c*) 若一三角形之三邊與他一三角形之三邊相等,則兩形全等.

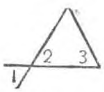
(*d*) 對頂角相等.

［解］ (*a*) 假設:鐵受熱. 結論:鐵膨脹.

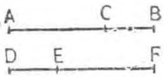
(*b*) 假設:三角形之二角相等. 結論:其對邊亦等.

(*c*) 假設:一三角形之三邊與他一三角形之三邊相等. 結論:兩形全等.

(*d*) 假設:二角爲對頂角. 結論:二角相等.



習題 2



習題 3

習題 4,5

習題 2. 若 $\angle 1=\angle 2$, 又 $\angle 2=\angle 3$, 則 $\angle 1=\angle 3$, 何故?

［解］ 等於同量之量相等(公理 1).

習題 3. 若 $AB=DF$, 又 $CB=DE$, 則 $AC=EF$, 何故?

［解］ 等量減等量,其餘相等(公理 3).

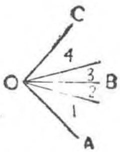
習題 4. 若 $GH=IK$, 則 $GI=HK$, 何故?

［解］ 公理 2, 因 $GH+HI=IK+HI$;

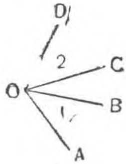
或用公理 3, 因 $GK-IK=GK-GH$.

習題 5. 若 $GI=HK$, 則 $GH=IK$, 何故?

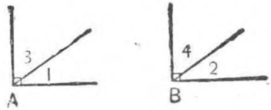
［解］ 公理 3.



習題 6,7



習題 8,9



習題 10

習題 6. 若 OB 平分 $\angle O$, 又 $\angle 1=\angle 4$, 則 $\angle 2=\angle 3$, 何故?

〔解〕 公理 3.

習題 7. 若 $\angle 1=\angle 4$, 又 $\angle 3=\angle 2$, 則 OB 平分 $\angle O$, 何故?

〔解〕 公理 2.

習題 8. 若 $\angle 1=\angle 2$, 則 $\angle AOC=\angle BOD$, 何故?

〔解〕 公理 2, 因 $\angle 1+\angle BOC=\angle 2+\angle BOC$,

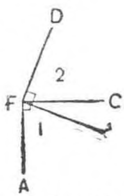
或用公理 3, 因 $\qquad \angle AOD-\angle 1=\angle AOD-\angle 2.$

習題 9. 若 $\angle AOC=\angle BOD$, 則 $\angle 1=\angle 2$, 何故?

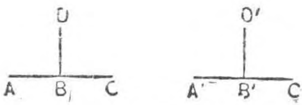
〔解〕 公理 3.

習題 10. 若 $\angle A=\angle B$, 又 $\angle 1=\angle 2$, 則 $\angle 3=\angle 4$, 何故?

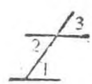
〔解〕 公理 3.



習題 11



習題 12



習題 14

習題 11. 若 $\angle AFC=90°$, 又 $\angle BFD=90°$, 則 $\angle 1=\angle 2$, 何故?

〔解〕 公理 3.

習題 12. 若平角 $ABC=$ 平角 $A'B'C'$, 則 $rt.\ \angle DBC=rt.\ \angle D'B'C'$。何故?

〔解〕 等量之半相等(公理 8).

習題 13. 若 $\angle 1+\angle b+\angle 2=180^\circ$, $\angle 1=\angle a$, 又 $\angle 2=\angle c$, 則 $\angle a+\angle b+\angle c=180^\circ$, 何故?

〔解〕 公理 12.

習題 14. 若$\angle 1=\angle 2$,又 $\angle 2=\angle 3$ 則 $\angle 1=\angle 3$, 何故?

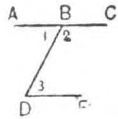
〔解〕 公理 1 或公理 12.

第　一　編

直線與直線形

第18—19頁　　§ 52

習題1. 若 ABC 爲一直線，又 $\angle 3$ 爲 $\angle 2$ 之補角，則 $\angle 1=\angle 3$，何故？



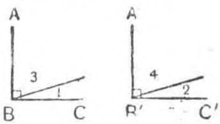
習題 1

［解］ 因 ABC 爲一直線，$\angle 2$ 爲 $\angle 1$ 之補角 (50)，

但 $\angle 2$ 又爲 $\angle 3$ 之補角(假設)

故 $$\angle 1=\angle 3 \quad (49)$$

習題2. 若 $AB\perp BC$，$A'B'\perp B'C'$，又 $\angle 3=\angle 4$，求證 $\angle 1=\angle 2$.



習題 2

［證］ $$AB\perp BC,\ A'B'\perp B'C'$$

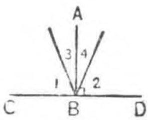
$\therefore$ $\angle ABC$ 及 $\angle A'B'C'$ 皆爲直角 (30).

但 $$\angle ABC=\angle A'B'C' (46),$$

又 $$\angle 3=\angle 4.$$

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 2 (48).$$

習題3. 若 $AB\perp CD$，又 $\angle 1=\angle 2$，求證 $\angle 3=\angle 4$.



習題 3

［證］ $$AB\perp CD.$$

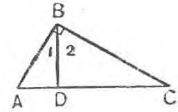
$\angle ABC=\angle ABD=$直角 (30, 46).

但 $$\angle 1=\angle 2.$$

$$\therefore\quad \angle ABC-\angle 1=\angle ABD-\angle 2. \qquad (公理3)$$

$$\therefore\quad \angle 3=\angle 4. \qquad (公理12)$$

習題4. 若 $\angle ABC$ 爲直角，又 $\angle A$ 爲 $\angle 1$ 之餘角，求證 $\angle A=\angle 2$.



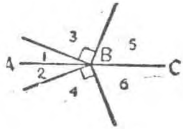
習題 4

〔證〕 $\angle ABC$ 爲一直角. $\angle 2$ 爲 $\angle 1$ 之餘角 (35).

但 $\angle A$ 爲 $\angle 1$ 之餘角(假設).

$$\therefore\quad \angle A=\angle 2\ (48).$$

習題 5. 若 $\angle ABC$ 爲平角, $\angle 1=\angle 2$, 又 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 皆爲直角,求證 $\angle 5=\angle 6$.



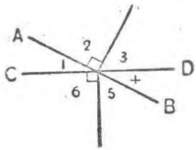
習題 5

〔證〕 $\angle 1+\angle 3+\angle 5=\angle 2+\angle 4+\angle 6$. (公理 15)

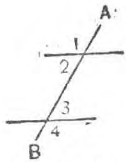
$\angle 3=\angle 4=$直角 (46), $\therefore$ $\angle 5$ 爲 $\angle 1$ 之餘角 (35).

又 $\angle 6$ 爲 $\angle 2$ 之餘角 (35).

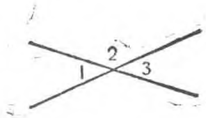
但 $\angle 1=\angle 2$. $\therefore$ $\angle 5=\angle 6$ (48).



習題 6



習題 7



習題 8

習題 6. 若 AB 與 CD 皆爲直線,又 $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 皆爲直角,求證 $\angle 3=\angle 5$.

〔證〕 $\angle 3$ 爲 $\angle 4$ 之餘角 (35), $\angle 5$ 爲 $\angle 4$ 之餘角 (35).

$$\therefore\quad \angle 3=\angle 5\ (48).$$

習題 7. 若 AB 爲一直線,又 $\angle 2=\angle 3$, 求證 $\angle 1=\angle 4$.

〔證〕 $\angle 1$ 爲 $\angle 2$ 之補角 (36), $\angle 4$ 爲 $\angle 3$ 之補角 (36).

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 4\ (49).$$

習題 8. 若 $\angle 1$ 爲 $\angle 2$ 之補角,又 $\angle 3$ 爲 $\angle 2$ 之補角,則 $\angle 1=\angle 3$ 何故?

〔解〕 等角之補角相等 (49).

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 3.$$

第 20 頁

§ 54

習題 1. 三直線 AD, BE 及 CF 相交於 O 而成 a, b, c, d, e, f 六角：

(a) 若 $\angle b=20°$, 又 $\angle c=60°$, 求 $\angle AOE$.

(b) 若 $\angle FOB=130°$, 又 $\angle c=40°$, 求 $\angle a$.

(c) 若 $\angle FOD=140°$, 又 $\angle b=60°$, 求 $\angle a$.

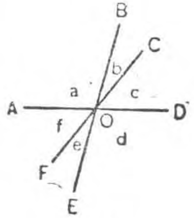
(d) 若 $\angle f=60°$, 又 $\angle b=25°$, 求 $\angle d$.

(e) 若 $\angle b$ 與 $\angle f$ 互爲餘角,求 $\angle d$.

(f) 若 $\angle f=\angle b$, 又 $\angle d=100°$, 求 $\angle b$.

(g) 若 $\angle a=2\angle c$, 又 $\angle e=60°$, 求 $\angle c$.

(h) 若 $\angle AOC=140°$, 又 $\angle COE=120°$, 求 $\angle BOD$.



習題 1,2,3

［解］ (a) $\angle AOE=\angle BOD=\angle b+\angle c=20°+60°=80°$.

(b) $\angle a=\angle FOB-\angle f=\angle FOB-\angle c=130°-40°=90°$.

(c) $\angle a=\angle d=\angle FOD-\angle e=\angle FOD-\angle b$

$=140°-60°=80°$.

(d) $\angle d=\angle a=180°-(\angle f+\angle b)=180°-(60°+25°)=95°$.

(e) $\angle d=\angle a=180°-(\angle f+\angle b)=180°-90°=90°$.

(f) $\angle a=\angle d=100°, \angle f=\angle b,$

$\therefore\ 2\angle b+\angle a=2\angle b+100°=180°$.

$\therefore\ \angle b=\frac{1}{2}(180°-100°)=40°$.

(g) $\angle b=\angle e=60°, \angle a+\angle b+\angle c=180°,$

因 $\angle a=2\angle c$, $\therefore\ 3\angle c+\angle b=180°$,

卽 $3\angle c=180°-\angle b=120°$, $\therefore\ \angle c=40°$.

(h) 因 $\angle AOC=140°$, $\therefore\ \angle c=180°-\angle AOC=40°$.

因 $\angle COE=120°$, $\therefore\ \angle b=180°-\angle COE=60°$.

$\therefore\ \angle BOD=\angle b+\angle c=100°$.

習題 2. 在上題之圖內,求證

(a) $\angle b+\angle c=\angle AOE.$ (c) $\angle FOB-\angle f=\angle d.$

(b) $\angle FOB-\angle c=\angle a$ (d) $\angle f+\angle b+\angle d=180°.$

(e) $\angle AOC+\angle BOD+\angle COE=360°.$

(f) $\angle AOC+\angle COE-\angle EOA=2\angle a.$

(g 若 $\angle f=\angle e$, 則 $\angle b=\angle c.$

[證] (a) $\angle b+\angle c=\angle BOD=\angle AOE$ (對頂角相等).

(b) $\angle FOB-\angle c=\angle f+\angle a-\angle c$, 因 $\angle f=\angle c\,(53)$,

$$\therefore\quad \angle FOB-\angle c=\angle a.$$

(c) $\angle FOB-\angle f=\angle f+\angle a-\angle f=\angle a$, 因 $\angle a=\angle d\,(53)$,

$$\therefore\quad \angle FOB-\angle f=\angle d$$

(d) $\angle f+\angle a+\angle b=180°$, 因 $\angle d=\angle a\,(53)$,

$$\therefore\quad \angle f+\angle b+\angle d=180°.$$

(c) $\angle AOC=\angle a+\angle b,\ \angle BOD=\angle b+\angle c,$

$$\angle COE=\angle c+\angle d.$$

但 $$\angle BOD=\angle AOE=\angle f+\angle e.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle AOC+\angle BOD+\angle COE&=\angle a+\angle b+\angle b+\angle c+\angle c+\angle d\\&=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f\\&=360°.\end{aligned}$$

(f) $\angle AOC=\angle a+\angle b,\ \angle COE=\angle c+\angle d,$

$\angle EOA=\angle e+\angle f=\angle b+\angle c$, 又 $\angle a=\angle d.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle AOC+\angle COE-\angle EOA&=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d-\angle e-\angle f\\&=\angle a+\angle d=2\angle a.\end{aligned}$$

(g) $\angle f=\angle c,\ \angle e=\angle b\,(53),\quad \therefore\quad \angle b=\angle c.$

習題 3. 在前題之圖內.

(a)　若$\angle AOC=150°$，又$\angle COE=130°$，求$\angle a$.

(b)　若$\angle FOB=140°$，又$\angle AOC=125°$，求$\angle d$.

(c)　若$\angle AOE+\angle BOC=140°$，又$\angle c=40°$，求$\angle e$.

(d)　若$\angle FOB=\angle FOD$，求證$\angle f=\angle e$

［解］　(a)　因$\angle AOC=150°$，　$\therefore\ \angle c=30°$.

又　$\angle COE=130°$，　$\therefore\ \angle d=\angle COE-\angle c=100°$.

$$\therefore\ \angle a=\angle d=100°.$$

(b)　因$\angle FOB=140°$，　$\therefore\ \angle b=40°$.

又　$\angle AOC=125°$，　$\therefore\ \angle a=\angle AOC-\angle b=85°$.

$$\therefore\ \angle d=\angle a=85°.$$

(c)　因$\angle f+\angle e+\angle b=140°$，$\angle c=\angle f=40°$，

$$\therefore\ \angle e+\angle b=100°.$$

但　$\angle e=\angle b$，　$\therefore\ \angle e=50°$.

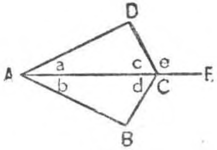
(d)　$\angle FOB=\angle a+\angle f$，

又　$\angle FOD=\angle e+\angle d$.

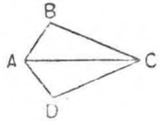
即　$\angle a+\angle f=\angle e+\angle d$.

但　$\angle a=\angle d$，　$\therefore \angle f=\angle e$.

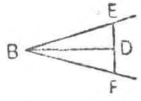
第 24 頁　§ 68



習題 1, 2



習題 3



習題 4

習題 1.　**假設**　$\angle a=30°$，$\angle b=30°$，$\angle c=60°$，$\angle d=60°$

求證　$\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

［證］　$AC=AC$（恆等）.

$\angle a=\angle b$, 又 $\angle c=\angle d$ (假設).

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ADC$ $(a.s.a.)$.

習題 2. **假設** $\angle a=40°$, $\angle b=40°$, $\angle e=130°$, $\angle d=50°$, 又 ACE 爲一直線.

求證 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

［證］ $AC=AC$, $\angle a=\angle b$, $\angle c=180°-\angle e=50°=\angle d$.

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ADC$ $(a.s.a.)$.

習題 3. **假設** 在四邊形 $ABCD$ 內, AC 平分角 A, 又 AC 平分角 C.

求證 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

［證］ $AC=AC$, $\angle BAC=\angle DAC$, $\angle BCA=\angle DCA$.

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ADC$ $(a.s.a.)$.

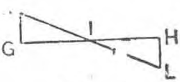
習題 4. **假設** BD 平分 $\angle B$, $EF\perp BD$.

求證 $\triangle EBD\cong\triangle FBD$.

［證］ $BD=BD$, $\angle BDE=\angle BDF$, $\angle EBD=\angle FBD$.

$\therefore\quad \triangle EBD\cong\triangle FBD$ $(a.s.a.)$.

習題 5. **假設** I 爲 GH 之中點, $KG\perp GH$, $HL\perp GH$, KL 爲一直線.



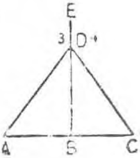
習題 5

求證 $\triangle KGI\cong\triangle HLI$

［證］ $GI=IH$(假設). $\angle KGI=\angle IHL$(直角相等). $\angle GIK=\angle LIH$(對頂角相等).

$\therefore\quad \triangle KGI\cong\triangle HLI$ $(a.s.a.)$

習題 6. **假設** $DB\perp AC$, $\angle 3=\angle 4$, 又 BDE 爲一直線.



習題 6, 7

求證 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$.

［證］ $DB=DB$, $\angle ABD=\angle CBD=$直角,

又 $\angle ADB=\angle BDC$ (49).

$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle CBD.$ (a. s a.)

習題 7. **假設** $DB \perp AC$, $\angle ADB$ 爲 $\angle 4$ 之補角,又 BDE 爲一直線.

求證 $\triangle ABD \cong \triangle CBD.$

〔證〕 $DB=DB$, $\angle ABD=\angle CBD$. $\angle BDC$ 爲 $\angle 4$ 之補角,但 $\angle ADB$ 亦爲 $\angle 4$ 之補角, $\therefore \quad \angle ADB=\angle BDC.$

$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle CBD.$ (a. s. a.)

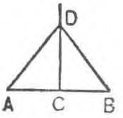
第 25—29 頁 § 69

習題 1. **假設** AB 與 CD 二直線互相平分於 E.

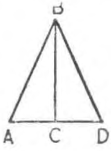
求證 $\triangle ADE \cong \triangle CEB.$

〔證〕 $AE=EB$, $DE=EC$, 又 $\angle AED=\angle BEC$ (對頂角相等).

$\therefore \quad \triangle ADE \cong \triangle CEB$ (s. a. s.).



習題 2



習題 3

習題 4

習題 2. **假設** DC 爲 AB 之中垂線(卽 $AC=CB$, 及 $DC \perp AB$).

求證 $AD=BD.$

〔證〕 $AC=CB$, $\angle ACD=\angle BCD$ (直角相等), $CD=CD$.

$\therefore \quad \triangle ACD \cong \triangle BCD$ (s. a. s.),

$\therefore \quad AD=BD.$

習題 3. 等腰三角形頂角之平分線亦平分其底邊.

〔已知〕 BC 爲等腰三角形 ABD 頂角 B 之平分線.

〔求證〕 $AC=CD.$

〔證〕 $AB=BD$, $\angle ABC=\angle DBC$,

又　$$BC=BC.$$

$$\therefore\quad \triangle ACB\cong\triangle DCB\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad AC=CD.$$

習題 4.　**假設**　BF 平分 $\angle DBE$, 又 $BD=BE$.

求證　$\angle FDB=\angle FEB$.

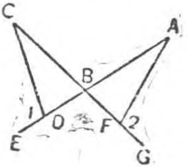
［證］　$\angle FBD=\angle FBE,\ BD=BE,\ BF=BF,$

$$\therefore\quad \triangle BDF\cong\triangle BEF\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad \angle FDB=\angle FEB\ (70).$$

習題 5.　**假設**　$BD=BF,\ BC=BA$, 又 CG 與 AE 皆爲直線.

求證　$CD=AF$.



習題 5—8

［證］　$BD=BF,\ BC=BA,\ \angle CBD=\angle ABF.$

$$\therefore\quad \triangle CBD\cong\triangle ABF\ (s\ a\ s.).$$

$$\therefore\quad CD=AF\ (70).$$

習題 6.　**假設**　$BD=BF,\ CD\perp EA,\ AF\perp CG$, 又 CG 及 AE 皆爲直線.

求證　$\angle C=\angle A$.

［證］　$$BD=BF\ (\text{假設}).$$

因　$$CD\perp EA,\ AF\perp CG\ (\text{假設}),$$

故　$$\angle CDB=\angle AFB=\text{直角}.$$

$$\angle CBD=\angle ABF\ (53).$$

$$\therefore\quad \triangle CBD\cong\triangle ABF\ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore\quad \angle C=\angle A\ (70).$$

習題 7.　**假設**　$BD=BF,\ \angle 1=\angle 2$, 又 CG 與 AE 皆爲直線.

求證　$CB=AB$.

［證］　$\angle 1=\angle 2$, 又 CG 與 AE 皆爲直線, 故 $\angle CDB=\angle AFB\ (49)$.

$$BD=BF,\ \angle CBD=\angle ABF\ (53).$$

$$\therefore\quad \triangle CBD\cong\triangle ABF\ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore \quad CB=AB. \ (70)$$

習題 8. 假設 $CF=AD$, $BD=FB$, 又 CG 及 AE 皆爲直線.

求證 $\angle C=\angle A$.

〔證〕 因 $BD=FB,\ CF=AD,$

故 $CF-FB=AD-BD,$

即 $CB=AB.$

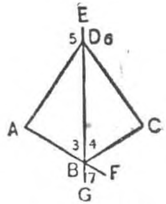
又 $\angle CBD=\angle ABF.$

$$\therefore \quad \triangle CBD \cong \triangle ABF \ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore \quad \angle C=\angle A.$$

習題 9. 假設 $AD=DC$, $\angle 5=\angle 6$, 又 BE 爲一直線.

求證 $\angle A=\angle C$.



習題 9—11

〔證〕 因 $\angle 5=\angle 6,$

故 $\angle ADB=\angle CDB \ (49).$

$AD=DC,\ BD=BD.$

$$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle CBD \ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore \quad \angle A=\angle C.$$

習題 10. 假設 $\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$, 又 BE 爲一直線.

求證 $AD=DC$.

〔證〕 因 $\angle 5=\angle 6,\quad \therefore \quad \angle ADB=\angle CDB \ (49),$

又 $\angle 3=\angle 4,\ DB=DB,$

$$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle CDB \ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore \quad AD=DC \ (50).$$

習題 11. 假設 $AB=BC$, $\angle 4=\angle 7$, 又 AF 及 EG 皆爲直線.

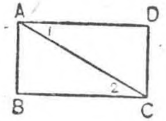
求證 $AD=DC$.

〔證〕 $\angle 7=\angle 3,\quad \therefore \quad \angle 3=\angle 4.$

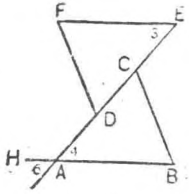
又 $AB=BC,\ BD=BD.$

$$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle CBD \ (s.\ a.\ s.).$$

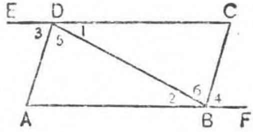
$$\therefore \quad AD = DC.$$



習題 12



習題 13, 14



習題 15, 16

習題 12.　**假設**　$AB \perp AD$, $DC \perp BC$, 又 $\angle 1 = \angle 2$.

求證　$\angle B = \angle D$.

〔證〕 $\angle 1 = \angle 2$, $\therefore \angle BAC = \angle ACD$ (等角之餘角相等),

又　$AC = AC$.

$$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle ADC \ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore \quad \angle B = \angle D.$$

習題 13.　**假設**　$AD = CE$, $AB = FE$, $\angle 3 = \angle 4$, 又 AE 爲一直線.

求證　$\angle B = \angle F$.

〔證〕　$AD = CE$, $\therefore \quad AC = DE$ (公理 2),

又　$AB = FE$, $\angle 3 = \angle 4$

$$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle DEF \ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore \quad \angle B = \angle F.$$

習題 14.　**假設**　$AD = CE$, $AB = FE$, $\angle 3 = \angle 6$, 又 EI 及 HB 皆爲直線.

求證　$BC = FD$.

〔證〕　$AD = CE$, $\therefore \quad AC = DE$ (公理 2);

$$\angle 3 = \angle 6 = \angle 4.$$

又　$AB = EF$;

$$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle DEF \ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore \quad BC = FD.$$

習題 15. **假設**　$\angle EDB=\angle FBD$, $\angle 5=\angle 6$, 又 CE 及 AF 皆爲直線.

求證　$AD=BC$.

［證］因　$\angle EDB=\angle FBD$, 及 $\angle 5=\angle 6$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$ (49), 又 $BD=BD$,

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle CBD$ (a. s. a.).

$\therefore\ AD=BC$.

習題 16. **假設**　$\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$, 又 EC 及 AF 皆爲直線.

求證　$AB=DC$.

［證］因　$\angle 3=\angle 4$, $\angle 5=\angle 6$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$ (公理 3),

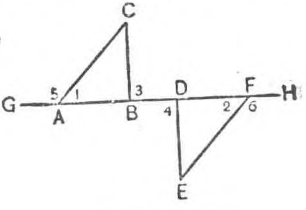
又　$BD=BD$,

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle CBD$ (a. s. a).

$\therefore\ AB=DC$.

習題 17. **假設**　$AD=BF$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 又 GH 爲一直線.

求證　$\angle C=\angle E$.



習題 17, 18

［證］　$AD=BF$,

$\therefore\ AB=DF$ (公理 3),

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.

$\therefore\ \angle ABC=\angle EDF$ (49),

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle EDF$ (a. s. a.).

$\therefore\ \angle C=\angle E$.

習題 18. **假設**　$AD=BF$, $\angle 5=\angle 6$, $AC=FE$, 又 GH 爲一直線.

求證　$BC=DE$.

［證］　$AD=BF$,　$\therefore\ AB=DF$ (公理 3);

$\angle 5=\angle 6$,　$\therefore\ \angle 1=\angle 2$ (49);

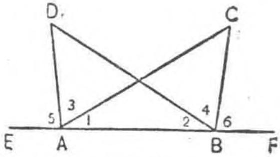
又 $AC=FE.$

$$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle DEF\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad BC=DE.$$

習題 19. **假設** $AD\perp EF, CB\perp EF, AD=BC$, 又 EF 爲一直線.

求證 $\angle C=\angle D$,



習題 19－22

［證］ $\angle DAB=\angle CBA=$直角,

又 $AD=BC,\quad AB=AB,$

$$\therefore\quad \triangle ADB\cong\triangle ACB\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad \angle C=\angle D.$$

習題 20. **假設** $AD=CB, \angle 5=\angle 6$, 又 EF 爲一直線.

求證 $\angle 1=\angle 2.$

［證］ $\angle 5=\angle 6,$

$$\therefore\quad \angle DAB=\angle CBA\ (49),$$

$$AD=CB,\ AB=AB,$$

$$\therefore\quad \triangle DBA\cong\triangle CBA\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 2.$$

習題 21. **假設** $\angle 5=\angle 6, \angle 1=\angle 2$, 又 EF 爲一直線.

求證 $AC=DB.$

［證］ $\angle 5=\angle 6$, 則 $\angle DAB=\angle CBA$; $\angle 1=\angle 2$, 又 $AB=AB$,

$$\therefore\quad \triangle BAD\cong\triangle BAC\ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore\quad AC=DB.$$

習題 22. **假設** $\angle 5=\angle 6, \angle 3=\angle 4$, 又 EF 爲一直線.

求證 $AD=BC.$

［證］ $\angle 5=\angle 6,$

$$\therefore\quad \angle DAB=\angle CBA;$$

$$\angle 3=\angle 4,\quad \therefore\ \angle 1=\angle 2\ (\text{公理 } 3);$$

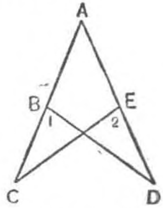
又 $AB=AB,$

$\therefore\quad \triangle DAB \cong \triangle CAB$ (a. s. a.).

$\therefore\quad AD = BC.$

習題 23. **假設** $AB=AE$, $BC=ED$, 又 AC 及 AD 皆爲直線.

求證 $CE=BD$.



習題 23—25

［證］ $AB=AE,\ BC=ED,$

$\therefore\quad AC=AD$ (公理 2);

$\angle A=\angle A,$

$\therefore\quad \triangle ACE \cong \triangle ABD$ (s a. s.).

$\therefore\quad CE=BD.$

習題 24. **假設** $AB=AE$, $\angle 1=\angle 2$, 又 AC 及 AD 皆爲直線.

求證 $CE=BD$.

［證］ $\angle 1=\angle 2,$

$\therefore\quad \angle ABD=\angle AEC$ (49),

又 $AB=AE,\ \angle A=\angle A,$

$\therefore\quad \triangle ACE \cong \triangle ABD$ (a. s. a.).

$\therefore\quad CE=BD.$

習題 25. **假設** $AC=AD$, 又 $BC=ED$.

求證 $\angle C=\angle D$.

［證］ $AC=AD,\ BC=ED,$

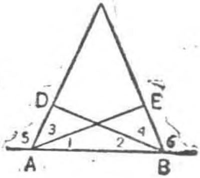
$\therefore\quad AB=AE$ (公理 3),

又 $\angle A=\angle A,$

$\therefore\quad \triangle ACE \cong \triangle ABD$ (s. a. s.).

$\therefore\quad \angle C=\angle D.$

習題 26. **假設** $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 又 AE 及 BD 皆爲直線.



習題 26—29

求證 $AD=BE$.

［證］ $\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4,$

$\therefore \quad \angle DAB = \angle EBA$ (公理 2),

又 $\quad AB = AB$,

$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle AEB$ (a. s. a.).

$\therefore \quad AD = BE$.

習題 27. 假設 $\angle DAB = \angle EBA$, 又 $\angle 3 = \angle 4$.

求證 $\quad AD = BE$.

[證] $\quad \angle DAB = \angle EBA, \ \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$ (公理 3),

又 $\quad AB = AB$,

$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle ABE$ (a. s. a.).

$\therefore \quad AD = BE$.

習題 28. 假設 $\angle 5 = \angle 6, \angle 1 = \angle 2$, 又 AE 及 DB 皆爲直線.

求證 $\quad AD = BE$.

[證] $\quad \angle 5 = \angle 6$,

$\therefore \quad \angle DAB = \angle EBA$;

又 $\quad \angle 1 = \angle 2, \ AB = AB$,

$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle ABE$ (a. s. a.).

$\therefore \quad AD = BE$.

習題 29. 假設 $\angle 5 = \angle 6, AD = BE$, 又 AE 及 BD 皆爲直線.

求證 $\quad \angle 1 = \angle 2$.

[證] $\quad \angle 5 = \angle 6$,

$\therefore \quad \angle DAB = \angle EBA$,

又 $\quad AD = BE, \ AB = AB$,

$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle ABE$ (s. a. s.).

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$.

習題 30. 假設 BCD 爲一直線,而 $AB = AC, AD = AE$, 又 $\angle 1 = \angle 2$.

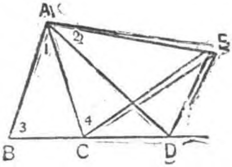
求證 $BD=CE$.

［證］ $\angle 1=\angle 2$, 則 $\angle BAD=\angle CAE$ (公理 2),

又 $AB=AC,\ AD=AE$,

$\therefore\ \triangle BAD\cong\triangle CAE$ (s. a. s.).

$\therefore\ BD=CE$.



習題 30, 31

習題 31. **假設** $AB=AC,\ \angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4$, 又 AD 爲一直線.

求證 $AD=AE$.

［證］ $\angle 1=\angle 2,\ \angle BAD=\angle CAE$ (公理 2),

又 $AB=AC,\ \angle 3=\angle 4$,

$\therefore\ \triangle BAD\cong\triangle CAE$ (a. s. a.).

$\therefore\ AD=AE$.

習題 32. **假設** $\angle A=\angle B$, 又 $\angle 3=\angle 4$.

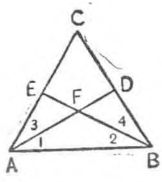
求證 $AD=BE$.

［證］ $\angle A=\angle B,\ \angle 3=\angle 4$, 則 $\angle 1=\angle 2$ (公理 3),

又 $AB=AB$,

$\therefore\ \triangle AEB\cong\triangle ABD$ (a. s. a.).

$\therefore\ AD=BE$.



習題 32,33

習題 33. **假設** $AC=BC,\ \angle 3=\angle 4$.

求證 $AD=BE$.

［證］ $AC=BC,\ \angle 3=\angle 4,\ \angle C=\angle C$,

$\therefore\ \triangle CAD\cong\triangle CBE$ (a. s. a.).

$\therefore\ AD=BE$.

習題 34. **假設** $\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4$.

求證 $EC=BD$.

［證］ $\angle 1=\angle 2$, 則 $\angle CBE=\angle DEB$;

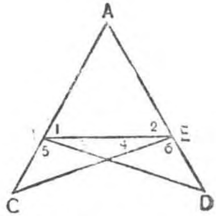
又 $\angle 3=\angle 4,\quad BE=BE$,

$\therefore\ \triangle CBE\cong\triangle DBE$ (a. s. a.).

$\therefore \quad EC=BD.$

習題 35. **假設** $\angle 1=\angle 2$, $DB\perp AC$, 又 $CE\perp AD$.

求證 $\angle C=\angle D$.



習題 34 36

[證] $\angle 1=\angle 2$, 則 $\angle CBE=\angle DEB$ (49),

又 $\angle 3=\angle 4$, $BE=BE$.

$\therefore \quad \triangle CBE\cong\triangle DBE$ (a. s a.).

$\therefore \quad \angle C=\angle D$ (70).

習題 36. **假設** $AB=AE$, $\angle 5=\angle 6$.

求證 $EC=BD$.

[證] $\angle 5=\angle 6$, 則 $\angle ABD=\angle AEC$ (49),

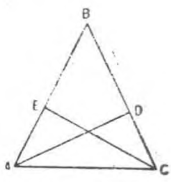
又 $\angle A=\angle A$, $AB=AE$,

$\therefore \quad \triangle ABD\cong\triangle AEC$ (a. s. a.).

$\therefore \quad EC=BD$.

習題 37. 若一三角形有二角相等,則等角之平分線相等。

[已知] 三角形 ABC 之二角 A 與 C 相等, AD 爲 $\angle A$ 之平分線, CE 爲 $\angle C$ 之平分線.



習題 37, 38

[求證] $AD=CE$.

[證] $\angle A=\angle C$,

則 $\angle DAC=\angle ECA$ (公理 8),

又 $AC=AC$.

$\therefore \quad \triangle AEC\cong\triangle ADC$ (a. s. a.)

$\therefore \quad AD=CE$ (70).

習題 38. 等腰三角形兩腰上之中線相等.

[已知] BA 與 BC 爲等腰三角形之二腰, E 與 D 各爲其中點.

[求證] $AD=CE$.

[證] $BA=BC$, 則 $BE=BD$ (公理 8),

又　$$\angle B=\angle B,$$

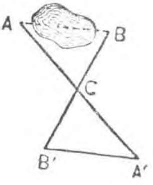
$$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle CBE\ (s.\,a.\,s.).$$

$$\therefore\quad AD=CE.$$

習題 39. 若三角形之二外角相等,則其相鄰二內角之平分線相等.

［解］ 二角形之二外角相等,則其相鄰之二內角亦等,故可應用習題 37 證之.

習題 40. 欲求橫越一池塘之距離 AB, 可先選一適當地點樹立一木樁 C, 自 A 望 C, 在 AC 之延長線上取 $CA'=AC$, 決定點 A'. 同樣延長 BC 至 B', 使 $CB'=BC$. 如是,則量何線可得 AB? 並證明之.



習題 40

［解］ 量 $A'B'$ 卽可得 AB.

［證］ $$CA'=AC,\quad CB'=BC,$$

$$\angle B'CA'=\angle BCA\ (\text{對頂角}),$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'\ (s.\,a\,s.)$$

$$\therefore\quad A'B'=AB.$$

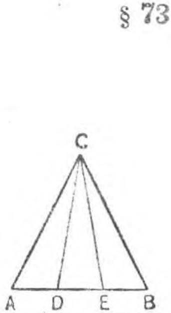
第 30—31 頁　§ 73

習題 1. 若 $AC=BC$, 又 $AE=DB$, 則 $CD=CE$.

［證］ $AC=BC$, 則 $\angle A=\angle B$ (71), 又 $AE=DB$,

$$\therefore\quad \triangle ACE\cong\triangle BCD\ (s.\,a\,s.)$$

$$\therefore\quad CD=CE.$$



習題 1, 2

習題 2. 若 $AC=BC$, 又 $\angle DCA=\angle ECB$, 則 $CD=CE$.

［證］ $AC=BC$, 則 $\angle A=\angle B$ (71),

又　$$\angle DCA=\angle ECB.\ \therefore\ \triangle ADC\cong\triangle BEC\ (s\,a\,s.).$$

$$\therefore\quad CD=CE.$$

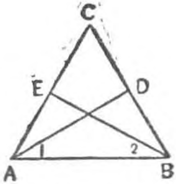
習題 3. 若 $AC=BC$, 又 $\angle 1=\angle 2$, 則 $AE=BD$.

［證］ $AC=BC$, 則 $\angle A=\angle B$ (71),

又 $\angle 1=\angle 2$, $AB=AB$,

$$\therefore\quad \triangle ABD\cong\triangle ABE\ (a.\,s.\,a.).$$

$$\therefore\quad AE=BD.$$



習題 3, 4

習題 4. 若 $AC=BC$, 又 AD 及 BE 皆爲角之平分線, 則 $AD=BE$.

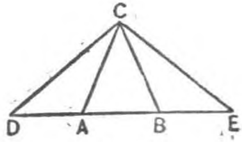
［證］ $AC=BC$, 則 $\angle A=\angle B$ (71); 由是 $\angle 1=\angle 2$ (公理 8),

又 $AB=AB$,

$$\therefore\quad \triangle ABE\cong\triangle ABD\ (s.\,a.\,s.).$$

$$\therefore\quad AD=BE.$$

習題 5. 若 $AC=BC$, $AD=BE$, 又 DE 爲一直線, 則 DEC 爲一等腰三角形.



習題 5, 6

［證］ $AC=BC$, 則 $\angle CAB=\angle CBA$ (71);

由是 $\angle CAD=\angle CBE$ (49);

又 $AC=BC$, $AD=BE$,

$$\therefore\quad \triangle ACD\cong\triangle BCE\ (s.\,a.\,s.).$$

$$\therefore\quad CD=CE,$$

故 DEC 爲一等腰三角形.

習題 6. 若 $AC=BC$, $\angle ACD=\angle BCE$, 又 DE 爲一直線, 則 DEC 爲一等腰三角形.

［證］ $AC=BC$, 則 $\angle CAB=\angle CBA$ (71), 由是 $\angle CAD=\angle CBE$;

又 $\angle ACD=\angle BCE$,

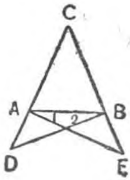
$$\therefore\quad \triangle ACD\cong\triangle BCE.\ (a.\,s.\,a.)$$

$$\therefore\quad CD=CE,$$

故 DCE 爲一等腰三角形.

習題 7. 若 $AC=BC$, $\angle 1=\angle 2$, 又 CD 及 CE 皆爲直線, 則

$$\angle D=\angle E.$$



習題 7

［證］　$AC=BC$，則　$\angle CAB=\angle CBA$ (71)；

又　　$\angle 1=\angle 2$，則　$\angle CAE=\angle CBD$ (公理 2)；

又　　$\angle C=\angle C$，　$\therefore\ \triangle CAE\cong\triangle CBD$ (a. s. a.).

$$\therefore\quad \angle D=\angle E$$

習題 8.　若分等腰三角形之底邊爲三等分，則連結頂點與兩分點之直線必相等。

［已知］　$DC=CE$，又 A 與 B 爲分點．用習題 5, 6 之圖．

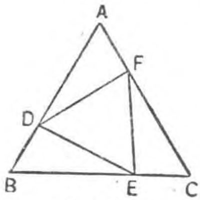
［求證］　$$CA=CB.$$

［證］　$DC=CE$，則 $\angle D=\angle E$；

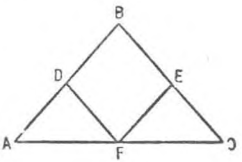
又　$$AD=BE,$$

$$\therefore\quad \triangle DAC\cong\triangle EBC\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad CA=CB.$$



習題 9, 11



習題 10

習題 9.　若在等邊 $\triangle ABC$ 三邊內，取 D, E, 及 F，使 $AD=BE=CF$，則 $\triangle DEF$ 爲一等邊三角形．

［證］　$AB=BC=CA$, $AD=BE=CF$，則 $DB=EC=FA$ (公理 3)，

又　$$\angle A=\angle B=\angle C,$$

$$\therefore\quad \triangle ADF\cong\triangle BED\cong\triangle CEF\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad DE=EF=DF.$$

習題 10.　自等腰三角形兩腰之中點至底邊之中點所作之直線相等。

［已知］　D 及 E 各爲等腰三角形 ABC 二腰 AB 及 BC 之中點，又 F 爲其底邊 AC 之中點．

［求證］ $DF=EF.$

［證］ $AB=BC$, $AD=EC$ (公理 8), 又 $\angle A=\angle C$ 及 $AF=CF.$

$$\therefore \quad \triangle ADF\cong\triangle CEF \ (s.a.s.).$$

$$\therefore \quad DF=EF \ (70).$$

習題 11. 若 $DE=EF=FD$, 又 $\angle AFD=\angle BDE=\angle CEF$, 則 $\triangle ABC$ 為一等邊三角形.

［證］ $$\angle AFD=\angle BDE=\angle CEF,$$

及 $$\angle FDE \quad \angle DEF=\angle EFD \ (73),$$

則 $$\angle ADF=\angle BED=\angle CFE \ (\text{公理 } 3).$$

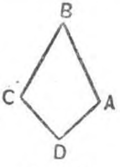
又 $$DF=DE=EF,$$

$$\therefore \quad \triangle ADF\cong\triangle BED\cong\triangle CEF \ (a.s.a.).$$

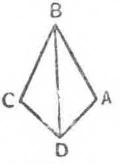
$$\therefore \quad AD=BE=CF.$$

又 $AF=BD=CE$, 故 $AB=BC=CA$ (公理 2)

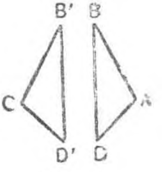
習題 12



習題 13



習題 14



習題 15

習題 12. 若 ABC 與 ADC 為在同底 AC 上之二等腰三角形,則

$$\angle BAD=\angle BCD.$$

［證］ $\angle ACB=\angle CAB$, 又 $\angle ACD=\angle CAD$ (71),

$$\therefore \quad \angle BCD=\angle BAD \qquad (\text{公理 } 2)$$

習題 13. 若在四邊形 $ABCD$ 內, $AB=BC$, 又 $AD=DC$, 則

$$\angle A=\angle C.$$

［證］ 作 AC, 再用習題 12 證之.

習題 14 若兩三角形 ABD 與 DBC 有 BD 公用, $AB=BC$ 及 $AD=DC$, 則 $\angle A=\angle C$

［證］ 作 AC, 再用習題 12 證之.

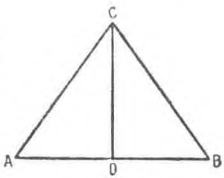
習題 15. 在兩 $\triangle ABD$ 與 $CB'D'$ 內,若 $AD=CD'$, $AB=CB'$, 又 $BD=B'D'$, 則 $\angle A=\angle C$.

［證］ 移 $\triangle CB'D'$ 之一邊 $B'D'$ 至 CD 上,使點 D' 與點 D 疊合,線 $B'D'$ 與線 BD 疊合(公理 19). 於是 B' 將與 B 疊合(由假設, $B'D'=BD$).

因 $AB=CB'$, $AD=CD'$, $\therefore$ $\angle A=\angle C$ (習題 14).

第 33 頁　§ 74

習題 1. 等腰三角形底邊之中線必平分其頂角.



習題 1

［已知］ CD 爲等腰三角形 ABC 底邊 AB 之中線.

［求證］ $\angle ACD=\angle BCD$.

［證］ $AC=BC$, $AD=BD$.

$$CD=CD.$$

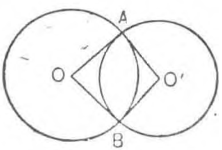
$$\triangle ACD=\triangle BCD\ (s\ s\ s=s.\ s.\ s\ ).$$

$$\therefore\quad \angle ACD=\angle BCD\ (70).$$

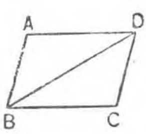
習題 2. 若四邊形之對邊各各相等,則其對角亦必相等.

［解］ 四邊形之對角線分原形爲二全等三角形 (s. s. s.). 證從略.

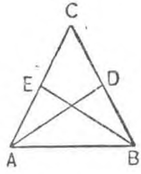
第 33—35 頁　§ 75



習題 1, 2



習題 3



習題 4

習題 1. 若圓心爲 O 及 O' 之兩圓,相交於 A 及 B, 則

$$\angle AOO' = \angle BOO'.$$

［證］ 連 OO'. 於是 $OA = OB, O'A = O'B$ (37), $OO' = OO'$,

$$\triangle AOO' \cong \triangle BOO' \quad (s.\ s.\ s.).$$

$$\therefore \quad \angle AOO' = \angle BOO'.$$

習題 2. 爲圓心爲 O 及 O' 之兩圓，相交於 A 及 B，則

$$\angle OAO' = \angle OBO'.$$

［證］ 連 OO'. 於是 $OA = OB, O'A = O'B$ (37), $OO' = OO'$,

$$\triangle AOO' \cong \triangle BOO' \quad (s.\ s.\ s.).$$

$$\therefore \quad \angle OAO' = \angle OBO'.$$

習題 3. 若 $AB = CD$，又 $BC = DA$，則 $\angle ABD = \angle BDC$.

［證］ $AB = CD$, $BC = DA$, $BD = BD$, $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ $(s.\ s.\ s)$,

$$\therefore \quad \angle ABD = \angle BDC.$$

習題 4. 若 $AE = BD$, $AD = BE$，又 AC 及 BC 皆爲直線，則

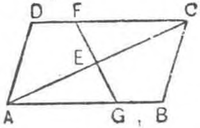
$$\angle CEB = \angle CDA.$$

［證］ $$AE = BD, \quad AD = BE, \quad AB = AB,$$

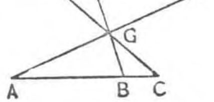
$$\therefore \quad \triangle AEB \cong \triangle ADB \ (s.\ s.\ s.),$$

$$\therefore \quad \angle AEB = \angle ADB.$$

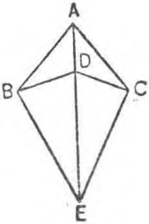
故 $$\angle CEB = \angle CDA \ (49).$$



習題 5



習題 6



習題 7

習題 5. 若四邊形之各對邊相等，作一直線過對角線之中點而止於

其兩邊,則此直線必爲對角線所平分.

[證]　$DC=AB,\ DA=CB,\ AC=AC,$

$$\triangle ACD\cong\triangle ACB\ (s.\ s.\ s.),$$

$$\therefore\quad \angle ACD=\angle BAC.$$

又　$AE=EC,\ \angle AEG=\angle FEC$ (對頂角),

$$\therefore\quad \triangle AEG\cong\triangle CEF\ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore\quad FE=GE.$$

習題 6. 若 $AG=GD, CG=FG$, 又各線皆爲直線,則 $BG=GE$.

[證]　$AG=GD, CG=FG$, 又 $\angle AGC=\angle DGF$,

$$\therefore\quad \triangle ACG\cong\triangle DFG\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad \angle A=\angle D,\ \angle AGB=\angle DGE,$$

$$\therefore\quad \triangle AGB\cong\triangle DGE\ (a.\ s.\ a.)\quad \therefore\quad BG=GE.$$

習題 7. 若 $AB=AC$, AE 平分 $\angle BAC$, 又 AE 爲一直線,則

$$\angle DBE=\angle DCE.$$

[證]　$AB=AC,\ \angle BAE=\angle CAE,\ AE=AE,$

$$\therefore\quad \triangle ABE\cong\triangle ACE\ (s.\ a.\ s.),$$

$$\therefore\quad BE=CE,$$

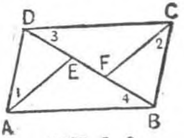
及 $\angle BED=\angle CED$, 又 $DE=DE$,

$$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDE\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\quad \angle DBE=\angle DCE.$$

習題 8. 若 $AB=CD$, $BC=DA$, $\angle 1=\angle 2$, 又 DB 爲一直線,則

$$AE=CF.$$



習題 8, 9

[證]　$AB=CD,\ BC=DA,$

又　$BD=BD,$

則　$\triangle ABD\cong\triangle CBD\ (s.\ s.\ s.).$

$\therefore \quad \angle ADE=\angle CBF$, 又 $\angle 1=\angle 2$,

$\therefore \quad \triangle ADE\cong\triangle CFB$ ($s.\ a.\ s.$)

$\therefore \quad AE=CF.$

習題 9. 若 $AB=CD$, $\angle 3=\angle 4$, 又 $BF=DE$, 則 $\angle 1=\angle 2$.

〔證〕 $AB=CD$, $\angle 3=\angle 4$, $BD=BD$,

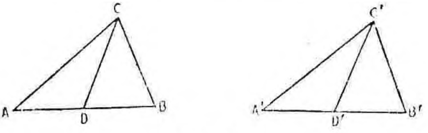
則 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$ ($s.\ a.\ s.$),

$\therefore \quad AD=BC$,

及 $\angle ADE=\angle CBF$,

又 $DE=BF$, $\triangle AED\cong\triangle CFB$ ($s.\ a.\ s.$)

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2.$



習題 10

習題 10. 一三角形之二邊及其中一邊之中線,分別與他三角形之二邊及其中一邊之中線相等,則二形全等.

〔已知〕 CD 及 $C'D'$ 各爲 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$ 之中線,且

$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $CD=C'D'$.

〔求證〕 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

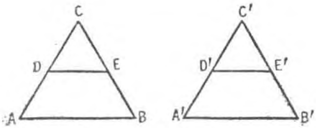
〔證〕 $AC=A'C'$, $AB=A'B'$, $CD=C'D'$.

$AD=A'D'$ (公理 8)

$\triangle ADC\cong\triangle A'D'C'$ ($s.\ s.\ s.$).

$\angle A=\angle A'$.

$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ ($s.\ a.\ s.$).



習題 11

習題 11. 若二等腰三角形,各有一腰及連結兩腰中點之直線相等,則二形全等.

［已知］ AB 及 $A'B'$ 爲等腰 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$ 之底, DE 及 $D'E'$ 各爲 AC, BC, 及 $A'C'$, $B'C'$ 之中點,而 $AC=A'C'$, $DE=D'E'$.

［求證］ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

［證］ $AC=BC$, $A'C'=B'C'$ (等腰三角形).

因 $AC=A'C'$. $\therefore$ $AC=BC=A'C'=B'C'$ (公理 1).

$\therefore$ $CD=CE=C'D'=C'E'$ (假設,公理 8).

$DE=D'E'$.

$\triangle CED\cong\triangle C'E'D'$ (s. s. s).

又 $\angle C=\angle C'$.

$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (s. a. s.).

習題 12. 若四邊形之對邊各各相等,則其二對角線互相平分.

［已知］ 在四邊形 $ABCD$ 內, $AB=CD$, $AD=BC$, 又對角線 AC 與 BD 相交於 E.

［求證］ $AE=CE$, $BE=DE$.

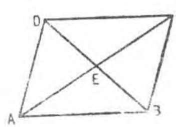
［證］ $AB=CD$, $AD=BC$,

及 $AC=AC$, 則 $\triangle ABC\cong\triangle DAC$ (s s s.)

$\therefore$ $\angle DCE=\angle BAE$.

又 $DB=DB$, 則 $\triangle DCB\cong\triangle DAB$ (s s s)

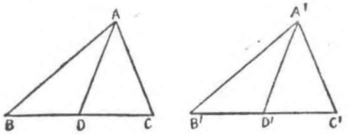
$\therefore$ $\angle CDE=\angle ABE$.



習題 12

$$\therefore \quad \triangle DEC \cong \triangle AEB \ (a.\ s.\ a.)$$

$$\therefore \quad AE = CE,\ BE = DE.$$



習題 13

習題 13. 兩三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 內, $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, 又角之平分線 AD 等於角之平分線 $A'D'$, 則二形全等.

〔證〕 $\angle A = \angle A'$, 則 $\angle BAD = \angle B'A'D'$ (公理 8).

$$AB = A'B',\ AD = A'D',$$

$$\therefore \quad \triangle ABD = \triangle A'B'D' \ (s.\ a.\ s.)$$

$$\therefore \quad \angle B = \angle B'.$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \ (a.\ s.\ a.)$$

習題 14. 在四邊形 $ABCD$ 內,若 $AB = BC$, $CD = DA$, 又對角線 AC 與 BD 相交於 E, 則 $AE = EC$.

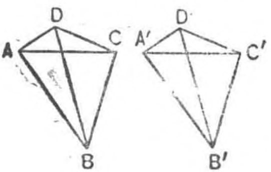
用習題 12 之圖.

〔證〕 $AB = BC$, $CD = DA$, 及 $BD = BD$, $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ $(s.\ s.\ s.)$.

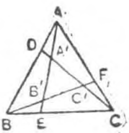
$$\therefore \quad \angle ABD = \angle CBD,\ 又\ BE = BE,$$

$$\triangle ABE \cong \triangle CBE \ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore \quad AE = EC.$$



習題 15



習題 16

習題 15. 在四邊形 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 內,若 $AB=A'B'$, 及 $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, $DA=D'A'$, 又 $AC=A'C'$, 則 $BD=B'D'$.

[證] $$AB=A'B',\ BC=B'C',\ AC=A'C',$$

則 $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'\ (s.\,s.\,s.),$$

$$\therefore\quad \angle BAC=\angle B'A'C'.$$

同樣可證 $$\triangle ACD\cong\triangle A'C'D'.$$

$$\therefore\quad \angle DAC=\angle D'A'C'.$$

$$\therefore\quad \angle DAB=\angle D'A'B'\ (\text{公理 }2).$$

$$\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'\ (s.\,a.\,s.).$$

$$\therefore\quad BD=B'D'.$$

習題 16. 若在等邊三角形 ABC 之各邊上,取 D, E, F 等點,使 $AD=BE=CF$, 並將 D, E, F 各與其所對之角頂連結,則 $\triangle A'B'C'$ 爲一等邊三角形.

[已知] ABC 爲一等邊三角形,今於其三邊各取點 D, E 及 F, 使 $AD=BE=CF$. 連結 AE, BF 及 CD.

[求證] $\triangle A'B'C'$ 爲一等邊三角形.

[證] $$AB=BC=CA,\ BE=CF=AD.$$

$$\angle B=\angle C=\angle A\ (\text{等邊}\ \triangle\ \text{爲等角}\ \triangle).$$

$$\triangle AEB\cong\triangle BFC\cong\triangle CDA\ (s.\,a.\,s.).$$

$$\angle B'BE=\angle C'CF=\angle A'AD,$$

$$\angle BEB'=\angle CFC'=\angle ADA'.$$

$$\triangle BEB'\cong\triangle CFC'\cong\triangle ADA'\ (a.\,s.\,a.).$$

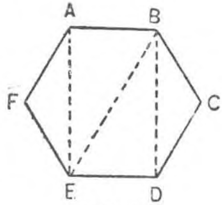
$$\angle BB'E=\angle CC'E=\angle AA'D$$

$$\therefore\quad \angle A'B'C'=\angle B'C'A'=\angle C'A'B'\ (\text{公理 }12).$$

$\therefore$ $\triangle A'B'C'$ 爲一等邊三角形 (73).

習題 17. 若一六邊形之對邊各各相等,並有兩對角相等,則所有之對

角皆相等.



習題 17

[已知] $ABCDEF$ 爲一六邊形, $AB=DE$, $BC=EF, CD=FA$, 又 $\angle F=\angle C$. 連 BE.

[求證] $\angle B=\angle E$, $\angle A=\angle D$.

[證] $AB=DE, BC=EF, CD=FA$, $\angle F=\angle C$.

$$\triangle AFE \cong \triangle DCB \ (s.\ a.\ s.).$$

$$AE=BD,\ \angle FAE=\angle CDB,\ \angle FEA=\angle CBD.$$

$$EB=EB.$$

$$\triangle ABE \cong \triangle DEB \ (s\ s\ s.).$$

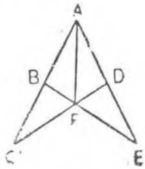
$$\therefore\ \angle EAB=\angle BDE,\ \angle AEB=\angle DBE.$$

$$\therefore\ \angle FAE+\angle EAB=\angle CDB+\angle BDE,$$

卽 $\angle A=\angle D$ (公理 2).

同理, $\angle B=\angle E$ (公理 2).

習題 18. 若 $AB=AD$, $AC=AE$, 又 BE 及 DC 皆爲直線, 則 $\angle BAF=\angle DAF$.



習題 18

[證] $AB=AD$, $AC=AE$, $\angle A=\angle A$, 則

$$\triangle ABE \cong \triangle ADC \ (s.\ a.\ s\ ).$$

$$\therefore\ \angle C=\angle E,\ \angle ABF=\angle ADF.$$

$$\angle CBF=\angle EDF \ (49),$$

$$AC-AB=AE-AD,\ 卽\ BC=DE.$$

$$\triangle CBF \cong \triangle EDF \ (a.\ s.\ a.)$$

$$BF=DF,\ AF=AF,\ \triangle ABF \cong \triangle ADF \ (s.\ s.\ s\ ).$$

$$\therefore\ \angle BAF=\angle DAF.$$

習題 19. 若 $\angle A=\angle B$, 又 $AF=BE$, 則 $AD=DB$.

[證] 設 AE 與 BF 相交於 O, 且 $\angle A=\angle B$, $AF=BE$.

$$AB=AB.$$

$$\triangle ABF \cong \triangle ABE \ (s.\ a.\ s.)$$

$AE = BF$, $\angle AFB = \angle AEB$, $\angle BAE = \angle ABF$.

$\angle CEA = \angle CFB$, $\angle CAE = \angle CBF$ (公理 3).

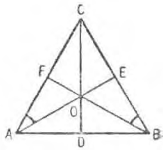
$\triangle EAC \cong \triangle FBC$ (a. s. a.).

$CF = CE$, $AC = BC$. $\triangle AFO \cong \triangle BEO$ (a. s. a).

$FO = EO$. $\triangle CFO \cong \triangle CEO$ (s. a. s.).

$\angle FCO = \angle ECO$. $\triangle CAD = \triangle CBD$ (s. a. s.).

$\therefore\ AD = DB$.



習題 19

習題 20. 等邊四邊形之二對角線必互相垂直.

［已知］ AC 與 BD 爲等邊四邊形 $ABCD$ 之二對角線.

［求證］ $DB \perp AC$.

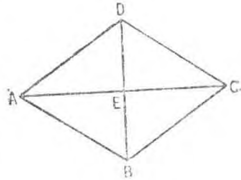
［證］ $AB = BC = CD = DA$.

$BD = BD$.

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (s. s. s.).

$\angle ADB = \angle CDB$.

$\therefore\ DB \perp AC$ (72).



習題 20

習題 21. 等腰三角形底邊之中線,必垂直於其底邊.

［已知］ CD 爲等腰 $\triangle ABC$ 底邊 AB 之中線.

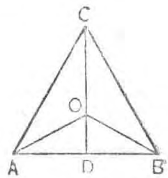
［求證］ $CD \perp AB$.

［證］ $AC = BC$, $AD = BD$.

又 $CD = CD$. $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (s. s. s.).

$\angle ADC = \angle BDC$.

$\therefore\ CD \perp AB$ (77).



習題 21,23

習題 22. 在四邊形 $ABCD$ 內,若 $AB = BC$, 又 $CD = DA$, 則 BD 垂直於 AC.

［證］ 圖同習題 20. 設 AC 與 BD 相交於 E. $\triangle ABD \cong CBD$ (s. s. s.)

$\angle ABE = \angle CBE$. $\triangle ABE \cong \triangle CBE$.

$$\therefore \quad \angle AEB = \angle CEB.$$

$$\therefore \quad BD \perp AC \ (77).$$

習題 23. 若 $AC=BC$, 又 $AO=BO$, 則 $CD \perp AB$.

［證］ $AC=BC$, $AO=BO$, 又 $CO=CO$, 則

$$\triangle AOC \cong \triangle BOC \quad (s.\,s.\,s.).$$

$$\angle ACO = \angle BCO,$$

又 $CD=CD$, $\therefore$ $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ $(s.\,a.\,s.)$. $\therefore$ $\angle ADC = \angle BDC$.

$$\therefore \quad CD \perp AB \ (77).$$

習題 24. 若 $AC=BC$, 又 $\angle 1 = \angle 2$, 則 $CD \perp AB$.

［證］ 命 AE, BF 相交於 O. 因 $AC=BC$,

$\therefore$ $\angle A = \angle B$. 又 $\angle 1 = \angle 2$, $AB=AB$,

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle ABF$ $(a.\,s.\,a.)$. $\therefore$ $AF=BE$,

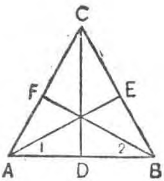
$\angle AFO = \angle BEO$. 又 $\angle FAO = \angle EBO$ (公理 2).

$\therefore$ $\triangle AOF \cong \triangle BOE$ $(a.\,s.\,a.)$. $\therefore$ $AO=BO$.

$\triangle AOC \cong \triangle BOC$ $(s.\,a.\,s.)$. $\therefore$ $\angle ACO = \angle BCO$.

$CD=CD$, $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ $(s.\,a.\,s.)$. $\therefore$ $\angle ADC = \angle BDC$.

$$\therefore CD \perp AB.$$



習題 24

第 36 頁　　§ 80

習題. 若四邊形之四邊皆相等,則其對角線必互相平分.

［已知］ AC 與 BD 爲等邊四邊形 $ABCD$ 之對角線,相交於 E. (用前頁習題 20 之圖.)

［求證］ $AE=CE$, $BE=DE$.

［證］ $AB=BC$, $CD=AD$. $\therefore$ $BD \perp AC$, $AE=CE$ (79). $AB=AD$, $BC=CD$. $\therefore$ $AC \perp BD$, $BO=DO$ (79).

第 37 頁　§ 82

習題 1.　求分一已知直線爲四等分.

［解］　依 § 81 之法,平分一直線,將所得線段再平分之,即得.圖從略.

習題 2.　求作一三角形之三中線.

［解］　平分三角形之各邊,各得一中點.再將三中點各與其對角之頂點連結之即得.圖從略.

習題 3.　求於三角形三邊各作一中垂線.

［解］　將三角形各邊依 § 82 之法各求其中垂線.圖從略.

第 38 頁　§ 84

習題 1.　分一已知角爲四等分.

［解］　平分已知角爲二等分,再將二半角各平分之 (83).圖略.

習題 2.　平分一平角.

［解］　已詳第 12 頁,習題8(在 § 39 後).

習題 3.　作一 90° 之角,又 45° 之角.

［解］　平分一平角.平分一直角.詳見第 12 頁.習題 13 (§ 39 後).

習題 4.　作一 22°30′ 之角.

［解］　平分一 45° 之角,詳見第 12 頁,習題 14 (§ 39 後).

習題 5.　作一 67°30′ 之角.

［解］　作 45° + 22°30′ 之角,或依第 12 頁,習題 15 (§ 39 後)作之.

習題 6.　求作一角等於已知角之補角之半.

［解］　詳第 12 頁,習題 19 (§ 39 後).

習題 7.　作一已知三角形三角之平分線.

［解］　作一三角形,應用 § 83 之法,作各角之平分線.若精細作之,此三平分線必相遇於一點.

第 39 頁 § 5

習題 1. 作一已知銳角之餘角.

[解] 詳第 12 頁,習題 18 (§ 39 後).

習題 2. 已知一銳角,作其餘角之補角。

[解] 詳第 13 頁,習題 20 (§ 39 後).

習題 3. 已知一銳角,作其餘角之半.

[解] 詳第 12 頁,習題 19 (§ 39 後).

習題 4. 作一直角三角形,已知其直角邊各等於 1 吋及 $1\frac{1}{2}$ 吋.

[解] 依 § 85 之法,作一直角.截取其一邊等於 1 吋,截取另一邊等於 $1\frac{1}{2}$ 吋,然後連結其二截點即得.

習題 5 作一正方形,使其一邊等於 $1\frac{1}{8}$ 吋.

[解] 作一直線,截取其一線等於 $1\frac{1}{8}$ 吋 於此直線之兩端各作一垂線,其長各爲 $1\frac{1}{8}$ 吋.再連結二垂線之端點即得.

習題 6 作一正方形,使其周等於已知之直線.

[解] 應用第 37 頁,習題 1,分已知直線爲四等分.然後依前題作正方形即得.

第 40 頁 § 86

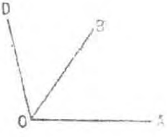
習題 1. 作一角使其等於一已知角之二倍.

[解] 在已知角 AOB 之一邊 OB 上作

$$\angle BOD = \angle AOB,$$

則 $$\angle AOD = 2\angle AOB,$$

即爲所求之角.



習題 1

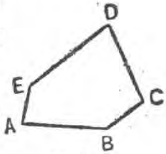
習題 2. 作一角使其二倍於一已知角之補角.

[解] 先依第 12 頁,習題 16 (§ 39 後),作已知角之補角,再依前題作其餘角之二倍即得.圖略.

習題 3. 已知一三角形 ABC. 另作一三角形 $A'B'C'$, 使 $A'B'=AB$, $\angle A'=\angle A$, 又 $\angle B'=\angle B$. 問 $\triangle ABC$ 與 $A'B'C'$ 之關係若何?

[解] 應用 § 86 節之法作之.此二三角形全等 $(a.s.a)$. 圖略.

習題 4 已知一五邊之多邊形(五邊形) $ABCDE$. 作另一五邊形,使其四邊各等於 AB, BC, CD 及 DE, 並使其夾角各等於 $\angle$s B, C 及 D.



習題 4

[作圖] 作 $A'B'=AB$, 作 $\angle B'=\angle B$, 作 $B'C'=BC$ 依此類推得 D', E', 將 E' 與 A' 連結之,則得 $A'B'C'D'E'$. 爲所求之五邊形.

第 41 頁　§ 87

習題 1. 作一銳角三角形之三高.

[作圖] 設 ABC 爲已知三角形,自 A 作垂線至 BC (87). 再自 B 及 C 作垂線至 AC 及 AB. 若精細作之,三垂線必相會於一點.圖從略.

習題 2. 作一鈍角三角形之三高;作一直角三角形之三高.

[作圖] 在鈍角三角形,其中有二高必落於二邊延長線上外,餘與習題 1 之作法同.圖略.

在直角三角形,三高皆過直角之頂點.圖略.

習題 3. 一三角形之三高既經作成以後,可見此三線有何種關係?

[解] 三角形之三高必相會於一點.

習題 4 在一三角形中,尚有何種其他之線,亦有同樣之關係?

[解] 三角形三角之平分線,三邊之中垂線,及三中線,均有此性質.

習題 5. 已知斜邊及 45° 之一角,求作一直角三角形.

[作圖] 在已知斜邊之兩端各作一 45° 角,將此二角之邊延長之,至相遇而止,即得一直角三角形.

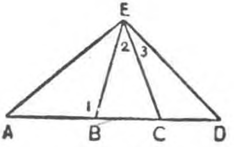
或作一 45° 角,於其一邊截一線段等於斜邊之長.最後自斜邊上之截點作直線垂直於 45° 角之他一邊即得.圖從略.

第 43 頁　　§ 83

習題 1. 若 AD 爲一直線,求證

(a) $\angle 1 > \angle 2$,　(b) $\angle 1 > \angle D$,

(c) $\angle 1 > \angle 3$.



習題 1

［證］ (a) $\angle 1$ 爲 $\triangle EBC$ 之外角,

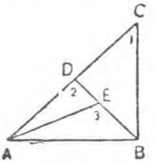
$\therefore\ \angle 1 > \angle 2$ (88).

(b) $\angle 1$ 爲 $\triangle EBD$ 之外角, $\therefore\ \angle 1 > \angle D$ (88).

(c) $\angle 1 > \angle BCE$, 但 $\angle BCE > \angle 3$, $\therefore\ \angle 1 > \angle 3$ (公理 9).

習題 2. 若 DB 爲一直線,求證

(a) $\angle 2 > \angle 1$.　(b) $\angle 3 > \angle 1$.



習題 2

［證］ (a) $\angle 2$ 爲 $\triangle CBD$ 之外角. $\therefore\ \angle 2 > \angle 1$.

(b) $\angle 3 > \angle 2$ (88). 但 $\angle 2 > \angle 1$.

$\therefore\ \angle 3 > \angle 1$ (公理 9).

習題 3. 在命題 XII 所示之圖內,求證

(a) $\angle FBD > \angle F$.　(c) $\angle CEA < \angle GBD$.

(b) $\angle BEA > \angle ACE$.　(d) $\angle CBD > \angle CEF$.

［證］ (a) $\angle FBD$ 爲 $\triangle AFB$ 之外角, $\therefore\ \angle FBD > \angle F$.

(b) $\angle BEA$ 爲 $\triangle ACE$ 之外角, $\therefore\ \angle BEA > \angle ACE$.

(c) $\angle CEA > \angle ABE$ (88). 但 $\angle ABE = \angle GBD$,

$\therefore\ \angle CEA > \angle GBD$ (公理 12).

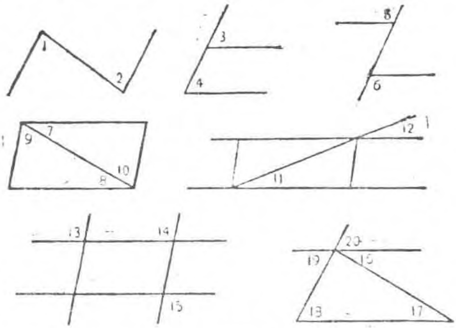
(d) $\angle CBD > \angle AEB$ (88). 但 $\angle AEB = \angle CEF$,

$\therefore\ \angle CBD > \angle CEF$ (公理 12).

第 44 頁　　§ 92

習題 1. 試就下圖說明以下諸角爲何種角: 1 與 2, 3 與 4, 5 與 6, 7

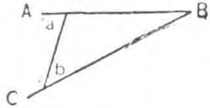
與 8, 9 與 10, 11 與 12, 13 與 14, 14 與 15. 16 與 17, 18 與 19, 18 與 20.



習題 1

［解］ 1 與 2 爲內錯角；3 與 4 爲同位角；5 與 6 爲外錯角；7 與 8 爲內錯角；9 與 10 亦爲內錯角；11 與 12 爲同位角；13 與 14 爲同位角；14 與 15 爲外錯角；16 與 17 爲內錯角；18 與 19 爲內錯角；18 與 20 爲同位角.

習題 2. 若 AB 與 BC 皆爲直線，能否



習題 2

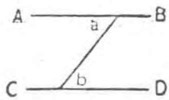
(a) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=50°$?

(b) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=70°$?

(c) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=60°$?

［解］ (a) 能.　(b) 不能.　(c) 不能.

習題 3. AB 與 CD 延長(卽向右延長)後能相交否，若



習題 3—5

(a) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=50°$?

(b) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=70°$?

(c) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=60°$?

［解］ (a) 能相交.　(b) 不能相交.　(c) 不能相交.

習題 4. BA 與 DC 延長(卽向左延長)後能相交否，若

(a) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=70°$?

(b) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=50°$?

(c) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=60°$?

[解] (a) 能相交. (b) 不能相交. (c) 不能相交.

習題 5. 二直線延長後能相交否,若

(a) $\angle a=50°$, 而 $\angle b=50°$?

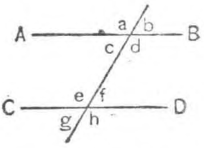
(b) $\angle a=60°$, 而 $\angle b=60°$?

[解] (a) 不能相交. (b) 不能相交.

第 46 頁

§ 94

習題 1. 求證 $AB /\!/ CD$, 若



習題 1—4

(a) $\angle c=70°$, $\angle f=70°$.

(b) $\angle c=60°$, $\angle e=120°$.

(c) $\angle a=110°$, $\angle f=70°$.

(d) $\angle b=60°$, $\angle f=60°$.

(e) $\angle a=120°$, $\angle g=60°$.

[證] (a) $\angle c=\angle f$, $\therefore AB /\!/ CD$ (94).

(b) $\angle e=120°$, 則 $\angle f=60°$, $\therefore \angle f=\angle c$, $\therefore AB /\!/ CD$.

(c) $\angle a=110°$, 則 $\angle c=70°$, $\therefore \angle f=\angle c$, $\therefore AB /\!/ CD$.

(d) $\angle b=60°$, 則 $\angle c=60°$, $\therefore \angle f=\angle c$, $\therefore AB /\!/ CD$.

(e) $\angle a=120°$, 則 $\angle c=60°$. 又 $\angle g=60°$ 則 $\angle f=60°$.

$\therefore \angle f=\angle c=60°$. $\therefore AB /\!/ CD$.

習題 2. 求證 $AB /\!/ CD$, 若 $\angle b=\angle f$.

[證] $\angle b=\angle c$ (對頂角),而 $\angle b=\angle f$, $\therefore \angle c=\angle f$,

$\therefore AB /\!/ CD$ (93).

習題 3. 求證 $AB /\!/ CD$, 若 $\angle a=\angle h$.

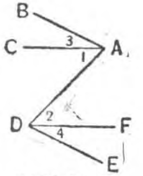
[證] $\angle d=\angle a$, 又 $\angle h=\angle e$. 但 $\angle a=\angle h$, $\therefore \angle d=\angle e$,

$\therefore AB /\!/ CD$ (93).

習題 4. 求證 $AB /\!\!/ CD$, 若 $\angle b=\angle g$.

〔證〕 $\angle c=\angle b$, 又 $\angle f=\angle g$ 但 $\angle b=\angle g$. $\therefore$ $\angle c=\angle f$.

$\therefore$ $AB /\!\!/ CD$ (93).



習題 5—7

習題 5. 若 $\angle 1=\angle 2$, 又 $\angle 3=\angle 4$, 求證 $AB /\!\!/ DE$.

〔證〕 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 則 $\angle A=\angle D$ (公理 2).

$\therefore$ $AB /\!\!/ DE$ (93).

習題 6. 若 $\angle A=\angle D$, 又 $\angle 3=\angle 4$, 求證 $AC /\!\!/ DF$.

〔證〕 $\angle A=\angle D$, $\angle 3=\angle 4$, 則 $\angle 1=\angle 2$ (公理 3).

$\therefore$ $AC /\!\!/ DF$ (93).

習題 7. 若 $BA\perp AD$, $ED\perp AD$, 又 $\angle 3=\angle 4$ 求證 $AC /\!\!/ DF$.

〔證〕 $BA\perp AD$, $ED\perp AD$, 則 $\angle A=\angle D=rt.\ \angle$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ (公理 3). $\therefore$ $AC /\!\!/ DF$ (93).

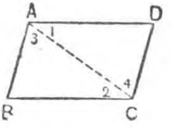
習題 8 若 AB 與 CD 互相平分於 F, 求證 $AC /\!\!/ DB$.

〔證〕 $AF=BF$, $CF=DF$, $\angle AFC=\angle BFD$, 則

$\triangle AFC\cong\triangle BFD$ (s. a. s.) $\therefore$ $\angle CAF=\angle DBF$,

$\therefore$ $AC /\!\!/ DB$. 圖從略.

習題 9. 若 $AB=DC$, 又 $\angle 3=\angle 4$, 求證 $AD /\!\!/ BC$.



習題 9, 10

〔證〕 $AB=DC$, $\angle 3=\angle 4$, 又 $AC=AC$, 則

$\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (s. a. s.).

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$, $\therefore$ $AD /\!\!/ BC$.

習題 10. 若 $AB=DC$, 又 $AD=BC$, 求證

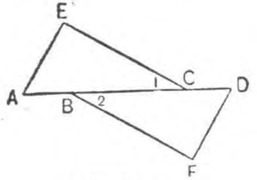
$AB /\!\!/ DC$.

〔證〕 $AB=DC$, $AD=BC$, 又 $AC=AC$, 則

$\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (s. s. s.). $\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $AB /\!\!/ CD$.

習題 11. 若 $AB=CD$, $EC=BF$, $\angle 1=\angle 2$, 又 AD 爲一直線, 則



習題 11—13

$AE \parallel DF$.

［證］ $AB=CD$, 則 $AC=BD$ (公理 2);

$$EC=BF,\ \angle 1=\angle 2,$$

則 $$\triangle AEC \cong \triangle BFD\ (s.\ a.\ s.)$$

$$\therefore\ \angle A=\angle D. \qquad \therefore\ AE \parallel DF.$$

習題 12. 若 $AE=DF$, $AB=CD$, 又 $EC=BF$, 則 $EC \parallel BF$.

［證］ $AB=CD$, 則 $AC=BD$ (公理 2); 又 $AE=DF$, $EC=BF$,

$$\therefore\ \triangle AEC \cong \triangle BFD\ (s.\ s.\ s.)$$

$$\therefore\ \angle 1=\angle 2. \quad \therefore\ EC \parallel BF.$$

習題 13. 若 $AB=CD$, $\angle ABF=\angle DCE$, $EC=BF$, 又 AD 爲一直線,則 $AE \parallel DF$.

［證］ $AB=CD$, 則 $AC=BD$ (公理 2);

$\angle ABF=\angle DCE$, 則 $\angle 1=\angle 2$ (49); 又 $EC=BF$;

$$\therefore\ \triangle ACE \cong \triangle BFD\ (s.\ a.\ s.).$$

$$\therefore\ \angle A=\angle D.$$

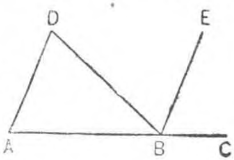
$$\therefore\ AE \parallel DF.$$

第 47 頁 § 96

習題 1. 在第 46 頁,習題 1 之圖內,若 $\angle a=2\angle b$, 又 $\angle f=60^\circ$, 則 $AB \parallel CD$.

［證］ $\angle a=2\angle b$, $\therefore\ \angle b=60^\circ$, 但 $\angle f=60^\circ$, $\therefore\ AB \parallel CD$.

習題 2. 若 $\angle A=70^\circ$, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle DBE=50^\circ$, 又 AC 爲一直線,求證 $AD \parallel BE$.



習題 2—4

［證］ $\angle CBE=180^\circ-\angle DBE-\angle ABD=70^\circ$,

但 $\angle A=70^\circ$, $\therefore\ \angle CBE=\angle A$.

$$\therefore\ AD \parallel BE\ (95).$$

習題 3. 若 BE 平分 $\angle DBC$, $\angle ABD=30^\circ$,

$\angle A=75^\circ$, 又 AC 爲一直線. 則 $AD /\!\!/ BE$.

［證］ $$\angle DBC=180^\circ-\angle ABD=150^\circ.$$

$$\therefore \quad \angle EBC=\tfrac{1}{2}\angle DBC=75^\circ,$$

但 $$\angle A=75^\circ, \quad \therefore \quad AD /\!\!/ BE \text{ (95)}.$$

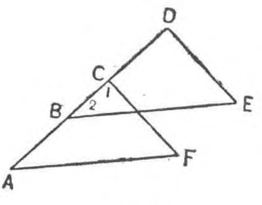
習題 4. 若 $AB=BD$, 又 $\angle D=\angle EBC$, 則 $AD /\!\!/ BE$.

［證］ $AB=BD$, 則 $\angle A=\angle D$, 但 $\angle D=\angle EBC$,

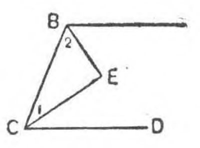
$$\therefore \quad \angle A=\angle EBC,$$

$$\therefore \quad AD /\!\!/ BE \text{ (95)}.$$

第 49 頁　§ 98



習題 1



習題 2

習題 1. 若 $AF=BE$, $AB=CD$, $\angle A=\angle 2$, 又 AD 爲一直線, 求證 $CF /\!\!/ DE$.

［證］ $AF=BE$, $AB=CD$, 則 $AC=BD$; 又 $\angle A=\angle 2$,

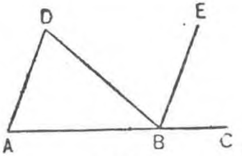
$\therefore \triangle AFC \cong \triangle BED$ (s. a. s.). $\therefore$ $\angle 1=\angle D$. $\therefore$ $CF /\!\!/ DE$.

習題 2. 若 BE 平分 $\angle B$, CE 平分 $\angle C$, 又 $\angle 1+\angle 2=90^\circ$, 則

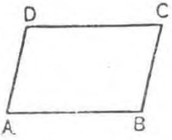
$$BA /\!\!/ CD.$$

［證］ $\angle B=2\angle 2$, $\angle C=2\angle 1$. $\angle B+\angle C=2(\angle 2+\angle 1)=180^\circ$.

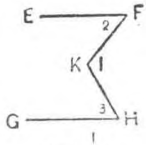
$$\therefore \quad BA /\!\!/ CD \text{ (97)}.$$



習題 3



習題 4



習題 5

習題 3. 若 $AB=BD$, 又 $\angle D$ 爲 $\angle ABE$ 之補角, 則 $AD \parallel BE$.

[證] $AB=BD$, 則 $\angle A=\angle D$ (71). $\therefore$ $\angle A$ 爲 $\angle ABE$ 之補角 (公理 12). $\therefore$ $AD \parallel BE$ (97).

習題 4. 若 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$, 又 $\angle A=\angle C$, 及 $\angle B=\angle D$, 則 $AD \parallel BC$.

[證] $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, 則 $2(\angle A+\angle B)=360°$, 卽

$$\angle A+\angle B=180°. \quad \therefore \quad AD \parallel BC.$$

習題 5. 若 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$, 則 $EF \parallel GH$.

[證] 作 KL 分 FKH 爲二角, 使 $\angle FKL=\angle 2$ (86).

因 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$. 則 $\angle HKL=\angle 3$ (公理 3).

$\therefore$ $GH \parallel KL$ (內錯角相等).

但 $KL \parallel EF$. (由作圖 $\angle FKL=\angle 2$). $\therefore$ $EF \parallel GH$ (92).

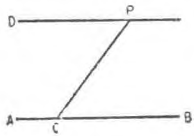
第 50 頁　§ 100

習題 1. 應用內錯角相等, 過已知點作一直線平行於一已知之直線.

[已知] P 爲定點, AB 爲定直線.

[求] 過 P 作一直線平行於 AB.

[作圖] 過 P, 任作一直線 PC 遇 AB 於 C. 以 PC 爲一邊作 $\angle DPC$ 使等於 $\angle PCB$ (86), 則 DP 卽爲平行於 AB 之直線.



習題 1

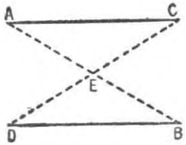
習題 2. 應用第 46 頁習題 8, 過已知點作一直線平行於一已知之

直線.

［已知］ DB 爲定直線，A 爲定點.

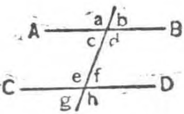
［求］ 過 A 作一直線平行於 AB.

［作圖］ 作 AB，平分 AB 於 E. 連 DE，並延長之至 C，使 $EC=DE$. 連結 A 與 C，則 AC 即爲與 DB 平行之直線.



習題 2

第 52 頁 § 105



習題 1—3

習題 1. 二平行線 AB 與 CD 爲一截線所截.

(a) 若 $\angle c=70^\circ$，求 $\angle f$.

(b) 若 $\angle c=80^\circ$，求 $\angle e$

(c) 若 $\angle c=75^\circ$，求 $\angle g$.

［解］ (a) $\angle f$ 與 $\angle c$ 爲內錯角，且相等，故 $\angle f=70^\circ$.

(b) $\angle c$ 與 $\angle e$ 互爲補角，故 $\angle e=180^\circ-80^\circ=100^\circ$.

(c) $\angle g$ 與 $\angle c$ 爲同位角，且相等，故 $\angle g=75^\circ$.

習題 2. 若 $AB /\!/ CD$，又

(a) $\angle a=110^\circ$，求 $\angle f$.

(b) $\angle b=80^\circ$，求 $\angle g$.

(c) $\angle h=100^\circ$，求 $\angle b$.

［解］ (a) $\angle f=70^\circ$. (b) $\angle g=80^\circ$. (c) $\angle b=80^\circ$.

習題 3. 若 $AB /\!/ CD$，求證

(a) $\angle a=\angle e$.

(b) $\angle b=\angle f$.

(c) $\angle a=\angle h$.

(d) $\angle c$ 爲 $\angle e$ 之補角.

(e) $\angle g$ 爲 $\angle d$ 之補角.

［證］ (a)　$\angle a=\angle d$ (53), $\angle d=\angle e$ (104), $\therefore\ \angle a=\angle e$.

(b)　$\angle b=\angle c$ (53), $\angle c=\angle f$ (104), $\therefore\ \angle b=\angle f$.

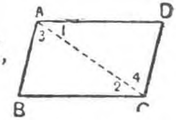
(c)　$\angle a=\angle d, \angle h=\angle e$ (對頂角). 但 $\angle d=\angle e$,

$$\therefore\ \angle a=\angle h.$$

(d)　$\angle c=\angle f$, 但 $\angle f$ 爲 $\angle e$ 之補角, 故 $\angle c$ 爲 $\angle e$ 之補角.

(e)　$\angle d=\angle e$, $\angle g$ 爲 $\angle e$ 之補角, 故 $\angle g$ 爲 $\angle d$ 之補角.

習題 4.　若 $AD=BC$, 又 $AD \parallel BC$, 則 $\angle 3=\angle 4$.



習題 4, 5

［證］ $AD \parallel BC$, 則 $\angle 1=\angle 2$, 又 $AD=BC$, $AC=AC$,

$\therefore\ \triangle ADC \cong \triangle ABC$ (s. a. s.)

$\therefore\ \angle 3=\angle 4$.

習題 5.　若 $AB \parallel CD$, 又 $AD \parallel BC$, 則 $\angle B=\angle D$.

［證］ $AB \parallel CD$, 則 $\angle 3=\angle 4$; $AD \parallel BC$, 則 $\angle 1=\angle 2$, 又 $AC=AC$, 故 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (a. s a.). $\therefore\ \angle B=\angle D$.

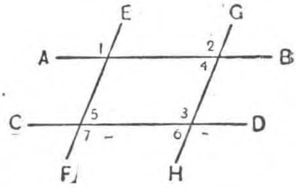
第 54 頁　　§ 106

習題 1.　若 $AB \parallel CD$, 又 $EF \parallel GH$, 求證

(a)　$\angle 1=\angle 3$.

(b)　$\angle 4=\angle 5$.

(c)　$\angle 2=\angle 7$.



習題 1

［證］ (a)　$\angle 1=\angle 2$, $\angle 2=\angle 3$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 3$ (106).

(b)　$\angle 4=\angle 6$ (106), $\angle 6=\angle 5$ (104),

$$\therefore\ \angle 4=\angle 5.$$

(c)　$\angle 2=\angle 3$ (106), $\angle 3=\angle 7$ (104), $\therefore\ \angle 2=\angle 7$.

習題 2.　若 $AB \parallel CD$, 又 EH 爲一直線, 求下之數值:

(a)　若 $\angle g=80°$, 求 $\angle d$.

(b)　若 $\angle h=60°$, 求 $\angle a$

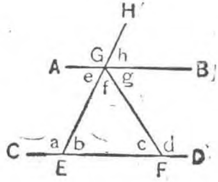
(c)　若 $\angle b=60°$, 又 $\angle c=70°$, 求 $\angle FGH$.

(d)　若 $\angle FGH=140°$, 又 $\angle c=80°$, 求 $\angle b$.

(e)　若 $\angle b=65°$, 又 $\angle c=70°$, 求 $\angle f$.

(f)　若 $\angle f=50°$, 又 $\angle c=70°$, 求 $\angle b$.

(g)　若 $\angle e=55°$, 又 $\angle c=75°$, 求 $\angle HGF$.



習題 2, 3

［解］ (a)　$\angle d=180°-\angle g=100°$.

(b)　$\angle a=180°-\angle e=180°-\angle h=120°$.

(c)　$\angle FGH=\angle g+\angle h=\angle c+\angle b=130°$.

(d)　$\angle b=\angle h=\angle FGH-\angle g=\angle FGH-\angle c=60°$.

(e)　$\angle f=180°-\angle b-\angle g=180°-\angle b-\angle c=45°$.

(f)　$\angle b=\angle h=180°-\angle f-\angle g=180°-\angle f-\angle c=60°$.

(g)　$\angle HGF=\angle h+\angle g=\angle e+\angle c=130°$.

習題 3.　若 $AB /\!\!/ CD$, 求證

(a)　$\angle FGH=\angle b+\angle c$.　　(c)　$\angle CEH=\angle f+\angle c$.

(b)　$\angle f=180°-\angle h-\angle c$.　　(d)　$\angle b+\angle f+\angle c=180°$.

［證］ (a)　$\angle h=\angle b$, $\angle g=\angle c$　$\therefore$ $\angle h+\angle g=\angle b+\angle c$.

$$\therefore \quad \angle FGH=\angle b+\angle c.$$

(b)　$\angle f=180°-\angle h-\angle g$. 但 $\angle g=\angle c$.

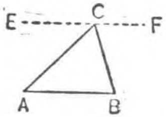
$$\therefore \quad \angle f=180°-\angle h-\angle c$$

(c)　$\angle CEH=\angle EGB=\angle f+\angle g$. 但 $\angle g=\angle c$.

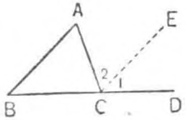
$$\therefore \quad \angle CEH=\angle f+\angle c.$$

(d)　$\angle e+\angle f+\angle g=180°$. 但 $\angle e=\angle b$, $\angle g=\angle c$.

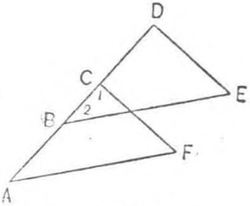
$$\therefore \quad \angle b+\angle f+\angle c=180°.$$



習題 4



習題 5



習題 6,7

習題 4. 求證 $\triangle ABC$ 三角之和等於 $180°$.

［證］ 見課本第 58 頁, § 110, 命題 XXII.

習題 5. 若 ACD 爲 $\triangle ABC$ 之外角, 則 $\angle ACD=\angle A+\angle B$.

［證］ 見原書第 62 頁, § 120, 命題 XXIV.

習題 6. 若 AD 爲一直線, $AB=CD$, $AF /\!\!/ BE$, 又 $CF /\!\!/ DE$, 則

$$DE=CF.$$

［證］ $AB=CD$, 則 $AC=BD$ $AF /\!\!/ BE$, 則 $\angle A=\angle 2$. $CF /\!\!/ DE$, 則 $\angle 1=\angle D$. $\therefore$ $\triangle ACF \cong \triangle BDE$ (*a. s. a.*). $\therefore$ $DE=CF$.

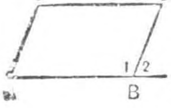
習題 7. 若 $AB=CD, CF=DE, CF /\!\!/ DE$, 又 AD 爲一直線,則

$$AF=BE.$$

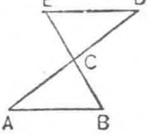
［證］ $CF=DE$, $AB=CD$, 則 $AC=BD$. $CF /\!\!/ DE$, 則 $\angle 1=\angle D$.

$\therefore$ $\triangle ACF \cong \triangle BDE$ (*s. a. s.*) $\therefore$ $AF=BE$.

第 55—56 頁 § 107



習題 1



習題 2

習題1　若 $AB /\!/ CD$, 又 $AD /\!/ BC$, 求證

(a)　$\angle 2$ 爲 $\angle D$ 之補角.

(b)　$\angle A=\angle C$.

[證]　(a)　$\angle 2=\angle A$, $\angle A$ 爲 $\angle D$ 之補角 (107). $\therefore$ $\angle 2$ 爲 $\angle D$ 之補角.

(b)　$\angle 1$ 爲 $\angle A$ 之補角. $\angle 1$ 又爲 $\angle C$ 之補角.

$$\therefore\quad \angle A=\angle C.$$

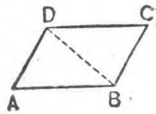
習題2.　若 $ED /\!/ AB$, $AC=CD$, 又 EB 及 AD 皆爲直線, 則

$$\triangle ABC \cong \triangle CDE.$$

[證]　$ED /\!/ AB$, $\angle D=\angle A$, $\angle ECD=\angle ACB$, 又 $AC=CD$,

$$\therefore\quad \triangle ABC \cong \triangle CDE\ (a\ s.\ a.)$$

習題3.　若四邊形之對邊各相平行,則亦必各自相等.



習題 3, 4

[證]　$AB /\!/ DC$, 則 $\angle ABD=\angle BDC$.

$AD /\!/ BC$, 則 $\angle ADB=\angle DBC$.

又　$BD=BD$.

$$\therefore\quad \triangle ABD \cong \triangle BCD\ (a.\ s.\ a.).$$

$$\therefore\quad AB=DC,\ AD=BC.$$

習題4.　若四邊形相對之二邊相等而平行, 則其他兩邊亦必相等而平行.

[證]　$DC /\!/ AB$, 又 $DC=AB$, $\angle BDC=\angle ABD$, $DB=DB$,

$\triangle BDC \cong \triangle ABD$ (s. a s.).　$\therefore$　$AD=BC$.

又　$\angle ADB=\angle DBC$,　$\therefore$　$AD /\!/ BC$.

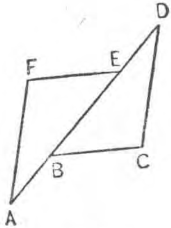
習題5.　若 $AB=ED$, $BC /\!/ FE$, $AF /\!/ DC$, 又 AD 爲一直線, 則 $\triangle AEF$ 必全等於 $\triangle BCD$.

［證］　$AB=ED$, 則 $AE=BD$.

$BC \parallel FE$, 則 $\angle CBD=\angle BEF$.

$AF \parallel DC$, 則 $\angle A=\angle D$.

$\therefore\ \triangle AEF \cong \triangle BCD$ (a. s. a.)



習題 5,6

習題 6. 若 $AB=ED$, $BC=FE$, $BC \parallel FE$, 又 AD 爲一直線, 則 AF 必等於 CD.

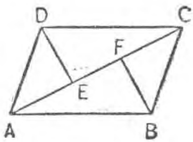
［證］　$AB=ED$, 則 $AE=BD$.

$BC \parallel FE$, 則 $\angle AEF=\angle CBD$.

又　$BC=FE$.　$\therefore\ \triangle AEF \cong \triangle BCD$ (s. a. s.).

$\therefore\ AF=CD$.

習題 7. 若 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AE=FC$, 又 AC 爲一直線, 則 $DE \parallel BF$. (應用習題 3)



習題 7

［證］　$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$, 則 $AD=BC$ (習題 3).

$\angle DAE=\angle BCF$ (平行線之內錯角相等)

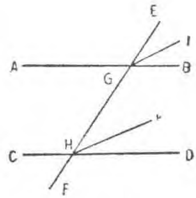
又 $AE=FC$. $\triangle ADE \cong \triangle BFC$ (s. a. s.).

$\therefore\ \angle DEA=\angle BFC$.

卽　$\angle DEF=\angle BFA$ (49).

$\therefore\ DE \parallel BF$ (內錯角相等).

習題 8. 由二平行線所成一對同位角之平分線必平行.



習題 8

［已知］　$AB \parallel CD$, GI 及 HK 各爲同位角 EGB 及 GHD 之平分線.

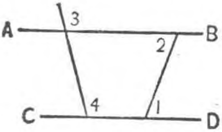
［求證］　$GI \parallel HK$.

［證］　$AB \parallel CD$. $\angle EGB=\angle GHD$ (平行線之同位角相等).

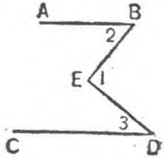
$\angle BGI=\angle DHK$ (公理 8).　$\therefore\ GI \parallel HK$ (106).

習題 9. 在下圖內, 若 $\angle 1=\angle 2$, 則 $\angle 3=\angle 4$.

［證］ $\angle 1=\angle 2$, $\therefore$ $CD \parallel AB$. $\therefore$ $\angle 3=\angle 4$ (106).



習題 9



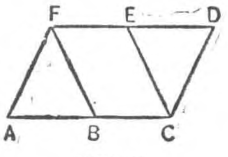
習題 10

習題 10. 在上圖內,若 $AB \parallel CD$, 求證 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$.

［證］ 過 E 作 $EF \parallel AB$ (圖內未畫出),分 $\angle 1$ 爲 BEF 及 DEF 二角 (100). $EF \parallel CD$ (92). $\angle BEF=\angle 2$, $\angle DEF=\angle 3$ (平行線之內錯角相等). $\angle 1=\angle BEF+\angle DEF$ (公理 10).

$$\therefore\ \angle 1=\angle 2+\angle 3\ (\text{公理 }12).$$

習題 11. 在右圖內,若 $AC \parallel FD$, $AF \parallel CD$, 又 $FB \parallel EC$, 求證 $\triangle AFB \cong \triangle ECD$.



習題 11

［證］ 作 FC (公理 13). $\angle AFC=\angle DCF$ (平行線之內錯角相等).

$\angle ACF=\angle DFC$ (平行線之內錯角相等).

$\triangle ACF \cong \triangle DFC$ ($a.\ s.\ a.$).

$AF=CD$, $\angle A=\angle D$ (相應部分).

又 $\angle BFC=\angle ECF$ (平行線之內錯角相等).

$\therefore$ $\angle AFB=\angle DCE$ (公理 3).

$\therefore$ $\triangle AFB \cong \triangle ECD$ ($a.\ s.\ a.$).

第 60 頁 § 118

習題 1. 求以下各角之值:

(a) 若 $\angle B=60°$, 又 $\angle C=50°$, 求 $\angle A$.

(b) 若 $\angle A=m°$, 又 $\angle C=n°$, 求 $\angle B$.

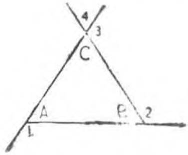
(c) 若 $\angle A=50°$, 又 $\angle B=70°$, 求 $\angle 3$.

(d) 若 $\angle 2=110°$, 又 $\angle A=60°$, 求 $\angle 4$.

(e) 若 $\angle 4=40°$, 又 $\angle B=70°$, 求 $\angle 1$.

(f) 若 $\angle 2=140°$, 又 $\angle 1=120°$, 求 $\angle 3$.

(g) 若 $\angle C=m°$, 求 $\angle A+\angle B$.



習題 1

[解] (a) $\angle A=180°-\angle B-\angle C=70°$.

(b) $\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-m°-n°$.

(c) $\angle 3=180°-\angle C=180°-(180°-\angle A-\angle B)$

$$=180°-60°=120°.$$

(d) $\angle 4=\angle C=180°-\angle A-\angle B$

$$=180°-\angle A-(180°-\angle 2)=50°.$$

(e) $\angle 1=180°-\angle A=180°-(180°-\angle B-\angle C)$

$$=180°-(180°-\angle B-\angle 4)=110°.$$

(f) $\angle 3=180°-\angle C=180°-(180°-\angle A-\angle B)$

$$=\angle A+\angle B=180°-\angle 1+180°-\angle 2$$

$$=40°+60°=100°.$$

(g) $\angle A+\angle B=180°-\angle C=180°-m°$.

習題 2. 若 C 爲等腰三角形 ABC 之頂角,

(a) 若 $\angle C=40°$, 求 $\angle A$. (c) 若 $\angle A=40°$, 求 $\angle C$.

(b) 若 $\angle C=m°$, 求 $\angle B$. (d) 若 $\angle B=n°$, 求 $\angle C$.

[解] (a) $\angle A+\angle B=180°-\angle C=140°$, 卽 $2\angle A=140°$,

$$\therefore \quad \angle A=70°.$$

(b) $\angle A+\angle B=180°-\angle C=180°-m°$, 卽 $2\angle A=180°-m°$.

$$\therefore \quad \angle A=\frac{180°-m°}{2}.$$

(c)　$\angle A=\angle B=40^\circ$, $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=100^\circ$.

(d)　$\angle A=\angle B=n^\circ$,　$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-2n^\circ$.

習題 3.　等腰直角三角形之三角,各有若干度?

［解］　直角爲 90°,餘二角各爲 45°.

習題 4.　一三角形之二角各爲 60° 及 40°,其平分線所成之角若何?

［解］　$180^\circ-\frac{1}{2}60^\circ-\frac{1}{2}40^\circ=180^\circ-30^\circ-20^\circ=130^\circ$.

習題 5.　已知一三角形之二角,求作其第三角.

參看課本第 136 頁,命題 XII,卽可求得.

習題 6.　已知等腰三角形之底角,求作其頂角.

［作圖］　因二底角相等,故可用習題 5 之法作之.

習題 7.　已知等腰三角形之頂角,求其作一底角.

［作圖］　作已知頂角之補角,再平分此補角卽得.圖從略.

習題 8.　求作一 60° 之角; 30° 之角? 120° 之角; 75° 之角.

［作圖］　60° 爲等邊三角形之一角; 30° 爲 60° 角之半; 120° 爲 60° 角之補角; 75° 爲 $\frac{1}{2}(\angle 90^\circ+\angle 60^\circ)$. 依此作之,可得所求之各角.

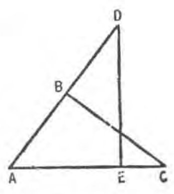
習題 9.　二平行線爲一截線所截,其同側二內角之平分線互相垂直.

［證］　用第 49 頁,習題 2 之圖.

$$\tfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCD)=\angle 1+\angle 2=\tfrac{1}{2}(180^\circ)=90^\circ.$$

習題 10.　若 CB 與 DE 各垂直於角 A 之兩邊,求證

$$\angle ACB=\angle ADE.$$



習題 10

［證］　$\angle ACB$ 爲 $\angle A$ 之餘角 (112). $\angle ADE$ 爲 $\angle A$ 之餘角 (112).　$\therefore$　$\angle ACB=\angle ADE$.

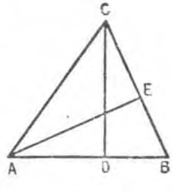
習題 11.　若 CD 爲直角三角形 ABC 斜邊上之高,求證 $\angle ACD=\angle B$.

［證］　$\angle ACD$ 爲 $\angle A$ 之餘角 (112), $\angle B$ 爲 $\angle A$ 之餘角 (112).

$$\therefore\quad \angle ACD=\angle B.\quad \text{(圖從略)}$$

習題 12.　若 CD 與 AE 爲三角形 ABC 之高,求證

$\angle BCD=\angle BAE.$



習題 12

［證］ $\angle BCD$ 爲 $\angle B$ 之餘角 (112). $\angle BAE$ 爲 $\angle B$ 之餘角 (112). $\therefore\ \angle BCD=\angle BAE.$

習題 13. 求四邊形四角之和.

［解］ 作一對角線，則四邊形各角之和等於對角線所分二三角形各角之和，卽 $180^\circ+180^\circ=360^\circ$.

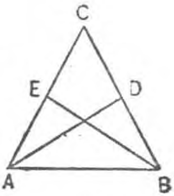
習題 14. 若一三角形之二角相等，則第三角形之平分線必分全形爲二全等之三角形.

［證］ 用課本第 30 頁，命題 IV 之圖. $\angle A=\angle B$，則 $AC=BC$.

$\angle 1=\angle 2$，又 $CD=CD$.

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle BCD$ (s. a. s.).

習題 15. 等腰三角形二腰上之高相等.



習題 15

［已知］ AD 及 BE 爲等腰三角形 ABC 二腰上之高.

［求證］ $AD=BE.$

［證］ $AC=BC.\quad \angle C=\angle C.$

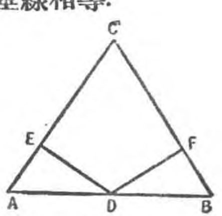
$\angle ADC=\angle BEC$ (直角皆相等).

$\therefore\ \angle DAC=\angle EBC.$

由是 $\triangle ADC\cong\triangle EBC$ (a. s. a.).

$\therefore\ AD=BE.$

習題 16. 自等腰三角形底邊之中點所引兩腰之垂線相等.



習題 16

［已知］ DE 爲 DF 自等腰三角形 ABC 底邊 AB 之中點 D 所引兩腰之垂線.

［求證］ $DE=DF.$

［證］ $\angle A=\angle B$, $\angle AED=\angle BFD=$ 直角,

$\therefore\ \angle ADE=\angle BDF.$

又 $AD=BD.\quad \therefore\ \triangle ADE\cong\triangle BDF$ (a. s. a.)

$\therefore\ DE=DF.$

第 62 頁

§ 120

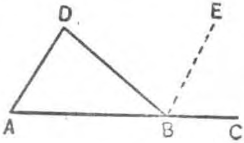
習題 1. 已知三角形之二角,求作一角使等於不相鄰接之外角.

［作圖］ 作一角等於已知二角之和,卽爲所求之外角. 作法及圖從略.

習題 2. 已知三角形之一外角及一不相鄰接之內角,求作一角使等於另一不相鄰接之內角.

［作圖］ 作一角等於已知二角之差,卽爲所求之內角. 作法及圖從略.

習題 3 若三角形有二角相等,則其不相鄰接外角之平分線必與其內角之對邊平行.



習題 3

［已知］ $\triangle ABD$ 之 $\angle A=\angle D$, BE 爲外角之平分線.

［求證］ $BE /\!/ AD$.

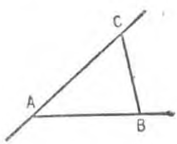
［證］ $\angle A=\angle D$.

$$\angle DBC=\angle A+\angle D \ (120).$$

$\angle CBE=\angle DBE$. $\therefore$ $2\angle CBE=2\angle A$ (公理 1).

卽 $\angle CBE=\angle A$ (公理 8). $\therefore$ $BE /\!/ AD$ (同位角相等).

習題 4. 若於三角形三頂點作各一外角,則此三外角之和等於四直角.



習題 4—6

［證］ 在三角形 ABC 內,其三外角各等於

$\angle A+\angle B$, $\angle B+\angle C$, $\angle C+\angle A$.

故此三外角之和應爲

$$2(\angle A+\angle B+\angle C)=2(180°)=360°.$$

習題 5. 三角形二外角之和減去第三內角必等於二直角.

［證］ 在三角形 ABC 內,其 B, C 兩角外角之和減去 $\angle A$, 則得

$$\angle A+\angle C+\angle A+\angle B-\angle A=\angle A+\angle C+\angle B=180°.$$

習題 6. 若三角形二外角之和等於三直角,則此三角形爲一直角三角形.

［證］ $(\angle B+\angle C)+(\angle B+\angle A)=270°.$

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle B=180°+\angle B=270°.$$

$$\therefore\quad \angle B=270°-180°=90°.$$

第 63 頁　　　　§ 123

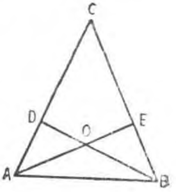
習題 1. 若等腰三角形之頂角爲 60°, 則此三角形爲等邊三角形.

［證］ 若頂角 C 爲 60°, 則底角 A 及 B 各等於 60°. 由 § 122 得證此三角形爲一等邊三角形. 圖從略.

習題 2. 等腰三角形二底角之平分線及底邊, 亦成一等腰三角形.

［已知］ AE 及 BD 爲等腰 $\triangle ABC$ 二底角 A 及 B 之平分線, 相交於一點 O.

［求證］ AOB 爲一等腰三角形.



習題 2

［證］ $\angle A=\angle B$ (等腰三角形底角相等).

$$\angle OAB=\tfrac{1}{2}\angle A,\ \angle OBA=\tfrac{1}{2}\angle B.$$

$$\therefore\quad \angle OAB=\angle OBA\ (\text{公理 }8).$$

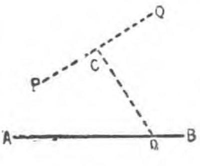
$$\therefore\quad OA=OB\ (121).$$

$\therefore$ $\triangle AOB$ 爲一等腰 $\triangle$ (等腰 $\triangle$ 定義).

第 65 頁　　　　§ 125

習題 1. 在一已知直線 AB 上, 求與二已知點 P 及 Q 等距離之點.

［作圖］ 連結 P, Q. 作其中垂線 CD 交已知直線 AB 於 D. 則 D 卽爲所求之點.



習題 1

［證］ CD 上之任一點皆與 P, Q 等距離 (125).

［討論］ 若 AB 與 PQ 之中垂線平行, 則無解.

習題 2. 在一已知圓上, 求與二已知點等距離之點.

［作圖］　連結已知二點得一直線，其中垂線與圓之二交點皆爲所求之點．圖從略．

［討論］　若中垂線與圓相切，則僅有一點與二已知點等距離．若中垂線不與圓相交，則無解．

習題 3.　求與三已知點成等距離之點．

［作圖］　設 A, B, C 爲三已知點．作 AB, BC 之中垂線．此二中垂線之交點 P 即爲所求之點．

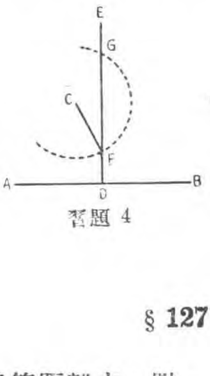
［討論］　若 A, B, C 三點在一直線上，則二中垂線不能有交點，而此題無解．

習題 4.　已知三定點 A, B, 及 C, 求作一點 X, 使 $AX=BX$. 又 $CX=\frac{1}{2}$ 吋.

［已知］　A, B, C 爲三定點．

［求］　作 X, 使 $AX=BX$ 又 $CX=\frac{1}{2}$ 吋.

［作圖］　連結 A, B. 作 AB 之中垂線 ED. 再以 C 爲圓心，取 $\frac{1}{2}$ 吋之長爲半徑作弧，交 ED 於 F 及 G. 則 F 及 G 皆爲所求之點．



習題 4

［討論］　有時祇一交點或無交點．

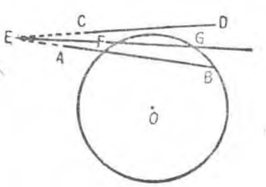
第 66 頁　§ 127

習題 1.　在已知直線 AB 上，求與已知 $\angle DEF$ 二邊等距離之一點．

［作圖］　引長 $\angle DEF$ 之平分線，使與 AB 相交，則此交點即爲所求之點．圖從略．

［討論］　若 $\angle DEF$ 之平分線與 AB 平行，則無解．

習題 2.　在已知圓上，求與二已知直線等距離之一點．



習題 2

［作圖］　延長已知直線 BA 及 DC, 使相交

於 E. 平分 $\angle BED$. 延長平分線 EF, 交定圓 O 於 F 及 G. 則 F 及 G 皆爲所求之點.

［討論］ 將二已知直線所成各角平分之, 其平分線與圓之交點, 可有 4 點, 3 點, 2點, 1 點或 0 點. 故本題有 4 解, 3 解, 2 解, 1 解, 或無解.

習題 3. 求與三已知直線等距離之一點.

［作圖］ 若已知三直線適可成一三角形, 平分此三角形之各內角及外角, 合平分線相遇之點共有四點. 故有四解. 圖從略.

若三直線中有二線平行, 則僅可得二交點, 即得二解.

若三直線均平行, 則無解.

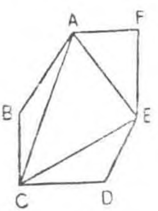
第 67 頁　　§ 128

習題 1. 以下列之線爲邊, 能否作一三角形:

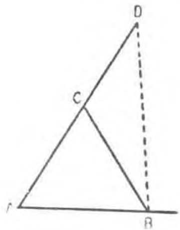
(a) 4 吋, 5 吋, 10 吋?　　(c) 4 呎, 12 呎, 8 呎?

(b) 8 吋, 19 吋, 12 吋?　　(d) 6 吋, 2 吋, 5 吋?

［解］ (a) 不能.　(b) 可能.　(c) 不能.　(d) 可能.



習題 2



習題 3

習題 2. 求證多邊形 $ABCDEF$ 之周大於三角形 ACE 之周.

［證］ $AB + BC > AC$, $AF + FE > AE$, $ED + LC > EC$ (128).

$\therefore$ 多邊形各邊之和 > 三角形各邊之和.

習題 3 在 $\triangle ABC$ 內, 若 $AC = BC$, 又 AC 之延長線上一點 D 與

B 連結，則 $DA>DB$.

[證]　$DA=DC+CA$.　$CA=CB$, $DC+CB>DB$ (128).

即 $DC+CA>DB$, 即 $DA>DB$.

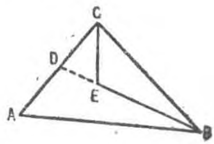
習題 4.　若於 $\triangle ABC$ 之邊 BC 上任取一點 D, 則

$$AB+BC>AD+DC.$$

[證]　$AB+BD>AD$, $DC=DC$.

$\therefore$　$AB+BC>AD+DC$ (公理 4).　圖從略.

習題 5.　若於 $\triangle ABC$ 內任一點 E, 作 EB 及 EC, 則 $AB+AC>EB+EC$.



習題 5

[證]　引長 BE, 交 AC 於 D.

$AB+AC>BD+DC>BE+EC$ (習題 4).

$\therefore$　$AB+AC>BE+EC$ (公理 9).

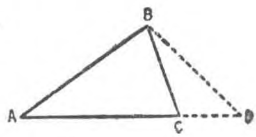
習題 6.　三角形任意二邊之差小於其第三邊.

[證]　在 $\triangle ABC$ 內, $AB+BC>AC$.　$\therefore$ $AB<AC-BC$ (公理 5).

第 68 頁　§ 129

習題 1.　延長等腰三形角 ABC 之一腰 AC 至 D, 則

$$\angle ABD>\angle ADB.$$



習題 1

[已知]　AB 與 AC 爲等腰三角形之二腰, CD 爲腰 AC 之延長線.

[求證]　$\angle ABD>\angle ADB$.

[證]　$AD>AC$ (公理 11).

但 $AC=AB$. $\therefore$ $AD>AB$ (公理 12).

$\therefore$　$\angle ABD>\angle ADB$ (129).

習題 2.　在 $\triangle ABC$ 內, $AB>AC$, 又 $\angle A=60°$, 則此三角形內何角爲最大?

［解］ $\angle A=60^\circ$，則 $\angle B+\angle C=120^\circ$. 又 $AB>AC$，則

$$\angle C>\angle B\ (129).\quad \therefore\quad \angle C>\angle A>\angle B.$$

第 70 頁 §131

習題 1. 直角三角形之三邊，何邊最大 鈍角三角形則如何？

［解］ 由 §130，在直角三角形，以對直角之邊爲最大． 在鈍角三角形，以對鈍角之邊爲最大 (111).

習題 2. 若一三角形之二角，一爲 50°，一爲 60°，問其所對之邊孰大？又此三角形之何邊最大？何邊最小？

［解］ (a) 對 60° 角之邊較大． (b) 第三角爲 70°，故對第三角之邊最大． (c) 對 50° 角之邊最小．

習題 3. 在 $\triangle ABC$ 內，若 $AB>AC$，又 $\angle B=60^\circ$，問此三角形之何邊最大？何邊最小？

［解］ 因 $AB>AC$，$\therefore\ \angle C>\angle B$. 但因 $\angle B=60^\circ$，

$$\therefore\quad \angle A+\angle C=120^\circ.\qquad \therefore\quad \angle C>60^\circ.$$

由是 $\angle A<60^\circ$，故對 $\angle C$ 之邊 AB 爲最大，對 $\angle A$ 之邊 BC 爲最小．

習題 4. 在 $\triangle ABC$ 內，若 $AB>AC$，又 $\angle A=60^\circ$，問此三角形之何邊爲最大？

［解］ 因 $AB>AC$，$\therefore \angle C>\angle B$. 但因 $\angle A=60^\circ$，

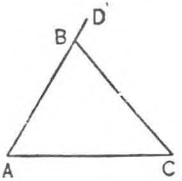
$$\therefore\quad \angle B+\angle C=120^\circ.$$

可知 $\angle C>60^\circ$. 故對 $\angle C$ 之邊 AB 爲最大．

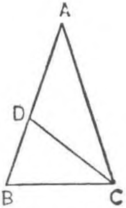
習題 5 若 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 等於三分之二直角，又外角 DBC 等於 110°，則此三角形之何邊最大？何邊最小？

［解］ $\angle A=\frac{2}{3}\,\text{rt.}\angle=60^\circ$. $\angle DBC=110^\circ$，即 $\angle ABC=70^\circ$.

於是 $\angle C=50°$. 故在此三角形內，對 $\angle ABC$ 之邊 AC 最大，對 $\angle C$ 之邊 AB 最小.



習題 5

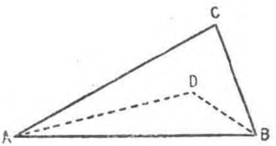


習題 6

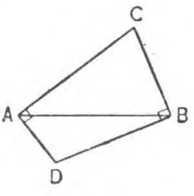
習題 6. 在 $\triangle ABC$ 內，若 $AB=AC$，求證 $DC>DB$.

[證] $AB=AC$, $\angle B=\angle ACB$. $\angle ACB>\angle BCD$ (公理 11).

$$\therefore \quad \angle B>\angle BCD. \qquad \therefore \quad DC>DB.$$



習題 7



習題 8

習題 7. 在 $\triangle ABC$ 內. $AC>BC$. 若角 A 及角 B 之平分線相遇於 D，求證 $AD>BD$.

[證] $AC>BC$，則 $\angle CBA>\angle CAB$. $\therefore$ $\angle DBA>\angle DAB$ (兩不等量之半仍不等，大者仍大，小者仍小). $\therefore$ $AD>BD$.

習題 8. $AC>BC$, $AD\perp AC$，又 $DB\perp BC$，求證 $BD>AD$.

[證] $AD\perp AC$, $DB\perp BC$. $\angle CAD=\angle CBD$ (直角皆相等).

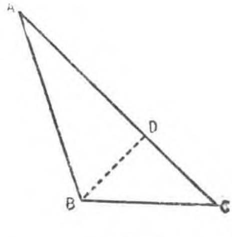
$AC>BC$，則 $\angle CBA>\angle CAB$ (大邊對大角).

$\angle CAD-\angle CAB>\angle CBD-\angle CBA$ (公理 6).

即　$\angle DAB>\angle DBA$ (公理 12).

$$\therefore \quad BD > AD \ (130).$$

習題 9. 用直接證法證命題 XXXI.



習題 9

［證］　　作$\angle CBD = \angle C$.

由是　　$BD = DC$,

$AC = AD + DC = AD + BD$.

但　　$AD + DB > AB$.

$$\therefore \quad AC > AB.$$

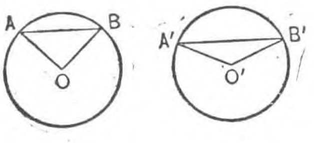
習題 10 三角形三高之和小於三角形之周.

［證］ 用課本第 90 頁之圖 $\triangle ABC$. 應用(131), $AD < AB$, $AD > AC$; $BE < AB$, $BE < BC$; $CF < AC$, $CF < BC$.

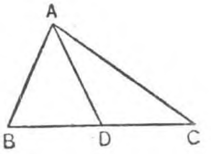
相加, $2AD + 2BE + 2CF < 2AB + 2BC + 2CA$.

$$\therefore \quad AD + BE + CF < AB + BC + CA.$$

第 72 頁　　§ 132



習題 1



習題 2

習題 1. 若 O 與 O' 為二等圓,又 $\angle A'O'B' > \angle AOB$, 則

$$A'B' > AB.$$

［證］ 因 O, O' 為等圓,故 $OA = O'A' = OB = O'B'$.

又　　$\angle A'O'B' > \angle AOB$.　$\therefore$　$A'B' > AB$ (132).

習題 2. 若三角形 ACB 之中線 AD 所成之 $\angle ADB$ 為一銳角,求證

(a) $AC > AB$.　　　(b) $\angle B > \angle C$.

［證］ (a) $\angle ADB$ 為一銳角,則 $\angle ADC$ 為一鈍角.

$$BD=CD,\ AD=AD,$$

而 $\angle ADC>\angle ADB.\quad \therefore\quad AC>AB$ (130).

(b) 由 (a) 知 $AC>AB.\quad \therefore\quad \angle B>\angle C$ (129).

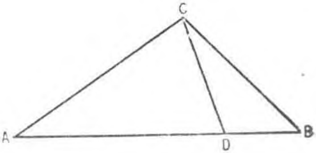
習題 3. 在 $\triangle ABC$ 內,若 $\angle A=\angle B$, 又在 AB 上取一點 D, 使 $\angle ACD>\angle DCB$, 則 $AD>DB$.

[證]　　$\angle A=\angle B$,

則　　$AC=BC,\ CD=CD.$

又　　$\angle ACD>\angle DCB.$

$\therefore\quad AD>DB$ (132).



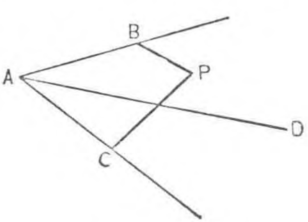
習題 3

習題 4. 不在一直線之中垂線上之點,必不與此直線之二端等距離.

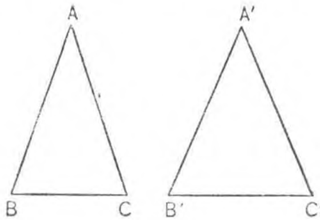
[已知] 用習題 2 之圖. D 爲 BC 之中點,而 AD 與 BC 成斜交, A 爲 AD 上之任一點.

[求證]　　$AB\neq AC.$

[證] $BD=CD,\ AD=AD$, 但 $\angle ADB\neq\angle ADC.\ \therefore\ AB\neq AC.$



習題 5



習題 6

習題 5. AD 爲 $\angle BAC$ 之平分線,又 $AB=AC$, 求證 $PC>PB$.

[證] 連結 PA. $\angle BAD=\angle CAD$, 但 $\angle BAD=\angle BAP+\angle PAD$. 故 $\angle BAD>\angle BAP$. 卽 $\angle DAC>\angle BAP$. 但 $\angle PAC>\angle DAC$.

$$\therefore\ \angle PAC>\angle BAP,\qquad \therefore\ PC>PB.$$

習題 6. BC 與 $B'C'$ 各爲等腰三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 之底,若

$AB=A'C'$, 又 $\angle B>\angle B'$, 則二 $\triangle$ 何者之底較大?

［證］ $\angle B=\angle C$, $\angle B'=\angle C'$. 但 $\angle B>\angle B'$,

$$\therefore\ \angle C>\angle C'.\qquad \therefore \angle A<\angle A',$$

又 $$BC<B'C'\ (132).$$

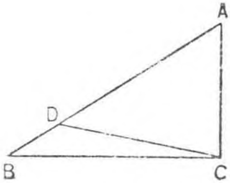
習題 7. 求證命題 XXXII, 若點 C' 落於三角形 ABC 內時.

［解］ 證法與課本第 71 頁完全相同.

習題 8. 在三角形 BCA 內, $AC\perp BC$,

又 $$AD=BC,$$

求證 $$AB>DC.$$

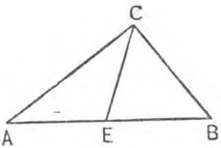


習題 8

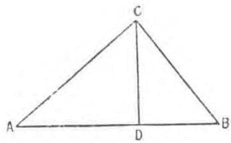
［證］ $AD=BC$. $\angle A<\angle C$, $AC=AC$.

$$\therefore\ AB>DC\ (132).$$

第 74 頁 § 133



習題 1



習題 2

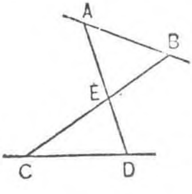
習題 1. 在 $\triangle ABC$ 內,若 $AC>BC$, 作中線 CE, 則 $\angle AEC$ 爲一鈍角.

［證］ $CE=CE$, $AE=BE$, 但 $AC>BC$, $\therefore\ \angle AEC>\angle BEC$ (133). 卽 $\angle AEC$ 爲一鈍角.

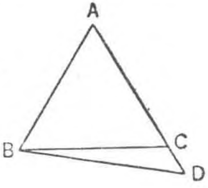
習題 2. 已知 $\triangle AEC$, 其 $\angle A=\angle B$. 若於 AB 上取一點 D, 使 $AD>DB$, 則 $\angle ACD>\angle DCB$.

［證］ $\angle A=\angle B$, 則 $AC=CB$. 又 $CD=CD$, $AD>DB$.

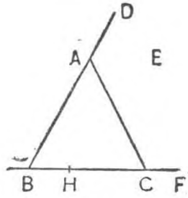
$$\therefore\ \angle ACD>\angle DCB\ (133).$$



習題 3



習題 4



習題 5

習題 3. 若 AD 與 BC 相交於 E, 求證 $AD+BC>AB+CD$. (須用上述三命題中之何者證之?)

［解］ 用命題 XXIX 證之。

［證］ $$AE+EB>AB,\ CE+ED>CD.$$

$$\therefore\quad AE+EB+CE+ED>AB+CD.$$

即 $$AD+BC>AB+CD.$$

習題 4. 若延長等邊三角形之一邊 AC 至 D, 連結 BD, 則

$$AD>BD>AB.$$

［證］ $\angle A=60°$, $\angle ABD>60°$, 由是 $\angle D<60°$ (88).

$$\therefore\quad AD>BD>AB.$$

習題 5. 若 $AB=AC$, 求證

(a) $BD>DC$.　　(c) $AF>AB$.

(b) $BE>EC$.　　(d) $AB>AH$.

［證］ (a) 連 DC. $\angle B=\angle BCA$, $\angle BCA<\angle BCD$, 故

$$\angle B<\angle BCD.\quad \therefore\quad BD>DC.$$

(b) 作 BE 及 EC. $\angle ABC>\angle EBC$　$\angle ABC=\angle BCA$,

$$\angle BCA<\angle BCE.\quad \therefore\quad \angle BCE>\angle EBC.$$

故 $$BE>EC.$$

(c) 作 AF. $\angle B=\angle BCA$, $\angle BCA>\angle BFA$,

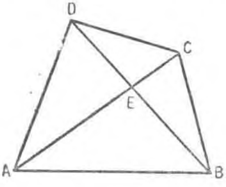
$$\therefore\quad \angle B>\angle BFA.$$

故 $AF > AB.$

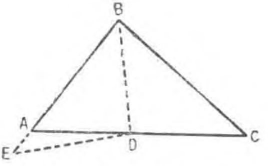
(d) 作 AH. $\angle AHC > \angle B, \angle B = \angle BCA,$

$\therefore \quad \angle AHC > \angle BCA.$

故 $AC > AH$. 卽 $AB > AH$.



習題 6



習題 7

習題 6. 任何四邊形二對角線之和必小於其周,而大於其半周.

［已知］ AC, BD 為四邊形 $ABCD$ 之二對角線.

［求證］ (a) $AC + BD < AB + BC + CD + DA.$

(b) $AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$

［證］ (a) $AC < AB + BC,\ AC < AD + DC$ (128),

$BD < BC + CD,\ BD < AB + AD.$

$2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA)$ (不等量相加仍不等).

$\therefore \quad AC + BD < AB + BC + CD + DA$ (不等量之半仍不等).

(b) 命 AC, BD 相交於 E.

$AE + EB > AB,\ BE + CE > BC$ (128),

$CE + ED > CD,\ DE + EA > DA.$

$2(AE + EB + EC + ED) > AB + BC + CD + DA.$ 同 (a), 2.

$2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$ (公理 12).

$\therefore \quad AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$ 同 (a), 3.

習題 7. 在 $\triangle ABC$ 內,若 $AB < BC$, 作角 B 之平分線 BD, 交 AC 於 D, 則 $AD < DC$.

［證］ 引長 BA 至 E, 使 $BE = BC$. 作 ED.

因　$BD=BD,\ \angle ABD=\angle CBD,\ BE=BC,$

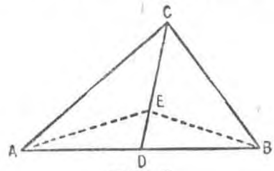
$\therefore\ \triangle BDE\cong\triangle BDC\ (s.\,a.\,s.).\qquad \therefore\ ED=DC,\ \angle E=\angle C.$

但　$\angle DAE>\angle C$ (88).

$\therefore\ \angle DAE>\angle E.\qquad \therefore\ DE>DA.$

即　$DC>AD.$

習題 8. 在 $\triangle ABC$ 內,若 $AC>BC$, 作中線 CD, 則 CD 上之任一點 E, 距 B 較距 A 爲近.



習題 8

［證］　$AD=BD,\ CD=CD,$

而　$AC>BC,$

$\therefore\ \angle ADC>\angle CDB$ (133).

$\therefore\ AE>BE$ (132).

第 75 頁　§ 135

習題 1. 試述命題 XXXIV 之逆定理,並證明之.

［解］ 若自已知直線之垂線上一點,作此直線之二斜線,其斜線長者距垂足較遠.

［已知］ PF 爲已知直線 AB 之垂線(用命題 XXXIV 之圖), PC 及 PD 爲引至 AB 上之二斜線,且 $PC>PD$.

［求證］　$CF>FD.$

［證］ $CF=FD$, 或 $CF>FD$, 或 $CF<FD$ (可能之假設祇此三種).

若 $CF=FD$, 則 $PC=PD$ (125). 此事爲不可能 (由假設, $PC>PD$).

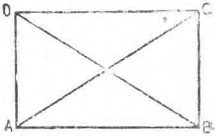
若 $CF<FD$, 則 $PC<PD$ (135). 此事爲不可能 (由假設. $PC>PD$).

$\therefore\ CF>FD$ (其他二假設已證明不確).

習題 2. 求證自已知直線外一點僅能作二相等之斜線至此直線.

［證］ 用命題 XXXIV 之圖. 自已知點 P 至已知直線 AB, 若能作三條相等之斜線,如 PC, PD, PH, 則 $CF=DF=HF$ (習題 1). 此事爲不可能. 故僅能作相等之二斜線.

第 77 頁 § 142



習題 1

習題 1. 矩形之對角線相等.

[已知] $ABCD$ 爲一矩形, AC 及 BD 爲其對角線.

[求證] $AC=BD.$

[證] 在直角 $\triangle$s ABC 及 ABD 內,

$$AB=AB,\ AD=BC,\ \angle A=\angle B=\text{直角}.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle ABD\ (s.\ a.\ s.)$$

$$\therefore\quad AC=BD.$$

習題 2. 若平行四邊形之二對角線相等,則此形爲一矩形.

用前題之圖.設 $ABCD$ 爲已知之平行四邊形,而 $AC=BD.$

[證] $AC=BD,\ AB=AB,\ AD=BC$, 則 $\triangle ABC\cong\triangle ABD$ $(s.\ s.\ s.)$

$$\therefore\quad \angle DAB=\angle CBA.$$

$$\angle DAB+\angle CBA=180^\circ\ (107)$$

$$\therefore\quad \angle DAB=\angle CBA=90^\circ.\qquad \therefore\quad ABCD\text{爲一矩形}.$$

習題 3. 自平行四邊形相對二頂點作對角線之垂線必相等.

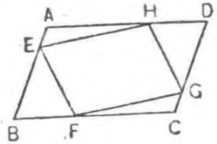
用第 34 頁,習題 8 之圖.

[證] $DC=AB$, 又 $\angle 3=\angle 4$. $\therefore$ 直角 $\triangle DFC\cong$ 直角 $\triangle AEB$ (弦及一銳角). $\therefore\quad CF=AE.$

第 78 頁 § 143

習題 1. 若 $ABCD$ 爲一平行四邊形,而 $AE=CG$, 又 $BF=DH$, 則 $EFGH$ 爲一平行四邊形.

[證] $AD=BC,\ DH=BF,\ \therefore\ AH=CF.$



習題 1

又　　$AE=CG,\ \angle A=\angle C.$

$\therefore$　$\triangle AEH \cong \triangle FCG$ (s. a. s.)

又　　$AB=DC,\ AE=CG,$

$\therefore$　$EB=DG.$

又　　$BF=DH,\ \angle B=\angle D.$

$\therefore$　$\triangle EBF \cong \triangle DHG$ (s. a. s).

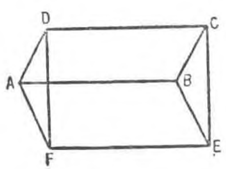
$\therefore$　$EH=FG$, 及 $EF=HG$.

$\therefore$　$EFGH$ 爲一平行四邊形 (143).

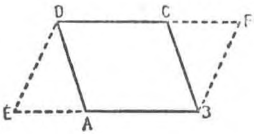
習題 2. 順次連結平行四邊形中點之直線,亦成一平行四邊形.

〔**解**〕 證法及圖與習題 1 相似.茲略之.

第 79 頁　　§ 144



習題 1



習題 2

習題 1. 於 AB 之二側各作平行四邊形 $ABCD$ 與 $ABEF$, 則 $CDFE$ 亦爲一平行四邊形.

〔證〕 $CD /\!/ FE$ (92), $CD=FE$ (公理 1). $\therefore$ $CDFE$ 爲一平行四邊形 (144).

習題 2. 將平行四邊形之二對邊,向反對方向延長至同一長度,並將各端與最近之頂點連結,則必成另一平行四邊形.

〔**已知**〕 $ABCD$ 爲一平行四邊形,將 BA 引長至 E, 使 $AE=BA$; 又將 DC 引長至 F. 使 $CF=DC$. 連 ED 及 BF.

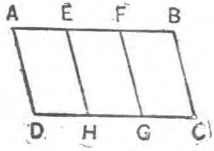
〔**求證**〕 $EBFD$ 爲一平行四邊形.

［證］ $AB=CD$ (139). $AE=CF$. $AB+AE=CD+CF$ (公理 2).

$\therefore$ $BE=DF$ (公理 12). $BE \mathbin{/\mkern-5mu/} DF$.

$\therefore$ $EBFD$ 爲一平行四邊形 (144).

習題 3. 若將平行四邊形二對邊各分爲三等分，順次連結其各分點，則此連結線必相平行.



習題 3

［已知］ E, F 及 H, G 各爲平行四邊形相對二邊 AB 及 CD 之三等分點. 連 EH 及 FG.

［求證］ $EH \mathbin{/\mkern-5mu/} FG$.

［證］ $EF \mathbin{/\mkern-5mu/} HG$.

$EF=HG$ (各等於▱對邊之 $\frac{1}{3}$).

$\therefore$ $EFGH$爲一平行四邊形 (144). $\therefore$ $EH \mathbin{/\mkern-5mu/} FG$.

第 80 頁 § 146

習題 1. 若四邊形之對角線互相平分，則此形爲一平行四邊形.(命題 38 之逆定理).

用命題 38 之圖.

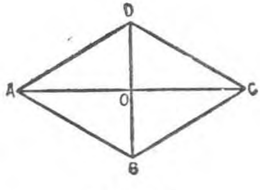
［證］ $AO=CO$, $BO=DO$, $\angle AOD=\angle BOC$,

$\therefore$ $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ (s. a. s.).

於是 $AD=BC$. 又 $\angle 1=\angle 4$. $\therefore$ $AD \mathbin{/\mkern-5mu/} BC$.

$\therefore$ $ABCD$ 爲一▱ (144).

習題 2. 菱形之對角線互相垂直.



習題 2

［已知］ $ABCD$ 爲一菱形，其對角線 AC 及 BD 相交於 O.

［求證］ $BD \perp AC$.

［證］ $AD=DC$, $AB=BC$. $\therefore$ BD 爲 AC 之中垂線 (79), 卽 $BD \perp AC$ 於其中點 O.

習題 3. 若平行四邊形之對角線互相垂直，則此形爲一菱形.

用前題之圖.

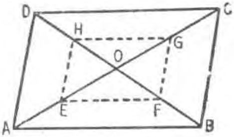
［已知］ 平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 BD 與 AC 互相垂直.

［求證］ $ABCD$ 爲一菱形.

［證］ $BD \perp AC$, 又 BD 與 AC 互相平分 (146). 故 BD 上之任一點與 AC 之兩端等距離, 即 $AD=CD$, $AB=CB$ (125).

同理可證 $AD=AB$, $CD=CB$. $\therefore$ $ABCD$ 爲一菱形.

習題 4. 若將平行四邊形二對角線之半, 逐一平分之, 而順次連結其中點, 必成另一平行四邊形.



習題 4

［已知］ AC 及 BD 爲平行四邊形 $ABCD$ 之對角線, 相交於 O. E, F, G, H 各爲 AO, BO, CO, DO 之中點. 連 EF, FG, GH, 及 HE.

［求證］ $EFGH$ 爲一平行四邊形.

［證］ $AO=CO$, $BO=DO$ (146). 由是 $EO=GO$, $FO=HO$ (公理 8).

$\therefore$ $FFGH$ 爲一 $\square$ (習題 1).

習題 5. 若平行四邊形之一對角線平分其一角, 則此形爲一菱形.

用習題 2 之圖. 已知平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 BD 平分 $\angle B$.

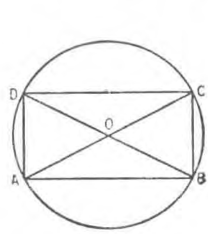
［求證］ $AECD$ 爲一菱形.

［證］ $$\angle ABD=\angle DBC,\quad \angle DBC=\angle BDA,$$

$$\therefore\quad \angle ABD=\angle BDA,\qquad \therefore\quad AB=AD.$$

但平行四邊形之對邊皆相等, 故 $AB=DC=AD=BC$. 因此形等邊, 故爲一菱形.

習題 6. 將圓內二直徑之端順次連結之, 必成一矩形.



習題 6

［已知］ 直徑 AC 交 BD 於 O. 連 AB, EC, CD, 及 DA.

［求證］ $AECD$ 爲一矩形.

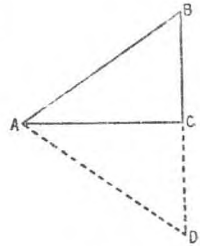
［證］ AC, BD 爲四邊形之二對角線, 互相平分

於 O, 故此四邊形爲一平行四邊形(習題 1). 又因 $AC=BD$, 故此平行四邊形爲一矩形(第 77 頁,習題 2).

第 83 頁　　§ 152

習題 1. 若三角形之二角各爲 $30°$ 及 $60°$, 則對 $30°$ 角之邊爲此二角所夾之邊之半.

[已知] 一角爲 $30°$, 一角爲 $60°$, 故第三角爲 $90°$. 設 ABC 爲直角三角形, $\angle BAC=30°$, $\angle B=60°$, 而 $\angle C$ 爲直角.



習題 1

[求證] $BC=\frac{1}{2}AB$.

[證] 延長 BC 至 D, 使 $CD=BC$. 連 AD.

因 $AC=AC$, $BC=CD$,

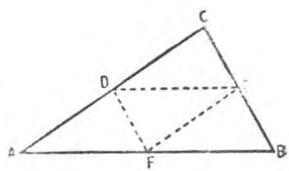
$\angle ACB=\angle ACD=$ 直角.

$\therefore\quad \triangle BCA\cong\triangle DCA$ ($s.a.s.$).

$\angle BAC=30°=\angle DAC$, $\quad\therefore\quad \angle BAD=60°$.

又 $\angle D=60°$. 故 ABD 爲一等邊三角形. 於是 $AB=BD=2BC$, 卽 $BC=\frac{1}{2}AB$. (另一證法可參看課本第 92 頁,命題 49).

習題 2. 在三角形 ABC 內,若過 AC 之中點 D 作直線 DE 平行於 AB, 又 E 在 CB 上,則 DE 爲 AB 之半.



習題 2

[證] $DE \parallel AB$,

則 E 爲 CB 之中點 (149). 過 D 及 E 順次作 $DF\parallel CB$, $EF\parallel AD$. 此 DF 及 CF 二直線必相遇於 AB 之中點 F (149).

但 $DE=AF$ (139), $\therefore\ DE=\frac{1}{2}AB$.

習題 3. 等腰三角形之底與一腰上之高所成之角等於頂角之半.

[已知] BD 爲等腰 $\triangle ABC$ 一腰 AC 上之高,又 AE 爲頂角 A 之平

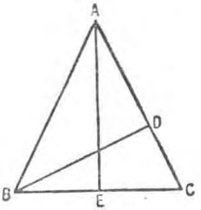
分線.

［求證］　$\angle DBC=\angle CAE$.

［證］　$AE\perp BC$ (72).

$\angle CBD$ 爲 $\angle C$ 之餘角 (112).　$\angle CAE$ 亦爲 $\angle C$ 之餘角 (112).

$$\therefore\quad \angle CBD=\angle CAE.$$



習題 3

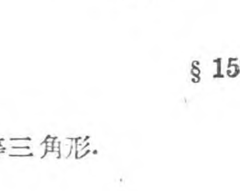
第 84—85 頁　§ 153

習題 1.　連結三角形三邊之中點,則成四個全等三角形.

用第 83 頁,習題 2 之圖.

［證］　$DF /\!/ EB$, $DF=\frac{1}{2}BC=BE$. $\therefore$ $DFBE$ 爲一平行四邊形 (144). 由是 $\triangle DFE\cong\triangle BFE$ (140).　同樣 $ADEF$ 及 $CDFE$ 亦皆爲平行四邊形 (153, 144), 故 $\triangle ADF\cong\triangle DFE\cong\triangle CDE$.

習題 2.　連結四邊形相鄰二邊中點之直線, 與連結其他二邊中點之直線必相等而且平行.



習題 2

［已知］　$ABCD$ 爲一四邊形, H, E, F, G 順次爲 AB, EC, CD, DA 之中點.　連 HE 及 GF.

［求證］　HE 與 GF 相等而且平行.

［證］　作對角線 AC. $GF /\!/ AC$ 且 $GF=\frac{1}{2}AC$. $HE=AC$, 且 $HE=\frac{1}{2}AC$.

$$\therefore\quad HE=GF,\ 又\ HE /\!/ GF.$$

習題 3.　梯形之中線必平行於其底,且等於兩底之和之半.

［證］　詳見課本第 85 頁,茲不贅.

習題 4.　等腰三角形兩腰之中點各與底邊中點連結之,成一菱形.

用第 83 頁,習題 2 相類之圖形.

［已知］　$\triangle ABC$, 而 $AC=BC$. D 爲 AC 之中點, E 爲 BC 之中點, F

爲 AB 之中點．連 DF 及 FE.

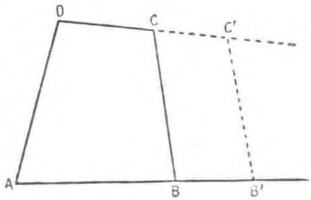
［求證］ $CDFE$ 爲一菱形.

［證］ $DF=\frac{1}{2}BC$, $EF=\frac{1}{2}AC$(153). 但 $CD=CE$ (等腰 △ 兩腰之半)

故 $DF=CE=CD=EF$, 而 $CDFE$ 爲一菱形.

習題 5. 作二互相等角而不互相等邊之四邊形.

［已知］ $ABCD$ 爲任一四邊形.



習題 5

［作圖］ 延長 AB 及 DC. 作 $B'C' \parallel BC$, 並交 AB 於 B', 交 DC 於 C'. 則 $ABC'D$ 卽爲所求之四邊形.

習題 6 作二互相等邊而不互相等角之四邊形.

［作圖］ 先作一正方形. 次作一菱形, 其邊與正方形之邊等長, 並使其一角等於 $60°$ 卽得. 圖從略.

第 86 頁　　§ 157

習題 1. 若一多邊形諸角之和爲 1000 平角, 則此多邊形爲幾邊? 200 直角爲幾邊? 24 直角爲幾邊? 720° 爲幾邊?

［解］ (a) $(n-2)$ 平角 $=1000$ 平角. $\therefore n-2=1000$, 而 $n=1002$.

(b) $n-2=100$, $\therefore n=102$.

(c) $n-2=12$, $\therefore n=14$.

(d) $n-2=4$, $\therefore n=6$.

習題 2. 等角四邊形之每一角爲幾度? 五邊形爲幾度? 六邊形爲幾度? 十邊形爲幾度?

［解］ (a) 四邊形每一角 $=\frac{4-2}{4}\times 180°=90°$.

(b) 五邊形每一角 $=\frac{5-2}{5}\times 180°=108°$.

(c)　六邊形每一角$=\frac{6-2}{6}\times 180^\circ=120^\circ$.

(d)　十邊形每一角$=\frac{10-2}{10}\times 180^\circ=144^\circ$.

第 87 頁　§ 159

習題 1. 等角 10 邊形之每一外角爲幾度? 9 邊者幾度? 36 邊者幾度? 72 邊者幾度?

［解］　(a)　10 邊形之每一外角 $\frac{2}{10}\times 180^\circ=36^\circ$.

(b)　9 邊形之每一外角 $\frac{2}{9}\times 180^\circ=40^\circ$.

(c)　36 邊形之每一外角 $\frac{2}{36}\times 180^\circ=10^\circ$.

(d)　72 邊形之每一外角 $\frac{2}{72}\times 180^\circ=5^\circ$.

習題 2. 每一外角爲 30° 之多邊形當爲幾邊?直角者爲幾邊? 60° 者爲幾邊? 45° 者爲幾邊?

［解］　(a)　$n=\frac{360}{30}=12$.　　(b)　$n=4$.

(c)　$n=6$.　　(d)　$n=8$.

習題 3 每一內角爲 160° 之多邊形當爲幾邊? 179° 者爲幾邊? 135° 者爲幾邊? $\frac{4}{3}$ 直角者爲幾邊?

［解］　(a)　$\frac{n-2}{n}\times 180=160$, 解之得 $n=18$.

(b)　$\frac{n-2}{n}\times 180=179$, 解之得 $n=360$.

(c)　$\frac{n-2}{n}\times 180=135$, 解之得 $n=8$.

(d)　$\frac{n-2}{n}\times 180=\frac{4}{3}\times 90$, 解之得 $n=6$.

習題 4. 一等角多邊形三外角之和等於 90°, 問此多邊形爲幾邊?若其和等於 $\frac{3}{4}$ 直角,則爲幾邊?

[解] (a) $3\times\dfrac{360}{n}=90,\quad \therefore\quad n=12.$

(b) $3\times\dfrac{2\times 2}{n}=\dfrac{3}{4},\quad \therefore\quad n=16.$

習題 5. 一多邊形內角之和二倍於其外角之和,問此爲幾邊形?

[解] 設邊數爲 n 則內角之和爲 $(n-2)$ 平角,外角之和爲 2 平角.

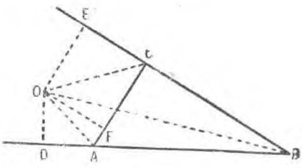
故得 $$n-2=2\times 2\quad \therefore\quad n=6.$$

第 88 頁 § 161

習題 1. 用作圖法求與三角形三邊等距離之一點.

[作圖] 平分已知三角形之二角,其平分線之交點,卽爲所求之點.圖與命題 45 同.

習題 2. 求證三角形二外角之平分線與第三內角之平分線必相交於一點.



習題 2

[已知] OA 及 OC 爲 $\triangle ABC$ 二外角之平分線, OB 爲第三內角之平分線

[求證] OA, OC 與 OB 相交於一點.

[證] 因 OA 及 OC 不成平行,故必相交於一點,如 O (107).

自 O 作 $OD\perp BA$ 之延長線, $OE\perp BC$ 之延長線, $OF\perp OC$.

則 $$OD=OF\ (126).\quad OE=OF\ (126).$$

$$\therefore\quad OD=OE\ (公理\ 1).$$

故 O 在 $\angle B$ 平分線或其延長線上 (127). 卽 OA, OB, OC 相交於一點.

習題 3. 求作一點與平行四邊形 $ABCD$ 之三邊 AB, BC, CD 等距

［作圖］ 祇須平分 $\angle B$ 及 $\angle C$. 此二平分線之交點,卽所求之點.

第 89 頁　§ 162

習題 1. 求作與四邊形三頂點等距離之一點 O.

［解］ 任作一四邊形,求其任意相鄰二邊之中垂線,使相交於一點 O,卽爲所求之點.

習題 2. 求作一圓經過一已知三角形之三頂點.

［解］ 作三角形任意相鄰二邊之中垂線,使相交於一點 O. 再以 O 爲圓心,取 O 至任一頂點之距離爲半徑作圓,卽得所求之圓.

證法同 § 162, 玆不贅.

習題 3. 求證經過三角形三頂點之圓僅能有一

用命題 46 之圖.

［證］ LG 與 EH 之交點僅能有一,故圓心僅有一點,而通過三頂點之圓亦僅能有一.

習題 4. 求證等邊三角形外接圓之圓心,必在各角之平分線上.

［證］ 等邊三角形每角之平分線爲其對邊之中垂線 (72). 三中垂線必相交於一點, 此點與二頂點等距離 (162). 故外接圓心在各角之平分線上.

第 92 頁　§ 165

習題 1. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle A=60°$, $\angle B=30°$, 又 $AB=12$吋, 求 AC 之長.

［解］ $AC=\frac{1}{2}AB=6$ 吋 (165).

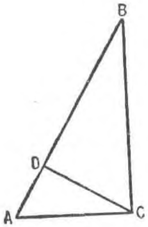
習題 2. 在 $\triangle ABC$ 內, $AB=10$ 吋, $\angle A=60°$, $\angle C=90°$. 又 CD 爲 AB 上之高,求 AD 之長.

［解］ $\angle A=60°$, $\angle C=90°$, $\therefore$ $\angle B=30°$.

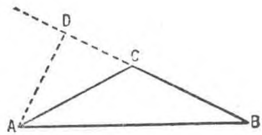
由是 $AC=\frac{1}{2}AB=5$ 吋 (165).

在 $\triangle ADC$ 內, $\angle ADC=90°$, $\angle A=60°$, $\therefore$ $\angle ACD=30°$.

由是 $AD=\frac{1}{2}AC=2.5$ 吋 (165).



習題 2



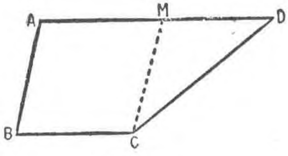
習題 3

習題 3. 等腰三角形 ABC 之底角 A 與 B 各為 $15°$, 又 $BC=8$ 吋,求高 AD 之長.

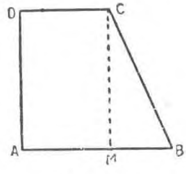
［解］ AD 落於 BC 之延長線上.

$\angle ACD=\angle CAB+\angle B=30°$, $\angle D=$直角, $\therefore$ $\angle CAD=60°$.

由是 $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC=4$ 吋.



習題 4



習題 5

習題 4. 在四邊形 $ABCD$ 內, $AB=BC=6$ 吋, $\angle A$ 為 $120°$, $\angle B$ 為 $60°$, 又 $\angle C$ 為 $150°$, 求 AD 之長.

［解］ 因 $\angle A=120°$, $\angle B=60°$, $\angle C=150°$, $\therefore$ $\angle D=30°$.

$\angle A+\angle B=180°$, $\therefore$ $AD /\!/ BC$ (97). 作 $CM /\!/ AB$. 則 $ABCM$ 為一平行四邊形. $\therefore$ $\angle BCM=120°$, $\angle MCD=30°$. 由是 $MC=MD$.

但 $MC=AB=BC=6$ 吋, 故 $AD=AM+MD=6+6=12$ 吋.

習題 5. 梯形 $ABCD$ 之上底 DC 等於 14 吋,又 $AB=BC$. 若 $\angle A$ 為 90°, 又 $\angle B$ 為 60°, 求 AB 之長.

[解] 作 $CM\perp AB$. 則 $AM=DC=14$ 吋. 設 $AB=BC=x$, 則 $MB=\frac{1}{2}x$ (因 $\angle B=60^\circ$, $\angle BMC=90^\circ$, $\angle BCM=30^\circ$).

又 $AB-MB=DC$, 即 $x-\dfrac{x}{2}=14$, 故 $x=28$ 吋.

第 94 頁　§ 167

習題 1. 試用 2(*b*) 之方法證上之命題.

[證] 用 § 167 之圖. $AD=CB$, $\angle A=\angle C$,

$$\angle ADE=\tfrac{1}{2}\angle D=\tfrac{1}{2}\angle B=\angle FBC.$$

$$\therefore\quad \triangle ADE\cong\triangle BFC\ (a.\,s\ a.),\ \text{而}\ AE=FC.$$

因 $$AB=DC,\quad \therefore\quad EB=DF.$$

但 $DF \parallel EB$, $\therefore$ $DFBE$ 為一平行四邊形. $\therefore$ $DE\parallel FB$.

習題 2. 試用 1(*b*) 之方法證上之命題.

[證] 用 § 167 之圖. 作 DB. $\angle ADB=\angle DBC$.

$$\angle ADE=\angle CBF\ (\text{公理 } 8).$$

$$\therefore\quad \angle EDB=\angle DBF\ (\text{公理 } 3),\quad \therefore\quad DE\parallel FB.$$

習題 3. 試用 1(*c*) 之方法證上之命題.

[證] 用 § 167 之圖. $\angle ADC=\angle ABC$, $\angle ADE=\angle ABF$.

$$\angle CDE=\angle ADE=\angle AED\ (104).$$

$$\therefore\quad \angle AED=\angle ABF.\quad DE\parallel FB.$$

第 96 頁　§ 169

習題 1. 延長等腰三角形底邊所成之外角等於 90° 加頂角之半.

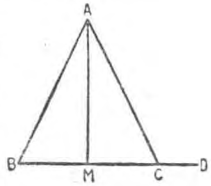
[已知] $\angle A$ 為等腰三角形之頂角. $\angle ACD$ 為已知之外角.

［求證］ $\angle ACD=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$

［證］ 作頂角之平分線 AM, 交底邊 BC 於 M. 則

$$\angle AMC=90^\circ\ (72).$$

$\therefore\quad \angle ACD=\angle AMC+\angle CAM=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\ (120).$



習題 1

習題 2. 延長直角三角形斜邊所成二外角之和等於 270°.

［證］ 設直角三角形 ABC 之 $\angle C=90^\circ$.

其一外角 $=90^\circ+\angle A$. 另一外角 $=90^\circ+\angle B$.

故二外角之和 $=180^\circ+\angle A+\angle B=180^\circ+90^\circ=270^\circ$.

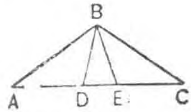
習題 3. 於等腰 $\triangle AEC$ 之底邊 AC 上,取二點 D 及 E, 使 $AE=AB$, 又 $CD=BC$, 求證 $\angle DBE=\angle A$.

［證］ $\angle A=\angle C$, $\angle ABE=\angle AEB$,

及 $\angle CBD=\angle CDB\ (71)$. $\therefore\quad \angle ABE=\angle CDB$.

$$\angle ABE=\angle ABD+\angle DBE,$$

及 $\quad \angle CDB=\angle A+\angle ABD\ (120)$. $\therefore\quad \angle DBE=\angle A$.



習題 3

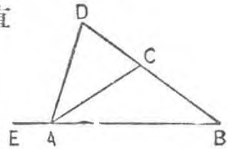
習題 4 若 $AD=AC=CB$, 又 DB 與 EB 皆爲直線,則 $\angle EAD=3\angle B$.

［證］ $\angle EAD=\angle D+\angle B$.

$\angle D=\angle DCA$. $\angle CAB=\angle B$.

$\angle DCA=\angle CAB+\angle B=2\angle B\ (120)$.

$\therefore\quad \angle EAD=2\angle B+\angle B=3\angle B$.



習題 4

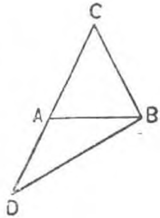
習題 5. 延長等腰 $\triangle ABC$ 之一腰 CA, 使 AD 等於底邊 AB, 則 $\angle C=180^\circ-4\angle D$.

［證］ $\angle C=180^\circ-\angle CAB-\angle CBA$.

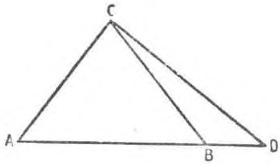
但 $\angle CAB=\angle CBA$. $\therefore\quad \angle C=180^\circ-2\angle CAB$.

$\angle D=\angle ABD$. $\angle CAB=\angle D+\angle ABD=2\angle D$.

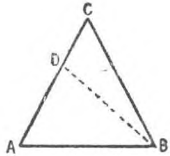
$\therefore\quad \angle C=180^\circ-2\times 2\angle D=4\angle D$.



習題 5



習題 6



習題 7

習題 6.　延長等腰 $\triangle ABC$ 之底邊 AB 至 D, 並作 CD, 則

$$\angle ECD=\angle A-\angle D.$$

［證］　$\angle ABC=\angle D+\angle BCD$ (120).　$\therefore$　$\angle BCD=\angle ABC-\angle D.$

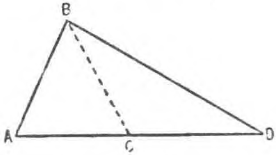
$$\angle ABC=\angle A.\quad\therefore\quad\angle BCD=\angle A-\angle D.$$

習題 7.　若於等腰 $\triangle ABC$ 內,將底邊　B 之一端 B 與其對腰上一點 D 相連結, 則 $\angle A=\frac{1}{2}(\angle CDB+\angle CBD)$.

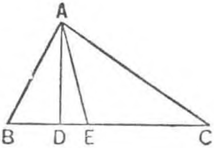
［證］　$\angle C+\angle A+\angle CBA=\angle C+\angle CDB+\angle CBD$ (110).

但 $\angle CBA=\angle A.$　$\therefore$　$2\angle A=\angle CDB+\angle CBD,$

卽
$$\angle A=\tfrac{1}{2}(\angle CDB+\angle CBD).$$



習題 8



習題 9

習題 8.　延長三角形 ABC 之一邊 AC 至 D, 使 $CD=CB$, 則

$$\angle ABD=90^\circ+\tfrac{1}{2}(\angle ABC-\angle A).$$

［證］　$\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=\angle ABC+\angle D.$

$\angle BCA=\angle CBD+\angle D=2\angle D$ (120).　$\angle D=\frac{1}{2}\angle BCA.$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle ABD&=\angle ABC+\tfrac{1}{2}\angle BCA\\&=\angle ABC+\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC-\angle A)\\&=\angle ABC+90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle ABC-\tfrac{1}{2}\angle A\\&=90^\circ+\tfrac{1}{2}(\angle ABC-\tfrac{1}{2}\angle A).\end{aligned}$$

習題 9. 若 AD 爲三角形 ABC 之高，AE 爲頂角 BAC 之平分線，求證 $\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

［證］ $$\angle B+\angle BAD=\angle C+\angle CAD\ (112).$$

$$\angle B+\angle BAE-\angle DAE=\angle C+\angle CAE+\angle DAE.$$

但 $\angle BAE=\angle CAE.\quad\therefore\quad\angle B-\angle C=2\angle DAE,$

卽 $$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C).$$

習題 10. 自四邊形三角之和減第四角之外角，等於一平角.

［證］ $$\angle A+\angle B+\angle C-(180-\angle D)=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D-180^\circ$$
$$=360^\circ-180^\circ=180^\circ.$$

第 97—101 頁　§ 170

雜　題

習題 1. 在 11 點 12 分時，時鐘二針間之角度如何？在 6 點 30 分時如何？在 8 點 45 分時如何？

［解］ (a) 時鐘 1 分相當於 6°. 長針走 12 分適爲圓周 $\frac{1}{5}$，卽短針走 1 分之距離. 故在 11 點 12 分時，二針間角度爲 $12\times6+(5-1)\times6=96^\circ$.

(b) 長針在 6 點 30 分. 短針應在 6 點 32.5 分. 故二針間角度爲 15°.

(c) 長針在 8 點 45 分，短針應在 8 點 $3\frac{9}{12}$ 分. 故二針間角度爲 7.5°.

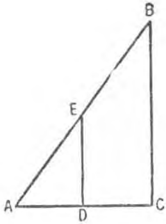
習題 2. 等腰三角形之頂角爲 18°44′，問每一底角爲幾度？

［解］ 每一底角 $=\frac{1}{2}(180^\circ-18^\circ44')=80^\circ38'$.

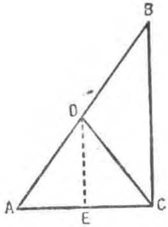
習題 3. 一等角多邊形之外角等於五分之一直角，求此多邊形之邊數.

［解］ 諸外角之和等於四直角. 因諸角相等，諸外角亦等.

$$\therefore\quad 4\div\frac{1}{5}=20\text{ 邊}.$$



習題 4



習題 5

習題 4. **求證:** 在直角三角形任一直角邊中點所作之垂線,必通過斜邊之中點.

［已知］ DE 爲直角三角形 ABC 一直角邊 AC 中點 D 所作之垂線,交斜邊 AB 於 E.

［求證］ E 爲 AB 之中點.

［證］ $\angle ADE=\angle C=$直角,則 $ED \mathbin{/\!/} BC$ (96).

$\therefore$ ED 必平分 AB (149). 故 E 爲 AB 之中點.

習題 5. **求證:** 在任何直角三角形內,斜邊上之中線等於斜邊之半.(應用習題 4)

［已知］ 一直角三角形 ABC, $\angle C$ 爲直角, CD 爲斜邊 AB 之中線.

［求證］ $CD=\frac{1}{2}AB$.

［證］ 作 AC 之中垂線 DE, 此線必過 AB 之中點 D (習題 4)

$\therefore$ $AD=DC$ (125). 因 $AD=\frac{1}{2}AB$, $\therefore$ $DC=\frac{1}{2}AB$.

習題 6. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle A=60°$, $\angle B>\angle C$, 則何邊爲最大?

［解］ $\angle A=60°$, 則 $\angle B+\angle C=120°$. 因 $\angle B>\angle C$, 故 $\angle B>60°$, $\angle C<60°$. 於是邊 AC 爲最大.

習題 7. 作一四邊形,已知其三角爲 150°, 90°, 及 60°.

［作圖］ 在一直線 AB 之兩端分別作 90° 角及 60° 角.再作一直線使與前作二線中之任一線成 150° 角,將此線延長與另一線相交卽得.

習題 8. 等腰三角形之特性如何? 等邊三角形如何? 菱形如何?

矩形如何？　正方形如何？

［解］ (a)　參看第 29 頁習題 38, 第 30 頁 §§ 71, 72, 第 33 頁習題 1, 第 35 頁習題 21, 第 60 頁習題 15, 等.

(b)　參看第 30 頁 § 73, 第 59 頁 § 115, 第 63 頁習題 1, 等.

(c)　參看第 35 頁習題 20, 第 80 頁習題 2 及習題 5, 等.

(d)　參看第 77 頁習題 1, 等.

(e)　正方形對角線分正方形爲四個全等等腰直角 △, 等.

習題 9. 已知 $AB=3''$, $\angle A=60°$, $\angle B=45°$, 求作三角形 ABC. 再作自 A 至 BC 之高, 自 B 至 AC 之中線, 及 $\angle C$ 之平分線.

［作圖］ 作 $AB=3''$. 作 $\angle A=60°$, 又 $\angle B=45°$. 延長二角之外邊使相交於 C, 則 ABC 即爲所求之三角形. 圖從略.

再依 § 87, 自 A 作至 BC 之高; 依 § 81 作自 B 至 AC 之中線; 依 § 83 作 $\angle C$ 之平分線.

習題 10. 決定三角形之全等, 有幾種不同之證法？　角之相等如何？線之相等如何？　線之平行如何？　線之垂直如何？

［解］ (a)　證普通三角形全等: (a. s. a.), (s. a. s.), (s. a. a.), (s. s. s.). 證直角三角形全等: 兩直角邊相等, 弦及一直角邊, 弦及一銳角, 一直角邊及其所對之銳角, 一直角邊及相鄰之銳角.

(b)　相等公理, 平角, §§ 46, 48, 49, 53, 68, 70, 71, 73, 104, 106, 108, 109, 119, 139.

(c)　相等公理, §§ 37, 68, 70, 72, 79, 121, 122, 125, 126, 139, 141, 142, 146, 148, 149, 150, 153.

(d)　定義, §§ 90, 92, 93, 95, 96, 97, 136, 145, 153.

(e)　定義, §§ 30, 77, 79, 105, 137.

習題 11. 決定二直線不等之證法有幾？　二角不等之證法有幾？

［解］ (a)　公理 9, 11; §§ 128, 130, 131, 132, 135.

(b)　公理 9, 11; §§ 27, 28, 88, 101, 129, 133.

習題 12.　相補二鄰角之平分線互相垂直.

［解］　設相補二鄰角一為 m, 一為 n, 則 $m+n=180°$.

$$\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}n=\tfrac{1}{2}(m+n)=\tfrac{1}{2}180°=90°.$$

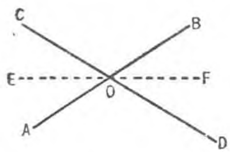
故其平分線互相垂直.

習題 13.　二鄰角之平分線若互相垂直,則其外邊成一直線.

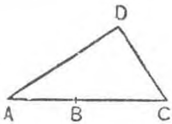
［解］　設二鄰角之一為 m, 他一為 n, 則 $\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}n=90°$.

$$\tfrac{1}{2}(m+n)=90°.\quad \therefore\quad m+n=180°=\text{平角}.$$

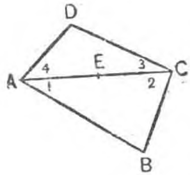
故二角相補,而其外邊成一直線.



習題 14



習題 15



習題 16

習題 14.　對頂角之平分線必在一直線上.

［已知］　AB 與 CD 相交於 O, 又 OE 平分 $\angle AOC$, OF 平分 $\angle BOD$.

［求證］　EO 及 OF 成一直線.

［證］　$\angle DOF=\angle COE$ (公理 8).

$$\angle EOA+\angle AOD+\angle DOF=\angle EOA+\angle AOD+\angle COE=180°.$$

$\therefore\ \angle EOF=180°$, 故 EO 及 OF 成一直線.

習題 15.　若 $\angle A+\angle C+\angle D=180°$, 則 ABC 為一直線.

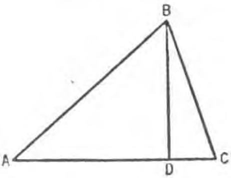
［證］　作 DB. $\angle A+\angle C+\angle ADB+\angle BDC+\angle ABD+\angle DBC=360°$.

$\therefore\ \angle ABD+\angle DBC=180°$ (公理 3).　$\therefore\ ABC$ 為一直線.

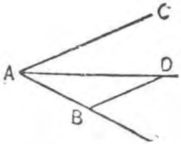
習題 16.　若 $\angle 1+\angle 2+\angle B=\angle 3+\angle 4+\angle D$, 則 AEC 為一直線.

［證］　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.　$\therefore\ \angle 3+\angle 4+\angle D=180°$,

$\therefore\ AEC$ 為一直線(習題 15).



習題 17



習題 18

習題 17. 直角三角形斜邊上之高，分原形爲互相等角之二三角形。

[已知] BD 爲直角三角形 ABC 斜邊 AC 上之高.

[求證] $\triangle ABD$ 各角與 $\triangle BDC$ 各角相等.

[證] $\angle ADB=\angle BDC=$直角. $\angle A$ 爲 $\angle ABD$ 之餘角，$\angle CBD$ 爲 $\angle ABD$ 之餘角，$\therefore$ $\angle A=\angle CBD$.

$\angle C$ 爲 $\angle CBD$ 之餘角，$\angle ABD$ 爲 $\angle CBD$ 之餘角，

$$\therefore \quad \angle C=\angle ABD.$$

故二三角形之各角互相等.

習題 18. 若過角 A 之平分線上之任一點 D，作一直線平行於其一邊，遇他一邊於 B，則 $AB=BD$.

[證] $\angle CAD=\angle BAD$. $\angle CAD=\angle ADB$ (104).

$$\therefore \quad \angle BAD=\angle ADB. \qquad \therefore \quad AB=BD \text{ (121)}.$$

習題 19. 若自一角之平分線上之一點，作二直線平行於此角之二邊，則成一菱形.

[證] 在前題之圖內，若作 $DE /\!/ AB$，交 AC 於 E，則 $ABDE$ 爲一平行四邊形. 因 $AB=ED$, $AB=BD$ (習題 18).

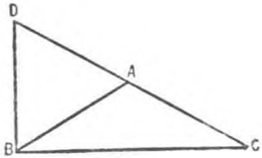
由是 $\therefore$ $AB=BD=ED=AE$. 故 $ABDE$ 爲一菱形.

習題 20. 若二等腰三角形之頂角互爲補角，則其底角互爲餘角.

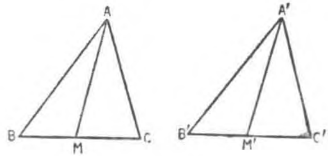
[證] 設二等腰三角形之頂角爲 A 及 A'，則其底角各等於

$$\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle A) \text{ 及 } \tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle A').$$

此二角之和爲 $\frac{1}{2}[360-(\angle A+\angle A')]=\frac{1}{2}180^\circ=90^\circ$.



習題 21



習題 22

習題 21. 若將等腰三角形之一腰過其頂點而延長之,使延長部分與原腰相等,則延長線末端與底邊近端之連結線必垂直於底邊.

[已知] ABC 為一等腰三角形,延長 CA 至 D, 使 $AD=AC$. 連 DB.

[求證] $DB\perp BC$.

[證] $\angle D+\angle C+\angle DBC=180°$. $AD=AC=AB$, 則 $\angle D=\angle DBA$ 及 $\angle C=\angle CBA$. $\angle D+\angle C=\angle DBA+\angle CBA=\angle DBC$.

$\therefore\ 2\angle DBC=180°$, $\therefore\ \angle DBC=90°$, 即 $DB\perp BC$.

習題 22. 全等三角形之相應中線相等.

[已知] AM 及 $A'M'$ 為二全等三角形 ABC 與 $A'B'C'$ 相應之中線,

[求證] $AM=A'M'$.

[證] $AB=A'B'$, $\angle B=\angle B'$, $BM=B'M'$ (公理8),

$\therefore\ \triangle ABM\cong\triangle A'B'M'$ (s. a. s.). $\therefore\ AM=A'M'$.

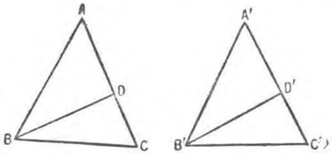
習題 23. 全等三角形之相應高相等.

[證] 參看習題 22. 設高為 AD 及 $A'D'$. $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$ (斜邊及一銳角相等). 故 $AD=A'D'$.

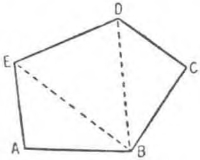
習題 24. 全等三角形相應角之平分線相等.

[證] 在習題 22 之圖內,設 $\angle A$ 及 $\angle A'$ 之平分線為 AE 及 $A'E'$. 則因 $\angle B=\angle B'$, $\angle BAE=\angle B'A'E'$, 又 $AB=A'B'$.

$\therefore\ \triangle ABE\cong\triangle A'B'E'$ (a. s. a.). $\therefore\ AE=A'E'$.



習題 25



習題 26

習題 25. 二等腰三角形,若一形之頂角與一腰上之高,各與他形之頂角及相應之高相等,則二形全等.

[**已知**] BD 及 $B'D'$ 各為二等腰三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 一腰 AC 及 $A'C'$ 上之高,且知 $BD=B'D'$, 又 $\angle A=\angle A'$.

[**求證**] $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

[**證**] $\angle A=\angle A'$, $\angle ADB=\angle A'D'B'=$直角,又$BD=B'D'$,

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$ (s. a. a.). $\therefore$ $BA=B'A'$, $CA=C'A'$.

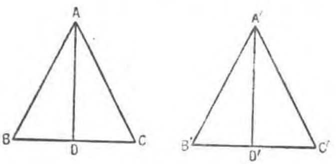
由是 $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C' \text{ (s. a. s.)}.$$

習題 26. 在五邊形 $ABCDE$ 內,若 $AB=BC$, $AE=CD$, 及 $\angle A$ 等於 $\angle C$, 則 $BE=BD$, 又 $\angle E=\angle D$.

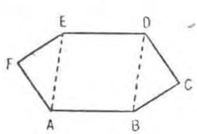
[**證**] $AB=BC$, $AE=CD$, 又 $\angle A=\angle C$,

$\therefore$ $\triangle BAE\cong\triangle BCD$ (s. a. s.). $\therefore$ $\angle AEB=\angle CDB$, 及 $BE=BD$.

$$\angle BDE=\angle BED \text{ (71)}. \quad \therefore \quad \angle D=\angle E.$$



習題 27



習題 28

習題 27. 二等邊三角形之高,若彼此相等,則二形全等.

[**證**] $\angle B=\angle B'$, $\angle ADB=\angle A'D'B'=$直角, $AD=A'D'$.

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$ (s. a. a.). $\therefore$ $AB=A'B'$.

由是 $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (s. s. s.)

習題 28. 若六邊形之對邊皆相平行,且有一雙對邊相等,則所有之對邊皆相等.

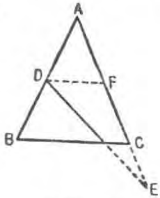
[已知] $ABCDEF$ 爲一六邊形,其對邊皆相平行,且 $AB=ED$.

[求證] $AF=CD,\ FE=BC.$

[證] 作 AE 及 BD. 因 $AB /\!/ ED$, $AB=ED$, $\therefore$ $ABDE$ 爲一 ▱ (144). $\therefore$ $AE=BD$. $\angle BDC=\angle FAE$, 又 $\angle FEA=\angle CBD$ (109).

$\therefore$ $\triangle FAE \cong \triangle BCD$ (a. s. a.). $\qquad\therefore$ $AF=CD,\ FE=BC.$

習題 29 若自等腰三角形 ABC 底邊 BC 之兩端,在一腰上截取 BD, 在一腰之延長線上取等長之 CE, 連結 D 與 E 之直線必爲底邊所平分.



習題 29

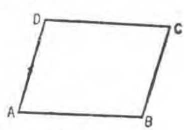
[證] 作 $DF /\!/ BC$, 交 AC 於 F. $\angle B=\angle C$. $\angle B=\angle ADF$. $\angle C=\angle AFD$. $\therefore$ $\angle ADF=\angle AFD$. 又 $AD=AF$. $BD=FC$ (公理 3). $EC=FC$.

$\therefore$ DE 爲 EC 所平分 (149).

習題 30. 二直線爲一截線所截,若同側二內角之平分線互相垂直,則此二直線平行.

參看第 49 頁習題 2.

習題 31. 若四邊形之對角皆相等,則此形爲一平行四邊形.



習題 31

[證] 在四邊形 $ABCD$ 內,

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°.$$

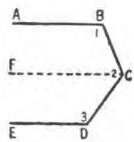
即 $$2\angle A+2\angle B=360°,$$

即 $\angle A+\angle B=180°.$ $\quad\therefore$ $AD /\!/ BC$.

同樣,用 $\angle A$ 及 $\angle D$, 可證 $AB /\!/ DC$.

$\therefore$ $ABCD$ 爲一平行四邊形.

習題 32. 若 $AB /\!/ ED$, $\angle 1+\angle 2+\angle 3=4$ 直角.



習題 32

[證] 作 $CF /\!/ AB$, 分 $\angle C$ 爲 BCF 及 DCF 二角.

因 $CF /\!/ DE$, $\quad\therefore$ $\angle 1+\angle BCF=180°.$

又 $\angle 3+\angle DCF=180°$ (107) $\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=360°=4$ 直角.

習題 33. 敍述前一命題之逆定理,並證明之.

逆定理:若 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=4$ 直角, 則 $AB /\!/ ED$.

[證] 用前題之圖. 作 $CF /\!/ AB$, 則 $\angle 1+\angle BCF=180°$.

$\therefore\ \angle 3+\angle DCF=180°$, 又 $DE /\!/ CF$ (97). $\therefore\ AB /\!/ ED$ (92).

習題 34. 求 5 邊形之對角線數; 8 邊形之對角線數; 10 邊形之對角線數; n 邊形之對角線數.

[解] 五邊形有對角線 5; 八邊形有 20; 十邊形有 35; n 邊形有 $\frac{1}{2}n(n-3)$. 自多邊形之任一頂點作對角線,共可作 $n-3$ 條. 自 n 頂點作對角線,應可作 $n(n-3)$ 條. 但一對角線曾作二次,故得公式如上.

習題 35. 一多邊形內角之和等於其外角之和之三倍, 問此形爲幾邊?(即每一頂點有一外角.)

[解] 設多邊形之邊數爲 n, 則 $(n-2)$ 平角 $=3\times 2$ 平角, $\therefore\ n=8$ 邊.

習題 36. 一多邊形內角之和等於其外角之和,問此形爲幾邊?

[解] 設多邊形之邊數爲 n, 則 $(n-2)$ 平角 $=2$ 平角, $\therefore\ n=4$ 邊.

習題 37. 一多邊形內角之和等於一六邊形內角和之三倍, 問此形爲幾邊?

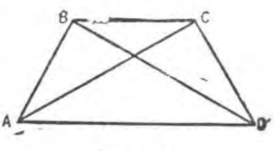
[解] 設多邊形之邊數爲 n, 則 $(n-2)$ 平角 $=3(6-2)$ 平角.

$$\therefore\quad n=14 \text{ 邊}.$$

習題 38. 一等角多邊形之一外角等於等邊三形角之一內角, 問此形爲幾邊?

[解] 設多邊形之邊數爲 n, 則 $\dfrac{2}{n}=\dfrac{60}{180}$. $\therefore\ n=6$ 邊.

習題 39. 若等腰梯形之上底等於其一腰,則其對角線必平分其下底之底角.



習題 39

[已知] $ABCD$ 爲一等腰梯形,上底 BC 等於一腰 AB, AC 及 BD 爲其對角線.

[求證] AC 平分 $\angle A$; BD 平分 $\angle D$.

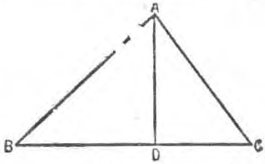
［證］ $AB=BC=CD$，則 $\angle BAC=\angle ACB$ (71).

$\angle DAC=\angle ACB$ (104).　$\therefore$　$\angle BAC=\angle DAC$，

即 AC 爲 $\angle A$ 之平分線.

同理，可證 BD 平分 $\angle D$.

習題 40. 若自三角形頂點作底邊之垂線，則底邊上每一線段必較此三角形之鄰邊爲小.



習題 40

［已知］ AD 爲自 $\triangle ABC$ 之頂點 A 作至底邊 BC 上之垂線.

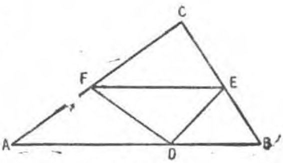
［求證］ $BD<AB, CD<AC$.

［證］ 在直角 $\triangle ABD$ 內，$BD\perp AD$，

$\therefore$　$BD<AB$ (131).

又在直角 $\triangle ACD$ 內，$CD\perp AD$，　$\therefore$　$CD<AC$ (131).

習題 41. 若一三角形之三頂點適在另一三角形之三邊上，則前一形之周必較後一形之周爲小.



習題 41

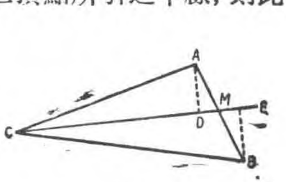
［求證］ $DE+EF+FD<AB+BC+CA$.

［證］ $DE<DB+BE$, $EF<EC+CF$, $FD<AF+AD$.　相加，得

$$DE+EF+FD<DB+BE+EC+CF+AF+AD.$$

即　　$$DE+EF+FD<AB+BC+CA.$$

習題 42. 自三角形二頂點作線垂直於自第三頂點所引之中線，則此二垂線相等.



習題 42

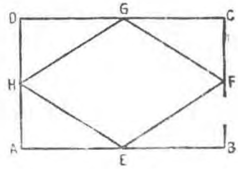
［已知］ CM 爲 $\triangle ABC$ 邊 AB 上之中線，AD 及 BE 爲自 A, B 二頂點所作垂直於 CM 之垂線.

［求證］ $AD=BE$.

［證］ $AM=BM$, $\angle ADM=\angle BEM=$直角, $\angle AMD=\angle BME$.

故直角$\triangle ADM\cong$直角$\triangle BEM$(一弦一銳角). $\therefore$ $AD=BE$.

習題 43. 順次連結矩形四邊中點之直線成一菱形.



習題 43

［證］ 直角$\triangle$s HAE, EBF, FCG, GDH 爲全等形(直角及二直角邊相等)

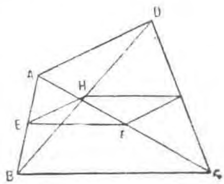
故 $HE=EF=FG=GH$.

$\therefore$ $EFGH$ 爲一菱形.

習題 44. 順次連結任意四邊形四邊之中點,成一平行四邊形.

［解］ 參照第 78 頁習題 2. 再依 §146 證 $EFGH$ 爲一平行四邊形.

習題 45. 四邊形兩對邊之中點,及二對角線之中點,決定一平行四邊形之頂點.



習題 45

［已知］ E, G 爲四邊形 $ABCD$ 二對邊 AB 及 CD 之中點; F, H 爲其二對角線之中點.

［求證］ $EFGH$ 爲一平行四邊形.

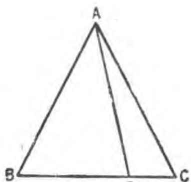
［證］ $EF \parallel BC$, 又 $EF=\frac{1}{2}BC$ (153).

$HG \# BC$, 又 $HG=\frac{1}{2}BC$ (153).

$EF=HG$, $EF \# HG$ (公理 1, 92).

$\therefore$ $EFGH$ 爲一$\square$ (144).

習題 46. 自等腰三角形頂點至底邊上任一點之直線,必較其任一腰爲小.

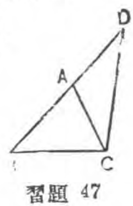


習題 46

［證］ $\angle ADC>\angle B$ (88). $\angle B=\angle C$.

$\therefore$ $\angle ADC>\angle C$, $\therefore$ $AD<AC$ (或 AB) (130).

習題 47. 在三角形 ABC 內, $AB>AC$, 又 D 爲 BA 延長線上之一點, 則 $DB>DC$.



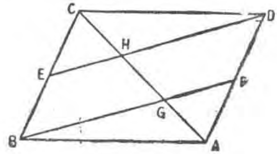
習題 47

［證］ $AB>AC$, 則 $\angle ACB>\angle B$. $\angle BCD>\angle ACB$.

$\therefore$ $\angle BCD>\angle B$ (公理 9).

$\therefore$ $DB>DC$ (130).

習題 48. 連結平行四邊形兩對邊中點，及一對角線兩端之二直線必三等分另一對角線.



習題 48

［**已知**］ AC 爲平行四邊形 $ABCD$ 之對角線，E 及 F 爲 BC 及 AD 之中點.

［**求證**］ $AG=GH=HC$.

［證］ $AD \parallel BC$，$AD=BC$. $BE=\frac{1}{2}BC$，

$DF=\frac{1}{2}AD$. $\therefore$ $DF=BE$，又 $DF \mathbin{/\!\!/} BE$.

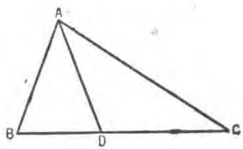
由是 $BFDE$ 爲一平行四邊形 (144). $\therefore$ $BF \mathbin{/\!\!/} DE$.

在 $\triangle BCG$ 內，$CE=BE$，$EH \mathbin{/\!\!/} BG$，$\therefore$ $CH=HG$ (149).

在 $\triangle ADH$ 內，$AF=FD$，$FG \mathbin{/\!\!/} DH$，$\therefore$ $AG=HG$ (149).

$$\therefore \quad AG=GH=HC.$$

習題 49. 若將三角形 ABC 一邊 BC 上之一點 D 與 A 連結之，又 $AC=BC$，$AB=AD=DC$，則 $\angle C=36°$.



習題 49

［證］ $AD=DC$，則 $\angle C=\angle DAC$.

$$\angle ADB=\angle C+\angle DAC=2\angle C.$$

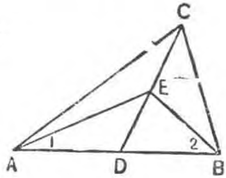
又 $$AB=AD.$$

則 $$\angle ADB=\angle B=\angle BAC=2\angle C.$$

$$\therefore \quad \angle C+2\angle C+2\angle C=5\angle C=180°.$$

$$\therefore \quad \angle C=36°.$$

習題 50. 若中線 CD 上之任一點 E，與 A 及 B 連結，而 $\angle B>\angle A$，求證 $\angle 2>\angle 1$.



習題 50

［證］ $\angle B>\angle A$，則 $AC>BC$ (130).

$\angle ADC>\angle BDC$ (133). $AE>BE$ (132).

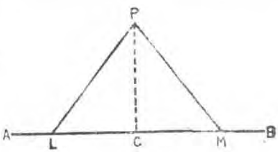
$$\therefore \quad \angle 2>\angle 1 \ (129)$$

習題 51. 自直線外一已知點作一直線，與已知直線成一角等於直角之半.

［**作圖**］ 自直線 AB 外之一點 P，作 $PC \perp AB$.

再在 P 向 PC 之兩側各作 PL 及 PM. 使 $\angle LPC=45°$, $\angle MFC=45°$. 延長 FL 及 PM 交 AB 於 L 及 M. 則 PL 及 PM 皆爲所求之線

或於 C 之兩側截 CL 及 CM 均等於 PC, 連 PL 及 PM 亦得.



習題 51

[證] $\angle PCL=90°$, $\angle LPC=45°$, $\therefore$ $\angle PLC$ 爲 $\angle LFC$ 之餘角,亦爲 $45°$.

同樣, $$\angle PMC=45°.$$

習題 52. 自直線外一已知點作一直線,與已知直線成 $60°$ 角,問此等直線可作幾條?

[作圖] 作法同習題 51, 惟在 P 兩側之角應各等於 $30°$.

此等直線可作 2 條.

習題 53. 自直線外一已知點作一直線,與一已知直線成已知角.

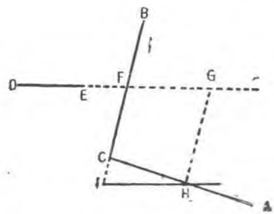
[作圖] 作法同習題 52. 惟在 P 兩側之角,須作已知角之餘角.

習題 54. 作一直線,兩端止於一已知角之二邊,使其等於且平行於一已知直線.

[已知] 一角 BCA 及一直線 DE.

[求] 作一直線,兩端止於 CA 及 CB, 且平行於 DE.

[作圖] 延長 DE 使交 BC 於 F. 在 DEF 上取 $FG=DE$, 過 G 作一直線平行於 EC, 交 CA 於 H. 完成一 $\square FGHI$. 則 HI 卽爲所求之直線.



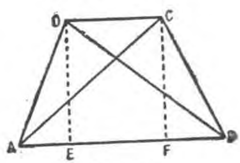
習題 54

習題 55. 等腰梯形之對角線相等.

[證] 作 DE 及 CF 均垂直於 AB, 則 $DE=CF$ (142). 又 $AD=CB$,

$\therefore$ 直角 $\triangle ADE\cong\triangle ECF$ (一斜邊一直角邊).

$\therefore$ $\angle A=\angle B$. 由是 $\triangle ACB\cong\triangle ADB$ (s. a. s.).



習題 55

$$\therefore \quad AC=BD.$$

習題 56. 若梯形之對角線相等,則此梯形必為等腰.

用習題 55 之圖.

[已知] AC 及 BD 為梯形 $ABCD$ 之相等二對角線.

[求證] $ABCD$ 為一等腰梯形.

[證] 作 DE 及 $CF\perp AB$ (87). $AC=BD$, $DE=CF$ (142).

$$\triangle DEB\cong\triangle CAF \text{ (一斜邊一直角邊相等)}.$$

$$AF=BE,\ AE=FB \text{ (公理 3)}.$$

$$\triangle ADE\cong\triangle BCF.\ (s.\,a.\,s.).\quad \therefore\quad AD=BC.$$

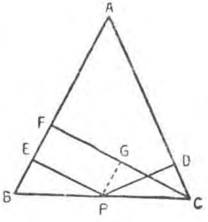
$$\therefore\quad ABCD \text{ 為一等腰梯形 (138)}.$$

習題 57. 自等腰三角形底邊上任一點作二腰之垂線,其和等於一腰上之高.

[已知] PD 與 PE 為自等腰 $\triangle ABC$ 底邊上之一點 P 作至二腰之垂線, CF 為腰 AB 上之高.

[求證] $PD+PE=CF$.

[證] 作 $PG\perp CF$ (87) $PG\mathbin{/\!\!/}AB$ (PG 與 BF 皆垂直於 CF).



習題 57

$$\angle GFC=\angle B=\angle C \text{ (同位角,等腰 △ 底角)}.$$

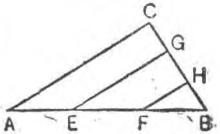
$$\text{直角 } \triangle PGC\cong\text{直角 } \triangle PDC \text{ (一斜邊一銳角相等)}.$$

$$\therefore\quad PD=CG.\ PE=GF \text{ (139)}.$$

$$\therefore\quad PD+PE=CG+GF=CF \text{ (公理 2)}.$$

習題 58. 在 $\triangle ABC$ 內,若 $AE=BF$, 又 $AC\mathbin{/\!\!/}EG\mathbin{/\!\!/}FH$, 求證 $EG+FH=AC$.

[證] 過 E 作 $EK\mathbin{/\!\!/}BC$, 遇 AC 於 K (圖內未畫出).



習題 58

因 $AE=BF$, $\angle A=\angle HFB$ (同位角),

$$\angle AEK=\angle FBH \text{ (同位角)},$$

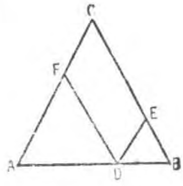
$\therefore \quad \triangle AKE \cong \triangle HBF$ (a s. a.). $\quad \therefore \quad AK = FH.$

$EKCG$ 爲一平行四邊形. $\quad \therefore \quad EG = KC.$

$$\therefore \quad EG + FH = AC.$$

習題 59. 過等腰三角形 ABC 底邊 AB 上之一點 D, 作二腰之平行線,各遇二腰於 E 及 F, 則

$$DF + DE = AC.$$



習題 59

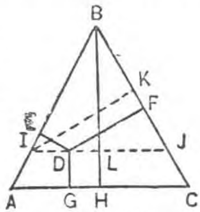
[證] $DECF$ 爲一平行四邊形. 故 $DE = CF.$

$$\angle B = \angle A.\ \angle B = \angle ADF.$$

$$\therefore \angle A = \angle ADF,\ \therefore\ AF = DE.$$

$$\therefore DE + DF = CF + AF = AC.$$

習題 60 自等邊三角形內任一點,作三邊之垂線,其和爲一定量,而與此三角形之高相等 (習題 57).



習題 60

[已知] D 爲等邊三角形 ABC 內之一點.自 D 作 $DE \perp AB$, $DF \perp BC$, $DG \perp AC$. 又 BH 爲底邊 AC 上之高.

[求證] $DE + DF + DG$ 爲一定量等於 BH.

[證] 過 D 作 $IJ \parallel AC$, 又 $IK \perp BC$ (100, 87).

$$\angle IJB = \angle C = 60^\circ,\ \angle JIB = \angle A = 60^\circ \text{ (同位角相等)}.$$

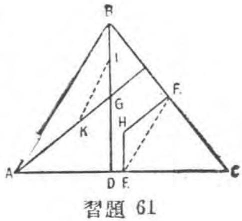
$$\therefore \quad \triangle BIJ \text{ 爲一等邊 } \triangle \text{ (73)}.$$

$$DE + DF = IK = BL \text{ (習題 57)}.$$

但 $\qquad DG = LH$ (141).

$\therefore DE + DF + DG = BL + LH = BH$ (公理 2).

習題 61. 若 $\triangle ABC$ 之高 BD 與另一高相交於 G, 又 EH 及 HF 爲中垂線,求證 $BG = 2\,(HE)$, 又 $AG = 2\,(HF)$.



習題 61

[證] 設 I 爲 BG 之中點, K 爲 AG 之中點, 作 KI 及 EF.

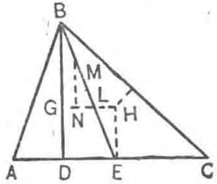
$EF /\!/ AB, EF=\frac{1}{2}AB$ (153).　$KI /\!/ AB, KI=\frac{1}{2}AB$ (153).

$\therefore$ $EF /\!/ KI, EF=KI$. (92, 公理 1). $\angle IKG=\angle HFE$ (109, 註).

又 $\angle GIK=\angle HEF$. 故 $\triangle IKG \cong \triangle HFE$ (a. s. a.).

$\therefore$ $IG=HE, KG=HF$.　$\therefore$ $BG=2(HE)$, 又 $AG=2(HF)$. (公理 7)

習題 62. 連結三角形三高交點與三中垂線交點之直線, 必截相應中線之三分之一 (習題 61).



習題 62

［已知］ G 爲 $\triangle ABC$ 內三高之交點. H 爲三中垂線之交點. 連結 GH, 交中線 BE 於 L.

［求證］　$BL=2(LE)$.

［證］ 設 M 爲 BL 之中點, N 爲 GL 之中點, 連結 MN.

$MN=\frac{1}{2}BG, MN /\!/ BG$ (153).　$HE=\frac{1}{2}BG, HE /\!/ BG$ (習題 61).

$\therefore$　$MN=HE$, 又 $MN /\!/ HE$ (公理 1, 92).

$\angle LMN=\angle HEL$ (內錯角相等).

$\angle MNH=\angle EHL$.　$\therefore$ $\triangle MNL \cong \triangle LHE$ (a. s. a.).

$ML=LE$. 即 $BL=2(LE)$ (公理 7).

習題 63 三角形三高之交點, 三中線之交點, 及三中垂線之交點, 同位於一直線上.

［證］ 用習題 62 之圖.　GH 必過 L (習題 62).

$\therefore$　L 爲三中線之交點 (164).

第 二 編

圓

第 103 頁 § 182

習題 1. 以 A 爲圓心,作一半徑等於 r 之圓.

〔解〕 以定點 A 爲圓心,長 r 爲半徑作圓卽得.

習題 2. 作 $90°$, $60°$, $45°$, $30°$ 之圓心角.

〔解〕 在定圓內任作一半徑,然後以圓心 O 爲頂點,依第 12 頁習題 13 作之,卽得 $90°$ 及 $45°$ 之圓心角. $60°$ 角可以半徑爲一邊作一等邊三角形卽得. $30°$ 角可將 $60°$ 角平分之而得.

習題 3. 求證: 任一直徑必平分其圓.

〔證〕 用 §173 之圖. 就直徑 EF 摺疊之,因同圓之半徑咸相等,故下半圓弧上各點必與上半圓弧上各點相疊合. 故兩半圓全等.

習題 4. 求證: 一圓不能有二圓心.

〔證〕 設 O 及 O' 爲二圓心. 作直徑 AB 通過二圓心 O 及 O'. 則 AB 將有二平分點,此爲不可能之事,故 O 必與 O' 疊合.

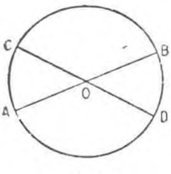
習題 5. 作二同心圓,再作一同心圓使介於前二圓之正中間.

〔解〕 第三圓之半徑等於二圓半徑和之半. 學者可自作之.

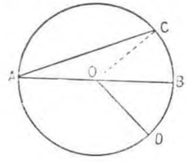
第 105 頁 § 185

習題 1. 若 AB 與 CD 爲同圓內之二直徑,則弧 AC = 弧 BD.

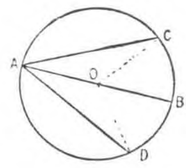
［證］ 設圓心爲 O. $\angle AOC=\angle BOD$. $\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ (183).



習題 1



習題 2



習題 3

習題 2. 若 AB 爲直徑, OD 爲半徑, AC 爲弦,又 $\angle BOD=2\angle A$, 則

$$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}.$$

［證］ 連 OC. $OA=OC$, $\angle A=\angle ACO$.

$$\angle COB=\angle A+\angle AOC=2\angle A \quad (120).$$

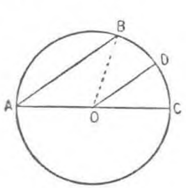
但 $$\angle BOD=2\angle A.$$

$$\therefore \quad \angle COB=\angle BOD. \qquad \therefore \quad \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}.$$

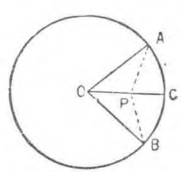
習題 3. 若 AC 與 AD 二弦所成之角 A, 爲直徑 AB 所平分,則

$$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}.$$

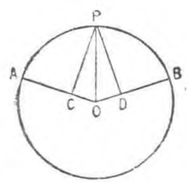
［證］ 連 OC 及 OD. $AO=OC$, $\angle OAC=\angle ACO$,
$\angle BOC=2\angle OAC$ (120). 同理 $\angle BOD=2\angle OAD$.
因 $\angle OAC=\angle OAD$, $\therefore$ $\angle BOC=\angle BOD$. $\therefore$ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.



習題 4



習題 5



習題 6

習題 4. 若自圓周上一點 A, 作弦 AB 與直徑 AC, 則平行於 AB 之半徑必平分 $\overset{\frown}{BC}$.

［證］ 連 B 及圓心 O　則 $\angle A=\angle OBA$. $\angle A=\angle DOC$ (同位角).
又 $\angle OBA=\angle BOD$ (内錯角). $\therefore$ $\angle DOC=\angle BOD$, 又 $\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BD}$.

習題 5. 若過與圓周上二點等距離之一點，作一半徑，則位於此二點間之弧卽爲半徑所平分.

〔已知〕 P 與圓周上之 A 及 B 等距離，又 CPO 爲半徑.

〔求證〕 $$\widehat{AC}=\widehat{BC}.$$

〔證〕 作 AO, BO; 並連 AP 及 BP.

由是 $OA=OB$, $OP=OP$, $AP=BP$.

$$\therefore\quad \triangle AFO\cong\triangle BPO\ (s.\ s.\ s.).$$

$$\therefore\quad \angle AOC=\angle BOC. \qquad \therefore\quad \widehat{AC}=\widehat{BC}.$$

習題 6. 若自圓周上一點作二半徑之垂線相等，則此點必平分二半徑所截之弧.

〔已知〕 P 爲圓周上之一點，自 P 作至半徑 OA 及 OB 之垂線，PC 及 PD 相等.

〔求證〕 $$\widehat{PA}=\widehat{PB}.$$

〔證〕 作 PO. 則 FO 平分二半徑在 O 所成之 $\angle AOB$ (127).

$$\therefore\quad \angle POC=\angle POD. \qquad \therefore\quad \widehat{AP}=BP.$$

習題 7. 試分一圓爲 4 等分; 8 等分; 6 等分.

〔作圖〕 (*a*) 作二直徑互相垂直，則一圓卽被分爲四等分.

(*b*) 平分 (*a*) 圓內各直角，卽分一圓爲八等分.

(*c*) 以圓之半徑爲一邊作一等邊三角形，則在圓心所成之角爲 $60°$，而其所對之弧卽爲圓周之 $\frac{1}{6}$. 次於圓心連續作五個 $60°$ 角卽得.

此題之圖暫從闕略.

習題 8. 若圓心角爲 (*a*) $90°$; (*b*) $30°$; (*c*) $1°$，求證各圓心角以其所對之弧量之.

〔解〕 (*a*) 全圓周爲 $360°$. 若圓心角爲 $90°$，則其所對之弧爲 $1°$ 弧之 90 倍.

(*b*)　若圓心角爲 30°, 則所對之弧爲 1° 弧之 30 倍.

(*c*)　若圓心角爲 1°, 則所對之弧爲單位長.

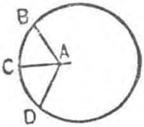
故圓心角之大小與弧長爲正比例,故可以弧量之.

習題 9.　作一 (*a*) 45°, (*b*) 60°, (*c*) 150° 之弧.

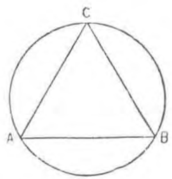
[解]　(*a*)　作 45° 圓心角.　　(*b*)　作 60° 圓心角.

(*c*)　作 150° 圓心角卽得.

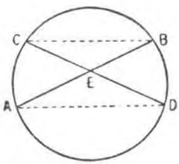
第 107 頁　§ 189



習題 1, 2



習題 3



習題 4, 5

習題 1　若 $\angle BAC=\angle DAC$, 又 $AB=AD$, 則 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$.

[證]　作 BC 及 CD.　因 $AC=AC$, $AB=AD$, $\angle BAC=\angle DAC$.

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (*s. a. s.*).　故 $BC=CD$, 又 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ (187).

習題 2.　若 $\angle BAC=\angle DAC$, 又 $\angle CBA=\angle CDA$ (圖中未畫出), 則 $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}$.

[證]　作 BC 及 CD.　$\angle BAC=\angle DAC$, $\angle CBA=\angle CDA$, $AC=AC$.

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (*s. a. a.*)　$\therefore$ $BC=CD$, 又 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ (187).

習題 3.　若 $\triangle ABC$ 內接於圓,而 $\angle A=\angle B$, 求證 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

[證]　$\angle A=\angle B$, 則 $AC=BC$ (121).　$\therefore$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ (187).

習題 4.　若二弦互相平分,則其一對對頂角所對之弧相等.

[已知]　二弦 AB 及 CD 互相平分於 E.

［求證］ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$.

［證］ 作 AD 及 CB. $\angle AED=\angle CEB$, $AE=BE$, $DE=CE$.

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle BCE$ (s. a. s.). $\therefore AD=CB$, 又 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$ (187).

習題 5. 若二弦互相平分,則此二弦必皆爲直徑.

［已知］ 二弦 AB 及 CD 互相平分於 E.

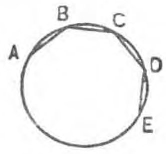
［求證］ AB 及 CD 皆爲圓之直徑.

［證］ 由習題 4, 得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$, 及 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}$.

故 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{DB}$, 卽 $\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$. $\therefore$ CD 爲一直徑.

同樣, AB 亦爲一直徑.

習題 6. 若弦 AB, BC, CD, DE 皆相等,則弦 AC, BD, CE 亦必相等.



習題 6

［證］ $AB=BC=CD=DE$, 則

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE} \ (187).$$

由是 $$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE},$$

卽 $$\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}=\overset{\frown}{CDE}.$$

$$\therefore \quad AC=BD=CE \ (187).$$

習題 7. 若 $AB=CD$, 則 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$.

［證］ $AB=CD$, 則 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. 又 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$, $\therefore \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AC}$,

卽 $$\overset{\frown}{BAC}=\overset{\frown}{ACD}. \quad \therefore \quad \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}.$$

習題 8. 若相交二弦 AD 與 BC 相等,則 $AB=CD$.

習題 7, 8

［證］ $AD=CB$, 則 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$. 但 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$.

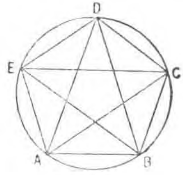
$$\therefore \quad \overset{\frown}{CB}-\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{AC}, \text{ 卽 } \overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{CD}.$$

$$\therefore \quad AB=CD.$$

習題 9. 內接於圓之等邊五邊形之對角線相等.

［已知］ 五邊形 $ABCDE$, $AB=BC=CD=DE=EA$.

［求證］ $AC=AD=BD=BE=CE.$



習題 9

［證］ $AB=BC=CD=DE=EA$, 則

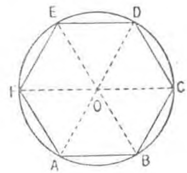
$$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=\widehat{EA}.$$

故 $\widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{BC}+\widehat{CD}=\widehat{CD}+\widehat{DE}=\cdots\cdots,$

即 $$\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{CDE}=\cdots\cdots.$$

$$\therefore\quad AC=BD=CE=\cdots\cdots.$$

習題 10. 自內接等邊六邊形各頂點各作半徑，分此形為六個全等三角形.



習題 10

［證］ $AB=BC=CD=DE=EF=FA,$

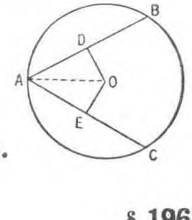
$$OA=OB=OC=OD=OE=OF.$$

$\therefore\quad \triangle AOB\cong\triangle BOC\cong\triangle COD\cong\triangle DOE\cong\triangle EOF\cong\triangle FOA$ (s. s. s.).

第 108 頁 § 191

習題. 在圓 O 內, $AB=AC$, $OD\perp AB$, 又 $OE\perp AC$, 求證

$$\triangle ADO\cong\triangle AEO.$$



［證］ 作 AO. 因 $AB=AC$,

則 $AD=AE$ (190). 又 $AO=AO$.

$\therefore$ 直角 $\triangle ADO\cong$直角$\triangle AEO$ (一弦一直角邊相等).

第 109 頁 § 196

習題 1. 求一已知圓之圓心.

［已知］ 一圓.

［求］ 作此圓之圓心.

［作圖］ 自圓周上之任一點 A, 作二弦 AB 及 AC (用第 108 頁習題之圖). 次作 AB 之中垂線 DO, 及 AC 之中垂線 EO. 此二中垂線之交點 O 卽為所求之圓心 (191).

習題 2. 平分一已知弧。

［作圖］ 先作此弧之弦,再作其中垂線卽得 (191, 190). 圖從略.

第 110 頁 § 197

習題 1. 自圓心至內接等邊多邊形各邊之垂線相等.

［解］ 等邊多邊形之各邊爲圓內之等弦, 故與圓心之距離相等, 卽垂線之長相等 (197).

習題 2. 求證命題 V, 試作 AO 及 DO, 由 $\triangle AOB\cong\triangle DOC$ 證之.

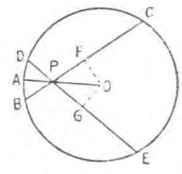
用命題 V 之圖.

［證］ 作 AO 及 DO. $AB=CD$, $OA=OB=OC=OD$.

$\therefore$ $\triangle AOB\cong\triangle COD$ (s. s. s). $\therefore$ $OE=OH$ (第 98 頁習題 23).

第 111 頁 § 198

習題 1. 若過半徑上任一點, 作二弦使與半徑成等角, 則此二弦必相等.



習題 1, 2

［已知］ P 爲半徑 OA 上之任一點, BC 與 DE 爲過 P 之二弦, 其 $\angle OPF=\angle OPG$.

［求證］ $BC=DE$.

［證］ 作 $OF\perp BC$, $OG\perp DE$.

因 $\angle OFP=\angle OGP=$直角, $OP=OP$,

又 $\angle OPF=\angle OPG$, $\therefore$ $rt.\triangle FOP\cong rt.\triangle GOP$ (一斜邊一銳角相等)

$\therefore$ $OF=OG$. $\therefore$ $BC=DE$ (197)

習題 2. 連結相等二弦交點與圓心之直線,平分此二弦所成之角.

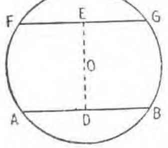
［已知］ BC 與 DE 爲圓 O 內之二等弦相交於 P, OP 爲圓心 O 與交點 P 之連結線.

［求證］ $\angle OPF=\angle OPG$.

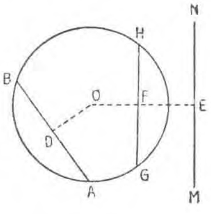
［證］ 作 $OF\perp BC$, $OG\perp DE$. 因 $BC=DE$, $\therefore$ $OF=OG$. 又 $OP=OP$.

$\therefore$　直角$\triangle FOP \cong$直角$\triangle GOP$（一斜邊一直角邊相等）.

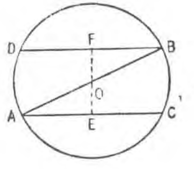
$$\therefore \quad \angle OPF = \angle OPG.$$



習題 3



習題 4



習題 5

習題 3.　在一已知圓內，求作一弦使等於且平行於一已知弦。

［作圖］　自圓心 O 作 OD 垂直於已知弦 AB.

引長 DO 至 E，使　　$OE = OD$.

過 E 作一弦 $FG \perp DE$，則 FG 即為所求之弦.

習題 4.　在一已知圓內，求作一弦使等於一已知弦，且平行於一已知之直線.

［已知］　一弦 AB，及一直線 MN.

［求］　作一弦等於 AB 且平行於 MN.

［作圖］　自 O 作 $OD \perp AB$, $OE \perp MN$.

在 OE 上截取 $OF = OD$，再過 F 作一弦 GH 平行於 MN，則 GH 即為所求之弦.

習題 5.　在直徑之兩端各作一弦，使與直徑成等角，求證此二弦相等。

［已知］　在直徑 AB 兩端所作之二弦 AC 及 BD 與 AB 成等角.

［求證］　　$AC = BD$.

［證］　作 $OE \perp AC$, $OF \perp BD$.　則 $OA = OB$, $\angle OAE = \angle OBF$,

$\therefore$　直角$\triangle AOE \cong \triangle BOF$（一斜邊一銳角相等）.

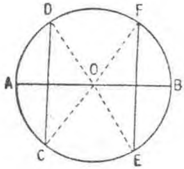
$$\therefore \quad AE = BF,\ \text{即}\ AC = BD.$$

習題 6.　一直徑平分不通過圓心之二弦，證明此二弦平行.

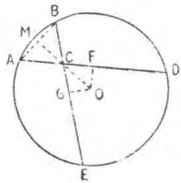
［已知］ 直徑 AB 平分二弦 CD 及 EF.

［求證］ $CD \parallel EF$.

［證］ AB 旣平分弦 CD 及 EF, AB 卽垂直於此二弦(第 35 頁習題 21). $\therefore\ CD \parallel EF$ (96).



習題 6



習題 7

習題 7. 相交二弦各有一線段相等,求證此二弦相等.

［已知］ 弦 AD 及 BE 相交於 C, 而 $AC=BC$.

［求證］ $AD=BE$.

［證］ 平分 $\angle ACB$, 並將平分線引長之使遇 AB 之連結線於 M. 則 CM 爲 AB 之中垂線 (72).

又引長 MC 必過圓心 O (191).

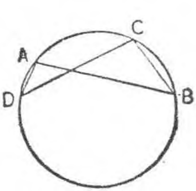
自 O 作 $OF \perp AD$. $OG \perp BE$, 則 $OC=OC$, $\angle OCF=\angle OCG$,

$\therefore$ 直角$\triangle OFC \cong$直角$\triangle OGC$ (一斜邊及一銳角相等).

$\therefore\ OF=OG$, $\therefore$ 弦 $AD=$弦 BE (197).

第 114 頁 　§ 201

習題 1. 若 $AB>CD$, 又 $\overset{\frown}{ACB}$ 與 $\overset{\frown}{DAC}$ 皆爲劣弧, 求證 $CB>AD$.



習題 1, 2

［證］ $AB>CD$, $\overset{\frown}{ACB}>\overset{\frown}{D\ \ C}$ (199).

$\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{DAC}-\overset{\frown}{AC}$.

由是 $\overset{\frown}{CB}>\overset{\frown}{AD}$ (公理 5).

$\therefore\ CB>AD$ (199).

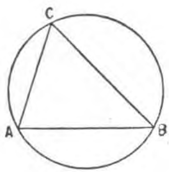
習題 2. 若 $CB>AD$, 又 $\overparen{DAC}$ 與 $\overparen{ACB}$ 皆爲劣弧,求證 $AB>CD$.

［證］ $CB>AD$, 則 $\overparen{CB}>\overparen{AD}$ (199).

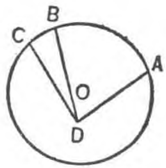
$\overparen{CB}+\overparen{AC}>\overparen{AD}+\overparen{AC}$, 即 $\overparen{ACB}>\overparen{DAC}$. $\therefore$ $AB>CD$ (199).

第 115 頁

§ 202



習題 1, 2



習題 3, 4

習題 1. 若 ABC 爲內接於圓之任意三角形,又 $\angle A>\angle B$, 則

$$\overparen{BC}>\overparen{AC}.$$

［證］ $\angle A>\angle B$, 則 $CB>AC$ (130). $\therefore$ $\overparen{BC}>\overparen{AC}$ (199).

習題 2. 試述習題 1 之逆定理,並證明之.

逆定理:若 ABC 爲內接於圓之任意三角形,又 $\overparen{BC}>\overparen{AC}$, 則

$$\angle A>\angle B.$$

［證］ $\overparen{BC}>\overparen{AC}$, 則 $BC>AC$ (199). $\therefore$ $\angle A>\angle B$ (129).

習題 3. 若 $AD=DC$, 又 $\angle ADB>\angle BDC$, 則 $\overparen{AB}>\overparen{BC}$.

［證］ 作弦 AB 及弦 BC. 因 $AD=DC$, $BD=BD$, 又

$$\angle ADB>\angle BDC, \quad \therefore \quad AB>BC \text{ (132)}.$$

$$\therefore \quad \overparen{AB}>\overparen{BC} \text{ (199)}.$$

習題 4. 若 $AD=DC$, 又 $\overparen{AB}>\overparen{BC}$, 則 $\angle ADB>\angle BDC$.

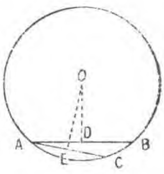
［證］ 作弦 AB 及弦 BC. 因 $\overparen{AB}>\overparen{BC}$, 則弦 $AB>$弦 BC.

又 $AD=DC$, $BD=BD$, $\therefore$ $\angle ADB>\angle BDC$ (133).

習題 5. 若於半徑上作垂直之二弦,則近圓心之一弦較長.

［解］ 二弦皆與半徑相垂直，則垂足距圓心之長即各弦與圓心之距離，距圓心近者，其弦較長 (201). 圖從略.

習題 6. 自圓心至內接等邊六邊形一邊之垂線，小於自圓心至內接等邊八邊形一邊之垂線.



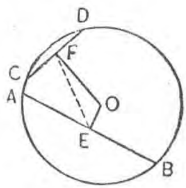
習題 6

［已知］ AB 爲內接正六邊形之一邊，AC 爲內接正八邊形之一邊，又 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$.

［求證］ $OD<OE$.

［證］ 六邊形一邊 AB 所對之弧爲 $60°$，八邊形一邊 AC 所對之弧爲 $45°$，故 $\widehat{AB}>\widehat{AC}$，即 $AB>AC$ (199).

$\therefore\ OD<OE$ (200).

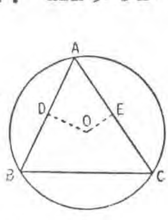


習題 7

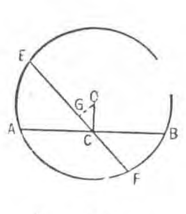
習題 7. 若 $EO\perp AB$，$OF\perp CD$，又 $\angle OEF$ 大於 $\angle OFE$，則 $AB>CD$.

［證］ $\angle OEF>\angle OFE$，則 $OF>OE$ (130).

$\therefore\ AB>CD$ (201).



習題 8



習題 9

習題 8. 若 $\triangle ABC$ 內接於圓，而 $\angle B>\angle C$，則自圓心至 AB 之垂線大於自圓心至 AC 之垂線.

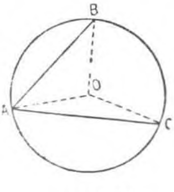
［證］ $\angle B>\angle C$，則 $AC>AB$ (130). $\therefore\ OD>OE$ (200).

習題 9. 過圓內一點之諸弦，以垂直於過此點之半徑者爲最短.

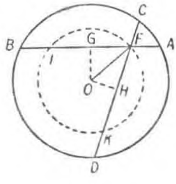
［已知］ AB 爲過圓內一點 C 之弦. 設 O 爲圓心，而 $AB\perp OC$. 又 EF 爲過 C 之另一弦.

［求證］ 過 C 之弦以 AB 爲最短.

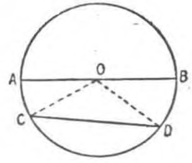
［證］ 作 $OG \perp EF$. $OC > OG$ (131). $\therefore$ $AB < EF$ (201).



習題 10



習題 11



習題 12

習題 10. 自圓周上一點作二弦,若與過此點之半徑成不等角,則此二弦亦不等.

［已知］ O 爲圓心, AB 及 AC 爲二弦, OA 爲半徑,且

$$\angle BAO > \angle CAO.$$

［求證］ $$AB \neq AC.$$

［證］ 作 OB, OC. $\angle BAO > \angle CAO$, 因 $OA = OB, OA = OC$,

$$\therefore \quad \angle B = \angle BAO, \ \angle C = \angle CAO. \quad \therefore \quad \angle B > \angle C.$$

$$\therefore \quad \angle BOA < \angle COA \text{ (公理 6)}, \qquad \therefore \quad \widehat{AB} < \widehat{AC} \text{ (180)},$$

又 $$AB < AC \text{ (199)}.$$

習題 11. 過圓內一點之二弦,若與過此點之半徑成不等角,則此二弦亦不等.

［已知］ AB 及 CD 爲過圓內一點 F 之二弦,而 $\angle BFO > \angle KFO$.

［求證］ $$AB < CD.$$

［證］ 以 O 爲圓心, OF 爲半徑作圓,交 FB 於 I, FD 於 K (公理 18).

$$\angle BFO > \angle DFO. \quad \therefore \quad FI > FK \text{ (習題 10)}.$$

$$OG > OH \text{ (200 . } AB < CD \text{ (201)}.$$

習題 12. 徑大於不過圓心之任一弦.

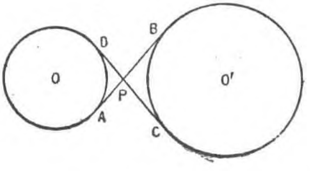
［已知］ AB 爲直徑, CD 爲任意之一弦.

［求證］ $AB>CD.$

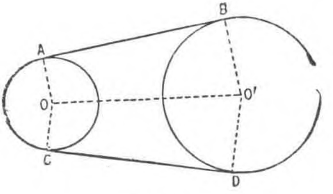
［證］ 作 OC 及 OD. $OC+OD>CD$(128).

但 $OC+OD=AB$. $\therefore\ AB>CD.$

第 118 頁 § 212



習題 1



習題 2

習題 1. 二圓之內公切線相等.

［已知］ AB, CD 爲 O, O' 二圓之內公切線,相交於P,而以 A, B, C, D 爲其切點.

［求證］ $AB=CD.$

［證］ $PA=PD$, $PB=PC$ (209). $PA+PB=PD+PC$ (公理 2).

$$\therefore\ AB=CD.$$

習題 2. 二圓之外公切線相等.

［已知］ 二圓O 及 O', AB 與 CD 皆爲其外公切線.

［求證］ $AB=CD.$

［證］ (a) 二圓不等,則二外公切線延長之必相交於一點 P.

由是 $PA=PC$, $PB=PD$ (209). $PB-PA=PD-PC$ (公理 3),

即 $AB=CD.$

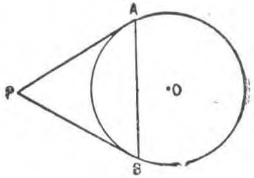
(b) 二圓相等,則作四半徑至切點,並連結 OO'.

$$\angle OAB=\angle O'BA=\text{直角}\ (203)\quad OA \text{ 及 } O'B \text{ 均 } \perp AB,$$

$$\therefore\quad OABO' \text{ 爲一矩形.}\quad \therefore\quad AB=OO'.$$

同理　$CD=OO'$.　$\therefore$　$AB=CD$.

習題 3.　一弦與其兩端所引之切線必成等角.



習題 3

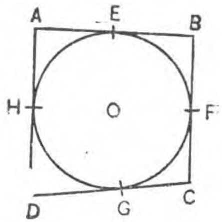
［已知］　AB 爲圓 O 之一弦, PA 及 PB 爲切於圓上 A, B 兩點之切線.

［求證］　$\angle PAB=\angle PBA$.

［證］　$PA=PB$ (209).

$\therefore$　$\angle PAB=\angle PBA$ (71).

習題 4.　外切於圓之四邊形,其二對邊之和必等於他二對邊之和.



習題 4

［已知］　$ABCD$ 爲一外切四邊形, E, F, G, H 爲其切點.

［求證］　$AD+BC=AB+DC$.

［證］　$AH=AE,\ BE=BF,\ CF=CG,\ DG=DH$ (209).

四式相加,即得 $AD+BC=AB+DC$ (公理 2).

習題 .　若六邊形 $ABCDEF$ 外切於圓, 則

$$AB+CD+EF=BC+DE+FA.$$

［證］　設 $AB, BC, CD\ldots\ldots$ 之切點順次爲 G, H, I, J, K, L (圖從略).

則
$$AG+GB+CI+ID+EK+KF$$
$$=AL+BH+CH+DJ+EJ+FL\ (209).$$

即
$$AB+CD+EF=BC+DE+FA.$$

習題 6.　外切於圓之直角三角形, 其二直角邊之和等於斜邊與此圓直徑之和.

［證］　$AR=AN$ (209). $BR=BM$. $AB=AN+BM$.

因　　$ON \perp AC, OM \perp BC,\quad C \perp BC,$

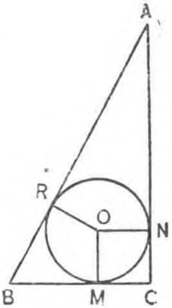
$$\therefore\quad OMCN \text{ 為一矩形.}$$

但　　$$CM = CN,$$

$$\therefore\quad OMCN \text{ 為一正方形.}$$

由是　　$$OM + ON = CM + CN.$$

即　　$$AB + \text{直徑} = AC + BC.$$



習題 6

習題 7. 若二切線成 60° 角,則連結二切點之弦等於任一切線.

用習題 3 之圖.

〔證〕 $\angle APB = 60°$, 而 $PA = PB$ (209),

$$\therefore\quad \angle PAB = \angle PBA = 60°.$$

由是 PAB 為一等邊三角形.　$\therefore\quad AB = PA = PB.$

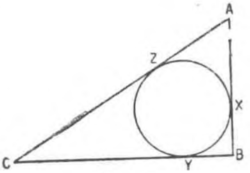
習題 8. $\triangle ABC$ 外切於圓,此圓與其邊 AB, BC 及 CA 分別相切於 X, Y 及 Z. 若 $AB=3$, $BC=4$, $CA=5$, 求 AX, BY 及 CZ 之長.

〔解〕 $AX + AZ = AB - BX + AC - CZ$

$$= AB + AC - BY - CY \ (209)$$

即 $2(AX) = AB + AC - BC = 3 + 5 - 4 = 4.$

$$\therefore\quad AX = 2.$$



習題 8

同法,可求得 $BY=1, CZ=3$.

第 120—121 頁　　§ 216

習題 1. 若二圓心之距離如下題所示,則二圓之相對位置如何?

(a) 大於二半徑之和.

(b) 等於二半徑之和.

(*c*) 小於二半徑之和,而大於二半徑之差.

(*d*) 等於二半徑之差.

(*e*) 小於二半徑之差.

(*f*) 等於零.

［解］ (*a*) 一圓完全位於他圓之外,二圓無一公共之點.

(*b*) 二圓外切.

(*c*) 二圓相交.

(*d*) 二圓相內切;若二圓相等,則相疊合.

(*e*) 若二圓大小不同,則一圓位於他一圓之內.

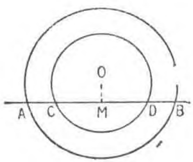
(*f*) 二圓成同心圓.

習題 2. 在命題 XII 之圖內,若自 A 作二圓 O 與 O' 之切線,此二切線必相等.

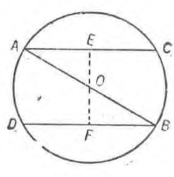
［已知］ AB 爲圓 O 之切線, AD 爲圓 O' 之切線.

［求證］ $$AB=AD.$$

［證］ $AB=AC$ (209), 又 $AD=AC$. $\therefore$ $AB=AD$.



習題 3



習題 4

習題 3. 若一割線爲二同心圓所截,則二圓間所截之線段相等.

［已知］ AB 爲一割線,截大圓於 A, B, 小圓於 C, D.

［求證］ $$AC=DB.$$

［證］ 自 O 作 $OM\perp AB$. 則 $AM=BM, CM=DM$ (190).

$$\therefore\quad AM-CM=BM-DM, \text{ 卽 } AC=DB.$$

習題 4. 自直徑兩端所作之二平行弦必相等.

［已知］ AC, BD 爲自直徑 AB 兩端所作之二平行弦.

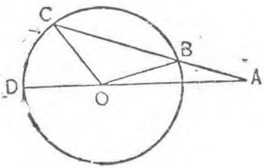
［求證］
$$AC=BD.$$

［證］ 過圓心 O 作 $EF\perp AC$, 則 $EF\perp BD$ (105).

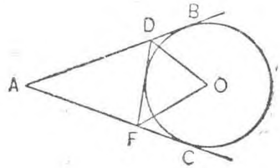
$$AO=BO,\ \angle EOA=\angle FOB,$$

$\therefore$ 直角$\triangle OAE\cong$直角$\triangle OBF$ (一斜邊一銳角相等).

$$\therefore\ OE=OF,\quad \therefore\ AC=BD\ (197).$$



習題 5



習題 6

習題 5. 若半徑 OB 等於 AB, 求證 $\angle COD=3\angle A$.

［證］ $OB=AB$, 則 $\angle BOA=\angle A$ (71).

$$\angle CBO=\angle BOA+\angle A=2\angle A\ (120).$$

$$CO=BO,\ 則\ \angle CBO=\angle BCO.$$

$$\angle COD=\angle BCO+\angle A=\angle CBO+\angle A=3\angle A.$$

習題 6. 若自 A 作已知圓 O 之切線 AB 及 AC, 再作一第三線,各與 AB 及 AC 相交於 D 及 F. 求證

$$AD+DF+AF=2AB,\ 又\ \angle O=rt.\angle-\tfrac{1}{2}\angle A.$$

［證］ (a) $DF=DB+FC$ (209, 公理 2).

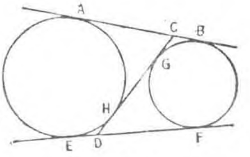
$$AD+DF+AF=AD+DB+FC+AF=AB+AC.$$

但 $AB=AC$ (209), $\therefore\ AD+DF+AF=2AB.$

(b) $\angle O=180^\circ-\angle ODF-\angle OFD.$

$$2\angle O=360°-\angle BDF-\angle CFD\ (210)=\angle ADF+\angle AFD$$
$$=2\text{直角}-\angle A.$$
$$\therefore\quad \angle O=\text{直角}-\tfrac{1}{2}\angle A.$$

習題 7. 二圓之二外公切線與一內公切線相交，則線段 CD 等於外公切線 AB.

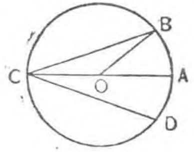


習題 7

［證］ 設 CD 切小圓於 G，切大圓於 H. 則 $CG=CB, GD=DF.\quad \therefore\quad CD=CB+DF.$
$CH=CA, DH=DE,\quad \therefore\quad CD=CA+DE.$
二式相加，得 $2CD=AB+EF$.
但 $AB=EF$（第 118 頁，習題 2）. $\quad\therefore\quad CD=AB$（公理 8）.

第 125 頁　§ 238

習題 1. 若 $\widehat{AB}=40°$，則 (a) 圓心 $\angle AOB$ 爲幾度？ (b) $\angle ACB$ 爲幾度？



習題 1, 2

［解］ $(a)\quad \angle AOB=40°\ (227).$
$(b)\quad \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB\ (120)=\frac{1}{2}40°$
$=20°\ (227).$

習題 2. 若 $\widehat{BD}=60°$，則 $\angle C$ 爲幾度？

［解］ $\angle BCO=\frac{1}{2}\angle BOA$，又 $\angle DCO=\frac{1}{2}\angle DOA\ (120, 71).$
$$\therefore\quad \angle C=\tfrac{1}{2}\angle BOD=30°\ (227).$$

第 127—128 頁　§ 235

習題 1. 於命題 XIV 之第一圖內，若 $\angle C=30°$，則 $\widehat{CB}$ 爲幾度？

［解］ $\angle C=30°$，則 $\widehat{AB}$ 爲 $60°$ (232). 但 $\widehat{ABC}$ 爲半徑，卽 $180°$.

故 $$\overset{\frown}{CB}=180°-\overset{\frown}{AB}=120°.$$

習題 2. 在同一圖內,若 $\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AB}$, 求 $\angle C$.

[解] $\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AB}$, 則 $\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{4}180°=45°$. $\therefore$ $\angle C=\frac{1}{2}45°=22\frac{1}{2}°$.

習題 3. 於命題 XIV 之第二圖內,若 $\overset{\frown}{AC}$ 爲圓之 $\frac{1}{3}$, $\overset{\frown}{BC}$ 爲圓之 $\frac{1}{4}$, 求 $\angle ACB$, $\angle ACD$.

[解] $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{3}360°=120°$, $\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{4}360°=90°$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=360°-120°-90°=150°$. $\therefore$ $\angle ACB=\frac{1}{2}150°=75°$.

又 $\overset{\frown}{CAD}=180°$, 則 $\overset{\frown}{AD}=180°-\overset{\frown}{AC}=60°$.

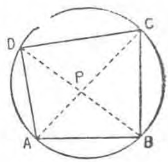
$$\therefore \quad \angle ACD=\tfrac{1}{2}60°=30°.$$

習題 4. 於命題 XIV 之第三圖內,若 A 爲 $\overset{\frown}{CD}$ 之中點,又 B 爲 $\overset{\frown}{AD}$ 之中點,則 $\angle ACB$ 爲幾度?

[解] 若 A 爲 $\overset{\frown}{CD}$ 之中點, B 爲 $\overset{\frown}{AD}$ 之中點,則 $\overset{\frown}{ABD}=90°$,

$$\overset{\frown}{AB}=45°. \quad \therefore \quad \angle ACB=\tfrac{1}{2}45°=22\tfrac{1}{2}°.$$

習題 5. 四邊形 $ABCD$ 內接於一圓,作二對角線,若 $\overset{\frown}{AB}=80$, $\overset{\frown}{BC}=110°$, 又 $\overset{\frown}{CD}=90°$, 求圖內各角之度數.



習題 5, 6

[解] 設 AC 及 BD 二對角線相交於P.

因 $\overset{\frown}{AB}=80°$, $\overset{\frown}{BC}=110°$, $\overset{\frown}{CD}=90°$, $\therefore$ $\overset{\frown}{AD}=80°$.

$$\angle DAC=\angle DBC=\tfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}=45°.$$

$$\angle CAB=\angle CDB=\tfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=55°.$$

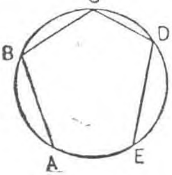
$$\angle ACB=\angle ADB=\angle ABD=\angle ACD=\tfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=40°.$$

$\angle CPB=\angle APD=95°$ (120), 又 $\angle DPC=\angle APB=85°$ (120).

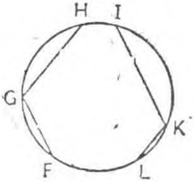
再 $\angle ADC=95°$, $\angle ABC=85°$, $\angle DAB=100°$, $\angle DCB=80°$.

習題 6. 在前題之圖內,求其四對相等之角.

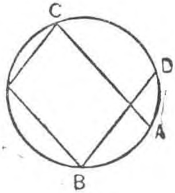
參看習題 5，茲不復贅.



習題 7



習題 8



習題 9

習題 7. 若 $\widehat{AE}=40°$，求 $\angle B+\angle D$.

［解］ $\angle B+\angle D$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{CDEA}+\widehat{CBAE})$ 量之.

$\therefore\quad \angle B+\angle D$ 以 $\frac{1}{2}$(圓 $+\widehat{AE}$) 量之.

$\therefore\quad \angle B+\angle D=\frac{1}{2}(360°+40°)=200°$.

習題 8. 若 $\widehat{HI}=20°$，又 $\widehat{FL}=30°$，求 $\angle G+\angle K$ 爲幾度?

［解］ $\angle G+\angle K$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{HIKLF}+\widehat{IHGFL})$ 量之.

$\angle G+\angle K$ 以 $\frac{1}{2}(360°+\widehat{HI}+\widehat{FL})$ 量之.

$\therefore\quad \angle G+\angle K=\frac{1}{2}(360°+20°+30°)=205°$.

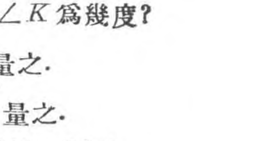
習題 9. 若 $\widehat{DA}=50°$，則 $\angle B+\angle C$ 爲幾度?

［解］ $\angle B+\angle C$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{ECD}+\widehat{EBA})$ 量之.

但 $\qquad \widehat{ECD}+\widehat{EBA}=360°-\widehat{AD}$.

$\therefore\quad \angle B+\angle C=\frac{1}{2}(360°-50°)=155°$.

習題 10. 過相等二圓之交點之一作一直線，使與二圓相遇，則此線之兩端必與另一交點等距離.



習題 10

［已知］ A 及 D 爲相等二圓 E, F 之交點，BC 爲過 A 而止於二等圓之直線.

［求證］ $\qquad BD=CD$.

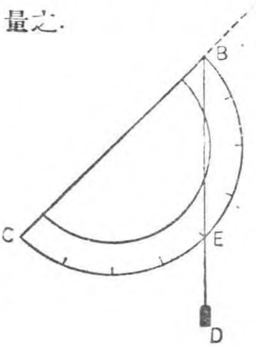
［證］ $\qquad \widehat{AFD}=\widehat{AED}$ (187).

$$\therefore \quad \angle B = \angle C \quad (232),$$

卽

$$BD = CD.$$

習題 11. 設有一半圓放置如右圖,延長其直徑 CB 使通過一點 A, 又一鉛垂線 BD 交半圓於 E, 則 A 之仰角以 $\frac{1}{2}\widehat{BE}$ 量之.



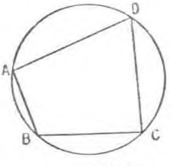
習題 11

［證］ $\angle CEB = 90^\circ$ (234).

因 BD 爲鉛垂線, 故 CE 爲一水平線, 而 $\angle ACE$ 爲其仰角.

$$\therefore \quad \angle ACE \text{ 以 } \tfrac{1}{2}\widehat{BE} \text{ 量之 } (232).$$

習題 12. 將一圓依 2 : 4 : 4 : 5 之連比分爲四分,順次連結各分點,求由此所成之各圓周角之度數.



習題 12

［解］ 設 AB, BC, CD, DA 之比爲 2 : 4 : 4 : 5. 則

$$\angle A = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}\left(360^\circ \times \frac{4+4}{15}\right) = 96^\circ$$

$$\angle B = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}\left(360^\circ \times \frac{5+4}{15}\right) = 108^\circ.$$

$$\angle C = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{AD}) = \frac{1}{2}\left(360^\circ \times \frac{2+5}{15}\right) = 84^\circ.$$

$$\angle D = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{BC}) = \frac{1}{2}\left(360^\circ \times \frac{2+4}{15}\right) = 72^\circ$$

習題 13. 試於鐘面上,自 1 至 5 至 7 至 11 至 1 各作直線,求由此所成各圓周角之度數.

［解］ 每一點鐘爲圓周之 $\frac{1}{12}$ 卽 30°.

$$\therefore \quad \angle 1 = \angle 5 = \angle 7 = \angle 11 = \tfrac{1}{2}\,180^\circ = 90^\circ.$$

習題 14. 一等邊六邊形內接於圓.求此六邊形之每一角爲幾度?

［解］ 等邊六邊形每一邊所對之弧爲圓周之 $\frac{1}{6}$, 但皆相等.

故六邊形每一角爲 $\frac{1}{2}240°$, 卽 $120°$.

第 129 頁 § 236

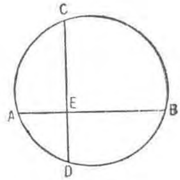
習題 1. 在命題 XV 之圖內,若 $\overset{\frown}{AD}=60°$, $\overset{\frown}{BA}=140°$, 又 $\overset{\frown}{CB}=20°$, 求 $\angle AEC$ 及 $\angle DAE$.

［解］ $\overset{\frown}{AC}=140°-20°=120°$. $\overset{\frown}{DB}=360°-60°-140°=160°$.

$$\angle AEC=\tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{DB})=\tfrac{1}{2}(120°+160°)=140°.$$

$$\angle DAE=\tfrac{1}{2}\overset{\frown}{DB}=80°.$$

習題 2. 若二弦在圓內成正交,則其所截之相對二弧之和等於半圓.



習題 2

［已知］ AB 及 CD 二弦正交於圓內一點 E.

［求證］ $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=$半圓.

［證］ $\angle AED=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$ (236).

但 $\angle AED=90°$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=2\times 90°=180°=$半圓(公理 7).

習題 3. 若於命題 XV 之圖內, $\overset{\frown}{AC}$ 與 $\overset{\frown}{BD}$ 等於 $210°$, 求 $\angle CEB$.

［解］ $\angle AEC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}(210°)=105°$.

$$\therefore \angle CEB=75°.$$

習題 4. 在同一圖 (命題 XV) 內, $\angle B=40°$, 又 $\overset{\frown}{BC}=100°$, 求 $\angle AED$.

［解］ $\angle B=40°$, 則 $\overset{\frown}{AD}=2(40°)=80°$.

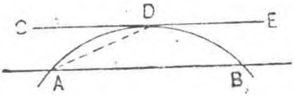
$$\angle AED=\tfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})=\tfrac{1}{2}(80°+100°)=90°.$$

第 130 頁 § 237

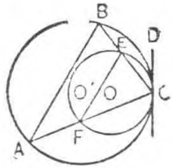
習題 1. 在命題 XVI 之圖內，$\widehat{AC}=2\widehat{CD}$，求 $\angle CAB$.

〔**解**〕 $\widehat{AC}=2\widehat{CD}$，則 $3\widehat{CD}=180^\circ$， $\therefore\ \widehat{CD}=60^\circ$.

由是 $\widehat{AC}=120^\circ$. $\therefore\ \angle CAB=60^\circ$.



習題 2



習題 3

習題 2. 弦必平行於過其所對弧中點之切線.

〔證〕 連 AD. $\angle CDA=\frac{1}{2}\widehat{AD}$，$\angle DAB=\frac{1}{2}\widehat{DB}$.

但 $\widehat{AD}=\widehat{DB}$. $\therefore\ \angle CDA=\angle DAB$. $\therefore\ CE /\!/ AB$.

習題 3. 二圓 O 與 O' 俱切 LC 於 C，求證

$$\angle DCB=\angle A=\angle EFC.$$

〔證〕 $\angle DCB$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{BC}$ 量之，$\angle A$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{BC}$ 弧量之.

$$\therefore\ \angle DCB=\angle A.$$

又 $\angle EFC$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{EC}$ 量之，$\angle DCB$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{EC}$ 量之.

$$\therefore\ \angle EFC=\angle DCB.$$

習題 4. 一圓之二切線成40°角，求二切線間之劣弧爲幾度？

〔**解**〕 二切線與二切點間之弦成一等腰三角形，故每一底角等於 70°. 由是劣弧$=140^\circ$.

第 132—133 頁 § 241

習題 1. 若二切線所成之角爲 60°，則其所截之二弧各爲幾度？

[解] 二切線所成之角爲 60°, 則二切線與二切點間之弦成一等腰三角形,每一底角皆等於 60°.

$$\therefore\quad 劣弧=120°,\ 優弧=240°.$$

或由 § 238, $\frac{1}{2}[(360°-x)-x]=60°$, 卽 $180°-x=60°$, $\therefore\ x=120°$

習題 2. 若一割線與一切線所成之角爲 20°, 而其所截弧之較大者爲 90°, 則其所截之另一弧爲幾度?

[解] 用命題 XVII 之第三圖. $\angle A=\frac{1}{2}(\widehat{BC}-\widehat{EC})$ (238).

卽 $\quad 20°=\frac{1}{2}(90°-\widehat{EC}),\quad \therefore\quad \widehat{EC}=90°-40°=50°.$

習題 3. 在命題 17 之第一圖內,若 $\widehat{BD}=100°$, 又 $\angle A=20°$, 求 $\widehat{EC}$.

[解] $\angle A=\frac{1}{2}(\widehat{BD}-\widehat{EC})$, 卽 $20°=\frac{1}{2}(100°-\widehat{EC})$. $\quad\therefore\quad \widehat{EC}=60°$.

習題 4. 在同一圖內,若 $\widehat{EC}=60°$, 又 $\widehat{EB}=\widehat{BD}=\widehat{CD}$, 求 $\angle A$.

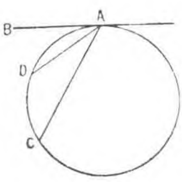
[解] $\widehat{EB}=\widehat{BD}=\widehat{CD}=\frac{1}{3}(360°-60°)=100°$.

$\angle A=\frac{1}{2}(\widehat{BD}-\widehat{EC})$, 卽 $\angle A=\frac{1}{2}(100°-60°)=20°$.

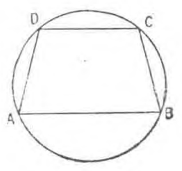
習題 5. 在命題 18 之圖內,若 $\widehat{AB}=80°$. 又 $\widehat{CD}=120°$, 求 $\angle ABC$.

[解] $\widehat{AC}=\frac{1}{2}(360°-\widehat{AB}-\widehat{CD})=\frac{1}{2}(360°-80°-120°)=80°$.

$$\therefore\quad \angle ABC=40°$$



習題 6



習題 7

習題 6. 平分切線與自切點所引一弦之夾角之直線, 必平分其所截之弧.

［已知］ AD 爲平分切線 AB 及弦 AC 之夾角 BAC 之直線.

［求證］ $\widehat{AD}=\widehat{CD}$.

［證］ $\angle BAD=\angle DAC$.

$$\angle BAD=\tfrac{1}{2}\widehat{AD}\ (237),\quad \angle DAC=\tfrac{1}{2}\widehat{CD}\ (232).$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}\widehat{AD}=\tfrac{1}{2}\widehat{CD}.$$

$$\therefore\quad \widehat{AD}=\widehat{CD}.$$

習題 7. 內接於圓之梯形必爲等腰梯形.

［已知］ 一梯形 $ABCD$ 內接於圓

［求證］ $ABCD$ 爲一等腰梯形.

［證］ $AB /\!/ CD$，則 $\widehat{AD}=\widehat{BC}$.

$$\therefore\quad AD=BC\ (187).$$

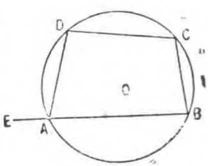
由是 $ABCD$ 爲一等腰梯形.

習題 8. 在命題 18 之圖內，若 $\widehat{AB}=80°$，又 $\widehat{CD}=200°$，求 $\angle B$.

［解］ $\widehat{AC}=\tfrac{1}{2}(360°-\widehat{AB}-\widehat{CD})=\tfrac{1}{2}(360°-80°-200°)=40°$.

$$\therefore\quad \angle B=\tfrac{1}{2}\widehat{AC}=20°.$$

習題 9. 圓之內接四邊形之一外角必等於其內對角.



習題 9

［證］ $\angle DAB=\tfrac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{CD})$，$\angle C=\tfrac{1}{2}(\widehat{AD}+\widehat{AB})$.

$$\angle DAB+\angle C=\tfrac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{AD})=\tfrac{1}{2}360°=180°.$$

$\therefore$ $\angle DAB$ 與 $\angle C$ 互爲補角. 但 $\angle EAD$ 與 $\angle DAB$ 互爲補角.

$$\therefore\quad \angle EAD=\angle C.$$

習題 10. 求圓之內接六邊形相間三角之和.

［解］ 設 $ABCDEF$ 爲圓之內接六邊形 (圖從略).

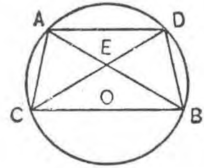
$\angle A$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF})$ 量之，餘類推。

$$\therefore\quad \angle A+\angle C+\angle E=360°.$$

習題 11. 若自同心二圓之較大一圓，作諸弦與小圓相切，則此諸弦皆相等.

［證］ 諸弦既皆為小圓之切線，則距圓心等遠，故皆相等（圖及證明從略）.

習題 12. 若二等弦相交，則順次連結其各端之直線成一等腰梯形.



習題 12

［已知］ AB 及 CD 為相等之二弦，相交於 E. 連結 AD, DB, BC, 及 CA.

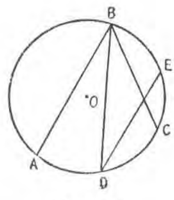
［求證］ $ADBC$ 為一等腰梯形.

［證］ $AB=CD$, 則 $\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{CAD}$.

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB},\ 又\ AC=DB.$$

$\angle DAB=\angle ABC$ (232).　$\therefore\quad AD /\!\!/ CB$.

習題 13. 延長圓周角之平分線使與圓相交，若自交點引一弦與角之一邊平行，則此弦必與角之另一邊相等.



習題 13

［已知］ BD 為圓周角 ABC 之平分線，遇圓周於 D, 而 $DE /\!\!/ AB$.

［求證］ $$DE=BC.$$

［證］ $$\angle ABD=\angle DBC=\angle BDE.$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BE}.\quad 又\quad \overset{\frown}{ECD}=\overset{\frown}{BEC}.$$

$$\therefore\quad DE=BC.$$

習題 14. 以等腰三角角形一腰為直徑之圓必平分其底邊.

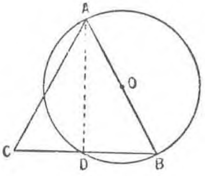
［已知］ 圓 O 作於等腰 $\triangle ABC$ 一腰 AB 之上，此圓交底邊於 D. 作

AD.

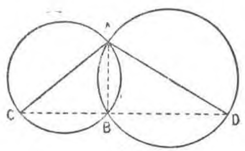
［求證］ $BD=CD$.

［證］ $\angle ADB=$直角(234) $AB=AC$, $AD=AD$,

$\therefore$ $\triangle ADB\cong\triangle ADC$(一斜邊及一直角邊相等). $\therefore$ $BD=CD$.



習題 14

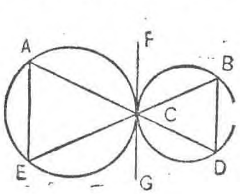


習題 15

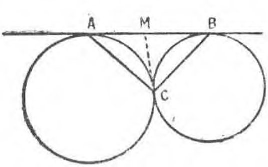
習題 15. 若二圓相交於 A 及 B, 又 AC 與 AD 爲各爲二圓之直徑, 則連結 C 與 D 之直線必通過 B.

［證］ 作 CB, BD, 及 AB. $\angle CBA=\angle ABD=90^\circ$ (234)

$\therefore$ CBD 爲一直線且與 CD 疊合.



習題 16



習題 17

習題 16. 若二圓相切,過切點作二直線,使其兩端各與二圓相遇,則連結此二直線各端之弦必互相平行.

［證］ 作公切線 FG. $\angle A=\angle ECG$ (232, 237).

$\angle ECG=\angle FCB$. $\angle FCB=\angle D$ (232, 237).

$\therefore$ $\angle A=\angle D$, 又 $AE /\!/ BD$.

習題 17. 若二圓相切於 C, 而其外公切線切圓於 A 及 B, 則角

ACB 爲一直角。

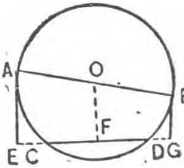
〔證〕 作內公切線 CM, 遇 AB 於 M.

$$\angle A=\angle ACM,\ \angle B=\angle BCM\ (237).$$

$$\therefore\ \angle A+\angle B=\angle C,\qquad \therefore\ \angle C=90°.$$

習題 18. 若自直徑之兩端作任一弦(必要時得延長之)之垂線，則二垂足與圓心之距離相等。

〔已知〕 AB 爲圓 O 之直徑，AE 及 BG 爲自 AB 兩端作至弦 CD (延長線)之垂線。



習題 18

〔求證〕 $OE=OG$.

〔證〕 作 $OF\perp CD$. 因 AE, OF, BG 皆垂直於 CD, 而 $AO=OB$,

$$\therefore\ EF=FG\ (148).\qquad \therefore\ OE=OG\ (125).$$

第 134 頁　　§ 243

習題 1. 已知一邊求作一等邊三角形。

〔作圖〕 作 AB 等於已知之直線。 以 A, B 爲圓心，AB 之長爲半徑作弧，使交於一點 C. 連 AC 及 BC, 則 $\triangle ABC$ 即爲所求之三角形。

習題 2. 作一等邊三角形，使其周等於已知之直線。

〔作圖〕 將已知之周依 § 151 之法三等分之。 取其三分之一爲一邊，仿習題 1 之法作一三角形，卽爲所求之三角形。

習題 3. 已知四邊及一對角線，求作一四邊形。

〔作圖〕 以對角線爲底邊，依 § 243 之法，於對角線之兩側各作一三角形，卽得所求之四邊形。

第 135 頁　　§ 244

習題 1. 在一已知腰上，求作一等腰直角三角形．

[作圖] AB 爲一已知腰，作 $BC \perp AB$ 並使 $BC = AB$. 連 AB. 則 ABC 即爲所求之等腰直角三角形．

習題 2. 已知底邊及一底角，求作一等腰三角形．

[解] 已知一底角，因等腰三角形底角相等，故他一底角亦爲已知．由是知二底角及其所夾之底邊，即可依 § 244 之法作之．

第 135 頁　　§ 246

習題 1. 已知一腰及頂角，求作一等腰三角形．

[解] 延長已知頂角之兩邊，使各等於已知腰之長，再連結其二端點，即得所求之三角形．

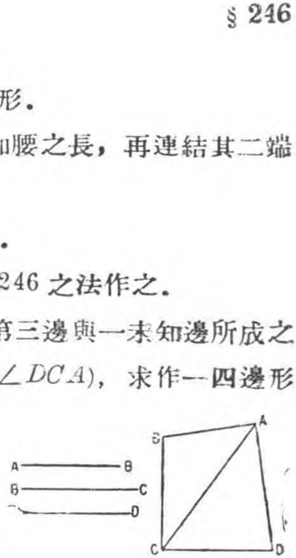
習題 2. 已知二直角邊，求作一直角三角形．

[解] 二直角邊所夾者爲一直角，故可依 § 246 之法作之．

習題 3. 已知三邊 (AB, BC, 及 CD), 及第三邊與一未知邊所成之角 ($\angle D$), 又知第三邊與對角線所成之角 ($\angle DCA$), 求作一四邊形 ($ABCD$).

[已知] AB, BC, 及 CD, 又知 $\angle D$ 及 $\angle DCA$.

[求] 作一四邊形．



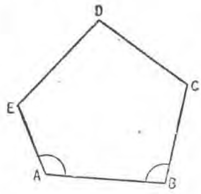
習題 3

[作圖] 延長 $\angle D$ 及 $\angle DCA$ 之各一邊，使相交於 A.

以 A 及 C 爲圓心，AB 及 BC 爲半徑，作弧，相交於 B. 連 AB 及 BC. 則 $ABCD$ 卽爲所求之四邊形.

習題 4　已知五邊 (AB, BC, CD, DE 及 EA)，及夾其中一邊之二角 ($\angle A$ 及 $\angle B$)，求作一五邊形 ($ABCDE$).

［作圖］ 作 AB 及 $\angle A$ 與 $\angle B$. 將二角之各一邊延長之，使 BC 與 AE 各等於已知之長. 由是得一四邊形 $ABCE$. 再以 C 及 E 爲圓心，CD 及 DE 爲半徑作弧，得交點 D. 連 CD 及 ED. 卽得所求之五邊形.



習題 4

習題 5.　已知四邊及一角，求作一四邊形.

若先作與已知角不相鄰之一邊，習題 5 能得解否?

［作圖］ 作直線 AB 等於一邊之長. 作 $\angle B$ 等於一已知角. 作 BC 等於已知第二邊之長. 以 A 及 C 爲圓心，第三及第四已知邊爲半徑，作弧相交於 D. 連 AD 及 CD. 則 $ABCD$ 卽爲所求之四邊形.

又若先作與 $\angle B$ 不相鄰接之一邊，則此圖不能作成.

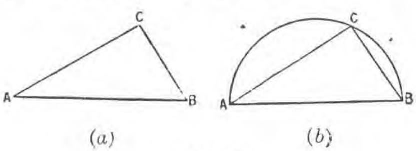
習題 6.　求作一菱形，已知其周及一角.

［解］ 先將其周依 §151 之法分爲四等分，然後用習題 5 之法作之.

第 136 頁　§ 247

習題 1.　已知斜邊及一銳角，試用命題 22 之法作一直角三角形.

［解］ 直接依命題 22 之法作之. $\angle A = 90^\circ$.



習題 2

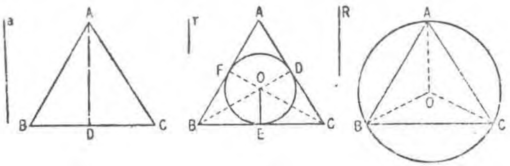
習題 2.　前題若不用命題 22 之法，試另覓一法作之.

[作圖] (*a*) 作 AB 等於已知斜邊之長. 在 A 端作 $\angle A$ 使等於已知之銳角,再自 B 端作一線垂直於 AC, 則 ABC 卽爲所求之三角形.

(*b*) 以已知之斜邊 AB 爲直徑,作一半圓. 在直徑之 A 端作一角等於已知之銳角,延長此銳角之第二邊與半圓相交於 C, 連 BC. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

習題 3. 已知一直角邊及其對角,求作一直角三角形.

[解] 依命題 22 之法作之.



(*a*) (*b*) (*c*)

習題 4

習題 4. 求作一等邊三角形,已知

(*a*) 高.

(*b*) 內切圓半徑.

(*c*) 外接圓半徑.

[已知] 高爲 a, 內切圓半徑爲 r, 外接圓半徑爲 R.

[求] 作一等邊三角形.

(*a* 作 AD 等於已知高 a, 作 BC 垂直於 AD 再於 A 之兩側作 $\angle BAD$ 及 $\angle CAD$ 使等於 $30°$. 延長 AB 及 AC 交 IC 於 B 及 C 則 ABC 卽爲所求之三角形.

(*a*) 以 r 爲半徑作一圓. 畫半徑 OE, 於 O 作 $\angle COE$ 及 $\angle BOE$ 各等於 $60°$. 作 $BC \perp OE$, 交 OB, OC 之延長線於 B, C. 則 BC 卽爲所求等邊三角形之一邊. 依第 134 頁習題 1 之法作成 $\triangle ABC$. 或自 B 及 C 各作圓之切線,使其相交於 A, 亦得 $\triangle ABC$. 證從略.

(c) 以 R 爲半徑作圓.在 O 作三圓心角各等於 $120°$,然後連 A, B 及 C,則 ABC 卽爲所求之等邊三角形.

〔證〕 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$, $\therefore\ \widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA}=120°$.

$$\therefore\quad AB=BC=CA.$$

第 137 頁　　§ 248

習題 1. 在命題 23 內,若 A 爲鈍角,則能有幾解?若 A 爲直角,則有幾解?又若 A 爲銳角,則有幾解?

〔解〕 (a) 若 $\angle A$ 爲鈍角,而 $a>b$ 則有一解. 若 $a<b$. 則無解.

(b) 同上.

(c) 若 $\angle A$ 爲銳角,而 p 爲自 D 至 EF 之垂線.

若 $a<p$ 則無解.

若 $a=p$ 則有一解.

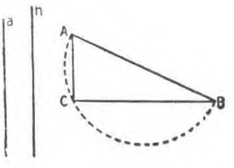
若 $p<a<b$ 則有二解.

若 $a=b$, 或 $a>b$ 則有一解.

習題 2. 已知斜邊及一直角邊,求作一直角三角形.

〔解〕 此爲命題 23 之特例,因直角爲已知也. 故可依命題 23 之法作之. 圖從略.

習題 3 先作斜邊以解前題.



習題 3

〔作圖〕 作 AB 等於已知之斜邊 h. 以 AB 爲直徑畫一半圓. 再自 B 作弦 BC 等於已知直角邊之長 a, 遇半圓於 C. 連 AC, 則 ABC 卽爲所求之三角形.

〔證〕 $AB=h$, $BC=a$, $\angle ACB=90°$ (234), $\therefore$ ABC 爲一直角三角形.

第 138 頁　　§ 249

習題. 三角形之三角是否爲三獨立部分. 若已知三角,能作一三角形否?

[解] 三角形之三角不爲獨立部分. 若已知三角,可以任一線爲底邊作一三角形(244),其數可以多至無限.

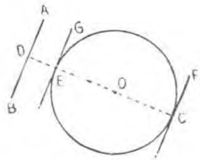
第 139 頁　　§ 250

習題 1. 作一直線,切於一已知圓,且平行於一已知之直線.

[已知] O 爲已知圓之圓心,AB 爲已知直線.

[求] 作一直線切於圓 O,而平行於 AB.

[作圖] 自圓心 O 作直線 CD 垂直於 AB,交圓周於 C 及 E. 在 C 及 E 各依 § 250 之法作圓之切線 CF 及 EG. 則 CF 及 EG 皆爲所求之直線.



習題 1

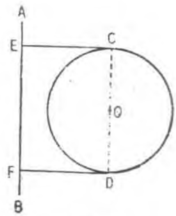
[證] CF 及 EG 皆爲圓之切線. CF 及 EG 皆垂直於 COE, $\therefore$ CF, EG 皆平行於 AB.

習題 2. 作一直線,切於一已知圓,且垂直於一已知之直線.

[已知] O 爲已知圓之圓心,AB 爲已知直線.

[求] 作一直線切於圓 O 而垂直於 AB.

[作圖] 作直徑 $CD /\!/ AB$. 在 C 作切線 CE 遇 AB 於 E; 在 D 作切線 DF 遇 AB 於 F. 則 CE, DF 皆爲所求之直線.



習題 2

[證] $CD /\!/ AB$, $\therefore$ $\angle C + \angle E = 2$ 直角.

但 $\angle C$ 爲直角, $\therefore$ $\angle E$ 亦爲直角.

由是 $CE \perp AB$, 且 CE 爲圓之切線.

同樣, DF 爲圓之切線,且垂直於 AB.

第 139 頁

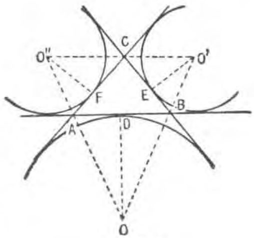
§ 252

習題 1. 作三角形之三傍切圓.

[已知] $\triangle ABC$.

[求] 作 $\triangle ABC$ 之三傍切圓.

[作圖] 延長 $\triangle ABC$ 之三邊.作諸外角之平分線,相遇於 O, O', O'' 三點.自 O 作 $OD \perp AB$, 自 O' 作 $O'E \perp BC$, 自 O'' 作 $O''F \perp AC$. 以 O, O', O'' 為圓心, $OD, O'E, O''F$ 為半徑,分別畫圓,則所得三圓卽為所求之傍切圓.



習題 1

習題 2. 三角形一角之平分線交外接圓於一點, 此點與三角形其他二頂點及內切圓之圓心等距離.

[已知] ABC 為內接於圓之三角形, AD 為 $\angle A$ 之平分線,遇圓周於 D. O 為內切圓之圓心.

[求證] $BD = CD = OD$.

[證] $\angle DOC = \angle CAO + \angle OCA$ (120).

$\angle OCA = \angle BCO$ (平分).

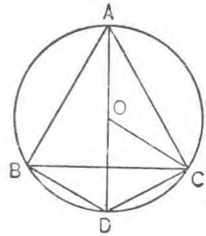
$\angle CAO = \angle BAD = \angle BCD$ (232).

$\therefore \quad \angle DOC = \angle BCD + \angle BCO = \angle DCO$.

又 $DO = DC$.

因 $\angle A$ 為 AD 所平分,故 $\overparen{BD} = \overparen{CD}$, 卽 $BD = CD$.

$\therefore \quad BO = CD = OD$.

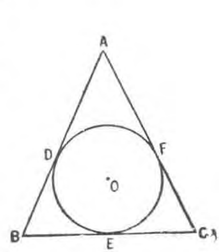


習題 2

習題 3. 一圓內切於三邊為 9, 8, 及 9 之三角形,求切點至三頂點之距離 (209).

[解] 設 $\triangle ABC$ 內, $AB = AC = 9$, $BC = 8$. D, E, F 各為切於 AB, BC, AC 之切點. 則 $AD = AF$, $BD = BE$, $CE = CF$ (209).

故 $AB + AC - BC = AD + AF = 2AD$.



習題 3

以數值代入，得 $9+9-8=2AD$，即 $AD=AF=5$.

由是 $BD=9-5=4=BE$, $CF=9-5=4=CE$.

第 140 頁 §25

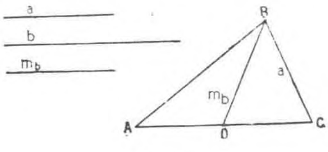
習題. 試於長 2 吋之直線上作一弓形，使含一 30° 之角；45° 之角；60° 之角；135° 之角。

［作圖］ 依 §253，作 $\angle M=30°$，或 45°，或 60°，或 135°. 作任意直線 PQ. 在長 2 吋之直線 AB 上作 $\triangle ABC$，使 $\angle A=\angle Q$, $\angle B=\angle P$. 作 $\triangle ABC$ 之外接圓，則 ACB 即爲所求之弓形。

第 144 頁 §256

已知下之部分，求作一三角形。(1－14)

習題 1. a, b, m_b.

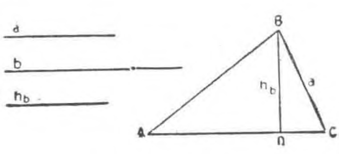


習題 1

［作圖］ 作 $AC=b$，平分 AC 得 D.

以 D 爲圓心，m_b 爲半徑作弧；再以 C 爲圓心，b 爲半徑作弧，二弧相交於 B. 連 BC 及 AB. 則 ABC 即爲所求之三角形。

習題 2. a, b, h_b.



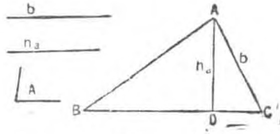
習題 2

〔作圖〕　以 a 及 h_b 依第 134 頁習題 2 之法，先作直角三角形 BDC. 次延長 CD 至 A，使 $AC=b$　連 AB. 則 ABC 即爲所求之三角形。

〔討論〕　若 $h_b>a$，則此題無解。

習題 3.　$b, h_a, \angle A$.

〔作圖〕　以 b 爲斜邊，h_a 爲一直角邊，作一直角三角形 ADC. 作 $\angle BAC=\angle A$. 延長 AB 交 CD 之延長線於 B. 則 ABC 即爲所求之三角形。



習題 3

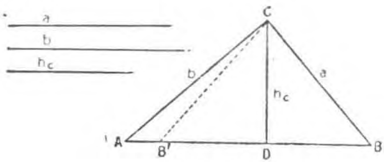
習題 4.　$b, t_c, \angle A$.

〔作圖〕　作一三角形，使其各部分爲 b, t_c, 及 $\angle A$ (248)，然後作 $\angle C$ 完成所求之三角形。　圖從略。

習題 5.　$a, h_b, \angle B$.

〔作圖〕　以 a 爲斜邊，h_b 爲直角邊，作一直角三角形。　再作 $\angle B$，即可完成所求之三角形。　圖從略。

習題 6.　a, b, h_c, (2△).



習題 6

〔作圖〕　以 a 爲斜邊，h_c 爲直角邊，作直角 $\triangle BCD$. 再以 b 爲斜邊，仍用 h_c 爲直角邊，作直角 $\triangle ACD$. 於是 ABC 即爲所求之三角形。

又以 C 爲圓心，CB 爲半徑，作弧，截 AB 於 B'，則鈍角 $\triangle AB'C$ 亦爲所求之三角形。

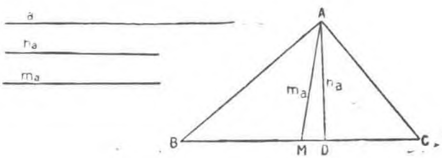
習題 7.　$\angle C, t_c, b$.

〔作圖〕　以 $\frac{1}{2}\angle C, b$, 及 t_c 作一三角形 (246). 再作 $\angle C$. 用 $s.a.s.$ 完成所求之三角形。　圖從略。

習題 8. $\angle A, \angle B, h_a$.

［作圖］ 以 h_a 爲直角邊，$\angle B$ 爲其對角，依第 136 頁習題 3 之法作一直角三角形。 再作 $\angle A$，用 a. s. a. 完成此所求之三角形。

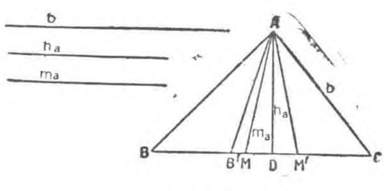
習題 9. a, h_a, m_a.



習題 9

［作圖］ 以 m_a 爲斜邊，h_a 爲直角邊，作直角 $\triangle AMD$. 將 MD 向兩邊延長之，使 $MB=MC=\frac{1}{2}a$. 連 AB 及 AC. 則 $\triangle ABC$ 即爲所求之三角形。

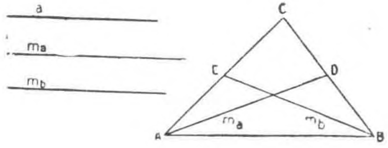
習題 10. b, h_a, m_a, (2△).



習題 10

［作圖］ 以 m_a 爲斜邊，h_a 爲直角邊，依 §248 之法作直角三角形，可得 ADM 與 ADM' 二三角形。 再以 A 爲圓心，b 爲半徑，作弧，交 MD 之延長線於 C. 延長 DM 至 B，使 $BM=CM$. 連 AB. 則 ABC 即爲所求之三角形。 或延長 DM 至 B'，使 $M'B'=CM'$，連 AB'. 則 $AB'C$ 亦爲所求之三角形。

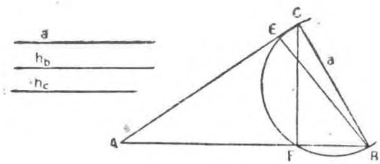
習題 11.　a, m_a, m_b.



習題 11

〔作圖〕　以 $\frac{1}{2}a, \frac{1}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b$ 爲三邊，作 $\triangle BDF$. 延長 BD 至 C，使 $CD=BD$. 延長 DF 至 A，使 $AF=2DF$. 連 CA, AB. 則 ABC 卽爲所求之三角形。

習題 12.　a, h_b, h_c.



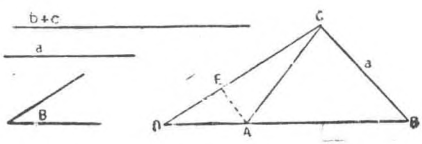
習題 12

〔作圖〕　作 $BC=a$. 以 BC 爲直徑作一半圓。作弦 $BE=h_b$. $CF=h_c$ 連 CE 及 BF，並延長之使相遇於 A. 則 ABC 卽爲所求之三角形。

習題 13.　$\angle A+\angle B, a, b$.

〔解〕　$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$. 故已知 a, b 二邊及其夾角 C，可依 § 246 之法作其三角形。(圖及作法從略。)

習題 14.　$a, \angle B, b+c$.



習題 14

[作圖] 作 $BD=b+c$, 並作 $\angle B$. 取 $BC=a$, 連 CD, 則得 $\triangle BCD$. 平分 CD 於 E, 在 E 作垂線 EA, 延長之使交 BD 於 A. 連 CA. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

[證] AE 爲 CD 之中垂線, 故 $AC=AD$.

$$BD=BA+AD=BA+AC=b+c.$$

習題 15. 已知底邊與頂角,求作一等腰三角形.

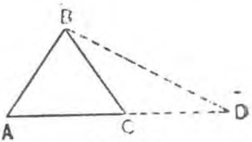
[作圖] 因底角與頂角之半爲餘角,或爲頂角之補角之半,故可依第 38 頁習題 6 先作 $\angle A$ 之補角之半,再依 §245 已知二角及其夾邊之作法,作成 $\triangle ABC$ 卽得. 圖從略.

習題 16. 已知底邊與一腰之和,及一底角,求作一等腰三角形.

[分析] 設 ABC 爲所求之三角形, 延長 AC 至 D, 使 $DC=BC$, 則 $AD=$底邊 AB 與一腰之和. 連 BD.

因 $BC=DC$, $\therefore$ $\angle D=\angle CBD$.

$$\angle ACB=\angle D+\angle CBD=2\angle D.$$



習題 16

由是作 $\triangle ABD$, 已知其 $\angle A$, $\angle D=\frac{1}{2}\angle A$, 及 $AD=$底+一腰.

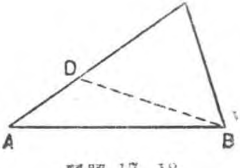
[作圖] 以 $\angle A$ 及 $\frac{1}{2}\angle A$ 與 AD 作 $\triangle ABD$ (244).

作 $\angle CBD=\angle D$. 延長 BC 交 AD 於 C. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

習題 17. 已知一角及其一鄰邊,又其餘二邊之差,求作一三角形.

[分析] 設 ABC 爲所求之三角形, $\angle A$ 爲已知角, AB 爲已知邊. 於 CA 上截取 $CD=CB$, 則 $AD=CA-CB$.

由是知 $\triangle ADB$ 之二邊及其夾角,故此三角形可作.



習題 17, 18

[作圖] 以 AB, 二邊之差 AD 及其夾角 A, 作 $\triangle ADB$ (246).

延長 AD 使與 DB 之中垂線(圖中未畫出)相遇於 C, 連 BC.

則 ABC 卽爲求之三角形。

[證] $\angle CDB=\angle CBD$, $\therefore CD=CB$, $\therefore AD=AC-BC$.

習題 18. 已知底邊,其他二邊之差及二邊之夾角,求作一三角形。

[分析] 設 ABC 所求之三角形. 截取 $CD=BC$. 連 DB.

$\angle CDB=\angle CBD$. $\angle CDB=90°-\frac{1}{2}\angle C$. $\therefore \angle ADB=90°+\frac{1}{2}\angle C$.

由是在 $\triangle ADB$ 內,已知底邊 AB, 其他二邊之差 AD, 及其他二邊間之夾角 ADB. 故可依 § 248 之法作成 $\triangle ADB$.

[作圖] 作 $\triangle ADB$ $(s. s. a.)$. 延長 AD 遇 BD 之中垂線於 C. 連 BC. 則 ABC 卽爲所求之三角形. 證從略。

求作一直角三角形 (19－21), 已知

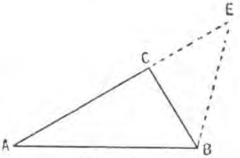
習題 19. 一直角邊及斜邊上之高。

[作圖] 以已知直角邊爲斜邊,以斜邊上之高爲直角邊,先作一直角三角形; 再作直角與另一直角邊之延長線相交, 卽得所求之直角三角形.圖從略。

習題 20. 斜邊及二直角邊之差。

[作圖] 用習題 17 之圖. 設 $\angle C=90°$, 則由習題 18 知 $\angle ADB=135°$. 故可用習題 18 之法作之。

習題 21. 斜邊及二直角邊之和。



習題 21

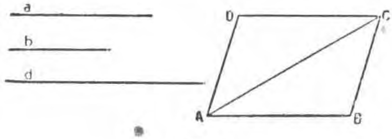
[分析] 設 ABC 爲所求之直角三角形. AB 爲所知之斜邊. 延長 AC 至 E, 使 $CE=CB$. 則 AE 爲 AC 與 BC 之和. 又 $\angle E=\angle B=45°$. 故 $\triangle ABE$ 可以作成。

[作圖] 以 AB, AE 及 $\angle E=45°$, 作 $\triangle ABE$.

自 B 作 $BC\perp AE$, 則 $\triangle ABC$ 卽爲所求之三角形。

習題 22. 求作一平行四邊形,已知其各邊及一對角線。

[作圖] 以 a, b, d 爲三邊作一 $\triangle ABC$ (243). 再以 AC 爲底,作一



習題 22

三角形與$\triangle ABC$全等，使$CD=a$, $AD=b$, 則$ABCD$即爲所求之平行四邊形.

［證］ 平行四邊形之對角線平分平行四邊形爲二全等三角形.

第 145 頁 　　§ 259

習題. 求作下列之軌跡，證可省略.

(a) 距已知點$\frac{3}{4}$吋之一點之軌跡.

(b) 距已知直線$\frac{1}{4}$吋之一點之軌跡.

(c) 與二平行線等距離之點之軌跡.

(d) 與已知直線平行而在一已知圓內之弦之中點之軌跡.

(e) 平行於三角形之底邊而止於其他二邊之直線之中點之軌跡.

(f) 與二已知直線等距離之點之軌跡.

(g) 切於已知圓而長$\frac{1}{4}$吋之切線，其一端之軌跡.

(h) 半徑$\frac{1}{4}$吋且外切於半徑一吋之圓，其圓心之軌跡.

［解］ (a) 以已知點爲中心，$\frac{3}{4}$吋爲半徑之圓.

(b) 與已知直線兩側相距$\frac{1}{4}$吋之二平行線.

(c) 在二平行線中間之平行直線.

(d) 垂直於已知各弦之一之直徑.

(e) 底邊之中線.

(f) 若二直線平行，作法同 (c). 若二直線不平行，則平分此二直線所成四角之二平分線，即爲所求之軌跡.

(g) 與已知圓同心，而過切點末端之一圓，即其一端之軌跡.

(h) 與已知圓同心，而半徑爲$1\frac{1}{4}$吋之圓.

第 146—147 頁

§ 264

習題 1. 求一已知圓之半徑中點之軌跡.

［解］ 作一同心圓，其半徑等於已知圓半徑之半.則此同心圓卽為所求之軌跡.

習題 2. 直角之二邊通過二定點，求直角頂點之軌跡.

［解］ 設 A 及 B 爲二已知點.則以 AB 爲直徑所作之圓，卽所求之軌跡.

習題 3. 半徑爲已知且切於一已知直線之圓，求其圓心之軌跡.

［解］ 與已知直線距離等於已知半徑之二平行線，爲所求圓心之軌跡.

習題 4. 半徑爲已知且通過一已知點之圓，求其圓心之軌跡.

［解］ 以已知點爲圓心，已知半徑爲半徑作一圓，此圓卽爲所求之軌跡.

習題 5. 通過二定點之圓求其圓心之軌跡.

［作圖］ 設二定點爲 P 及 Q，作連結二點之直線 PQ，並作其中垂線. 此中垂線卽爲所求之軌跡.

習題 6. 求切於二已知直線諸圓之圓心之軌跡.

［解］ (*a*) 若已知二直線互相平行，仿第 145 頁習題 (*c*) 之法求其軌跡.

(*b*) 若已知二直線相交成四角，則作此四角之平分線，卽爲所求之軌跡.

習題 7. 求半徑爲已知且切於另一已知圓之圓心之軌跡.

［解］ 作與已知圓同心之二圓：一圓之半徑等於已知半徑與已知圓半徑之和，另一圓之半徑等於二者之差.則此二圓皆爲所求之軌跡.

習題 8. 求切於已知直線上一定點諸圓之圓心之軌跡.

［解］ 在已知直線上之已知點，作此直線之垂線，卽爲所求之軌跡.

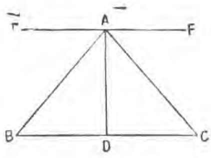
習題 9. 求切於已知圓上一定點諸圓之圓心之軌跡.

［解］ 連結已知圓之圓心與圓上之定點,將此直線無限引長之,卽爲所求之軌跡.

習題 10. 一三角形二頂點 B 與 C 之位置爲固定,若 h_a 等於一已知直線,求第三頂點 (A) 之軌跡.

［作圖］ 連接 BC. 在 BC 上任一點立一垂線 AD, 使 $AD=h_a$. 過 A 作 EF 平行於 BC, 則 EF 爲頂點 A 之軌跡.

又將 AD 向下延長,使延長之部分等於 h_a, 過其端點作平行於 BC 之直線,可得所求之另一軌跡(圖上未畫出).

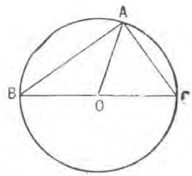


習題 10

習題 11. 一三角形二頂點 B 與 C 之位置爲固定,若 m_a 等於一已知直線,求第三頂點 (A) 之軌跡.

［作圖］ 連接 BC,求得其中點 O.

以 O 爲圓心,已知之 m_a 爲半徑作一圓. 則此圓卽爲頂點 A 之軌跡.



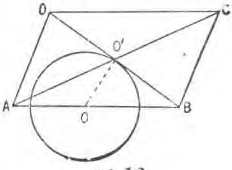
習題 11

習題 12. 一平行四邊形底邊之位置與長皆已固定, 且其鄰邊有定長,求其對角線交點之軌跡.

［作圖］ 以底邊 AB 與鄰邊 AD 爲二邊, 作 $\square ABCD$.

作對角線 AC 及 BD,二者相交於 O'.

平分 AB, 求得其中點 O, 以 O 爲圓心, OO' 之長爲半徑,作圓. 則此圓卽爲 AC 邊變動時所成平行四邊形對角線交點之軌跡.



習題 12

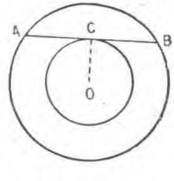
［證］ 連結 OO'. 無論 AD 之位置若何, O' 必爲對角線之中點 (146). 又 O 爲 AB 之中點. $\therefore\ OO'=\frac{1}{2}AD$ 且平行於 AD.

今 AD 有定長,故 OO' 亦必有定長. 則 AD 繞 A 轉動,OO' 亦必以 $\frac{1}{2}AD$ 之長繞 O 轉動,因而成爲一圓.

習題 13. 矩形底邊之位置一定,求其對角線交點之軌跡.

[作圖] 作矩形底邊之中垂線,即爲所求之軌跡.

習題 14. 於已知圓內作已知長之弦,求其中點之軌跡.



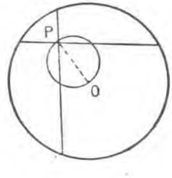
習題 14

[作圖] 作 $OC \perp$ 已知長之弦 AB. 以 O 爲圓心,OC 爲半徑,作一同心圓. 此同心圓即爲所求之軌跡.

[證] $OC \perp AB$. $\therefore$ $AC = BC$,

而 C 爲小圓周上之切點. 因等弦與圓心之距離相等,故此中點必在一圓周上.

習題 15. 通過圓內一定點之諸弦,求其中點之軌跡.

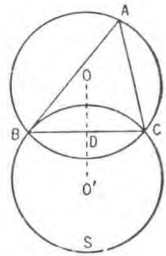


習題 15

[作圖] 連結圓心 O 與定點 P. 以 OP 爲直徑作圓. 則此圓即爲所求之軌跡.

[證] 圓心 O 至各弦垂線之垂足,即爲各弦之中點,又半圓內之圓周角皆爲直角. 故凡過點 P 之諸弦,中點皆在此圓上.

習題 16. 底邊一定且頂角爲已知之三角形,其頂點之軌跡爲一弧.



習題 16

[已知] A 爲已知之頂角,BC 爲已知底邊.

[求] 作頂點 A 之軌跡.

[作圖] 依第 140 頁,§ 253 作圖得弧 BAC. 又以 B 爲圓心,OB 爲半徑作弧,交 BC 之中垂線 OD 之延長線於 O'. 再以 O' 爲圓心,$O'B$ 爲半徑作圓,得另一弧 BSC.

則弧 BAC 與弧 BSC 皆爲所求之軌跡.

［證］ 在弧 BAC 上任一點連至底邊兩端 B 及 C 之直線,成頂角 A, 其頂點皆適合已知之條件 (253). 若頂點在弧外, 則此角卽較小(238); 若頂點在弧內,此角卽較大 (236).

在弧 BSC 上之頂點亦然.

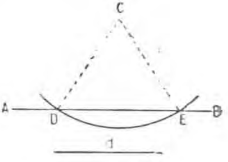
故弧 BAC 及 BSC 皆爲頂點 A 之軌跡.

第 148–149 頁　　§ 265

習題 1. 在已知直線 AB 上求一點,距定點 C 等於已知距離 d.

［已知］ AB 爲定直線, C 爲定點, d 爲已知之距離.

［求］ 於 AB 上與 C 相距 d 之點.



習題 1

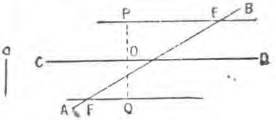
［作圖］ 以 C 爲圓心,以等於 d 之距離爲半徑,作圓,交 AB 於 D 及 E. 則 D, E 皆爲所求之點.

［討論］ 若圓與 AB 相切,則僅可得一點. 若圓與 AB 不相交,則此題無解.

習題 2. 在已知直線 AB 上求一點,距定直線 CD 等於已知距離 d.

［已知］ AB 及 CD 爲二不平行之直線, d 爲已知距離.

［求］ 於 AB 上作一點與 CD 之距離爲 d.



習題 2

［作圖］ 在 CD 上任一點 O 作垂線 PQ, 使 $OP=OQ=d$. 過 P 及 Q 作平行於 CD 之直線,分別交 AB 於 E 及 F. 則 E, F 皆爲所求之點.

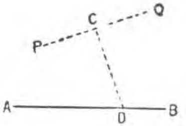
［討論］ 若 $AB \parallel CD$, 而 AB 與 CD 之距離適等於 d, 則 AB 上任一點皆合所與之條件. 若 AB 與 CD 之距離不等於 d, 則此題無解.

習題 3. 在已知直線 AB 上求一點,與已知二點 P 及 Q 等距離.

［已知］ 直線 AB，及二定點 P 與 Q.

［求］ 於 AB 上作一點與 P 及 Q 等距離.

［作圖］ 連 PQ. 作 PQ 之中垂線 CD. 延長 CD 使與 AB 相交於 D. 則 D 卽爲所求之點.



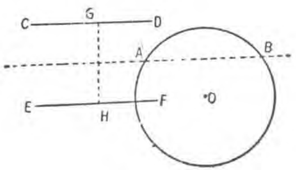
習題 3

［討論］ 若 AB 與 PQ 之中垂線平行，則此題無解.

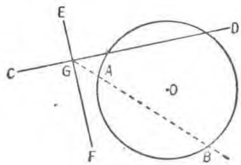
習題 4. 在已知圓上求一點，距定點 C 等於已知距離 d.

［作圖］ 以定點 C 爲圓心，已知距離 d 爲半徑，作圓，交已知圓於兩點，則此兩點皆爲所求之點.（圖略）.

［討論］ 若所作之圓與已知圓僅相交於一點，則有一解. 若二圓不相交，則此題無解.



習題 5



習題 6

習題 5 在已知圓上求一點，與已知二平行線 CD 及 EF 等距離.

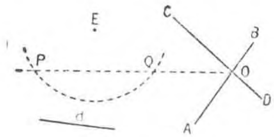
［作圖］ 作 GH 垂直於 CD 及 EF. 作 GH 之中垂線，延長之使交圓 O 於 A 及 B. 則 A，B 皆爲所求之點.

［討論］ 若 GH 之中垂線切於圓 O，則此題僅得一解. 若不與圓 O 相遇，則此題無解.

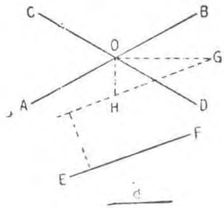
習題 6. 在已知圓上求一點，與已知相交二直線 CD 及 EF 等距離.

［作圖］ 設 CD 與 EF 相交於 G，作 $\angle DGF$ 之平分線，延長之交已知圓之圓周於 A，B 二點. 則 A，B 卽爲所求之點.

［討論］ 此題最多可得 4 解，亦可爲 3 解，2 解，1 解，及 0 解，視二直線對於圓之位置而定.



習題 7



習題 8

習題 7. 求一點，與已知之相交二直線 AB 及 CD 等距離，且距一定點 E 等於已知之距離。

［作圖］ 第一軌跡：以 E 爲圓心，以等於已知距離之 d 爲半徑所作之一圓。

第二軌跡：AB 與 CD 相交於 O，共成四角。 平分此四角得二直線。

第一與第二兩軌跡之交點，卽爲所求之點。

［討論］ 此題有 4 解，3 解，2 解(如圖)，1 解，或無解。

習題 8. 求一點，與已知之相交二直線 AB 及 CD 等距離，且距一定直線 EF 等於已知之距離。

［作圖］ 第一軌跡：作 AB 與 CD 所成諸角之平分線，如 CG, OH.

第二軌跡：依已知距離 d 作二直線平行於 EF.(圖中僅畫一平行線).

以上二軌跡之交點，卽爲所求之點。

［討論］ 此題可有 2 解或 4 解。

習題 9. 求一點，與已知之相交二直線 AB 及 CD 等距離，且距二定點 E 及 F 等距離。

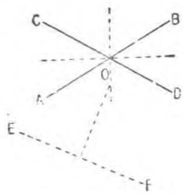
［作圖］ 連結 EF.

第一軌跡爲 AB 及 CD 所成各角之平分線。

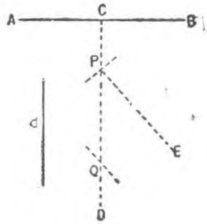
第二軌跡爲 EF 之中垂線。

以上二軌跡之交點，即爲所求之點。

[討論]　此題可有 1 解或 2 解。



習題 9



習題 10

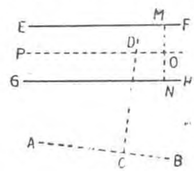
習題 10.　求一點，與二定點等距離，且距定點 E 等於已知之距離。

[作圖]　連結 AB.　作 AB 之中垂線 CD.

以 E 爲圓心，已知之距離 d 爲半徑作圓，截 CD 於 P 及 Q.　則 P, Q 皆爲所求之點。

[討論]　若已知距離 d 適等於 E 至 CD 之垂線，則此題僅有一解。若 d 小於 E 至 CD 之垂線，則此題無解。

習題 11.　求一點，與二定點等距離，且與已知之二平行線 EF 及 GH 等距離。



習題 11

[作圖]　連結 AB.

第一軌跡: AB 之中垂線 CD.

第二軌跡: 作 $MN \perp EF$ 及 GH, 過 MN 之中點 O 作 EF 之平行線 OP.

CD 與 OP 之交點爲 D, 則 D 即爲所求之軌跡.

[討論]　若 CD 與 OP 平行，則此題無解。

習題 12.　求一點，與已知二平行線等距離，且與已知之相交二直線 EF 及 GH 等距離。

[作圖]　第一軌跡：與已知二平行線平行，且在二線正中之一直線。

第二軌跡：EF 及 GH 所成各角之平分線。

以上二軌跡之交點，即爲所求之點(圖從略)。

[討論]　此題可有 2 解或 1 解。

習題 13.　求一點，距一已知直線 AB 等於已知距離 d，且與二定點 E 及 F 等距離。

[作圖]　第一軌跡：與 AB 平行，且與 AB 之距離等於已知距離 d 之二平行線。

第二軌跡：連結 EF 所作之中垂線。

以上二軌跡之交點，即爲所求之點(圖從略)。

[討論]　此題有 2 解或 0 解。

習題 14.　求一點，距一已知直線 AB 等於已知距離 d，且與已知二平行線 EF 及 GH 等距離。

[作圖]　第一軌跡：與 AB 平行而相距爲 d 之二直線。

第二軌跡：與 EF 及 GH 平行而適在二線正中間之直線。

以上二軌跡之交點，即爲所求之點(圖從略)。

[討論]　此題有 2 解或 0 解。

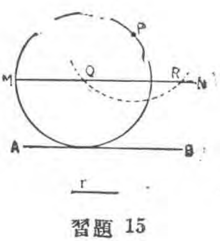
已知圓之半徑，求作一圓 (15—19)：

習題 15.　切於一已知直線並過一定點。

[已知]　圓之半徑爲 r，已知直線爲 AB，定點爲 P.

[求]　作一圓切於 AB 並過定點 P.

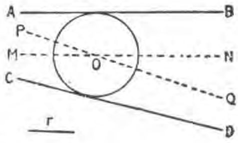
[作圖]　作 $MN /\!/ AB$，而二者間之距離等於半徑 r.　以 P 爲圓心，r 爲半徑，作弧，交 MN 於 Q 及 R.　則 Q, R 皆爲所求圓之圓心。



習題 15

[討論]　此題有 2 解，1 解，或無解。

習題 16. 切於二已知直線.



習題 16

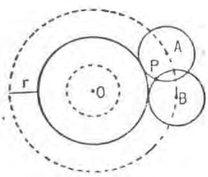
［作圖］ 作 MN 平行於已知直線 AB, 且使二線間之距離等於已知半徑 r.

作 PQ 平行於另一已知直線 CD, 且使二線間之距離等於 r.

MN 與 PQ 相交於 O. 則 O 即爲所求圓之圓心.

［討論］ 除 $AB /\!/ CD$ 外, 此題可得 4 解, 即引長 BA 及 DC 使之相交, 共可得四角, 在每一角內可作一圓符合所與之條件. 又若 AB 與 CD 平行, 而相距大於 $2r$, 則此題無解. 若相距適等於 $2r$, 則有無數之解.

習題 17. 過一定點並切於一已知圓.



習題 17

［作圖］ 第一軌跡: 以已知點爲圓心, 已知半徑 r 所作之圓.

第二軌跡: 作二圓與已知圓 O 同心, 其半徑各等於 r 與已知圓半徑之和及差.

以上二軌跡之交點 A 及 B, 皆爲所求圓之圓心.

［討論］ 若第一軌跡所作之圓與第二軌跡所作之圓僅有一點相遇, 則此題僅得一解. 若二軌跡不相遇, 則此題無解.

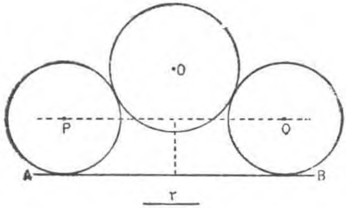
習題 18. 切於二已知圓.

［作圖］ 第一軌跡: 以已知圓之圓心 O 爲心, 以其半徑與已知半徑之和及差爲半徑所作之二圓(第 147 頁習題 7).

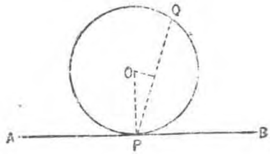
第二軌跡: 以另一已知圓之圓心 O' 爲心, 以其半徑與已知半徑之和及差爲半徑所作之二圓(第 147 頁習題 7).

以上二軌跡之交點, 即爲所求圓之圓心(圖從略).

［討論］ 若已知二圓之圓周相距大於 $2r$ 則無解. 若等於 $2r$, 則僅有一解. 若相距小於 $2r$, 則有二解. 最多可得 8 解.



習題 19



習題 20

習題 19. 切於一已知圓及一已知直線.

[已知] 圓 O 及一直線 AB, r 為半徑.

[求] 以 r 為半徑作一圓切於圓 O 及直線 AB.

[作圖] 第一軌跡: 以 O 為圓心, 原半徑加 r 為半徑所作之同心圓.

第二軌跡: 平行於 AB 而距離等於 r 之平行線.

以上二軌跡之交點, 如 P 及 Q, 即為所求圓之圓心.

[討論] 同前題, 最多可得 8 解, 玆不贅.

求作一圓 (20—22):

習題 20. 切於已知直線上之一定點, 並過直線外之一定點.

[已知] P 為直線 AB 上之一定點, Q 為 AB 外之另一定點.

[求] 作一圓切於 P 且過 Q.

[作圖] 第一軌跡: 在 AB 上 P 處之垂線.

第二軌跡: 連結 FQ 線之中垂線.

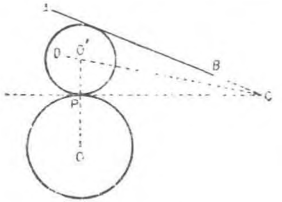
二軌跡相交於 O, 則 O 即為所求圓之圓心(僅此一解).

習題 21. 切於已知圓上之一定點, 並過圓外之另一定點.

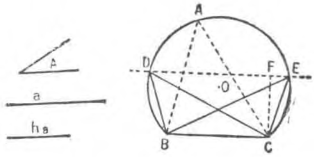
[作圖] 第一軌跡: 為自已知圓圓心過其圓周上定點之直線 (第 147 頁習題 9).

第二軌跡: 連結二點所成直線之中垂線.

以上二軌跡之交點, 即為所求圓之圓心(此題有 1 解或 0 解).



習題 22



習題 23

習題 22 切於一已知直線,並已知圓上之一定點。

[已知] 直線 AB 及圓 O 上之一定點 P.

[求] 作一圓切於 AB 並切於圓 O 上之 P.

[作圖] 作一切線切於圓 O 上之 P,再引長之使與 AB 之延長線相交於 C.

第一軌跡:爲 $\angle ACP$ 之平分線。

第二軌跡:爲自圓心 O 過已知點 P 之直線。

以上二軌跡相交於 O'. 則 O' 卽爲所求圓之圓心。(此題有 1 解或 2 解)。

習題 23. 已知 $a, h_a, \angle A$, 求作一三角形。

[作圖] 作 $BC=a$. 以 BC 爲弦,依 §253 之法作一弓形 BAC, 在此弓形內之角悉等於已知角 A.

於 C 作 $CF\perp BC$ 使 $CF=h_a$. 過 F 作一直線平行於 BC, 交圓周於 D 及 E.

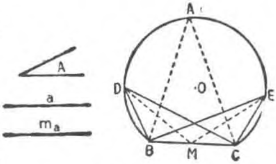
連 BD, CD 及 BE, CE. 則 BDC 及 BEC 皆爲所求之三角形。

[討論] 此題可以有 2 解,或 4 解,惟 h_a 大於弓形中點至 BC 之垂線時無解;等於此垂線時有 2 解(一在 BC 之上,一在 BC 之下);小於此垂線時有 4 解(半在 BC 之上,半在 BC 之下)。

習題 24.　已知 $a, m_a, \angle A$, 求作一三角形.

〔作圖〕　作法同前一習題, 以 $BC=a$ 爲弦作弓形 BAC, 在此弓形內之角悉等於已知角 A.

再以 BC 之中點 M 爲圓心, m_a 爲半徑作圓, 交弓形 BAC 於 D 及 E. 連接 BD, CD 及 BE, CE. 則 BDC 及 BEC 皆爲所求之三角形.

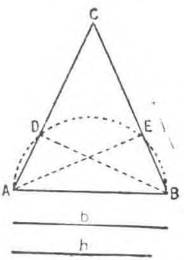


習題 24

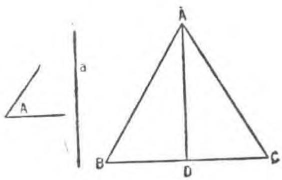
〔討論〕　除 $m_a<\frac{1}{2}a$, 及 $m_a=\frac{1}{2}a$ 無解外, 可以有 2 解或 4 解.

第 149—151 頁　　§ 266

雜　題



習題 1



習題 2

求作一等腰三角形 (1—4), 已知

習題 1.　底邊及一腰上之高.

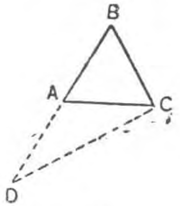
〔已知〕　底邊 b 及一腰上之高 h.

〔求〕　作一等腰三角形.

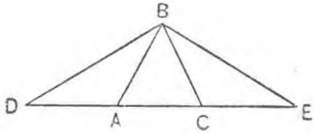
〔作圖〕　作 $AB=b$, 再以 AB 爲直徑作半圓. 再以 A 及 B 爲圓心, h 爲半徑作弧, 截半圓於 D 及 E. 連結 AD 及 BE, 延長之使相交於 C. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

習題 2.　底邊之高及頂角.

［作圖］ 作 AD 等於已知之高 a. 以 AD 爲一邊, $\frac{1}{2}\angle A$ 及一直角,依 §244 之法作直角 $\triangle\triangle ABD$ 及 ACD, 則 $\triangle ABC$ 即爲所求之三角形。



習題 3



習題 4

習題 3. 頂角及一腰與底邊之和。

［分析］ 設 ABC 爲所求之三角形,而 $BA=BC$. 延長 BA 至 D, 使 $AD=AC$. 由是 BD 即爲一腰與底邊之和. 又

$$\angle D=\tfrac{1}{2}\angle BAC=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=\tfrac{1}{4}(180^\circ-\angle B).$$

於是在 $\triangle BDC$ 內, $\angle B$ 及 $\angle D$ 與 BD 皆爲已知,故可作此三角形。

［作圖］ 作 $\triangle BDC$ $(a. s. a.)$. 作 DC 之中垂線,延長之交 BD 於 A. 連 AC, 則 ABC 即爲所求之三角形。

習題 4. 周及二底角。

［分析］ 設 ABC 爲所求之三角形,而 $AB=AC$. 延長 CA 至 D, 使 $AD=AB$, 又延長 AC 至 E, 使 $CE=CB$. 連 BD 及 BE.

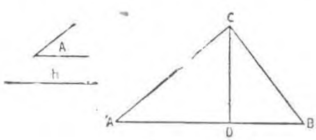
$$\angle D=\angle ABD=\tfrac{1}{2}\angle BAC,\ \angle E=\angle CBE=\tfrac{1}{2}\angle BCA.$$

但 $\angle BAC=\angle BCA$. $\therefore\ \angle D=\angle E=\frac{1}{2}\angle BAC$ 或 $\frac{1}{2}\angle BCA$.

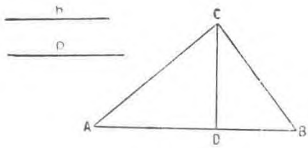
由是在 $\triangle BDE$ 內, $DE=$三角形之周, $\angle D=\angle E=$已知底角之半,故此三角形可作。

［作圖］ 以已知周爲底邊, $\angle D$ 及 $\angle E$ 等於已知底角之半,作一等腰三角形 DBE. 作 BD 及 BE 之中垂線,延長之交 DE 於 A 及 C. 連 BA 及 BC. 則 ABC 即爲所求之三角形。

求作一角直三角形 (5—7), 已知



習題 5



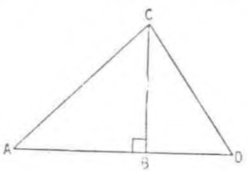
習題 6

習題 5. 一銳角及斜邊上之高。

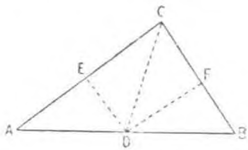
［作圖］ 以 h 爲一直角邊，及已知之 $\angle A$，作直角三角形 ADC（第136頁習題 3）. 作 $BC\perp AC$. 延長 AD 使與 CB 相交於 B. 則 ABC 卽爲所求之直角三角形.

習題 6. 斜邊上之高及由高所分斜邊上二線段之一。

［作圖］ 以 h 及 p 爲二直角邊，作直角 $\triangle ADC$（第135頁習題 2）. 作 $BC\perp AC$. 延長 AD 使交 BC 於 B. 則 ABC 卽爲所求之直角三角形。



習題 7



習題 8

習題 7. 二腰之和及一銳角.

［分析］ 設 ABC 爲所求之直角三角形。$\angle A$ 爲銳角，$\angle B$ 爲直角. 延長 AB 至 D，使 $BD=BC$，則 AD 等於二腰之和。連 CD. $\angle D=\angle BCD=45^\circ$. 由是在 $\triangle ACD$ 內，已知 $\angle A$, AD, 及 $\angle D=45^\circ$，故此三角形可作.

［作圖］ 以已知之銳角 A，二腰之和 AD，及 $\angle D=45^\circ$ 作 $\triangle ACD$ (244). 自 C 作 $CB\perp AD$ 交 AD 於 B. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

習題 8. 在三角形之一邊，求與其他二邊等距離之一點.

［作圖］ 平分邊 AB 之對角 C，並延長其平分線 CD 交 AB 於 D. 則

D 卽爲所求之點.

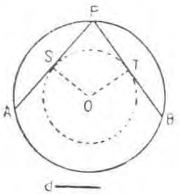
〔證〕 作 $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, 則 $DE=DF$ (126).

習題 9. 已知直角三角形之斜邊,求其直角頂點之軌跡.

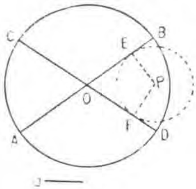
〔作圖〕 以已知之斜邊爲直徑作圓,則此圓卽爲所求之軌跡(圖略).

習題 10. 於四邊形之一邊上,求與其對邊之兩端等距離之一點.

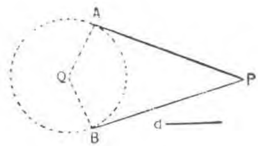
〔作圖〕 作對邊之中垂線,延長之與此邊相遇之點,卽爲所求之點(圖略).



習題 11



習題 12



習題 13

習題 11. 自圓周上一點 P, 作一距圓心等於已知距離之弦.

〔作圖〕 自已知圓之圓心 O, 以已知長 d 爲半徑作一同心圓. 自 P 作二切線 PA 及 PB 切於此圓之 S 及 T. 則 PA, PB 皆爲所求之弦.

〔證〕 $OS \perp PA$, $OT \perp PB$, 而 $OS=OT=d$.

習題 12. 在已知圓內,求作距一定點等於已知距離之直徑.

〔作圖〕 以已知點 P 爲圓心,已知距離 d 爲半徑作一圓. 自 O 作此圓之切線 OB 及 OD, 切於 E 及 F. 則 AOB 及 COD 皆爲所求之直徑.

〔證〕 連 PF 及 PF. $\angle OEP=\angle OFP=$ 直角. 又 $PE=PF=d$.

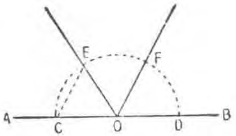
習題 13. 過一定點作與另一定點等於已知距離之直線.

〔作圖〕 以第二定點 Q 爲圓心,以已知距離 d 爲半徑作一圓. 自第一定點 P 作此圓之切線 PA 及 PB. 則 PA 及 FB 皆爲所求之直線.

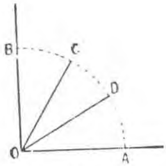
〔討論〕 欲使此題有解,則 P, Q 二點間之距離必須大於或等於已知距離 d.

習題 14. 過已知圓上之二定點,求作相等而且平行之二弦.

［作圖］ 連結二定點. 於此連結線之兩端各作一垂線.則此二垂線即爲所求之二弦(圖略).



習題 15



習題 16

習題 15. 三等分一已知之平角.

［已知］ 一平角 AOB.

［求］ 三等分 $\angle AOB$.

［作圖］ 以 O 爲圓心,任意之長爲半徑,作半圓,交 AB 於 C 及 D. 次以 C 及 D 爲圓心,原半徑爲半徑作弧,截半圓周於 E 及 F. 連結 OE 及 OF. 則 $\angle COE=\angle EOF=\angle FOD$.

［證］ $OC=OE=CE$, $\therefore$ $\triangle COE$爲一等邊三角形, $\therefore \angle COE=60°$.

習題 16. 三等分一已知之直角.

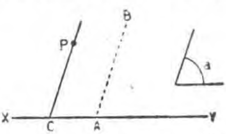
［作圖］ 以直角之頂點 O 爲圓心,任意長 OA 爲半徑作弧,截 OA 於 A, 截 OB 於 B. 次以 A 及 B 爲圓心,原半徑爲半徑作弧,截首先所畫之弧於 C 及 D. 連結 OC 及 OD. 則 $\angle AOD=\angle DOC=\angle COB=30°$.

習題 17. 三等分一半圓.

［作圖］ 作法同習題 15, 分爲 COE, EOF, FOD 三扇形.

習題 18. 過已知直線外一定點, 作一直線, 使與已知直線成一已知角.

［作圖］ 在已知直線 XY 上之任一點 A, 作 $\angle BAY$ 使等於已知角 a. 過已知點 P 作 PC 平行於 AB. 則 PC 即爲所求之直線.



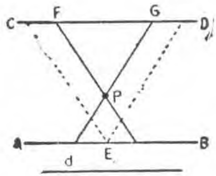
習題 18

［討論］ 除已知角爲一直角外，此題有 2 解.

習題 19 過一定點作一直線，使等於已知之長且兩端止於已知之二平行線.

［已知］ 二平行線 AB 及 CD，又 P 爲其間之一定點.

［求］ 過 P 作一直線，兩端止於 AB 及 CD，而長爲 d.



習題 19

［作圖］ 以 AB 上任一點 E 爲圓心，以巳知長 d 爲半徑作一圓，交 CD 於 C 及 D. 連 EC 及 ED. 過 P 作平行於 EC 及 ED 之直線，則此 PF 及 PG 二平行線皆爲所求之線.

［討論］ 若 d 等於二平行線間之距離，則此題僅有 1 解. 若 d 小於二平行線間之距離，則此題無解.

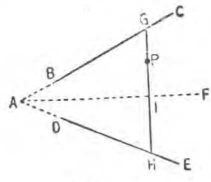
習題 20. 過一定點作一直線，使與已知二直線成等角.

［作圖］ 延長 CB 及 ED 二已知直線，使相交於 A. 平分 $\angle A$. 過 P 作平分線 AF 之垂線 GH. 則 GH 卽爲所求直線.

［證］ $AI=AI$, $\angle GAI=\angle HAI$,

$\therefore$ 直角$\triangle AIG\cong$直角$\triangle AIH$.

$\therefore$ $\angle AGI=\angle AHI$.



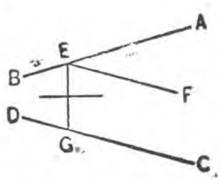
習題 20

［討論］ 若二直線 BC 及 DE 互相平行，則過 P 作垂線垂直於此二平行線卽得.

習題 21. 平分二直線所成之角，但二直線不得延長使其相交.

［已知］ AB 及 CD 爲二直線.

［求］ 作 AB, CD 二直線所成之角，但不得延長使其相交.



習題 21

［作圖］ 在 AB 上任一點 E 作 $EF /\!/ CD$. 平分

$\angle FEB$，並延長其平分線 EG，交 CD 於 G． 作 EG 之中垂線． 則此中垂線即爲所求 AB 與 CD 二直線所成角之平分線．

［證］ $\angle BEG=\angle FEG$． $\angle FEG=\angle EGD$（內錯角）．

$\therefore\ \angle BEG=\angle EGD$． $\therefore$ EG 之中垂線必平分 AB 與 CD 所成之角．

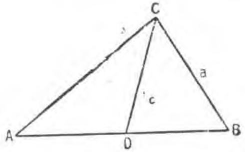
求作一三角形（22—34），已知

習題 22. $a, \angle B, h_a$.

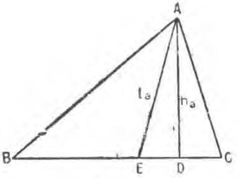
［作圖］ 以 $\angle B$ 及 h_a 爲一直角邊，作直角三角形（第 136 頁習題 3），再將另一直角邊延長之，並完成所求之三角形（圖從略）。

習題 23. $a, \angle B, m_c$.

［作圖］ 以 a，$\angle B$，及 m_c 依 §248 之法作一三角形，再延長第三邊，並完成所求之三角形（圖從略）．



習題 24



習題 25

習題 24. $a, \angle B, t_c$

［作圖］ 以 a, t_c，及 $\angle B$ 作 $\triangle BCD$（248）．

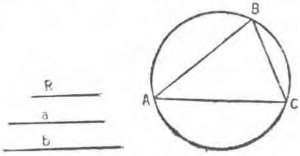
作 $\angle ACD=\angle BCD$． 延長 AC 交 BD 之延長線於 A． 則 ABC 即爲所求之三角形．

習題 25. $\angle A, h_a, t_a$.

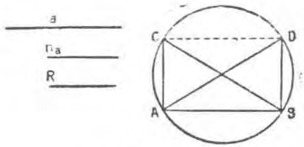
［作圖］ 以 t_a 爲斜邊，h_a 爲一直角邊，依第 137 頁習題 2 之法，作直角 $\triangle ADE$． 作 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle A$，又 $\angle CAE=\frac{1}{2}\angle A$，延長其邊 AB 及 AC，交 ED 之延長線於 B 及 C． 則 ABC 即爲所求之三角形．

習題 26. $a+b+c, \angle B, \angle C$.

［作圖］ 依習題 4 之法作之(圖從略)。



習題 27



習題 28

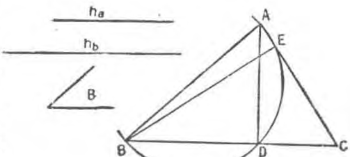
習題 27. a, b, R.

［作圖］ 以 R 爲半徑,先作一圓. 在此圓上任一點 A 作 $AC=b$, $CB=a$. 連 AB. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

習題 28. a, h_a, R.

［作圖］ 以 R 爲半徑,先作一圓. 作弦 $AB=a$. 作 $CD \parallel AB$, CD 與 AB 之距離等於 h_a, CD 交圓周於 C 及 D. 連結 CA, CB 及 DA, DB. 則 $\triangle ACB$ 與 $\triangle ADB$ 皆爲所求之三角形.

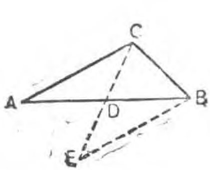
習題 29. $h_a, h_b, \angle B$.



習題 29

［作圖］ 以 $\angle B$ 及 h_a 爲一邊,作直角 $\triangle ADB$ (第 136 頁習題 3). 以 AB 爲直徑作一半圓. 再以 B 爲圓心, h_b 爲半徑,作弧,與半圓相交於 E, 作 BE. 連 AE 並延長之,使與 BD 之延長線相交於 C. 則 ABC 卽爲所求之三角形.

習題 30. a, b, m_c.



習題 30, 31

［分析］ 設 ABC 爲所求之三角形. $BC=a$, $AC=b$, $CD=m_c$. 延長 CD 至 E, 使 $DE=CD$. 連 AB 及 AE. 則 $AEBC$ 爲一平行四邊形(第 80 頁習題 1). 由是在 $\triangle BCE$ 內,其三邊皆爲已知,故可據以作圖.

［作圖］ 以 $EB=a$, $BC=b$, $CE=2m_c$ 爲三邊. 作 $\triangle BCE$.

平分 CE, 求得其中點 D. 作 BD, 並延長之至 A, 使 $AD=BD$.

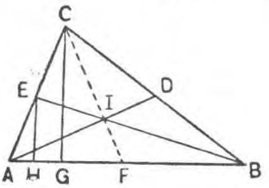
連 AC. 則 ABC 即為所求之三角形.

習題 31. $a, m_c, \angle C$.

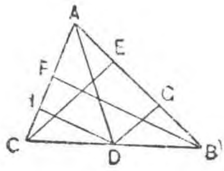
[作圖] 以 $CB=a, CE=2m_c$, 及 $\angle CBE=180°-\angle C$, 作 $\triangle CBE$.

平分 CE, 求得其中點 D. 作 BD, 並延長之至 A, 使 $AD=BD$.

連 AC. 則 ABC 即為所求之三角形.



習題 32



習題 33

習題 32. $m_a, m_b\ h_c$.

[分析] 設 ABC 為所求之三角形 $AD=m_a, BE=m_b$, 及 $CG=h_c$.
作 $EH\perp AB$. 因 E 為 AC 之中點, $EH /\!/ CG$, 故 $EH=\frac{1}{2}CG$. 由是在直角 $\triangle EHB$ 內, $BE=m_b, EH=\frac{1}{2}CG$, 而 $\angle EHB$ 為直角,故可依第 137 頁習題 2 之法先作成此三角形.

[作圖] 作直角 $\triangle EHB$, 因有斜邊 BE 及一直角邊 EH 為已知.

三等分 BE 得 $I, EI=\frac{1}{3}BE$.

以 I 為圓心, $\frac{2}{3}m_a$ 為半徑作弧,截 BH 之延長線於 A.

平分 AB, 得中點 F, 連 FI 並引長之使與 AE 之延長線相交於 C. 連結 BC, 即得所求之三角形 ABC.

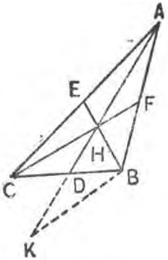
習題 33. m_a, h_b, h_c.

[分析] 設 ABC 為所求之三角形. $AD=m_a$, $BF=h_b$, $CE=h_c$.
作 $DH\perp AC, DG\perp AB$. 因 D 為 BC 之中點,故 $DH /\!/ BF$ 且 $DH=\frac{1}{2}BF$, 又 $DG /\!/ CE$ 且 $DG=\frac{1}{2}CE$.

由是,直角 $\triangle AHD$ 及 AGD 各有一斜邊及一直角邊為已知.

［作圖］ 以 m_a 爲斜邊，$\frac{1}{2}h_b$ 及 $\frac{1}{2}h_c$ 爲直角邊分別作直角 $\triangle AHD$ 及直角 $\triangle AGD$. 延長 HD 至 K, 使 $DK=HD$. 自 K 作直線平行於 AH, 交 AG 之延長線於 B. 連 BD, 再延長之使交 AH 之延長線於 C. 則 ABC 卽爲所求之三角形。

習題 34. m_a, m_b, m_c.



習題 34

［分析］ 設 ABC 爲所求之三角形. $AD=m_a$, $BE=m_b$, $CF=m_c$. 延長 AD 至 K, 使 $DK=HD$, 連 KB. 因 $DK=HD$, $CD=BD$, 故 $KBHC$ 爲一 ▱. 而 $KB /\!\!/ CH$, 且 $=CH$. 由是 $\triangle BHK$ 之三邊皆爲已知。

［作圖］ 以 $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$ 爲三邊，作 $\triangle BHK$. 作 HK 之中線 BD, 引長之至 C, 使 $CD=BD$. 又延長 KH 至 A. 使 $AH=KH$. 連 AB, AC. 則 ABC 卽爲所求之三角形。

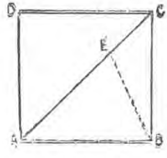
求作一正方形 (35—37), 已知

習題 35. 對角線。

［作圖］ 對角線之鄰角爲 45°, 故依 § 244 之法，已知二角及其所夾之邊作二直角三角形卽得.

［別法］ 因正方形之對角線相等，且互相垂直平分. 故作直線垂直於已知對角線之中點，使此二線互相平分. 連結其各端點，卽得所求之正方形.

習題 36. 對角線與一邊之差.



習題 36

［分析］ 設 $ABCD$ 爲所求之正方形。AC 爲其對角線，截 $AE=AB$, 則 EC 卽爲對角線與一邊之差。

$\angle EAB=45^\circ$, $\angle AEB=\angle ABE=\frac{1}{2}(180^\circ-45^\circ)=67\frac{1}{2}^\circ$.

$$\therefore\quad \angle BEC=112\tfrac{1}{2}^\circ.$$

故 $\triangle BCE$ 有二角及其所夾之邊爲已知。

［作圖］ 以已知對角線與一邊之差及 45° 與 $112\frac{1}{2}^\circ$ 兩角先作 $\triangle BCE$.

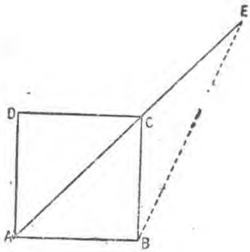
作 $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, 取 $AB=BC=CD$, 連 AD. 則 $ABCD$ 卽爲所求之正方形.

習題 37. 對角線與一邊之和.

［分析］ 設 $ABCD$ 爲所求之正方形, AC 爲其對角線. 延長 AC 至 E, 使 $CE=CB$, 則 AE 卽爲對角線與一邊之和.

$\angle ACB=45°$. $\angle E=\angle CBE=\frac{1}{2}45°=22\frac{1}{2}°$.

由是, $\triangle ABE$ 有一邊 AE 及二角 $45°$ 與 $22\frac{1}{2}°$ 爲已知.



習題 37

［作圖］ 以 AE 爲一邊, 及夾此邊之二角 $45°$ 及 $22\frac{1}{2}°$, 作 $\triangle ABE$.

在 A 及 B 各作垂線 DA 及 $CB \perp AB$, 取 DA 等於 AB.

連 DC. 則 $ABCD$ 卽爲所求之正方形.

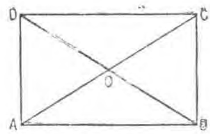
求作一矩形 (38—40), 已知

習題 38. 一邊及一對角線.

［作圖］ 以已知之一邊爲直角邊, 已知之一對角線爲斜邊, 於對角線之兩側作二全等之直角三角形, 卽得所求之矩形.

習題 39. 一邊及二對角線所成之角.

［作圖］ 矩形之對角線相等且互相平分, 故可先作 $\triangle OAB$. 因 $AB=$已知邊之長, $\angle OAB=\angle OBA$ 爲 $\angle AOB$ 補角之半.



習題 39

延長 AO 至 C, 使 $OC=AO$. 又 BO 至 D, 使 $OD=BO$. 連結 AD, BC, 及 CD. 則 $ABCD$ 卽爲所求之矩形.

習題 40. 周及對角線.

［解］ 對角線分矩形爲二全等之直角三角形. 三角形二直角邊之和等於已知之周之半. 故可依第 144 頁習題 21 之法作直角三角形. 合二直角三角形而成一矩形.

求作一菱形 (41—45), 已知

習題 41. 二對角線.

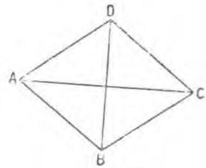
［解］ 菱形之對角線互相垂直而平分. 故作互相垂直之二直線,且使互相平分,然後連結其各端,即得所求之菱形.

習題 42. 周及一對角線.

［作圖］ 以對角線爲底邊,周之四分一爲腰,於底邊之兩側,作二全等之等腰三角形,即得所求之菱形.

習題 43 一角及一對角線.

［作圖］ 以等於已知對角線之長 AC 爲底邊,已知角之半爲二底角,於 AC 之兩側各作一等腰 $\triangle ABC$ 及 ADC, 則 $ABCD$ 即爲所求之菱形.

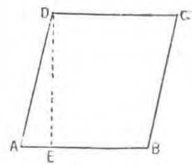


習題 43

若已知角與已知對角線相對,則用第 144 頁習題 15 之法求之.

習題 44. 高及底邊.

［分析］ 設 $ABCD$ 爲所求之菱形. 自 D 作 $DE\perp AB$, 則 DE 爲其高. 於是在 $\triangle ADE$ 內,斜邊 AD 等於已知之底,一直角之邊 DE 等於已知之高,故可先作此三角形.



習題 44, 45

［作圖］ 以已知之底爲斜邊,已知之高爲一直角邊,作直角 $\triangle AED$ (第 137 頁習題 2). 延長 AE, 取 $AB=AD$. 自 D 作直線平行於 AB, 自 B 作直線平行於 AD, 二直線相交於 C, 則 $ABCD$ 即爲所求之菱形.

習題 45. 高及一角.

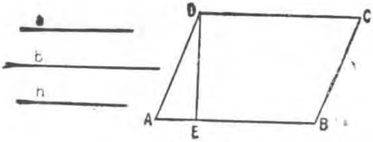
［作圖］ 先以已知之高及一已知角作一直角三角形 ADE (第 136 頁習題 3). 再依習題 44 之法完成所求之菱形 $ABCD$.

求作一平行四邊形 (46—50), 已知

習題 46. 相鄰之二邊及高.

［作圖］ 以已知之一邊 a 及高 h 作直角三角形 AED (第 137 頁習

題 2). 延長 AE, 使 $AB=b$, 自 B 作 $BC \mathbin{/\!/} AD$ 並作 $DC \mathbin{/\!/} AB$. 二直線



習題 46

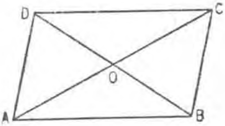
相交於 C. 則 $ABCD$ 卽爲所求之平行四邊形.

習題 47. 相鄰之二邊及一角.

［作圖］ 圖同習題 46. 先作 $\angle DAB=$ 已知角,於其二邊上截取 AB 等於已知之一邊,又截取 AD 等於已知之另一邊. 自 B 及 D 各作直線平行於 AD 及 AB, 二者相交於 C. 則 $ABCD$ 卽爲所求之平行四邊形.

習題 48. 一邊及二對角線.

［作圖］ 作 $\triangle AOB$, $AB=$ 已知之一邊, AO 及 BO 各等於已知對角線之半. 延長 AO 及 BO, 使 $OC=AO$, $OD=BO$. 連結 BC, CD 及 AD. 則 $ABCD$ 卽爲所求之平行四邊形.

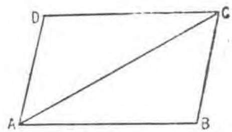


習題 48

習題 49. 一邊,一角,及一對角線.

［作圖］ 以已知之一邊 AB, 對角線 AC, 及已知角 B, 作三角形 ABC 及 ADC (248). 則 $ABCD$ 卽爲所求之平行四邊形.

若已知之角爲 $\angle A$, 則 $\angle B$ 爲 $\angle A$ 之補角, 故 $\angle B$ 亦易求得.



習題 49

習題 50. 二對角線及對角線所成之角.

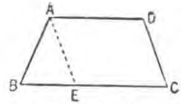
［作圖］ 用習題 48 之圖. 以已知二對角線之半及其所夾之已知角作 $\triangle AOB$ (*s. a. s.*). 延長 AO 及 BO, 使 $OC=AO$, $OD=BO$. 連 BC, CD, 及 AD. 則 $ABCD$ 卽爲所求之平行四邊形.

第 151—152 頁

§ 267

求作一梯形 (1—5)，已知

習題 1. 四邊.



習題 1—3

［作圖］ 以已知之一邊 AB，及 AE (與 DC 等)，與 BE (二平行邊之差)爲三邊，作 $\triangle ABE$ (s. s. s.). 延長 BE，使 BC 等於已知之底邊. 再過 C 及 A，作 $CD /\!/ EA$，$AD /\!/ BC$，二線相交於 D. 則 $ABCD$ 卽爲所求之梯形.

習題 2. 二底邊及下底之二底角.

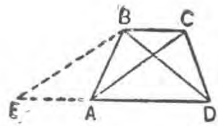
［作圖］ 以二底邊之差及二底角作 $\triangle ABE$ (a. s. a.). 延長 BE 至 C，使 BC 等於已知底邊之一. 過 A 作 $AD /\!/ BC$，使 AD 之長等於另一底邊. 連 DC. 則 $ABCD$ 卽爲所求之梯形.

習題 3. 二底邊，其他一邊，及一底角.

［作圖］ 以二底邊之差，已知之一邊及一底角，作 $\triangle ABE$ (s. a. s.). 再依前題之法完成梯形 $ABCD$.

若已知之角爲 $\angle C$，則用第 248 節之法作 $\triangle ABE$.

習題 4. 二底邊及二對角線.



習題 4, 5

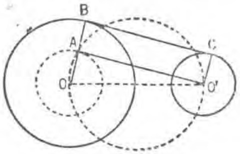
［分析］ 設 $ABCD$ 爲所求之梯形，BC 及 AD 爲上下二底，AC 及 BD 爲二對角線. 作 $BE /\!/ CA$. 遇 DA 之延長線於 E，則 $BE=CA$. 由是在 $\triangle EBD$ 內，$BE=CA=$ 已知之對角線，$BD=$ 已知之另一對角線，$ED=BC+AD=$ 已知二底邊之和，故此三角形可作.

［作圖］ 以二對角線及二底邊之和作三角形 EBD. 於 ED 上截取 DA 等於已知底邊之一. 連 AB，並過 A 作 $AC /\!/ EB$，過 B 作 $BC /\!/ ED$，AC 與 BC 相交於 C. 連 CD. 則 $ABCD$ 卽爲所求之梯形.

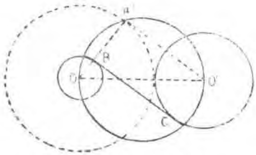
習題 5. 一底邊，二對角線，及二對角線所成之角.

［作圖］ $\angle EBD$ 卽等於二對角線所成之角. 故以 $\angle EBD$ 及二對

角線作 $\triangle EBD$ (s. a. s.). 再依前題之法完成梯形 $ABCD$.



習題 6



習題 7

習題 6. 作已知二圓之一外公切線.

[作圖] O 及 O' 爲已知二圓之圓心. 以 O 爲圓心,已知二圓半徑之差爲半徑,作一虛線圓. 再以 OO' 爲直徑作一圓,遇虛線圓於 A. 作 OA, 並延長之交 O 圓於 B. 以 B 爲圓心,以等於 AO' 之長爲半徑作弧,交 O' 圓於 C. 連 BC. 則 BC 卽爲所求兩外公切線之一.

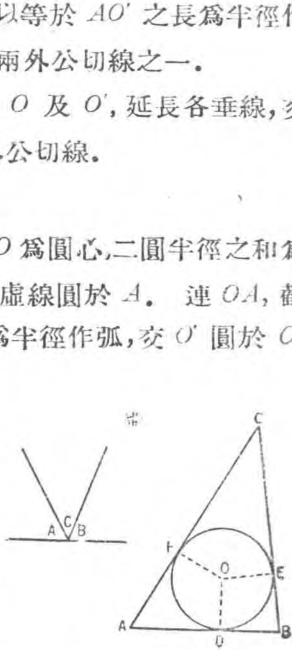
若已知二圓相等,作直線垂直於 OO' 上之 O 及 O', 延長各垂線,交兩圓於 B 及 C. 連 BC, 則 BC 卽爲所求之外公切線.

習題 7. 作已知二圓之一內公切線.

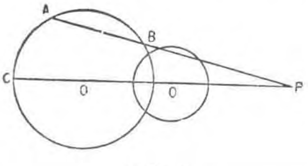
[作圖] O 及 O' 爲已知二圓之圓心. 以 O 爲圓心,二圓半徑之和爲半徑作虛線圓. 再以 OO' 爲直徑作一圓,遇虛線圓於 A. 連 OA, 截 O 圓於 B. 以 B 爲圓心,以等於 AO' 之長爲半徑作弧,交 O' 圓於 C. 連 BC. 則 BC 卽爲所求內公切線之一.

習題 8 已知三角形之三角, 求作一三角形外切於定圓.

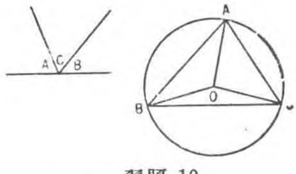
[作圖] 於定圓之圓心 O 作 $\angle FOD$ 等於 $\angle A$ 之補角,作 $\angle DOE$ 等於 $\angle B$ 之補角, 又 $\angle FOE$ 等於 $\angle C$ 之補角. 於 D, E, F 三點作圓之切線,延長之使相交於 A, B, C 三點. 則 ABC 卽爲所求之三角形.



習題 9



習題 9



習題 10

習題 9. 過圓外一已知點之割線求其中點之軌跡.

[已知] PA 爲圓 O 之割線, R 爲其半徑.

[求] 割線中點之軌跡.

[作圖] 過圓心 O 作割線 POC. 平分 IO 於 O'. 以 O' 爲圓心, $\frac{1}{2}R$ 爲半徑作圓,則此圓即爲所求割線中點之軌跡.

[證] 任作一割線 PA, 交圓 O' 於 B. 連 OA 及 $O'B$.

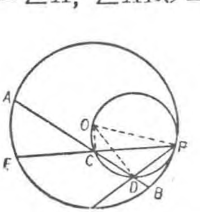
$\angle AOC=3\angle P=\angle BOO'$ (第 121 頁習題 5), $\therefore$ $BO'\parallel AO$.

又 $$O'B=\tfrac{1}{2}OA,\ OO'=O'P,$$
$$\therefore\ AB=BP\ (149).$$

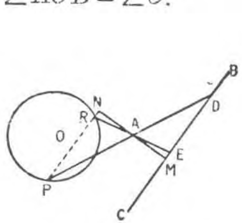
習題 10. 已知三角形之三角,求於定圓內作一內接三角形.

[作圖] 在已知圓內作圓心角 $BOC=2\angle A$, $\angle AOC=2\angle B$, 及 $\angle AOB=2\angle C$. 連 BC, AC, 及 AB. 則 ABC 即爲所求之三角形.

[證] $\angle BOC=2\angle BAC$ (232), $\angle AOC=2\angle ABC$, $\angle AOB=2\angle ACB$.
$\therefore$ $\angle BAC=\angle A$, $\angle ABC=\angle B$, $\angle ACB=\angle C$.



習題 11



習題 12

習題 11. 自圓上一定點作一弦爲已知之弦所平分.

[已知] 圓 O 及其上之一定點 P, AB 爲已知弦.

［求］ 自 P 作一弦爲 AB 所平分。

［作圖］ 作 OP. 以 OP 爲直徑畫一圓交 AB 於 C 及 D, 過 P 及 C, 與 P 及 D 作二弦. 則 PCE 及 PDF 皆爲所求之弦。

［證］ 連 OC 及 OD. $\angle OCP$ 及 ODP 皆爲直角 (234). 故 $CE=CP$ 及 $DF=DP$ (100).

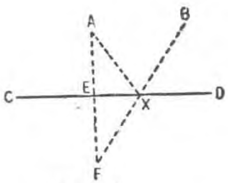
習題 12. 在圓與直線之間有一定點 A. 試過 A 作一直線,兩端止於圓及直線,而爲 A 所平分。

［作圖］ 自 A 作 $AM\perp CB$. 延長 MA 至 N 使 $AN=MA$. 於 N 作 $PN\perp MN$, 交圓周於 P 及 R. 過 A 作 PAD 及 RAE. 則 PAD 與 RAE 皆爲所求之直線。

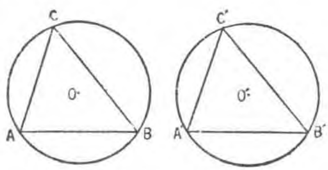
［證］ $AM=AN$, $\angle DAM=\angle PAN$, $\angle DMA=\angle PNA=$直角。

$$\therefore\quad \triangle AMD\cong\triangle ANP,\quad \therefore\quad AD=AP.$$

同理,　$AE=AR$.



習題 13



習題 14

習題 13. 已知二點 A 與 B 同在直線 CD 之一側,於 CD 上求一點 X, 使 $\angle AXC$ 等於 $\angle BXD$.

［作圖］ 自 A 作 $AE\perp CD$. 延長 AE 至 F, 使 $EF=AE$. 連 BF, 交 CD 於 X. 則 X 即爲所求之點。

［證］ 連 AX. $AE=EF$, $EX=EX$, 故 rt. $\triangle AEX=$ rt. $\triangle FEX$.

$$\therefore\quad \angle AXE=\angle FXE.$$

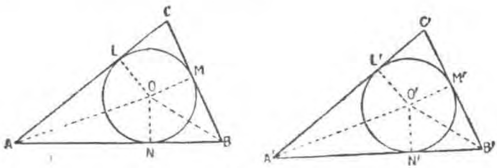
但 $\angle FXE=\angle BXD$ (對頂角). $\therefore\ \angle AXE=\angle BXD$.

習題 14. 二全等三角形之外接圓相等。

［證］ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. $\therefore\ AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$. 將

$\triangle A'B'C'$ 移置 $\triangle ABC$ 之上,則 A', B, C' 各點將與 A, B, C, 等點疊合.

由是圓 O 與圓 O' 疊合,故二圓相等.



習題 15

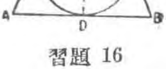
習題 15. 二全等三角形之內切圓相等.

[證] 自內切圓心 O 及O', 連 AO, BO 及 $A'O'$, $B'O'$.

$\angle OAB=\angle O'A'B'$, $\angle OBA=\angle O'B'A$ (因 $OA, O'A', OB, O'B'$ 各為角 A 及 B 之平分線). 又 $AB=A'B'$. $\therefore$ $\triangle OAB\cong\triangle O'A'B'$ (*a. s. a.*).

$\therefore$ $ON=O'N$ (全等三角形之相應高相等).

同理, $OM=O'M'$, $OL=O'L'$. 由是,由 L, M, N 三點決定之圓必等於以 L', M', N 三點決定之圓 (193).

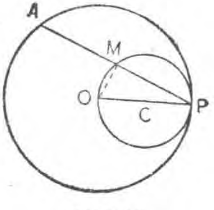


習題 16

習題 16. 已知底邊及內切圓之半徑,求作一等腰三角形.

[分析] 設 ABC 為所求之三角形. $CA=CB$. 作頂角 C 之平分線 CD, 此線必垂直於底邊 AB 之中點,且過內切圓之圓心 O. 由是此圖可作之如下.

[作圖] 在已知之底邊 AB 上,作 AB 之中垂線. 自底邊之中點 D 截取 DO 等於已知內切圓之半徑. 以 O 為圓心, DO 為半徑作一圓. 自 A 及 B 各作圓之切線,並延長之,使二切線相遇於 C. 則 $\triangle ABC$ 卽為所求之等腰三角形.

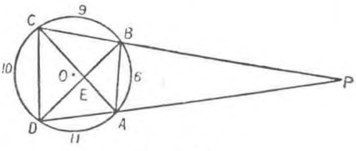


習題 17

習題 17. 一圓與半徑長二倍之圓內切於 P. 求證在大圓內自 P 所作之弦悉為小圓所平分.

［證］ 任作一弦 PA, 交小圓於 M. 連 OM. $\angle OMP$ 爲一直角，故 M 爲 PA 之中點 (190).

習題 18. 圓周上有 A, B, C, D 四點，分圓爲四部分，成 6, 9, 10, 11 之比．若將四點順次連結之，並作對角線，且延長各二對邊至在圓外相交爲止，求所成諸角之度數．



習題 18

［已知］ O 爲定圓，

$AB : BC : CD : DA = 6 : 9 : 10 : 11.$

［求］ 所成各角之度數．

［計算］ $AB + BC + CD + DA = 6 + 9 + 10 + 11.$

$\therefore \quad \overset{\frown}{AB} = \frac{6}{36} \times 360^\circ = 60^\circ, \qquad \overset{\frown}{BC} = \frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ,$

$\overset{\frown}{CD} = \frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ, \qquad \overset{\frown}{DA} = \frac{11}{36} \times 360^\circ = 110^\circ.$

故 $\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}) = 95^\circ, \qquad \angle B = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}) = 105^\circ,$

$\angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB}) = 85^\circ, \qquad \angle D = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}) = 75^\circ.$

又 $\angle CED = \angle AEB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB}) = 80^\circ.$

$\angle CEB = \angle DEA = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{DA}) = 100^\circ.$

及 $\angle P = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}) = 20^\circ.$

AB 與 DC 延長線所成之角(圖中未畫出) $Q = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{CB}) = 10^\circ.$

第 三 編

比例　相似三角形

第 154 頁　　§ 276

習題 1. 求 x 之值,若

(a) $3:x=4:8$.　　(b) $112:42=16:x$.

(c) $x:7=2:21$.　　(d) $a:m=x:n$.

[解] (a) $4x=24$, $\therefore x=6$.　　(b) $112x=42\times16$, $\therefore x=6$.

(c) $21x=14$, $\therefore x=\frac{2}{3}$.　　(d) $mx=an$, $\therefore x=\dfrac{an}{m}$.

習題 2. 求下列三題之比例第四項:

(a) 1, 2, 及 3.　　(b) 2, 1, 及 3.　　(c) m, n, 及 p.

[解] (a) $1:2=3:x$, $\therefore x=6$.　　(b) $2:1=3:x$, $\therefore x=\frac{3}{2}$.

(c) $m:n=p:x$, $\therefore x=\dfrac{np}{m}$.

習題 3. 求下列三題之比例中項:

(a) 9 及 4.　　(b) 30 及 3.　　(c) 1 及 16.

[解] (a) $9:x=x:4$, $\therefore x=6$.

(b) $30:x=x:3$, $\therefore x=3\sqrt{10}$.

(c) $1:x=x:16$, $\therefore x=4$.

第 155 頁 § 277

習題 1. 若 $ab=mn$, 求 a, b, m, 及 n 四量所能成之一切比例式.

〔解〕 $a:m=n:b$, $a:n=m:b$, $b:n=m:a$, $b:m=n:a$,

$m:a=b:n$, $n:a=b:m$, $n:b=a:m$, $m:b=a:n$.

習題 2. 自等式 $3\times10=5\times6$, 試以 3 爲第一項,作二比例式.

〔解〕 $3:5=6:10$, $3:6=5:10$.

習題 3. 若 $ab=xy$, 試以 b 爲首項,作二比例式.

〔解〕 $b:x=y:a$, $b:y=x:a$.

習題 4. 求 $x:y$ 之比,若

(a) $6x=5y$, (b) $9x=2y$,

(c) $6x=y$, (d) $mx=ny$,

(e) $(a+b)x=cy$, (f) $mx+nx=py$,

(g) $4x-6y=0$, (h) $ax-ay=bx-by$.

〔解〕 (a) $x:y=5:6$, (b) $x:y=2:9$,

(c) $x:y=1:6$, (d) $x:y=n:m$,

(e) $x:y=c:a+b$, (f) $x:y=p:m+n$,

(g) $x:y=3:2$, (h) $x:y=a-b:a-b=1$.

第 155 頁 § 278

習題. 求下列各題之比例中項:

(a) 2 及 18. (b) $\frac{4}{3}$ 及 $\frac{25}{3}$.

(c) $2a$ 及 $32a$. (d) $3b^2$ 及 $9a^2$.

〔解〕 (a) $\sqrt{2\times18}=6$, (b) $\sqrt{\frac{4}{3}\times\frac{25}{3}}=\frac{10}{3}$,

(c) $\sqrt{2a\times32a}=8a$, (d) $\sqrt{3b^2\times9a^2}=3ab\sqrt{3}$.

第 156 頁　§ 280

習題. 變換比例式 $m:x=p:q$, 使 x 成爲第四項；第一項；第三項.

[解] $p:m=q:x$, 或 $p:q=m:x$; $x:m=q:p$; $m:p=x:q$.

第 157 頁　§ 282

習題 1. 變換下列之比例式,使其僅有一項含 x.

(a) $2:3=5-x:x$.　(b) $6:7=2-x:x$.

(c) $a:b=5-x:x$.　(d) $4:3=2+x:x$.

(e) $7:5=3+x:x$.　(f) $a:b=5+x:x$.

[解] (a) $2+3:3=5-x+x:x$, 即 $5:3=5:x$.

(b) $6+7:7=2-x+x:x$, 即 $13:7=2:x$.

(c) $a+b:b=5-x+x:x$, 即 $a+b:b=5:x$.

(d) $4-3:3=2+x-x:x$, 即 $1:3=2:x$.

(e) $7-5:5=3+x-x:x$, 即 $2:5=3:x$.

(f) $a-b:b=5+x-x:x$. 即 $a-b:b=5:x$.

習題 2. 若 $x+y:y=7:3$, 求 x 與 y 之比.

[解] $x+y-y:y=7-3:3$, 即 $x:y=4:3$.

習題 3. 若 $x-y:y=2:3$, 求 x 與 y 之比.

[解] $x-y+y:y=2+3:3$, 即 $x:y=5:3$.

第 158 頁　§ 283

習題 1. 變換下列之比例式使其僅有一項含 x.

(a) $3:2=5+x:5-x$.　(b) $5:3=3+x:3-x$.

(c) $a:b=1+x:1-x$.

[解] (a) $3+2:3-2=5+x+5-x:5+x-5+x$,

即
$$5:1=10:2x=5:x.$$

(b) $5+3:5-3=3+x+3-x:3+x-3+x$,

即 $$8:2=6:2x,\ 即\ 4:1=3:x.$$

(c) $a+b:a-b=1+x+1-x:1+x-1+x,$

即 $$a+b:a-b=2:2x=1:x.$$

習題 2. 若 $x+y:x-y=12:5$, 求 x 與 y 之比.

[解] $x+y+x-y:x+y-x+y=12+5:12-5,$

即 $$2x:2y=17:7,\ 即\ x:y=17:7.$$

習題 3. 若 $x+y:x-y=a:b$, 求 x 與 y 之比.

[解] $x+y+x-y:x+y-x+y=a+b:a-b,$

即 $$2x:2y=a+b:a-b,\ 即\ x:y=a+b:a-b.$$

第 159 頁 §284

習題 1. 若 $a:b=c:d=e:f=5:7$, 求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

[解] $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}.$

習題 2. 若 $\frac{x-a-c}{y-b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 求 $x:y$.

[解] $\frac{x-a-c+a+c}{y-b-d+b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 即 $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

習題 3. 若 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, 求 $x+y+z$ 與 z 之比.

[解] $\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{z}{4}$, 即 $x+y+z:z=9:4$.

第 159 頁 §286

習題 1. 若 $x:y=1:4$, 又 $x:\frac{1}{y}=1:9$, 求 x.

[解] 二式相乘, 得 $x^2:1=1:36$, $\therefore\ x=\frac{1}{6}$.

習題 2. 若 $\frac{1}{x}:y=1:2$, 又 $x:y=1:8$, 求 y.

［解］　二式相乘，得 $1:y^2=1:16$，$\therefore\ y=4$.

第 160 頁　§ 288

習題 1.　若 $x^3:y^3=64:125$，求 $\frac{x}{y}$.

［解］　$x:y=\sqrt[3]{64}:\sqrt[3]{125}$，即 $x:y=4:5$.

習題 2.　若 $\sqrt{x}:\sqrt{y}=1:2$，求 $x:y$.

［解］　$(\sqrt{x})^2:(\sqrt{y})^2=1:2^2$，即 $x:y=1:4$.

習題 3.　若 $\sqrt[3]{x}:\sqrt[3]{y}=1:3$，求 $x:y$.

［解］　$(\sqrt[3]{x})^3:(\sqrt[3]{y})^3=1:3^3$，即 $x:y=1:27$.

習題 4.　若 $\sqrt[3]{x}:1=\sqrt[3]{y}:2$，求 $\frac{x}{y}$.

［解］　$\sqrt[3]{x}:\sqrt[3]{y}=1:2$，$(\sqrt[3]{x})^3:(\sqrt[3]{y})^3=1:2^3$，即 $x:y=1:8$.

習題 5.　若 $x+y:x-y=3:1$，求 x^2 與 y^2 之比.

［解］　$x+y+x-y:x+y-x+y=3+1:3-1$，即 $x:y=2:1$，

$$\therefore\ x^2:y^2=4:1.$$

習題 6.　若 $x^2:4a^2=y^2:b^2$，求 x^3 與 y^3 之比.

［解］　$x^2:y^2=4a^2:b^2$，$\therefore\ x^3:y^3=8a^3:b^3$.

第 161 頁　§ 291

習題 1.　內分一 10 吋長之直線為 $2:3$ 之比.

［解］　10 吋長之直線分為 4 吋及 6 吋，即成 $2:3$.

習題 2.　外分一 18 吋長之直線為 $3:2$ 之比.

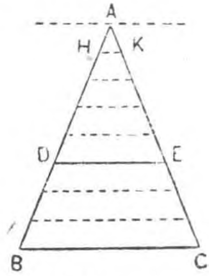
［解］　18 吋長之直線外分為 54 吋及 36 吋，即成 $3:2$.

習題 3.　分一 18 吋長之直線為三線段，成 $2:3:4$ 之連比，求各線段之長.

［解］　設每分之長為 x 吋，則 $2x+3x+4x=18$，$\therefore\ x=2$ 吋.

於是　　$2x=4$ 吋，$3x=6$ 吋，$4x=8$ 吋.

第 164 頁 §295



習題 1—11

習題 1. 在命題 XIII 之圖內，若 $AD=4$, $DB=8$, $AE=3$, 求 EC.

〔解〕 $4:8=3:EC$, $\therefore EC=6$.

習題 2. 在同上之圖內，若 $AD=a$, $AE=b$, $EC=c$, 求 DB.

〔解〕 $a:DB=b:c$, $\therefore DB=\dfrac{ac}{b}$.

習題 3. 在同上之圖內，若 $AB=12$, $AD=8$, $AC=9$, 求 AE.

〔解〕 $12:8=9:AE$, $\therefore AE=6$.

習題 4. 在同上之圖內，若 $AB=m$, $AD=n$, $AC=p$, 求 AE.

〔解〕 $m:n=p:AE$, $\therefore AE=\dfrac{np}{m}$.

習題 5 在同上之圖內，即 $AD=EC$, $DB=4$, $AE=9$, 求 AD.

〔解〕 $AD:DB=AE:CE$, $AD\times CE=4\times 9$, 即

$$AD^2=36,\quad \therefore AD=6.$$

習題 6. 在同上之圖內，若 $AE=2DB$, $AD=10$, $EC=20$, 求 AE.

〔解〕 $AD:DB=AE:EC$, $10:DB=2DB:20$, 即 $2DB^2=200$,

$$\therefore DB=10,\quad \therefore AE=2DB=20.$$

習題 7. 在同上之圖內，若 $EC=AD$, $AE=m$, $BD=n$, 求 EC.

〔解〕 $AD:AE=BD:EC$, 即 $EC:m=n:EC$, $EC^2=mn$,

$$\therefore EC=\sqrt{mn}.$$

習題 8. 在同上之圖內，若 $AB=a$, $AD=b$, $AC=c$, 求 EC.

〔解〕 $a:a-b=c:EC$, $\therefore EC=\dfrac{c(a-b)}{a}$.

習題 9. 在同上之圖內，若 $DE \mathbin{/\!/} BC$, 又 $AD:DB=EC:AE$, 則

$AE = EC$.

〔證〕 $AD : DB = EC : AE$ (假設). 但 $AD : DB = AE : EC$ (292).

$\therefore EC : AE = AE : EC$ (公理 1), 卽 $AE^2 = EC^2$, $\therefore AE = EC$.

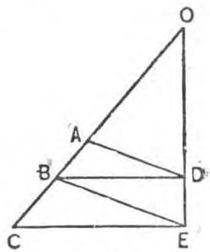
習題 10. 在同上之圖內, 若 $AD = 2(AE)$, 又 $DB = 6$, 求 EC.

〔解〕 $AD : DB = AE : EC$, 卽 $2AE : 6 = AE : EC$, $\therefore EC = 3$.

習題 11. 在命題 XIII 之圖內, 若 $AD = 2$, $DB = 3$, $AE = 4$, 及 $EC = 4$, 則 DE 平行於 BC 否?

〔解〕 否. 若 $DE \mathbin{/\!\!/} EC$, 則 $2 : 3 = 4 : 4$, 於理不合.

習題 12. 在右圖內, 若 $BD \mathbin{/\!\!/} CE$, 又 $AD \mathbin{/\!\!/} BE$, 則 $OA : OB = OB : OC$.



習題 12

〔證〕 $OA : OB = OD : OE$ (294),

$OB : OC = OD : OE$ (294). $\therefore OA : OB = OB : OC$.

習題 13. 在命題 XIII 之圖內, 若 $AD = 8$, $DB = AE$, 又 $AC = 6$, 求 DB 及 EC.

〔解〕 設 $x = DB = AE$, 則 $EC = 6 - x$.

$$8 : x = x : 6 - x, \text{ 卽 } x^2 + 8x - 48 = 0. \ (x+12)(x-4) = 0.$$

$$\therefore x = -12 \text{ 或 } 4. \quad \therefore DB = 4, \text{ 及 } EC = 2.$$

習題 14. 在命題 XIII 之圖內, 若 $AD = 8$, $AE = \frac{DB}{2}$, $EC = 1$, 求 DB 及 AE.

〔解〕 設 $x = DB$, 則 $8 : x = \frac{1}{2}x : 1$, 卽 $x = 4$.

$$\therefore DB = 4, \text{ 及 } AE = 2.$$

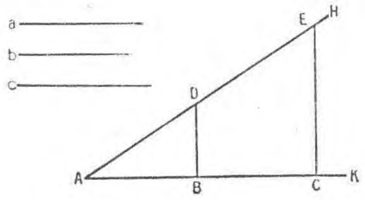
第 165 頁 § 296

習題 1. 若 a, b, 及 c 爲已知之直線, 求作一直線 x 使 $a : b = x : c$.

〔解〕 $a : b = x : c$, $\therefore b : a = c : x$.

〔作圖〕 作任意角 KAH. 在 AK 上取 $AB = b$, $bc = a$; 又在 AH 上取 $AD = c$. 作 BD. 過 C 作一直線平行於 BD, 交 AH 於 E. 則 DE

卽爲所求之比例第四項.



習題 1

習題 2. 若 $a, b,$ 及 c 爲已知之直線,求作一直線等於 $\frac{bc}{a}$.

〔**解**〕 設 $x=\frac{bc}{a}$, 則 $ax=bc$, 或 $a:b=c:x$.

〔**作圖**〕 應用 § 296, 作 $a, b,$ 及 c 之比例第四項卽得(圖略).

習題 3. 若 $a, b,$ 及 c 爲已知之直線,求作一直線等於 $\frac{bc}{2a}$

〔**解**〕 設 $x=\frac{bc}{2a}$, 則 $2ax=bc$, 或 $2a:b=c:x$.

〔**作圖**〕 應用 § 296, 作 $2a, b$ 及 c 之比例第四項卽得(圖略).

習題 4. 若 a 與 b 爲已知之直線,求作一直線 $x=\frac{b^2}{a}$; 又 $=\frac{2b^2}{3a}$.

〔**解**〕 (a) $x=\frac{b^2}{a}$, 則 $ax=b^2$, 或 $a:b=b:x$

〔**作圖**〕 應用 § 296 之法作 a, b 及 b 之比例第四項卽得.

(b) $x=\frac{2b^2}{3a}$, 則 $3ax=2b^2$, 或 $3a:2b=b:x$.

〔**作圖**〕 應用 § 296, 作 $3a, 2b,$ 及 b 之比例第四項卽得(圖略).

習題 5. 作 $x=a(a+b)\div b$.

〔**解**〕 $b:a=a+b:x$. 應用第 296 節求 $b, a, a+b$ 之比例第四項卽得(圖略).

習題 6. 三直線各長 $\frac{7}{8}''$, $\frac{3}{4}''$, 及 $1''$, 求作其比例第四項.

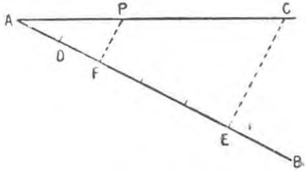
〔**解**〕 直接應用第 296 節之法求之(圖略).

第 166 頁

§ 297

習題 1. 分直線 AC 爲二線段，其比等於 $2:3$.

［**作圖**］ 自 A 任作一直線 AB. 於 AB 上任取一段 AD，依此再取四段至 E. 連 EC. 過第二分點 F 作 $FP \parallel CE$. 則 P 卽爲所求之分點.



習題 1

［**證**］ $AF:FE=2:3$.

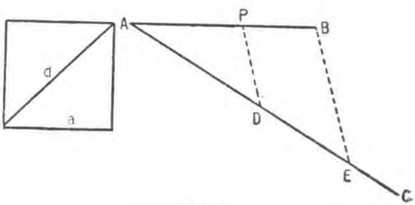
$AP:PC=AF:FE$.

$\therefore\ AP:PC=2:3$.

習題 2. 分一長 $2''$ 之直線爲二線段，使其比等於正方形之對角線與其一邊之比.

［**已知**］ 直線 $AB=2''$.

［**求**］ 分 AB 爲二線段，其比爲正方形之對角線與其一邊之比.



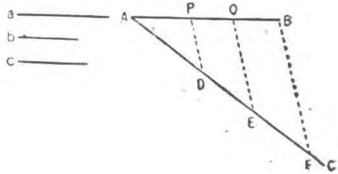
習題 2

［**作圖**］ 作一正方形，其一邊爲 a，對角線爲 d.

自 a 任作一線 AC. 於 AC 上取一段 $AD=d$，再取 $DE=a$. 連 BE. 自 D 作 $PD \parallel BE$. 則 P 分 AB 爲 $d:a$.

習題 3. 分一已知直線爲三線段，其比等於三已知直線之連比.

［**作圖**］ 在已知直線 AB 上之 A，任作一直線 AC. 於 AC 上依次取 $AD=a$, $DE=b$, $EF=c$. 連 BF. 作 PD 及 QE 平行於 BF，則 P, Q 分 AB 爲 $a:b:c$



習題 3

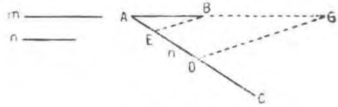
習題 4. 已知二直線之和及二直線之比，求作此二直線。

［作圖］ 在命題 XV 之圖內，設 AB 爲二直線之和，而 m 及 n 爲二直線之比，卽依 §297 之作圖法得分 AB 爲 $m:n$.

習題 5. 已知二直線之差及二直線之比，求作此二直線。

［已知］ AB 爲二直線之差，m, n 爲二直線之比。

［求］ 作二直線，使其差爲 AB，而其比爲 $m:n$.

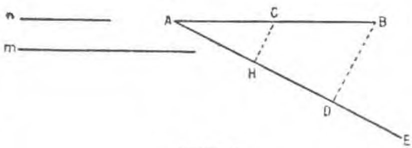


習題 5

［作圖］ 自 A 任作一直線 AC，於 AC 上取一段 $AD=m$, 再自 D 取 $DE=n$. 連 BE. 過 D 作 BE 之平行線交 AB 之延長線於 G. 則 AG 與 BG 卽爲所求之二直線。

習題 6. 試於已知直線 AB 上，求一點 C，使 $AB:AC=m:n$, 但 m 與 n 爲二已知之直線。

［作圖］ 自 A 任作一直線 AE. 於 AE 上取 $AD=m$, $AH=n$. 連 BD. 過 H 作 BD 之平行線 HC，交 AB 於 C. 則 C 卽爲所求之點。



習題 6

第 167 頁 § 300

習題. 在命題 XVI 之圖內，若 $AB=12$, $BC=16$, $AD=15$, 又 $DE=20$, 則 BD 平行於 CE 否？

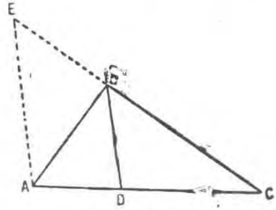
［解］ BD 平行於 CD. 因 $12:16=15:20$, 卽 $3:4=3:4$.

第 169 頁 § 302

習題 1. 在命題 XVII 之圖內，若 $AB=3$, $BC=4$, 又 $AD=2$, 求 DC.

［解］ $3:4=2:DC$, $\therefore\ DC=2\frac{2}{3}$.

習題 2. 在上題之圖內,若 $AB=m, BC=n$, 又 $DC=p$, 求 AD.



習題 1—5

［解］ $m:n=AD:p$, $\therefore\ AD=\dfrac{mp}{n}$.

習題 3. 在上題之圖內,求 DC, 若

(a) $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$.

(b) $AB=18$, $BC=9$, $AC=21$.

(c) $AB=21$, $BC=14$, $AC=25$.

［解］ (a) $4:5=6-DC:DC$, 即 $4DC=5(6-DC)$,

$$\therefore\ DC=3\tfrac{1}{3}.$$

(b) $18:9=21-DC:DC$, 即 $18DC=9(21-DC)$,

$$\therefore\ DC=7.$$

(c) $21:14=25-DC:DC$, 即 $21DC=14(25-DC)$,

$$\therefore\ DC=10.$$

習題 4. 在上題之圖內,若 $BC=a, CA=b, AB=c$, 求 AD 及 DC.

［解］ 命 $AD=x$, 則 $DC=b-x$.

$c:a=x:b-x$, $\therefore\ x=\dfrac{bc}{a+c}$, $b-x=\dfrac{ab}{a+c}$.

習題 5. 在上題之圖內,若 $AB=DC$, $AD=4$, 又 $BC=16$, 求 AB.

［解］ $AB:16=4:AB$, $\therefore\ AB=8$.

習題 6. 分三角形之一邊爲兩線段,與其他二邊成比例.

［解］ 平分此邊所對之角,其平分線卽分對邊爲兩段,與其他二邊成比例 (301).

習題 7. 試述命題 XVII 之逆定理,並證明之.

定理 自三角形一角頂點所作之線,若分對邊爲二線段與其鄰邊成比例,則此直線必爲頂角之平分線.

［證］ 在命題 XVII 之圖內, $AE \mathbin{/\!\!/} BD$ (作圖).

$AD:DC=AB:BC$ (假設). $AD:DC=EB:BC$ (292).

$$\therefore \quad AB=EB, \text{ 又 } \angle E=\angle EAB.$$

但 $\angle DBC=\angle E$, 又 $\angle ABD=\angle EAB$. $\therefore$ $\angle ABD=\angle DBC$.

相似多邊形

第 169 頁 § 303

習題. 相似二矩形之底邊各爲 12″ 及 8″, 若一矩形之高爲 9″, 則另一矩形之高幾何?

[解] $12:8=9:x$, $\therefore$ $x=6$.

第 171 頁 § 308

習題 1. 一多邊形之邊爲 3, 4, 5, 6 及 7. 若另一與之相似之多邊形, 與 3 相應之一邊爲 15, 求其餘各邊之長.

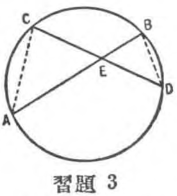
[解] 設與 4 相應之邊爲 x_4, 則 $3:4=15:x_4$, $\therefore$ $x_4=20$.

同樣, $x_5=25$, $x_6=30$, $x_7=35$.

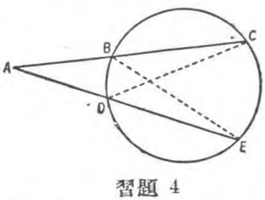
習題 2. 三角形之三邊爲 a, b, 及 c. 若另一與之相似之三角形, 與 a 相應之一邊爲 m, 求其餘各邊之長.

[解] 設一邊爲 b', 他一邊爲 c', 則 $a:b=m:b'$, 又 $a:c=m:c'$.

$$\therefore \quad b'=\frac{mb}{a}, \quad c'=\frac{mc}{a}.$$



習題 3



習題 4

習題 3. 若二弦 AB 與 CD 相交於 E, 則 $\triangle AEC$ 與 $\triangle BED$ 相似.

[證] $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle B$ (232).

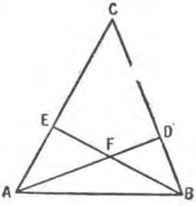
$$\therefore \quad \triangle AEC \sim \triangle BED \text{ (305)}.$$

習題 4. 若自圓外一點 A 作二割線, 分別交圓周於 B, C 及 D, E 則

$\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 相似.

〔證〕　$\angle C=\angle E$ (232). $\angle A=\angle A$.

$\therefore\ \triangle ABE\sim\triangle ACD$ (305).



習題 5

習題 5. 若三角形 ABC 之高 AD 與 BE 相交於 F, 則 $\triangle AFE$ 與 $\triangle BFD$ 相似.

〔證〕　$\angle BFD=\angle AFE$ (55).

$\angle BDF=\angle AEF=$直角.

$\therefore\ \triangle AFE\sim\triangle BFD$ (305).

習題 6. 求證: 等邊三角形皆相似.

〔證〕　等邊三角形每角俱爲 60°, 且三角皆相等, 故相似 (304).

習題 7. 求證:頂角相等(或底邊相等)之二等腰三角形相似.

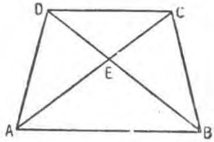
〔證〕　若頂角相等, 則每一底角皆等於頂角之補角之半.

故二 $\triangle$ 形有三角相等, 而成相似 (304). (圖略)

若底邊相等, 則每一底角亦各相等, 故二 $\triangle$ 相似 (305).

習題 8. 證明二正方形常相似.

〔證〕　二正方形之各相應邊成等比, 各相應角皆直角爲而相等, 故二形相似.



習題 9

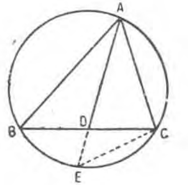
習題 9. 梯形之二對角線互分成比例線段.

〔證〕　$\angle BAE=\angle DCE$,

又　$\angle ABE=\angle EDC$ (104).

$\therefore\ \triangle ABE\sim\triangle DEC$ (305).

$\therefore\ AE:EC=BE:ED$ (303).



習題 10

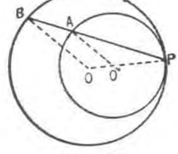
習題 10 延長內接三角形 ABC 一角之平分線 AD 使交圓周於 E, 則三角形 ABD 與三角形 AEC 相似.

〔證〕　$\angle BAD=\angle CAE$ (假設).

$\angle ABD=\angle AEC$ (232).

$\therefore\ \triangle ABD\sim\triangle AEC$ (305).

習題 11. 二圓內切，求證自切點所作大圓之諸弦，皆爲小圓分成等比。



習題 11

〔已知〕 O, O' 兩圓內切於 P, PB 爲大圓之任一弦，截小圓於 A.

〔求證〕 $PB : PA = OB : O'A$.

〔證〕 連 OO' 及 P, 並作 OB, $O'A$.

$\angle P = \angle O'AP = \angle B$ (71). $\triangle POB \sim \triangle PO'A$.

$\therefore$ $PB : PA = OB : O'A =$ 二圓半徑之比.

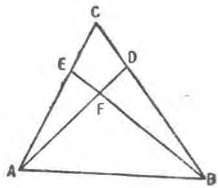
第 172—173 頁 §309

習題 1. 在 $\triangle ABC$ 內，作高 AD 及 BE, 求證 $AC : BC = DC : EC$.

〔證〕 在直角 $\triangle\triangle ADC$ 及 BEC 內，$\angle C = \angle C$.

$\therefore$ 直角 $\triangle ADC \sim$ 直角 $\triangle BEC$ (306).

$\therefore$ $AC : BC = DC : EC$.



習題 1—3

習題 2. 在上題之圖內，若 AD 與 BE 相交於 F, 求證 $BF : FA = DF : FE$.

〔證〕 $\angle BFD = \angle AFE$.

直角 $\triangle BFD \sim$ 直角 $\triangle AFE$ (306). $\therefore$ $BF : FA = DF : FE$.

習題 3. 在上題之圖內，$AE : AD = FE : DC$.

〔證〕 $\triangle AFE \sim \triangle ACD$ (306). $\therefore$ $AE : AD = FE : DC$.

習題 4. 若自內接三角形 ABC 之頂點 A, 作高 AD 及直徑 AF, 則

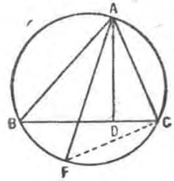
$$AB : AD = AF : AC.$$

〔證〕 作 FC. $\angle FCA = 90°$ (234).

$\angle B = \angle F$ (232). $\triangle BAD \sim \triangle FAC$ (306).

$\therefore$ $AB : AF = AD : AC$ (303).

$\therefore$ $AB : AD = AF : AC$ (279).



習題 4, 5

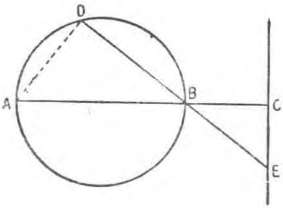
習題 5. 在上題之圖內，$BD : FC = AD : AC$.

［證］ $\angle B=\angle F$ (232), 又 $\angle FCA=\angle BDA=$直角.

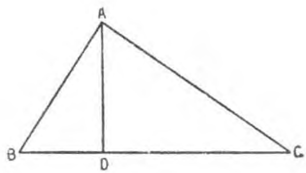
$\triangle BAD\sim\triangle FAC$ (306). $\therefore$ $BD:FC=AD:AC$.

習題 6. 若自圓外一點作一切線及一割線，則切線爲割線及其圓外線段之比例中項.

［證］ 參看第 185 頁命題 XXIX 之圖及其證明.



習題 7



習題 8, 9

習題 7. 若將直徑 AB 延長之至 C, 於 C 作一垂線, 又過 B 作一直線分別交圓及垂線於 D 及 E, 則 $AB:BE=DB:BC$.

［證］ $\angle D=$直角 (234), $\angle ABD=\angle CBE$,

$\therefore$ $\triangle ADB\sim\triangle CBE$. $\therefore$ $AB:BE=DB:BC$.

習題 8. 若於直角 $\triangle ABC$ 內, 作斜邊上之高 AD, 則

$$AD:AB=AC:BC.$$

［證］ $\angle BAD+\angle CAD=90°$, 又 $\angle C+\angle CAD=90°$.

$\therefore$ $\angle BAD=\angle C$. 直角 $\triangle DAB\sim$ 直角 $\triangle CAB$ (306).

$$\therefore\quad AD:AB=AC:BC.$$

習題 9. 在上題之圖內, $AD:AB=DC:AC$.

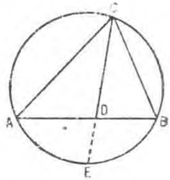
［證］ 直角$\triangle ADC\sim$直角$\triangle DAB$(305). $\therefore$ $AD:AB=DC:AC$.

習題 10. 延長內接三角形 ABC 角 C 之平分線 CD, 遇圓周於 E, 則 $EB:EC=DB:CB$.

［證］ 連 BE. $\angle EBD=\angle ECA=\angle ECB$ (232, 假設).

$\angle E=\angle E$, $\therefore$ $\triangle EDB\sim\triangle EBC$. $\therefore$ $EB:EC=DB:CB$.

習題 11. 延長內接三角形 ABC 角 C 之平分線 CD，與圓周相交於 E，則 EB 為 CE 與 DE 之比例中項.



習題 10—12

［證］ $\angle ECB=\angle ACE=\angle DBE.$

$\therefore\ \triangle CEB\sim\triangle DBE.$

$\therefore\ CE:EB=EB:DE.$

習題 12. 在上題之圖內，$AD:EB=AC:CE.$

［證］ $\angle A=\angle E$ (232), $\angle ACD=\angle BCD$ (假設).

$\triangle ADC\sim\triangle EBC.\quad\therefore\ AD:EB=AC:CE.$

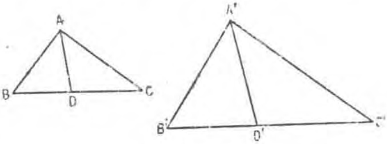
習題 13. 在相似三角形內，相應角平分線之比如任二相應邊之比.

［證］ $\angle B=\angle B'.$

$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle A'=\angle B'A'D'.$

$\therefore\ \triangle ADE\sim\triangle A'D'B'$ (305).

$\therefore\ AD:A'D'=AB:A'B'$



習題 13

習題 14 在相似三角形內，相應高之比如任二相應邊之比.

［證］ $\triangle ADB\sim\triangle A'D'B'$ (在前題之圖內，設 AD 及 $A'D'$ 為相應高).

$\therefore\ AD:A'D'=AB:A'B'.$

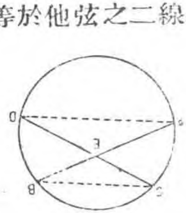
第 173 頁　　§ 310

習題 1. 若二弦相交於圓內，則一弦之二線段之積等於他弦之二線段之積.

［證］ 作 CB 及 AD. $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ (233).

$\triangle CEB\sim\triangle AED,\quad\therefore AE:CE=ED:EB,$

即　$AE\times EB=CE\times ED.$



習題 1

參看第 183 頁 § 320.

習題 2. 若自弦 AB 上之任一點 E，作直徑 AD 之垂線 EC，則

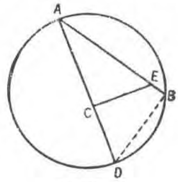
$$AC \times AD = AB \times AE.$$

［證］ 連 BD. $\angle B = \angle ACE =$ 直角.

$\angle A = \angle A$. $\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE$.

$\therefore \quad AC : AB = AE : AD$,

即 $\quad AC \times AD = AB \times AE$.



習題 2

習題 3. 直角三角形二直角邊之積等於斜邊與其高之積.

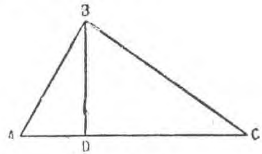
［證］ $\angle ABD + \angle CBD =$ 直角,

$\angle C + \angle CBD =$ 直角.

$\therefore ABD = \angle C$, $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (306).

$\therefore \quad AB : AC = BD : BC$ (303),

即 $\quad AB \times BC = AC \times BD$.



習題 3

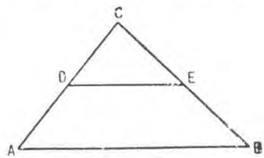
習題 4. 若於三角形 ABC 內,平行於 AB 之一直線交 BC 於 E,交 CA 於 D. 則 $AC \times DE = DC \times AB$.

［證］ $\angle CDE = \angle CAB$, $\angle CED = \angle CBA$,

$\triangle CDE \sim \triangle CBA$ (307).

$\therefore DE : AB = DC : AC$.

即 $\quad AC \times DE = DC \times AB$.



習題 4

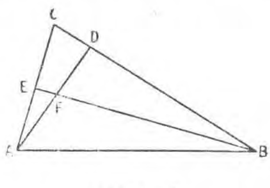
習題 5. 一三角形之任一高與其相應邊之積, 等於其他之任一高與其相應邊之積.

［證］ $\angle ADC = \angle BEC =$ 直角,

$\angle C = \angle C$, $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (306).

$\therefore \quad AC : BC = AD : BE$,

即 $\quad AC \times BE = BC \times AD$.



習題 5—8

習題 6. 三角形三邊爲 14, 15, 及 13 邊 14 上之高爲 12, 求他邊上之高. (比較習題 5.)

［解］ $14 \times 12 = 15 \times x$, $\quad \therefore \quad x = 12.9$,

$14 \times 12 = 13 \times x'$, $\quad \therefore \quad x' = 11.2$.

習題 7. 在 $\triangle ABC$ 內，高 AD 交高 BE 於 F，則

$$BF \times BE = BC \times BD.$$

［證］ 在 $\triangle$s BFD 及 BEC 內，$\angle BDF = \angle BEC =$ 直角，$\angle B$ 公用，

$$\therefore \triangle BFD \sim \triangle BEC. \quad \therefore BF : BC = BD : BE,$$

即
$$BF \times BE = BC \times BD.$$

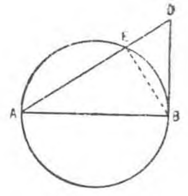
習題 8. 在 $\triangle ABC$ 內，高 AD 交高 BE 於 F，則

$$BD \times DC = DF \times AD.$$

［證］ 在 $\triangle$s BDF 及 DAC 內，$\angle BDF = \angle ADC =$ 直角，$\angle EBC = \angle DAC$（二角皆為 $\angle C$ 之餘角）。$\therefore \triangle BDF \sim \triangle DAC$ (306).

$$\therefore BD : AD = DF : DC, \text{ 即 } BD \times DC = AD \times DF.$$

習題 9. 若 AB 為直徑，BD 為切於 B 之切線，而 DA 遇圓於 E，則 $\overline{AB}^2 = AE \times AD$.



習題 9, 10

［證］ 連 BE.　　$\angle BEA = 90°$.

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ABD \text{ (306)}.$$

$$\therefore AB : AD = AE : AB, \text{ 即 } \overline{AB}^2 = AD \times AE.$$

習題 10. 在上題之圖內，$\overline{BE}^2 = AE \times ED$.

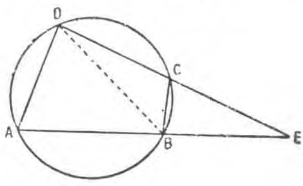
［證］ $\angle A = \angle EBD$（二角皆為 $\angle ABE$ 之餘角）.

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle BED.$$

$$\therefore AE : BE = BE : ED, \text{ 即 } \overline{BE}^2 = AE \times ED.$$

習題 11. 若將內接四邊形 $ABCD$ 之二邊 AB 與 DC 延長之，使相交於 E，而 $\angle DBA = \angle CBE$，則

$$AD \times BE = CE \times BD.$$



習題 11

［證］ $\angle A + \angle DCB = 180°$ (235),

又　$\angle BCE + \angle DCB = 180°$.

$$\therefore \angle A = \angle BCE.$$

又
$$\angle DBA = \angle CBE.$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BCE \text{ (305)}.$$

$\therefore\ AD : CE = BD : BE$, 則 $AD \times BE = CE \times BD$.

習題 12. 在 $\triangle ABC$ 內, 作高 AD 及 BE, 若 $BE=6$, $EC=3$, 及 $DC=2$, 求 AD.

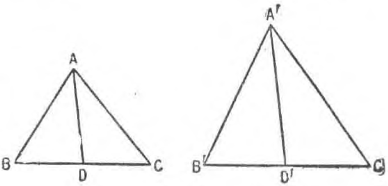
［解］ 用習題 5 之圖.

$$\triangle BEC \sim \triangle ADC\ (306).\quad \therefore\ BE : AD = EC : DC,$$

卽 $$6 : AD = 3 : 2,\ 或\ AD = 4.$$

第 174 頁　§ 311

習題 1. 二相似三角形,其相應中線之比如任二相應邊之比.



習題 1

［證］ 在相似三角形 AEC 及 $A'B'C'$ 內, AD 與 $A'D'$ 爲相應中線. $AB : A'B' = BC : B'C'$ (303).

$BC : B'C' = BD : B'D'$ (289).

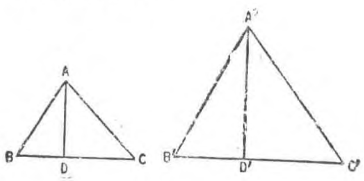
$$\angle B = \angle B'\ (303).$$

$$\therefore\ AB : A'B' = BD : B'D'\ (公理\ 1).$$

$$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'\ (311).$$

$\therefore\ AB : A'B' = AD : A'D'$, 餘類推.

習題 2. 若 $\triangle ABC$ 與 $A'B'C'$ 之高 AD : 高 $A'D' = BC : B'C'$ 又 $\angle B = \angle B'$, 則此二三角形相似.



習題 2

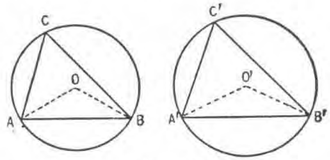
［證］ 直角 $\triangle ABD \sim \triangle$直角$\triangle A'B'D'$.

$\therefore\ AD : A'D' = AB : A'B'$ 又 $AB : A'B' = BC : B'C'$ (公理 1).

$$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'\ (311).$$

習題 3. 二相似三角形，其外接圓半徑之比等於任二相應邊之比。

［證］ 自外接圓心 O 及 O' 各作 OA, OB 及 $O'A'$, $O'B'$. $\angle A=\angle A'$. $\angle O=2\angle C$, 又 $\angle O'=2\angle C'$ (227, 232). $\therefore\ \angle O=\angle O'$ 但 $OA:O'A'=OB:O'B'$ (公理 3).



習題 3

$$\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'\ (311),$$

$$\therefore\ OA:O'A'=AB:A'B'.$$

第 175 頁

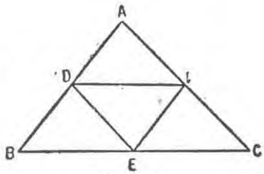
§ 312

習題 1. 連結 $\triangle ABC$ 三邊中點之直線成一三角形，與原形相似。

［證］ $2DE=AC$, $2EF=AB$, $2DF=BC$ (153)

$$\therefore\ \frac{DE}{AC}=\frac{EF}{AB}=\frac{DF}{DC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle DEF\ (312).$$



習題 1

習題 2. 若一三角形之二邊及其中一邊之中線，與他一三角形之相應部分成比例，則此二三角形相似。

［證］ 用第 174 頁習題 1 之圖. 在 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$ 內,

若 $AB:A'B'=BC:B'C'=$ 中線 $AD:$ 中線 $A'D'$.

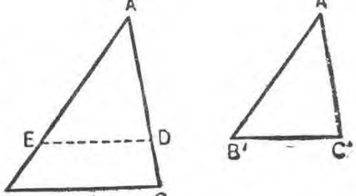
$$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'\ (312).\quad \therefore \angle B=\angle B'.$$

$$\therefore\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'\ (311).$$

習題 3. 若一直角三角形之斜邊及一直角邊與他一直角三角形之相應部分成比例，則此二直角三角形相似。

［證］ $AB:A'B'=AC:A'C'$,

又 $\angle C=\angle C'=90°$.



習題 3

在 AC 上截取 $AD=A'C'$，又在 AB 上截取 $AE=A'B'$. 連 DE.

則 $AB:AE=AC:AD$, 又 $\triangle ADE\sim\triangle ACB$ (311),

又 $\angle C=\angle ADE=90°$. $\triangle ADE\cong\triangle A'C'B'$ (124).

$$\therefore\quad \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

第 176 頁 § 313

習題. 二三角形之三邊若各自互相垂直，則此二三角形相似.

［解］ 依第 313 節命題 XXI 所用之方法，$\angle A+\angle A'=2$ 直角，或 $\angle A=\angle A'$ (119). 茲不贅.

第 177 頁 § 314

習題 1. 三角形之底邊爲 2 呎，高爲 9 吋，若一相似三角形之相應底邊爲 6 吋，求其相應高.

［解］ $24:6=9:x$, $\therefore\quad x=2\frac{1}{4}$吋.

習題 2. 求證：在二相似三角形內，相應高分原形爲相似三角形.

［證］ 用第 314 節命題 XXII 之圖形. $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$ (假設).

$\angle BDA=\angle B'D'A=90°$. $\angle B=\angle B'$. $rt.\triangle ABD\sim rt.\triangle A'B'D'$.

同樣， $rt.\triangle ADC\sim\triangle A'D'C'$.

第 180 頁 § 317

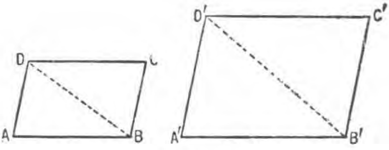
習題 1. 作一四邊形，五邊形，及六邊形. 次在相應於各多邊形一邊之已知直線上，作一四邊形，一五邊形，及一六邊形，各與已知之多邊形相似.

［解］ 完全可仿 § 317 之法求之.

習題 2. 作一平行四邊形. 次以 AB 爲底作一相似之平行四邊形.

［已知］ 一平行四邊形 $ABCD$，及一直線 $A'B'$.

［求］ 以 $A'B'$ 爲一邊作一相似於 $ABCD$ 之平行四邊形.



習題 2

［作圖］ 連 BD. 過 A' 作 $A'D' \mathbin{/\!\!/} AD$，過 B' 作 $B'D' \mathbin{/\!\!/} BD$，使 $A'D'$ 及 $B'D'$ 相交於 D'. 過 D' 作 $D'C' \mathbin{/\!\!/} A'B'$，過 B' 作 $B'C' \mathbin{/\!\!/} A'D'$，使二線相交於 C'. 則 $A'B'C'D'$ 卽爲所求之平行四邊形.

習題 3. 作一四邊形 $ABCD$ 與一已知之四邊形 $A'B'C'D'$ 相似，且對角線 AC 等於一已知之直線.

［作圖］ 先作對角線 AC 等於已知之直線，再過此對角線之兩端作四直線與已知四邊形各相應邊平行，卽得所求之四邊形.

習題 4. 應用命題 XXV，作一矩形與已知之矩形相似.

［解］ 完全仿 §317 之法求之.

第 181—182 頁 §318

習題 1. 二相似多邊形之周之比，如任二相應對角線之比.

［證］ 用第 315 節，命題 XXIII 之圖形. $P : P' = AB : A'B'$ (318)，又 $AC : A'C' = AB : A'B'$ (參看命題 XXIII 之證明).

$$\therefore \quad P : P' = AC : A'C' \text{ (公理 1).}$$

習題 2. 二相似多邊形之周之比，如任二相應高之比.

［證］ 用第 314 節命題 XXII 之圖形. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (假設).

$$\therefore \quad P : P' = AB : A'B' \text{ (318).}$$

但 $AB : A'B' = AD : A'D'$ (314). $\therefore \quad P : P' = AD : A'D'$.

習題 3. 一多邊形之邊爲 4, 5, 6, 7, 8, 若其相似多邊形與 5 相應之一邊爲 7，則其周應爲若干？

［解］ $(4+5+6+7+8) : x = 5 : 7$， $\therefore \quad x = 42$.

習題 4. 二相似多邊形之周爲 20 吋及 25 吋，若一多邊形之一邊爲 4 吋，求他一多邊形相應邊之長.

［解］ $20:25=4:x,\quad \therefore\quad x=5$ 吋.

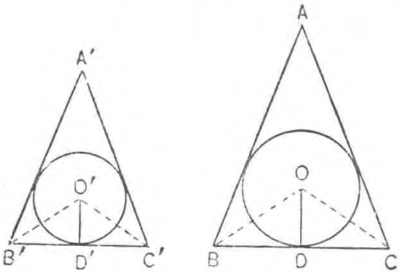
習題 5. 在命題 XXVI 之圖內，若 $A'B'C'D'E'$ 之周爲 20 吋，$A'B'=4$ 吋，$B'C'=3$ 吋，$AC=10$ 吋，$B'C':A'B'=A'B':A'C'$，又 $ABCDE\sim A'B'C'D'E'$，求 $ABCDE$ 之周.

［解］ $B'C':A'B'=A'B':A'C'$，卽 $3:4=4:A'C'$.

$\therefore\ A'C'=\frac{1}{3}\times16.\quad 20:P=\frac{1}{3}\times16:10,\quad \therefore\ P=37\frac{1}{2}$ 吋.

第 182 頁 § 319

習題 1. 二相似三角形內切圓半徑之比如任二相應邊之比.



習題 1

［證］ $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle B$，又 $\angle O'B'C'=\frac{1}{2}\angle B'$，餘仿此.

$$\therefore\quad \triangle OBC\sim\triangle O'B'C'\ (305)$$

由是 $$BC:B'C'=OD:O'D'\ (314).$$

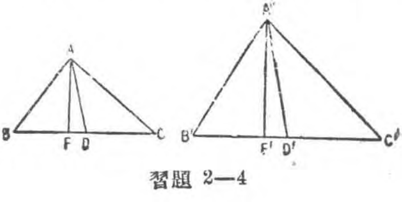
習題 2. 若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相似.而 AD 及 $A'D'$ 皆爲角之平分線，AF 及 $A'F'$ 爲高，求證

$$AD:A'D'=AF:A'F'.$$

［證］ $AB:A'B'=AD:A'D$

(第 309 頁習題 13).

$AB:A'B'=AF:A'F'$ (314).



習題 2—4

$\therefore \quad AD : A'D' = AF : A'F'$ (公理 1).

習題 3. 在相似 $\triangle ABC$ 及 $A'B'C'$ 內,於邊 BC 及 $B'C'$ 上,各取點 D 及點 D',使 $\angle BAD = \angle B'A'D'$,求證 $BD : B'D' = BC : B'C'$.

［證］ $\angle BAD = \angle B'A'D'$, $\angle B = \angle B'$.

$\therefore \quad \triangle BAD \sim \triangle B'A'D'$ (305).

$\therefore \quad AB : A'B' = BD : B'D'$.

但 $\quad AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

$\therefore \quad BD : B'D' = BC : B'C'$ (公理 1).

習題 4. 求證習題 2 內之 $\triangle ADF$ 及 $A'D'F'$ 爲相似三角形.

［證］ $\triangle ADF$ 及 $A'D'F'$ 皆爲直角三角形.

$AD : A'D' = AF : A'F'$ (習題 2).

$\therefore \quad \triangle ADF \sim \triangle A'D'F'$ (第 175 頁習題 3).

第 183 頁 § 321

習題 1. 在命題 XXVII 之圖內,若 $AE=3$, $EB=4$, $ED=6$, 求 CE.

［解］ $3\times 4 = CE \times 6, \quad \therefore \quad CE = 2.$

習題 2. 在上題之圖內,若 $AE=a$, $EB=b$, 又 $ED=c$, 求 CE.

［解］ $a\cdot b = CE\cdot c, \quad \therefore \quad CE = \dfrac{ab}{c}.$

習題 3. 在上題之圖內,若 $AE=4$, $EB=9$, 又 $CE=ED$, 求 CE.

［解］ $4\times 9 = \overline{CE}^2, \quad \therefore \quad CE = 6.$

習題 4. 若二弦之延長線相遇於圓外,則命題 XXVII 能適合於弦之外分線段否?

［解］ 可以適用,如 $AE \times EB = CE \times ED$. 證明見命題 XXVIII.

第 184 頁 § 322

習題 1. 在命題 28 之圖內,若 $CB=16$, $BA=2$, $DA=4$, 求 DE.

［解］ $AC=16+2=18.$ $18\times 2=AE\times 4,$ $\therefore AE=9.$

$$\therefore\ DE=AE-AD=9-4=5.$$

習題 2. 在同一圖內，若 $CA:DA=2:1$，求證 $EA=2BA$.

［證］ $$CA:EA=DA:BA\ (322,\text{敍述 }6).$$

$$CA:DA=EA:BA\ (279).$$

$$2:1=EA:BA,\ \text{或}\ EA=2BA.$$

習題 3. 在同一圖內，若 $CB=a$, $BA=b$, $AE=c$, 求 DA.

［解］ $CA=a+b.$ $c\cdot DA=b(a+b).$ $\therefore DA=\dfrac{b(a+b)}{c}.$

習題 4. 在同一圖內，若 $AB=AD$，則 $BCED$ 爲一等腰梯形.

［證］ $AB\times AC=AE\times AD.$ 因 $AB=AD,$ $\therefore AC=AE$ (公理 8). 又 $BC=DE$ (公理 3). $\therefore \widehat{BC}=\widehat{DE}.$ $\therefore \angle CDB=\angle ECD.$

$\therefore BD\parallel CE.$ $\therefore BCED$ 爲一等腰梯形.

第 185 頁 § 324

習題 1. 在命題 XXIX 之圖內，若 $DC=5$, $AC=4$, 求 AB.

［解］ $AD=5+4=9.$ $9:AB=AB:4.$ $\therefore AB=6.$

習題 2. 在上題之圖內，若 $AB=8$ 吋，自 A 至圓心之距離爲 17 吋，求圓之半徑.

［解］ $(17+r)(17-r)=8^2,$ $\therefore r^2=225$ 卽 $r=15$ 吋.

習題 3 自相交二圓公共弦延長線上之任一點所作二圓之切線必相等.

［證］ $PB:PX=PX:PA$ (323),

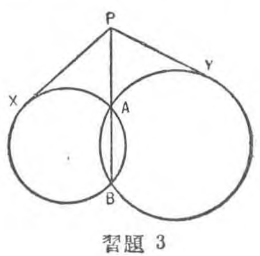
卽 $$PB\times PA=\overline{PX}^2.$$

又 $$PB:PY=PY:PA\ (323),$$

卽 $$PB\times PA=\overline{PY}^2.$$

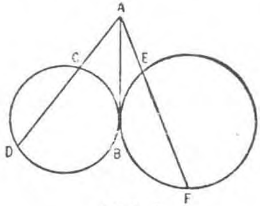
$$\therefore\ \overline{PX}^2=\overline{PY}^2,$$

卽 $$PX=PY.$$



習題 3

習題 4. 若二圓互相外切，自其內公切線上任一點作二圓之割線，則每一割線與其圓外線段之積相等.



習題 4

［證］ $AD : AB = AB : AC$ (312),

卽 $\overline{AB}^2 = AD \times AC.$

$AF : AB = AB : AE$ (312),

卽 $\overline{AB}^2 = AF \times AE.$

$\therefore\ AD \times AC = AF \times AE.$

第 186 頁 § 325

習題 1. 在命題XXX之圖內，求證 $CB \times BD = BA \times CD$.

［證］ $\triangle CBD \sim \triangle DBA$ (325). $\therefore\ CB : BA = CD : BD$

卽 $CB \times BD = BA \times CD.$

習題 2. 在上題之圖內，若 $CD = 9$，而 $DA = 16$，求 BD.

［解］ $\triangle CBD \sim \triangle DBA$ (325). $\therefore\ 9 : BD = BD : 16$,

卽 $BD = 12.$

習題 3. 若 $CD = 4$, $DA = 9$，求BC 及 BA.（用命題 XXX 之圖）.

［解］ $\triangle ABC \sim \triangle CDB$. $\therefore\ CA : BC = BC : CD$.

$CA = 9 + 4 = 13$. $\therefore\ 13 : BC = BC : 4$, 卽 $BC = 2\sqrt{13}$.

又 $13 : BA = BA : 9$, 卽 $BA = 3\sqrt{13}$.

習題 4. 在上題之圖內，求證 $BC \times BA = BD \times CA$.

［證］ $\triangle BCA \sim \triangle BCD$. $\therefore\ BC : CA = BD : BA$,

卽 $BC \times BA = BD \times CA.$

第 187 頁 § 326

習題 1. 在命題 XXXI 之圖內，若 $AD = 4$, $AC = 9$，則 AB 之長爲若干？

［解］ $AC : AB = AB : AD$, 卽 $9 : AB = AB : 4$, $\therefore\ AB = 6$.

習題 2. 在上題之圖內，若 $AB=15$, $AC=25$, 求 AD 及 BD.

〔解〕 $25:15=15:AD$. $\therefore\ AD=9$, 又 $CD=16$.

$16:BD=BD:9$. $\therefore\ BD=12$.

習題 3. 在上題之圖內，若 $BD=24$, $AD=18$, 求 AC 及 BC.

〔解〕 $18:24=24:CD$. $\therefore\ CD=32$, 又 $AC=32+18=50$.

$50:BC=BC:32$. $\therefore\ BC=40$.

第 188 頁　§ 328

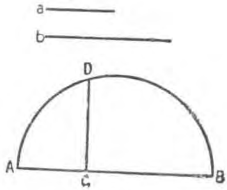
習題 1. 若 a 與 b 爲已知之直線，求作 $\sqrt{ab}$.

〔解〕 設 $x=\sqrt{ab}$, 則 $x^2=ab$, 卽 $x\cdot x=ab$.

$a:x=x:b$, 由是作圖如下：

〔作圖〕 作 $AB=a+b$, 並使 $AC=a$, $BC=b$.

以 AB 爲直徑作一半圓． 於 C 作一垂線 CD 交圓周於 D, 則 CD 卽爲所求之直線．



習題 1

〔證〕 $\overline{DC}^2=AC\times BC$, $\therefore\ DC=\sqrt{ab}$.

習題 2. 若 a 與 b 爲二已知直線，求作 $\sqrt{6ab}$.

〔作圖〕 圖同前題． 取 $AC=3a$, $CB=2b$, 依上法作半圓，再於 C 作一垂線 $DC\perp AB$, 交圓周於 D. 則 DC 卽爲所求之直線．

或取 $AC=2a$, $CB=3b$, 依上法求其比例中項亦得．

習題 3. 若 a 爲已知直線，求作一直線等於 $a\sqrt{2}$.

〔解〕 $a\sqrt{2}=\sqrt{a^2\cdot 2}=\sqrt{2a\cdot a}$.

〔作圖〕 圖同前題． 作 $AC=a$, $CB=2a$, 依上法作半圓及垂線卽得．

習題 4. 若 a 爲已知直線，求作一直線等於 $a\sqrt{5}$.

〔作圖〕 圖同前題． 作 $AC=a$, $CB=5a$, 依上法作半圓及垂線卽得．

習題 5. 若 a 爲已知直線，求作一直線等於 $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

〔作圖〕 圖同前題．作 $AC=2a$, $CB=\frac{1}{3}a$, 依上法作半圓及垂線卽得．

第 189—190 頁 § 330

習題 1. 若直角三角形之二直角邊爲 (*a*) 1 呎及 5 吋, (*b*) m 及 n, 試各求其斜邊。

［解］ (*a*) $12^2+5^2=c^2=169$, $\therefore\ c=13$ 吋.

(*b*) $m^2+n^2=c^2$, $\therefore\ c=\sqrt{m^2+n^2}$.

習題 2. 直角三角形之斜邊爲 25, 一直角邊爲 20, 求另一直角邊。

［解］ $20^2+b^2=25^2$, $\therefore\ b^2=625-400=225$, 卽 $b=15$.

習題 3. 等邊三角形之一邊爲 8 吋, 求其高。

［解］ $h^2=8^2-4^2=48$. $\therefore\ h=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ 吋.

習題 4. 等邊三角形之一邊爲 b 求其高。$\left(h=\dfrac{b}{2}\sqrt{3}\right)$

［解］ $h^2=b^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}b^2$. $\therefore\ h=\dfrac{1}{2}b\sqrt{3}$.

習題 5. 一等腰三角形之底邊爲 8, 腰爲 5, 求其高。

［解］ $h^2=5^2-(\frac{8}{2})^2=25-16=9$, $\therefore\ h=3$.

習題 6. 一等腰直角三角形之斜邊爲 8 吋, 求其腰之長。

［解］ $x^2+x^2=8^2$. $\therefore\ x=4\sqrt{2}$ 吋.

習題 7. 二圓之半徑, 一爲 6 吋, 一爲 21 吋, 二圓心相距 25 吋, 求其外公切線之長。

［解］ 用第 151 頁習題 6 之圖。 作 $O'A$. $ABCO'$ 爲一矩形。

$O'C=AB$. $OA=OB-O'C$, 又 $BC=AO'$.

在直角三角 $OO'A$ 內, $OO'=25$, $OA=21-6=15$.

$$\therefore\ BC=AO'=\sqrt{25^2-15^2}=\sqrt{40\times 10}=20\text{ 吋}.$$

習題 8. 等邊三角形之高爲 10, 求其邊之長.

［解］ 設邊長爲 x, 則 $x^2-(\frac{1}{2}x)^2=100$, 卽 $\frac{3}{4}x^2=100$

$$\therefore\ x=\tfrac{1}{3}20\sqrt{3}.$$

另法 由習題 4 之公式 $h=\frac{1}{2}b\sqrt{3}$ 求之。

$$\frac{1}{2}b\sqrt{3}=10. \quad \therefore\ b=\frac{20}{\sqrt{3}}=\frac{20}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{20}{3}\sqrt{3}.$$

習題 9. 直角三角形二直角邊平方之比，如其斜邊上相鄰二線段之比.

［證］ 用第 189 頁命題 XXXIII 之圖.

$$p:b=b:c\ (326), \quad \therefore\ b^2=c\cdot q\ (274),$$

同理，　$a^2=c\cdot p. \quad \therefore\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{c\cdot q}{c\cdot p}=\frac{q}{p}.$

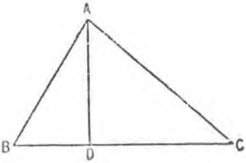
習題 10. 若 AD 爲三角形 ABC 之高，則

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2.$$

［證］　$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$ (329).

又　$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2.$

$\therefore\ \overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$ (公理 3).



習題 10

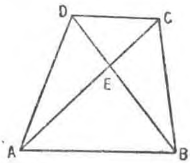
習題 11. 若四邊形之對角線互相垂直，則其二對邊平方之和必等於他二對邊平方之和.

［證］ 設二對角線 AC 與 BD 相交於 E，則

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{DE}^2+\overline{CE}^2.$$

$$\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{AE}^2+\overline{DE}^2.$$

$$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2\ (\text{公理 } 1).$$



習題 11

習題 12. 若三角形一邊之平方等於其餘二邊平方之和，則此三角形必爲一直角三角形.

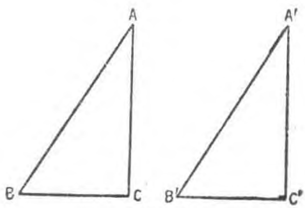
［證］ 設 ABC 爲已知三角形，

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2.$$

作 rt. $\triangle A'B'C'$，使 $A'C'=AC$，$B'C'=BC$，$\angle C'=90°$.

於是，　$\overline{A'B'}^2=\overline{A'C'}^2+\overline{B'C'}^2$

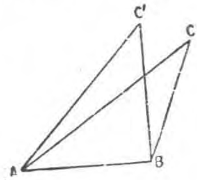
$$=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2.$$



習題 12

$\therefore\ A'B'=AB. \quad \therefore\ \triangle A'B'C'\cong\triangle ABC.$ 又 $\angle C=\angle C'=90°.$

習題 13. 若三角形一邊之平方大於其餘二邊平方之和，則此三角形必爲一鈍角三角形.



習題 13

［證］ 於 B 作 $C'B \perp AB$，且使 $C'B = CB$. 連 AC'.

則 $$AC' = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}.$$

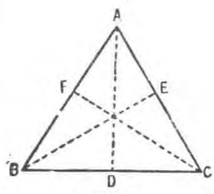
$$AC > \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}. \quad \therefore \ AC > AC'.$$

$$\therefore \ \angle ABC > \angle ABC'.$$

但 $\angle ABC' = rt.\angle$. $\therefore$ $\angle ABC > rt.\angle$ 而爲鈍角.

第 191—192 頁 § 332

習題 1. 在銳角三角形 ABC 內，作 AB 在 AC 上之射影，AB 在 BC 上之射影，及 AC 在 AB 上之射影.



習題 1

［作圖］ 自 B 作 $BE \perp AC$，則 AE 爲 AB 在 AC 上之射影.

自 A 作 $AD \perp BC$，則 BD 爲 AB 在 BC 上之射影.

自 C 作 $CF \perp AB$，則 AF 爲 AC 在 AB 上之射影.

習題 2. 若 $AB \mathbin{/\!\!/} XY$，求證 AB 在 XY 上之射影等於 AB.

［證］ $AB \mathbin{/\!\!/} XY$. 自 A, B 兩端各作垂線垂直於 XY，則 XY 爲 AB 之射影. 今 $ABYX$ 爲一矩形，其對邊自必相等，故 $AB = XY$.

習題 3. 若等邊三角形之邊長 10 吋，求其一邊在另一邊上之射影.

［解］ 射影之長 $= \frac{1}{2} \times 10 = 5$ 吋.

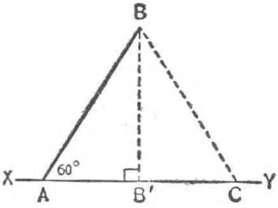
習題 4. 若直線 AB 與 XY 之夾角爲 $60°$，則 AB 在 XY 上之射影等於 AB 之半 (165).

［證］ 延長 AB' 至 C，使 $B'C = AB'$. 連 BC.

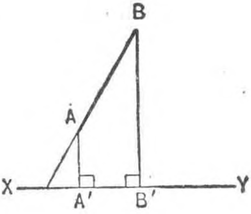
則 $$\triangle ABB' \cong \triangle BB'C \ (s.a.s.).$$

$\triangle ABC$ 爲一等邊 $\triangle$, 每角爲 $60°$.

$$\therefore \quad AB' = \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}AB.$$



習題 4



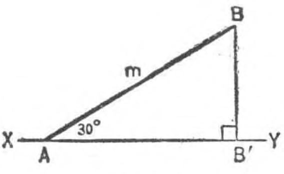
習題 5

習題 5. 若 BA 之延長線與 XY 成 $60°$ 角, 求證 AB 在 XY 上之射影 $A'B'$ 等於 AB 之半.

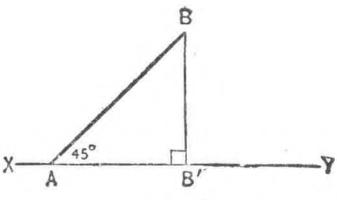
[證] 設 BA 之延長線與 XY 之交點爲 X, 則

$$XB' = \frac{1}{2}XB \text{ (習題 4)}. \qquad \text{同理,} \ XA' = \frac{1}{2}XA.$$

由是 $$A'B' = \frac{1}{2}AB \text{ (公理 3)}.$$



習題 6



習題 7

習題 6. 若直線 AB 與 XY 成 $30°$ 角, 又 $AB = m$, 求證 AB 在 XY 上之射影等於 $\frac{1}{2}m\sqrt{3}$.

[證] $$BB' = \tfrac{1}{2}m \text{ (習題 4)}.$$

$$\therefore \quad AB' = \sqrt{m^2 - \left(\frac{1}{2}m\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}m^2} = \frac{1}{2}m\sqrt{3}.$$

習題 7. 若直線 AB 與 XY 成 $45°$ 角，又 $AB=m$，求證 AB 在 XY 上之射影等於 $\frac{1}{2}m\sqrt{2}$.

［證］ 設 $AB'=x$，則 $BB'=x$. $\therefore$ $x^2+x^2=m^2$，即 $2x^2=m^2$.

$$\therefore \quad x^2=\tfrac{1}{2}m^2, \quad 即 \quad x=\tfrac{1}{2}m\sqrt{2}.$$

習題 8. 若 AB 之延長線與 XY 成 $30°$ 角；$45°$ 角，試分別證明以上之二習題.(圖同習題 5.)

證法同習題 5.

習題 9. 若 $AB=m$，又 AB 與 XY 成 $120°$ 角，求 AB 在 XY 上之射影.

［解］ AB 與 XY 所成銳角為 $180°-120°=60°$，故其射影 $=\frac{1}{2}m$. 但其方向與前相反，應為 $-\frac{1}{2}m$.

習題 10. 若 $AB=m$，又 AB 與 XY 成 $135°$ 角，求 AB 在 XY 上之射影.

［解］ AB 與 XY 所成銳角為 $180°-135°=45°$，故其射影 $=-\frac{1}{2}m\sqrt{2}$.

習題 11. 若 $AB=m$，又 AB 與 XY 成 $150°$ 角，求 AB 在 XY 上之射影.

［解］ AB 與 XY 所成銳角為 $180°-150°=30°$，故其射影 $=-\frac{1}{2}m\sqrt{3}$.

習題 12. 若在 $\triangle ABC$ 內，$AB=8$，$AC=10$，又 $\angle A=60°$，求 AB 在 AC 上之射影，及 BC 在 AC 上之射影.

［解］ 用習題 4 之圖. AB 在 AC 上之射影 $=\frac{1}{2}\times 8=4$.

BC 在 AC 上之射影 $=10-4=6$.

習題 13. 若在 $\triangle ABC$ 內，$AB=10$，$AC=12$，又 $\angle A=45°$，求 AB 在 AC 上之射影.

［解］ 用習題 4 之圖. AB 在 AC 上之射影 $=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

習題 14. 在上題之圖內，求 BC 在 AC 上之射影.

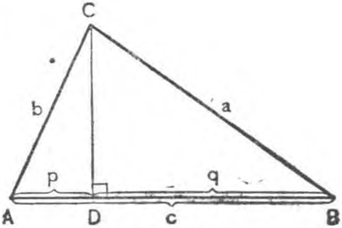
［解］ BC 在 AC 上之射影爲 $AC-AB'=12-5\sqrt{2}$.

習題 15. 在 $\triangle ABC$ 內, $AC=24$, $BC=10$, 又 $\angle C=90°$, 求 AC 在 AB 上之射影.

［解］ $AB=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{676}=26.$

$p:24=24:26.$

$\therefore$ 射影$=22\frac{2}{13}$.



習題 15

［注意］ $\triangle abc$ 表一三角形，其三邊爲 a, b, 及 c. 又 p 爲 b 在 c 上之射影, q 爲 a 在 c 上之射影. 下列習題所用其他記號,概依 § 242 之規定.

習題 16. 在 $\triangle abc$ 內,若 $b=4$, $p=2$, 求 $\angle A$ 及 h_c.

［解］ $\angle A=60°$, $h_c=\sqrt{b^2-p^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$

習題 17. 在 $\triangle abc$ 內,若 $b=5$, $h_c=4$, $c=8$, 求 q.

［解］ $p=\sqrt{5^2-4^2}=3,\quad \therefore\ q=c-p=8-3=5.$

習題 18. 在 $\triangle abc$ 內,若 $b=10$, $h_c=8$, $a=17$, 求 c.

［解］ $c=\sqrt{10^2-8^2}+\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{36}+\sqrt{225}=6+15=21.$

習題 19. 在 $\triangle abc$ 內,若 $b=10$, $h_c=8$, $c=14$, 求 a.

［解］ $p=\sqrt{10^2-8^2}=6,\ q=14-6=8,$

$$\therefore\quad a=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}.$$

習題 20. 在 $\triangle abc$ 內,以 b, h_c 及 c 表 a.

［解］ $a^2=h_c^2+(c-p)^2=h_c^2+(c-\sqrt{b^2-h_c^2})^2$

$$=h_c^2+c^2+b^2-h_c^2-2c\sqrt{b^2-h_c^2}.$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{b^2+c^2-2c\sqrt{b^2-h_c^2}}.$$

習題 21. 在 $\triangle abc$ 內,若 $a=20$, $b=37$, $q=16$, 求 p.

［解］ $h_c=\sqrt{20^2-16^2}=12.\quad p=\sqrt{37^2-12^2}=\sqrt{49\times25}=35.$

習題 22. 在 $\triangle abc$ 內,若 $b=15$, $p=9$, $c=25$, 求 a.

〔解〕 $h_c=\sqrt{15^2-9^2}=12.$ $q=25-9=16.$ $a=\sqrt{12^2+16^2}=20.$

習題 23. 在 $\triangle abc$ 內，以 $b, c,$ 及 p 表 $a.$

〔解〕 參看第 334 節命題 XXXIV.

第 193—194 頁 § 335

習題 1. 在 $\triangle abc$ 內，求 $a,$ 若

(a) $b=8,$ $c=5,$ $p=4.$ (b) $b=24,$ $c=9,$ $p=12.$

(c) $b=5,$ $c=6,$ $p=3.$ (d) $b=13,$ $c=14,$ $p=12.$

(e) $b=17,$ $c=9,$ $p=15.$

〔解〕 (a) $a=\sqrt{8^2+5^2-2\times5\times4}=7.$

(b) $a=\sqrt{24^2+9^2-2\times9\times12}=21.$

(c) $a=\sqrt{5^2+6^2-2\times6\times3}=5.$

(d) $a=\sqrt{13^2+14^2-2\times14\times12}=\sqrt{29}.$

(e) $a=\sqrt{17^2+9^2-2\times9\times15}=10.$

習題 2. 若三角形之一邊為 15，又一邊為 25，而 15 在 25 上之射影為 9，則第三邊之長若干？

〔解〕 $x^2=15^2+25^2-2\times25\times9=400,$ $\therefore$ $x=20.$

習題 3. 在 $\triangle abc$ 內，求 $a,$ 若

(a) $b=10,$ $c=16,$ $\angle A=60°.$ (b) $b=14,$ $c=30,$ $\angle A=60°.$

(c) $b=9,$ $c=24,$ $\angle A=60°.$ (d) $b=48,$ $c=13,$ $\angle A=60°.$

(e) $b=4,$ $c=3,$ $\angle A=30°.$ (f) $b=2,$ $c=3,$ $\angle A=45°.$

〔解〕 (a) $p=5.$ $a^2=10^2+16^2-2\times16\times5=196,$ $\therefore$ $a=14.$

(b) $p=7.$ $a^2=14^2+30^2-2\times30\times7=676,$ $\therefore$ $a=26.$

(c) $p=4\cdot5.$ $a^2=9^2+24^2-2\times24\times4\cdot5=441,$ $\therefore$ $a=21.$

(d) $p=24.$ $a^2=48^2+13^2-2\times13\times24=1849,$ $\therefore$ $a=43.$

(e) $p=2\sqrt{3}.$ $a^2=4^2+3^2-2\times3\times2\sqrt{3}=25-12\sqrt{3},$

$$\therefore\quad a=\sqrt{25-12\sqrt{3}}.$$

$$(f)\quad p=\sqrt{2},\quad a^2=2^2+3^2-2\times3\times\sqrt{2}=13-6\sqrt{2},$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{13-6\sqrt{2}}.$$

習題 4. 三角形之三邊爲 13, 14, 及 15, 求 13 在 14 上之射影。

［解］ $15^2=13^2+14^2-2\times14p,\quad \therefore\ p=5.$

習題 5. 三角形之三邊爲 5, 7, 及 8, 求 8 在 5 上之射影。

［解］ $7^2=8^2+5^2-2\times5p,\quad \therefore\ p=4.$

習題 6. 三角形之三邊爲 10, 17, 及 21, 求 10 在 21 上之射影。

［解］ $17^2=10^2+21^2-2\times21p,\quad \therefore\ p=6.$

第 195 頁 § 336

習題 1. 在 $\triangle abc$ 內，$b=6, c=10, p=3$, 又 $\angle A$ 爲鈍角；求 a.

［解］ $a^2=6^2+10^2+2\times10\times3=196,\quad \therefore\ a=14.$

習題 2. 在 $\triangle abc$ 內，$b=10, c=9, p=6$, 又 $\angle A$ 爲鈍角；求 a.

［解］ $a^2=10^2+9^2+2\times9\times6=289,\quad \therefore\ a=17.$

習題 3. 在 $\triangle abc$ 內，求 a, 若

(a) $b=3,\ c=5,\ \angle A=120°.$ (b) $b=8,\ c=7,\ \angle A=120°.$

(c) $b=16, c=5, \angle A=120°.$ (d) $b=24, c=11, \angle A=120°.$

［解］ (a) $p=\frac{3}{2}.\ a^2=3^2+5^2+2\times5\times\frac{3}{2}=49,\quad \therefore\ a=7.$

(b) $p=4.\ a^2=8^2+7^2+2\times7\times4=169,\quad \therefore\ a=13.$

(c) $p=8.\ a^2=16^2+5^2+2\times5\times8=361,\quad \therefore\ a=19.$

(d) $p=12.\ a^2=24^2+11^2+2\times11\times12=961,\quad \therefore\ a=31.$

第 195 頁 § 337

習題 1. 在 $\triangle abc$ 內，$a=20, b=15, c=7$, 求 b 在 c 上之射影。問此三角形爲鈍角三角形，抑爲銳角三角形？

［解］ $20^2=15^2+7^2-2\times 7p$, $p=-9$, 故此三角形爲鈍角 $\triangle$.

習題 2. 在 $\triangle abc$ 內, $a=20$, $b=15$, $c=25$, 求 b 在 c 上之射影.問角 A 爲銳角抑爲鈍角?

［解］ $20^2=15^2+25^2-2\times 25p$, $p=9$, 故此三角形爲銳角 $\triangle$.

習題 3. 三角形之三邊爲 4, 13, 及 15; 求 13 在 4 上之射影.

［解］ $15^2=4^2+13^2-2\times 4p$, $p=-5$, 故此三角形爲鈍角 $\triangle$.

習題 4. 若由上述公式求得 p 之值爲零時,則此三角形如何?

［解］ 若 $p=0$, 則公式成爲 $a^2=b^2+c^2$, 故此三角形之一角爲直角.

習題 5. 在 $\triangle abc$ 內, $a=15$, $b=13$, $c=14$, 求 h_c.

［解］ $15^2=13^2+14^2-2\times 14p$, $\quad\therefore\ p=5.\quad q=14-5=9.$

$$h_c=\sqrt{15^2-\text{[illegible]}^2}=12.$$

習題 6. 在 $\triangle abc$ 內, $a=17$, $b=10$, $c=9$, 求 h_c.

［解］ $17^2=10^2+9^2-2\times 9p$, $\quad\therefore\ p=-6.$

$$h_c=\sqrt{10^2-(-6)^2}=8.$$

第 196 頁　　　　§339

習題 1. 在 $\triangle abc$ 內,求 h_c, 若

(a) $a=10$, $b=17$, $c=21$.　　(b) $a=20$, $b=13$, $c=21$.

(c) $a=20$, $b=13$, $c=25$.　　(d) $a=37$, $b=13$, $c=40$

［解］ (a) $s=\dfrac{1}{2}(10+17+21)=24$, $h_c=\dfrac{2}{21}\sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3}=8.$

(b) $s=\dfrac{1}{2}(20+15+21)=27$, $h_c=\dfrac{2}{21}\sqrt{27\cdot 7\cdot 14\cdot 6}=12.$

(c) $s=\dfrac{1}{2}(20+15+25)=29$, $h_c=\dfrac{2}{25}\sqrt{29\cdot 9\cdot 16\cdot 4}=12.$

(d) $s=\dfrac{1}{2}(37+13+40)=45$, $h_c=\dfrac{2}{40}\sqrt{45\cdot 8\cdot 32\cdot 5}=12.$

習題 2. 三角形之三邊爲 4, 13, 及 15；求 4 上之高。

［解］ $s=\frac{1}{2}(4+13+15)=16$, $h_4=\frac{2}{4}\sqrt{16\cdot12\cdot3\cdot1}=12$.

習題 3. 三角形之三邊爲 25, 30, 及 11；求 11 上之高。

［解］ $s=\frac{1}{2}(25+30+11)=33$, $h_{11}=\frac{2}{11}\sqrt{33\cdot8\cdot3\cdot22}=24$.

第 197—198 頁 §340

習題 1. 三角形之三邊爲 7, 8, 及 9；求 8 之中線之長。

［解］ $2(7)^2+2(9)^2=8^2+4m^2$, $\therefore\ m=7$.

習題 2. 三角形之三邊爲 7, 4, 及 9；求 9 之中線之長。

［解］ $2(7)^2+2(4)^2=9^2+4m^2$, $\therefore\ m=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

習題 3. 三角形之三邊爲 10, 5, 及 9；求 9 之中線之長。

［解］ $2(10)^2+2(5)^2=9^2+4m^2$, $\therefore\ m=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}$.

習題 4. 三角形之三邊爲 22, 20, 及 18；求 18 之中線之長。

［解］ $2(22)^2+2(20)^2=18^2+4m^2$, $\therefore\ m=19$.

習題 5. 在 $\triangle abc$ 內，若 m_c 表作至 c 之中線，求證

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

［證］ $2a^2+2b^2=c^2+4m^2$, 移項得 $4m^2=2a^2+2b^2-c^2$,

卽
$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

習題 6. 在 $\triangle abc$ 內，$a=8$, $b=11$, 又 $m_c=8\frac{1}{2}$；求 c.

［解］ $c^2+4\left(\frac{17}{2}\right)^2=2(8)^2+2(11)^2$, $\therefore\ c^2=81$, 卽 $c=9$.

習題 7. 在 $\triangle abc$ 內，$a=28$, $c=32$, $m_c=38$；求 b.

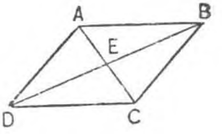
［解］ $2b^2+2(28)^2=32^2+4(38)^2$, $\therefore\ b=51$ 強。

習題 8. 若 $a\mp b$, 求證命題 XXXVI.

［證］ CD 垂直且平分其底 BA. $a^2=m^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$, 又 $b^2=m^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$.

於是 $a^2+b^2=2m^2+\frac{2c^2}{4}$, $\therefore\ 2a^2+2b^2=4m^2+c^2$.

習題 9. 平行四邊形四邊平方之和等於二對角線平方之和.



習題 9

［證］ 在 $\triangle ABC$ 內,

$$2\overline{AB}^2+2\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 4+\overline{BE}^2.$$

在 $\triangle ADC$ 內, $2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+4\overline{DE}^2$.

相加,得 $2\overline{AB}^2+2\overline{BC}^2+2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{BD}^2$.

即 $$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2.$$

第 199 頁 § 341

習題 1. 三角形之三邊爲 18, 9, 及 21; 求 21 之對角之平分線之長.

［解］ $18:9=n:(21-n)$, (301), $\therefore\ n=14,\ o=21-14=7$.

$t^2+14\times 7=18\times 9$, 即 $t^2=64$, $\therefore\ t=8$.

習題 2. 三角形之三邊爲 21, 14, 及 25; 求 25 之對角之平分線之長.

［解］ 由 § 301 得 $n=15,\ o=10$.

$t^2+15\times 10=21\times 14$, 即 $t^2=144$, $\therefore\ t=12$.

習題 3. 三角形之三邊爲 22, 11, 及 21; 求 21 之對角之平分線之長.

［解］ 由 § 301 得 $n=14,\ o=7$.

$t^2+14\times 7=22\times 11$, 即 $t^2=144$, $\therefore\ t=12$.

習題 4. 三角形之三邊爲 6, 3, 及 7, 求 7 之對角之平分線之長.

［解］ 由 § 301 得 $n=\frac{14}{3},\ o=\frac{7}{3}$.

$t^2+\frac{14}{3}\times\frac{7}{3}=6\times 3$, 卽 $t^2=\frac{64}{9}$, $\therefore\ t=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

習題 5. 在 $\triangle abc$ 內,若 t 爲 $\angle C$ 之平分線,求證

$$t^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

［解］ 在 § 341 命題 37 之圖形內, $n:o=b:a$, 又 $n+o=c$.

故 $$o=\frac{na}{b}\ \text{又}\ n+\frac{na}{b}=n+o=c.$$

$$\therefore\quad n(a+b)=bc,$$

又 $$n=\frac{bc}{a+b}.$$

又 $$o=\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a}{b}\cdot\frac{bc}{a+b}=\frac{ac}{a+b}.$$

$$\therefore\quad t^2=ab-on=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

習題 6. 用 § 339 之記號及方法,化前題之結果爲下之形式

$$t=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

［解］ 由習題 5 得 $t^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$.

$$t^2=\frac{ab}{(a+b)^2}\times[(a+b)^2-c^2]=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

$$t^2=\frac{ab\cdot 2s\cdot 2(s-c)}{(a+b)^2}=\frac{4abs(s-c)}{(a+b)^2}.\quad\therefore\ t=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

第 200 頁 § 343

習題 1. 在 $\triangle abc$ 內, $a=6, b=10$, 又 $h_c=4$; 求外接圓之直徑。

［解］ $6\times 10=4d$, $\therefore\ d=15$.

習題 2. 在 $\triangle abc$ 內, $a=10, b=15, h_c=6$; 求外接圓之半徑。

〔解〕 $10\times 15=6d$, $\therefore d=25$, $\therefore R=\frac{1}{2}d=12\cdot 5$.

習題 3. $\triangle ABC$ 內接於半徑 5 吋之圓內，若 $AB=4$, $AC=5$, 求 BC 上之高.

〔解〕 $4\times 5=10h$, $\therefore h=2$ 吋.

習題 4. 求外接於 $\triangle abc$ 之圓之直徑，若

(a) $a=17$, $b=8$, $c=15$.

(b) $a=10$, $b=17$, $c=21$.

〔解〕 (a) $s=20$. $\therefore d=\dfrac{17\times 8\times 15}{2\sqrt{20\times 3\times 12\times 5}}=17$.

(b) $s=24$. $\therefore d=\dfrac{10\times 17\times 21}{2\sqrt{24\times 14\times 7\times 3}}=21\dfrac{1}{4}$.

習題 5. 在 $\triangle abc$ 內，$a=20$, $b=15$, b 在 c 上之射影爲 9; 求外接圓之半徑.

〔解〕 $h_c=\sqrt{15^2-9^2}=12$. $20\times 15=12d$, $\therefore d=25$.

故 $$R=\tfrac{1}{2}d=12\tfrac{1}{2}.$$

習題 6. 在 $\triangle abc$ 內，$a=9$, $b=12$, 若外接圓直徑爲 15; 求 c.

〔解〕 $h_c=\dfrac{9\times 12}{15}=7\cdot 2$. a 在 c 上之射影 $=\sqrt{9^2-7\cdot 2^2}=5\cdot 4$.

b 在 c 上之射影 $=\sqrt{12^2-7\cdot 2^2}=9\cdot 6$. $\therefore c=5\cdot 4+9\cdot 6=15$.

第 200—201 頁

計　算　題

習題 1. 直角三角形之二直角邊爲 8 及 15, 求斜邊及斜邊上之高.

〔解〕 斜邊 $=\sqrt{15^2+8^2}=17$. 又由第 173 頁習題 3 得 $8\times 15=17h$,

$$\therefore h=7\cdot 06.$$

習題 2. 距圓心 12 吋之弦長 14 吋，求圓之半徑.

［解］ $R=\sqrt{7^2+12^2}=\sqrt{193}=13\cdot9$ 吋.

習題 3. 距圓心 5 吋之弦長 24 吋,則長 10 吋之弦距離圓心幾吋?

［解］ $R=\sqrt{12^2+5^2}=13$ 吋. 弦之距離 $=\sqrt{13^2-5^2}=12$ 吋.

習題 4. 在 $\triangle abc$ 內, $a=4, b=8$, 又 c 之對角爲 $60°$; 求 c.

［解］ $c=\sqrt{4^2+8^2-2\times8\times2}=\sqrt{48}=6\cdot9.$

習題 5. 教堂尖塔之影在平地上長 60 呎, 而高 10 呎之竹竿影長 3 呎. 問塔高若干?

［解］ $60:3=x:10, \quad \therefore\ x=200$ 呎.

習題 6. 於半徑 10 吋之圓內,通過距圓心 8 吋處之一點作一弦,求此弦二線段之積. 又過該點所能作之最短弦, 其長爲若干?

［解］ (a) 直徑卽最長弦之二線段爲 18 與 2, 其積爲 36(321).

(b) 弦之最短者爲垂直於此直徑之弦,故

$$弦長=2\sqrt{10^2-8^2}=2\sqrt{36}=12\ 吋.$$

習題 7. 等腰三角形之底邊長 48 吋,若腰長 50 吋,求其高.

［解］ $h=\sqrt{50^2-24^2}=\sqrt{1924}=43.9$ 吋.

習題 8. 平行四邊形之二邊及一對角線各長 7, 9, 及 8, 求他一對角線之長.

［解］ 由第 198 頁習題 9 得 $d^2+8^2=7^2+7^2+9^2+9^2$,

$$\therefore\ d^2=196,\ 卽\ d=14.$$

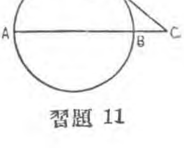
習題 9. 正方形之對角線長 20 吋,求其邊之長.

［解］ $2x^2=20^2,\ x^2=200, \quad \therefore\ x=10\sqrt{2}=14.1$ 吋.

習題 10. 矩形之二邊爲 16 及 30, 求其對角線.

［解］ $d=\sqrt{16^2+30^2}=\sqrt{1156}=34.$

習題 11. 延長一圓之直徑 AB 至 C, 再自 C 作圓之切線, 若 $AB=30$, $BC=2$; 求切線之長.



習題 11

［解］ $AC=30+2=32.\ CT^2=2\times32=64,$

$$\therefore\ CT=8.$$

習題 12. 梯長 17 呎，觸及高 15 呎之窗，問梯之下端距屋幾呎？

［解］ 梯之下端距屋 $\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8$ 呎。

習題 13. 在 $\triangle abc$ 內，$c=10$，$\angle A=30°$，又 $\angle C=90°$；求 a 及 b.

［解］ $a=\frac{1}{2}c=5$. $b=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}=8.7$.

習題 14. 等腰三角形之底邊爲 b，腰爲 a；求高。

［解］ $h=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}b\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$.

習題 15. 延長梯形之不平行二邊 AB 及 CD，使相交於 E，若 $AB=7$，而底邊爲 5 及 3，求 AE 及 BE.

［解］ $BE:7=3:5$, $\therefore BE=4{\cdot}2$. $AE=7+4{\cdot}2=11{\cdot}2$.

習題 16. 菱形之對角線一爲 10 吋，一爲 24 吋，求其周及高。

［解］ 菱形之一邊 $=\sqrt{5^2+12^2}=13$ 吋(第 80 頁習題 2).

$$\therefore \quad 菱形之周=4\times 13=52 \text{ 吋}.$$

$$菱形之面積=\frac{1}{2}兩對角線之積=\frac{1}{2}10\times 24=120.$$

$$底\times 高=120=13\times h, \quad \therefore h=\frac{120}{13}=9.2 \text{ 吋強}.$$

習題 17. 相距 1 吋之二平行弦，一長 6 吋，一長 8 吋，求圓之半徑。(此題不祇一解否?)

［解］ 設 x 爲 8 吋長弦與圓心之距離。則

$$R^2=3^2+(x+1)^2=4^2+x^2.$$

$\therefore x=3$ 吋，又 $R=5$ 吋。祇此一解。

習題 18. 梯形之高爲 h，底邊爲 a 及 b，今延長其不平行之二邊使相交而成二三角形，求此二三角形之高。

［解］ 設 x 爲小三角形之高，則 $x+h:x=a:b$,

$$\therefore \quad x=\frac{bh}{a-b}, \text{ 又 } x+h=\frac{ah}{a-b}.$$

習題 19. 在高出海面 24 呎之處，可望見之地平線其半徑爲 6 哩，求地球之半徑。

［解］ $\frac{24}{5280}:6=6:x$, $\therefore\ x=7920$ 哩。

實際當爲 $\left(7920-\frac{24}{5280}\right)$ 哩。

習題 20. 圓心相距 17 之二圓，半徑爲 5 及 3，求其內公切線之長。

［解］ 用第 151 頁習題 7 之圖。 作 CO'. 內公切線 $BC=AO'$.

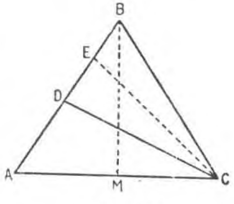
$$AO'=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{17^2-(5+3)^2}=15.$$

習題 21. 長 30 吋之弦對 120° 之角，求弦與圓心之距離。

［解］ 設 x 爲所求之距離，則半徑爲 $2x$ (165).

$(2x)^2-x^2=15^2$, 即 $3x^2=15^2$, 或 $x=\sqrt{75}=8.7$ 吋。

習題 22. 在 $\triangle ABC$ 內，$AB=BC=25$, $AC=30$, 又在 AB 上取 $AD=8$, 求 CD 之長。



習題 22

［解］ 作高 CE 及 BM. 因 ABC 爲等腰 △，故 M 爲 AC 之中點。

$$BM=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20.$$

$$CE\times 25=30\times 20\ (\text{第 173 頁習題 5}),$$

$$\therefore\quad CE=24.$$

$$AE=\sqrt{30^2-24^2}=13.$$

$$ED=18-8=10.$$

$$\therefore\quad CD=\sqrt{10^2+24^2}=26.$$

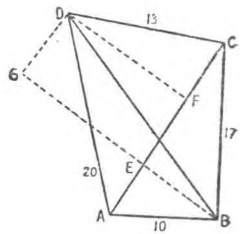
習題 23. 三角形之三邊爲 14, 16, 及 6；求 14 之對角。

［解］ $14^2=16^2+6^2-2\times 6p$, $\therefore\ p=8=\frac{1}{2}16$.

故 14 之對角 $=60^\circ$.

習題 24. 四邊形 $ABCD$ 內，$AB=10$, $BC=17$, $CD=13$, $DA=20$, 又 $AC=21$；求對角線 BD.

［解］ 作$BE\perp AC$，又$DF\perp AC$. 作$DG /\!/ CA$，遇BE之延長線於G. 由是



習題 24

$$AE=\frac{10^2+21^2-17^2}{2\times 21}=6\ (338).$$

$$BE=\sqrt{10^2-6^2}=8.$$

又 $$AF=\frac{20^2+21^2-13^2}{2\times 21}=16\ (338).$$

$$DF=\sqrt{20^2-16^2}=12.$$

$\therefore\ BG=BE+EG=20,\ DG=AF-AE=10.$

$$\therefore\quad BD=\sqrt{20^2+10^2}=\sqrt{500}=22\cdot 4.$$

第 202 頁

作 圖 題

習題 1. 內分三角形各邊爲二部分，與其他二邊成比例.

［解］ 依 § 301 之法求之.

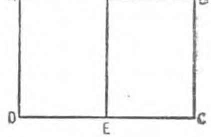
習題 2. 作一三角形，已知a, b, 及$b:c=4:5$.

［解］ 平分b爲四等分. 作一直線等於$b+\frac{1}{4}b$，再與a及b爲三邊，依 § 243 之法作一三角形卽得(圖從略).

習題 3. 作一直線平行於矩形之一邊，截取一相似之矩形.

［已知］ 一矩形$ABCD$.

［求］ 作一直線平行於AD且截得一相似之矩形.



習題 3

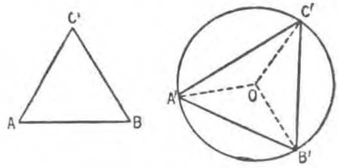
［分析］ 設$DEFA$爲所求之矩形. 則

$$CD:DA=DA:DE.$$

今CD及DA爲已知，故可依 § 296 之法求得DE.

習題 4. 在定圓內，作一內接三角形與已知三角形相似.

［作圖］ 在圓心 O 作圓心角 $A'OB'=2\angle C$，圓心角 $B'OC'=2\angle A$，圓心角 $C'OA'=2\angle B$. 連 $A'B'$，$B'C'$ 及 $A'C'$ 則 $\triangle A'B'C'$ 卽爲所求之三角形.



習題 4

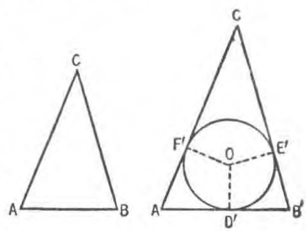
［證］ $\angle A'=\frac{1}{2}\angle B'CC'=\angle A$,

$$\angle B'=\frac{1}{2}\angle C'OA'=\angle B,$$

又 $\angle C'=\angle C$, $\therefore$ $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

習題 5. 在定圓上，作一外切三角形與已知三角形相似.

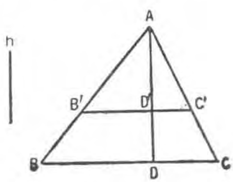
［作圖］ 在定圓之圓心 O，作圓心角 $D'OF'$ 等於 $\angle A$ 之補角，作圓心角 $D'OE'$ 等於 $\angle B$ 之補角，又圓心角 $E'OF'$ 等於 $\angle C$ 之補角. 在 D'，E'，F' 三點作直線分別垂直於 OD'，OE'，及 OF'. 則此三切線所成之 $A'B'C'$ 卽爲所求之三角形.



習題 5

習題 6. 作一三角形與一已知三角形相似，且等於已知高.

［作圖］ 若 $\triangle ABC$ 之高 AD 與已知之高 h 相應. 於 AD（或其延長線）上截取 $AD'=h$. 過 D' 作 $B'C'\mathbin{/\!/}BC$. 則 $\triangle AB'C'$ 卽爲所求之三角形.



習題 6

［證］ $B'C'\mathbin{/\!/}BC$, $\therefore$ $\angle AB'C'=\angle B$,

$$\angle AC'B'=\angle C. \quad \therefore \triangle AB'C'\sim\triangle ABC.$$

$\triangle AB'C'$ 之高 $AD'=h$.

習題 7. 在已知三角形內，作一內接正方形.

［作圖］ 見課本第 264 頁例 C.

習題 8. 任定一單位長，作一直線等於

(a)　$\sqrt{2}$.　　　(b)　$\sqrt{3}$.　　　(c)　$1+\sqrt{5}$.

［作圖］ (a)　作一直線等於所定之單位長，以此爲一邊作一正方形，則其對角線卽爲所求之直線.

(b)　以兩倍單位長之直線爲斜邊，單位長之直線爲一邊，作一直角三角形，則此三角形之另一直角邊卽爲 $\sqrt{3}$.

(c)　以 3 倍單位長之直線爲斜邊，2 倍單位長之直線爲一直角邊，作一直角三角形. 再於第二直角邊加一單位長卽得所求之直線爲 $1+\sqrt{5}$.（圖甚簡易，學者可自作之.）

習題 9.　作一直線，其長與已知直線之比等於 $1:\sqrt{2}$.

［解］　設已知直線爲 a，所求直線爲 x，則 $x:a=1:\sqrt{2}$，卽

正方形之一邊：其對角線＝所求直線：已知直線.

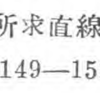
故以已知直線爲對角線作正方形(第 149—152 頁習題 1)，其一邊卽所求之直線.

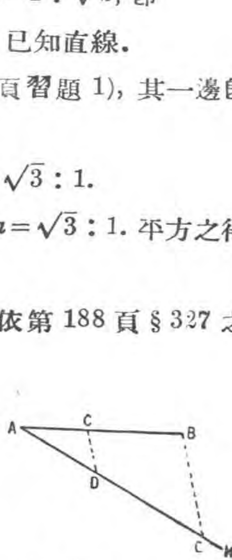
習題 10.　作一直線，其長與已知直線之比等於 $\sqrt{3}:1$.

［解］　設已知直線爲 a，所求直線爲 x，則 $x:a=\sqrt{3}:1$. 平方之得 $x^2:a^2=3:1$. 亦卽 $3a:x=x:a$.

故所求之直線爲 $3a$ 與 a 之比例中項.　由是可依第 188 頁 § 327 之法作圖，求得 $3a$ 與 a 之比例中項 x.

習題 11.　在已知直線 AB 上，求一點 C，使 $AC:BC=1:\sqrt{2}$.





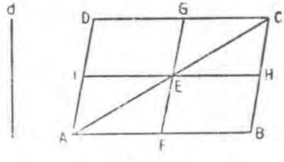
習題 11

［作圖］　在 A 任作一直線 AH. 於 AH 上截取 AD 等於正方形之一邊 a 再截取 DE 等於正方形之對角線 d. 連 BE.　作 $CD \parallel BE$.　則 C 卽爲所求之點.

［證］　$AC:BC=AD:ED=a:d=1:\sqrt{2}$.

習題 12. 作一平行四邊形，其對角線等於已知之直線，且與已知之平行四邊形相似。

［作圖］ 於已知之平行四邊形 $ABCD$ 內，作對角線 AC. 於 AC 上截取 AE＝已知之對角線 d. 過 E 作 $FG /\!/ BC$, $HI /\!/ AB$. 則 $AFEI$ 即所求之平行四邊形。



習題 12

習題 13. 作一三角形，其周等於定長，且與一已知三角形相似。

［解］ 已知△之周：所求△之周＝已知△之邊：所求△之相應邊。依 § 296 之法求得此△之各相應邊後，再作一△與已知△相似。

習題 14. 若 a 與 b 為二定直線，求作一直線等於 $\frac{2a^2}{b}$.

［解］ 設 $x=\frac{2a^2}{b}$, 則 $b\cdot x=2a^2$, $\therefore b:2a=a:x$.

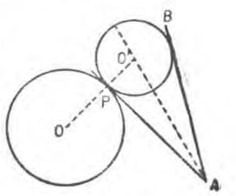
依 § 296 之法作之，即可求得 x.

習題 15. 自圓外一點作一割線，使圓外之線段等於割線之半。

［解］ 參看第 263 頁例 B.

習題 16. 作一圓切於圓上之一定點，且切於一已知之直線。

［作圖］ 在定圓 O 上之一定點 P, 作一切線。延長此切線使與已知直線 BA 相遇於 A. 平分 $\angle A$, 並延長其平分線使與連結圓心及切點之直線 OP 之延長線相遇於 O'. 則 O' 即為所求圓之圓心，而 $O'P$ 為其半徑。

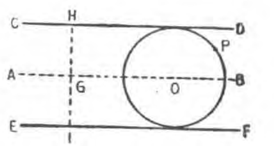


習題 16

又平分 $\angle A$ 之鄰角延長其平分線與 OP 或其延長線相交，可得另一解法。

習題 17. 作一圓切二平行之直線，且通過一定點。

［作圖］ 作 $HI \perp EF$. 平分 HI 得 G. 過 G 作直線 $AB /\!/ EF$. 再以定點 P 為圓心，以 GH



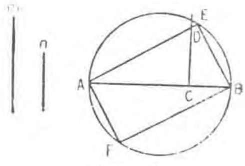
習題 17

爲半徑作弧，交 AB 於 O 及 O'（圖中未畫出），則 O, O' 皆爲所求圓之圓心．

［討論］ 此題可爲 2 解，1 解，或無解．

習題 18. 已知矩形二邊之比，求在已知圓內作一內接矩形．

［作圖］ 在已知圓內任作一直徑 AB. 於 AB 上截 $AC=m$. 作 $CD\perp AB$, 並命 $CD=n$. 連 AD 並延長之遇圓周於 E. 連 BE. 再作 $BF \mathbin{/\!\!/} EA$, 連結 AF. 於是 $AEBF$ 卽爲所求之矩形．



習題 18

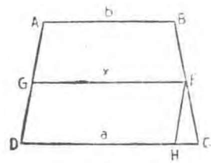
［證］ $rt.\triangle ACD \sim rt.\triangle ABE$ (306).

$$AC:CD=AE:BE=m:n.$$

習題 19. 作一直線平行於梯形之底邊，分梯形爲二相似之梯形．

［分析］ 設所求之直線爲 GF. $GF \mathbin{/\!\!/} AB$. 命 $GF=x$, 則 $a:x=x:b$. 由是 x 爲 a 及 b 之比例中項，故得作圖之法如下．

［作圖］ 依 § 327 之法先求得 a, b 之比例中項 x. 在 DC 上截取 $DH=x$. 過 H 作 $HF \mathbin{/\!\!/} AD$, 使 HF 遇 BC 於 F. 過 F 作 $FG \mathbin{/\!\!/} AB$. 則 FG 卽爲所求之直線．



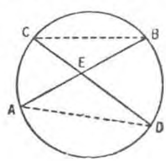
習題 19

第 203 頁

定 理

習題 1. 若甲弦爲乙弦所平分，則甲弦之任一線段爲乙弦二線段之比例中項．

［證］ 此爲 § 320 命題 XXVII 之特例，其證法如下．



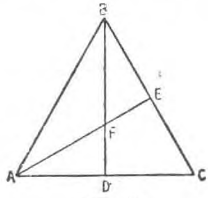
習題 1

作 CB 及 AD. $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

$$\triangle CEB \sim \triangle AED.$$

$CE : AE = EB : ED$. 但 $AE = EB$, $\therefore$ $CE : AE = AE : ED$.

習題 2. 若在 $\triangle ABC$ 內,高 BD 及 AE 相交於 F, 又 $AB = BC$, 則 $BC : AF = BD : CD$.



習題 2

[證] $\angle AFD = \angle BFE$,

$\therefore$ $rt. \triangle AFD \sim rt. \triangle BFE$.

但 $\angle EBF = \angle EBF$,

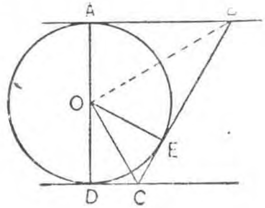
$\therefore$ $rt. \triangle EBF \sim rt. \triangle BDC$.

$\therefore$ $rt. \triangle AFD \sim rt. \triangle BDC$.

$\therefore$ $BC : AF = BD : AD$.

但 $AD = CD$. $\therefore$ $BC : AF = BD : CD$.

習題 3. 若於平行之二切線間,作一第三切線,則半徑為第三切線二線段之比例中項.



習題 3

[證] $AO \perp AB$, $CD \perp DC$. AOD 爲圓之直徑,即當 AO 延長時必與 OD 疊合.

$BA = BE$ (209), BO 公用.

$\therefore$ $rt. \triangle OAB \cong rt. \triangle OEB$.

同様, $rt. \triangle ODC \cong rt. \triangle OEC$.

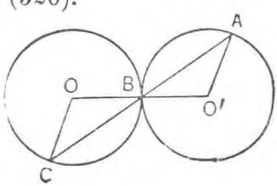
$$\angle BOE = \angle BOA = \tfrac{1}{2} \angle AOE,$$

又 $$\angle COE = \angle COD = \tfrac{1}{2} \angle DOE,$$

$$\therefore \quad \angle BOC = \tfrac{1}{2} \angle AOD = 90°.$$

在直角三角形 BOC 內, $CE : OE = OE : EB$ (326).

習題 4. 二圓相外切, 若過其切點作一割線,則所成二弦之比等於二圓半徑之比.



習題 4

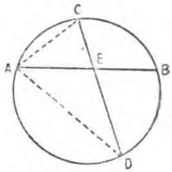
[證] 連結二圓圓心之直線 OO' 必過切點 B (216). $\angle OBC = \angle O'BA$

$\therefore$ $\triangle OBC \sim \triangle O'BA$ (第 171 頁習題 7).

$\therefore$ $BC : AB = OB : O'B$.

習題 5. 若 C 爲弧 AB 之中點，而弦 CD 交弦 AB 於 E，則

$$CE:CA=CA:CD.$$



習題 5

［證］ 作 DA 及 CA. 在 $\triangle CDA$ 及 CAE 內，$\angle DCA$ 公用，$\angle AEC$ 以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$ 量之，

$$\angle DAC \text{ 以 } \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}) \text{ 量之.}$$

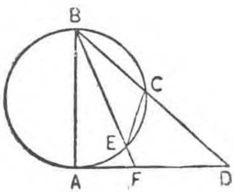
但 $$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB},$$

$$\therefore\ \angle AEC=\angle DAC.$$

由是 $$\triangle CDA\sim\triangle CAE,$$

$$\therefore\ CE:CA=CA:CD.$$

習題 6. 若 AB 爲直徑，AD 爲切線，又 FE 與 DB 爲割線，求證 $BE\times BF=BC\times BD$.



習題 6

［證］ $$\angle EBC=\angle FBD.$$

$$\angle D=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA}-\overset{\frown}{CA}) \text{ 或 } \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCA}-\overset{\frown}{CA})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}.$$

$$\angle CEB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}.\quad \therefore\ \angle D=\angle CEB.$$

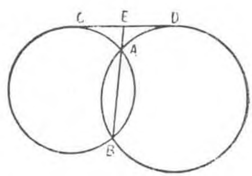
由是 $$\triangle BFD\sim\triangle BEC.$$

$$\therefore\ BE:BD=BC:BF.$$

習題 7. 求證在直角三角形內，斜邊與內切圓直徑之和等於二直角邊之和。

［證］ 見第 118 頁習題 6，茲不復贅。

習題 8. 延長相交二圓之公共弦必平分其公切線.



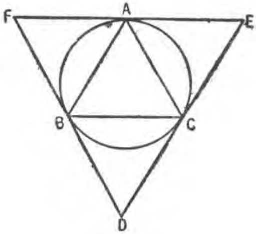
習題 8

［證］ $\overline{CE}^2=EB\times EA$，及 $\overline{ED}^2=EB\times EA$.

$$\therefore\ \overline{CE}^2=\overline{ED}^2,$$

$$\therefore\ CE=ED.$$

習題 9. 若一等腰三角形內接於圓，則過各頂點所作之切線亦成一等腰三角形.



習題 9

［已知］ ABC 爲一等腰三角形，$AB=AC$. 又 EF, FD 及 DE 爲過 A, B, C 三點之切線.

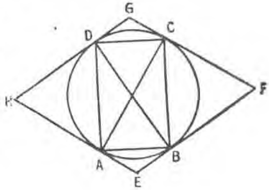
［求證］ DEF 爲一等腰三角形.

［證］ $AB=AC$,

則 $\widehat{AB}=\widehat{AC}$. $\angle F=\angle E$ (238).

$\therefore$ $FD=ED$, $\therefore$ DEF 爲一等腰三角形.

習題 10. 過內接於圓之矩形之各頂點作切線，圍成一菱形.



習題 10

［證］ $EA=EB$, $\therefore$ AB 爲等腰三角形之底.

同樣，BC 爲等腰 $\triangle BFC$ 之底，CD 爲等腰 $\triangle CGD$ 之底，DA 爲等腰 $\triangle DHA$ 之底.

$AB=DC$, $\widehat{AB}=\widehat{DC}$, $\therefore$ $\angle BAE=\angle GDC$,

$\angle ABE=\angle GCD$. $\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle GCD$.

$\therefore$ $EA=EB=GC=GD$.

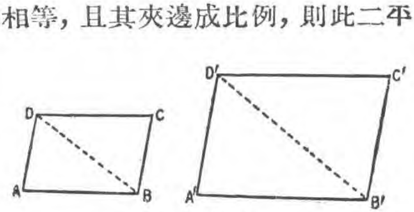
同樣， $\triangle BFC\cong\triangle DHA$. $\therefore$ $FB=FC=HD=HA$.

相加得 $EF=FG=GH=HE$.

又 $AC\perp HE$ 及 FG, $DB\perp EF$ 及 HG. $\therefore$ $EF /\!/ HG$, $GF /\!/ HE$.

故 $EFGH$ 爲一菱形.

習題 11. 若二平行四邊形有一角相等，且其夾邊成比例，則此二平行四邊形相似.



習題 11

［證］ $\angle A=\angle A'$,

則 $\angle C=\angle C'$,

及 $\angle B=\angle D=\angle B'=\angle D'$.

因 $AB:A'B'=AD:A'D'$,

而 $DC=AB$, $D'C'=A'B'$, 又 $BC=AD$, $B'C'=A'D'$,

$\therefore$ $AB:A'B'=AD:A'D'=BC:B'C'=CD:C'D'$.

$$\therefore \quad \square ABCD \sim \square A'B'C'D'.$$

習題 12. 若二矩形之二鄰邊成比例，則二矩形相似.

［解］ 此爲習題11之特例，惟內角皆爲直角，故可仿上題證之.

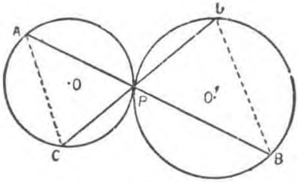
習題 13. 二圓外切，若過其切點作二直線至二圓之圓周止；求證此二直線之相應線段成比例.

［證］ $AC \parallel BD$ (第 133 頁習題 10).

$\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ (內錯角相等),

$$\therefore \quad \triangle ACP \sim \triangle BDP.$$

$$\therefore \quad CP : PD = AP : PB.$$



習題 13

另一證法. AP 與 PB 之比如二圓半徑之比，又 CP 與 PD 之比亦如二圓半徑之比(習題 4).

故　　$AP : PB = CP : PD$ (公理 1).

第 204 頁

雜　題

習題 1. 若二平行線爲過一公共點之三(或三以上)截線所截，則其相應之線段成比例.

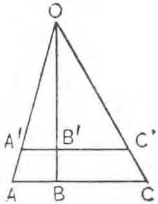
［證］　　$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$,

又　　$\triangle OBC \sim \triangle OB'C'$ (307).

$$\therefore \quad AB : A'B' = OB : OB',$$

又　　$BC : B'C' = OB : OB'$.

$$\therefore \quad AB : A'B' = BC : B'C'.$$



習題 1—3

習題 2. 證明習題 1 之逆定理.

［證］ AA', BB' 相遇於 O. 作 OC' 並延長之交 AB 於 X.

則　　$AB : A'B' = BC : B'C'$ (假設),

又　　$AB : A'B' = BX : B'C'$ (習題 1).

由是 $BC = BX$ (275)，而 C 與 X 疊合. 故三線會於一點.

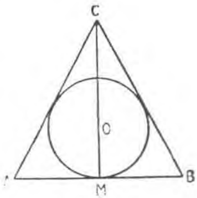
習題 3. 三角形一邊之中線平分平行於此邊而止於其他二邊之任何直線.

［證］ 此爲習題 1 之特例. $AB : A'B' = BC : B'C'$ (習題 1),

即 $$AB : BC = A'B' : B'C' \ (279).$$

但 $$AB = BC, \quad \therefore \quad A'B' = B'C'.$$

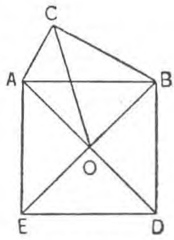
習題 4. 已知底邊及內切圓半徑，求作一等腰三角形.



習題 4

［作圖］ 作 AB 等於已知之底邊. 平分 AB 得其中點 M, 於 M 作 AB 之垂線 MC. 在此垂線上截取 MO 等於已知之內切圓半徑. 即以 O 爲圓心, OM 爲半徑畫圓. 再自 A 及 B 各作圓之切線, 並延長之使相遇於 C. 則 ABC 即爲所求之三角形.

習題 5. 求證任何直角三角形之直角, 被連結直角頂點至斜邊上所作正方形對角線交點之直線所平分.



習題 5

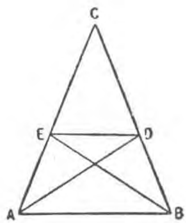
［證］ 以 AB 爲直徑畫一圓, 因

$$\angle ACB = 90° = \angle AOB,$$

故圓周必過 O 及 C. 因 $AO = BO$, 故在此圓周上,

$$\widehat{AO} = \widehat{BO}. \quad \therefore \quad \angle ACO = \angle BCO.$$

習題 6. 等腰三角形二底角之平分線交二腰於 D 及 E; 求證 DE 平行於三角形之底邊.



習題 6

［證］ $$AC = BC, \angle C = \angle C,$$

又 $$\angle A = \angle B,$$

$$\therefore \quad \angle CAD = \angle CBE.$$

$$\triangle CAD \cong \triangle CEB \ (a.s.a.).$$

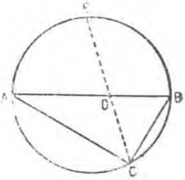
$$\therefore \quad CE = CD.$$

故 $$CE : CA = CD : CB \ (\text{公理 } 8).$$

$$\therefore \quad DE \parallel AB \ (299).$$

習題 7. 求作直角三角形，已知其斜邊為直角之平分線所分之二線段。

[作圖] 在一直線上截取 AD 及 DB 等於已知斜邊上之二線段．次以 AB 為直徑作一圓．平分兩半圓之一得其中點 E．連 E 及 D，並延長之交圓周於 C．則 ABC 即為所求之三角形．



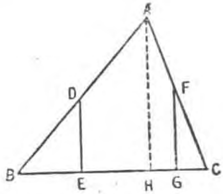
習題 7

[證] $\angle ACB=$直角 (234).

$$\widehat{AE}=\widehat{BE},\quad \therefore\quad \angle ACD=\angle BCD.$$

故 CD 為直角 C 之平分線．

習題 8. 自三角形二邊之中點所作第三邊之垂線相等．



習題 8

[證] 作 $AH\perp BC$，則 $AH /\!/ DE$ 及 FG.

因 D 為 AB 之中點，故 $DE=\frac{1}{2}AH$ (153)

同理，　　　$FG=\frac{1}{2}AH.$

$$\therefore\quad DE=FG.$$

習題 9. 若四邊形之二鄰角皆為直角，則其他二角之平分線必互相垂直．

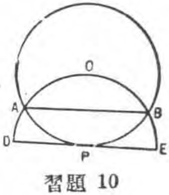
[已知] 一四邊形 $ABCD$，其 $\angle A$ 與 $\angle B$ 皆為直角(圖略)．

[求證] 二對角線 AC 與 BD 互相垂直．

[證] $\angle A=\angle B=90^\circ$，則 $\angle C+\angle D=180^\circ$，即 $\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle C$ 與 $\angle D$ 之平分線互相垂直．

習題 10. 設不用圓心而欲自圓上一定點作一切線，其作法如何？



習題 10

[作圖] 以 P 為圓心任意長為半徑作圓交已知圓 O 於 A, B 二點．連 AB．過 P 作直線 $DE /\!/ AB$．則

DE 卽爲所求之切線.

［證］ $\widehat{PA}=\widehat{PB}$ (作圖). $\therefore$ $DE /\!\!/ AB$ (第130頁習題2).

習題 11. 圓之半徑爲30呎,求自圓外4呎處一點作至圓之切線之長.

［解］ 切線之長$=\sqrt{(30+4)^2-30^2}=\sqrt{256}=16$ 呎.

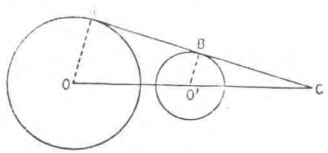
習題 12. 一矩形內接於半徑 5 呎之圓,若底爲高之二倍,求矩形之周.

［解］ 設高爲 x, 則底爲 $2x$, 由是

$$(2\times5)^2=(2x)^2+x^2,\ 100=5x^2,\ \therefore\ x=2\sqrt{5}.$$

$\therefore$ 矩形之周$=2(2\sqrt{5}+2\times2\sqrt{5})=12\sqrt{5}=26.8$ 呎.

習題 13. 圓心距離 28 吋之二圓,其半徑爲 12 吋及 9 吋,求外公切線與連心線之交點至二圓心之距離.



習題 12

［解］ 設 CO' 之長爲 x, 則 CO 爲 $x+28$.

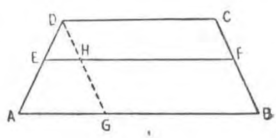
由是 $CO' : CO = BO' : AO$,

卽 $x : x+28=9:12$.

$\therefore$ $x=84$ 吋,

又 $x+28=112$ 吋.

習題 14. 梯形之二底爲 8″ 及 12″, 又高爲 3″. 若距下底 2″ 處在二腰間作一直線,平行於底邊,求此直線之長.



習題 14

［解］ 作 $DG /\!\!/ CB$. 由是 $AG=12-8=4$.

在 $\triangle DAG$ 及 DEH 內, $AG : EH=3:1$,

卽 $4 : EH=3:1$,

$\therefore$ $EH=\dfrac{4}{3}=1\dfrac{1}{3}$ 吋.

$$\therefore\ EF=EH+HF=1\frac{1}{3}+8=9\frac{1}{3}\ 吋.$$

第 四 編

多邊形之面積

第 206 頁 § 348

習題. 試分一已知矩形爲三個全等之矩形.

[解] 用 §347 右邊之圖. 將底邊三等分,於各分點立垂線,卽得三個全等之矩形.

第 207 頁 § 349

習題 1. 求長 4 呎寬 5 呎之矩形,與一邊長 10 呎之正方形之面積之比.

[解] 矩形:正方形$=4\times5:10\times10=1:5$.

習題 2. 一矩形之對角線長 26 吋,一邊長 24 吋,另一矩形之對角線長 25 吋,一邊長 20 吋,求二矩形面積之比.

[解] 第一矩形之第二邊$=\sqrt{26^2-24^2}=10$.

第二矩形之第二邊$=\sqrt{25^2-20^2}=15$.

第一矩形:第二矩形$=24\times10:20\times15=4:5$.

習題 3. 二矩形面積之比爲 8 比 3. 第一矩形之二度爲 6 及 12, 若第二矩形之底爲 9, 求其高.

[解] $8:3=6\times12:9h$, $\therefore h=3$.

第 208 頁 § 352

習題 1. 一矩形地長 24 碼,寬 15 碼,求面積.

［解］　面積 $=24\times15=360$ 方碼.

習題 2.　一矩形之面積爲 360 方吋，其底長 4 碼，求高.

［解］　$360\div4\times3\times12=360\div144=2.5$ 吋.

習題 3.　一矩形之面積爲 125 方吋，而長 5 倍於其寬，求其長及寬.

［解］　$5x\cdot x=125$, $\therefore$ $x=5$ 吋, 又 $5x=25$ 吋.

第 210 頁　§ 357

習題 1.　平行四邊形之底爲 15 吋，高爲 2 呎；求其面積.

［解］　面積 $=15\times2\times12=360$ 方吋.

習題 2.　平行四邊形二邊，一爲 15, 一爲 20, 二邊之夾角爲 30°；求面積.

［解］　在邊20上之高 $=\frac{1}{2}\times15=7.5$ (165),

$$\therefore\quad 面積=7.5\times20=150.$$

習題 3.　平行四邊形二邊，一爲 5, 一爲 8, 又 5 在 8 上之射影爲 3；求面積.

［解］　在邊 8 上之高 $=\sqrt{5^2-3^2}=4$.　$\therefore$ 面積 $=8\times4=32$.

習題 4.　分一平行四邊形爲等積之三部分.

［解］　先分底邊爲三等分，再於每一分點作直線平行於其鄰邊，即可分爲三等積之平行四邊形.

習題 5.　平行四邊形之邊爲 13 及 14, 又其對角線之一長 15；求面積.

［解］

$$(13+14+15)\div2=21.$$

$$\therefore\quad 三角形面積=\sqrt{21\cdot6\cdot7\cdot8}=84$$ (第 212 頁習題 2).

$$\therefore\quad 平行四邊形面積=2\times84=168.$$

另法

$$(13+14+15)\div2=21.$$

$$h_8=\frac{2}{8}\sqrt{21\cdot6\cdot7\cdot8}=\frac{1}{4}\times84=21\ (339).$$

$$\therefore\quad 平行四邊形面積=21\times8=168.$$

習題 6. 平行四邊形之邊為 4 吋及 5 吋，又其夾角為 45°；求面積。

［解］ 在邊 5 上之高 $=\frac{4}{2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (第 191 頁習題 7).

$\therefore$ 平行四邊形之面積 $=2\sqrt{2}\times 5=10\sqrt{2}=14.1$ 方吋。

習題 7. 平行四邊形之面積為 144 方吋，若底長 3 呎；求其高之吋數。

［解］ $144\div(3\times 12)=4$ 吋。

習題 8. 平行四邊形之底邊等於 30 呎，又其高等於 12 呎．求底為 20 呎之等積矩形之高。

［解］ 設等積矩形之高為 x 呎，則 $12\times 30=20x$.

$$\therefore\quad x=18 \text{ 呎}.$$

習題 9. 一矩形為 12×20. 另一等積之平行四邊形，有一角為 30°，底邊較一邊長 4 單位；求其底邊及一邊。

［解］ 設一邊之長為 x，則底邊為 $x+4$. 又在底邊上之高為 $\frac{1}{2}x$.

由是
$$\tfrac{1}{2}x(x+4)=12\times 20=240,$$
卽
$$x^2+4x=480.$$
解之，得 $x=20$，又 $x+4=24$.

習題 10. 二平行四邊形底之比如 3 比 2，而面積之比如 5 比 3，試比較其高。

［解］ 設二平行四邊形之底各為 $3x$ 及 $2x$，而高為 h 及 h'.

於是
$$3\times h:2\times h'=5:3\ (355).$$
$$\therefore\quad 3h:2h'=5:3,\ \text{或}\ 9h=10h'.$$
$$\therefore\quad h:h'=10:9.$$

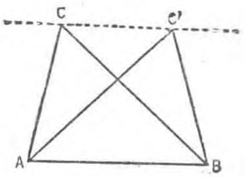
習題 11. 問平行四邊形之面積有若何之變化：(*a*) 若底不變，而高增加(或減少)時？ (*b*) 若底與邊不變，而底與邊間之夾角增加(或減少)時？

［解］ (*a*) **平行四邊形之底不變而高增加或減少，則其面積與高之增減成正比例。**

(*b*)　若夾角爲一銳角，則角增加面積亦隨之增加；若爲鈍角，則角增加面積反隨之減小．　此角成爲直角時面積最大．

第 212 頁　§ 362

習題 1.　求證：　若同底之二三角形，其頂點在平行於底邊之一直線上，則此二三角形等積．



習題 1

［證］　$AB \parallel CC'$，$\therefore$ $\triangle ABC$ 與 ABC' 之高相等 (142).

$$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle ABC' \ (359).$$

習題 2.　若以 A 表 $\triangle abc$ 之面積，而 $2s$ 爲其周，則

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

［證］　$A = \dfrac{1}{2} b \times h$ (358).　　$h_b = \dfrac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (339).

$$\therefore \quad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

習題 3.　三角形之面積爲 600 方吋，高爲 20 吋；求其底．

［解］　$600 = \dfrac{1}{2} \times 20b$，$\therefore$ $b = 60$ 吋．

習題 4.　三角形之二邊爲 5 與 8，其夾角爲 30°；求其面積．

［解］　在 5 上之高爲 $\dfrac{1}{2} \times 8 = 4$.　$\therefore$ 面積 $= \dfrac{1}{2}(4 \times 5) = 10$.

習題 5.　求各三角形之面積，其三邊如下：

(*a*)　13, 14, 15.　　　　(*b*)　9, 10, 17.

(*c*)　11, 25, 30.　　　　(*d*)　4, 13, 15.

［解］　應用習題 2 之公式，得

(*a*)　$\sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$.　　　　(*b*)　$\sqrt{18 \times 9 \times 8 \times 1} = 36$.

(*c*)　$\sqrt{33 \times 22 \times 8 \times 3} = 132$.　　　　(*d*)　$\sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24$.

習題 6.　在 $\triangle abc$ 內，若 $a = 10$，$b = 17$，$h_c = 8$；求面積．(有二解)

［解］ $\sqrt{10^2-8^2}=6$，又 $\sqrt{17^2-8^2}=15$，

由是 $$c=6+15=21 \text{ 或 } c=15-6=9.$$

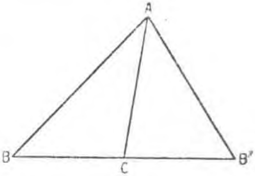
$$\therefore \quad 面積=\tfrac{1}{2}\times 8\times 21=84, \text{ 或 } \tfrac{1}{2}\times 8\times 9=36.$$

習題 7. 平行四邊形之二對角線分原形爲四等積之三角形.

［證］ 用課本內第 80 頁 § 146 之圖.

$\triangle ABO=\triangle ADO$ (359). $\triangle ABO=\triangle BCO$. $\triangle BCO=\triangle CDO$.

習題 8. 若一三角形之二邊分别與他三角形之二邊相等，又其夾角互爲補角，則此二三角形等積.



習題 8

［證］ 將二三角形移置如圖，使其等邊 AC 互相疊合，而互爲補角之二角 ACB 與 ACB' 成爲二鄰角，則 BC 與 CB' 成爲一直線. 因 $BC=B'C$，故 ABC 與 $AB'C$ 二三角形等底且等高，故其面積相等.

習題 9. 在一底邊上所作諸等積三角形，其頂點之軌跡爲何？

［解］ 通過已知三角形頂點，作與底邊平行之直線. 又在底邊之下側，依所作平行線與底邊之距離再作一平行線. 此二平行線即爲所求之軌跡.

習題 10. 一三角形之底邊爲 8 吋，其面積與底 14 吋高 6 吋之平行四邊形相等，求此三角形之高.

［解］ $$\frac{1}{2}(8h)=14\times 6, \quad \therefore h=21 \text{ 吋}.$$

習題 11. 求一邊長 4 吋之等邊三角形之面積.

［解］ 三角形之高 $h=\dfrac{b}{2}\sqrt{3}$ (第 189 頁習題 4).

$$\therefore \quad h=\frac{4}{2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

$$面積=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}=6.9 \text{ 方吋}.$$

習題 12. 等腰三角形底邊爲 20 呎,又頂角爲 $120°$;求面積.

〔解〕 自頂角所作底邊之垂線,分原三角形爲二全等之直角三角形,而其銳角各爲 $30°$ 及 $60°$.

若命 x 爲高,則腰爲 $2x$.

$(2x)^2=x^2+10^2$, 即 $3x^2=100$, $\therefore\ x=\frac{1}{3}10\sqrt{3}$.

$$\therefore\quad 面積=\frac{1}{2}\times 20\times\frac{1}{3}10\sqrt{3}=\frac{1}{3}100\sqrt{3}=57.7\ 方呎.$$

習題 13. 等腰直角三角形之斜邊爲 18 碼,求面積.

〔解〕 設腰長爲 x, 則 $x^2+x^2=18^2$, 由是 $x^2=162$.

$$\therefore\quad 面積=\frac{1}{2}x\cdot x=\frac{1}{2}\times 162=81\ 方碼.$$

習題 14. 等邊三角形之高爲 $4\sqrt{3}$, 求面積.

〔解〕 由第 189 頁習題 4 之公式 $h=\frac{1}{2}b\sqrt{3}$, 得

$$4\sqrt{3}=\frac{1}{2}b\sqrt{3},\quad \therefore\ b=8.$$

$$\therefore\quad 面積=\frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}=27.7.$$

習題 15. 等腰三角形之一腰爲 20 呎,底邊爲 32 呎;求面積.

〔解〕 高 $=\sqrt{20^2-16^2}=12$. $\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 12\times 32=192$ 方呎.

第 213 頁 §363

習題 1. 梯形之面積等於其高與中線之積.

〔證〕 梯形之中線等於上下二底之半和(第 85 頁習題 3).

梯形面積=高×二底和之積之半=高×中線.

習題 2. 連結梯形二底中點之直線,分原形爲二等積之梯形.

〔證〕 連結梯形上下二底中點之直線,分原梯形爲二較小之梯形.此二梯形之高相等,上底及下底亦各相等,故此二梯形之面積相等.

習題 3.　梯形之二底爲 12 及 8，高爲 5；求面積。

［解］　面積$=\frac{1}{2}(12+8)\times 5=50.$

習題 4.　在命題 VI 之圖內，若 $b=6, c=4, BC=10$，又 $\angle B=30°$；求面積。

［解］　高$=\frac{1}{2}\times 10=5.$　　面積$=\frac{1}{2}\times(6+4)\times 5=25.$

習題 5.　梯形之面積爲 200，其二底爲 15 及 25；求高。

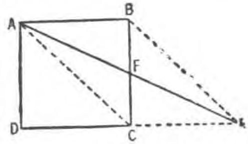
［解］　$\frac{1}{2}h(15+25)=200.$　$\therefore\ h=10.$

習題 6.　梯形之面積爲 30，高爲 5，其底邊之一爲 8；求他一底邊。

［解］　$\frac{1}{2}\times 5(b+8)=30,$　$\therefore\ b=4.$

第 214 頁　　§ 364

習題 1.　變換一正方形爲一直角三角形。



習題 1

［作圖］　DC 爲已知正方形之底邊 AC 爲其對角線。過 B 作一直線平行於對角線 AC，延長之使與 DC 之延長線相交於 E. 作 AE. 則 ADE 卽爲所求之三角形。

［證］　$rt. \triangle ABF = rt. \triangle CEF$

(因 $ABEC$ 爲一 $\square$, AE 及 BC 皆爲其對角線)。

$\therefore$ 正方形 $ABCD=$ 四邊形 $AFCD+\triangle CEF=rt.\triangle ADE.$

習題 2.　變換一矩形爲一三角形。

［解］　與習題 1 之法全同，可仿而求之。

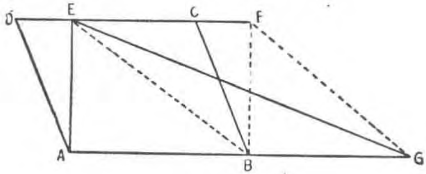
習題 3.　變換一四邊形爲一三角形；又變一梯形爲一三角形。

［解］　與習題 1 之法同，可仿而求之。

習題 4.　變換一平行四邊形爲一矩形；又變爲一直角三角形。

［作圖］　作 $BF\perp AB$，與 DC 之延長線相交於 F.　又作 $AE /\!\!/ BF$.

則 $ABFE$ 爲一矩形，其面積與行平四邊形 $ABCD$ 相等 (353).



習題 4

連結 BE. 自 F 作一直線平行於 BE, 並交 AB 之延長線於 G.

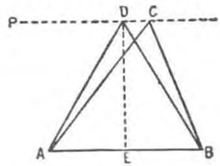
作 EG. 則 AEG 卽爲所求之直角三角形.

習題 5. 變換一等腰三角形爲一矩形；又變一等邊三角形爲矩形.

［解］ 每一三角形皆與矩形等積，而矩形之底等已知三角形之底，但其高等於已知三角形之高之半.

習題 6. 變換一不規則三角形爲等腰三角形.

［作圖］ AB 爲不規則三角形之底邊，過 C 作一直線 CP 平行於 AB. 再作 AB 之中垂線 ED, 交 CP 於 D. 作 AD 及 BD. 則 ADB 卽爲所求之三角形.



習題 6

第 215 頁　§ 365

習題. 變換下之圖形爲等積之正方形.

(a) 一等邊三角形.　(b) 一鈍角之平行四邊形.

(c) 一梯形.　(d) 一四邊形.

［解］ (a) 此爲 § 365 之特例，可仿命題 VIII 之法求之.

(b) 求底與高之比例中項，作成正方形.

(c) 求其高與兩底之半和之比例中項，作正方形.

(d) 四邊形可視爲以對角線爲公共底邊之二三角形所成. 故就二對

角線之一之半，與自二頂點作至此對角線之二高之和求其比例中項作正方形卽得。

第 217 頁

§368

習題 1. 求作第 398 節內各方程式中之 x. [在 (3), (4) 及 (11) 內，設 $m=3$].

[作圖] (1) 在一無限長之直線上，截 $AC=a$, 再引長 AC 至 D, 使 $CD=b$, 則 $AD=a+b$.

(2) 在一無限長之直線上，截 $AB=a$, 及 $BC=b$ (自 B 向 A 截之).

則 $$AC=a-b.$$

(3) 在一無限長之直線上，連續截 a 三次卽得.

(4) 依 § 151 之法分 a 爲三等分，取其一分卽爲 $\frac{1}{3}a$.

(5) 依 § 296 之法求 c, a, 及 b 之比例第四項卽得.

(6) 此爲 (5) 之特例，求 b, a 及 a 之比例第四項卽得.

(7) 依 § 327 之法求 a 與 b 之比例中項卽得.

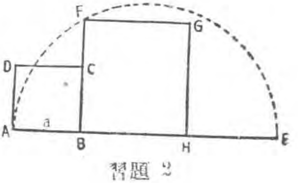
(8) 作一直角，於其一邊截取一段等於 a, 於其另一邊截取一段於等 b, 連 a 及 b 末端之直線卽爲 $\sqrt{a^2+b^2}$.

(9) 在一直線上作一垂線等於 b. 以 b 之末端爲圓心，a 爲半徑作弧，則 b 端與直線上截點之連結線卽爲 $\sqrt{a^2-b^2}$.

(10) 作一邊等於 a 之正方形，求其對角線卽等於 $a\sqrt{2}$.

(11) 依 § 327 之法作 a 與 $3a$ 之比例中項，卽爲 $a\sqrt{3}$.

習題 2. 求作一正方形，須三倍於一巳知之正方形.



習題 2

[分析] 命 a 爲巳知正方形 $ABCD$ 之一邊，x 爲所求正方形之一邊. 則巳知正方形之面積爲 a^2, 所求正方形之面積爲 x^2.

$$\therefore \quad x^2=3a^2, \text{ 或 } x\cdot x=3a\cdot a.$$

由是 $3a : x = x : a$. 故得所求正方形之

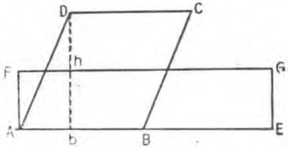
一邊爲已知正方形一邊之三倍及一邊之比例中項.

［作圖］ 延長已知正方形 $ABCD$ 之一邊 AB 至 E, 使 $BE=3AB$. 以 AE 爲直徑作一半圓. 延長 BC 使遇圓周於 F. 則 BF 卽爲所求正方形之一邊.

［證］ $BFGH=\overline{BF}^2=AB\times BE=AB\times 3AB=3\overline{AB}^2$.

$$ABCD=\overline{AB}^2. \quad \therefore BFGH=3(ABCD).$$

習題 3. 變換一平行四邊形爲矩形, 其底邊須二倍於平行四邊形之底邊.



習題 3

［分析］ 命已知平行四邊形 $ABCD$ 之底邊 AB 爲 b, 高爲 h, 則 ▱ 之面積爲 bh.

又設所求矩形之高爲 x, 而底邊爲 $2b$, 則其面積爲 $2bx$. $\therefore 2bx=bh$,

由是 $$x=\frac{1}{2}h.$$

故知所求矩形之底爲 $2b$, 而高爲平行四邊形之高之半.

［作圖］ 延長 AB 至 E, 使 $BE=AB$. 於 A 作 $AF\perp AB$, 使 $AF=\frac{1}{2}h$. 過 F 作一直線平行於 AE, 又自 E 作一直線平行於 AF, 此二直線相交於 G. 則 $AEGF$ 卽爲所求之矩形.

習題 4. 求作一正方形等於一已知三角形之半.

［分析］ 設已知三角形之底邊爲 b, 高爲 h, 則其面積爲 $\frac{1}{2}bh$. 又設所求正方形之一邊爲 x, 則其面積爲 x^2.

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}bh=x^2$, 卽 $\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{2}h=x\cdot x$, 或 $\frac{1}{2}b : x=x : \frac{1}{2}h$.

旣知所求之正方形一邊爲已知三角形半底與半高之比例中項, 卽可依 § 365 之法作圖.

習題 5. 求作 $x=a\sqrt{5}$; $x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $x=\sqrt{a^2+ab}$;

$$x=\sqrt{a^2-ab};\quad x=\frac{a^2-b^2}{c}.$$

［解］(a)　$x^2=5a\cdot a$.　∴ x 爲 $5a$ 與 a 之比例中項.

(b)　x 爲一等邊三角形之高,其一邊等於 a (參看第 189 頁習題 4).

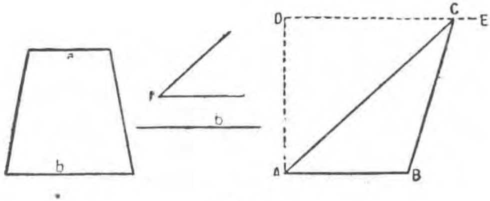
(c)　$x^2=a^2+ab=a(a+b)$.　∴ x 爲 a 與 $a+b$ 之比例中項.

(d)　$x^2=a^2-ab=a(a-b)$.　∴ x 爲 a 與 $a-b$ 之比例中項.

(e)　$cx=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.　∴ x 爲 c, $(a+b)$, 及 $(a-b)$ 之比例第四項.

以上五題除 (b) 及 (e) 外皆可依 § 365 之法作圖; (b) 須先作 △ 而後求其高; (e) 可依 § 296 之法作之.

習題 6.　已知三角形之底邊及一底角，求作一三角形等於一已知之梯形.



習題 6

［分析］　設梯形之二底爲 c 及 b, 高爲 h 則其面積 $=\frac{1}{2}h(b+c)$.

又設所求三角形之底爲 b', 高爲 x, 則 △ 形面積 $=\frac{1}{2}b'x$.

∴ $\frac{1}{2}b'x=\frac{1}{2}h(b+c)$.　∴ $b'\cdot x=h(b+c)$.　$b':h=(b+c):x$.

作三角形之底，梯形之高，及梯形二底和之比例第四項,即得所求三角形之高.

［作圖］　作 AB 等於已知三角形之底邊 b.　作 AC, 使 $\angle CAB$ 等於已知角 A.　於 A 立一垂線 AD, 其長爲 x.　過 D 作 $DE /\!/ AB$, 與 AC 相交於 C.　連 BC.　則 ABC 即爲所求之三角形.

證詳分析,茲不再贅.

習題 7.　求作一正方形與一已知之梯形等積.

［解］　所求正方形之一邊爲已知梯形之半高與梯形二底和之比例中

項。圖由學者自作之。

習題 8. 求作一矩形與一已知之矩形等積，其底邊須等於已知矩形之周之半。

［分析］ 設一已知矩形之底爲 b, 高爲 h, 則其周之半爲 $b+h$. 又設所求矩形之高爲 x, 則 $x(b+h)=bh$. $\therefore\ (b+h):b=h:x$.

由是依 § 296 之法作圖。求得 x, 再以 x 及 $b+h$ 爲二邊作矩形。

習題 9. 求作一等邊三角形與一已知之正方形等積。

［分析］ 設已知正方形之一邊爲 a, 所求等邊三角形之一邊爲 x. 則等邊三角形之面積爲 $\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

$$\therefore\ \frac{1}{4}x^2\sqrt{3}=a^2,\ 或\ x^2=\frac{4a^2}{\sqrt{3}}.\quad \therefore\ x\cdot x=4a\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

命 $y=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, 則 $y^2=\dfrac{a^2}{3}=a\cdot\dfrac{a}{3}$, 或 $a:y=y:\dfrac{a}{3}$.

由是依 § 327 之法 (1) 求得 a 與 $\dfrac{a}{3}$ 之比例中項，卽得 $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

(2) 再求 $4a$ 與 $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 之比例中項，卽得正方形之一邊。

圖由學者自作之。

第 217 頁　§ 369

習題. 若 a, b, c, 及 d 爲四直線，$a>b$. 又 $b>c$. 試以圖表 $(a)\ ab$; $(b)\ (a+b)b$; $(c)\ (a-c)d$; $(d)\ (a+b)(c+d)$; $(e)\ (a-b)(c+d)$; $(f)\ ab+ac$; $(g)\ a^2+ab+b^2$; $(h)\ a^2-b^2$; $(i)\ (a-b)^2$.

［作圖］ (a), (b), (c), (d), (e) 五題可以第一因式爲一度，第二因式爲第二度，作矩形卽得。

(f)　$ab+ac=a(b+c)$. 故以 a 爲一度，$b+c$ 爲第二度作一矩形。

(g)　$a^2+ab+b^2=a(a+b)+b^2$. 以 a 爲一度，$a+b$ 爲第二度，作一矩形；再以 b 爲一邊作一正方形。

(*h*) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 作一矩形，其一度爲 $a+b$, 另一度爲 $a-b$.

(*i*) 作一正方形，其一邊爲 $a-b$.

第 218 頁 § 370

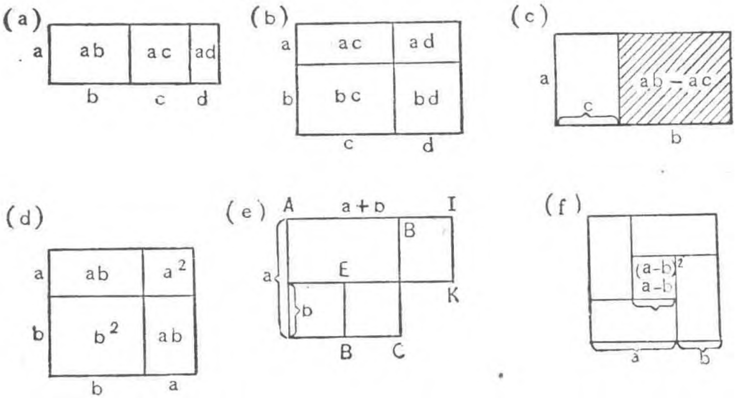
習題. 以幾何方法證下之代數公式:

(*a*) $a(b+c+d)=ab+ac+ad$. (*b*) $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$.

(*c*) $a(b-c)=ab-ac$. (*d*) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

(*e*) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. (*f*) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

[作圖]



在圖 (*e*) 內，$AB=a$, $BI=b$, 而 $AK=(a+b)(a-b)$. 又 $EC=BK$.

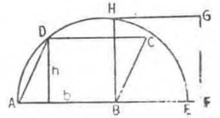
第 219 頁 § 371

用代數方法作:

習題 1. 一正方形，與一平行四邊形等積.

[解] 設平行四邊形之底爲 b, 高爲 h, 則其面積爲 bh. 又設正方形之一邊爲 x, 則

$$x^2=bh \quad \therefore\ x=\sqrt{bh}.$$



習題 1

故依 §371 之法，延長平行四邊形之底邊 AB 至 E，使 $BE=h$. 以 AE 爲半徑畫一半圓. 自 B 立一垂線 BH 交半圓於 H. 則 BH 卽爲所求正方形之一邊.

習題 2. 一正方形，與一三角形之二倍等積.

［解］ 設三角形之底邊爲 b，高爲 h；而正方形之一邊爲 x，則

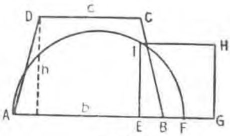
$$x^2=2\cdot\frac{1}{2}bh=bh.$$

依 §371 之法作圖.

習題 3. 一正方形，其積等於梯形之半.

［解］ 設梯形 $ABCD$ 之二底爲 b 及 c，高爲 h，則其面積爲 $\frac{1}{2}h(b+c)$. 又若所求正方形之一邊爲 x，則 $x^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}h(b+c)=\frac{1}{2}h\cdot\frac{1}{2}(b+c)$.

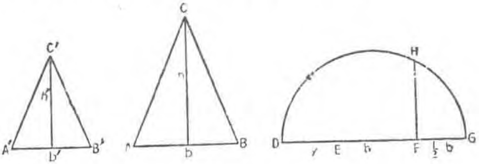
由是 x 爲 $\frac{1}{2}h$ 與 $\frac{1}{2}(b+c)$ 之比例中項.



習題 3

［作圖］ 於 AB 上截取 $AE=\frac{1}{2}(b+c)$. 延長 AB 至 F，使 $EF=\frac{1}{2}h$. 以 AF 爲直徑作一半圓. 於 E 立一垂線 EC，交半　於 C. 則 EI 卽爲所求正方形之一邊.

習題 4. 一正方形，其積等於二三角形之和.



習題 4

［解］ 設 △ABC 及 $A'B'C'$ 之底各爲 b 及 b'，高爲 h 及 h'. 又設所求正方形之一邊爲 x，則 $x^2=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}b'h'$. 設 $b'h'=by$，則 $b:b'=h':y$.

依 §266 之法作 y.

$\therefore\ x^2=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}by=\frac{1}{2}b(h+y)$，又 $\frac{1}{2}b:x=x:h+y$.

［作圖］ 應用 §371 之法，在無限直線上，截 $DE=y$，$EF=h$，又 $FG=\frac{1}{2}b$. 以 DG 爲直徑畫一半圓，於 F 立垂線 HF 交圓周於 F. 則

HF 即爲所求正方形之一邊.

習題 5. 一正方形,其積等於一矩形與一三角形之差.

[解] 設 b 及 h 爲矩形之二邊,又 b' 及 h' 各爲三角形之底及高,而 x 爲所求正方形之一邊. 則 $x^2=bh+\frac{1}{2}b'h'$.

設 $\frac{1}{2}b'h'=by$, 則 $b:\frac{1}{2}b'=h':y$.

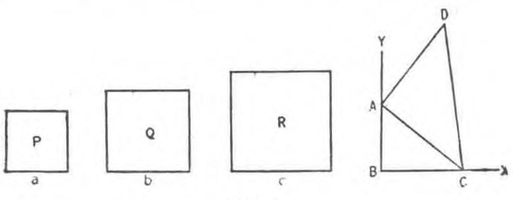
依 § 296 之法作 y.

$$\therefore \quad x^2=bh+by=b(h+y).$$

依 § 371 之法作 b 及 $(h+y)$ 之比例中項卽得所求正方形之一邊.

第 221 頁 § 376

習題 1. 求作一正方形等於已知三正方形之和.



習題 1

[已知] 三正方形爲 P, Q, 及 R, 其邊各爲 a, b, 及 c.

[求] 作一正方形 $=P+Q+R$.

[作圖] 作直角 XBY. 於 BY 截 $AB=a$, 於 BX 截 $BC=b$. 連 AC. 再作 $DA\perp AC$, 使 $DA=c$. 連 DC. 則 DC 卽爲所求正方形之一邊.

[證] $\overline{DC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=a^2+b^2+c^2=P+Q+R$.

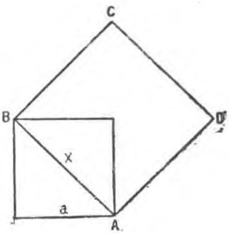
習題 2. 作 x^2, 已知 $x^2=a^2+b^2-c^2$.

[作圖] 作 $y^2=a^2+b^2$ (375). 再作 $x^2=y^2-c^2$ (376).

習題 3. 作 x^2, 已知 $x^2=2a^2$.

［作圖］ 作已知正方形之對角線 AB. 以 AB 爲一邊作一正方形 $ABCD$, 卽爲所求之正方形.

［證］ $\overline{AB}^2=a^2+a^2=2a^2$, $\therefore\ x^2=2a^2$



習題 3

習題 4. 應用上述方法，作一正方形等於一已知正方形之三倍.

［解］ 此爲習題 1 之特例.

$$x^2=3a^2=a^2+a^2+a^2$$

第 222 頁　§ 377

習題 1. 在三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 內，$\angle A=\angle A'$, $AB=6$ 吋, $AC=9$ 吋, $A'B'=1$ 呎, $A'C'=2$ 呎. 求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 之比.

［解］ $\triangle ABC:\triangle A'B'C'=6\times 9:12\times 24=3:16.$

習題 2. $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 等積, 又 $\angle A=\angle A'$. 若 $AB=2$ 吋, $A'B'=3$ 吋, 又 $A'C'=4$ 吋, 求 AC.

［解］ $\triangle ABC:\triangle A'B'C'=1:1=2(AC):3\times 4.$

$$\therefore\quad 2AC=12,\ AC=6\text{ 吋}.$$

習題 3. 若 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$; 而 $\angle A=\angle A'$, 則

$$AB:A'B'=A'C':AC.$$

［證］ 用 § 377 之圖.

$$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=1:1,$$

$$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB\times AC:A'B'\times A'C'.$$

$\therefore\ AB\times AC=A'B'\times A'C'$, 卽 $AB:A'B'=A'C':AC.$

第 224 頁　§ 379

習題 1. 相似三角形之比如其周之平方之比.

［證］ 用 § 378 命題 XIV 之圖. 命 p, p' 表二三角形之周, a, a' 表

其一邊，則 $p : p' = a : a'$ (318). 但 $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = a^2 : a'^2$.

而 $p^2 : p'^2 = a^2 : a'^2$. $\therefore \triangle ABC : \triangle A'B'C' = p^2 : p'^2$.

習題 2. 三角形三邊爲 4, 7 及 8. 若有一面積大四倍之相似三角形，其各邊如何？

［解］ $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = 1 : 4 = a^2 : a'^2 = b^2 : b'^2 = c^2 : c'^2$.

$\therefore 1 : 2 = a : a' = b : b' = c : c'$. 故其邊爲 8, 14, 及 16.

習題 3. 二相似三角形之二相應邊爲 2 吋及 3 吋，求二三角形面積之比.

［解］ $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$.

習題 4. 若二相似三角形之二相應邊之比爲 $2 : 3$, 試比較其面積.

［解］ $\triangle ABC$ 之面積 : $\triangle A'B'C'$ 之面積 $= 2^2 : 3^2 = 4 : 9$.

習題 5. 二相似三角形面積之比爲 $9 : 25$ 若第一三角形之周爲 36, 則第二三角形之周爲若干？

［解］ $9 : 25 = 36^2 : x^2$, $\therefore 3 : 5 = 36 : x$, 又 $x = 60$.

習題 6. 一等邊三角形之面積爲 100 方吋. 若另一等邊三角形之底邊二倍於前者，則其面積爲若干？

［解］ 二三角形相似，故 $100 : A = x^2 : (2x)^2$.

$\therefore 100 : A = x^2 : 4x^2 = 1 : 4$. $\therefore$ 面積 $A = 400$ 方吋.

習題 7. 作一直線連結三角形二邊之中點，則所成三角形之面積爲原三角形之幾分之幾？

［解］ 此二三角形相似 (307). 因二三角形底邊之比爲 $1 : 2$, 故所成三角形之面積爲原三角形面積之四分之一 (378).

習題 8. 在第 186 頁命題 30 之圖內，二直角三角形 CBD 與 BDA 之比如何？

［解］ $\triangle CBD : \triangle BDA = CD : DA$ (362).

習題 9. 在習題 8 內，若二直角邊爲 5 與 12, 求二三角形之比.

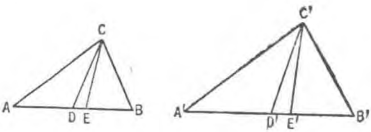
［解］ 原三角形之二直角邊，適各爲 $\triangle CBD$ 與 $\triangle BDA$ 之斜邊.

$$\therefore \quad \triangle CBD : \triangle BDA = 5^2 : 12^2 = 25 : 144.$$

習題 10. 延長梯形不平行之二邊使交於一點，若梯形之底爲 20 與 12，求圖形內二三角形面積之比。

［解］ 此二三角形相似． 因其底爲 20 及 12，故二三角形面積之比爲 $20^2 : 12^2 = 400 : 144 = 25 : 9$.

習題 11. 二相似三角形之比如其相應 (a) 中線，(b) 角之平分線，之平方比。



習題 11

［證］ (a) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

$\therefore \quad AB : A'B' = CD : C'D'$ （第 174 頁習題 1）

$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2$ (378).

(b) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

$\therefore \quad AB : A'B' = CE : C'E'$ （第 173 頁習題 13).

$\therefore \quad \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{CE}^2 : \overline{C'E'}^2$.

習題 12. 在等邊三角形底及高上各作正方形，試比較其面積。

［解］ 設等邊三角形之底爲 b，高爲 h，則 $h = \frac{1}{2}b\sqrt{3}$ 或 $h^2 = \frac{1}{4} \times 3b^2$. 故 $b^2 : h^2 = b^2 : \frac{1}{4} \times 3b^2 = 4 : 3$. 但 b^2 爲底邊上之正方形，h^2 爲高上之正方形，故二正方形面積之比如 $4 : 3$.

習題 13. 二相似三角形之面積各爲 64 及 225. 若第一三角形之高爲 6，則第二三角形之相應高爲若干?

［解］ $64 : 225 = 6^2 : h^2$，卽 $8 : 15 = 6 : h$. $\therefore \ h = 11\frac{1}{4}$.

習題 14. 梯形之底爲 12 及 8. 今延長其不平行之二邊使相交於一點，若梯形之面積爲 90，則較小一三角形之面積如何?

［解］ 此二三角形相似． 設 A 爲較小三角形之面積，則 $A+90$ 卽爲較大三角形之面積． 但 $A : A+90 = 8^2 : 12^2$． $\therefore\ A=72$．

第 226—227 頁 § 383

習題 1. 二相似多邊形之面積，一爲 3 方吋，一爲 12 方吋，又第一多邊形之一邊爲 6 吋，求第二多邊形之相應邊．

［解］ $3 : 12 = 6^2 : x^2$， $\therefore\ x=12$ 吋．

習題 2. 二相似多邊形之相應邊爲 4 吋及 3 吋，其較大之一之面積爲 1 方呎，求其較小者之面積．

［解］ $4^2 : 3^2 = 12^2 : x$， $\therefore\ x=81$ 方吋．

習題 3. 一多邊形之面積爲其相似多邊形之二倍，求二多邊形相應邊之比．

［解］ $x^2 : y^2 = 2 : 1$， $\therefore\ x : y = \sqrt{2} : 1$．

習題 4. 一地圖之比例尺爲 1 : 1000，在地圖上若有面積 2 方吋之多邊形，實際當有若干方呎？

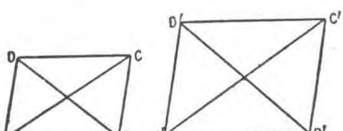
［解］ $1^2 : 1000^2 = 2 : x$， $\therefore\ x = 2{,}000{,}000$ 方吋 $= 13{,}888.9$ 方呎．

習題 5. 二相似多邊形面積之和爲 212 方呎，其相應邊之比爲 5 : 9；求各多邊形之面積．

［解］ 設 x, y 各爲二相似多邊形之面積，則 $x : y = 5^2 : 9^2$．

又 $x+y=212$， $\therefore\ x=50$ 方呎， $y=162$ 方呎．

習題 6. 二相似平行四邊形之比如其二對角線之積之比．



習題 6

［證］ $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$．

$AC:A'C'=AB:A'B'$, 又 $BD:B'D'=AB:A'B'$.

$$\therefore\ \overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2=AC\times BD:A'C'\times B'D'\ (285).$$

但 $$\square ABCD:\square A'B'C'D'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2,$$

$$\therefore\ \square ABCD:\square A'B'C'D'=AC\times BD:A'C'\times B'D'.$$

習題 7. 作一三角形與已知三角形相似,且等於其面積之三分之二.

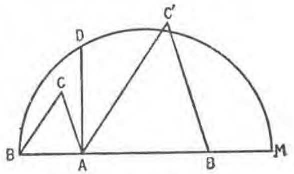
[分析] 設 x 爲所求三角形之一邊, a 爲已知三角形之一邊. 因二三角形相似,故 $x^2:a^2=2:3$, 即 $x^2=\frac{2}{3}a^2$, 或 $a:x=x:\frac{2}{3}a$.

$\therefore$ x 爲 a 與 $\frac{2}{3}a$ 之比例中項.

[作圖] 於求得 x 後, 即於 x 邊上作一三角形與已知三角形相似 (305, 244). 圖由學者自作之.

習題 8. 作一三角形與已知三角形相似,且等於其面積之三倍.

[作圖] 延長已知 $\triangle ABC$ 之底邊 BA 至 M, 使 $AM=3AB$. 以 BM 爲直徑作半圓,於 A 立一垂線,交半圓於 D, 則 AD 爲 AB 與 AM 之比例中項. 於 AM 上截 $AB'=AD$, 以 AB' 爲底邊依 § 317 之法作 $\triangle AB'C'$ 與 $\triangle ABC$ 相似,則 $AB'C'$ 即爲所求之三角形.



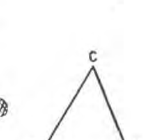
習題 8

[證] $\triangle AB'C':\triangle ABC=\overline{AB'}^2:\overline{AB}^2=\overline{AD}^2:\overline{AB}^2$

$$=AB\times 3AB:\overline{AB}^2=3:1.$$

習題 9. 作一平行於三角形一邊之直線, 分原形爲面積相等之二部分.

[作圖] 在已知 $\triangle ABC$ 內, AB 爲已知之直線. 先作 CA 與 $\frac{1}{2}CA$ 之比例中項 x (327). 在 CA 上截 $CF=x$, 作 $FH\parallel AB$. 則 FH 即爲所求之直線.



習題 9

[證] $\triangle ABC:\triangle FHC=\overline{AC}^2:\overline{FC}^2=\overline{AC}^2:\frac{1}{2}AC\cdot AC=2:1.$

習題10. 作二直線皆與三角形之一邊平行，分原形爲面積相等之三部分。

[解] 此二平行線分成之三角形皆與原三角形相似，且面積各等於原三角形之 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{2}{3}$. 設 AB 爲已知三角形內之已知邊，作 CA 與 $\frac{1}{3}CA$ 之比例中項，再作 CA 與 $\frac{2}{3}CA$ 之比例中項。在 CA 上自 C 截此二比例中項，並作 AB 之平行線卽得(與習題 9 相彷)。

習題11. 作一多邊形等於已知多邊形之三分之二，且與之相似。

[分析] 設 x 爲所求多邊形之一邊，且與已知多邊形之邊 a 相應。

由是　$x^2:a^2=2:3$, 或 $x^2=\frac{2}{3}a^2$.　$\therefore\ a:x=x:\frac{2}{3}a$.

x 旣經求得，卽可依 § 317 之法作圖.

習題12. 作一等邊三角形，使其面積等於二已知等邊三角形之和.

[作圖] 以已知二三角形之邊爲直角三角形之二直角邊，作直角三角形。次以斜邊爲一邊作一等邊三角形，卽爲所求之三角形.（圖由學者自作之）.

[證] 用 § 383 證之.

習題13. 作一等邊三角形，使其面積等於二已知等邊三角形之差.

[作圖] 以較大等邊三角形之一邊爲斜邊，以較小等邊三角形之一邊爲直角邊，作直角三角形，則另一直角邊卽爲所求等邊三角形之一邊.（圖由學者自作之）.

習題14. 作一等腰直角三角形，使其面積等於二已知等腰直角三角形之和.

[解] 作法與習題 12 同，以已知二等腰直角三角形之斜邊爲直角邊，作一直角三角形，其斜邊卽爲所求直角三角形之斜邊.

習題15. 作一等腰直角三角形，使其面積等於二已知等腰直角三角形之差.

[解] 作法與習題 13 同，以已知三角形斜邊之較大者爲斜邊，另一

三角形之斜邊較小者爲直角邊，作一直角三角形，則所成之他一直角邊卽爲所求直角三角形之斜邊.

習題 16. 作一三角形，與已知之二相似三角形相似，且面積等於二者之和.

［作圖］ 先依習題 12 之法，以已知二相似三角形之二相應邊爲二直角邊，作一直角三角形. 再於斜邊上作三角形與已知三角形相似卽得 (383).

習題 17. 作一多邊形，與已知之二相似多邊形相似，且面積等於二者之和.

［解］ 用 §§ 383, 317 求之.

習題 18. 作一多邊形，與已知之二相似多邊形相似，且面積等於二者之差.

［解］ 設 a, a' 及 x 爲三多邊形之相應邊，則 $x^2 = a^2 - a'^2$.

用 §§ 376, 371 之法求之.

習題 19. 作一等邊三角形，使其面積等於三已知等邊三角形之和.

［解］ $x^2 = 3a^2$.　用 $x^2 = a^2 + a^2 + a^2$ 求之(見第 221 頁習題 4)，或用 $a : x = x : 3a$ 求之亦可.

習題 20. 二相似多邊形之相應邊爲 12 呎及 5 呎，求面積等於以上二形之和之另一相似多邊形之相應邊.

［解］ $x^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2$ (383).　$\therefore x \doteq 13$ 呎.

第 228 頁

雜　題

定　理

習題 1. 若 E 爲平行四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 上之任一點，求證

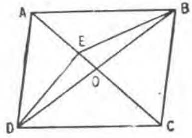
$\triangle ABE = \triangle ADE$

［證］ 作對角線 BD，交 AC 於 O，則

$\triangle DOA = \triangle BOA,$

又 $\triangle DOE = \triangle BOE$ (359).

$\therefore$ $\triangle ABE = \triangle ADE$ (公理 3).



習題 1

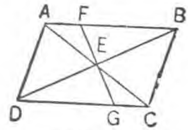
習題 2. 作一直線過平行四邊形對角線之交點，則分原形爲等積之二部分.

［證］ $AE = CE$, $\angle FAE = \angle GCE$,

$\angle AEF = \angle CEG$, $\therefore$ $\triangle AEF \cong \triangle CEG$.

又 $\triangle ADE \cong \triangle BCE$, $\triangle DGE \cong \triangle FBE$.

$\therefore$ $AFGD = BCGF$ (公理 2).

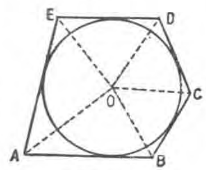


習題 2

習題 3. 圓之外切多邊形之面積等於其周與半徑之積之半.

［已知］ $ABCDE$……爲圓之外切多邊形，其周爲 P，半徑爲 R.

［求證］ $ABCDE = \frac{1}{2} P \times R$.



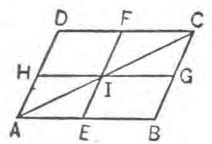
習題 3

［證］ 連圓心 O 與多邊形之各頂點，則分多邊形爲若干三角形，其數與多邊形之邊數相等.

每一三角形之高皆等於半徑 R(204)，故每一三角形之面積爲 $\frac{1}{2} R$ 乘其底邊.

多邊形之面積等於諸三角形面積之總和，卽等於 $\frac{1}{2}R$ 乘諸底邊之和，亦卽 $\frac{1}{2}P \times R$.

習題 4. 若過平行四邊形對角線上之任一點，作二直線平行於二邊，則成四個平行四邊形，其中不含對角線之二平行四邊形面積必相等.

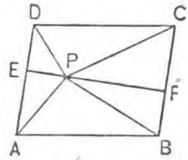


習題 4

［證］ $\triangle ADC \cong \triangle ABC$(140). $\triangle AHI \cong \triangle AHE$,

又 $\triangle FIC \cong \triangle CIG$. $\therefore$ $\square DHIF = \square EBGI$ (公理 3).

習題 5. 若自平行四邊形內任一點，作直線連結四頂點，則任一對相對三角形之和等於平行四邊形面積之半.



習題 5

［證］ 作平行四邊形 $ABCD$ 之一高 EF. 則此平行四邊形之面積等於 $AD\times EF$.

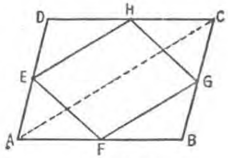
$$\triangle DPA=\tfrac{1}{2}AD\times EP,$$

又　$\triangle BPC=\tfrac{1}{2}BC\times PF=\tfrac{1}{2}AD\times PF.$

$$\therefore\ \triangle DPA+\triangle BPC=\tfrac{1}{2}AD(EP+PF)=\tfrac{1}{2}AD\times EF.$$

同理，可證 $\triangle ABP+\triangle DCP=$ 平行四邊形面積之半.

習題 6. 順次連結四邊形四邊中點之直線，亦成一平行四邊形，面積等於原形之半.



習題 6

［已知］ $ABCD$ 爲一平行四邊形. F, G, H, 及 E 各爲 AB, BC, CD, 及 DA 之中點.

［求證］ $EFGH$ 亦爲一平行四邊形，且等於 $\tfrac{1}{2}\square ABCD$.

［證］ 作 AC. 則 $EH\,/\!\!/\,AC$ 且 $=\tfrac{1}{2}AC$ (153). 同樣，$FG\,/\!\!/\,AC$ 且等於 $\tfrac{1}{2}AC$.

$$\therefore\ EFGH \text{ 爲一平行四邊形 } (144).$$

$$\triangle EDH\sim\triangle ADC,\ \text{又}\ \triangle BFG\sim\triangle BAC\ (307).$$

由是　$\triangle EDH:\triangle ADC=\overline{EH}^2:\overline{AC}^2=1:4$ (378).

又　$\triangle BFG:\triangle BAC=\overline{FG}^2:\overline{AC}^2=1:4.$

$\triangle EDH+\triangle BFG=\tfrac{1}{4}\square ABCD.$ 同樣，$\triangle AEF+\triangle GHC=\tfrac{1}{4}\square ABCD.$

故　$\triangle EDH+\triangle BFG+\triangle AEF+\triangle GHC=\tfrac{1}{2}\square ABCD.$

$$\therefore\ \square EFGH=\tfrac{1}{2}\square ABCD.$$

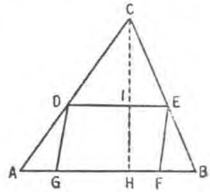
習題 7. 一菱形與一正方形之周相等，若菱形之一角爲 60°，試比較二形之面積.

［證］ 菱形面積：正方形面積＝菱形之高：正方形之高 (356).

設命等邊為 s, 則此菱形之高為 $\sqrt{s^2-\frac{s^2}{4}}=\frac{s}{2}\sqrt{3}$ (165, 330).

於是　菱形面積：正方形面積$=\frac{s}{2}\sqrt{3}:s=\frac{1}{2}\sqrt{3}:1=0.866:1.$

習題 8. 若於連結三角形二邊中點之直線上,作一平行四邊形,使其二頂點位於三角形之底邊,則此平行四邊形之面積等於三角形之半.

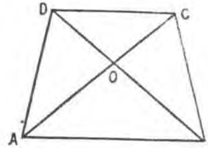


習題 8

［證］ 作 $CH\perp AB$, 交 DE 於 I. 因 DE 為連結 AC 及 BC 中點之直線,故 $DE=GF=\frac{1}{2}AB$. 卽 $\triangle DCE$ 之底為 $\triangle ABC$ 之底之半. 又 $DEFG$ 之高為 $\triangle ABC$ 之高之半 (148).

$\therefore\ \square DEFG=GF\times HI=\frac{1}{2}AB\times\frac{1}{2}CH=\frac{1}{4}AB\cdot CH=\frac{1}{2}\triangle ABC.$

習題 9. 梯形之不平行二邊與二對角線成二等積三角形.



習題 9

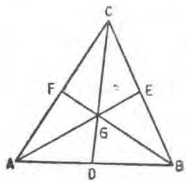
［已知］ 梯形 $ABCD$ 之二對角線 AC, BD 相交於 O.

［求證］　　$\triangle AOD=\triangle BOC.$

［證］　　$\triangle ABC=\triangle ABD$ (359).

二 $\triangle$ 各減 $\triangle ABO$, 則得 $\triangle AOD=\triangle BOC$ (公理 3).

習題 10. 若自三角形三中線之交點至三頂點作三直線,則此三直線與三角形之三邊成三個等積三角形.



習題 10, 11

［證］ $\triangle ABG$ 之高等於 $\triangle ABC$ 之高之三分之一,故 $\triangle ABG=\frac{1}{3}\triangle ABC$. 同理, $\triangle BCG$, $\triangle ACG$ 各等於 $\frac{1}{3}\triangle ABC$. $\therefore\ \triangle ABG=\triangle BCG=\triangle ACG$.

習題 11. 在 $\triangle ABC$ 內,若 D 為 AB 之中點, F 為 AC 之中點,則 $\triangle ADC$ 與 $\triangle ABF$ 等積.

［證］　　$\triangle BDF=\triangle DFC$ (底同為 FD, 且高相等).

$\therefore \quad \triangle ABF = \triangle ADC$ (公理 2).

習題 12. 一邊為 a 之等邊三角形,其面積為 $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

［證］

$$\text{高 } h=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

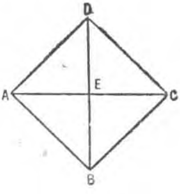
$$\therefore \text{三角形面積}=\frac{1}{2}\text{底}\times\text{高}=\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\sqrt{3}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

習題 13. 菱形之面積等於二對角線之積之半.

［證］ $AC\perp BD$ (第 80 頁習題 2).

$\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\times BE$, 又 $\triangle ADC=\frac{1}{2}AC\times ED$.

$$\begin{aligned}\therefore \quad \text{菱形面積} &= \triangle ABC+\triangle ADC\\ &=\tfrac{1}{2}AC(BE+ED)\\ &=\tfrac{1}{2}AC\cdot BD.\end{aligned}$$



習題 13

第 229—230 頁

計　算　題

習題 1. 等邊三角形之一邊為 10 吋,求面積.

［解］ 由第 228 頁習題 12, 得 $\triangle$ 面積 $=\frac{10^2}{4}\sqrt{3}=25\sqrt{3}=43.3$ 方吋.

習題 2. 等腰三角形之底邊為 6, 腰為 5, 求面積.

［解］ $h=\sqrt{5^2-3^2}=4$, $\quad\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}6\times 4=12$.

習題 3. 梯形之二底為 9 呎及 11 呎,而高為 12 呎,求面積.

［解］ 梯形面積 $=\frac{1}{2}12(9+11)=120$ 方呎.

習題 4. 菱形之二對角線為 9 呎及 10 呎,求面積.

［解］ 由第 228 頁習題 13, 得菱形面積 $=\frac{1}{2}9\times 10=45$ 方呎.

習題 5. 若在四邊形 $ABCD$ 內, $AB=10, BC=24, CD=30, AD=28$, 又對角線 $AC=26$, 求其面積.

［解］ 由第 212 頁習題 2, 得三角形 $ABC=\sqrt{30\cdot6\cdot20\cdot4}=120$, 又 $\triangle ADC=\sqrt{42\cdot12\cdot14\cdot16}=336$. ∴ 四邊形面積 $=120+336=456$.

習題 6. 等邊三角形 ABC 之一邊爲 8, 求面積三倍於 $\triangle ABC$ 之等邊三角形之邊.

［解］ $1:3=8^2:x^2$, ∴ $x=8\sqrt{3}=13\cdot9$.

習題 7. 矩形之周爲 20 米, 一邊長 6 米; 求面積.

［解］ 垂直於 6 米之一邊長 $\frac{1}{2}\times20-6=4$ 米. ∴ 面積 $=4\times6=24$ 方米.

習題 8. 面積 900 方米之正方形, 其一邊之長爲若干? 面積 n 方米者一邊長若干?

［解］ (a) $\sqrt{900}=30$ 米. (b) $\sqrt{n}$ 米.

習題 9. 面積爲 m 之菱形, 其一對角線等於 d; 求他一對角線.

［解］ 由第 228 頁習題 13, 得 $m=\dfrac{1}{2}x\cdot d$, ∴ $x=\dfrac{2m}{d}$.

習題 10. 面積 400 方米之梯形, 高爲 8 米, 若將不平行二邊之中點以直線連結之, 其長應爲若干?

［解］ 由第 213 頁習題 1, 得 $8\times$ 中線 $=400$, ∴ 中線 $=50$ 米.

習題 11. 直角三角之斜邊爲 20, 一直角邊在斜邊上之射影爲 4, 求面積.

［解］ $h=\sqrt{4(20-4)}=8$, ∴ 面積 $=\frac{1}{2}\times20\times8=80$.

習題 12. 一農夫欲測量一五邊形田地之面積, 量得 $AB=4$ 桿, $BC=13$ 桿, $CD=14$ 桿, $DE=5$ 桿, $EA=12$ 桿, $AC=15$ 桿, 並量得 $AD=13$ 桿, 求此田當有若干方桿?

［解］ $\triangle ABC=\sqrt{16\cdot12\cdot3\cdot1}=24$. $\triangle ACD=\sqrt{21\cdot6\cdot7\cdot8}=84$.
$\triangle ADE=\sqrt{15\cdot2\cdot3\cdot10}=30$.

∴ 五邊形面積 $=24+84+30=138$ 方桿.

習題 13. 一三角形之底長 12, 高 20, 今於距底邊 6 處作一平行於

底邊之直線，求此三角形二部分之面積。

［解］ 三角形面積為 $\frac{1}{2}\times 12\times 20=120$.

$20^2:(20-6)^2=120:x$, $\therefore x=58\cdot 8$, 又 $120-x=61\cdot 2$.

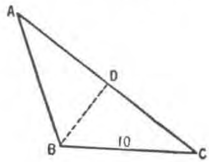
習題 14. 一邊長 6 之矩形，對角線為 10；求其面積。

［解］ 矩形之另一邊 $=\sqrt{10^2-6^2}=8$. $\therefore$ 面積 $=8\times 6=48$.

習題 15. 周 20 呎之多邊形外切於半徑 3 呎之圓，求此多邊形之面積。

［解］ 由第 228 頁習題 3，得多邊形面積 $=\frac{1}{2}\times 20\times 3=30$ 方呎。

習題 16. 底邊 10 吋之三角形，其二底角為 $120°$ 及 $30°$；求面積。



習題 16

［解］ 在 $\triangle ABC$ 內，$BC=10$, $\angle B=120°$, $\angle C=30°$. 故 $\angle A=30°$. 由是 ABC 為一等腰三角形，其腰 $AB=BC$. 作 $BD\perp AC$, 則 $BD=5$.

$$\therefore CD=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}.$$

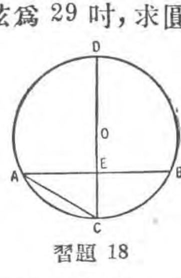
$$\therefore \text{面積}=\tfrac{1}{2}AC\times BD=\tfrac{1}{2}\times 2\times 5\sqrt{3}\times 5$$
$$=25\sqrt{3}=43.3 \text{ 方吋}.$$

習題 17. 一等邊三角形與底 10 高 15 之矩形等積，求其一邊之長。

［解］ 由第 228 頁習題 12，得等邊 $\triangle$ 面積 $=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

於是　$\dfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}=10\times 15$, $\therefore a^2=\dfrac{600}{\sqrt{3}}$, $\therefore a=18\cdot 6$.

習題 18. 一弧所對之弦為 42 吋，此弧之半所對之弦為 29 吋，求圓之直徑。



習題 18

［解］ 設弧 ACB 所對之弦 $AB=42$, 而弧 AC 所對之弦 $AC=29$. 直徑 CD 交 AB 於 E, 則 $\angle E=90°$, $CE=\sqrt{29^2-21^2}=20$. 又 $\overline{AC}^2=CE\times CD$ (328).

$$\therefore CD=\frac{\overline{AC}^2}{CE}=\frac{29^2}{20}=42\cdot 1 \text{ 吋}.$$

習題 19. 三角形之底邊為 15 呎，面積為 60 方呎。若有一相似三角

形,其相應高爲 6 呎,則面積爲若干?

[解] 已知三角形之高爲 $\frac{60}{15}\times 2=8$ 呎. 設第二△之面積爲 A, 則

$$A:60=6^2:8^2,\quad \therefore\ A=33\tfrac{3}{4}\text{ 方呎.}$$

習題 20. 等腰梯形之腰長 13 吋,其在較長一底邊上之射影長 5 吋,若此較長之底邊爲 17 吋,求梯形之面積.

[解] 梯形之高 $=\sqrt{13^2-5^2}=12$ 吋. 梯形之上底 $=17-5-5=7$ 吋.

$$\therefore\ \text{梯形面積}=\tfrac{1}{2}\times 12(17+7)=144\text{ 方吋.}$$

習題 21. 二等腰直角三角形之腰各爲 3 與 2. 設有另一等腰直角三角形,其面積等於以上二者之差,求其腰之長.

[解] $x^2=3^2-2^2$ (383). $\therefore\ x=\sqrt{5}=2\cdot 2.$

習題 22. 三角形三邊爲 8 : 15 : 17, 若面積爲 960 方呎,求各邊.

[解] 若三角形之邊爲 8, 15, 17, 則面積爲 $\sqrt{20\cdot 12\cdot 5\cdot 3}=60.$

$$\therefore\ 60:960=8^2:x^2,\quad \therefore\ x=32\text{ 呎.}$$

同理,得其他二邊爲 60 呎及 68 呎.

習題 23. 三角形三邊爲 8, 15, 及 17, 求其內切圓之半徑.

[解] $s=\frac{1}{2}(8+15+17)=20,\quad \therefore\ \triangle\text{面積}=\sqrt{20\cdot 12\cdot 5\cdot 3}=60.$

由第 228 頁習題 3, 得 $\triangle\text{面積}=\frac{1}{2}r(8+15+17)=20r,$

$$\therefore\ 60=20r,\ \text{而}\ r=3.$$

[別解] 因 $17^2=8^2+15^2$, 故此三角形爲一直角三角形,而其二直角邊之和等於其斜邊與內接圓直徑之和.

$$\therefore\ 2r+17=8+15,\ \text{而}\ r=3.$$

習題 24. 求內接於半徑 4 吋圓內之等邊 12 邊形之面積.

[解] 設 O 爲圓心, AB 爲內接 12 邊形之一邊,則 $\angle AOB=30°$. 作 $AD\perp OB$, 則 $AD=\frac{1}{2}AO=2$, $\therefore\triangle ABO$ 之面積 $=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$ 方吋. 十二邊形之面積 $=12\times 4=48$ 方吋.

[別解] 證明內接等邊 12 邊形之面積三倍於外接圓半徑之平方.故

十二邊形面積$=3\times4^2=48$ 方吋.

習題 25. 三角形之三邊爲 6, 7, 及 8 呎. 6, 7 兩邊夾角之平分線分三角形爲二部分,試求各部分之面積.

［解］ $s=\frac{1}{2}(6+7+8)=\frac{21}{2}=10\cdot\frac{1}{2}$,

$$\therefore\ \triangle\text{面積}=\sqrt{10\frac{1}{2}\times4\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}\times2\frac{1}{2}}=\frac{21}{4}\sqrt{15}\text{ 方呎.}$$

由 § 377 知二三角形面積之比如夾等角之二邊之積之比. 故

$$\text{一部分面積}=\frac{6}{13}\times\frac{21}{4}\sqrt{15}=\frac{63}{26}\sqrt{15}\text{ 方呎.}$$

$$\text{他一部分面積}=\frac{7}{13}\times\frac{21}{4}\sqrt{15}=\frac{147}{52}\sqrt{15}\text{ 方呎.}$$

習題 26. 求高等於 h 之等邊三角形之面積.

［解］ 設等邊三角形之一邊爲 a, 則面積$=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, 又 $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, 即

$$a=\frac{2h}{\sqrt{3}}.\quad \therefore\ \triangle\text{面積}=\frac{1}{2}h\cdot\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{h^2}{\sqrt{3}}=\frac{h^2}{3}\sqrt{3}.$$

習題 27. 菱形二對角線之和爲 24 呎, 其比如 3 : 5; 求面積.

［解］ 菱形之對角線爲 $\frac{3}{8}\times24=9$, 及 $\frac{5}{8}\times24=15$.

$$\therefore\ \text{菱形面積}=\tfrac{1}{2}\times9\times15=67.5\text{ 方呎.}$$

習題 28. 於長 16 呎寬 12 呎矩形之對角線上, 作一面積與矩形相等之三角形; 求此三角形之高.

［解］ 矩形對角線$=\sqrt{16^2+12^2}=20$ 呎, 此卽爲三角形之底.

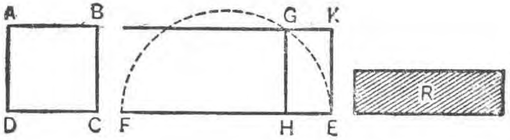
$$\therefore\ 16\times12=\tfrac{1}{2}\times20h,\quad \therefore\ h=19\cdot2\text{ 呎.}$$

第 231 頁

作 圖 題

習題 1. 作一矩形, 使與一已知之正方形等積, 且其底與高之和等於

一已知直線.



習題 1

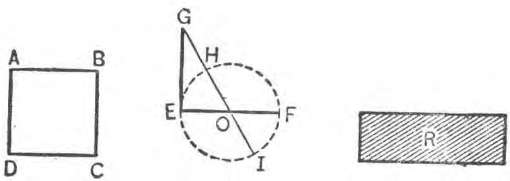
[已知] EF 爲一已知直線, $ABCD$ 爲已知之正方形.

[求] 作一矩形與 $ABCD$ 等積,且其底與高之和等於 EF.

[作圖] 以 EF 爲直徑作一半圓. 於 E 立垂線 $EK=AB$, 過 K 作直線平行於 EF, 交圓周於 G. 自 G 作 $GH\perp EF$, 分 EF 爲 EH 及 HF 二線段. 則 EH 及 HF 卽爲所求矩形之二邊.

[證] $EH:GH=GH:FH$, $\therefore\ \overline{GH}^2=EH\cdot FH$ (328).

習題 2. 作一矩形,使與一已知之正方形等積,且其底與高之差等於一已知直線.



習題 2

[已知] $ABCD$ 爲一正方形, EF 爲一已知直線.

[求] 作一矩形與 $ABCD$ 等積,且其底與高之差等於 EF.

[作圖] 以 EF 爲直徑作一圓. 於 E 立垂線 $EG=AB$, 連 G 及圓心 O, 並延長之使遇圓周於 I. 則 GH 及 GI 卽爲所求矩形之二邊.

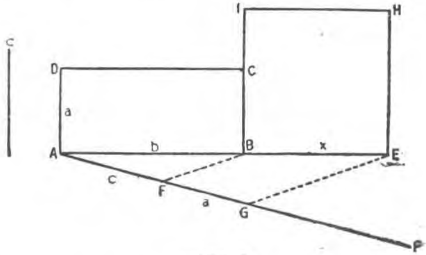
[證] $GH:GE=GE:GI$, $\therefore\ \overline{GE}^2=GH\cdot GI$ (323).

習題 3. 變換一矩形爲另一矩形,使其一邊等於一已知直線.

[分析] 設 a 爲已知矩形之高, b 爲其底,又 c 爲所求矩形之已知邊,

則 $cx=ab$, 卽 $c:a=b:x$. 故得作法如下.

［作圖］ 作 AP 使與 AB 成任意之角.於 AP 上截取 $AF=c$, $FG=a$. 連 BF. 作 $GE /\!/ BF$ 且交 AB 之延長線於 E. 則 BE 卽爲所求矩形之另一邊. 以 BE 及 c 爲二邊完成矩形 $BEHI$, 卽得所求之矩形.



習題 3

習題 4. 變換一正方形爲已知底邊之等腰三角形.

［分析］ 設 a 爲正方形之一邊, b 爲等腰三角形之底邊, h 爲其高, 則 $\frac{1}{2}bh=a^2$, 或 $bh=2a^2$, 卽 $b:2a=a:h$.

h 旣爲 b, $2a$ 及 a 之比例第四項,卽可依 § 296 之法求之. 然後再以 h 及 b 完成等腰三角形. (圖由學者自作之.)

習題 5. 變換一矩形爲已知一對角線之平行四邊形.

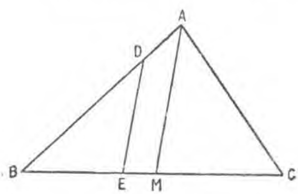
［分析］ 已知之對角線分平行四邊形爲二全等之三角形. 每一三角形皆以此對角線爲底邊.

設 x 爲此二三角形之高, a 及 b 爲矩形之高及底, 又 d 爲平行四邊形之對角線,則　　$dx=ab$,　　$\therefore d:a=b:x$.

學者可依 § 296 之法作圖求得 x, 然後以二對角線完成其平行四邊形.

注意　此習題有多解.

習題 6. 作平行於三角形一中線之二直線,分原形爲三等分.



習題 6

［分析］ 設 ABC 爲一三角形, AM 爲其中線.

又設 D 爲 AB 上之一點, E 爲 BM 上之一點, 而 $DE /\!/ AM$. 又 $\triangle BDE=\frac{1}{3}\triangle ABC$.

$$\triangle BDE \sim \triangle ABM, \text{ 又 } \triangle BDE = \tfrac{2}{3}\triangle ABM.$$

$$\therefore \triangle BDE : \triangle ABM = \overline{BD}^2 : \overline{BA}^2 = 2:3, \text{ 卽 } \overline{BD}^2 = \tfrac{2}{3}\overline{BA}^2,$$

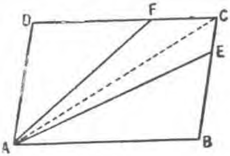
或 $BA : BD = BD : \frac{2}{3}BA$. 故 BD 爲 BA 與 $\frac{2}{3}BA$ 之比例中項，而可依 §327 之法求之。由是作 $DE \mathbin{/\!\!/} AM$ 卽得 $\triangle BDE$.

設所求三角形以 C 爲頂點，再依上法求之。

習題 7. 作一直線垂直於平行四邊形之一邊，且分原形爲二等分。

［解］ 設平行四邊形之二對角線相交於 O, 過 O 作一線垂直於其相對之二邊，卽分原形爲等積之二部分。

參看第 228 頁習題 2.



習題 8

習題 8. 過平行四邊形之一頂點，求作二直線分原形爲三等分。

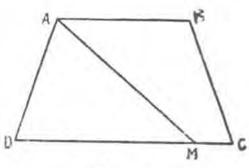
［作圖］ 在 BC 上截 $BE=\frac{2}{3}BC$. 連 AE.

又在 DC 上截 $DF=\frac{2}{3}DC$. 連 AF. 則 $\square ABCD$ 卽由 AE 及 AF 分爲等積之三部分。

［證］ 作對角線 AC, 則 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

$$\triangle ABE = \tfrac{2}{3}\triangle ABC = \tfrac{1}{3}\square ABCD \ (362).$$

同理， $\triangle ADF = \frac{1}{3}\square ABCD$. $AECF = \frac{1}{3}\square ABCD$.



習題 9

習題 9. 過梯形之頂點，求作一直線分梯形爲二等分。

［作圖］ 在梯形下底 DC 上截 $DM=\frac{1}{2}(AB+BC)$. 作 DM. 則 ADM 卽爲所求之三角形。

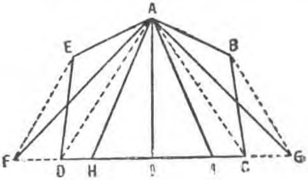
［證］ 三角形與梯形等高，則

$$\text{梯形 } ABCD : \triangle ADM = (AB+CD) : \tfrac{1}{2}(AB+CD) = 2:1.$$

習題 10. 過五邊形之一頂點，求作數直線分原形爲四等分。

［作圖］ 自 A 作對角線 AD 及 AC. 自 E 作 $EF \mathbin{/\!\!/} AD$ 且遇 CD 之延長線於 F. 又自 B 作 $BG \mathbin{/\!\!/} AC$, 且遇 DC 之延長線於 G. 平分 FG

爲四等分,其分點爲 $H, I,$ 及 J. 連 AF, $AH, AI,$ 及 AJ. 則 $AH, AI,$ 及 AJ 即爲所求之三直線.



習題 10

[證] $\triangle AED = \triangle AFD$ (359), 又 $\triangle ABC = \triangle AGC$.

$\therefore$ 五邊形 $ABCDE = \triangle AFG$.

又 $$\triangle AFH = AEDH, \quad \triangle AJG = ABCJ.$$

$$\therefore \triangle AFH = \triangle AHI = \triangle AIJ = \triangle AJG \ (359) = \tfrac{1}{4}\triangle AFG.$$

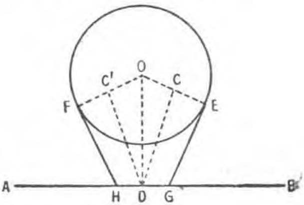
即 $$AEDH = \triangle AHI = \triangle AIJ = ABCJ = \tfrac{1}{4} ABCDE.$$

第 232—233 頁

雜　題

習題 1. 求作一直線與已知直線成 $60°$ 角,且切於一已知圓.

[作圖] 自已知圓之圓心 O 作 OD 垂直於已知直線 AB. 以 D 爲頂點, DO 爲一邊,作 $\angle ODC = 30°$,又 $\angle ODC' = 30°$. 自 O 作垂線垂直於 DC 及 DC', 此二垂線交圓周於 E 及 F. 在 E 作切線 EG, 在 F 作切線 FH. 則 EG 及 FH 皆爲所求之直線.



習題 1

[證] $\angle ODB = 90°$, $\angle ODC = 30°$, $\therefore \angle CDB = 60°$.

$EG \parallel CD$, $\therefore \angle EGB = \angle CDB = 60°$. 又 $\angle OEG = 90°$.

同理, $$\angle FHA = 60°, \quad \angle OFH = 90°.$$

習題 2. 菱形之一邊爲 20, 其較長之一對角線爲 32; 求另一對角線及面積.

[解] 較短之一對角線 $= 2 \times \sqrt{20^2 - 16^2} = 24$.

$\therefore$ 菱形面積 $= \frac{1}{2} \times 24 \times 32 = 384$.

習題 3. 求證矩形四角之平分線圍成一正方形。

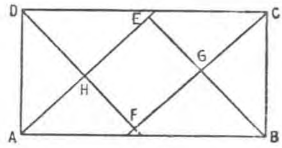
［證］ $\angle DAB+\angle ABC=2\ rt.\ \angle s.$

$\therefore\ \angle EAB+\angle EBA=rt.\angle,$

即 $\angle E=rt.\angle.$

同理， $\angle H=\angle F=\angle G=rt.\angle.$

$\therefore$ $HEGF$ 為一矩形。



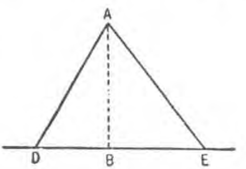
習題 3

$\triangle ABE\cong\triangle DFC\ (a.s.a.).$ 又 $DF=AE,\ DH=AH$ (121).

$\therefore\ HF=HE.$ $\therefore$ $HEGF$ 為一等邊矩形，即正方形。

習題 4. 過已知直線外一定點，求作二直線各與已知直線成 45° 角。

［作圖］ 自已知點 A 作垂線遇已知直線於 B. 在已知直線上自 B 截 $BD=AB$，又截 $BE=AB$. 則 AD 及 AE 即為所求之直線.



習題 4

［證］ $\angle ABD=90^\circ,\ AB=BD,$

$\therefore\ \angle BAD=\angle BDA=45^\circ.$

同理， $\angle AEB=\angle BAE=45^\circ.$

習題 5. 塔影長 120 呎時，高 15 呎之竹竿影長 10 呎；求塔高。

［解］ $15:x=10:120$ (306, 303). $\therefore\ x=180$ 呎.

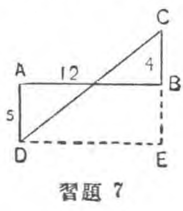
習題 6. 切於二同心圓之圓，其圓心之軌跡為何?

［解］ 軌跡為一圓，且與已知圓同心，其半徑為已知二圓半徑之和之半.

習題 7. 若一人先向北行 5 哩，次向東行 12 哩，再向北行 4 哩，則最後距離出發點幾哩?

［解］ DEC 為一直角三角形， $DE=12,\ CE=9.$

$\therefore\ DC=\sqrt{12^2+9^2}=15$ 哩.



習題 7

習題 8. 在任意直角三角形內，求證延長直角之平分線必過以斜邊為一邊之正方形之中心。

［解］ 參看第 204 頁習題 5.

習題 9. 作一正方形，使其面積等於已知之六邊形.

［解］ 先依 §364 之法變爲三角形，再依 §365 之法作正方形.

習題 10. 一等邊三角形之一邊等於他一等邊三角形之高，求此二三角形面積之比.

［解］ 設大三角形之一邊爲 a, 則 $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ 爲小三角形之一邊（第 189 頁習題 4).

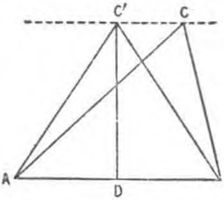
$$\therefore \text{大}\triangle\text{面積}:\text{小}\triangle\text{面積}=a^2:(\tfrac{1}{2}a\sqrt{3})^2=4:3.$$

習題 11. 求圓內諸平行弦中點之軌跡.

［解］ 作一直徑垂直於其一弦，則此直徑必垂直於諸平行弦並平分之. 故此直徑即所求之軌跡.

習題 12. 求於已知三角形之底邊上作一等腰三角形，使與原三角形等積.

［作圖］ 於已知 $\triangle ABC$ 之底邊 AB 之中點 D, 作中垂線 DC'. 過頂點 C 作一直線平行於 AB, 交 DC' 於 C'. 連 $C'A$ 及 $C'B$. 則 $\triangle ABC'$ 卽爲所求之等腰三角形.



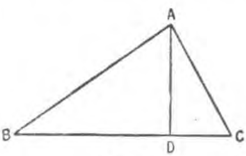
習題 12

習題 13. 求證一角爲 30° 之三角形之面積，等於夾 30° 角二邊之積之四分之一.

［證］ 因 $\angle B=30°$, 故 $AD=\frac{1}{2}(AB)$ (165).

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times BC\times AD$

$\quad=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot\frac{1}{2}\cdot AB=\frac{1}{4}BC\times AB.$



習題 13

習題 14. 過一定點作一直線使與二已知點等距離（有二解).

［作圖］ 設 P 爲已知點, A, B 爲其他之二已知點. (a) 過 P 作一直線與 AB 平行. (b) 作一線過 P 及 AB 之中點.

以上二直線皆與二已知點等距離（圖由學者自作之).

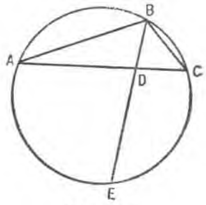
習題 15. 面積爲 $25\sqrt{3}$ 之等邊三角形，求其一邊之長。

［解］ 設等邊三角形之一邊爲 a，則面積 $=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

$$\therefore\ 25\sqrt{3}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.\quad \therefore\ a=\sqrt{4\times 25}=10.$$

習題 16. 分圓上之已知弧爲二部分，使其所對之弦之比等於已知比.

［作圖］ 將已知弧所對之弦 AC 按已知比分之於 D. 設 E 爲優弧 AC 之中點。作 ED，並延長之交已知弧於 B，由是 AB 與 BC 卽爲所求之弦。



習題 16

［證］ BE 爲 $\angle B$ 之平分線。

$\therefore AB:BC=AD:DC=$ 已知比。(301).

習題 17. 二弦在圓內相交，一弦之二線段皆爲 4，他一弦之全長爲 10，求其二線段之長.

［解］ 設他一弦之二線段爲 x 及 $10-x$，則 $x(10-x)=4\times 4$，

卽 $x^2-10x+16=0$.　　$\therefore x=2$ 或 8，又 $10-x=8$ 或 2.

參看第 309 頁例題 3.

習題 18. 屋長 40 呎，寬 30 呎，至天花板之高爲 25 呎，至屋梁之高爲 35 呎；求屋外面之面積。

［解］ $2(30\times 25+40\times 25)+2\times\frac{1}{2}(30\times 10)+2\times 40\times\sqrt{15^2+10^2}$

$=3800+400\sqrt{13}=5242$ 方呎。

習題 19. 求作一正方形使與已知正方形成已知比。

［分析］ 設 a 爲已知正方形之一邊，x 爲所求正方形之一邊，m 及 n 爲成已知比之二直線. 則

$$x^2:a^2=m:n,\ 卽\ x^2=\frac{ma^2}{n},\quad \therefore\ a:x=x:\frac{ma}{n}.$$

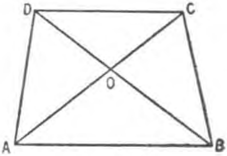
求 a 與 $\frac{ma}{n}$ 之比例中項。因 m 及 n 爲已知二直線，設 $y=\frac{ma}{n}$，則 $n:m=a:y$. 由是依 §296 之法作圖卽可求得 y.

圖由學者自作之.

習題 20. 求證：若四邊形之二對角線互分成等比，則此四邊形爲一

梯形.

[已知] AC 及 BD 爲四邊形之二對角線，相交於 O，且知 $OC:OA=OD:OB$.



習題 20

[求證] $ABCD$ 爲一梯形.

[證] $\triangle DOC \sim \triangle AOB$ (311).

$$\therefore\ \angle DCO=\angle OAB, \qquad \therefore\ DC /\!/ AB.$$

故 $ABCD$ 爲一梯形.

習題 21. 一圓之半徑爲 13 吋，過距圓心 5 吋處一點任作一弦，求此弦二線段之積.

[解] 由 §320 得 $(13-5)\times[26-(13-5)]=144$ 方吋.

習題 22. 一三角形底邊上之高爲 12，底邊爲高所分之二線段爲 9 及 16. 求證此三角形爲一直角三角形.

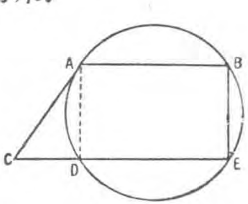
[證] 三角形之一邊爲 $\sqrt{12^2+16^2}=20$，另一邊爲 $\sqrt{12^2+9^2}=15$. 故此三角形之三邊爲 $16+9=25$, 20, 及 15. 因 $25^2=20^2+15^2$，故此三角形爲一直角三角形，而 25 爲其斜邊 (第 190 頁習題 12).

習題 23. 菱形之一邊長 13 米，又一對角線爲 24 米，求面積.

[解] 另一對角線 $=2\sqrt{13^2-12^2}=2\times5=10$ 米.

$$\therefore\ \text{菱形面積}=\tfrac{1}{2}\times10\times24=120 \text{ 方米}.$$

習題 24. AB 爲任意之弦，AC 爲一切線，又平行於 AB 之割線 CDE 截圓於 D 及 E. 求證 $AC:AE=DC:BE$.



習題 24

[證] $\widehat{AD}=\widehat{BE}$ (239).

$\angle C$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{ABE}-\widehat{AD})=\frac{1}{2}\widehat{AB}$ 量之.

$\angle BEA$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{AB}$ 量之. $\therefore\ \angle C=\angle BEA$.

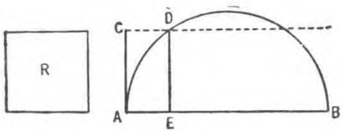
$\angle CDA=\angle B$ (第 133 頁習題 9). $\therefore\ \triangle CDA\sim\triangle BAE$.

$$\therefore\ AC:AE=DC:BE.$$

習題 25. 分一已知直線爲二線段，使其積等於一已知正方形.

［已知］ 一直線 AB 及一正方形 R.

［求］ 分 AB 爲二線段,其積等於 R.



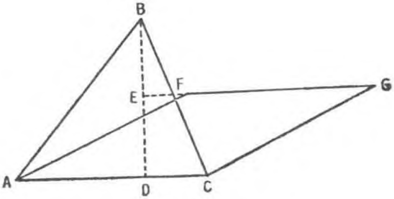
習題 25

［作圖］ 以 AB 爲直徑作一半圓. 於 A 立一垂線 CA, 其長等於 R 之一邊. 自 C 作一直線平行於 AB, 遇半圓於 D. 自 D 作垂線 $DE\perp AB$. 則 AE 與 BE 卽爲所求之二線段.

［證］ $AE:DE=DE:EB$ (326), 卽 $AE\times EB=\overline{DE}^2=R$.

習題 26. 在三角形之一邊上作一菱形,使與此三角形等積.

［作圖］ 以 $\triangle ABC$ 之底邊 AC 爲所求菱形之一邊. 作三角形之高 BD. 平分 BD 於 E. 過 E 作 $EF\perp BD$. 以 A 爲圓心, AC 爲半徑作圓,交 EF 於 F. 延長 EF 至 G, 使 $FG=AC$. 連 CG. 則 $ACGF$ 卽爲所求之菱形.



習題 26

［證］ $ACGF$ 爲一菱形,故各邊平行.

$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}BD\times AC=ED\times AC=ACGF.$$

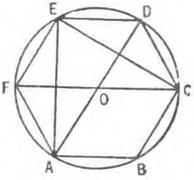
第　五　編

正多邊形及圓之度量

第 237 頁

§ 392

習題 1. 若 $ABCDEF$ 爲一正六邊形,則
$\angle ADC = \angle AEC = \angle AFC$.



習題 1

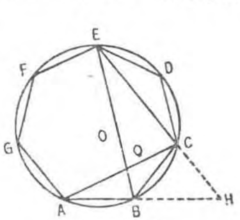
［已知］ $ABCDEF$ 爲一正六邊形.

［求證］ $\angle ADC = \angle AEC = \angle AFC$.

［證］ $ABCDEF$ 旣爲一正六邊形,則必可作一外接圓,通過 A, B, C, D, E, F 各點 (386).

$\therefore \angle ADC = \angle AEC = \angle AFC = 60^\circ$ (均以弧 ABC 之半量之).

習題 2. 若正多邊形 $ABCDEFG$ 之二對角線 AC 與 BE 相交於 Q, 則 $AQ \times QC = BQ \times QE$.



習題 2, 3

［證］ 求得 A, B, C 三點之外接圓心 O, 則圓 O 必通過 A, B, C, D, E, F, G 等點. 由是對角線 AC 與 BE 爲圓內之相交二弦. 故

$AQ \times QC = BQ \times QE$ (320).

習題 3. 若延長正七邊形 $ABCDEFG$ 之一邊 AB 及一對角線 EC, 使相交於 H, 則 $HB \times HA = HC \times HE$.

［證］ 同前題,通過 A, B, C, 之外接圓亦必通過 D, E, F, 及 G. 故 HBA 與 HCE 爲圓之二割線. $\therefore HB \times HA = HC \times HE$ (322).

習題 4. 任一正多邊形之中心角爲此多邊形一角之補角.

[證] 用第 237 頁之圖.延長 AB 至 L, 則 $\angle CBL$ 爲多邊形之一外角. 此角等於一直角之 $\frac{4}{n}$ (159). 但 $\angle AOB$ 等於一直角之 $\frac{4}{n}$ (392).

$$\therefore \quad \angle AOB = \angle CBL.$$

但 $\angle ABC$ 爲 $\angle CBL$ 之補角,故 $\angle AOB$ 爲 $\angle ABC$ 之補角.

習題 5. 若三角形之外接圓及內切圓同心,則此形爲正三角形.

[證] 若三角形之內切圓與外接圓同心, 則三角形之三邊即內切圓之三切線與圓心距離相等,故三邊相等 (197), 而爲一正多邊形 (385). 圖略.

習題 6. 若多邊形之外接圓與內切圓同心,則此形爲正多邊形.

[證] 同習題 5. 多邊形之諸邊皆相等 (197), 又其諸角亦皆相等(因所對之弧相等),故此多邊形爲正多邊形.

習題 7. 正三角形之中心角爲幾度?正八邊形者幾度?正六邊形者幾度?

[解] 正三角形之中心角爲 $\frac{1}{3}\, 4rt. \angle s = 120°$.

正八邊形之中心角爲 $\frac{1}{8}\, 4rt. \angle s = 45°$.

正六邊形之中心角爲 $\frac{1}{6}\, 4rt. \angle s = 60°$.

習題 8. 求每邊 6 吋之正六邊形之邊心距.

[解] 邊心距=等邊三角形之高$=\frac{6}{2}\sqrt{3}=5{\cdot}2$ 吋.

第 239 頁 §396

習題 1. 作圓之外切正方形.

[作圖] 分圓周爲四等弧,在四分點各作圓之切線,即得一外切正方形.

習題 2. 作已知圓之外切正八邊形.

[作圖] 分圓周爲八等弧,在八分點各作圓之切線即得.

習題 3. 已知一邊,求作一正八邊形.

［作圖］ 在已知邊 AB 上作 $\angle BAC=135°$, 再作 $\angle ABD=135°$. 平分 $\angle BAC$ 及 $\angle ABD$, 使二平分線相交於 O. 則 O 即爲外接圓之圓心. 於是於外接圓周上以 AB 之長截取八等弧, 連結各分點, 卽得所求之正八邊形. 圖由學者自作之.

習題 4. 若半徑爲 r, 求正方形之面積.

［解］ 半徑爲 r, 則正方形之二對角線皆爲 $2r$.

$\therefore$ 正方形面積 $=\frac{1}{2}\times 2r\times 2r=2r^2$ (第 228 頁習題 13).

第 241 頁　§ 401

習題 1. 若圓之半徑爲 R, 則內接正六邊形之邊心距等於 $\frac{R}{2}\sqrt{3}$.

［證］ 自圓心至正六邊形之各頂點以直線連結之, 每一直線卽爲圓之半徑. 於是分正六邊形爲六個等邊三角形. 每一三角形之高爲六邊形之邊心距.

$\therefore$ 三角形之高 = 六邊形之邊心距 $=\frac{R}{2}\sqrt{3}$ (第 189 頁習題 4).

習題 2. 求於已知圓外作一外切正六邊形.

［作圖］ 分已知圓周爲六等弧, 在六分點作六切線卽得.

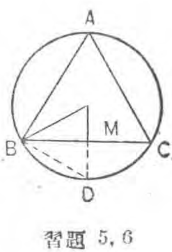
習題 3. 已知一邊, 求作一正十二邊形.

［作圖］ 於已知邊 AB 上作 $\angle ABC=150°$, 又作 $\angle BAF=150°$. 將此二角平分之, 使其平分線相交於 O. 於是以 O 爲圓心取 OA 爲半徑作一外接圓. 再以 AB 之長截圓弧爲 12 等分, 連結各分點, 卽得所求之正十二邊形.

習題 4. 若半徑等於 R, 求正六邊形之面積.

［解］ 正六邊形由 6 等邊三角形組成, 其邊皆爲 R.

$\therefore$ 面積 $=6\times\frac{1}{4}R^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$.



習題 5, 6

習題 5. 等邊三角形之邊心距等於半徑之二分之一.

［證］ OM 爲邊心距, $\triangle BOD$ 爲一等邊三角形.

$$\triangle BOM \cong \triangle BDM \text{ (一斜邊一銳角相等).}$$

$$\therefore\ BC \text{ 平分 } OD. \qquad \therefore\ OM = MD = \tfrac{1}{2}OD = \tfrac{1}{2}R.$$

習題 6. 圓之內接等邊三角形之面積等於內接正六邊形面積之半.

[證] 等邊 $\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{4}\overline{BC}^2\sqrt{3}=\dfrac{1}{4}(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}$ (401)

$$=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}.$$

正六邊形面積＝等邊△面積之二倍.

[別證] 六邊形面積 $=6\triangle BOD=12\triangle BOM=2\times 6\triangle BOM$

$=2$ 等邊 △.

習題 7. 在等圓內之二內接三角形面積之比等於其三邊之積之比.

[證] 由 § 343 得圓之直徑 $d=\dfrac{ab}{h_c}=\dfrac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$

但　　三角形之面積 $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

$$\therefore\ d=\frac{abc}{2A}, \text{ 或 } A=\frac{abc}{2d}=\frac{abc}{4R}.$$

$$\therefore\ A : A' = \frac{abc}{4R} : \frac{a'b'c'}{4R} = abc : a'b'c'.$$

習題 8. 在圓之直徑上所作正方形等於內接正方形面積之二倍.

[證] 在直徑上之正方形 $=d^2$. 內接正方形 $=\dfrac{d^2}{2}$ (第 228 頁習題 13). 故直徑上之正方形二倍於內接正方形之面積.

第 244 頁 　§ 406

習題 1. 若 R 為圓之半徑，則內接正十邊形之一邊為 $\dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$.

[證] 簡化自命題 VII 分析所得之 x 值，以 R 代 a，則

$$x=\sqrt{R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{R}{2}=\sqrt{\frac{5R^2}{4}}-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}\sqrt{5}-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

習題 2. 作一 36° 之角.

［作圖］ 依 §404 之法作內接正十邊形之一邊，此十邊形之每一圓心角卽等於 36°. 圖從略.

習題 3. 已知一邊，求作一正十邊形.

［作圖］ 在已知邊 AB 上作一等腰三角形，其頂角 O 爲 36°. 以 O 爲圓心，OA 爲半徑作一圓. 依弦 AB 之長於圓周上繼續截取九弦，卽得所求之正十邊形. 圖由學者自作之.

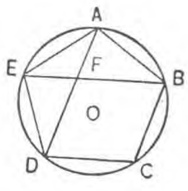
習題 4. 求分一直角爲五等分.

［解］ 因 $\frac{1}{5}\times 90°=18°=\frac{1}{2}36°$，故可依習題 2 先作一 36° 角，而後再平分之，卽得 18° 之角.

習題 5. 正五邊形之對角線相等.

［證］ 諸對角線所對之劣弧皆相等，故對角線咸相等.

習題 6. 正五邊形之對角線互分爲中末比.



習題 6

［證］ $EA=ED$, $\angle EDA=\angle AEF$ (232).

$\triangle EDA\sim\triangle EAF$ (305).

$\therefore DA:EA=EA:AF$，或 $DA:DE=DE:AF$.

$\angle DEB=\angle DFE$ (232, 236)，又 $DF=DE$ (121).

$\therefore DA:DF=DF:FA$ (公理 12).

習題 7. 內接正六邊形之面積爲內接及外切等邊三角形面積之比例中項.

［證］ 內接三角形之面積等於內接正六邊形面積之半（第 241 頁習題 6).

內接 △ 邊心距：外切三角形邊心距 $=1:2$（第 241 頁習題 5).

$\therefore$ 內接 △ 面積：外切 △ 面積 $=1^2:2^2=1:4$.

但　　內接 △ 面積：內接六邊形面積 $=1:2$.

$\therefore$ 內接△面積：內接六邊形面積 = 內接六邊形面積：外切△面積.

習題 8. 正多邊形之任一半徑必平分多邊形之一角.

［證］ 用第 235 頁命題 II 之圖.

$$\triangle ODC \cong \triangle OCB\ (s.\,s.\,s.). \qquad \therefore\ \angle 4=\angle 3.$$

習題 9. 自正十邊形一頂點作諸對角線，分其角爲八等分.

［證］ 用第 243 頁命題 VIII 之圖.

設自 A 作對角線 $AE, AF, AG,\cdots\cdots$ 共可作七直線，分 $\angle A$ 爲八分. 每一分所對之弧 $DE, EF, FG,\cdots\cdots$ 皆相等，故八角相等 (232).

習題 10. 已知一邊，求作一正五邊形.

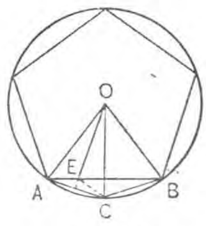
［作圖］ 以已知邊 AB 爲底作一等腰三角形 AOB，使 $\angle O=72°$ 即 $2\times 36°$. 次以 O 爲圓心，OA 爲半徑作一圓. 再以 AB 之長於圓周上截取三點，連之卽得一正五邊形. 圖由學者自作之.

習題 11. 說明作一 3° 角之作法.

［解］ 依習題 2 之法作一 36° 角，再作一 60° 角. 則

$$\tfrac{1}{4}\times 36°=9°, \qquad \tfrac{1}{4}\times 60°=15°. \qquad \therefore\ 3°=\tfrac{1}{2}(15°-9°).$$

習題 12. 求證：內接正五邊形一邊上之正方形，等於半徑上之正方形與內接正十邊形一邊上之正方形之和.



習題 12

［證］ AB 及 AC 各爲五邊形及十邊形之一邊，而 $OE\perp AC$. $\angle AOB=72°$, $\angle COE=18°$, $\angle COB=36°$, $\angle BOE=54°$, $\angle OAB=\angle OBA=54°$.

$\therefore\ \triangle AOB\sim\triangle BOE$. $\therefore\ AB:OB=OB:EB$，卽 $\overline{OB}^2=AB\times EB$. $\angle CAB=\angle CBA$，又

$$\angle CAE=\angle ECA. \qquad \therefore\ \triangle ABC\sim\triangle AEC.$$

$$\therefore\ AB:AC=AC:AE,\ \text{卽}\ \overline{AC}^2=AB\times AE.$$

由是 $$\overline{OB}^2+\overline{AC}^2=AB(AE+EB)=\overline{AB}^2.$$

習題 13. 用外接圓半徑 (R) 求內接正五邊形之一邊.

［解］ 由習題 1 及習題 12 得內接正五邊形之一邊 s 爲

$$s^2=R^2+\left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2=R^2+\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)R^2=\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}).$$

卽 $$s=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

習題 14. 若正五邊形之一邊等於 4 吋，求其面積。

［**解**］ 由習題 13，得 $R=\dfrac{2s}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

故 $$\text{邊心距}=\sqrt{R^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2}=\frac{s}{2}\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

$$\therefore\ \text{正五邊形面積}=5\times\frac{1}{2}s\times\frac{s}{2}\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}=1.7205s^2$$
$$=1.7205\times16=27.5\ \text{方吋}.$$

習題 15. 已知正十邊形之一邊為 4″，求其面積。

［**解**］ 由習題 1，得 $R=\dfrac{2s}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{s}{2}(\sqrt{5}+1)$.

$$\text{邊心距}=\sqrt{R^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2}=\frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

$$\therefore\ \text{面積}=10\times\frac{1}{2}s\times\frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}=7.694s^2=7.694\times16=123.1\ \text{方吋}.$$

第 245 頁　§ 407

習題 1. 作一正六邊形使等於一已知正六邊形面積之半。

［**分析**］ 設 s 為已知正六邊形之一邊，又 x 為所求正六邊形之一邊。

則 $$s^2:x^2=2:1,\ \text{卽}\ s^2=2x^2,\ \text{或}\ s:x=x:\frac{s}{2}.$$

故 x 為已知正六邊形之一邊與其半邊之比例中項。

學者卽可依 §327 之法作圖求 x，再以 x 為一邊作一六邊形。

習題 2. 作一正五邊形使等於已知二正五邊形面積之和。

［**作圖**］ 以已知二正五邊形之各一邊為直角邊，作一直角三角形，則在斜邊上所作之正五邊形，其面積卽為二已知正五邊形之和。

第 248 頁 § 412

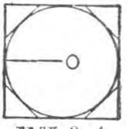
習題 1. 若 n 無限增加時,分數 $\frac{1}{n}$ 之極限為何?

〔解〕 若 n 無限增加,則 $\frac{1}{n}$ 以 0 為極限.

習題 2. $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$, 其和之極限為何?

〔解〕 極限為 4.

習題 3. n 邊之外切正多邊形,假設 n 為 4, 8, 16,⋯⋯ 以至無限時,則多邊形面積之極限為何?


習題 3, 4

〔解〕 若外切正多邊形邊數增至無限,則面積之極限為圓之面積.

習題 4. n 邊之外切正多邊形,假若 n 為 4, 8, 16,⋯⋯ 以至無限時,則多邊形之周之極限為何?

〔解〕 若外切正多邊形邊數增至無限,則其周以圓周為極限.

習題 5. 若內接正多邊形之邊數無限增加時,則 (a) 邊心距之極限為何? (b) 邊之極限為何?

〔解〕 (a) 若正多邊形之邊數無限增加,則邊心距之極限為圓之半徑.

(b) 又邊之極限為零.

習題 6. 若外切正多邊形之邊數無限增加時,則半徑之極限為何?

〔解〕 外切正多邊形之邊數無限增加,其半徑之極限為內接圓之半徑.

第 249 頁 § 420

習題 1. 求證第 415 節之定理 (B), (C), (D) 及 (E).

〔證〕 (B) $(a-x)\to 0$, $\frac{1}{n}(a-x)\to 0$, $\frac{1}{n}a-\frac{1}{n}x\to 0$, $\therefore \frac{1}{n}x\to\frac{1}{n}a$.

(C) $(a-x)\to 0$, $(b-y)\to 0$, $\therefore (a+b)-(x+y)\to 0$,

又　　$(a-b)-(x-y)\to 0.$　　$\therefore\ (x\pm y)\to(a\pm b).$

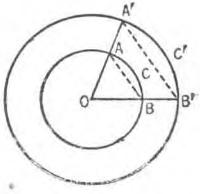
(D)　$(a-x)\to 0,\ (b-y)\to 0.$　$\dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{y}=\dfrac{ay-bx}{by}=\dfrac{a(y-b)-b(x-a)}{by},$

即　$a(y-b)\to 0$, 又 $b(x-a)\to 0.$　$\therefore\ \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{y}\right)\to 0$, 又 $\dfrac{x}{y}\to\dfrac{a}{b}.$

(E)　$xy-ab=x(y-b)+b(x-a).$　因 $(y-b)\to 0,\ (x-a)\to 0.$

$\therefore\ x(y-b)\to 0$ 又 $b(x-a)\to 0.$　$\therefore\ (xy-ab)\to 0$ 或 $xy\to ab.$

習題 2.　求證二相似弧之長之比如其半徑之比.



習題 2, 3

［已知］　弧 AB 與弧 $A'B'$ 相似, 所對之圓心角爲 $a°$; 二圓之半徑爲 R 及 R'.

［求證］　　$\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=R:R'.$

［證］　連 AB 及 $A'B'$, 則 $\triangle AOB\sim\triangle A'OB'.$

$\therefore$ 弦 AB : 弦 $A'B'=OA:OA'=R:R'.$

若圓心角 $a°$ 無限減小, 則弧 AB 趨近於弦 AB, 又弧 $A'B'$ 趨近於弦 $A'B'$. 故　$\widehat{AB}:\widehat{A'B'}=R:R'.$

習題 3.　證明二相似弓形面積之比如其半徑之平方比.

［證］　連 AB 及 $A'B'$, 則 $\triangle AOB\sim\triangle A'O'B'.$

$$\therefore\ \triangle AOB:\triangle A'OB'=\overline{OA}^2=\overline{OA'}^2=R^2:R'^2.$$

又　　面積 $OACB$: 面積 $OA'C'B'=R^2:R'^2.$

$$\therefore\ (OACB-\triangle AOB):(OA'C'B'-\triangle A'OB')=R^2:R'^2,$$

即　　弓形 ACB : 弓形 $A'C'B'=R^2:R'^2.$

第 252 頁　　§ 426

習題 1.　求外切於半徑 12″ 圓之正方形面積.

［解］　正方形面積 $=24\times 24=576$ 方吋.

習題 2.　求一邊長 6″ 之正六邊形面積.

［解］　邊心距 $=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}.$

$$6\times(\tfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3})=54\sqrt{3}\ \text{方吋}.$$

第 254 頁 §431

習題 1. 求作一圓，使其圓周等於已知二圓周之和。

[分析] 設 a 及 b 爲二已知圓之半徑，又設 x 爲所求圓之半徑。則

$$2\pi x=2\pi a+2\pi b=2\pi(a+b),\ 即\ x=a+b.$$

[作圖] 以 $a+b$ 爲半徑作一圓，其圓周卽等於已知二圓周之和. 圖極簡易，學者可自作之。

習題 2. 求作一圓，使其面積等於已知二圓面積之和。

[分析] 設 a 及 b 爲二已知圓之半徑，又設 x 爲所求圓之半徑. 則

$$\pi x^2=\pi a^2+\pi b^2=\pi(a^2+b^2).\quad\therefore x^2=a^2+b^2,\ 卽\ x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

[作圖] 依 §368, (8) 之法作圖.

習題 3. 求作一圓，使其圓周等於已知二圓周之差.

[作圖] 參看習題 1, 作 $x=a-x$. 卽以 x 爲半徑作圓.

習題 4. 求作一圓，使其面積等於已知二圓面積之差.

[作圖] 參看習題2,求得$x^2=a^2-b^2$.依§368,(9) 之法作 $x=\sqrt{a^2-b^2}$, 然後再以 x 爲半徑作圓.

習題 5. 求作一圓，使其面積爲一已知圓面積之三倍.

[分析] 設 a 爲已知圓之半徑，x 爲所求圓之半徑. 則

$$\pi x^2=3\pi a^2,\ 卽\ x^2=3a^2.\quad 由是\ 3a:x=x:a.$$

[作圖] 依 §327 之法作圖求 $3a$ 與 a 之比例中項 x. 再以 x 爲半徑作圓卽得.

習題 6. 求作一圓，使圓周等於一已知圓之二倍.

[作圖] 依習題 1, 得 $x=2a$. 故以 $2a$ 爲半徑作一圓卽得.

習題 7. 求作一圓，使其面積等於已知二同心圓間之面積.

[作圖] 所求圓之面積卽爲已知二圓面積之差，故作法與習題 4 同.

習題 8. 求作一圓，使其圓周等於一已知圓之圓周之半.

[作圖] 以 $\frac{1}{2}a$ 爲半徑作一圓卽得.

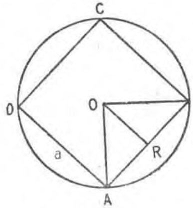
習題 9. 求在正方形內外所作內切圓與外接圓面積之差。

［解］ 設 a 為正方形 $ABCD$ 之一邊，則在 $\triangle OAB$ 內，$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$，即 $2\overline{OA}^2=a^2$.

$\therefore$ 大圓半徑 $=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. 又在 $\triangle OAR$ 內，

$$\overline{OR}^2=\overline{OA}^2-\overline{AR}^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

$$\therefore \text{小圓半徑}=\frac{a}{2}.$$



習題 9

故　　所求面積 $=\pi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{\pi a^2}{4}$.

習題 10. 已知圓面積為 616 方吋，求其半徑。$\left(\pi=\dfrac{22}{7}\right)$

［解］ $\dfrac{22}{7}R^2=616$, $\quad\therefore R^2=\dfrac{7\times 616}{22}=7\times 28=196$.

$$\therefore R=\sqrt{196}=14 \text{ 吋}.$$

習題 11. 求在半徑 7 吋之圓內 32° 扇形之面積。

［解］ 扇形面積 $=\dfrac{32}{360}\times\dfrac{22}{7}\times 7^2=13.7$ 方吋。

第 256—258 頁　§ 435

習題 1. 圓之半徑為 5，求圓周。

［解］ $C=2\pi R=2\times 3.1416\times 5=31.416$.

習題 2. 圓之直徑為 10 吋，求 (a) 60°, (b) 1°, (c) 5° 之弧之長。

［解］ (a) $\dfrac{60}{360}\times 2\times 3.1416\times\dfrac{10}{2}=5.236$ 吋。

(b) $\dfrac{1}{360}\times 2\times 3.1416\times\dfrac{10}{2}=0.087$ 吋。

(c) $\dfrac{5}{360}\times 2\times 3.1416\times\dfrac{10}{2}=0.436$ 吋。

習題 3. 圓之半徑爲 10, 求面積.

[解] 面積 $=\pi R^2=3.1416\times 10^2=314.16.$

習題 4. 圓面積等於 100 方吋,求其半徑.

[解] $100=3.1416\,R^2,\quad \therefore R=\sqrt{\dfrac{100}{3.1416}}=5.7$ 吋.

習題 5. 圓周等於 m 吋,求半徑.

[解] $m=2\pi R,\qquad \therefore R=\dfrac{m}{2\pi}$ 吋.

習題 6. 圓面積等於 $100\,\pi$, 求圓周.

[解] $\pi R^2=100\,\pi,\quad \therefore R=10.\quad C=2\times 3.1416\times 10=62.832.$

習題 7. 圓周爲 4, 求圓之面積.

[解] $2\,\pi R=4,\qquad \therefore R=\dfrac{4}{2\pi}=\dfrac{2}{\pi}.$

$$\text{面積}=\pi R^2=\pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^2=\frac{4}{\pi}=1.27.$$

習題 8. 圓面積爲 S, 求圓周.

[解] $\pi R^2=S,\quad \therefore R=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}.\quad \therefore$ 圓周 $=2\pi R=2\pi\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}=2\sqrt{\pi S}.$

習題 9. 圓周等於 C, 求圓面積.

[解] $2\pi R=C,\quad \therefore R=\dfrac{C}{2\pi}.\quad \therefore$ 面積 $=\pi R^2=\pi\left(\dfrac{C}{2\pi}\right)^2=\dfrac{C^2}{4\pi}.$

習題 10. 若圓面積等於一邊長 6 吋之正方形,求其半徑.

[解] $\pi R^2=6^2,\quad \therefore R=6/\sqrt{3.1416}=3.4$ 吋.

習題 11. 一圓之圓周爲 10, 求面積二倍於此圓之圓周.

[解] $1:2=R^2:R'^2=C^2:C'^2=100:x^2,\quad \therefore x=\sqrt{200}=14.14.$

習題 12. 二同心圓之圓周各爲 30 與 40, 求二圓間之面積.

[解] $R=\dfrac{20}{\pi},\ R'=\dfrac{15}{\pi}.\quad \therefore$ 面積 $=\pi\left(\dfrac{20}{\pi}\right)^2-\pi\left(\dfrac{15}{\pi}\right)^2=\dfrac{175}{\pi}=55.7.$

習題 13. 求面積與每邊爲 5 之等邊三角形相等之半圓。

［解］ $\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{25}{4}\sqrt{3}.\qquad \therefore\ R=\sqrt{\frac{25}{2\pi}\sqrt{3}}=2.6.$

習題 14. 扇形之半徑爲 5，圓心角等於 40°，求其面積。

［解］ $\frac{40}{360}\pi\times 25=8.73.$

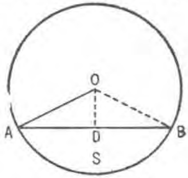
習題 15. 一正方形內接於半徑 10 之圓內，求以正方形一邊爲弦之弓形之面積。

［解］ 內接正方形面積 $=\frac{1}{2}$ 對角線$^2=\frac{1}{2}$ 直徑$^2=\frac{1}{2}\times(2\times 10)^2=200.$

弓形面積 $=\frac{1}{4}$(圓面積－正方形面積) $=\frac{1}{4}(\pi\times 10^2-200)=28.54.$

習題 16. 若圓之半徑爲 4，求弧爲 (*a*) 120°，(*b*) 60°，之弓形之面積。

［解］ 設 S 爲弦 AB 與劣弧所成之弓形，又設 s 爲扇形 OAB. 作 $OD\perp AB$. 則 $S=s-\triangle OAB$.



習題 16

(*a*) $\angle AOB=120°$，則 $\angle AOD=60°$，

$\therefore\ OD=\frac{1}{2}\times 4=2$，又 $AD=2\sqrt{3}$.

$\therefore\ \triangle ABO=\frac{1}{2}OD\times AB=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$

$$s=\frac{1}{3}\pi R^2=\frac{1}{3}\times 16\pi.\qquad S=\frac{1}{3}\times 16\pi-4\sqrt{3}=9.83.$$

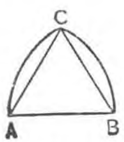
(*b*) $\angle AOB=60°$，$\angle AOD=30°$，　$\therefore\ AD=\frac{1}{2}\times 4=2$，

又
$$OD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$

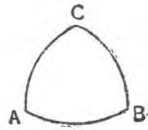
$$\therefore\ \triangle ABO=\frac{1}{2}OD\times AB=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

$$s=\frac{1}{6}\pi R^2=\frac{1}{6}\times 16\pi=\frac{1}{3}\times 8\pi.\quad \therefore\ S=\frac{1}{3}\times 8\pi-4\sqrt{3}=1.45.$$

習題 17. 在右圖內，$AB=BC=CA=4$，B 爲弧 AC 之圓心，又 A 爲弧 BC 之圓心，求全面積。



習題 17



習題 18

［解］ 由習題 16，得

弓形 $AC=\frac{1}{3}8\pi-4\sqrt{3}.$

$$扇形\ ABC=\frac{1}{6}\pi R^2=\frac{1}{6}\pi\times 4^2=\frac{1}{3}\times 8\pi.$$

$$\therefore\ 全面積=\frac{1}{3}8\pi+\frac{1}{3}8\pi-4\sqrt{3}=\frac{1}{3}\times 16\pi-4\sqrt{3}=9.83.$$

習題 18. A 爲弧 BC 之圓心，B 爲弧 AC 之圓心，C 爲弧 AB 之圓心.若 $AB=6$ 吋，求全面積.

［解］ 作弦 AB, BC, CA. 用習題 16 之法，得弓形 $AB=6\pi-9\sqrt{3}$.

$$\therefore\ 所求面積=\triangle ABC+3\ 弓形\ AB=9\sqrt{3}+3(6\pi-9\sqrt{3})$$
$$=18\pi-18\sqrt{3}=25.37\ 吋.$$

習題 19. 一圓之面積爲 60 方呎，求 60° 弧之長.

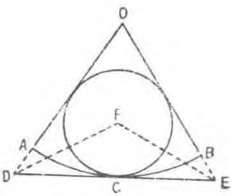
［解］ $\pi R^2=60,\qquad \therefore\ R=\sqrt{\dfrac{60}{\pi}}.$

$$弧\ 60^\circ=\frac{1}{6}\times 2\pi R=\frac{1}{3}\pi R=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{60}{\pi}}=4.58\ 呎.$$

習題 20. 在已知扇形內作一內切圓.

［作圖］ 於已知扇形 OAB 之弧 AB 之中點 C, 作一切線，使與 OA 之延長線相遇於 D, 與 OB 之延長線相遇於 E. 由是成一 $\triangle ODE$.

平分 $\angle D$ 及 $\angle E$, 使二平分線 DF 及 EF 相交於 F. 以 F 爲圓心，FC 爲半徑作一圓內切於三角形 ODE, 卽爲內切於扇形之圓.



習題 20

習題 21. 一圓之半徑爲 20 呎，扇形之面積爲 25π 方呎，求扇形之弧之度數.

［解］ 設弧之度數爲 x, 則扇形 $\dfrac{x}{360}\times\pi\times 20^2=25\pi.\quad \therefore\ x=22^\circ 30'.$

習題 22. 一扇形之面積爲 18π, 扇形之角爲 80°, 求扇形之半徑.

［解］ 扇形面積 $=\dfrac{80}{360}\pi R^2=18\pi,\quad \therefore\ R=\sqrt{\dfrac{18\times 360}{80}}=9.$

習題 23. 等邊三角形之高爲 6 吋，求其外接圓及內切圓之面積.

［解］ $R=\frac{2}{3}h=4$, $r=\frac{1}{3}h=2$ (164).

$\therefore$ 外接圓面積$=\pi\times 4^2=50.27$ 吋.

$\therefore$ 內切圓面積$=\pi\times 2^2=12.57$ 吋.

習題 24. 二圓面積之比爲 $9:4$, 大圓之半徑爲 6 吋,求小圓之圓周.

［解］ $9:4=6^2:r^2$ 或 $3:2=6:r$, $\therefore r=4$.

$\therefore$ 圓周$=8\pi=25.13$ 吋.

習題 25. 一正方形之面積爲 $12\frac{1}{4}$ 方吋,求其內切圓之面積.

［解］ 圓之直徑＝正方形之邊$=\sqrt{12\frac{1}{4}}=3.5$ 吋.

$\therefore$ 圓之面積$=\pi(\frac{1}{2}\times 3.5)^2=3.1416\times 1.75=9.621$ 方吋.

習題 26. 若正六邊形之邊心距爲 4, 求其外接圓之面積.

［解］ 設 x 爲半徑,則 $x^2-(\frac{1}{2}x)^2=4^2$, $\therefore x^2=\frac{1}{3}\times 64$.

$\therefore$ 外接圓面積$=\pi x^2=\frac{1}{3}\times 64\pi=67$.

習題 27. 圍一半圓形地需籬 $41\frac{1}{7}$ 桿,求其地之面積.(設 $\pi=3\frac{1}{7}$.)

［解］ 設圓半徑爲 R, 則 $2R+\pi R=41\frac{1}{7}$, $\therefore R=8$.

$$\therefore \text{面積}=\frac{1}{2}\pi\times 8^2=\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times 64=100.6 \text{ 方桿}.$$

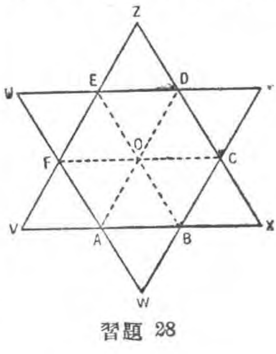
習題 28. 求證:延長正六邊形各邊所成之星狀多邊形,其面積爲原形之二倍.

［證］ 設 $ABCDEF$ 爲一正六邊形, O 爲其中心.連 OB 及 OC, 則 $\triangle OBC\cong\triangle XBC$.

同理, $\triangle OCD\cong\triangle YCD$. 餘類推.

故 多邊形 $UVWXYZ$

$=2$ 正六邊形 $ABCDEF$.



習題 28

習題 29. 若 AB 及 BC 爲切線, $\angle COA$ 爲 $60°$, 又 $OA=10$ 吋.求 (a) $OABC$ 之面積, (b) 弧 AC 與二切線間之面積.

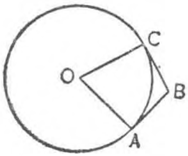
［解］ (a) 設 $AB=x$, 則因 $\angle OBA=60°$, 又 $\angle BOA=30°$.

$\therefore\ OB=2x.$ 由是 $(2x)^2-x^2=10^2,\quad \therefore\ x=\frac{10}{\sqrt{3}}$ 吋.

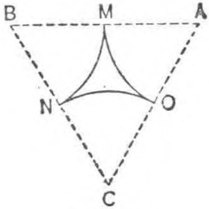
$\therefore$ 面積 $OABC=10\times\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{100\sqrt{3}}{3}=57.7$ 方吋.

(b) 扇形 $OAC=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 10^2=\frac{1}{6}\cdot 100\pi.$

$\therefore$ 所求面積 $=\frac{100}{\sqrt{3}}-\frac{100\pi}{6}=5.4$ 方吋.



習題 29



習題 30

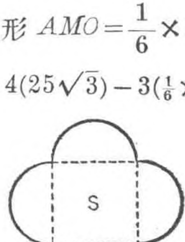
習題 30. 若 MN, NO 及 OM 三弧各等於 $60°$, 其半徑皆爲 10; 求三弧間所包之面積.

［解］ 作 MN, NO, OM. 則

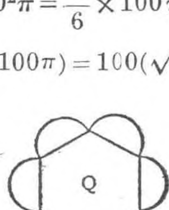
$$\triangle MNO=\triangle AMO=\tfrac{1}{2}\times 10\times 5\sqrt{3}=25\sqrt{3}.$$

$$扇形\ AMO=\frac{1}{6}\times 10^2\pi=\frac{1}{6}\times 100\pi.$$

$\therefore$ 所求面積 $=4(25\sqrt{3})-3(\frac{1}{6}\times 100\pi)=100(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi)=16.1.$



習題 31



習題 32

習題 31. 在邊長 4 吋之正方形之每一邊上, 各作一半圓. 求其全面積.

［解］　面積$=4^2+4(\frac{1}{2}\pi\times 2^2)=16+8\pi=41.4$ 方吋.

習題 32.　在邊長 2 吋之正六邊形之每一邊上,各作一半圓.求其全面積.

［解］　面積$=6\left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)+6\left(\frac{1^2\cdot\pi}{2}\right)=6\sqrt{3}+3\pi=9.8$ 方吋.

習題 33.　若圓周與其面積之數值相等,求此圓之半徑.

［解］　$\pi R^2=2\pi R$, 即 $R=2$.

習題 34.　若扇形之面積等於其半徑之平方,求其圓心角.

［解］　$\frac{n}{360}\pi R^2=R^2$,　$\therefore n=\frac{360}{\pi}=114.6°$.

習題 35.　內接於圓之一正方形,面積為 16 方吋.求圓之面積.

［解］　正方形一邊$=\sqrt{16}=4$ 吋. $(2R)^2=4^2+4^2$,　$\therefore R^2=8$.

$\therefore$ 圓面積$=\pi R^2=64\pi=201.1$ 方吋.

習題 36.　車行一哩,車輪旋轉 500 次,求輪之直徑.

［解］　$500\,\pi d=5280$,　$\therefore d=3.4$ 呎.

第 259 頁

雜　題

習題 1.　求下列正多邊形之半徑,邊心距,及面積:

(a)　邊長等於 4 之正方形,　　(b)　邊長等於 s 之正方形,

(c)　邊長等於 2 之六邊形,　　(d)　邊長等於 s 之六邊形,

(e)　邊長等於 6 之三角形,　　(f)　邊長等於 s 之三角形.

［解］　(a)　半徑 $R=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, 邊心距 $r=2$, 面積 $A=16$.

(b)　$R=\sqrt{(\frac{1}{2}s)^2+(\frac{1}{2}s)^2}=\frac{1}{2}s\sqrt{2}$.　$r=\frac{1}{2}s$,　$A=s^2$.

(c)　$R=2$, $r=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$, $A=6(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3})=6\sqrt{3}$.

(d)　$R=s$, $r=\sqrt{s^2-(\frac{1}{2}s)^2}=\frac{1}{2}s\sqrt{3}$,　$A=6(\frac{1}{2}\times s\times\frac{1}{2}s\sqrt{3})=\frac{3}{2}s^2\sqrt{3}$.

(e)　$R=6\div\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, $r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-9}=\sqrt{3}$, $A=\frac{1}{4}\times 36\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

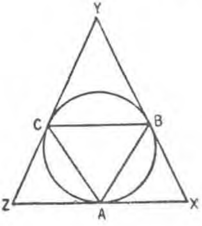
(f) $R=s\div\sqrt{3}=\frac{1}{3}s\sqrt{3}$, $r=\sqrt{(\frac{1}{3}s\sqrt{3})^2-(\frac{1}{2}s)^2}=\frac{1}{6}s\sqrt{3}$, $A=\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$.

習題 2. 圓之外切正三角形之一邊等於內接正三角形一邊之二倍。

［解］ 自內接正三角形各頂點 A, B 及 C 作三切線，成外切正三角形 XYZ. 則 $\angle X=60°$, 又 $AX=BX$, $\therefore \angle XAB=\angle XBA=60°$. 故 $AB=AX$.

同理，$AC=AZ$, 但 $AB=AC$, $\therefore AX=AZ$.

$\therefore ZX=AZ+AX=AC+AB=2AB.$



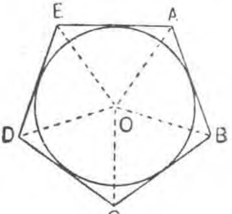
習題 2

習題 3. 圓之內接等邊三角形一邊之平方等於內接正六邊形一邊平方之三倍。

［解］ 設圓之半徑爲 R, 則內接正六邊形之一邊 s_6 即爲 R. 又內接等邊三角形之一邊爲 $s_3=R\sqrt{3}$ (401).

$\therefore \quad s_3{}^2=3R^2=3s_6{}^2.$

習題 4. 外切於圓之等邊多邊形，若邊數爲奇數，則爲正多邊形。



習題 4

［證］ $\triangle OBC\cong\triangle ODC$ (210 及 s.a.s.)

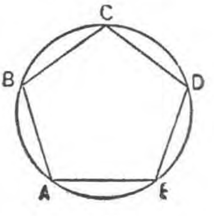
$\angle OBC=\angle ODC=\angle ODE$; 又 $\angle ODE=\angle OAE=\angle OAB=\angle OCD=\angle OED=\angle OEA$. 且

$\angle OEA=\angle OBA. \qquad \therefore \angle A=\angle B=\angle C\cdots\cdots$。

故 $ABCDE$ 爲一正多邊形。

［註］ 若此多邊形之邊數爲偶數，如 $ABCDEF$, 則將 $\angle A=\angle C=\angle E$, 及 $\angle B=\angle D=\angle F$, 但 $\angle A$ 及 $\angle B$ 或不相等。

習題 5. 內接於圓之等角多邊形，若邊數爲奇數，則爲正多邊形。



習題 5

［證］ $\angle A=\angle B$, 又弧 $EAB=$ 弧 ABC (等角以所對弧之 $\frac{1}{2}$ 量之)。

$\therefore$ 弧 $EA=$ 弧 BC (公理 3), $\quad \therefore EA=BC.$

同理，$BC=ED=AB=CD=EA$. $\therefore$ $ABCDE$ 爲正多邊形.

［註］ 若此多邊形之邊數爲偶數，則 $AB=CD=EF$, 又 $EA=BC=DF$. 此多邊形之邊或不全相等.

習題 6. 等邊三角形之面積爲 $36\sqrt{3}$ 單位，求其內切圓之面積.

［解］ 設等邊 $\triangle$ 之一邊爲 b, 內切圓半徑爲 r, 則

$$\tfrac{1}{4}b^2\sqrt{3}=36\sqrt{3}. \qquad \therefore\ b=\sqrt{4\times 36}=12.$$

$$h=\tfrac{1}{2}\times 12\sqrt{3}=6\sqrt{3}=3r, \qquad \therefore\ r=2\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ \text{內切圓面積}=\pi r^2=\pi(2\sqrt{3})^2=12\pi\ \text{單位}.$$

習題 7. 求證：延長正多邊形一邊所得之外角等於多邊形之中心角.

［證］ 用第 237 頁之圖. 延長正多邊形一邊 AB 至 D, 則 $\angle CBD$ 爲 $\angle CBA$ 之補角. $\angle CBA$ 爲 $\angle AOB$ 之補角(第 237 頁習題 4).

$$\therefore\quad \angle AOB=\angle CBD.$$

習題 8. 圓之半徑爲 12 吋，求弦等於半徑之弓形之面積及周.

［解］ 扇形面積 $=\frac{1}{6}\pi\times 12^2$.

弓形面積 $=\frac{1}{6}\pi\times 12^2-\frac{1}{4}\times 12^2\sqrt{3}=24\pi-36\sqrt{3}=13.04$ 方吋.

弓形之周 $=\frac{1}{6}\times 2\pi\times 12+12=4\pi+12=24.57$ 吋.

習題 9. 有每邊 12 吋之等邊三角形洋鐵板一塊，今欲剪爲最大之圓片時，求其剪去之方吋數.

［解］ 依習題 1 代入，得 $r=2\sqrt{3}$. 內切圓面積 $=\pi r^2=12\pi$.

$$\text{正三角形面積}=\tfrac{1}{4}\times 12^2\sqrt{3}=36\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ \text{應行剪去之面積}=36\sqrt{3}-12\pi=24.7\ \text{方吋}.$$

習題 10. 正方形之一邊爲 12. 求外接圓與正方形間所夾之面積.

［解］ 外接圓直徑 $=2r=12\sqrt{2}$, $\therefore\ r=6\sqrt{2}$.

圓面積 $=\pi(6\sqrt{2})^2=72\pi$. 又正方形面積 $=12^2=144$.

$$\therefore\quad \text{所求面積}=72\pi-144=82.2\ \text{方吋}.$$

習題 11. 一村有儲水塔二座，高俱爲 50 呎，其一直徑 10 呎，另一直徑 16 呎. 今合併二水塔，改建一等高且等容積之水塔，求新塔之直徑.

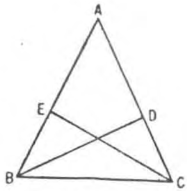
〔解〕 已知半徑，一為 5 呎，一為 8 呎。新塔之截面積等於二塔面積之和。 $\therefore \pi r^2=\pi\times 5^2+\pi\times 8^2$, 即 $r^2=25+64=89$.

$$\therefore r=\sqrt{89}. \qquad \therefore d=2r=2\sqrt{89}=18.9 \text{ 呎}.$$

第 260—262 頁

總複習題

習題 1. 求證等腰三角形二腰上之中線相等.



習題 1

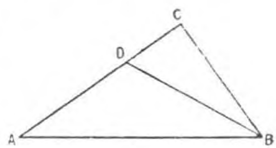
〔已知〕 一等腰 $\triangle ABC$, 底為 BC, 又二中線為 BD 及 CE.

〔求證〕 $BD=CE$.

〔證〕 $AB=AC$, 則 $BE=CD$ (公理 8). 又 $BC=BC$, $\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle BCD$ (s. a. s.), $\quad \therefore BD=CE$.

習題 2. 三角形 ABC 有一直角在 C, 而 D 三等分 AC, 使 $AD=2DC$. 已知 $AD=BD$, 求 $\angle A$ 之大小.

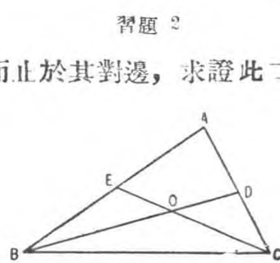


習題 2

〔解〕 $\triangle BDC$ 為一直角三角形, $BD=AD=2DC$, 故 $\angle DBC=30^\circ$ (165 之逆定理), $\angle CDB=60^\circ=\angle A+\angle DBA$.

但 $\angle DBA=\angle A$, $\therefore 2\angle A=60^\circ$, 即 $\angle A=30^\circ$.

習題 3. 自三角形一邊之兩端各作一直線而止於其對邊，求證此二直線不能互相平分.



習題 3

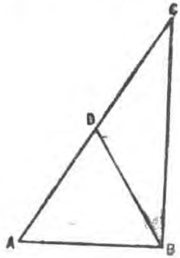
〔已知〕 BD 及 CE 為 $\triangle ABC$ 底邊 BC 兩端作至 AC 與 AB 之直線，而相交於 O.

〔求證〕 BD 與 CE 不能互相平分.

〔證〕 設 BD 與 CE 互相平分，則連結 DE 後，$BCDE$ 將為一平行四邊形 (第 80 頁習題 1).

此事爲不可能，因 BE 不平行於 CD. 故 BD 與 CE 不能互相平分。

習題 4. 求分一直角三角形爲二等腰三角形。



習題 4

［已知］ ABC 爲一直角三角形，B 爲直角。

［求］ 分 $\triangle ABC$ 爲二個等腰三角形。

［作圖］ 作 $\angle CBD=\angle C$, 使 DB 遇 AC 於 D.

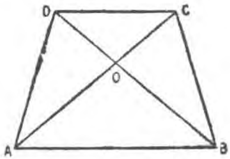
由是 $\angle ABD=\angle A$. $\therefore \triangle BCD$ 及 $\triangle BAD$ 各爲一等腰三角形。

習題 5. 在一正 15 邊形內，求 (1) 每一內角之度數，(2) 每一外角之度數。

［解］ (1) $\dfrac{n-2}{n}=\dfrac{15-2}{15}=\dfrac{13}{15}$ 平角 $=156°$.

(2) $360°\div 15=24°$.

習題 6. 一四邊形之對角線相等，且有一雙對邊相等，求證由對角線所分成之四個三角形中，有二個爲等腰。



習題 6

［已知］ $ABCD$ 爲一四邊形，其邊 $AD=BC$ 又對角線 $AC=DB$.

［求證］ $\triangle AOB$ 及 $\triangle COD$ 皆爲等腰三角形。

［證］ 在 $\triangle ABC$ 及 ABD 內，AB 公用，

$$AD=BC,\quad AC=BD.$$

$$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ABD. \text{ 同理，} \triangle ADC\cong\triangle ADB.$$

$\therefore \angle DAB=\angle ABC$, 又 $\angle DAC=\angle DBC$. 因此 $\angle CAB=\angle DBA$.

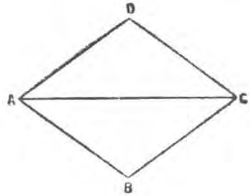
設 O 爲二對角線之交點，則 $OA=OB$, 而 $\triangle OAB$ 爲等腰三角形。

同樣可證 $\triangle DOC$ 亦爲一等腰三角形。

習題 7. 梯形之中線平分二對角線。

［證］ 用第 85 頁習題 3 之圖。$MN /\!/ AB$ 而 M 爲 AD 之中點，故 S 亦必爲 BD 之中點 (159). 同理可證 MN 亦平分對角線 AC.

習題 8. 若 $\square$ 之一對角線平分一角，則此 $\square$ 爲菱形。



習題 8

［已知］ 平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 AC 平分 $\angle A$.

［求證］ $ABCD$ 爲一菱形.

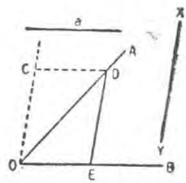
［證］ $\angle CAB=\angle CAD$, 又 $\angle CAB=\angle DCA$ 及 $\angle BCA=\angle CAD$ (內錯角相等).

$\therefore \angle CAB=\angle BCA$, 因而 $AB=BC$.

同樣得證 $AD=DC$.

但 $DC=AB$ 又 $AD=BC$. 故 $ABCD$ 爲一等邊形,卽菱形.

習題 9. 求作一直線,兩端止於一已知角之二邊,使其長等於一已知直線,且與另一已知直線平行.



習題 9

［已知］ 一角 AOB, 一已知直線 a, 及另一直線 XY.

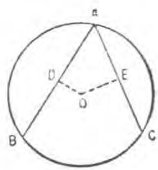
［求］ 作一直線,其兩端止於 OA 及 OB, 且其長等於 a, 並與 XY 平行.

［作圖］ 自 O 作 $OC /\!/ XY$, 且其長 $=a$. 自 C 作 $CD /\!/ OB$, 且遇 OA 於 D. 再自 D 作 $DE /\!/ CO$. 則 DE 卽爲所求之直線.

［證］ $CDEO$ 爲一平行四邊形. 故 $DE /\!/ CO /\!/ XY$. 又 $DE=CO=a$.

習題 10. 求作一圓與一已知圓同心,且切於已知圓內之一已知弦.

［解］ 自圓心作直線垂直於已知弦. 則此垂線卽爲所求圓之半徑.(此圖極簡易,學者可自作之.)



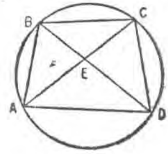
習題 11

習題 11. 一 60° 角之二邊恆過二定點,其頂點之軌跡爲何?

［解］ 自 $\angle A$ 之二邊 AB 及 AC 各作中垂線 DO 及 EO, 使二線相交於 O. 以 O 爲圓心, OA 爲半徑作一圓. 則弧 BAC 卽爲所求之軌跡.

習題 12. 內接四邊形之連續三邊各對 70°, 85° 及 98° 之弧,求四邊形之各角,二對角線間之一角,及延長對邊相交所成之角.

［解］ 弦 AB 所對之弧為 $70°$, 弦 BC 所對之弧為 $85°$, 弦 CD 所對之弧為 $98°$, 則弧 $AD=360°-(70°+85°+98°)=107°$.



習題 12

故 $\angle A=\frac{1}{2}(85°+98°)=91.5°$,

$\angle B=\frac{1}{2}(98°+107°)=102.5°$,

$\angle C=\frac{1}{2}(70°+107°)=88.5°$,

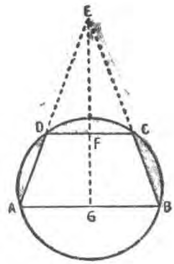
$\angle D=\frac{1}{2}(70°+85°)=77.5°$.

又對角線所成之角 $\angle AED=\angle BEC=\frac{1}{2}(107°+85°)=96°$,

$\angle AEB=\angle CED=\frac{1}{2}(70°+98°)=84°$.

又延長 AB 與 DC 之交角 $=\frac{1}{2}(107°-85°)=11°$.

延長 CB 與 DA 之交角 $=\frac{1}{2}(98°-70°)=14°$.



習題 13

習題 13. 求證一梯形內接於圓，若延長其不平行之二邊必相交於平行二邊之中垂線上.

［已知］ $ABCD$ 為一內接梯形, $AB /\!\!/ DC$, 又 $AB>DC$. AD 與 BC 之延長線相交於 E.

［求證］ E 在 AB 與 CD 之中垂線上.

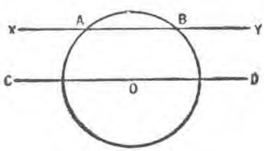
［證］ $ABCD$ 為一內接梯形 (第 133 頁習題 7).

$\angle A=\angle B$ (232). $\angle ADC=\angle BCD$ (232). $\therefore \angle CDE=\angle DCE$ (49).

$\therefore \triangle ABE$ 與 $\triangle DCE$ 皆為等腰三角形 (121).

故 $\angle E$ 之平分線必與 AB 及 CD 之中垂線疊合 (72).

習題 14. 半徑為已知，且在已知直線上截取定長之圓，其圓心之軌跡為何?



習題 14

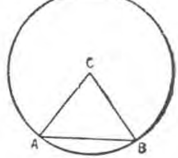
［已知］ 圓 O 之半徑，並截已知直線 XY 得線段 AB 等於定長.

［求］ 圓 O 之軌跡.

［作圖］ 通過點 O 作一直線 CD 平行於 XY, 則 CD 即為所求之軌跡 (197).

習題 15. 以直尺與圓規，求在已知直線上作一含 30° 角之弓形。

［解］ 以已知直線 AB 爲一邊，作等邊 $\triangle ABC$. 以 C 爲圓心，CA 爲半徑作一圓. 則弦 AB 與所對之優弧即爲所求之弓形。



習題 15

習題 16. 已知正五邊形之二對角線相交於形內，求其交角之度數.

［解］ 正五邊形一邊所對之弧爲 $\frac{1}{5}360^\circ=72^\circ$.

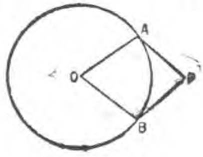
故二對角線間之角 $=\frac{1}{2}(72^\circ+72^\circ)=72^\circ$, 或 $180^\circ-72^\circ=108^\circ$.

習題 17. 過圓內之一點 P, 作一動弦 APB, 交圓於 A 及 B. 求 AB 中點之軌跡.

［解］ 設此圓之圓心爲 O, 則以 OP 爲直徑所作之圓卽所求 AB 中點之軌跡 (第 146 頁習題 2).

習題 18. 求作已知圓之二切線，使成一已知角.

［作圖］ 作半徑 OA 及 OB, 使 $\angle AOB$ 等於已知角之補角. 再於 A 及 B 各作切線，相交於 P. 則 PA 及 PB 卽爲所求之切線.



習題 18

［證］ $\angle O+\angle P+\angle A+\angle B=360^\circ$. 但 $\angle A$ 及 $\angle B$ 皆爲直角，

$$\therefore\quad \angle O+\angle P=180^\circ.$$

故 $\angle P$ 等於已知角.

習題 19. 若二多邊形各與第三多邊形相似，則此二多邊形亦相似.

［證］ 此二多邊形必互相等角 (公理 1). 設 $a, b, c\cdots\cdots$; $a', b', c'\cdots\cdots$; $a'', b'', c''\cdots\cdots$表三多邊形之相應邊. 又設 $a, b, c\cdots\cdots$爲第三形之各邊. 則

$$a:a'=b:b'=c:c'\cdots\cdots(303).$$

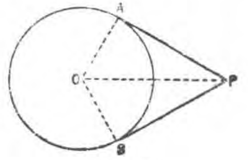
$$a'':a=b'':b=c'':c\cdots\cdots(303).$$

$$\therefore\ a'':a'=b'':b'=c'':c'\cdots\cdots(285,\ 289).$$

故二多邊形之諸相應邊成比例. 因此二多邊形相似 (303).

習題 20. 自圓外一點作圓之二切線，相交成 60° 角. 若切線各長 15

吋，求圓之直徑。



習題 20

［解］ 連 OP. $PA=PB=15$. 作 OA 及 OB,
則 $\triangle PAO$ 爲一直角三角形，

$\angle AOP=60°$, $\angle APO=30°$ (210).

設 $OA=x$, 則 $OP=2x$.

$$\therefore\ (2x)^2-x^2=15^2,\ 即\ 3x^2=225.$$

$$\therefore\ x=5\sqrt{3}.\quad 又直徑=2x=10\sqrt{3}=17.3\ 吋.$$

習題 21. 二弦相交於圓內；一弦之二線段皆爲 6, 另一弦之全長爲 13, 求其二線段之長。

［解］ 設第二弦一線段之長爲 x, 則另一線段爲 $13-x$.

$$x(13-x)=6\times 6.\quad x^2-13x+36=0,\ (x-4)(x-9)=0.$$

$\therefore x=4$ 或 9, 即第二線弦之二線段爲 4 及 9.

習題 22. 一竿長 8 呎，在一長 8 呎寬 6 呎之矩形內可自由移動，求此竿中點移動區域之限界。

［解］ 設此矩形爲 $ABCD$, 又竿之中點爲 P. 而 $PA=4$, $PB=4$, 餘類推.

其邊界爲以 A, B, C, D 爲圓心，而半徑爲 4 呎所作之四弧 (第 97 頁習題 5).

習題 23. 作一等邊三角形，已知其 (1) 內切圓之半徑，(2) 外接圓之半徑。

［作圖］ (1) 自圓心 O 作半徑 OA, OB, 及 OC, 使 $\angle AOB=120°$, $\angle BOC=120°$. 在 A, B, C 三點作此圓之切線，即得一等邊 $\triangle$.

(2) 在此圓內作一內接正六邊形 (397), 再以直線連結其相間之頂點，即得一等邊之三角形。

習題 24. 弓形之弦長 34 吋，圓之半徑爲 60 吋，求弓形之高。

［解］ 用第 255 頁之圖形。

$$OA=60\ 吋,\ AB=34\ 吋,\ 則\ AD=\tfrac{1}{2}AB=17\ 吋.$$

$$\overline{OD}^2=\overline{OA}^2-\overline{AD}^2=60^2-17^2,\text{或}OD=\sqrt{60^2-17^2}=\sqrt{3311}=57.5\text{吋}.$$

$$\therefore\quad DC=60-57.5=2.5\text{ 吋}.$$

習題 25. 直角三角形之斜邊長 10 吋，又一角爲 30°，求短直角邊爲對角之平分線所分二線段之長.

［解］與 30° 相對之短直角邊爲 5 吋. 故他一直角邊當爲 $\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$ 吋. 設以 x 表鄰近長直角邊之線段，則

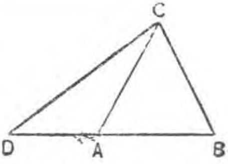
$$x:5-x=5\sqrt{3}:10,\text{ 卽 }x=2.3\text{ 吋，又 }5-x=2.7\text{ 吋}.$$

習題 26. 三角形之高爲 12 呎，分底邊爲 5 呎與 9 呎兩線段，求此三角形之周.

［解］三角形之二腰爲 $\sqrt{12^2+5^2}=13$ 呎及 $\sqrt{12^2+9^2}=15$ 呎.

$$\therefore\ \text{三角形之周}=(5+9)+13+15=42\text{ 呎}.$$

習題 27. 若二等積之三角形有二邊各自相等，求證其夾角相等或互爲補角.



習題 27

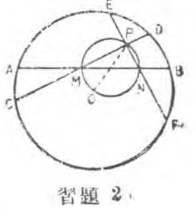
［已知］$\triangle ADC$ 與 $\triangle ABC$ 等積，且 $AC=AC$，$AD=AB$.

［求證］$\angle DAC$ 與 $\angle BAC$ 相等或相補.

［證］若 $\triangle ADC$ 與 $\triangle ABC$ 有二邊及面積彼此相等，且所夾之角皆爲銳角，則二三角形全等，故所夾之角亦等.

若等邊所夾之角有一爲鈍角，則因面積相等，其高亦必相等. 故底邊 AB 與 CD 連成一直線，卽其夾角相補.

習題 28. 自圓上一點作弦爲一已知弦所平分，問何時爲不可能?



習題 2

［作圖］設 AB 爲已知弦，O 爲圓心，P 爲已知點.

以 OP 爲直徑作一圓，交 AB 於 M 及 N. 連結

PM 及 PN, 並引長之,成 CD 及 EF 二弦. 則 CD 及 EF 皆爲所求之弦.(可用 § 190 證之).

若所作之圓不與 AB 相交,則作圖爲不可能.

習題 29. 二圓之半徑爲 7 吋及 2 吋,兩圓心相距 13 吋,求其公切線之長.

［解］ 用第 151 頁習題 6 之圖.得

$$\text{外公切線} = \sqrt{13^2-(7-2)^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12 \text{ 吋}.$$

又由第 151 頁習題 7 之圖.得

$$\text{內公切線} = \sqrt{13^2-(7+2)^2} = \sqrt{13^2-9^2} = \sqrt{88} = 9.4 \text{ 吋}.$$

習題 30. 若一點在一正多邊形內移動,求證自此點至各邊(或各邊之延長線)垂線之和爲一定量.

［證］ 自動點 P 與正多邊形各頂點連結之,則分多邊形爲若干個三角形,如其邊之數,皆以 P 爲頂點. 設以 h_1, h_2, h_3……表各三角形之高,並以 a 表正多邊形之一邊,則

$$\tfrac{1}{2}ah_1+\tfrac{1}{2}ah_2+\tfrac{1}{2}ah_3+\cdots\cdots=\text{多邊形之面積}=\text{常數 } k.$$

$$\therefore\quad h_1+h_2+h_3+\cdots\cdots=\frac{2k}{a}=\text{常數}.$$

習題 31. 梯形之二底爲 29 呎及 37 呎,又其面積爲 247.5 方呎,求其高.

［解］ 梯形面積 $=\frac{1}{2}h(b+b')$, 即 $247.5=\frac{1}{2}h(29+37)$.

$$\therefore\quad h=247.5\times 2\div 66=7.5 \text{ 呎}.$$

習題 32. 三角形之三邊爲 5, 5, 及 6, 求 (1) 面積, (2) 內切圓之面積, (3) 在一邊 5 上之高, (4) 外接圓之直徑.

［解］ (1) $h_6=\sqrt{5^2-3^2}=4$. $\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$.

(2) $\frac{1}{2}r(5+5+6)=12$. $\therefore r=\frac{3}{2}$. $\therefore$ 圓面積 $=\frac{9}{4}\pi$.

(3) $h_5\cdot\frac{5}{2}=12$. $\therefore h_5=4.8$.

(4) 在底邊 6 上之高,當引長時爲一直徑. 命此引長部分爲 x, 則

$4 \cdot x = 3 \times 3$. $\therefore x = \frac{9}{4}$. 故外接圓直徑 $= 4 + \frac{9}{4} = 6\frac{1}{4}$.

習題 33. 等腰直角三角形之斜邊爲 10 吋，問面積三倍於此三角形之一正方形，其一邊之長應爲若干？

［解］ 設三角形之直角邊爲 x，則三角形之面積爲 $\frac{1}{2}x^2$.

又 $x^2 + x^2 = 10^2$，即 $2x^2 = 100$，$x^2 = 50$. $\therefore \frac{1}{2}x^2 = 25$ 方吋.

設 y 爲正方形之一邊，則 $y^2 = 3 \times 25 = 75$，$\therefore y = 5\sqrt{3} = 8.7$ 吋.

習題 34. 作一正方形使等於一已知之不規則六邊形.

［作圖］ 依 §364 之法，先將六邊形變換爲三角形，再依 §365 之法變換其三角形爲正方形即得.

習題 35. 菱形之一對角線爲他一對角線之 $\frac{8}{15}$，又其差爲 14，求此菱形之面積與周.

［解］ 設 d 爲菱形之一對角線，則 $d - \frac{8}{15}d = 14$，

$\therefore d = 30$，又短對角線 $= \frac{8}{15} \times 30 = 16$. $\therefore$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 30 \times 16 = 240$.

又菱形之邊 $= \sqrt{(\frac{1}{2}30)^2 + (\frac{1}{2}10)^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$. $\therefore$ 周 $= 4 \times 17 = 68$.

習題 36. 在面積 275 方呎之圓內，有一面積 150 方呎之矩形，求此矩形各邊之長.

［解］ 圓面積 $= \pi R^2 = 275$，$\therefore R^2 = \frac{7 \times 275}{22} = \frac{175}{2}$，$\therefore$ 直徑$^2 = 350$.

設以 x 及 y 表此矩形之底與高，則 $x^2 + y^2 = 350$，又 $xy = 150$.

於是 $2xy = 300$. 又 $x^2 + y^2 + 2xy = 650$，$x^2 + y^2 - 2xy = 50$.

$\therefore x + y = 25.50$，$x - y = 7.07$. 相加得 $2x = 32.57$，$2y = 18.42$.

$$\therefore x = 16.3 \text{ 呎}, \quad y = 9.2 \text{ 呎}.$$

習題 37. 三角形之底邊爲 20，又高爲 30，求距底邊 10 且平行於底邊之直線，截此三角形所成梯形之面積.

［解］ 此三角形之面積 $= \frac{1}{2} \times 20 \times 30 = 300$. 又小三角形之高爲 20.

$\therefore$ 小△面積：$300 = 20^2 : 30^2$,　$\therefore$ 小△面積 $= 133\frac{1}{3}$.

於是　　梯形面積 $= 300 - 133\frac{1}{3} = 166\frac{2}{3}$ 平方單位.

習題 38. 用何種相等之正多邊形，恰可鋪滿一邊數相同之平面？又可用何種邊數不同之正多邊形配合鋪滿之？

［解］ (*a*) 正方形. 正三角形. 正六邊形.

(*b*) (*a*) 之各形；正三角形及正 12 邊形；正三角形及正八邊形；正三角形，正方形，及正六邊形；正方形及正八邊形；正三角形及正六邊形.

習題 39. 試以正六邊形之一邊 (*a*) 表其面積.

［解］ 正六邊形 $= 6$ 等邊△ $= 6\left(\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot 3a^2\sqrt{3}$.

附　　錄

第 264 頁　　§ 436

用代數分析解問題法

習題 1. 分一矩形之長邊爲二部分，使其平方之差等於此矩形之面積.

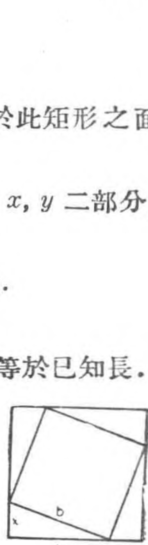
［分析］ 矩形之底邊爲 a, 另一邊爲 b. 又設底邊分爲 x, y 二部分，而 $x>y$. 則 $x+y=a$, 又 $x^2-y^2=ab$.

以前式除後式得 $x-y=b$. $\therefore x=\frac{1}{2}(a+b)$, $y=\frac{1}{2}(a-b)$.

圖由學者自作之.

習題 2. 在已知正方形內，求作一內接正方形，其一邊等於已知長.

［分析］ 設 a 爲已知正方形之一邊，b 爲所求正方形之一邊. 又設 x 爲所求正方形頂點至已知正方形同側頂點之距離. 則



習題 2

$$(a-x)^2+x^2=b^2, \text{ 即 } 2x^2-2ax=b^2-a^2.$$

配方，　$4x^2-4ax+a^2=2b^2-a^2$,

$$\therefore\ 2x-a=\pm\sqrt{2b^2-a^2}.$$

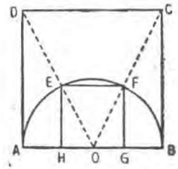
$$\therefore\ x=\tfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{2b^2-a^2})=\tfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{b^2+b^2-a^2}).$$

由第 221 頁，習題 2, 得 $x=\frac{1}{2}(a\pm$ 所得之長$)$.

由上式得有二解，但所求二正方形全同.

圖由學者自作之.

習題 3. 求於半圓內作一內接正方形.



習題 3

［作圖］ 於直徑 AOB 上作一正方形 $ABCD$. 連 OC 及 OD 各與半圓相交於 F 及 E. 則 EF 即爲所求正方形之一邊. 完成正方形 $EFGH$.

［證］ 命半徑 $OA=OE=R$. 則 $AD=DC=2R$.

由是 $\quad OD=\sqrt{(2R)^2+R^2}=R\sqrt{5}$.

$\therefore\ EH:DA=OE:OD$, 即 $EH:2R=R:R\sqrt{5}$, $\quad\therefore\ EH=\dfrac{2R}{\sqrt{5}}$.

又 $EF:DC=OE:OD$, 即 $EF:2R=R:R\sqrt{5}$, $\quad\therefore\ EF=\dfrac{2R}{\sqrt{5}}$.

故 $EH=EF=HG=FG$. $EFGH$ 爲一正方形.

習題 4. 變換一已知正方形爲矩形,使其周二倍於正方形之周.

［分析］ 設 a 爲已知正方形之一邊;又 x, y 爲矩形之二邊.則

$$xy=a^2;\ 又\ 2x+2y=8a,\ 即\ x+y=4a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

平方之,得 $\quad x^2+2xy+y^2=16a^2$, 又 $4xy=4a^2$.

$$\therefore\ x^2-2xy+y^2=16a^2-4a^2=12a^2.\ 或\ x-y=2a\sqrt{3} \cdots\cdots (2)$$

由 (1) 及 (2) 得 $\quad x=2a+a\sqrt{3},\ y=2a-a\sqrt{3}$.

換言之, x 等於以 $2a$ 爲一邊之等邊△之底與高之和, y 等於以 $2a$ 爲一邊之等邊三角形之底與高之差.

圖由學者自作之.

習題 5. 已知二同心圓, 求於大圓內作一弦使等於小圓內所作弦之二倍.

［分析］ 設 R 及 r 爲已知二圓之半徑, 又 x 爲此弦與圓心之距離. 則 $\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{r^2-x^2}$, 即 $R^2-x^2=4r^2-4x^2$, 或 $3x^2=4r^2-R^2$.

$$\therefore\quad x^2=\tfrac{1}{3}(4r^2-R^2)=\tfrac{1}{3}(2r+R)(2r-R).$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{3}(2r+R):x=x:(2r-R).$$

學者可依 §327 之法先求 x, 然後作弦.

習題 6. 在直線 AB 上, 求一點 C, 使 $\overline{AC}^2=3\overline{CB}^2$.

［分析］ 設 $AB=l$, $CB=x$, 則 $AC=l-x$. 又 $(l-x)^2=3x^2$.

$2x^2+2lx=l^2$. 配方, $4x^2+4lx+l^2=3l^2$. $\therefore\ 2x+l=l\sqrt{3}$.

$$\therefore \quad x=\tfrac{1}{2}(l\sqrt{3}-l).$$

習題 7. 求作一正方形，使其面積等於一已知正方形減另一正方形之半之差.

［分析］ 設 a 及 b 各爲已知二正方形之邊，x 爲所求正方形之一邊. 則 $x^2=a^2-\frac{1}{2}b^2$. 命 $y^2=\frac{1}{2}b^2$，則 $b:y=y:\frac{1}{2}b$，又 $x^2=a^2-y^2$.

$$\therefore \quad (a+y):x=x:(a-y).$$

［作圖］ 依 § 327 之法先求得 y，再用同法求得 x 之長作一正方形卽得.

習題 8. 求過圓內之一定點作一弦，使此點適將所求之弦三等分.

［解］ 過圓內之一定點 P 任作一弦，又設 a 及 b 爲 P 所截之二線段，x 及 $2x$ 爲所求弦之二線段，則 $2x^2=ab$.

$\therefore \frac{1}{2}a:x=x:b$. 以 P 爲圓心，x 爲半徑作一圓，與已知圓相交於 A 及 A'.

則 AP 及 AP' 之延長線卽爲所求之二弦.

平面圖形之極大與極小

第 265 頁 § 439

習題 1. 已知底邊及底邊上中線之諸三角形，何者爲極大?

［解］ 以已知中線爲高之等腰三角形爲極大.

習題 2. 已知二對角線之諸平行四邊形，何者之面積爲極大?

［解］ 二對角線互相垂直之平行四邊形(卽菱形)爲極大.

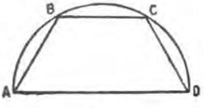
習題 3. 求分一直線爲二等分，使此二線段所含之矩形爲極大.

［解］ 用第 188 頁 § 327 之圖. 設 m 及 n 爲已知，則能使 BD 成極大(卽半徑)者，其積最大.

故每一線段皆等於已知直線之半.

第 268 頁 § 443

習題 1. 在四邊形 $ABCD$ 內，$AB=BC=CD$ =一定直線. 求決定使 $ABCD$ 成爲極大之 A, B, C, D 諸角.



習題 1

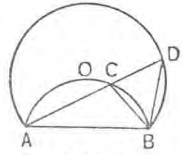
［證］ 極大四邊形內接於半圓而其直徑爲 AD

(443). 故　　　　$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=60°$.

於是　　　$\angle A=60°,\ \angle B=\angle C=120°,\ \angle D=60°$.

習題 2. 求於已知之半圓內作一內接之角,使其二邊之和為極大。

［解］ 設 $\angle ACB$ 為所求之角,連 BC. 又延長 AC 至 D, 使 $CD=CB$. $\angle D=45°$, D 之軌跡乃以圓心為 O 之弧,而 O 為弧 AB 之中點。二邊之和為 $AC+CB$, 設 AD 為極大弦,則 $AC+CB$ 即為極大。 故 AD 過點 O, 故 O 為所求角之頂角。



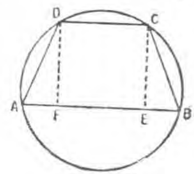
習題 2

此三角形為一等腰直角三角形。

第 269 頁　　　　§ 444

習題 1. 在四邊形 $ABCD$ 內, $AB=2$ 吋, $BC=CD=DA=1$ 吋。問 A, B, C, D 等角各為若干度,方可使 $ABCD$ 之面積為極大?

［解］ 欲使 $ABCD$ 之面積為極大,必須內接於圓(444). 故此四邊形為一等腰梯形。作 $CE\perp AB$ 又 $DF\perp AB$, 則 $FE=DC=1$ 吋,又 $AF=EB=\frac{1}{2}$ 吋。



習題 1

在 $rt.\triangle ADF$ 內, $AD=1$, $AF=\frac{1}{2}$, $\therefore\ \angle A=60°$. 同理, $\angle B=60°$. 又

$$\angle D=\angle C=30°+90°=120°.$$

習題 2. 若五邊形 $ABCDE$ 之面積為極大,求決定其各角,已知 $AB=BC=CD=2$ 吋,又 $DE=EA=2\sqrt{2}$ 吋。

［解］ 作一半徑 2 吋之圓,安置 A', B', C', D', E' 五點,使

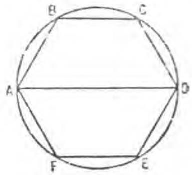
$$\widehat{A'B'}=\widehat{B'C'}=\widehat{C'D'}=60°,\ 又\ \widehat{D'E'}=\widehat{E'A'}=90°.$$

則因 $A'B'C'D'E'$ 內接於圓且其諸邊順次等於已知諸邊,故此五邊形之面積為極大。

$\therefore\ \angle A=105°,\ \angle B=120°,\ \angle C=120°,\ \angle D=105°,\ \angle E=90°$.

第 270 頁　　　　§ 446

習題. 在已知之半圓內,求作一內接梯形,使其面積為極大。



［作圖］ 三等分半圓 $ABCD$. 連結各分點,得一梯形 $ABCD$, 而較長之底邊適爲半圓之直徑.

今於下部之半圓內,作一內接四邊形 $ADEF$, 與前一圖形完全相同.

由是六邊形 $ABCDEF$ 爲一等邊六邊形,且內接於圓,故其面積爲極大. 於是其半 $ABCD$ 內接於半圓,其面積亦爲極大.

第 271 頁　　　§ 448

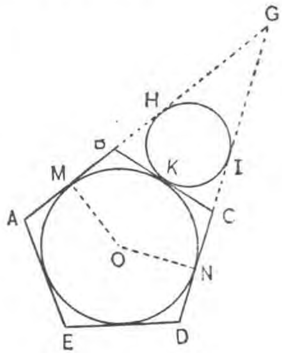
習題 1. 在已知之弓形內,求作一弓形角,使其二邊之和爲極大.

［作圖］ 作法與第 268 頁習題 2 同,其底爲此弓形之弦,又其頂點爲以弓形弧中點之等腰三角形之角頂.

習題 2. 在已知圓內,求作一內接三角形,使其周爲極大.

［解］ 內接三角形之周極大者爲等邊三角形 (446), 因若二邊不等,則在二邊相等時,其周必有增加之故.

習題 3. 外切正多邊形之面積較同邊數之其他任何外切多邊形之面積爲小.



習題 3

［已知］ $ABCDE$ 爲一外切正多邊形.

［求證］ $ABCDE$ 之面積較同邊數之其他外切多邊形爲小.

［證］ 延長 AB 及 DC 使相交於 G. 在 $\triangle GCB$ 內作一內接圓 HIK. 作半徑 OM 及 $ON=R$.

$$\text{面積 } OMBCN=\triangle OMB+\triangle OBK+\triangle OKC+\triangle OCN$$
$$=\tfrac{1}{2}R(MB+BK+KC+CN)$$
$$=\tfrac{1}{2}R(MH+NI)=R\times MH.$$

若 MH 爲極小,則此面積亦爲極小,但欲使 MH 爲極小,則二圓必須相切始可(如圖). 故自公切點 K 與 G 連結,卽可證 $\angle B=\angle C$. 同理,得證 $\angle C=\angle D=\angle E=\cdots\cdots$. 故 $ABCDE$ 爲一正多邊形.

習題 4. 同一底邊之等積平行四邊形,何者之周爲最小?

［解］ 矩形之周最小.

第 274 頁　　§ 456

習題 1. 平行四邊形關於其二對角線之交點爲對稱.

［解］ 由第 33 頁習題 5, 過二對角線交點之任一直線,均爲交點所平分,故平行四邊形關於其二對角線之交點爲對稱.

習題 2. 等腰三角形關於其底邊上之中線爲對稱.

［解］ 設等腰三角形 ABC 底邊 AB 上之中線爲 CD. 若 $\triangle ADC$ 以 CD 爲軸而旋轉之,俟轉至 $\triangle BDC$ 之地位,卽與 $\triangle BDC$ 疊合. 故等腰三角形關於其底邊之中線爲對稱.

習題 3. 若四邊形 $ABCD$ 之 $AB=AD$, 又 $BC=CD$, 則四邊形關於其對角線 AC 爲對稱.

［解］ 因三邊相等,故 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$, 而四邊形關於對角線 AC 爲對稱 (455).

習題 4. 正六邊形關於其中心爲對稱.

［解］ 因任一直線過其圓心至其對邊或對角之頂點者,皆爲此圓心所平分,故正六邊形關於其中心爲對稱.

習題 5. 關於一軸成對稱之二圖形全等.

［解］ 此二圖形就其軸摺疊之,必可使之疊合 (455).

習題 6. 關於一點成對稱之二圖形全等.

［解］ 因就此點將第一圖形旋轉 $180°$, 至第二圖形之位置,卽與之疊合. 故此二圖形全等.

第 275 頁　　§ 458

習題. (a) 0.999……之極限爲何?

［解］ 極限爲 1.

(b) $6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\cdots\cdots$ 至無窮項之極限爲何?

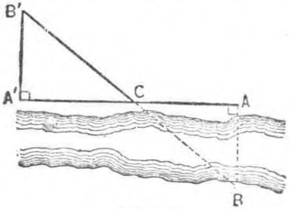
［解］ 極限爲 12.

第 281—300 頁

平面幾何之實用題

第　一　編

1. 欲測一河之寬 AB, 可量與 AB 成直角之 AA', 並於其中點 C 立一木桿.再自 A' 向垂直於 AA' 之方向走至一點 B', 適與 B 及 C 成一直線而止.今欲求河之寬,須量何線?其故何在?

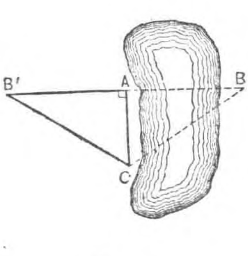


習題 1

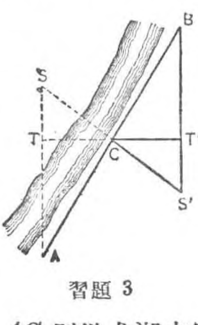
［解］ 須量 $A'B'$. 因 $AC=A'C$, $\angle ACB=\angle A'CB'$, $\angle A=\angle A'=$直角.

故 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C$ $(a.s.a.)$.

$$\therefore\quad A'B'=AB.$$



習題 2



習題 3

2. 若使$\angle ACB=\angle ACB'$及$BB'\perp AC$,則欲求湖之寬度,當量何線?

［解］ 當量 AB'. 因 $\angle ACB=\angle ACB'$, $\angle CAB=\angle CAB'$, $CA=CA$

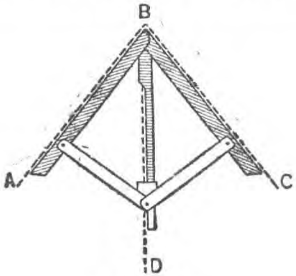
故 $\triangle ABC\cong\triangle AB'C$ $(a.s.a.)$. $\quad\therefore\ AB'=AB$.

3. 欲量河之對岸一樹 T 與一塔 S 之距離,先定一點 A, 使在 ST 之延長線上,取直線 AB, 並於其中點 C 立一木桿.自 B 向 BS' 方向前進,使 $\angle B=\angle A$, 並於 TC 之延長線上之一點 T' 及 SC 之延長線上一點 S', 各立一桿.則欲求 ST 當量何線?並證明之.

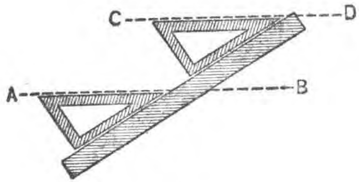
[解] 當量 $S'T'$　因 $AC=BC$, $\angle B=\angle A$, $\angle ACS=\angle BCS'$.

$\therefore \triangle ACS\cong\triangle BCS'$ $(a.\,s.\,a)$.　$\therefore \angle S'=\angle S$, 又 $SC=SC$,

$\angle TCS=\angle T'CS'$.　$\therefore \triangle CTS\cong\triangle CT'S'$ $(a.\,s.\,a.)$.　$\therefore ST=S'T'$.



習題 4



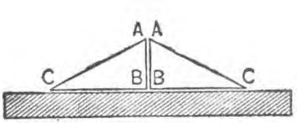
習題 5

4. 用附圖所示之分角器,如何可得任一角 ABC 之平分線 BD?

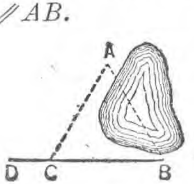
[解] 由分角器所成二三角形 ABD 及 CBD 恆爲全等,故 $\angle ABD$ 常等於 $\angle CBD$.

5. 用一直尺與一三角板,如何可作已知直線 AB 之平行線 CD?

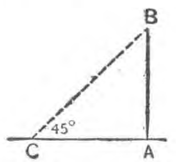
[解] 因同位角相等,故 $CD /\!/ AB$.



習題 6



習題 7



習題 8

6. 取一三角板,將其底邊緊抵於一直尺,如圖示之二位置,而 AB 之位置相同.問角 B 爲幾度?

[解] $\angle ABC+\angle ABC=180°$.　$\therefore \angle ABC=90°$.

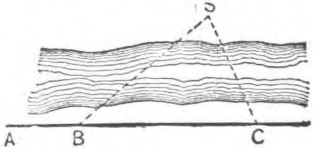
7. 欲量 AB 之距離,可自 B 向 D 前行,使 $\angle B=60^\circ$,直至點 C,使 $\angle ACB=60^\circ$ 而止.欲求 AB,當量何線?並言其故.

［解］ 當量 BC 或 AC. 因 ABC 爲等角三角形,故爲等邊三角形.

8. 於距桿 AB 之足爲 80 呎處之一點 C,測得角 ACB 爲 45°,求桿高.

［解］ 因 $\angle A$ 爲直角,$\angle C=45^\circ$,故 $\angle B=45^\circ$. 由是 $AB=AC=80$ 呎.

9. 一測量者沿河岸自 A 至 C,在 B 測得角 ABS,更前行 800 呎至 C,測得角 BCS 爲角 ABS 之半.問 BS 之距離若干?

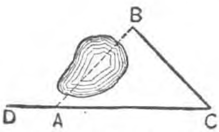


習題 9

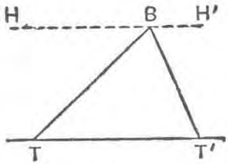
［解］ $\angle ABS=\angle S+\angle C$, $\therefore \angle ABS=2\angle C$, 即 $\angle S=\angle C$.

由是

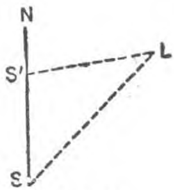
$$BS=BC=800 \text{ 呎}.$$



習題 10



習題 11



習題 12

10. 由下列測量結果,求一湖之長 AB: $\angle DAB=138^\circ$, $\angle C=42^\circ$, $AC=610$ 碼, $BC=400$ 碼.

［解］ $\angle BAC=180^\circ-\angle DAB=180^\circ-138^\circ=42^\circ=\angle C$.

$$\therefore\quad AB=BC=400 \text{ 碼}.$$

11. 一人在氣球 B 內,量得水平線 HH',與至二鎮市 T 及 T' 所作之線成 $\angle HBT=40^\circ$, $\angle H'BT'=70^\circ$. 若二鎮相距 2 哩,而氣球又適在直線 TT' 之直上,則氣球與 T 之距離爲若干?

［解］ $\angle TBT'=180^\circ-\angle HBT-\angle H'BT'=180^\circ-40^\circ-70^\circ=70^\circ$.

$$\therefore\quad \angle TBT' = \angle H'BT = \angle BT'T.$$

由是　　$BT = TT' = 2$ 哩。

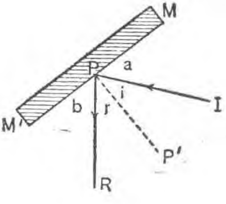
12　一船以每時 10 哩之速率北向駛行,於上午 8 時駛至 S 之位置,至上午 10 時達 S'. 若 $\angle S = 43°$, 又 $\angle NS'L = 86°$, 則在上午 10 時,船距燈塔 L 幾哩?

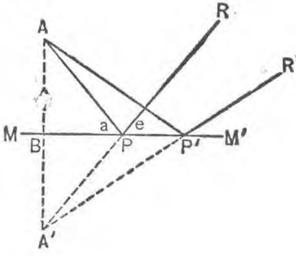
［解］船之速率爲每時 10 哩，故自上午 8 時至 10 時，船行距離 $SS' = 20$ 哩。

又 $\angle NS'L = \angle S + \angle L$, $\therefore \angle L = \angle NS'L - \angle S = 86° - 43° = 43°$.

由是 $\angle L = \angle S$. 因而 $S'L = SS' = 20$ 哩。

13. 在下圖(及同類習題之圖)，MM' 表一垂直於紙面之鏡,又其他諸直線皆在紙之平面內. 若 $F'P \perp M'M$, IP 爲入射光線, PR 爲反射光線,則 $\angle i$ (入射角)常等於 $\angle r$ (反射角),故 $\angle a = \angle b$.





習題 13

若自點 A 發射之光線爲鏡 MM' 所反射，求證其反射光線(使必要之角相等)可由下法作圖得之: 作 $AB \perp MM'$, 並延長 AB 至 A', 使 $BA' = AB$. 作 $A'P$. 則 PR, 卽 $A'P$ 之延長線,卽爲反射光線。

［解］在 ⓈABP 及 $A'BP$ 內;

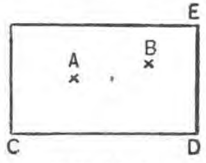
$$BP = BP,\ AB = A'B,\ \angle ABP = \angle A'BP = \text{直角},$$

$$\therefore\ \triangle ABP \cong \triangle A'BP.\quad \therefore\ \angle a = \angle A'PB = \angle e\ (\text{對頂角}).$$

但入射角爲 $\angle a$ 之餘角,反射角爲 $\angle e$ 之餘角，因此入射角等於反射角。

14. 彈子與檯邊衝突而反射，與光線遇鏡面而起之反射同，卽入射角等於反射角（習題 13).

若彈子 A 與檯邊 CD 上之一點 P 衝突，反射後，復碰擊 B，求以作圖法定 P 之位置.



習題 14, 15

［解］ 作 $AF\perp CD$. 引長 AF 至 A'，使 $A'F=AF$. 連結 $A'B$，交 CD 於 P. 則 P 卽爲所求之點（圖由學者自行補足之）.

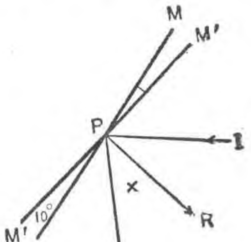
15. 若彈子 A 先與檯邊 CD 衝突，次與檯邊 DE 衝突，然後碰擊 B，試以作圖法求彈子所經之路徑.

［解］ 作 $AF\perp CD$. 延長 AF 至 A'，使 $A'F=AF$.

作 $BG\perp ED$. 延長 BG 至 B'，使 $B'G=BG$.

連 $A'B'$，截 CD 於 P，及 DE 於 Q. 則折線 $APQB$ 卽爲所求之線（圖由學者自行補足之）.

16. 光線 IP 由 MM 反射後，取 PR 之方向前進，若將鏡旋轉 $10°$，而至 $M'M'$ 之位置 $(\angle MPM'=10°)$，則原入射光線取 PR' 之方向反射．求 $\angle RPR'$.



習題 16, 17

［解］ 設以 N, N' 分別代圖上下邊之 M, M'.

命 $\angle IPM=m°$，則 $\angle RPN=m°$（習題 13).

$\therefore \angle IPM'=m°-10°$，又 $\angle R'PN'=m°-10°$.

$$\therefore \quad \angle R'PN=m°-20°.$$

但 $\angle x=\angle RPN-\angle R'PN=20°$ $\quad\therefore \angle RPR'=20°$.

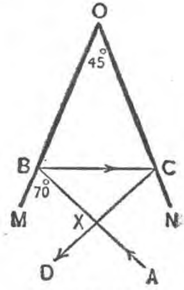
17. 若前題之 $\angle MPM'=n°$，試解之.

［解］ 解法與前題相同，$\angle IPM'=(m-n)°=\angle R'PN'$.

$$\therefore \quad \angle R'PN=(m-2n)°.$$

$$\therefore \angle x=\angle RPN-\angle R'PN=m°-(m-2n)°=2n°.$$

18. 二鏡 MO 及 NO 成 $45°$ 之角 O. 若光線 AB 射及 MO 取 BC 之方向而反射,又 BC 射至 NO 再取 CD 之方向而反射,求最初之入射光線與最後之反射光線所成之角(卽 $\angle x$), 若



習題 18

(a) $\angle ABM=70°$.　　(b) $\angle ABM=n°$.

〔解〕 (a) $\angle OBC=\angle ABM=70°$,

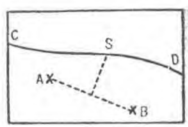
$$\angle ABC=180°-70°-70°=40°,$$
$$\angle OCB=180°-45°-70°=65°,$$
$$\angle DCN=\angle OCB=65°,$$
$$\angle BCD=180°-65°-65°=50°.$$
$$\therefore\quad \angle x=\angle ABC+\angle BCD=40°+50°=90°.$$

(b) $\angle OBC=\angle ABM=n°$, $\angle ABC=(180-2n)°$,

$\angle OCB=180°-45°-n°=(135-n)°$, $\angle DCN=\angle OCB=(135-n)°$,

$$\angle BCD=180°-2(135-n)°=(2n-90)°.$$
$$\therefore\ \angle x=\angle ABC+\angle BCD=(180-2n)°+(2n-90)°=90°.$$

19. 附圖表示地圖之一部分, A 與 B 爲二鎮, CD 爲一鐵路.

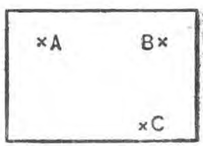


習題 19

設欲建一車站 S, 須與 A 及 B 等距離,試以作圖法求 S 之位置.

〔解〕 作 AB 之中垂線,延長之使遇 CD 於 S. 則 S 卽爲所求車站之位置(圖由學者補足之).

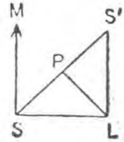
20. A, B, 及 C 表地圖上三鎮之位置. 今擬建一小學校 S, 其地位須與 A, B, C 三鎮等距離. 試用作圖法求 S 之位置.



習題 20

〔解〕 作 AB 之中垂線,再作 BC 之中垂線. 二線相交處卽所求 S 之位置(圖由學者自行補足之).

21. 一船以每時 6 哩之速率向東北駛行，於下午 9 時見一燈塔適在正東，至下午 11 時見燈塔適在正南．問何時船距燈塔最近，且相距若干哩？



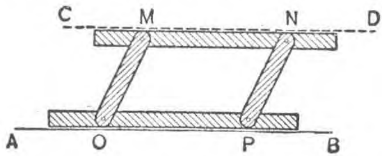
習題 21

［解］ 設 SM 爲指向北之直線，S 爲下午 9 時船所在之地位，S' 爲下午 11 時船所在之地位，L 爲燈塔．

$$\angle S'SL=45^\circ,\quad SS'=2\times 6=12 \text{ 哩}.$$

作 $LP\perp SS'$，則船在 P 時距燈塔最近．

但 $\triangle SPL=\triangle S'PL$ $(s.a.a.)$ 又 $\angle S'=45^\circ$. $\therefore SP=S'P=PL$. 即此船在下午 10 時距燈塔最近，且其相距爲 6 哩．



習題 22

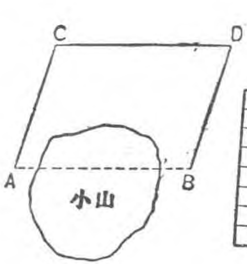
22. 說明附圖所示之器具，如何可用以作已知直線 AB 之平行線 CD [M, N, O, 及 P 皆爲可以回旋之釘，$MO=NP$, 又 $MN=OP$].

［解］ 因 $MO=NP$, $MN=OP$, $\therefore OMNP$ 爲一平行四邊形．

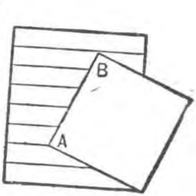
$$\therefore\ CD /\!/ AB.$$

23. 欲量一小山兩側 A 與 B 二點之距離，可自 A 及 B 向北各引直線 AC 及 BD，並使 $AC=BD$. 今欲得 AB 之長，當量何線？何故？

［解］ 欲求 AB 之長，當量 CD. 因 $ABCD$ 爲一平行四邊形 (144)，而 $AB=CD$ 之故．



習題 23



習題 24

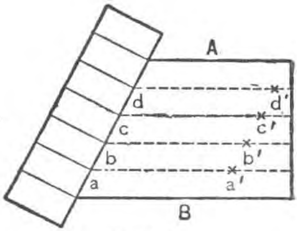
24. 說明用有格紙分一已知直線爲 5 等分之方法．在何種情

形下,此法不能用?

［解］ (a) 直線 AB 被分為五等分 (148).

(b) 若 AB 小於連續二平行線距離之 5 倍,此題為不可能.

25. 作直線平行於 A 及 B, 以分 AB 為相等之 5 狹條,可用格子紙依圖所示得 a, b, c, d 四點. 同樣,再求得 a', b', c', d, 連結其相應之點卽成. 試證明此作圖法.

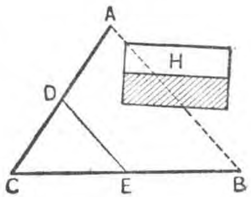


習題 25

［證］ $ab=a'b'$, 又 $ab \mathbin{/\!\!/} a'b'$, $\therefore abb'a'$ 為一平行四邊形,而 $aa' \mathbin{/\!\!/} bb'$.

同理, cc', dd'……皆平行於 aa'.

26. 二點 A 與 B 之間有房屋阻隔,若量得下列諸直線: $AD=9$ 碼, $AC=18$ 碼, $EC=11$ 碼, $CB=22$ 碼, $DE=10$ 碼; 如何可以求得 AB 之距離?



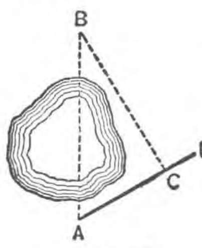
習題 26

［解］ $AC=18$, $AD=9$, $\therefore D$ 為 AC 之中點.

$CB=22$, $EC=11$, $\therefore E$ 為 CB 之中點.

由是,在 $\triangle ABC$ 內, $AB=2(DE)=2\times10=20$ 碼 (15).

27. 欲測 AB 之距離,先取 AD 方向前進,使 $\angle BAD=60°$, 至 C 停步, $\angle BCD$ 適為 $90°$. 若 $AC=200$ 碼,則 AB 長若干?



習題 27

［解］ $\angle BAD=60°$, $\angle BCD=90°$.

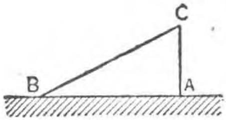
$$\therefore \quad \angle ABC=30°.$$

$$\therefore AB=2AC=2\times200=400 \text{ 碼 } (165).$$

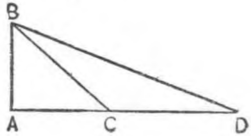
28. 高 75 呎之旗桿,折斷後桿尖適觸地面於 B. 若 $\angle B=30°$, 求 AC 之高.

［解］ $\angle B=30°$, 則 $\angle C=60°$. $\therefore BC=2AC$ (165).

由是 $AC=\frac{1}{3}75=25$ 呎.



習題 28



習題 29

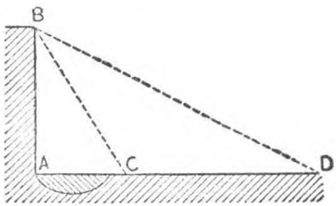
29. 欲求一塔 AB 之高，一人沿一平直之路 DCA 向塔前進．先於 D 測得 $\angle BDA=15^\circ$, 又於 C 測得 $\angle BCA=30^\circ$. 若 $DC=300$ 呎，求 AB.

［解］ $\angle CBD=\angle BCA-\angle D=30^\circ-15^\circ=15^\circ=\angle D.$

$$\therefore\quad BC=CD=300\text{ 呎}.$$

又 $AB=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}300=150$ 呎 (165).

30. AB 爲河岸上一垂直之石壁．一觀測者在河之對岸距離 20 呎處之一點 C, 測得 $\angle ACB=60^\circ$, 向前步行 200 呎,於距河更遠處之 D, 測得 $\angle BDA=30^\circ$. 求河之寬.



習題 30

［解］ $\angle CBD=\angle BCA-\angle D$

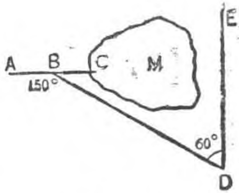
$$=30^\circ=\angle D.$$

$$\therefore\quad BC=CD=200\text{ 呎}.$$

又 $AC=\frac{1}{2}BC=100$ 呎 (165).

河寬$=100-20=80$ 呎.

31. 一鐵路 AB 通至 C 遇一小山．欲循 AC 之方向直穿一山洞，惟此工程擬於山之兩側同時進行．今測得 $\angle ABD=150^\circ$, $BD=3$ 仟米，又 $\angle D=60^\circ$. 問在 DE 上距 D 若干遠處動工？且所取之方向如何？



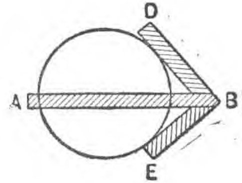
習題 31

［解］ 延長 BC 遇 DE 於 F. $\angle DFB=150^\circ-60^\circ=90^\circ$.

$\therefore DF=\frac{1}{2}BD=1.5$ 仟米． 其方向與 DE 成直角．

第 二 編

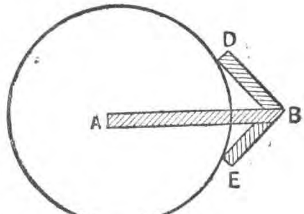
32. 圖為用以求圓板中心之儀器，由三金屬片聯合而成，使邊 AB 適平分 BD 及 BE 所成之角，又 BD 與 BE 相等．求證 AB 必通過圓心．



習題 32

[解] AB 平分二切線所成之角 DBE． 所求之圓心 O 與此二切線之距離必相等． 故 O 在 AB 上 (127)．

33. 右圖表同樣之儀器，用以測較大圓板之中心．求證 AB 必通過圓心．



習題 33

[解] 設 O 為此圓之圓心．作 OD 及 OE．

因 $OD=OE,\ BD=BE,\ BO=BO$．

$\therefore$ 直角 $\triangle ODB=$ 直角 $\triangle OEB$ (s. s. s.)．

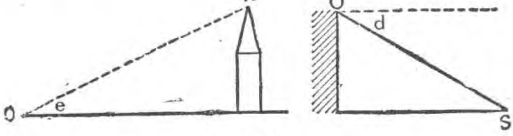
$\angle ABD=\angle ABE$．

$\therefore BO$ 平分 $\angle DBE$ 而與 AB 相疊合．

故 O 在 BA 上．

34 自 O 觀察任一物體 A 之仰角或俯角，為自觀察者 O 之目至物體之直線，與同一直立面內之水平線所成之角．

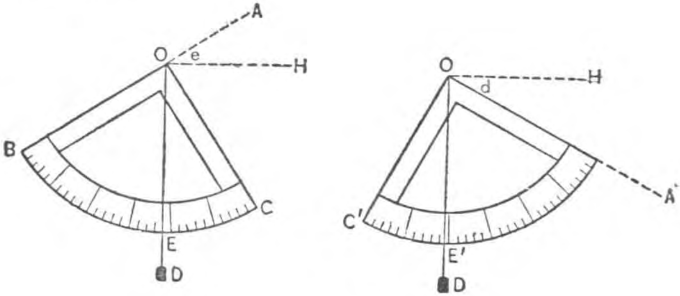
若物體之位置較觀察者為高，則成仰角，如 $\angle e$． 若物體之位置較觀察者為低，則成俯角，如 $\angle d$．



習題 34

求證一物體之仰角可依下法測之：將一象限使取豎立之位置，並使

BO 之延長線通過 A (此可於 BO 附一瞄準器測之) 鉛垂線 OD 牢繫於 O 處之一釘,交弧 BC 於 E. 仰角 e 以弧 EC 量之. 同理,俯角 d 以弧 $C'E'$ 量之.

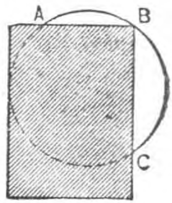


習題 34

[解] $\angle BOC = \angle DOH = \angle COA =$ 直角. $\therefore \angle COE = \angle e$ (48).

同理 $\angle C'OE' = \angle d$.

35. 求證欲自 A 引一圓板之直徑可依下法作之:取一長方形之紙片,將其一角頂 B 置於圓周上,使其鄰邊通過 A, 則 C 爲所求直徑之另一端.

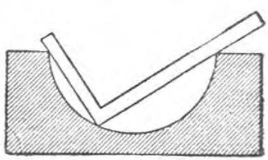


習題 35

[解] 圓周角 B 以 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 量之,或弧 AC 以 $2\angle B$ 量之,即以 $2\times 90° = 180°$ 量之.

$$\therefore \overset{\frown}{AC} = 180°, \text{ 即 } AC \text{ 爲一直徑.}$$

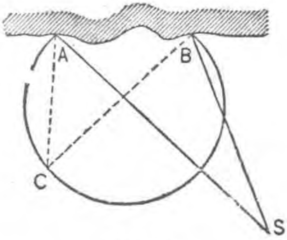
36. 證明下述方法可以檢驗半圓形槽之準確:取一木匠所用之曲尺,置之於如圖所示之位置.若尺任意移動而直角之頂點能與槽之各點相接觸,則其槽即爲準確之半圓形.



習題 36

[解] 應用第 146 頁習題 2, 知直角之二邊通過二定點,則直角頂點之軌跡爲一圓. 故可用曲尺檢驗半圓形槽之準確與否.

37. 若 A 與 B 爲二燈塔，在 ABC 圓之內有危險之礁石，但圓外可以安全航行。求證，若 $\angle S$ 小於 $\angle C$ 時，則船 S 不至有觸礁之虞。



習題 37

〔證〕 完成圖中所示之圓。在圓內任取一點 P，則 $\angle APB$ 以 $\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\angle APB$ 對頂角所對之弧) 量之，而 $\angle C$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{AB}$ 量之。故得 $\angle APB>\angle C$.

若在圓上取一點 Q，則 $\angle AQB=\angle C$.

$\angle ASB<\angle C$ (238)，則 S 必在圓外。

〔註〕 下列自 38 至 43 之六題，須用量角器及直尺作圖。所求之直線或角，須直接量(近似值)得之。(參看第 303 頁，習題 19.)

38. 高 25 呎之竿直立地上，影長 40 呎，問太陽之仰角爲幾度？（設以 1 吋表 20 呎.）

〔解〕 作直角 $\triangle ABC$，使 $AB=1\frac{1}{4}$ 吋，$BC=2$ 吋，又 $\angle ABC=90°$.

用量角器量所求之角 C，得 $\angle C=32°$.（圖略）.

39. 江邊有一垂直之岩壁，自岩頂測得對岸之俯角爲 40°，若岩壁高 120 呎，則江寬幾何？(設以 1 吋表 60 呎.)

〔解〕 用習題 34 右側之圖。設以 P 爲直角之頂點。在紙上依比例度作 $OP=2$ 吋，$\angle OPS=90°$，虛線與 PS 平行，俯角 d 爲 40°.

延長 OS，令交底邊 PS 於 S. 以尺量 PS 之長得 2.4 吋.

由是 江寬 $=2.4\times 60=144$ 呎.

40. 在距塔 80 呎而與塔基在同一水平面上之一點，測得塔之仰角爲 50°，求塔高。

〔解〕 作 $\triangle ABC$，$\angle B=90°$，$BC=2$ 吋，又 $\angle C=50°$ (用量角器量得).

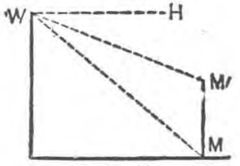
量 AB 得 $2\frac{1}{4}$ 吋。故高 $=40\times 2\frac{1}{4}=90$ 呎.（95 呎較爲準確.）

41. 自高出地面 60 呎之窗口，測得地上一紀念碑頂及碑基之俯角各爲 20° 及 40°. 求紀念碑之高。

［解］ 以 1 吋表 30 呎，以 F 表牆足。

作圖使 $WF=2$ 吋，$\angle F=90^\circ$，$\angle W=90^\circ$，$\angle HWM=40^\circ$，$\angle HWM'=20^\circ$，又 $MM'\perp FM$.

量 $MM'=1\frac{1}{8}$ 吋。 $\therefore$ 碑高 $=30\times 1\frac{1}{8}=34$ 呎。

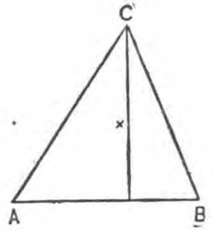


習題 41

42. 在雲之兩側之 A, B 二地，測得雲之仰角 $A=60^\circ$, $B=70^\circ$. 若 $AB=2$ 哩，求雲高。

［解］ 以 1 吋表 1 哩。作 $\triangle ABC$，使 $AB=2$ 吋，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=70^\circ$ (用量角器量得)。 自 C 作 $CD\perp AB$. 量 CD 得 $2\frac{1}{8}$ 吋。

$\therefore$ 雲高 $=2\frac{1}{8}$ 哩。



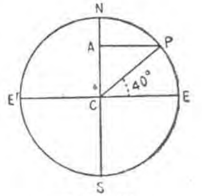
習題 42

43. 若赤道之半徑爲 4000 哩，在北緯 40° 之緯線之半徑幾何? (設 2000 哩 $=1$ 吋.)

［解］ 以 2 吋爲半徑畫一圓。作二直徑互相垂直，NS 代地軸，EE' 代赤道之直徑。作 $\angle ECP=40^\circ$，C 爲此圓之圓心，而 P 爲圓周上之一點。

作 $PA\parallel EE'$，而 A 落於 NS 上。量 PA 得 1.5 吋。

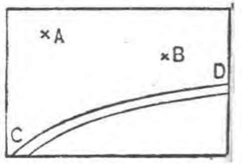
$\therefore$ 半徑 $=2000\times 1.5=3000$ 哩(較準之數爲3064).



習題 43

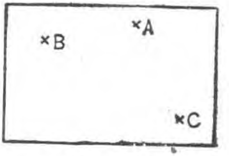
44. 在地圖上 CD 表一道路，A 與 B 爲二塔。一人在路上自 C 行至 D，於途中 X 處測得 $\angle AXB=45^\circ$，並知 X 與 B 之距離較 A 爲近。求於地圖上定 X 之位置。

［解］ 以 A B 之連結線爲弦作一弓形，使弓形所含之角爲 45° (253). 此弓形交 CD 於二點，其距 B 近之一點，即爲所求之 X. (圖由學者補足之)。



習題 44

45. A, B, C 爲在地圖上之三點.一測量者在某一地 X 測得 $\angle AXB=90°$ 及 $\angle AXC=60°$. 求於地圖上定 X 之位置.



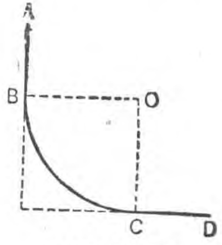
習題 45

［解］ 以 AB 之連結線爲直徑作一半圓.

以 AC 爲弦作一弓形,使弓形所含之角爲 60°(253).

圓與弓形之交點,卽所求之 X. (圖由學者補足之).

46. 成直角相交之二街道,其轉角處有時建築成圓弧形。求作此弧,其半徑爲 25 呎,且比例尺爲 1：500 (卽以 1 吋表 500 吋).



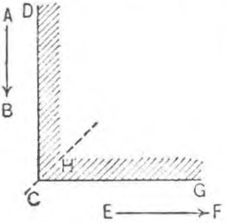
習題 46, 47

［解］ 25 呎$=25\times12=300$ 吋. 故作圖時應以 $\frac{300}{500}=0.6$ 吋爲半徑. 作一直角 AED, 並於其二邊截 $EB=EC=0.6$ 吋.

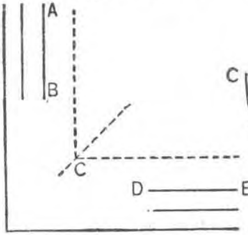
在 B 及 C 各作垂線,相交於 O, 卽所求弧之圓心.

47. 若前題之二街道相交成銳角,試解之.

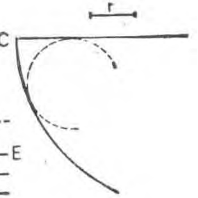
［解］ 半徑爲 0.6 吋.依第 148 頁習題 16 作之.



習題 48



習題 49



習題 50

48. 一騎自行車者循 AB (平行於 DH) 方向馳行,至轉角處擬取弧形之路徑,使靠近人行道旁之點 C, 再繼續循 EF (平行於 HG) 之方向前進.若 CH 平分 $\angle H$, 而前二平行線 (AB 及 DH) 間之距離等於後二平行線 (HG 及 EF) 間之距離,求作一圓弧表其所經之路線.

［解］ 在 C 作 CH 之垂線，交 AB 之延長線於 P. 在 PA 上取 PX 使等於 PC. 則 X 爲所求圓之切點.

再於 X 作 AB 之垂線，交 CH 或其延長線於 O.

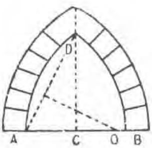
以 O 爲圓心，取等於 OX 之長爲半徑作弧，卽得所求之弧.

49. 作類似於上題之電車軌道路線.

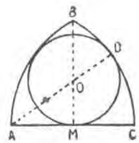
［解］ 內線之作法與習題 48 同. 至於外線，則自同一圓心作一弧卽得.

50. 一直街與一圓弧形之街道相接，今欲將其轉角處 C 改建成圓弧形，求以 r 爲半徑作一圓.

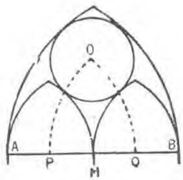
［解］ 可依第 148 頁習題 19 作圖得之.



習題 51



習題 52



習題 53

51. 作一如圖之哥德式圓拱，若其寬 AB 與高 CD 爲已知.（弧 AD 及 BD 之圓心在 AB 上.）

［解］ 作 AD 及 BD. 作 AD 之中垂線，交 AB 於 O. 則 O 爲弧 AD 之圓心. 同樣，得弧 BD 之圓心，作弧卽得.

52. 若哥德式圓拱 ABC 之 A 爲 BC 之圓心，C 爲 AB 之圓心，則此圓拱爲等邊.

於等邊圓拱內作一內切圓.

［解］ 設 M 爲 AC 之中點(切點)，作 MB. 再於 MB 上截 $MO=\frac{3}{4}AM$. O 爲圓心，取等於 OM 之長爲半徑作一圓. 則此圓卽爲所求之圓.

［證］ 連 AO，並延長之遇弧 BC 於 D. 命 $AM=a$，則

$$OA=\sqrt{a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}=\frac{5}{4}a.\text{ 但 }AD=2a.\ \therefore OD=2a-\frac{5}{4}a=\frac{3}{4}a=OM.$$

故以 OM 爲半徑所畫之圓切於弧 AB. 餘類推.

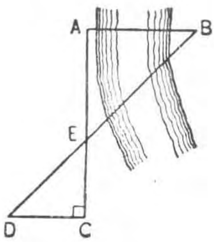
53 若 AB 爲已知，求作如圖所示之三個等邊圓拱，及與三圓拱相切之圓.

［**解**］ 命 M 爲 AB 之中點，P 爲 AM 之中點，Q 爲 BM 之中點. 以 A 爲圓心，AQ 爲半徑畫一弧；又以 B 爲圓心，BP 爲半徑，畫一弧. 二弧之交點 O 卽爲所求之圓心.

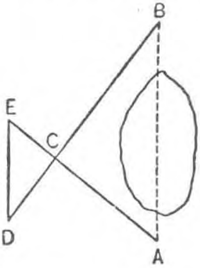
第　三　編

54. 平地上之塔影長 120 呎，而高 8 呎之竹竿，其影長 3 呎，問塔高若干?

［**解**］ 因二三角形相似，故 $8:120=3:x$, $\therefore x=45$ 呎.



習題 55



習題 56

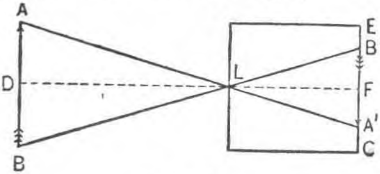
55. 欲測一河之寬 AB, 可量垂直於 AB 之 AC, 及垂直於 AC 之 CD, 自 D 望 B 先定一點 E. 若 $AE=200$ 呎, $EC=25$ 呎, $DC=20$ 呎, 求 AB 長若干?

［**解**］ $\triangle DCE\sim\triangle ABE$. $\therefore 25:200=20:x$. $\therefore x=160$ 呎.

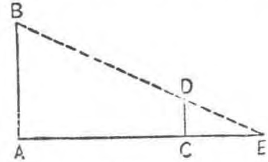
56. AB 之距離不能直接量得之，但由下之測量卽可求得，試加說明: $AE=80$ 呎, $EC=20$ 呎 $DB=100$ 呎, $DC=25$ 呎 $ED=30$ 呎.

［**解**］ 因 $AC=80-20=60$, $EC=20$, $BC=100-25=75$, $DC=25$. $\therefore AC:EC=BC:DC$, 又 $\angle DCE=\angle ACB$, 故 $\triangle DCE\sim\triangle BCA$ (311).

由是 $EC:AC=ED:AB$, 卽 $2:60=30:AB$, $\therefore AB=90$ 呎.



習題 57



習題 58

57. 一點 A 在照相鏡箱內所成之像 A', 其位置可由通過鏡心 L 所作直線 AA' 大略決定之.若 CE 爲照相乾片所在之位置,則 $A'B$ 卽爲 AB 之像.若 $AB=6$ 呎, $LD=12$ 呎, $LF=6$ 吋,問 $A'B'$ 長若干.

［解］ $\triangle ABL \sim \triangle A'B'L$ (304).

$$\therefore LD:LF=AB:A'B', \text{ 卽 } 12\times12:6=6\times12:A'B',$$

$$\therefore \quad A'B'=3 \text{ 吋}.$$

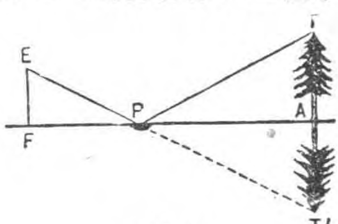
58. 在 E 見竹竿 DC 之上端 D 與塔 AB 之頂 B, 適成一直線.若 EA 爲水平線, $EC=4$ 呎, $DC=3$ 呎,又 $CA=36$ 呎,問塔高若干?

［解］ $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ (306).

$$\therefore CE:AE=DC:AB, \text{ 卽 } 4:(4+36)=3:AB.$$

$$\therefore \quad AB=30 \text{ 呎}.$$

59. 一觀察者見樹頂反映於湖水之像,在 ET' 之方向.若 FPA 爲水平線, EF 與 TA 皆垂直於 FPA, $EF=5$ 呎, $FP=8$ 呎,又 $PA=30$ 呎,求樹高.



習題 59

［解］ $\angle EPF=\angle APT$ (第 283 頁習題 13).

$\triangle EPF \sim \triangle TPA$ (306),

$\therefore 8:30=5:x$, $\quad \therefore x=18\frac{3}{4}$ 呎.

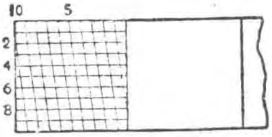
60. 若以圖內斜線所成小正方形之邊爲單位,如何用以量 0.1, 0.2, 0.65, 0.34 等?

［解］ (*a*) 0.1 爲第二水平線上之一單位.

(*b*)　0.2 爲第三水平線上之一單位。

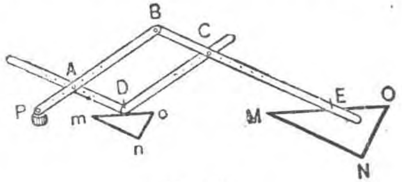
(*c*)　0.65 爲第六水平線取至第七斜線之長。

(*d*)　0.34 爲第五水平線(標 4 之線)取至第四斜線之長。



習題 60

61.　繪圖用之伸縮器，乃繪圖形 MNO 與已知圖形 mno 相似之儀器，常用於地圖及其他圖畫之放大或縮小。此器由四木條釘合於 A, B, C, D 四點而成，其 $AB=DC$, $AD=BC$, 使之互相平行。點 P 可繞固定之樞紐而轉動，在 D 及 E 各附有鉛筆。調整 PA 及 CE 之長，



習題 61

使 $\dfrac{PA}{AD}=\dfrac{DC}{CE}$. 求證 (1) P, D, E 在一直線上，(2) $\dfrac{PD}{PE}=\dfrac{PA}{PB}$, (3) 任一直線 MN 平行於 mn, 又 $\dfrac{mn}{MN}=\dfrac{PA}{PB}$, (4) 由伸縮器所作任一三角形 MNO 與已知三角形 mno 相似。

［證］　(1)　$ABCD$ 爲一平行四邊形，又 $AB=CD$, $AD=BC$.

$PA : DC=AD : CE$ (279).　$PB : PA=BE : AD$ (281).

$\angle PAD=\angle PBE$.　$\therefore \triangle PAD\sim\triangle PBE$.　$\therefore \angle APD=\angle APE$.

或 P, D, 及 E 在一直線上。

(2)　由 $\triangle PAD\sim\triangle PBE$,　$\therefore \dfrac{PD}{PE}=\dfrac{PA}{PB}$.

(3)　設 D 沿 mn 移動，又 $MN\parallel mn$, 則 MN 爲點 E 之軌跡。

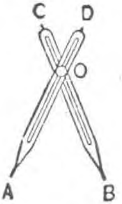
因在 MN 上之每一點適合 $\dfrac{PD}{PE}=\dfrac{PA}{PF}$ 之條件 (第 204 頁習題 1)，又不

在 MN 上之點皆不合此條件.

但 $\triangle Pmn \sim \triangle PMN$, $\therefore \dfrac{mn}{MN}=\dfrac{PA}{PB}$.

(4) $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{mn}{MN}=\dfrac{no}{NO}=\dfrac{om}{OM}$. $\therefore \triangle mno \sim \triangle MNO$ (312).

62. 附圖所示之儀器名爲比例規,可用以求已知直線 AB 之任何已知分數 CD. 調整 OC 及 OD 之長可使此分數等於 AB 之 $\frac{2}{5}$,等等.若 $CC=\frac{2}{5}OB$, $OD=\frac{2}{5}OA$, 求證 $CD=\frac{2}{5}AB$.



習題 62

［證］ $CO : DO=\frac{2}{5}OB : \frac{2}{5}OA=OB : OA$.

$\angle COD=\angle BOA$. $\therefore \triangle COD \sim \triangle AOB$ (311).

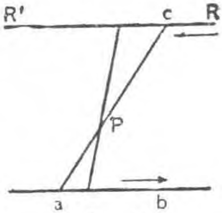
$\therefore CO : OB=CD : AB$ (303). $\frac{2}{5}OB : OB=CD : AB$,

即 $\frac{2}{5} : 1=CD : AB$. $\therefore CD=\frac{2}{5}AB$.

63. 一地圖以 1 吋表 100 哩之比例畫成.在地圖上兩地相距 $3\frac{1}{2}$ 吋,問實際距離若干?

［解］ $3\frac{1}{2}\times 100=350$ 哩.

64. 一人以每小時 3 哩之速率,沿平行於鐵路 RR' 之直路 ab 上行走,望見行駛之火車上一點 C 適與一竿 P 在一直線上.若 P 距 ab 爲 10 呎, RR' 與 ab 相距 100 呎,問火車之速度若干?是否爲等速?



習題 64

［解］ (a) $10 : 90=3 : x$.

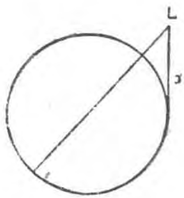
$\therefore x=27$ 哩 (每時之速度).

(b) 等速.

65. 若地球之直徑爲 8000 哩,則

(a) 自高 96 呎之燈塔上可望若干遠?

(b) 自高 2400 呎之山上可望若干遠?



習題 65

［解］ (a) $\left(8000+\dfrac{96}{5280}\right) : x=x : \dfrac{96}{5280}$ (323). 或用其近似值,

$$8000:x=x:\frac{96}{5280}.\quad \therefore\ x=\sqrt{\frac{8000\times 96}{5280}}=\frac{40}{11}\sqrt{11}=12.1\ 哩.$$

(b)　近似值，$8000:x=x:\dfrac{2400}{5280}$.　$\therefore\ x=\dfrac{200}{11}\sqrt{11}=60.3$ 哩.

66.　在海面上自高 h 呎之處所能望見之哩數 n，求證其近似值可由下式求之：

$$n=\sqrt{\frac{3h}{2}}.$$

［**解**］　以近似值計之，$8000:n=n:\dfrac{h}{5280}$.　$\therefore\ n^2=\dfrac{8000h}{5280}=\dfrac{100h}{66}$

此與 $\dfrac{99h}{66}$ 或 $\dfrac{3h}{2}$ 極相近。　$\therefore\ n=\sqrt{\dfrac{3h}{2}}$.

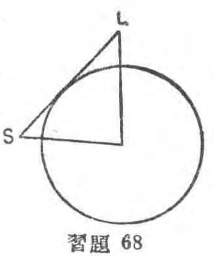
67.　一游泳者之目在風靖無浪之湖面上適可望見相距 4 哩之船頂。問船頂高出水面若干？

［**解**］　用習題 65 之圖，得近似值 $8000:4=4:\dfrac{y}{5280}$.

$$\therefore\ y=10.6\ 呎。$$

或由前一習題之公式得 $4=\sqrt{\dfrac{3h}{2}}$,　$\therefore\ h=10.6$ 呎。

68.　在高出海面 24 呎之輪船甲板上，見高出水面 40呎之燈塔頂適在水平線上.求船與燈塔之距離(SL).



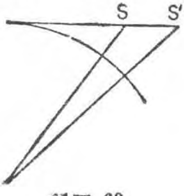
習題 68

［**解**］　設 SL 與球相切於 C, 則

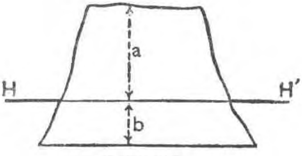
$$CS=\sqrt{\tfrac{3}{2}\times 24}=6\ 哩。$$

又　$$CL=\sqrt{\tfrac{3}{2}\times 40}=7.7\ 哩。$$

$$\therefore\ SL=6+7.7=13.7\ 哩。$$



習題 69



習題 70

69.　自高出海面 54 呎之輪船甲板上，望見一帆船之桅頂適在水平線上．若輪船與帆船相距 2 哩，求桅高．

［解］　命切點爲 C，則 $S'C=\sqrt{\frac{3}{2}\times 54}=9$ 哩，$\therefore SC=9-2=7$ 哩．

又　　$7=\sqrt{\frac{3}{2}h}$，　$\therefore h=\frac{98}{3}=32.7$ 呎．

70.　在高出海面 54 呎之輪船甲板上，瞭望冰山一座，惟其可見部分之高爲水平線 HH' 分爲 a, b 二部分，且 $a=3b$．若船與冰山相距 3 哩，求冰山之高．

［解］　仿前題解法，以 b 代 h，得 $S'C=9$ 哩及 $SC=6$ 哩．

$$6=\sqrt{\tfrac{3}{2}b},\quad \therefore b=24 \text{ 呎}.$$

$$\therefore \text{高}=4\times 24=96 \text{ 呎}.$$

71.　在高出海面 6 呎之一點，所見水平線之半徑爲 3 哩，求地球之直徑．

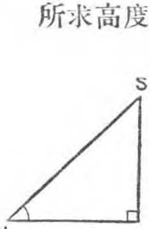
［解］　用習題 65 之圖．$x=3$．此割線之外部線段$=\frac{6}{5280}$．

設割線爲 y，則 $y:3=3:\frac{6}{5280}$，又 $y=7920$ 哩（近似值）．

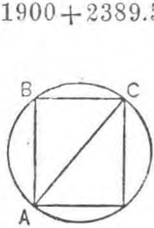
72.　瑞士某地之一架空鐵道，長 1593 碼，傾斜成 30° 角．若低處之一站高出海面 1900 呎，則高處一站高出海面若干？

［解］　$\frac{1}{2}\times 1593$ 碼$=2389.5$ 呎 (165)．

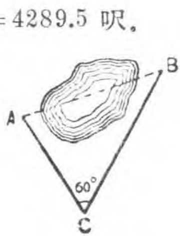
所求高度$=1900+2389.5=4289.5$ 呎．



習題 73



習題 74



習題 75

73.　火箭爆裂處之仰角 $A=45°$．若於見火光 $\frac{3}{4}$ 秒後聞得其爆聲，求其爆裂時之高．（假定音速等於每秒 330 米．）

［解］ $AS=\frac{3}{4}\times 330=247.5$ 米.

$\therefore\ h=\frac{1}{2}\times 247.5\sqrt{2}=175$ 米（第 191 頁習題 7).

74. 將一已知之圓木鋸爲屋梁，其高 AB 與寬 BC 之比爲 $\sqrt{2}:1$ 時，最爲強固．作一直徑 AC，並作 B，使 $AB:BC=\sqrt{2}:1$.

［解］ 分 AC 爲三等分，在距 C 最近一分點作一垂直於 AC 之直線，交圓周於 B. 則 B 卽爲所求之點.

［證］ $\overline{BC}^2=AC\times\frac{1}{3}AC$ 又 $\overline{AB}^2=AC\times\frac{2}{3}AC$.

$\therefore\ \overline{AB}^2:\overline{BC}^2=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$, 卽 $AB:BC=\sqrt{2}:1$.

75. A 與 B 二點在一山之兩側，若 $AC=20$ 桿，$BC=32$ 桿，又 $\angle C=60°$，問 A, B 間距離若干?

［解］ 作 $BD\perp AC$，交 AC 於 D. 於是 $\angle CBD=30°$.

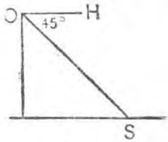
$\therefore\ CD=16$, 又 $DA=4$.　$BD^2=32^2-16^2=768$.

$\overline{BA}^2=\overline{DA}^2+\overline{BD}^2=16+768=784$.　$\therefore\ BA=28$ 桿.

76. 當太陽之仰角（通稱高度）等於 30° 時，一直立於平地之竹竿影長 50 呎．求竹竿之高.

［解］ 設影長 $AB=50$ 呎，又竿高 $AC=x$. 因 $\angle B=30°$，則 $\angle C=60°$，又 $BC=2x$.　$\therefore\ (2x)^2-x^2=50^2$，又 $x=\frac{1}{3}\cdot 50\sqrt{3}=29$ 呎.

77. 自高 300 呎之岩壁，測得一船之俯角爲 45°. 求船與岩壁頂之距離.



習題 77

［解］ 設船與岩壁頂之距離爲 x，則

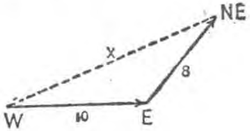
$x^2=300^2+300^2$　$\therefore\ x=300\sqrt{2}=424$ 呎.

78. 風吹帆船，東向駛行，風速爲每時 10 哩，同時水向東北流之速率爲每時 8 哩．問船每時之眞速若干?

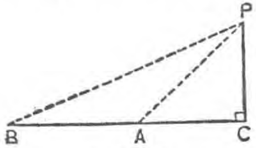
［解］ 自 NE 作垂線垂直於 WE 之延長線，則成一等腰直角三角形.

故 8 在此垂線上之射影爲 $4\sqrt{2}$, 又此垂線之長亦爲 $4\sqrt{2}$.

$\therefore x^2=(10+4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2=164+80\sqrt{2}=277.14$, $\therefore x=16.7$ 哩。



習題 78



習題 79

79. 一不能接近之點 P, 在 A 測得其仰角爲 $45°$. 在較 A 更遠 500 呎之處 B, 重測 P 之仰角得 $22°30'$. 若 BAC 爲一水平線, 則 P 高於 A (卽 PC) 若干?

[**解**] $\angle BPA=45°-22°30'$. $\therefore AP=BA=500$.

設 $x=AC=CP$, 則 $x^2+x^2=500^2$, $\therefore x=\frac{1}{2}\cdot500\sqrt{2}=354$ 呎。

80. 一氣球飄浮於一鎭市之上, 在球內測得另一鎭市之俯角爲 $30°$. 若二鎭相距 3 哩, 求氣球之高。

[**解**] 用習題 77 之圖形。 設 x 爲所求之高, 則 $OS=2x$.

又 $(2x)^2-x^2=3^2$, $\therefore x=\sqrt{3}=1.7$ 哩。

81. 有二觀測者在一雲之兩側 A, B 二處, 同時測得此雲之仰角 $A=45°$, 及 $B=67°30'$. 若 $AB=3$ 哩, 求雲高。

[**解**] 設 CD 爲自 C 垂直於 BA 之垂線, 則 $\angle ACB=67°30'$.

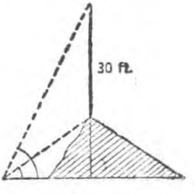
由是 $AC=AB=3$. $\therefore \overline{CD}^2=3^2-\overline{AD}^2=3^2-\overline{CD}^2$, 卽 $2\overline{CD}^2=9$.

$\therefore CD=\frac{1}{2}(3\sqrt{2})=2.1$ 哩。

82. 高 30 呎之旗桿, 立於土阜之頂, 在某處測得旗桿頂足之仰角各爲 $60°$ 及 $30°$. 求土阜之高。

[**解**] 設旗桿爲 ET, 而 T 爲其頂; O 爲觀測者; 又 EF 爲土阜之高. 則 $\angle T=30°=\angle TOE$.

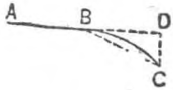
$\therefore OE=ET=30$. $\therefore EF=\frac{1}{2}\times30=15$ 呎。



習題 82

83. 軌道 ABC 由直線 AB 及圓弧 BC 組成. 若直線 $BC=50$ 碼, 自

C 至 AB 延長線之垂線 CD 爲 4 碼，求圓弧 BC 之半徑.



習題 83

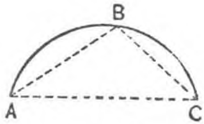
［解］ 作直徑 BE 及弦 EC.　$\angle BEC=\angle DBC$ (232, 237).

$$\therefore \quad \triangle BCD \sim \triangle BEC \ (306).$$

$$\therefore \quad DC : BC = BC : BE, \text{ 或 } 4:50=50:2x.$$

$$\therefore \quad x=312.5 \text{ 碼}.$$

84. 經過 A, B, C, 三點建築一圓形軌道. 若 $AB=50$ 碼, $BC=30$ 碼, 又 $AC=70$ 碼, 求圓弧 ABC 之半徑.



習題 84

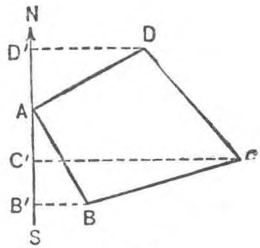
［解］ 在 AC 上之高 $h_b=\frac{150}{14}\sqrt{3}$ (339).

設直徑爲 d, 則 $h_b \cdot d=50\times 30$ (342).　$\therefore\ d=\frac{50\times 30\times 14}{150\sqrt{3}}=\frac{140}{3}\sqrt{3}$.

$$\therefore \quad \text{半徑}=40.4 \text{ 碼}.$$

第　四　編

85. 一測量者測四邊形地 $ABCD$ 之面積, 量得四邊形各角頂至直線 NS 上垂線之長, 及 NS 上各線段之長如下: $AD'=6$ 桿, $AC'=5$ 桿, $C'B'=4$ 桿, $D'D=7$ 桿, $C'C=12$ 桿, 又 $B B=4$ 桿. 求 $ABCD$ 之面積.



習題 85

［解］ $DD'C'C=\frac{1}{2}D'C'(DD'+C'C)$

$$=\tfrac{1}{2}\times 1\ \times 19=104.5.$$

同樣, $$CC'B'B=\tfrac{1}{2}\times 4\times 16=32.$$

$$\therefore \quad BB\,D'DC=104.5+32=136.5 \text{ 方桿}.$$

又 $$\triangle ADD'=\tfrac{1}{2}\,AD'\times DD'=\tfrac{1}{2}\times 6\times 7=21.$$

$$\triangle ABB'=\tfrac{1}{2}\,AB\times BB'=\tfrac{1}{2}\times 9\times 4=18.$$

$\therefore$ 二 $\triangle$ 之和 $=21+18=39$ 方桿.

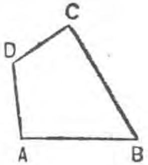
$\therefore$ 面積 $ABCD=136.5-39=97.5$ 方桿.

86. 求一五邊形地 $ABCDE$ 之面積,若 $AB=18$, $BC=24$, $CD=28$, $DE=24$, $EA=10$, $AC=30$, 及 $AD=26$.

[解] 用第 212 頁習題 2 之公式,得

$\triangle ABC=216$, $\triangle ACD=336$, $\triangle ADE=120$. $\therefore ABCDE=672$.

87. 一不等邊四邊形地 $ABCD$, 欲自 A 作二直線分原形爲面積相等之三部分.求作其分線.



習題 87

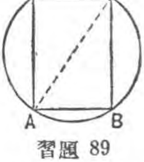
[解] 作 $DE \parallel AC$, 遇 BC 之延長線於 E. 分 BE 爲三等分,其分點爲 F 及 G, 而 F 近於 E. 連 AG, AF 及 AE.

則 AG 及 AF 即爲所求之分線.

88. 在比例 $1:500$ 之地圖上,設有一面積 3 方吋之多邊形,問此多邊形代表若干方呎?

[解] $1^2:500^2=3:x$, $\therefore x=750,000$ 方吋 $=5208$ 方呎.

89. 自一已知之圓木段鋸之爲長方梁木,其截面 $ABCD$ 須極大.求作 $ABCD$.



習題 89

[解] $\triangle ADC$ 之面積 $=\frac{1}{2}AC\times$(自 D 至 AC 之高).

欲使此 $\triangle$ 之面積爲極大,須使此高爲極大. 但此高爲 AC 之中垂線時爲極大,故此內接四邊形爲正方形時爲極大.

90. 一三角形土地,作平行於其一邊之數直線,分原形爲 4 等積之部分.求作其分線.

[解] 設 ABC 爲一三角形,邊 BC 爲已知,設 $DE \parallel BC$, 而 DE 爲所求平行線之一. 又設 $x=AD$.

$$x^2:c^2=1:4, \text{ 或 } x:c=1:2, \quad \therefore x=\tfrac{1}{2}c.$$

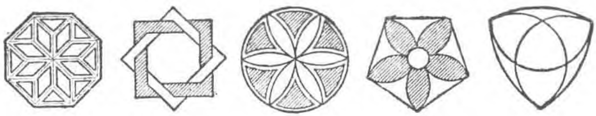
同樣, $x^2:c^2=2:4=1:2$, 或 $x^2=\frac{1}{2}c^2$, $\therefore \frac{1}{2}c:x=x:c$.

又 $x^2 : c^2 = 3 : 4$, 或 $\frac{3}{4}c : x = x : c$.

用 §327 之法作圖.

第五編

91. 作下列之圖案.



習題 91

[**作圖**] (*a*) 及 (*b*) 依 §395 正八邊形之作法作之.

(*c*) 依 §397 正六邊形之作法作之.

(*d*) 依 §405 正五邊形之作法作之.

(*e*) 依等邊三角形作法作之.

92. 據稱矩形(如信封,窗戶,畫片等)之長與寬之比如與一直線所分之中末比相同,則最為悅目.設窗寬 4 呎,欲使長與寬成上述之比,則高須若干?

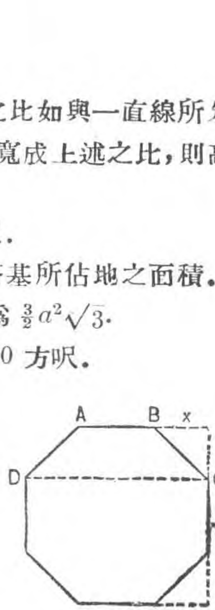
[**解**] $4 : x = x : x+4$, $\therefore x = 2 + 2\sqrt{5} = 6.5$ 呎.

93. 一正六邊形之塔基,每邊之長為 10 呎.求塔基所佔地之面積.

[**解**] 由第 262 頁習題 39, 得正六邊形之面積為 $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 所佔地面 $= \frac{3}{2} \times 10^2\sqrt{3} = 150\sqrt{3} = 260$ 方呎.

94. 一正八邊形之塔基,其一邊 AB 等於 8 呎.求相對二壁間之距離 CD.



習題 94

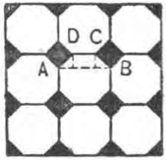
[**解**] $x^2 + x^2 = 8^2$, $\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2} \times 64} = 4\sqrt{2}$

$\therefore CD = 8 + 2 \times 4\sqrt{2} = 8(1+\sqrt{2}) = 19.3$ 呎.

95. 求上題塔基所佔地之面積.

[**解**] 面積 $= \overline{CD}^2 - 4(\frac{1}{2}x^2) = 8^2(1+\sqrt{2})^2 - 4(8 \times 2) = 64(2 + 2\sqrt{2}) = 309$ 方呎.

96. 圖爲油布之圖案，由正八邊形(白)與正方形(黑)組成。若正方形之邊等於 2 吋，則正八邊形相對二邊之距離 AB 爲若干？



習題 96

［解］ 此題與習題 94 相似.

$AB=2+2\sqrt{2}=2(1+\sqrt{2})=4.8$ 吋.

97. 在上題之圖內，求正八邊形 ($AD=2$ 吋) 之面積.

［解］ 面積$=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=4(3+2\sqrt{2})-4=8(1+\sqrt{2})=19.3$ 方吋.

98. 若 AB 之長爲已知，作前題之圖案.

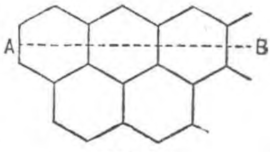
［解］ 作一正方形，使其對角線等於 AB，並內接於一圓. 在此圓外作一外切正八邊形 (第 239 頁習題 2).

99. 若 AB 之長(前題之圖)等於 6 吋，求正方形一邊之長.

［解］ 設 x 爲正方形之一邊，則 $x(1+\sqrt{2})=6$ (見習題 94).

$\therefore\ x=6\div(1+\sqrt{2})=2.5$ 吋.

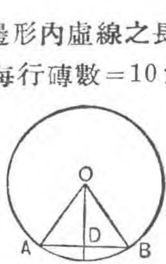
100. 房內地板之長爲 AB，鋪以正六邊形之磚。若六邊形一邊長 2 吋，而 AB 長 10 呎，今依右圖所示之位 鋪磚，則鋪滿全長 (AB)，每行需磚若干



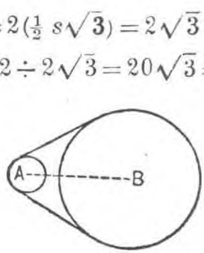
習題 100

［解］ 每一六邊形內虛線之長$=2(\frac{1}{2}s\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ (第 189 頁習題 4).

$\therefore$ 每行磚數$=10\times12\div2\sqrt{3}=20\sqrt{3}=34.6$.



習題 101



習題 102

101. 木匠有時以下述方法求得圓周之近似値：作等邊三角形 AOB 延長其高 OD 至 E，則圓周等於 $6AO+2DE$。若 $\pi=3.1416$，求其誤差爲若干？

［解］ 設 $AO=1$, 則 $OD=\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. $\therefore DE=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$\therefore\quad 6AO+2DE=6+2(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3})=8-\sqrt{3}=6.268.$$

以 π 作 3.1416 計算，則半徑 1 之圓周 $=2\times3.1416=6.2832$.

故其誤差爲 $6.2832-6.268=0.0152$, 約少於圓周 420 分之一。

102. A B 二輪連以皮帶，其半徑各爲 2 呎及 9 呎. 若大輪 (B) 每分時旋轉 40 次，則小輪每分時旋轉幾次?

［解］ 二輪圓周之比 $=2:9$.

故　　小輪轉 $\frac{9}{2}\times40=180$ 次。

103. 在前題之圖內，若 $AB=14$ 呎，求皮帶之長。(半徑爲 2 呎及 9 呎.)

［解］ 設 P 及 Q 爲小輪之切點，又 P' 及 Q 爲大輪之切點。

作 $AE /\!\!/ PP'$ 而 E 在 $P'B$ 上. $\angle E=90°$, $EB=7=\frac{1}{2}AB$.

$$\therefore\quad \angle EBA=60°,\ 又\ PP'=AE=7\sqrt{3}=QQ'.$$

在圓 A 上之弧爲 $\frac{1}{3}(4\pi)$, 又在圓 B 上之弧爲 $\frac{2}{3}(18\pi)$.

$$\therefore\quad 皮帶之長=14\sqrt{3}+\tfrac{1}{3}\times40\pi=66.1\ 呎.$$

104. 在同一軸上之二汽車輪相距 4 呎 $8\frac{1}{2}$ 吋. 當汽車繞一矩形之轉角時，外輪較內輪多行若干吋?

［解］ 設 r 爲內輪之半徑，則 $r+56\frac{1}{2}=$ 外輪半徑。

內輪之弧 $=\frac{1}{2}\pi r$, 又外輪之弧 $=\frac{1}{2}\pi(r+56\frac{1}{2})$.

$$二弧之差=\tfrac{1}{2}\pi(56\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}\times113\pi=89\ 吋.$$

105. 赤道之周圍約爲 25000 哩。設有一同心圓，其圓之周圍較赤道猶長 1 呎，求二圓半徑相差若干?

［解］ 設地球之半徑爲 R, 則 $2\pi R=25,000$ 哩。

$2\pi(R+x)=25,000$ 哩 $+1$ 呎. $\therefore 2\pi x=1$ 呎, 又 $x=\dfrac{7}{44}$ 呎.

106. 右圖爲保護花床用鐵絲製成之罩。若 $AB=1$ 呎，$CD=9$ 吋，$DE=3$ 吋，則罩長 1 呎，需鐵絲若干呎?

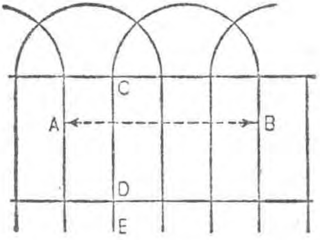
［解］ 在 A, B 之間共包三弧，其一爲半圓，其二合併之亦爲半圓，故此三弧適等於一半徑 9 吋之圓．

$\therefore$ 圓周之長 $=9\pi$ 吋．

4 縱桿 $=4(9+3)=48$ 吋，

2 橫桿 $=2\times 12=24$ 吋．

故全部需鐵絲 $48+24+9\pi=100\frac{2}{3}$ 吋．



習題 106

107. 二街道斜交成 120° 角，一汽車由一街轉入他街時，若同一軸上之二車輪相距 4 呎 $8\frac{1}{2}$ 吋，問外輪較內輪多行若干距離？

［解］ 外輪之弧 $=\frac{1}{3}(R+56\frac{1}{2})\pi$, 又內輪之弧 $=\frac{1}{3}\pi R$.

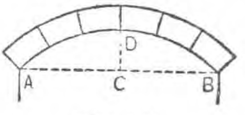
二弧之差 $=\frac{1}{3}(R+56\frac{1}{2})\pi-\frac{1}{3}\pi R=\frac{1}{3}\times 56\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\times 113\pi=59.2$ 吋．

108. 一圓弧形拱門之寬 AB 等於 10 呎，又其高 $CD=2$ 呎．求圓拱之半徑．

［解］ 設直徑爲 d, 則

$DC:AC=AC:d-DC$ (328).

或 $2:10=10:d-2$, $\therefore d-2=50$, 又 $r=\frac{1}{2}\times 52=26$ 呎．



習題 108

109. 若地球之軌道視爲一圓，其半徑等於 93,000,000 哩，而一年爲 365 日，問地球每小時行若干哩？

［解］ 地球一年所行之距離 $=2\pi(93,000,000)$.

故一小時所行之距離 $=\dfrac{2\pi\times 93,000,000}{365\times 24}=66,770$ 哩．

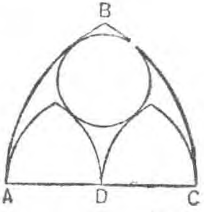
110. 若 $AC=4$ 呎，求等邊哥德式圓拱 ABC 之面積．

［解］ 作 AB 及 AC, 則

扇形 $ABC=\frac{1}{6}\pi R^2=\frac{1}{3}\times 8\pi$.

弓形 $AB=\frac{1}{3}\times 8\pi-4\sqrt{3}$.

$\therefore$ 全面積 $=\frac{1}{3}8\pi-4\sqrt{3}+\frac{1}{3}8\pi=9.8$ 方呎．



習題 110—112

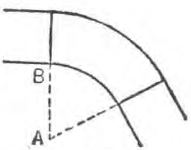
111. 在前題之圖內,若 $AD=DC=2$ 呎,則等邊小圓拱之面積若干?

〔解〕 此題求法與前題同,惟結果僅有前題面積之四分之一. 故

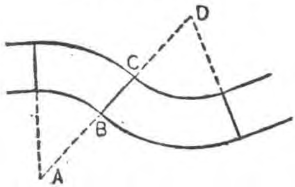
$$\text{面積}=2.5\ \text{方呎}.$$

112. 在同一圖內,切於三等邊圓拱之圓,其面積為何?

〔解〕 所求面積之圓切於以 A 為圓心之二圓間,故其直徑應等於 $AC-AD=2$. 由是, 面積 $=\pi R^2=\pi=\frac{22}{7}=7\frac{1}{3}$ 方呎.



習題 113



習題 114

113. 一寬 5 呎之人行道轉灣處成弧形.若半徑 $AB=8$ 呎, $\angle A=60°$, 求其彎曲部分之面積.

〔解〕 面積 $=\frac{1}{6}[(8+5)^2\pi-8^2\pi]=\frac{1}{2}\cdot 35\pi=55$ 方呎.

114. 圖為一彎曲之道路,若 $AB=90$ 呎, $BC=50$ 呎, $CD=90$ 呎, $\angle A=45°$, 又 $\angle D=60°$, 求彎曲部分之面積.

〔解〕 $\angle A$ 所截之面積 $=\frac{1}{8}\pi[(90+50)^2-90^2]=\frac{1}{8}\pi\times 11,550.$

$\angle D$ 所截之面積 $=\frac{1}{6}\pi[(90+50)^2-90^2]=\frac{1}{6}\pi\times 11,550.$

$$\therefore\ \text{全部面積}=11,500\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)=\frac{7\pi}{24}\times 11,500=10,542\ \text{方呎}.$$

115. 假定地球之直徑為 8000 哩, 地球繞其軸 P 自轉一次需時 23 時 56 分,則在緯度 45° 處之一點, 因地球自轉而移動之距離每小時當為若干哩?

〔解〕 用習題 43 之圖,在北緯 45° 處緯線之半徑 $=PA=2000\sqrt{2}$. (第 191 頁習題 7).

$$\text{緯線之圓周}=4000\,\pi\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad \text{每小時之速率}=\frac{4000\,\pi\sqrt{2}}{23\frac{14}{15}}=744\ \text{哩}.$$

116. 水管之直徑為 2 吋時，能供給全屋所需水量之半，若欲其供給全部之水量，則水管之直徑須若何？

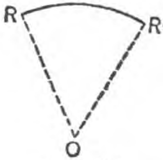
［解］ 所求水管之截面積應二倍於已知水管之截面積，或

$$1:2=2^2:x^2,\qquad \therefore\ x=2\sqrt{2}=2.83\ \text{吋}.$$

117. 一水管供給之水量於一 8 吋及一 6 吋管所供給之水量，若三管之情形，如壓力等，皆相同，求水管之直徑。

［解］ 參考第 254 頁習題 2，得 $x^2=8^2+6^2$. $\therefore\ x=10$ 吋.

118. 若曲率半徑等於 360 呎，則長 50 呎之鐵軌須彎為幾度（即求二端垂線所成之 $\angle O$）？



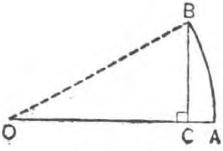
習題 118

［解］ 設 $\angle O=x$ 度，$OR=360$ 呎，則圓周為 $2\pi R=720\pi$ 呎。

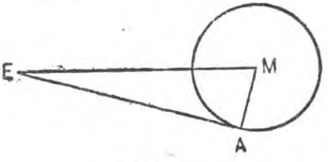
$\therefore\ 360:x=720\pi:50$，即 $x=25\div\pi=7°56'$.

119. 鋪設弧形軌道時，一鐵軌長 55 呎，彎之成 $17°30'$ 之角，求其曲率半徑。

［解］ $\dfrac{17.5}{360}\times 2\pi x=55$，又 $x=\dfrac{11\times 360}{7\pi}=180$ 呎.



習題 120



習題 121

120. 若 O 為弧 AB 之中心，$BC\perp OA$，而 $\angle O$ 極小，則 $\widehat{AB}$ 與 BC 之差亦極小．在此種情形下，欲求 BC 之值可求弧 AB 之長代之．若 $\angle O=4°$，因此簡略，結果生 0.00005 之誤差，角愈小則誤差亦愈小，此誤

差大約與角之立方成比例.

若 BC 爲直立於平地之一塔，$BO=2000$ 呎，又 $\angle O=2^\circ$，求塔高.

［解］ $x=$ 弧 $BA=2\cdot 2\pi\cdot 2000\div 360=70$ 呎 (近似數).

121. 月之視徑等於 $30'$，即自地球 E 至月之中心 M 作一直線 EM 與切線 EA 成 $15'$ 之角.若 $EM=243,000$ 哩，求月之半徑.

［解］ $r=\dfrac{1}{1440}\times$圓周$=\dfrac{1}{1440}\times 2\times 243,000\pi=\dfrac{675\pi}{2}=1060$ 哩.

122. 太陽之視徑與月之視徑約略相等，若太陽距地 93,000,000 哩，則太陽之直徑爲若干?

［解］ $r=\dfrac{1}{1440}\times 2\pi\times 93,000,000=\dfrac{1}{1440}\times 186,000,000\pi$ 哩.

若以 d 表直徑，則　$d=\dfrac{31000,000\pi}{120}=812,000$ 哩 (近似數).

123. 應用三角函數(第 301—304 頁)解問題 75—82.

［解］ 見第 303 頁習題 20 之解答.

124. 用同一方法，解前題所指定之各題，以 $\angle 33^\circ$ 代 $\angle 30^\circ$，$\angle 64^\circ$ 代 $\angle 60^\circ$，又以 $\angle 40^\circ$ 代 $\angle 45^\circ$.

［解］ 見第 303 頁習題 20 之解答.

第 302—303 頁　　§ 467

三　角　函　數

習題 1. 何角之正弦等於 0.326? 0.500? 0.946? 0.993? 0.755?

［解］ (a) 19°,　(b) 30°,　(c) 71°,　(d) 83°,　(e) 49°.

習題 2. 何角之餘弦等於 0.970? 0.707? 0.309? 0.883? 0.438?

［解］ (a) 14°,　(b) 45°,　(c) 72°,　(d) 28°,　(e) 64°.

習題 3. 何角之正切等於 0.158? 2.145? 5.671? 0.625? 0.249?

［解］ (a) 9°,　(b) 65°,　(c) 80°,　(d) 32°,　(e) 14°.

習題 4. 正弦等於 0.450 之角，求其度數至最近之值.

［解］ 27° (近似值)。

習題 5. 餘弦等於 0.450 之角，求其度數至最近之值。

［解］ 63° (近似值)。

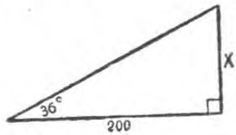
習題 6. 正切等於 0.290 之角，求其度數至最近之值。

［解］ 16° (近似值)。

習題 7. 若角增加時，由表觀察，其三函數之變化如何?

［解］ 角度增加，則正弦與正切之數值亦隨之增加，但餘弦則反是。

習題 8. 在距塔基 200 呎處，測得塔頂之仰角(參看第 287 頁，習題 34) 為 36°，求塔高。



習題 8

［解］ $\frac{x}{200}=\tan 36°$,

$\therefore\ x=200\times 0.727=145$ 呎。

習題 9. 自高 84 呎之燈塔，測得一船之俯角 (見第 287 頁，習題 34) 為 17°，求船至塔基之距離。

［解］ $\tan 17°=\frac{84}{d}$, $\quad\therefore\ d=\frac{84}{\tan 17°}=\frac{84}{0.306}=274$ 呎。

習題 10. 一輕氣球以長 328 呎之繩繫於地上，若繩與地成 67° 之角，問氣球高若干?

［解］ $\sin 67°=\frac{x}{328}$, $\quad\therefore\ x=328\sin 67°=328\times 0.921=302$ 呎。

習題 11. 在下列問題內，直角三角形之直角在 C, a 與 b 各爲角 A 及角 B 所對之邊，又 c 爲斜邊。求一數以代下表內之問號。

$\angle A$	$\angle B$	a	b	c
48°	?	?	?	280
?	37°	14.2	?	?
?	?	8.3	10.2	?
?	?	?	6.5	12.4
71°	?	$3\frac{1}{3}$	?	?

［解］ (a) $\angle B=90^\circ-48^\circ=42^\circ$. $\sin 48^\circ=\frac{a}{280}$, $\therefore\ a=208$.

$\cos 48^\circ=\frac{b}{280}$, $\therefore\ b=187$.

(b) $\angle A=90^\circ-37^\circ=53^\circ$. $c=\frac{14.2}{\cos 37^\circ}=\frac{14.2}{0.799}=17.8$.

$\tan 37^\circ=\frac{b}{14.2}$, $\therefore\ b=14.2\times 0.754=10.7$.

(c) $\tan A=\frac{8.3}{10.2}=0.814$, $\therefore\ \angle A=39^\circ$, 又 $\angle B=90^\circ-39^\circ=51^\circ$.

$\sin 39^\circ=\frac{8.3}{c}$, $\therefore\ c=\frac{8.3}{0.629}=13.2$.

(d) $\sin B=\frac{6.5}{12.4}=0.524$. $\therefore\ \angle B=32^\circ$, 又 $\angle A=58^\circ$.

$\cos 32^\circ=\frac{a}{12.4}$, $\therefore\ a=12.4\times 0.848=105$.

(e) $\angle B=90^\circ-71^\circ=19^\circ$.

$\tan 71^\circ=\frac{3.33}{b}$, $\therefore\ b=\frac{3.33}{2.904}=1.15$.

$\sin 71^\circ=\frac{3.33}{c}$, $\therefore\ c=\frac{3.33}{0.946}=3.52$.

習題 12. 已知直角三角形之斜邊爲 18, 一銳角爲 40°, 求其面積.

［解］ 參看習題 11 之說明.

$\frac{b}{18}=\sin 40^\circ$, $\therefore\ b=11.6$. $\frac{a}{18}=\cos 40^\circ$, $\therefore\ a=13.8$.

$\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 13.8\times 11.6=80.04$.

習題 13. 一三角形之二邊各爲 41 呎及 36 呎, 其夾角爲 38°, 求此三角形之面積爲幾方呎?

［解］ 設 h 爲 4 呎邊上之高, 則 $\frac{h}{36}=\sin 38^\circ$, $\therefore\ h=22.2$.

$\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 41\times 22.2=45.5$ 方呎 (近似值).

習題14. 在河岸上一點 C 適與隔岸之樹 B 相對, 沿河岸取與 CB 成直角之方向自 C 行至 A, AC 之長爲 120 碼, 角 CAB 爲 28°. 求河寬.

〔解〕 $\frac{CB}{120}=\tan 28^\circ$, $\therefore CB=120\times 0.532=64$ 碼.

習題 15. 自一點 P 作圓之二切線,其長各為 45 呎,且成 68° 之角.求圓之直徑.

〔解〕 $\frac{r}{45}=\tan 34^\circ$, $\therefore$ 直徑 $=2\times 45\tan 34^\circ=90\times 0.675=61$ 呎.

習題 16. 等腰三角形之二底角各為 34°,若底邊長 80 呎,則此三角形之高為若干?

〔解〕 等腰三角形底邊上之高必平分其底 (72).

$$\frac{h}{40}=\tan 34^\circ,\quad \therefore h=40\times 0.675=27 \text{ 呎}.$$

習題 17. 過弦之兩端作二半徑成 130° 角.若圓半徑為 11 呎,則弦長若干?

〔解〕 自圓心作直線垂直於弦,則此垂線必平分此弦及已知之圓心角. 以 11 除弦之半得 $\sin 65^\circ$.

故 弦長 $=2\times 11\times\sin 65^\circ=22\times 0.906=20$ 呎.

習題 18. 直角三角形斜邊上之高為14呎,一銳角為24°,求斜邊之長.

〔解〕 設直角三角形 ABC 之 $\angle C=90^\circ$, $\angle A=24^\circ$, 則

$$\sin 24^\circ=\frac{14}{b},\quad \therefore b=\frac{14}{0.407}=34.4 \text{ 呎}.$$

$$\cos 24^\circ=\frac{b}{c},\quad \therefore c=\frac{b}{\cos 24^\circ}=\frac{34.4}{0.914}=37.6 \text{ 呎}.$$

習題 19. 解第 288—289 頁之實用題 38—42.

(習題 38) 設仰角為 x, 則 $\tan x=\frac{25}{40}=0.625$, $\therefore x=32^\circ$.

(習題 39) 設江寬為 x, 則 $\tan 40^\circ=\frac{120}{x}$, $\therefore x=\frac{120}{0.839}=143$ 呎.

(習題 40) 設塔高為 h, 則 $\tan 50^\circ=\frac{h}{80}$, $\therefore h=80\times 1.192=95$ 呎.

(習題 41) 延長 WH 及 MM' 使相遇於 K, 在窗下之直角頂點為 R.

則 $$\tan 40^\circ = \frac{60}{RM'}, \quad \therefore\ RM = WK = \frac{60}{0.839} = 71.5.$$

$KM' = WK \tan 20^\circ = 71.5 \times 0.364 = 26. \quad \therefore\ MM' = 60 - 26 = 34$ 呎.

(習題 42) 設自 A 至 B 之線段為 y 及 z, 則

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{y}, \text{ 又 } \frac{x}{z} = \tan 70^\circ, \quad \therefore\ \frac{x}{\tan 60^\circ} = y, \text{ 又 } \frac{x}{\tan 70^\circ} = z.$$

二式相加, 得 $$\frac{x}{\tan 60^\circ} + \frac{x}{\tan 70^\circ} = y + z = 2.$$

$$\therefore\ x = \frac{2\tan 60^\circ \tan 70^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 70^\circ} = 2.1 \text{ 哩.}$$

習題 20. 解第 300 頁之實用題 123, 124.

(習題 123).

習題 75. 自 A 作直線 AD 垂直於 BC, 並命 $AD = h$ $CD = x$, 則

$\sin 60^\circ = \dfrac{h}{20}, \quad \therefore\ h = 20 \times 0.866 = 17.32.$ 又 $\cos 60^\circ = \dfrac{x}{20}, \quad \therefore\ x = 10.$

$\tan B = \dfrac{17.32}{22} = 0.786, \quad \therefore\ B = 38^\circ. \quad \cos 38^\circ = \dfrac{22}{AB}, \quad \therefore\ AB = 27.9$ 桿.

習題 76. 設 h 為竹竿之高, 則 $\dfrac{h}{50} = \tan 30^\circ, \quad \therefore\ h = 28.9$ 呎.

習題 77. 設 d 為船與岩頂之距離, 則 $\sin 45^\circ = \dfrac{300}{d}$,

$$\therefore\ d = 300 \div \sin 45^\circ = 424 \text{ 呎.}$$

習題 78. 設 h 為自 NE 至 WE 之高, d 為 8 在水平線上之射影, 則

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{8}, \quad \therefore\ h = d = 8 \times 0.707 = 5.66 \text{ 哩.}$$

由是知自 W 至 h 之垂足為 $10 + 5.66 = 15.66$ 哩.

$\tan W = 0.361, \quad \therefore\ \angle W = 20^\circ. \quad \sin 20^\circ = \dfrac{5.66}{x}, \quad \therefore\ x = 16.5$ 哩.

習題 79. 設 $h = PC = AC$. 則 $\dfrac{h}{h + 500} = \tan 22\frac{1}{2}^\circ = 0.410.$

$\therefore\ h=347$ 呎(用課本內之三角函數表不能得極精確之結果.)

習題 80. 設氣球之高為 h, 則 $\dfrac{h}{3}=\tan 30^\circ=0.577$, $\therefore\ h=1.7$ 哩.

習題 81. 設 $BD=x$, 又 $DA=y$. 則 $\dfrac{h}{x}=\tan 67\dfrac{1^\circ}{2}=2.416$.

又 $\dfrac{h}{y}=\tan 45^\circ=1$. $\dfrac{h}{2.416}+h=x+y=2$.

$$\therefore\ h=\frac{3\times1\times2.416}{1+2.416}=2.1 \text{ 哩.}$$

習題 82. 設 h 為土阜之高, 又 x 為自仰角頂點至垂線之足之距離(旗桿延長至與水平線相遇).

$\dfrac{h}{x}=\tan 30^\circ$, 又 $\dfrac{30+h}{x}=\tan 60^\circ$. 以後式除前式, 得

$$\frac{h}{30+h}=\frac{\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ}=\frac{0.577}{1.732}. \qquad \therefore\ h=15 \text{ 呎.}$$

(習題 124).

習題 75. 用前習題 75 同樣之方法, 得其近似值為 29 桿.

習題 76. $\dfrac{h}{50}=\tan 33^\circ$, $\therefore\ h=50\times0.649=32.5$ 呎.

習題 77. $\dfrac{300}{d}=\sin 40^\circ$, $\therefore\ d=\dfrac{300}{\sin 40^\circ}=467$ 呎.

習題 78. 設 h 為高, d 為 8 在水平線上之射影, 則

$\dfrac{h}{8}=\sin 40^\circ$, $\therefore\ h=8\times0.643=5.14$. $\dfrac{d}{8}=\cos 40^\circ$, $\therefore\ d=6.13$.

$$\tan W=\frac{5.14}{10+6.13}=\frac{5.14}{16.13}=0.319, \qquad \therefore\ \angle W=18^\circ.$$

$$\sin 18^\circ=\frac{5.14}{x}, \qquad \therefore\ x=\frac{5.14}{0.309}=16.6 \text{ 每時哩.}$$

習題 79. 設 $h=PC$, $x=AC$. $\dfrac{h}{x}=\tan 40^\circ=0.839$, $x=\dfrac{h}{0.839}$;

又 $\dfrac{h}{500+x}=\tan 22\dfrac{1^\circ}{2}=0.410.\quad \therefore\ h=205+0.410x,$

或 $h=205+0.410\times\dfrac{h}{0.839}.\quad \therefore\ 429h=171995,\ h=401$ 呎.

習題 80. $\dfrac{h}{3}=\tan 33^\circ,\quad \therefore\ h=3\times 0.643=1.929$ 哩.

習題 81. $\dfrac{h}{x}=\tan 40^\circ$, 又 $\dfrac{h}{y}=\tan 67\dfrac{1^\circ}{2}$.

$$\therefore\ h=0.839\,x,\ \text{及}\ h=2.415y.$$

$$\frac{h}{0.839}+\frac{h}{2.415}=x+y=3,\quad \therefore\ h=\frac{3\times 0.839\times 2.415}{0.839+2.415}=1.9\ \text{哩}.$$

習題 82. $\dfrac{h}{x}=\tan 33^\circ=0.649$, 又 $\dfrac{h+30}{x}=\tan 64^\circ=2.050.$

$\dfrac{h+30}{h}=\dfrac{2.050}{0.649}=3.16.\ h+30=3.16h,\ \therefore\ 216h=30$, 或 $h=13.9$ 呎.