教育部審定

初審核定本

修正課程標準適用

新編

高中平面幾何學

上冊

編者　余介石

中華書局印行

民國三十五年七月十三版

修正課程標準適用
新編高中平面幾何學（全二冊）
◎上冊
（郵運匯費另加）

編者　余介石

發行人　中華書局有限公司代表　姚戟楣

印刷者　上海澳門路四六九號　中華書局永寧印刷廠

發行處　各埠中華書局

（統）（一一〇五三）

何奎垣先生序

幾何為空間形式科學.自非歐派幾何發明後,覺察空間可依於各種不同方式.換言之,卽幾何待原理而成,空間待幾何而表,故原理派尙矣.余君介石編輯是書,根於原理派觀點,洵為近日教科書中之有極大進步者也.至其秩序緊客 適合學子,抑其次也.此書之最精處,在於比 斯坦之意,以為如人在球面,而不 線,乃大圓弧.假如從一定點起,取半徑作圓,當 時,周長與半徑之比,極近於 π;如半徑漸增大時,則周率漸小於 π,以至為零.此球面學者解釋此現象曰,吾之平面幾何,乃非歐派幾何也.審此則雖初學亦能分別歐派與非歐派幾何.吾之為此言也,以客觀空間,近於非歐派幾何,故當先養成學子覺察之力也.此外,余意以為中等幾何,尙有應注意者數事.一者,平面及空間軌跡,所當注意,此為解決一切問題之根本.二者,平面之對稱、平移、旋轉及位似圖,應推廣於空間,依東乃恩(*Klern*)之意,此等概念,乃初等幾何之不變羣,換言之,卽初等幾何圖形性質,對此等羣而為不變也.三者,初等幾何,乃可度幾何,故當注意長短、面積體積、容積之量法.四者,圓錐形截線,除直線與圓而外,尙有拋物線、橢圓、雙曲線等,應細研其幾何性質,及其公同性質.五者,書中多依綜合法敍述,以示謹嚴,而不適於尋

求.學者宜常將定理改作問題,以爲尋求,必能助其精進.余君此著,對上述諸端,頗知注意.平面部於定理復習,甚重解析,於軌跡及作圖題之尋求,亦能揭示運思着手之途徑,此皆最有裨益於初學之處.惜以取材限於官方規定,對空間之變圖各法,與拋物線、橢圓、雙曲線等,皆未能備載.故不能不贅數言,以告學子,而望其能參考其他書籍,以補其闕,想余君及善讀是書者,或不河漢斯言.是爲序.

何魯

編輯要旨

1.本書以教育部二十五年所頒布的高級中學課程標準爲依據,幷加入其他適當教材,和本局出版的修正課程標準適用初中算學教科書,程度緊相銜接,極合高中一年級之用.

2.本書除附錄外,共分九編,二百餘頁,內有習題四十七.按教育部課程標準,高中教授平面幾何時間,共約90小時,每小時授3頁,每二小時有習題一次,足資練習.

3.本書依據學習心理,排列教材,由淺入深,幷將互相關聯的教材,集於一處,反復申說,使學生的注意集中,增加練習的機會,而達到純熟的目標.

4.編者所撰高中三角,高中代數,用單元編制,注重原理教學法,出版以來,頗得海內教師贊同,復蒙重慶大學理學院長何師奎垣嘉許,至爲榮幸.本書特仍採同一方法編述,以期收易學,易教之效.

5.部頒課程標準內教法要點,謂'初中已習之定理,宜再用啓發式之解剖,儘量用逆證法,以明思考之途徑'此即本書第一編至第四編所注意的事項.凡初中幾何各定理,無一不提出,除少數極簡易者外,皆加解析,指示證解的線索.且提示的證法,皆與一般初中課本所載的不同,以期引起學生學習的興趣,且免生重複乏味的感想.

6. 幾何定理頗多,易覺頭緒紛繁,而生混淆.初學每不能運用定理證題,此爲一因.本書根據部頒標準所述教法要點,'從理論上着眼,''就定理間關係,組成系統.'凡可以聯絡各定理,均集於一處,述其關係,較其異同,力求'顯出幾何全部一貫的線索'.

7. 第五、第六、第七三編,爲本書第二段.第五編由比例的理,引入許多重要新教材.第六編闡述代數在幾何上的應用,而徐徐導出極大、極小問題.第七編就幾何題待證事項,舉其主要證法.這三編目的爲補充初中幾何所缺略的教材,且指示初中所習各部分的擴充和運用方法.

8. 軌跡和作圖題,'於推理證題之外,尙可發展學生探求發明的能力,'爲部頒標準所示教法要點之一.本書特立第八、第九兩編,分別詳細討論,不但各種重要方法,已列舉靡遺,且對基本原則,講述也力求透徹,以期收提綱挈領之效,是爲本書的第三段.

9. 初中幾何所述各基本圖形的定義,高中生斷無尙不明瞭之理,部頒標準的教法要點中,也未有一語及此,故本書概不補述,但爲便參考計,特編爲一附錄.

10. 本書各習題,爲書中極重要的一部分,選擇和分配,皆經過愼重的考慮,務使已習過的理論和方法,都在習題中遇着應用的機會,以爲理解之助.各題均按難易次序排列,由淺入深.其中難題,可引起學生向上探求的

興趣,養成自動研究的習慣。

11.江蘇省教育廳據各校實際情形,編定進度表,對教學頗稱便利,本書特依其次序編制,以求切合實用。

12.此稿着手於二十二年冬,第因高中幾何標準,爲一種創製,中西幾何教科書雖多名著,皆不能取作藍本,故隨編隨付油印,託友人張通謨、梅慕壎、陸子芬、李修睦、張伯康、陳伯琴、劉之鄒、何崇煥諸先生試教,并承金陵女子文理學院數理系主任魯淑音教授交金陵大學暑期理科講習班諸會員批評。凡諸友人會員認爲編制太深,或陳述過略諸點,皆一一修正;最近復遵部頒修正課程標準釐訂全稿;迄今稿凡三易,以視初稿,改竄已過半。本書出版一再延遲,即係此故,此應向賜教諸先生鳴謝,并向讀者道歉者也。又中華書局因稿屢易,致一再重排,這種超越牟利的精神,亦至可感佩,謹附誌於此。

13.本書編輯時,深得下列諸書的幫助:

(1) Schultze–Sevenoak–Schuyler: Plane Geometry.

(2) Johnson: Modern Geometry.

(3) Court–Altshiller: College Geometry.

(4) Hudson: Ruler and compasses.

(5) 中島秀次郎:受驗幾何之根柢。

(6) 伊藤政治:幾何學問題解法根本的研究。

(7) 柳原吉次:幾何學軌跡及作圖。

(8) 林鶴一:軌跡問題。

(9)林鶴一:初等幾何學作圖.

(10)林鶴一:幾何作圖不能問題.

(11)長澤龜之助:幾何辭典.

(12)長澤龜之助:續幾何辭典.

(13)Hadmard: Lecons de Geometrie elementaire, Tome I, Geometric Plane.

(14)F. G. M: Exercices de Geometrie.

(15)余介石譯:佩式奈幾何作圖原理.

謹此志明,以示不敢掠美.

14.本書習題,另編有解答,稍遲即可出版,仍由本局印行.但此解答只能售與教師,購閱者須由校中正式具函證明,方可發售.

15.本書編時,雖曾參考名著多種,并據友好在各校試敎的結果,加以改訂,始行付梓,但恐疵謬仍所不免.切盼海內方家,各校敎師,嚴加指正,以便隨時修正.如蒙賜敎,無任感盼.

民國二五年六月編者謹識,

時在四川省立重慶大學數理系.

告讀者

高一學生程度不甚整齊,故本書編制,採取極有彈性的方法,以求能多方適應.

(一)如班中學生程度均甚優良,則第一段中除第一編全部,第二編中的對稱,第三編中的有向角、九點圓、西摩松線,第四編中的不可通約論各節外,其餘只須略作說明,而令學生自習,定無困難.本書篇幅雖不甚多,內容頗為充實豐富,雖略去一部分淺易者,決不至不敷教授時間分配.

(二)遇程度較遜的一班,則第一段的教授時間,宜儘量延長,複習各定理時,須在教室中舉行問答,或令學生板演,以補足證明中所略各步.第二段的第七編可完全省略外,尙可略去極大、極小的一部分.第三段的第八編,只須授重要軌跡以前各節,幷最後的阿波羅尼斯圓;第九編中涉及作圖範圍的理論,他如四切圓應用、等積作圖各節,也可省略;而以充分時間,在教室中討論幷補充書內所略去的敍述.如此,學生卽不至感受教材太重的困苦,部定標準各項,也無遺漏.

(三)一班中常有程度優劣不等的情形,則宜參酌(二)所述方法教授,以顧及程度較低諸生的困難.其不及在教室中討論各部分,可充參考教材,由教師指導天資學力較優者自習,庶高材生也不至喪失興趣.

修正課程標準適用

新編
高中平面幾何學上冊

目次

修正課程標準適用

新編

高中平面幾何學上册

第一編

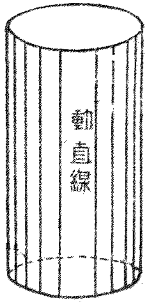
緒論

1. 幾何學目標及定義　幾何學目標在論空間圖形性質,如形態、大小、位置及他種關係.所以幾何學爲研究圖形性質的科目,圖形即是幾何學的對象.無論如何複雜的圖形,都不外由點、線、面、體四者合成.這四種基本圖形,叫做幾何元素.各種元素就一般情形論,有兩種關係如下表:

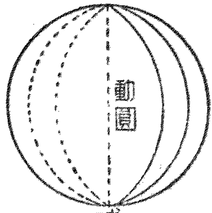
元素 / 關係	點⇄線	線⇄面	面⇄體
運動關係	點動成線	線動成面	面動成體
界限關係	線以點爲界	面以線爲界	體以面爲界

譬如軌跡,常可視爲動點所成的線;柱面由動直線圍成;球由動圓旋轉而生.線既以點爲界,故二線相交得點,而點又可在線上;面既以線爲界,故

二面相交成線,而線又可在面上.



柱



球

2. <u>平面幾何學與立體幾何學</u>　我們所研究的圖形,如都在同一平面上,便為**平面幾何學**.在同一平面上的圖形,叫**平面形**.我們在初級中學,曾學過許多平面幾何學的理,但是還有些理論(如度量的理),未透澈討論,有些問題(如軌跡與作圖題),未詳細搜討.現在進了高級中學,應當做深一層的研究.本書內容乃對初中已習的平面幾何學知識,加以補充和整理.

研究不同在一平面上的圖形,則為**立體幾何學**,在高中二年級甲組,方能講到.

3. <u>幾何學出發點——公理</u>　幾何學所用的方法叫**演繹法**,即以若干基本原理為根據,依**論理學**(或稱**邏輯**)的步驟,推究圖形的各種性質.

這原是算學一門科目的共同方法,不過在幾何學中,格外來得明顯.

演繹法爲逐步的推理,每一步皆須有根據,如此窮源溯流,必有止境.換句話說,即必須有出發點.幾何學從若干沒有證明的原理出發,普通認原理可以無證自明,而稱爲**公理**,其實是一種公共規約,爲研究入手處,這是算學與自然科學方法上的不同.

在此我們要注意一件事,即幾何學所論圖形,是抽象觀念,而非具體實物.譬如無大小的點,無粗細的線,無厚薄的面,皆不能自實物得之.但這些觀念,和實物性質極相近,故由此推知的知識,能在實際上應用.

4. <u>名詞和定義</u> 欲所論各觀念有明晰正確的意義,宜記以簡明的名詞,并立其精密的定義.一個名詞的定義,即用已知觀念,去說明所定觀念的特徵,以示別於他種觀念.照這樣說來,也必須從若干基本名詞做基礎爲說明的起點.但本書對於這些基本名詞,概不再加定義,如點,線,直線等是.

註 許多幾何上基本名詞的定義,初中皆已熟習,

高中教課時間有限,又需補充許多新教材,故不及重述.

習題一第 1 題,將初中幾何內名詞悉數列為一表,學生務須詳述其定義以作複習,並供檢查之用.該表乃就圖形關係構成,藉以對幾何平面圖形,作一鳥瞰.

立一名詞的定義,必須注意下列三事:

(一)說明中的詞句必須確定,無循環顛倒的弊病.

(二)須能指出觀念的特徵,以別於其他觀念.

(三)所舉特徵,須詳略適度,不可太過和不及.

例一　說"二點間最短距離叫直線",是犯了循環的毛病,因為在初等幾何中,距離的觀念,須由直線的觀念確定.

例二　說"小于鈍角而大于銳角的角叫直角",便犯了顛倒之弊.

例三　說"無起訖的線稱為直線",就未說出主要特徵.

例四　說"各邊都相等的四邊形為平行四邊形",條件嫌多,因為只要二組相等對邊就够了.

例五　說"各邊都等的四邊形是正方",則條件嫌不够.

習題一

1. 下表中的名詞,初中皆已習過,試舉其定義:

- 直線形
  - 度量（比、單位）
    - 距離
      - 二點間距離
      - 點線間距離
      - 二平行線間距離
    - 面積
  - 非封閉形
    - 線段、半直線、延線——線段的內分與外分、折線
    - 角（頂、邊、點）
      - （角的大小）
        - 周角、平角、直角—垂線、垂趾；中垂線
        - 反角、劣角、鈍角、銳角
      - （二角關係）
        - （量的方面）—餘角、補角、共軛角
        - （位置方面）—隣角、對頂角、錯角、同位角
    - 平行線
  - 封閉形（對角線、周界、內外角）
    - 三角形（底、高；中線；頂垂線；內外角；分角線）
      - （就邊論）—等腰三角形、等邊三角形
      - （就角論）—直角三角形(斜邊、腰)、銳角三角形、鈍角三角形
    - 四邊形
      - 任意四邊形—箏形
      - 梯形(高、底、腰)—等腰梯形
      - 平行四邊形(高、底)—長方形、菱形—正方形
    - 多角形——等邊多角形、等角多角形——正多角形
- 圓（心、半徑、直徑）
  - 弧——優弧、劣弧、半圓
  - 圓與直線
    - 半徑—圓心角、扇形
    - 弦—圓周角—弓形—內接多角形
    - 割線
    - 切線—外切多角形
  - 二圓
    - 內切圓、外切圓、同心圓
    - 公弦、聯心線
    - 內公切線、外公切線
  - 度量——圓周、圓面積(圓周率)

2. 試舉在初中幾何學已習的重要空間圖形定義.

3. 試說明下列各種符號的意義:

(一) ≡; =; ≒; >; <; ≧; ≦; ∽; ∵; ∴.

(二) ∠; ∠s; st.∠; rt.∠; rt∠s; ⊥; //.

(三) △; △s; rt.△; ▱; ▭; ⊙; ⓢ; ⌒.

註　各名詞和符號,宜先就初中幾何複習,以期熟諳.

4. 下列各定義,如有不妥處,試行指出:

(一)不曲的線,叫做直線.

(二)不平行的直線,叫做相交線.

(三)大于直角,或小于平角的角,叫做鈍角.

(四)兩組對邊平行的四邊形叫梯形.

(五)首尾銜接的線叫圓.

(六)線上任何點都距定點等遠的叫做圓.

(七)距定點等遠點的軌跡叫圓.

(八)線上任取一部分,能使其完全與他一部分重合的,叫做圓.

5. <u>幾何命辭</u>　幾何命辭是公理,公設,定理和問題等的總稱.

(一)公理和公設　不附理由的原理,叫公理(§ 3); 假設可能的作圖法,叫公設.

(二)定理和系　可得證明的判斷,叫定理.易

於由定理或就其證法推出的結果,叫系或推理.

(三)問題　求作一圖形,使合于已知條件,叫作圖題.求一量(如線段、角或面積)與其他已知量的關係,叫計算題.作圖題作法步驟,須有根據,且要證明作出的圖確合已知條件.計算題中算式,須有理由;推演步驟,應合運算法則,如代數中所用的算律.

6. 公理和公設　茲分述幾何學中所用的公理和公設如下:

(甲)普通公理　卽幾何學與代數學所共有者.

(一)等量公理　兩組等量(或數)的和、差、積、商仍相等;與同量或等量相等的兩量也相等.

(二)不等量公理

(1) 比大量還大的必更大,比小量還小的必更小.

(2) 兩同向不等式的和與積,及自一不等式減去異向不等式的差,或被後者所除的商,仍是不等式,向亦同.但乘除時以兩式兩邊都是正項爲限.

(3) 自等式減不等式,或爲不等式所除,則其

(一〇)

差或商,仍爲一不等式,但向與原式相異.

註 上文所言加,減,乘,除,係指兩邊各相運算.

注意 初等幾何學所言量,除特殊規定外,皆爲正.

(乙)幾何公理和公設

(一)定線公設 過二點可定一直線.

(二)延線公設 直線可以無限的延長.

(三)作圓公設 已知圓心和半徑,則可作這圓.

註 由此三條公設,便可使用直尺和圓規.

(四)移位公理 凡圖形不因移位而改大小及形狀.

(五)直線公理 經過二點只有一直線.

註 由此可知:(1)二直線如相交,只能有一交點.(2)如二直線有一段相合,則必完全相合.

(六)全分公理 全量大于分量,而爲分量的總和.

(七)平行公理 過已知線外一點,只有一平行線(這公理稱爲歐氏Euclid公理).

7. 疊合法 初等幾何學所論,以量的比較爲基本問題,入手方法,就是將圖形疊合,而藉以判斷.由此可得幾條重要的等量定理,做後來推

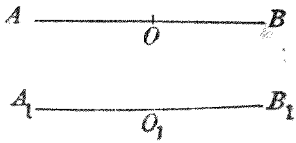
(地)

證等量的根據.這種證題法叫**疊合法**,是自移形公理出發的.

注意 能疊合的圖形,叫**全等形**.

今列舉可用疊合法證明的基本定理如下:

(一)平角相等定理 **凡平角皆相等.**



如右圖,設$\angle AOB$和$\angle A_1O_1B_1$各為一平角.將O_1合於O點,O_1B_1合於OB,則O_1A_1也必合于OA(直線公理註).故這二平角完全疊合,因而相等.

系一 **直角皆相等.** 因$rt.\angle=\frac{1}{2}st.\angle$故也.

系二 **自直線上一點,只可作其一垂線.**

因直角既皆相等,所以如有二垂線,必定相合.

註 過初中已習的簡易定理,本書皆略作說明,以供複習,且備引用,但不再採正式的證明形式,以免與初中重複.

習題二

1. 試用代數式表出等量公理.

2. 試用代數式表出不等量公理.

3. 如用代換公理:**式中的量,可用等量代換,其結果不改**,則可推出等量公理;試寫出證明來.

提示 例如將$b=c$代入$a=b$,便得$a=c$.

4. 試證:一線段只有一中點.

5. 試證:一角只有一平分線.

6. 試證:一線段只有一條中垂線.

7. 試證:三角形各邊上,只有一條中線.

8. 如一點 P,內分已知線段 AB,使 $AP:PB$ 等于定比,試求 AP、PB 與 AB 的關係,并證這樣的內分點,只有一點.

9. 設 P 點外分線段,求解上題.

10. 上二題對于 OP 半直線分 $\angle AOB$ 的情形,有沒有相同結果.

8. <u>相關角各定理</u>　由全分公理,易證:

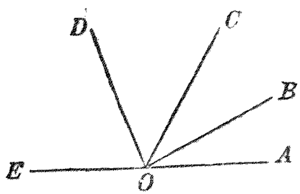
(一)平角定理　**自一直線上一點向同側引若干半直線,則自原線起,各線與隣線所成諸角的總和必等于一平角或二直角.**

如右圖:

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD$

$+ \angle DOE = \angle AOE$

$= st.\angle = 2rt.\angle s.$

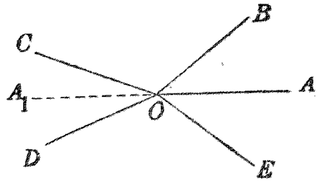


其理據全分公理即明.

(二)周角定理　**自一點向四周引若干半直線,則各線與隣線所成諸角的總和必為二平角或四直角.**

設　OA_1 為半直線 OA 相反引長的延線,則

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD$
$\quad +\angle DOE+\angle EOA$
$=(\angle AOB+\angle BOC$
$\quad +\angle COA_1)+(\angle A_1OD$
$\quad +\angle DOE+\angle EOA)$
$=2st.\underline{\angle s}=4rt.\underline{\angle s}.$



下面三定理,證法以等量公理爲主.

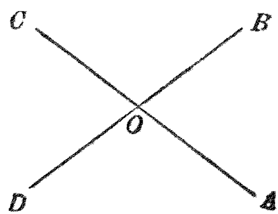
(三)補角定理　**同角(或等角)的補角必等.**

因如$\angle A$、$\angle B$均與$\angle O$相補,則$\angle A+\angle O=st.\angle=\angle B+\angle O$.故有$\angle A=\angle B$.　同法可證:

(四)餘角定理　**同角(或等角)的餘角必等.**

(五)對頂角定理　**對頂角必相等.**

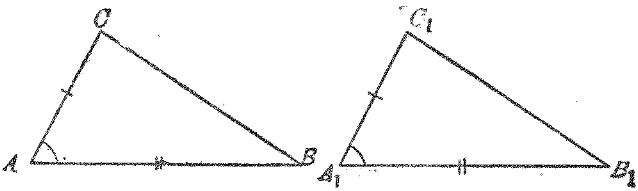
因$\angle AOB$、$\angle COD$同爲$\angle BOC$的補角,故$\angle AOB$、$\angle COD$二對頂角相等.



9. <u>全等三角形</u>　如兩三角形全等,則各邊,角必對應相等.但如欲兩三角形全等,只須知一部份的邊,角是否對應相等,即能決定.這種全等三角形定理,也係從疊合法證得.

註　這種全等定理,在證等量時,頗多應用.

(一)全等三角形定理一$(s.a.s.)$ **兩三角形,有二邊與夾角對應相等,則爲全等形.**



因如　$AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, 則疊合這相等角,且使相等邊各相合時,$B$與$B_1$,$C$與$C_1$亦各相合,因而完全疊合.

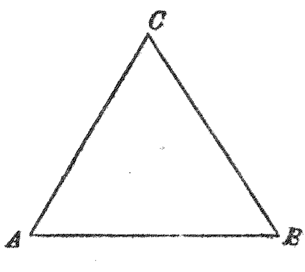
(二)全等三角形定理二$(a.s.a.)$ **兩三角形,有二角與其公共邊對應相等,則爲全等形.**

因如　$AB=A_1B_1$,　$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$,　$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$,則疊合這相等邊,且使相等角各相合時,餘二邊也必各自疊合,且C亦與C_1相合,因而完全相等.

三邊對應相等的三角形也全等,但須先證:

(三)等腰三角形定理

如一三角形的二邊相等,則對等邊的二角,也必相等.

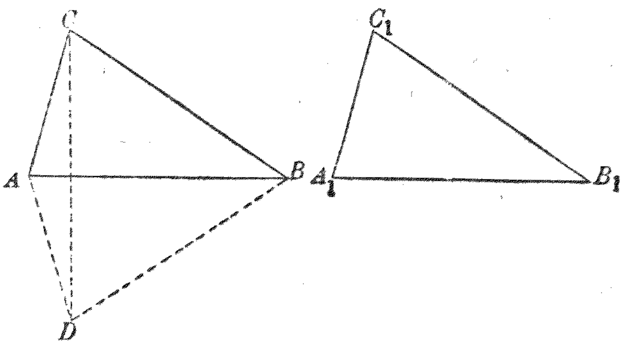


設$\triangle ABC$中$CA=CB$,將這三角形翻疊于本身上,使CB落在CA的原位置上,則CA落在CB

的原位置上,故 A 與 B 易位相合而 AB 也翻疊以與 BA 相合.所以 $\angle CAB = \angle CBA$.

註 另一證法,見習題三第 6 題.

(四)全等三角形定理三 (s. s. s.) **兩三角形,如各邊對應相等則為全等形.**



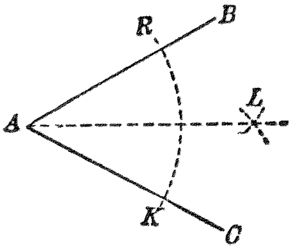
設 $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.移動 $\triangle A_1B_1C_1$,使 A 與 A_1 合,B 與 B_1 合,而 C_1 與 C 相對如 D.連 CD,則由 $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ 為二等腰三角形,得 $\angle ACD = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BDC$.相加得 $\angle ACB = \angle ADB = \angle A_1C_1B_1$.因此就證明

$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1.$$

10. <u>**基本作圖題**</u> 全等三角形定理,在證明基本作圖題時極有用.

(一)平分已知角

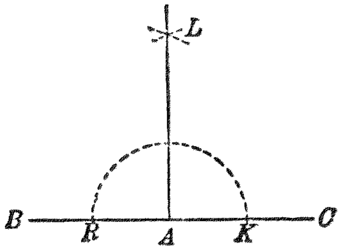
以已知角$\angle BAC$的頂點A爲心，任作一弧，交二邊于K和R。再就K、R爲中心，取適當等長爲半徑，交換作弧交于L。連AL，即所求平分線。



試聯KL、RL，則由 s.s.s. 便知$\triangle AKL \equiv \triangle ARL$，因而

$$\angle KAL = \angle RAL.$$

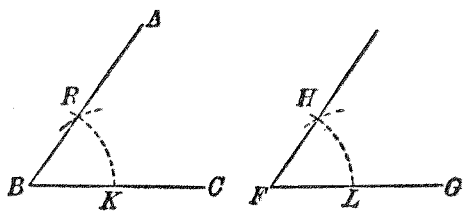
注意　如BAC爲一直線，則　$\angle BAC = st.\angle$，而$\angle BAL = \frac{1}{2}st.\angle = rt.\angle$，即$AL \perp BC$，而得



(二)過直線上一點作其垂線。

(三)相等角作法

設$\angle CBA$爲已知。任作半直線FG。再以B和F爲心，相同的半徑，各作一弧。設所作弧交$\angle ABC$二邊於K、R；另一弧交FG于L。以L爲中心KR爲半徑作弧，與過L的弧相交于H。連FH，得$\angle HFG = \angle ABC$。



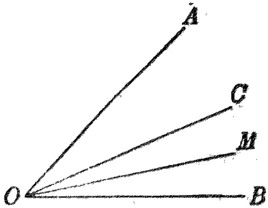
由 s. s. s. 即證得$\triangle FLH \equiv \triangle BKR$，故$\angle LFH = \angle CBA$。

註　同圓或等圓的半徑必等，由圓的定義即明。就此可知上列各題中的相等邊。學生試自指出。

習題三

1.二隣角相補且相等,試證其公共邊與外邊垂直.

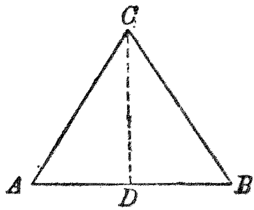
2.一角的平分線逆引長之,必平分其對頂角,試加證明.



3.右圖中 OC 平分 $\angle AOB$,試證 $\angle AOM - \angle BOM = 2\angle COM$.

4.如上題圖中 OM 在 $\angle AOB$ 外,應有何種結果?

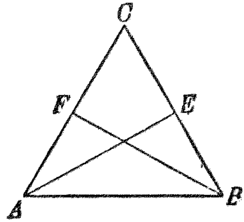
5.試述一直線上類于上二題之理,幷加證明.



6.右圖中 $AC=BC$,作 $\angle ACB$ 的平分線,交 AB 於 D.試由全等三角形的理,來推證等腰三角形定理.

7.如全等三角形定理三(s.s.s.)圖中 AC 與 AD 合成一直線,或 CD 線在 $DACB$ 之外,其證法中,有無稍應改動的地方?

8.試做等腰三角形定理的證法,證明如一三角形的兩角相等,則對等角的兩邊也必相等.



9.右圖中 $\angle CAB = \angle CBA$, $AE = BF$. 試求出圖中的等線段和等角,幷由此證明上題.

10.證明一三邊皆等的三角形中,各角也皆相等.又一各角都等的三角形中,各邊也必盡相等.

11.命辭範式　一命辭都可分爲前詞與斷案二部分.前詞是假設已知的事項,斷案則爲可推知或求知的結果.以M代前詞,U代斷案,則得命辭範式如下:

如有M(前詞),則必有U(斷案).

若前詞、斷案,各由數事項合成,則範式爲:

如有M、N、....(前詞),則必有U、V、..(斷案).

例一　對頂角定理的命辭,寫成範式如下:

如有二角爲對頂角(前詞),則這二角必等(斷案).

例二　等腰三角形定理命辭,寫成範式如下:

如一三角形中二邊相等(前詞),則其對角必等(斷案).

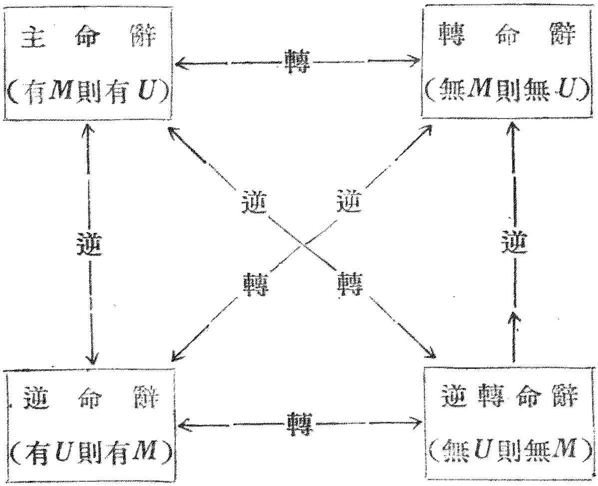
例三　全等三角形定理一$(s.a.s.)$　如在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中,$AB=A_1B_1$,$AC=A_1C_1$,$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$(皆前詞),則$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$,$\angle BCA=\angle B_1C_1A_1$,$BC=B_1C_1$(皆斷案).

12.命辭的換位與換質　將一命辭的前詞、斷案對調,叫換位;將肯定語氣與否定語氣互改,叫換質.

由換位與換質,可化一命辭爲四,列表如下:

結構＼命辭	主命辭	逆命辭（換位）	轉命辭（換質）	逆轉命辭（質與位皆換）
前　詞	如有 M	如有 U	如無 M	如無 U
斷　案	則有 U	則有 M	則無 U	則無 M

這種關係是互相對立的,有如下圖所示:



由此即可明白每二種命辭的關係.

註　逆命辭或稱**反命辭**,轉命辭或稱**對命辭**.

例一　對頂角定理的四種命辭如下:

主命辭　如二角為對頂角,則這二角必等.

逆命辭　如二角相等,則這二角必為對頂角.

轉命辭　如二角非對頂角,則這二角不等.

逆轉命辭　如二角不相等,則這二角必非對頂角.

例二　等腰三角形定理的四種命辭如下:

主命辭　如一三角形中二邊相等,則其對角必等.

逆命辭　如一三角形中二角相等,則其對邊必等.

轉命辭　如一三角形中二邊不等,則其對角不等.

逆轉命辭　如一三角形中二角不等,則對邊不等.

注意　由上例便知:一定理成立時,逆定理未必同時成立(如對頂角定理的情形).但其逆轉定理,則必同時成立,理見§15.

13.幾何證題法　幾何證題法,可概括爲二大類:

(一)**直接證法**　由定理中假設(即前詞部分),逐步推求以達于求證的斷案,則爲直接證法.這種方法,性質是積極的.幾何中多數定理都是用直接法去證.

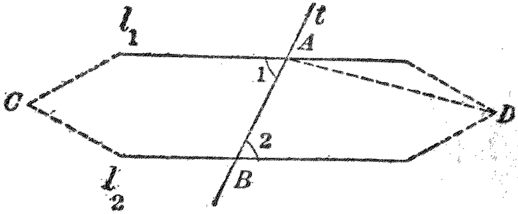
(二)**間接證法**　這種證法,用處雖不如(一)之廣,但是許多重要基本定理,往往爲直接法所不

能施,非恃此不可.這種證法是消極的不證明結論的正面成立,而駁倒結論的反面.反面如能否決,即可襯出正面來。

例如§8的相關角各定理,即係直接證明;§7平角相等定理的系二,以及習題二中第4,5各題,需用間接法去證。

14.歸謬法　間接證法的步驟,多爲逆行的.本來要駁倒結論的反面,却姑設其可以成立.再用直接證法手續推出一不合理(即背于原定理已知事項或公理,定理等)結果,因此刺謬,可斷反面成立之說不合.反面既誤,正面必眞,所以稱爲歸謬法.

例　試證平行判別定理一:以一直線截另二直線,如所成錯角有一對相等,則二直線無論如何延長,不能相交.



右圖中:

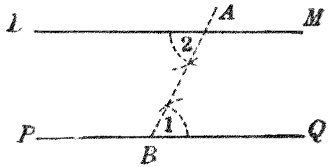
$\angle 1=\angle 2$,

則l_1、l_2不能相交。

設l_1與l_2交於C,則取$BD=AC$,

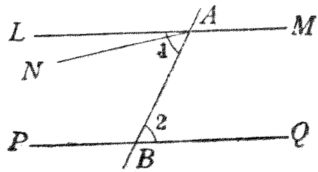
便可證$\triangle ABD\equiv\triangle BAC(s.a.s.)$. 因知$AD$與$l_1$相合,而$l_1$、$l_2$有$C$、$D$二交點,此爲不合理之事〔§6直線公理註(1)〕.

註 由這理卽可知**作一直線過一已知點 A，而與一已知線 PQ 平行**的方法如次：



過 A 點任作一直線與已知直線交於 B. 再作 $\angle 2=\angle 1$〔見 §10(三)〕, 得 $LM \parallel PQ$.

這定理的逆命辭也成立，卽**以一直線截二平行線，則所成的錯角必相等**(平行性質定理一).



因如 $\angle 1 \neq \angle 2$，可作 $\angle BAN=\angle 2$，則 $AN \parallel PQ$. 如此則過 A 有 AM、AN 二直線都和 PQ 平行，而與平行公理(§6)相衝突.

習題四

分析下列各命辭的前詞和斷案，并寫出四種命辭.

1. 平行判別定理一(卽上面的例題).

2. 在同圓與等圓中，等圓心角所含的弧必等.

註 所說的弧和角概指劣弧、劣角而言.

3. 如一直線與三角形一邊平行，則必分他二邊成比例線段.

4. 一線段的中垂線上任一點，都距線段兩端等遠.

5. 二平行弦在一圓上所截取的二弧必相等.

寫出下列兩命辭的各種逆命辭來：

6. 從圓心到弦上的垂線,必平分這弦和對弧.

註　前詞、結論各含兩事項,可任取其一換位.

7. 一圓的切線與過切點的半徑必相垂直.

用歸謬法證明下列各題:

8. 非等圓(即半徑不相等的圓)必不能相疊合.

9. 一圓只有一個圓心.

10. 二等圓相合時,則圓心必相合.

11. 二等圓心相合時,二圓必完全疊合.

12. 二不等圓的心相合時,小圓必完全在大圓內.

15. 逆轉命辭定律　一定理的逆命辭,未必也能成立,如對頂角定理即是.但逆轉命辭却一定爲眞,我們可用歸謬法證明這條逆轉命辭定律.

設主命辭爲:　如有 M,則必有 U,

則逆轉命辭是:　如無 U,則必無 M.

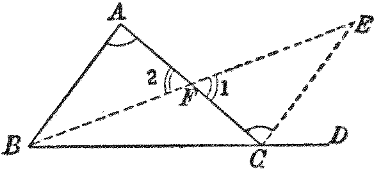
假若無 M 的斷案不眞,就是有 M.然而按主命辭所言,既有 M,則必有 U.如此一來,便知與逆轉命辭的前詞相背了.

又按 §12 的表,知轉命辭是逆命辭的逆轉命辭,定理逆命辭,既不一定爲眞,所以轉命辭也未必成立.

16. 證題通法——解析與綜合　我們欲證

一斷案,常設想如這斷案成立,應有何種前詞.再就所得前詞漸次反推,以至于定理中的已知事項.這種程序,叫做解析,是構思的利器.但是舉以曉人時,逆推的條理,每覺欠明晰,而宜從定理已知事項起逐層推去,以達於求證的斷案,如普通課本所載皆是.這法叫綜合法.

例一 三角形外角定理:**三角形外角大於內對角.**

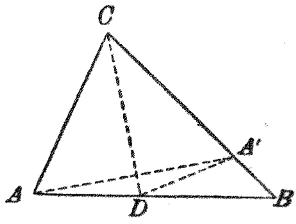


如右圖,$\angle ACD$為$\triangle ABC$一外角,求證其大於內對角$\angle BAC$.

解析 如$\angle ACD$大於$\angle BAC$,則可在$\angle ACD$內作一等于$\angle BAC$的角.但等角多由全等三角形而得證,故宜設法得二全等三角形.試取$CE=AB$,連BE,與AC交於F,應得二全等三角形$\triangle AFB$,$\triangle CFE$.

證 取AC中點F,聯B至F,并延長到E,使$FE=BF$.再聯CE,則按對頂角定理,得$\angle 1=\angle 2$.更由$s.a.s.$便可知$\triangle AFB\cong\triangle CFE$. 因此即有$\angle ACD>\angle ACE=\angle CAB$.

例二 不等邊三角形定理:**三角形中對大邊的角必大.**



如右圖,$\triangle ABC$中,$BC>AC$,

求證 $\angle BAC > \angle CBA$.

解析　如能作一三角形,以 $\angle BAC$ 爲外角, $\angle CBA$ 爲一內角,則可由上題的外角定理,證明本題斷案.依全等三角形關係,移 $\angle BAC$ 到 BC 邊上,(即作 $\angle C$ 的平分線,與 AB 交於 D,得二個全等三角形),即可證明.

證　作 $\angle ACB$ 的平分線,交 AB 於 D.因 $BC > AC$, 故可在 CB 上取 A',使 $CA' = CA$,連 $A'D$,則 $\triangle CA'D \equiv \triangle CAD\ (s.a.s.)$.

$$\therefore \angle CAD = \angle CA'D > \angle A'BD \quad (\text{外角定理}).$$

註　本題即等腰三角形定理[§9(三)]的轉命辭.

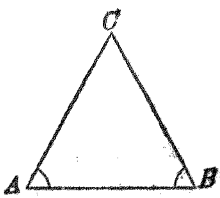
注意　由上述解析,可以提示一種更簡的證法,即連接 AA',而證 $\angle BAC > \angle A'AC = \angle CA'A > \angle CBA$.

17. <u>窮舉法</u>　如一定理的斷案,反面不只一層,則須將一切的反面情形,盡行推翻,以襯出正面的成立.這種較繁的間接證法,叫窮舉法.

例一　二等角三角形定理:**三角形中等角的對邊,必定相等.**

註　這定理即等腰三角形定理的逆命辭.

右圖, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \angle B$,求證 $AC = BC$.



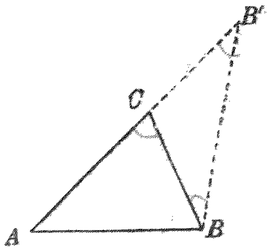
證　如 $AC > BC$, 則 $\angle B > \angle A$; 如 $BC > AC$, 則 $\angle A > \angle B$; 皆與原題假設 $\angle A = \angle B$ 相背.故必 $AC = BC$.

例二　不等角三角形定理:**三角形中對大角的邊必較大**(本題卽不等邊三角形定理的逆命辭).

在 $\triangle ABC$ 中,設 $\angle A<\angle B$.如 $BC>AC$,則 $\angle A>\angle B$(不等邊三角形定理);同理,如 $BC=AC$,則 $\angle A=\angle B$;皆與原來的題設不合.所以必須 $BC<AC$.

註　由此定理可證:

三角形二邊和差定理:**三角形二邊的和必大於第三邊.**



延長 AC 至 B',使 $CB'=CB$,則 $\angle CB'B=\angle CBB'$(等腰三角形定理) $<\angle ABB'$(全分公理).故 $AC+CB=AC+CB'=AB'$(全分公理) $>AB$(不等角三角形定理).

注意在這證法,幷未用"二點間聯線以直線段爲最短"的理爲根據.

習題五

1. 試由外角定理(§16 例一)證明平行判別定理一.

提示　用間接證法.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,$AC>AB$,D 爲 BC 上任意一點,試證 $AC>AD$.

3. 設 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 最大,在 AB 上任取一點 D,AC 上任取一點 E,則 DE 必小於 BC,試加證明.

4. 作 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分線,交 BC 於 D,試證 $AC>CD$.

且 $AB>BD$.

註　由此顯見 $AB+AC>BC$ (參看§17例二註內所述注意的事項).

5. 試證連二點的折線,必大於連這二點的直線段.

6. $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分線交 BC 於 D, 如 $AB>AC$, 則必 $BD>CD$,試證明之.

7. 試用窮舉法證明上題的逆命辭.

8. 在 $\triangle ABC$ 的 A 點外角平分線上任取一點 M,試證 $\triangle BMC$ 的周界必大於 $\triangle ABC$ 的周界.

9. $\triangle ABC$ 中, E 為 BC 邊的中點,如 $AB>AC$, 則必 $\angle CAE>\angle BAE$.

10. 用直接證法證明上題的逆命辭.

11. 用窮舉證法證明前題的逆命辭.

12. 設 D 為 $\triangle ABC$ 內任意一點,試證:

(1) $DB+DC<AB+AC$.

(2 $\angle BDC>\angle BAC$.

第一編　摘　要

本章授下列各項:

幾何學定義與目標.	平角與直角定理.
幾何學出發點.	相關角各定理.
命辭的組織與變化.	全等三角形條件.
證題通法與特法.	三角形中的等邊和等角關係.
公理和公設.	三角形中不等邊角關係.
疊合法和應用.	三角形二邊和差定理.

1. 幾何學以空間圖形的研究為目標.

2. 幾何學以定義、公理和公設為出發點.

3. 公理有(一)普通公理、(二)幾何公理兩種.

4. 比較二量的基本方法是疊合法.

5. 命辭分前詞與斷案二部份,由換位、換質兩種手續,可變化得四種形式:(I)主命辭,(II)逆命辭,(III)轉命辭(IV)逆轉命辭.

6. 主命辭成立時,逆轉命辭必成立.但其逆命辭及轉命辭,就未必也能成立.

7. 幾何證題分直接、間接兩種方法.

8. 間接法有歸謬法和窮舉法兩種.

9. 證一幾何題,常藉解析法思考,而以綜合法述明.

第二編

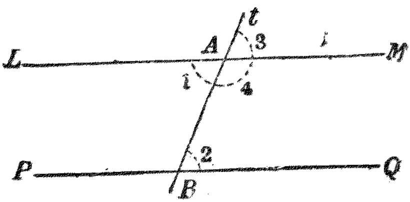
直線形

18. 本編目的　初等幾何學所研究的平面形限於直線與圓二種.上編已就證題法爲經緯,將二者基本要理作一簡明的複習.本編目的在將直線形各種重要特性加以整理并補充稍高深的材料,以立日後進修高等算學的基礎.以後各編編製,也與此略同.

註　凡初中已習的部分,本書仍作系統的講解,但說明儘量從略,對補充的新教材,則陳述務求詳盡.

19. 平行線　由 §14 的平行判別定理一和平行性質定理一,可推得下列的平行線定理.

(一)平行判別定理二　**以一直線截另二直線,如(一)所成二同位角相等,或(二)所成二同側內(或外)角相補,則這二直線必定平行.**



如右圖,顯見若有

$\angle 2 = \angle 3$,

或　$\angle 2 + \angle 4 = 2rt. \angle s$,

則必　$\angle 1 = \angle 2$ (何故?),

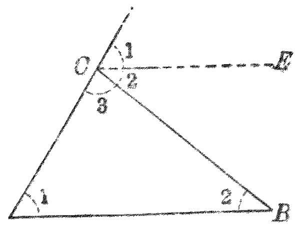
所以　$LM \parallel PQ$ (平行判別定理一).

這定理的逆命辭,可用同一的方法證明,即

(二)平行性質定理二 **以一直線截二平行線,則(一)所成的同位角相等,(二)所成二同側內(或外)角互補.**

20. 三角形及多角形的內外角定理

(一)三角形內角和定理 **三角形的三內角和必等于二直角.**



如右圖,在 $\triangle ABC$ 中,求證

$\angle A+\angle B+\angle C=2rt.\angle s.$

斷案如果能成立,則將這三內角排為依次相鄰位置,二外邊必成一直線.故如依法排置,則 $\angle 1+\angle 2$ 為 $\triangle ABC$ 的一外角,而輔助線 $CE\parallel AB$,其證明不難自行補出.

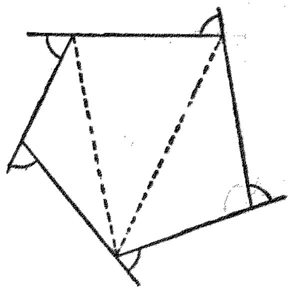
由這定理,可推得幾條重要定理如下:

(二)三角形二內角和定理 **三角形的外角等于其相對的二內角和.**

(三)全等三角形定理四 $(a.a.s.)$ **二三角形有二角和一對邊對應相等則為全等形.**

(四)多角形內角和定理 **n 角形的內角和**

等于 $2(n-2)rt.\angle s$.



因 n 角形顯可分爲 $n-2$ 個三角形也.

又在各頂點的內、外二角和爲 $2rt\angle s$, 而 $2nrt.\angle s-2(n-2)rt.\angle s=4rt\angle s$, 故得:

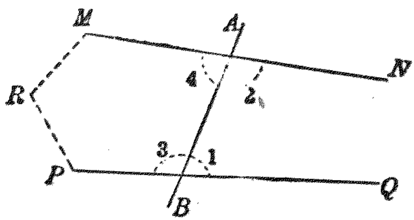
(五)多角形外角和定理　**多角形外角和等于四直角.**

21. <u>相交線</u>　二直線如不平行,則必相交;所以判定相交線的方法,是根據平行線定理的轉命辭.

交線判別定理　**以一直線截另二直線,如所成同側二內角和小于 $2rt\angle s$ 則延長時,必在這一側相交.**

如右圖,已知

$\angle 1+\angle 2<2rt.\angle s$.



(1)若 $MN\parallel PQ$, 則

$\angle 1+\angle 2<2rt.\angle s$

爲不可能之事.

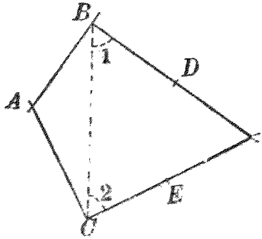
(2)若 AM 與 BP 交於 R, 成 $\triangle ABR$, 則 $\angle 3+\angle 4<2rt.\angle s$.

因此　$\angle 1+\angle 2=2\times 2rt.\angle s-(\angle 3+\angle 4)>2\times 2rt.\angle s-2rt.\angle s$.

即　$\angle 1+\angle 2>2rt.\angle s$, 亦與原來題設相矛盾.

註　歐幾里得卽係以此爲平行公理.

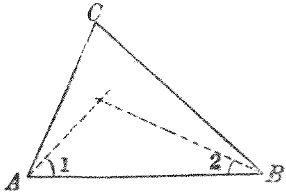
由這理可推出許多系如下:



(一)相交線的垂線,也必相交.

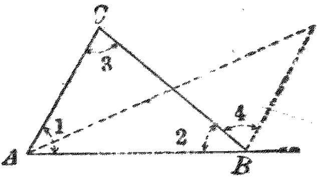
如右圖: $BD\perp AB$, $CE\perp AC$ 則連 BC 後,立見 $\angle 1+\angle 2<2rt.\underline{/s}$. 故 BD、CE 必相交.

(二)在三角形內,其各過一頂點的二直線必相交.



特例,如二中線,二內分角線皆是.因在$\triangle ABC$中,$\angle A+\angle B<2rt\underline{/s}$, 故 $\angle 1+\angle 2<\angle A+\angle B<2rt\underline{/s}$, 自不待言.

(三)三角形的一內分角線和他一角的外分角線必相交.



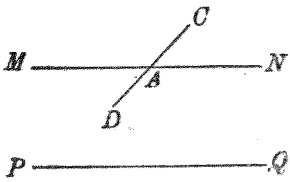
因 $\angle 4=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 3)$, 故如視 AB 爲二分角線截線,則同側二內角和爲 $(\angle 4+\angle 2)+\frac{1}{2}\angle 1$

$$=\angle 1+\angle 2+\frac{1}{2}\angle 3<2rt.\underline{/s}.$$

此外如平行公理,也可用來判斷交線.

例　試證:**與一直線相交的線,必與其平行線相交.**

設 MN、CD 交於 A，而 $MN \parallel PQ$．如 $CD \parallel PQ$，則過 A 點有二直線與 PQ 平行，而與平行公理相背矣．



習題六

1．試證一直線上的垂線與斜線必交．二垂線如何？

2．AD 是 $\triangle ABC$ 中線，$AB > AC$，試證 $\angle BAD < \angle CAD$．

3．試證凸多角形不能有四個或四個以上的銳角？

4．如一凸多角形有四角為直角，應為何種圖形？

5．已知一多角形內角和為外角和 m 倍，求其邊數．

6．二三角形中二邊對應相等，而一組相當邊的對角也相等，試證他一組相當邊對角必相等或相補．如相等對角為鈍角，或第一組相當邊長於第二組，則二三角形全等．何故？

7．試自多角形內任意一點，至各頂點作聯線，而就此證明多角形內角和定理．

8．試證三角形的二外分角線必定相交．

9．試證三角形的二頂垂線必相交．

10．將 $\triangle ABC$ 的 AD、BE 二中線延長二倍到 G 與 H，試證 GH 的聯線必定經過 C 點．

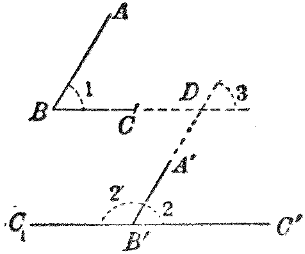
11．如一直角三角形，一銳角倍於他銳角，則其斜邊長倍於較短的一腰，試證明之，并證其逆定理．

（幾）

22. 二組平行線或垂線的夾角

(一)對應邊平行的角　如二角的夾邊對應平行,則必相等或相補.

如右圖,$A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC$,則延長 $B'A', BC$ 必相交(§21 例),設交點為 D.



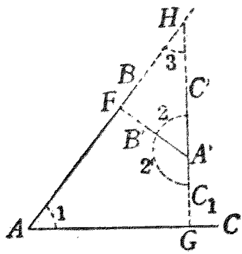
(1) $\angle 2 = \angle 3 = \angle 1$;

(2) $\angle 2' = 2rt.\angle s - \angle 2$
$= 2rt.\angle s - \angle 1.$

註　自一角的頂點向張口處看去,則可分二邊為左右.如上圖,$\angle ABC$ 中,BA 為左邊,BC 為右邊.若二角左邊與左邊平行,右邊與右邊平行,稱為同序平行;否則名逆序平行.由上可知順序時夾角相等,逆序時夾角相補.

(二)對應邊垂直的角　如二角的夾邊對應垂直,則必相等或相補.

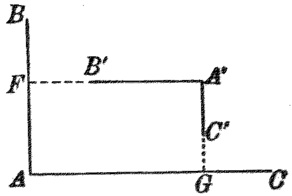
如右圖,$A'B' \perp AB$, $A'C' \perp AC$,而垂趾各為 F 與 G.設 $\angle BAC$ 不是 $rt.\angle$,則 $A'C'$ 與 AB 二直線延長時必相交,因 $\angle BAC + \angle C'GA$ 不等於 $2rt.\angle s$ 也.命二者交點為 H,則就 $rt.\triangle GAH$ 與 $rt.\triangle A'FH$ 論,得



(1) $\angle 1+\angle 3=rt.\angle=\angle 2+\angle 3$, $\therefore \angle 1=\angle 2$;

(2) $\angle 2+\angle 2'=2rt.\underline{/s}$, $\therefore \angle 1+\angle 2'=2rt.\underline{/s}$.

註一　如$\angle BAC=rt.\angle$,則在四邊形$AGA'F$中有三個直角,而內角和又爲$4rt.\underline{/s}$,故第四角,卽$\angle B'A'C'=rt.\angle=\angle BAC$.

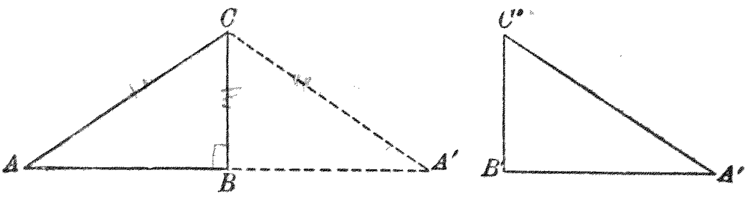


註二　按(一)的註,可如法分別同序垂直和逆序垂直兩種情形,在前者二角相等,在後者二角相補.

23.<u>全等直角三角形</u>　由上節的全等三角形定理四($a.a.s.$),立卽可推知:

(一)全等直角三角形定理一　**二直角三角形有一邊和一銳角對應相等,則爲全等形.**

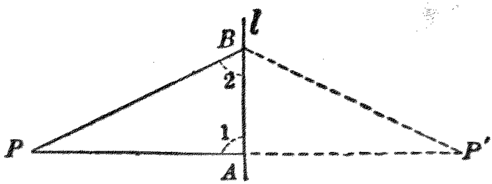
(二)全等直角三角形定理二　**二直角三角形有斜邊和一腰對應相等,則爲全等形.**



如上圖中,$\angle B=\angle B'=rt.\angle$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$,則疊合$B'C'$與BC後,可使A、B、A'在一直線上而成等腰三角形ACA'.故$\angle A=\angle A'$,因而$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

註　本定理證法要點,在將二個直角三角形的直角相隣等邊相合,以成一等腰三角形.

24.垂線與斜線　(一)垂線確定定理　**過線外一點,到這線只有一垂線.**



因如自直線 l 外一點 P,可作 PA、PB 二垂線,則 $\angle 1+\angle 2=2rt.\angle s$,故這二垂線應平行,不能有交點 P.故得由歸謬法證明本題.

註　自線外一點作垂線法,見後文§30.

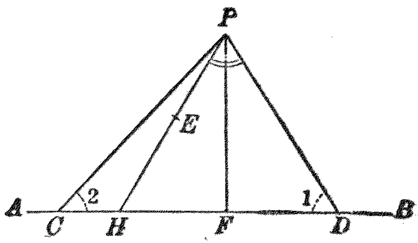
(二)垂線最短定理　**自直線外一點至直線所引諸線段中,以垂線爲最短.**

如上圖,$PA\perp l$,可延長 PA 到 P',使 $PA=AP'$,而聯 BP',則 $rt.\triangle PAB\cong rt.\triangle P'AB\,(s.a.s.)$,而有 $PB=BP'$.

但 $PB+BP'>PP'$　(三角形二邊和差定理,見§17).

又 $PB+BP'=2\cdot PB$, $PP'=PA+AP'=2\cdot PA$,　$\therefore PB>PA$.

(三)斜線定理　**自一直線的垂線上一點,到直線作二斜線,則(1)等長斜線的交點,距垂趾等遠;(2)較長斜線的交點,距垂趾較遠.**



右圖中，$PF\perp AB$，而 $PH=PD$，$PC>PD$.

(1)按全等直角三角形定理二,即知

$$rt.\triangle PFD\equiv rt.\triangle PFH,$$

$$\therefore\quad FD=HF.$$

(2)因 $PC>PD$，故 $\angle 1>\angle 2$. 但 $\angle DPF=rt.\angle-\angle 1$，又 $\angle CPF=rt.\angle-\angle 2$，是以 $\angle CPF>\angle DPF$(不等量公理3).

作 $\angle EPF=\angle DPF$,則 PE 必在 $\angle CPF$ 內,故延長之,必交線段 FC 於一點如 H,則 $rt.\triangle PFH\equiv rt.\triangle PFD$,因而 $HF=FD$. 但 $CF>HF$，即 $CF>FD$.

逆定理　自一直線的垂線上一點到直線作二斜線,則(1)交點距垂趾等遠的斜線必等長,(2)交點距垂趾較遠的斜線必較長.

可用窮舉法(§17)證明之.

習題七

1. 試證:如二三角形各邊對應平行,則各角必對應相等.

提示　只需用歸謬法(§14)證明無相補情形之可能(用三角形內角和定理).

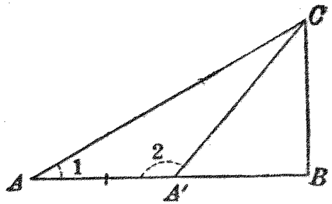
2. 試證:如二三角形各邊對應垂直,則諸角必各等.

3. 如二角對應邊平行,則其分角線必平行或垂直試證明之,幷就同序、逆序二種平行情形,確定其斷案.

4. 設二角對應邊垂直,上題仍能成立否?試加討論

5. 試用歸謬證法,證明全等直角三角形定理二.

提示　設二者不全等,則疊合直角,必如右圖,而∠2為一鈍角(何故)?. 但∠1=∠2(何故?), 應為銳角,遂生矛盾.



6. 試證直角三角形斜邊中點距三頂點等遠.

7. 如三角形一邊上中點距三頂點等遠,則必為直角三角形,且該邊為斜邊,試加證明.

8. 試由不等角三角形定理(§17)證垂線最短定理.

9. 試由§6直線公理的註,做垂線最短定理證法,以證垂線確定定理.

10. 試證等腰三角形內等腰上的頂垂線必等長.

11. 試倣全等直角三角形定理二的證法,直接去證明他的逆定理.

12. 試證一圓和一直線,至多只能有二個交點.

提示　自線外一點到線上,只能作二等定長斜線(?).

13. 設 AD 為 $\triangle ABC$ 的中線, AE 為其內分角線,試證 $AE < AD$.

提示　利用習題六第 2 題和斜線定理的逆定理.

25.離接命辭　取一命辭前詞的一切可能相反情形,推其斷案,合成一命辭,便叫做**離接命辭.**

例　§24 的斜線定理,即係一離接命辭.因前詞中等長的相反情形爲較長與較短,但一斜線較他斜線爲長,則他者較此爲短,故只需取一論之即足.又其逆定理亦然.

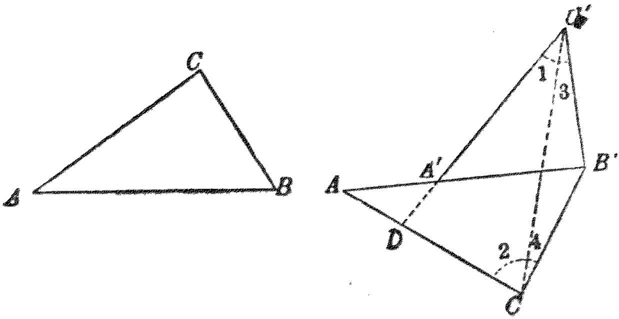
又如不等邊三角形定理(§16 例二),不等角三角形定理(§17 例二),也都是離接名辭,注意二者互爲逆命辭.

離接命辭既係集合一事各種可能情形而成,所以其中任一部分,恰好是其餘部分的轉命辭.故如一離接命辭成立,即主命辭與轉命辭均成立.但轉命辭的逆轉命辭,即主命辭的逆命辭(§12),按逆轉命辭定律(§15),便知**離接命辭與其逆命辭,必同時爲眞或僞.**

註　此種情形就上例即可見.如欲證一離接命辭的逆命辭,只需用窮舉法即得(§17).

26.不全等三角形

定理　**二三角形有二邊對應相等,而第三邊不等,則大邊的所對角,必大于小邊的所對角**



設$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$中,$CA=C'A'$,$BC=B'C'$,而$AB>A'B'$.

置$\triangle ABC$於$\triangle A'B'C'$下,使B與B'相合,BA落於$B'A'$上,如上圖.

聯接$C'C$.如$C'A'$落於$\angle B'C'C$內或與$C'C$相合,則顯然有$\angle B'C'A'\leqslant\angle B'C'C=\angle B'CC'<\angle B'CA$(即$\angle BCA$).

設$C'A'$在$\angle B'C'C$外,延長$C'A'$與CA交於D,則有$C'D>C'A'=CA>CD$,　故　$\angle 1<\angle 2$　(何故?).

且　$\angle 3=\angle 4$　(何故?).　$\therefore \angle B'C'A'<\angle BCA$.

注意　這理是全等三角形定理三(*s.s.s.*)的轉命辭.

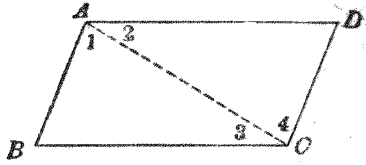
合*s.s.s.*與這理成一離接命辭,故得證明:

逆定理　二三角形有二邊對應相等,而夾角不等,則大角的對邊必大于小角的對邊.

27.平行四邊形

(一)判別定理一　二組對邊各等的四邊形

必為平行四邊形.

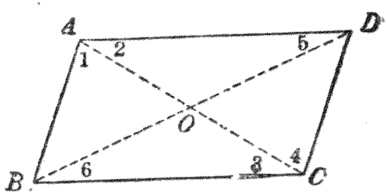


設右圖中 $AB=CD, BC=DA$, 則聯 AC, 分成二全等三角形.故 $\angle 1=\angle 4$, 而得 $AB \parallel CD$. 同理知 $DA \parallel BC$.

(二)判別定理二　**一組對邊相等且平行的四邊形,必為平行四邊形.**

設上圖中 $AB=CD$,且 $AB \parallel CD$,則 $\angle 1=\angle 4$, 因而 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (s.a.s.), 故 $\angle 2=\angle 3$,即得 $DA \parallel BC$.

(三)性質定理一　**平行四邊形的(1)二組對邊各相等,(2)兩組對角也各相等.**



因 $AB \parallel CD$, 故 $\angle 1=\angle 4$, 同理知 $\angle 2=\angle 3$,所以 $\triangle ABC$, CDA 全等,就得 $AB=CD$, $BC=DA$, $\angle ABC=\angle CDA$. 同法得 $\angle BCD=\angle DAB$.

(四)性質定理二　**平行四邊形對角線互相平分.**

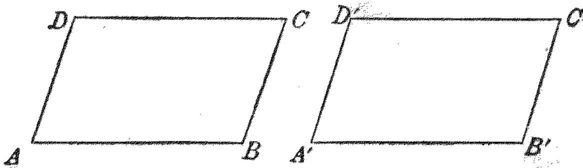
設 AC、BD 交於 O, 則如上可證明 $\angle 2=\angle 3$, $\angle 5=\angle 6$. 故 $\triangle BOC \equiv \triangle DOA$. 所以 $OB=OD, OC=OA$.

系一　**對角線分平行四邊形為二全等三角形.**

系二　二平行線在他組平行線上截取等長線段.

系三　二平行線間,處處距離皆等(即其間公共垂線段皆等長).

(五)全等定理　二平行四邊形,如二邊及夾角對應相等,則必為全等形.



設 $\square ABCD$ 與 $\square A'B'C'D'$ 中, $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $\angle BAD=\angle B'A'D'$,則當疊合 $\angle A$ 與 $\angle A'$ 後, B 落於 B' 上, D 落於 D' 上(何故?). 又按平行公理 (§6), 知 DC 與 $D'C'$ 相合, BC 與 $B'C'$ 相合,因之 C 與 C' 合(何故?).所以 $\square ABCD$ 完全落於 $\square A'B'C'D'$ 上,即二形全等.

系一　二長方形高、底對應相等,則必全等.

系二　二正方形一邊相等,則必全等.

習題八

1. 直接證明 §26 的不全等三角形逆定理,再用歸謬法去證原定理.

2.不全等三角形逆定理與全等三角形定理一(*s.a.s.*)有何關係?

3.設 AD 爲 $\triangle ABC$ 的一中線,如 $\angle ADB$ 是鈍角,則 $AB>AC$,試加證明.又這理的轉命辭如何?能不能成立?

4.試證上題構成一離接命辭,而求其逆定理.

5.$rt.\triangle BCA$、$B'C'A'$,AB、$A'B'$ 二斜邊等長,如$BC>B'C'$,則 $CA<C'A'$,試證明之.

6.如一點 P,不在線段 AB 的中垂線上,則 PA、PB 必不等.又如一點 P,不在 $\angle BAC$ 的分角線上,則自 P 至這角二邊上距離也必不等.試用不全等三角形定理證明.

7.試證四邊形中如兩組對角各相等,則爲平行四邊形.

8.試證平行四邊形性質定理二的逆定理.

9.如平行四邊形的對角線相等,則爲何種圖形?

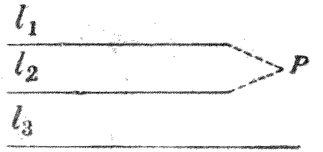
10.如平行四邊形的對角線互相垂直,則爲何種圖形?又其逆定理如何?

11.如二平行四邊形的二對角線及其夾角對應相等,則必全等,試證明之.

12.一組對邊相等他組平行的四邊形,是否必爲平行四邊形?

28.平行截線　欲明一羣直線平行情形,必先證:

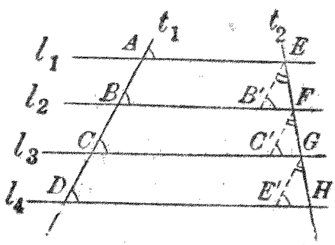
(一)三線平行定理　如二直線同時與另一直線平行,則這二直線必互相平行.



設$l_1 \| l_3$, $l_2 \| l_3$.如l_1不與l_2平行,則應有一交點P.如是則過P點,有l_1、l_2二直線同與l_3平行,而與平行公理不符.

註　有這定理,我們就可說一羣平行直線,其中任取二直線皆彼此平行.

(二)平行截線定理　如一羣平行直線分一截線成相等線段,則分任何截線,也必成相等線段.

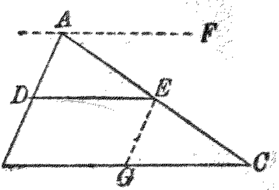


設右圖中$l_1 \| l_2 \| l_3 \| l_4$,且$AB=BC=CD$.可作$EB' \| FC' \| GE' \| t_1$,則$AEB'B$等為▱,故$EB'=FC'=GE'$.由a.s.a.易證△$B'EF$、$C'FG$、$E'GH$皆為全等形,而證得$EF=FG=GH$.

這定理是比例裏三角形中比例線段定理的特例.而那條重要定理,即由此推廣而得.又按這理,可求出許多很重要的推理和作圖題一則

如下:

(三)三角形中底邊平行線定理　**過三角形一邊中點而與底邊平行的直線,必平分第三邊.**



設 D 爲 AB 中點, $DE\parallel BC$. 過 A 引 $AF\parallel DE\parallel BC$, 則因 $AD=DB$, 故 $AE=EC$.

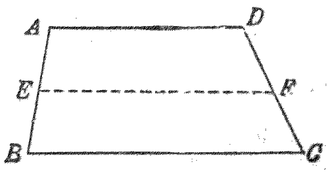
反之,如已知 E 爲 AC 中點,則因一線段只有一中點,(見習題二第 4 題),故過 D 而與 BC 平行的線,必過 E 點.所以 $DE\parallel BC$. 如此就證明:

逆定理　三角形兩邊中點聯線,與第三邊平行.

系　三角形兩邊中點聯線,等于第三邊的一半.

因作 $EG\parallel AB$, 則 $EG=GC$, 且 $BG=DE$ 也.

(四)梯形兩底平行線定理　**過梯形一腰中點與兩底平行的直線,必平分他腰.**

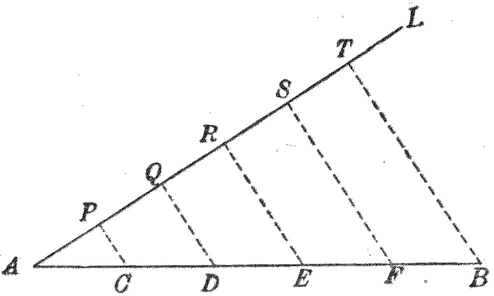


右圖中, $AD\parallel BC$, 而 E 爲 AB 腰中點,又 $EF\parallel AD\parallel BC$, 則 $DF=FC$.

倣上文所述,很容易用間接法證明:

逆定理　梯形兩腰中點聯線,必與兩底平行.

(五)等分已知線段法



設 AB 爲已知線段,而求分成若干等分,可另引一直線 AL, 在其上取 $AP=PQ=QR=RS=ST$. 聯 BT, 作 $SF \parallel RE \parallel QD \parallel PC \parallel TB$, 則得等分點 C 等.

29.軌跡　**一切共有某幾何性質(即合於某幾何條件)的點,集合所成的圖形叫做軌跡.**

軌跡既爲有公性點的總集合,故證明應分兩面:

(一)軌跡上任何點皆有這性質,或是說,皆合於某種原設條件,即軌跡純爲這種點合成,未雜入他種點(純粹性).

(二)合於題設條件的任何點皆在軌跡上,即軌跡已盡含這種點的全體,毫無遺漏(完備性).

注意(一)、(二)兩層互為逆命辭,而可各以其逆轉命辭來代替(據逆轉命辭定律,見§15):

(一)′ 凡不合題設條件的點,必不在軌跡上.

(二)′ 凡不在軌跡上的點,必不合題設條件.

故證軌跡題,共有四種方式:

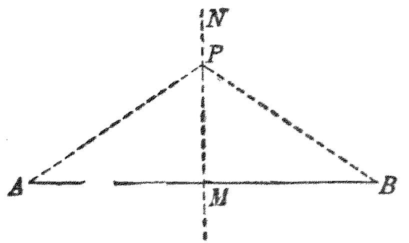
I ——證(一)與(二), II ——證(一)′與(二),

III ——證(一)與(二)′, IV ——證(一)′與(二)′.

30. 基本軌跡和應用

(甲)基本軌跡一 **距一線段兩端等遠點的軌跡是這線段的中垂線.**

(一)一線段中垂線上任何點皆距兩端等遠.



設右圖中 M 為線段 AB 中點, $MN\perp AB$, 而 P 在 MN 上,

則因 $rt.\triangle AMP\equiv rt.\triangle BMP$, $\therefore AP=BP$.

(二)距一線段兩端等遠點,必在其中垂線上.

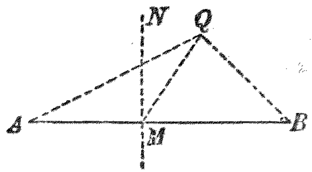
設 $PA=PB$,則 $\triangle AMP\equiv\triangle BMP$(?),故 $\angle AMP=\angle BMP$.但 $\angle AMP+\angle BMP=2rt.\angle$, $\therefore \angle AMP=\angle BMP=rt.\angle$.

注意 由此知:等腰三角形底邊上頂垂線即其中垂線.

註　(一)′、(二)′ 可用§26的不全等三角形二定理來證.

(一)′ 距 A、B 非等遠的點,不在 MN 上.

設 $QA \neq QB$,就 $\triangle AMQ$、$\triangle BMQ$ 知 $\angle AMQ \neq \angle BMQ$,故 QM 不與 AB 垂直,即 Q 不在中垂線 MN 上.



(二)′ 不在 MN 上的點,不距 A 與 B 等遠.

因如此則 $\angle AMQ \neq \angle BMQ$,故 $AQ \neq BQ$.

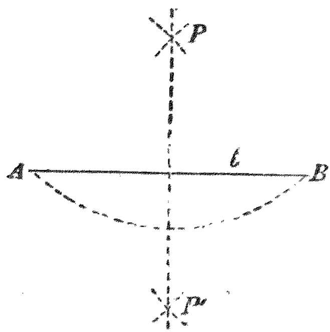
系　距一線段兩端等遠的二點定其中垂線.

注意　如二點之一卽線段中點,本系亦成立.

由此得下述各作圖題:

(1)作已知線段中垂線.

以已知線段 A、B 二端點爲心,取適宜等長半徑作兩弧,交叉交於 P、P'. 連 PP',卽得中垂線.



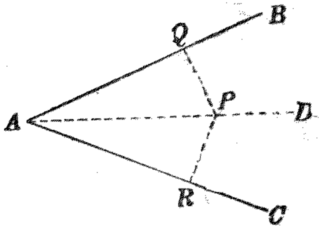
(2)平分已知線段　同上.

(3)自已知直線外一點作其垂線.

設 P 爲已知直線 l 外一點. 以 P 爲心,適宜長爲半徑作弧,交 l 於 A、B. 再求 AB 的中垂線卽得.

(乙)基本軌跡二　距一角兩邊等遠點的軌

跡,爲這角的分角線.



(一)一角分角線上任何點,皆距兩邊等遠.

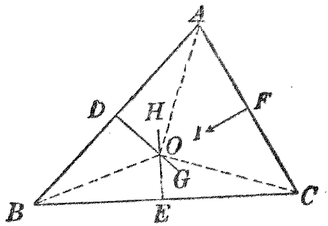
右圖中,AD 爲 $\angle BAC$ 分角線,而 P 爲其上一點.

作 $PQ\perp AB$, $PR\perp AC$, 則 $rt.\triangle AQP\equiv rt.\triangle ARP$ (全等 $rt.\triangle$ 定理一, §23), $\therefore PQ=PR$.

(二)距一角兩邊等遠的任何點,必在其分角線上.

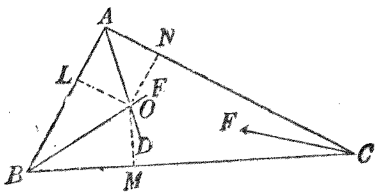
設 $PQ\perp AB$, $PR\perp AC$, 而 $PQ=PR$, 則必 $rt.\triangle AQP\equiv rt.\triangle ARP$ (全等 $rt.\triangle$ 定理二, §23), $\therefore \angle PAQ=\angle PAR$.

31. <u>三角形諸心</u>　(一)外心定理　**三角形的三邊中垂線交於一點.**



$\triangle ABC$ 中, AB、BC 二邊中垂線交於 O [§21(一)], 則 $OA=OB=OC$. (何故?) 故 O 點在 CA 的中垂線上(何故?)

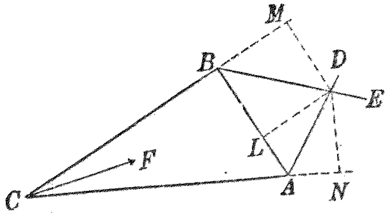
(二)內心定理　**三角形的各內分角線交於一點.**



$\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$ 二內分角線交於 O [§21(二)], 則 O 點距三邊等遠(?),而在 $\angle C$ 內分角線 CF 上(?).

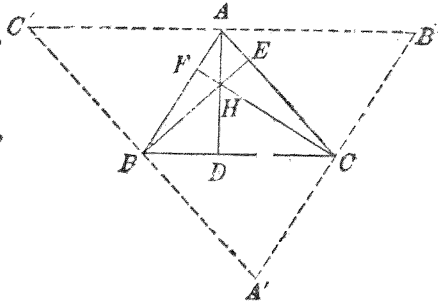
（三）旁心定理 **三角形二外分角線,與第三角的內分角線,交於一點.**

證法完全與(二)同.



註 三角形的三邊中垂線交點叫**外心**,距三頂點等遠.三內分角線交點叫**內心**,二外分角線和一內分角線交點,叫**旁心**,皆距三邊等遠.

（四）垂心定理 **三角形中各頂垂線交於一點.**

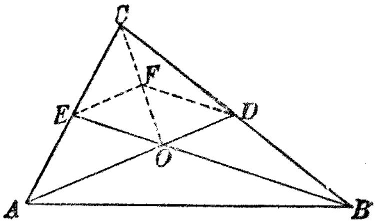


過 $\triangle ABC$ 各頂點,作對邊平行線,則必相交(§21 例)而成 $\triangle A'B'C'$,則就 $ACBC'$、$AB'CB$ 等▱,知 A、B、C 各點為 $\triangle A'B'C'$ 諸邊中點,且 $\triangle ABC$ 的頂垂線 AD、BE、CF 為 $\triangle A'B'C'$ 的各邊中垂線,故交於一點 H.

註 三角形各頂垂線的交點,叫做**垂心**.自垂心到每頂點的距離,為自外心到該頂點對邊距離的二倍(證見 $p.124$, §85).

（五）重心定理 **三角形的三中線,交於一點.**

設$\triangle ABC$的AD、BE二中線交於O〔§21)(二)〕,取CO的中點F,聯FD、FE,則$EFDO$為▱(何故?),且$EF=\frac{1}{2}AO$(何故?),故$AO=\frac{2}{3}AD$.如第三中線與AD交於O_1,用同法可證$AO_1=\frac{2}{3}AD$.故O_1與O必相合.就是第三中線過前二線交點.



註　這點叫**重心**.由上可知:**自重心到各邊中點距離,為相當中線長的三分之一.**

習題九

1.二線段上相當等分點聯線,是否一定平行?

2.試證任意四邊形各邊中點聯線,成一平行四邊形.

3.試證梯形二腰中點聯線長,為上下兩底之和之半.

4.平行四邊形二相對頂點,與對邊中點聯線,必分這平行四邊形的對角線為三等分,試證明之.

5.如說圓弧是距定點等遠點的軌跡,有無錯誤?

6.如說距二相交直線等遠點的軌跡,是其一分角線,有無錯誤?

7.試用間接證法證明基本軌跡二的(一)′和(二)′兩層.

8. 在垂心定理的圖中，A 對於 $\triangle BHC$ 有何關係？

9. 聯一三角形各旁心，成一三角形(叫旁心三角形)，試求其各角與原三角形各角的關係.又其垂心與原三角形有何關係？若以二旁心一內心成一三角形，其垂心何在？

10. 以一三角形各頂垂線垂趾爲一三角形，叫垂趾三角形，試求其內垂心與原三角形的關係.

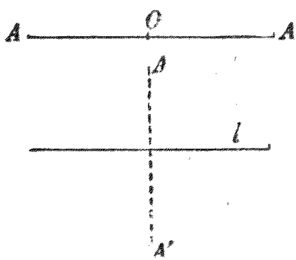
11. 試證三角形三中線長的和，必大於三邊和的四分之三.

12. 試證等邊三角形的外心、內心、垂心、重心合而爲一.

13. 試證不等邊三角形中，大邊上中線必較小.如何寫這理爲一離接命辭，而推出其逆定理？

14. 如一三角形的外心、內心、垂心、重心四者中，有二相合，則其他二心，亦必相合，而爲一等邊三角形，試分別證明.

32. 對稱 對稱分心對稱與軸對稱兩種如下：

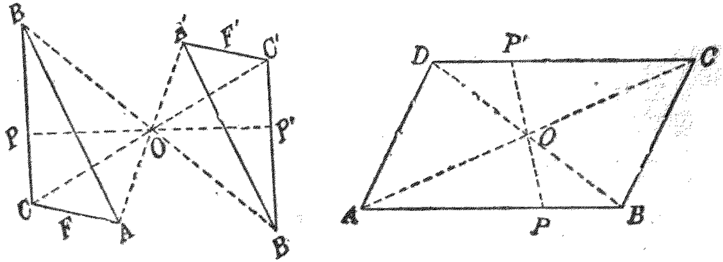


(一)心對稱 取線段 AA' 的中點 O，則稱 A、A' 二點爲關於 O 的心對稱點，O 點叫對稱心.

(二)軸對稱　取線段 AA' 的中垂線 l, 則稱 A、A' 二點爲關於 l 的軸對稱點, l 叫對稱軸.

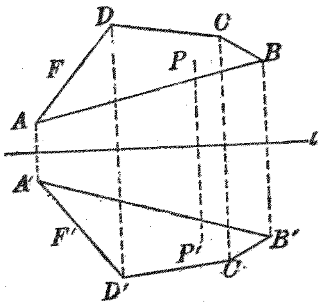
33.對稱形　對稱形也分爲二種:

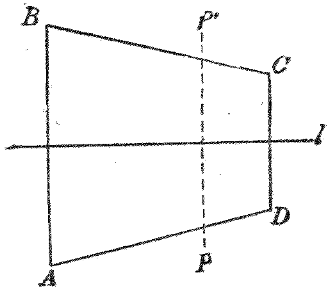
(一)心對稱形　一圖形 F, 取其上各點對某定點的心對稱點,構成一圖形 F',則二者互稱心對稱形.又如一圖形上各點對某定點的對稱點,仍在本形上,則獨稱爲心對稱形.



如上左圖, $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 互爲關於 O 的心對稱形.上右圖, $\square ABCD$ 以其對角線交點 O 爲心,成心對稱形.

(二)軸對稱形　一圖形 F 與其對定軸的軸對稱點所成圖形 F',互稱爲軸對稱形.又如一圖形各點,對定軸的軸對稱點,也在這形上,就獨稱爲軸對稱形.





如上左圖，$ABCD$、$A'B'C'D'$ 二四邊形，互爲關於 l 的軸對稱形。上右圖，等腰梯形 $ABCD$，以二底中點聯線爲軸，成軸對稱形。

注意　將一圖形依對稱心旋轉，過二直角，則必與其關於這心的心對稱形重合。如一圖形依對稱軸摺合，則必與其關於這軸的對稱形相重。

34. 對稱圖形基本定理

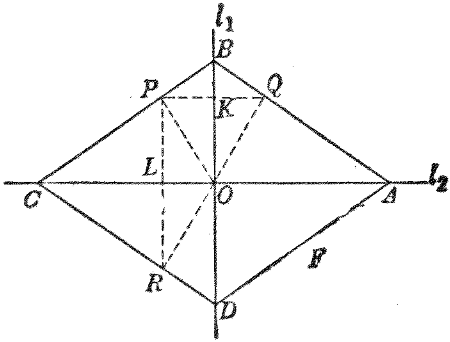
(一)任意二點都有而只有一對稱心和一對稱軸。

因二點聯線，必有而僅有一中心與一中垂線也。

(二)任何點，關於已知心或軸，必有而僅有一對稱點。

因自已知點至心的聯線，或至軸的垂線，都可延長二倍，他一端點即所求的對稱點。

(三)兩種對稱關係定理　如一圖形有二條垂直的對稱軸,則其交點必為這圖形的對稱心.



〔已知〕圖形 F (例如菱形)有二垂直對稱軸 l_1 和 l_2.

〔求證〕l_1 與 l_2 的交點 O, 即 F 的對稱心.

〔解析〕設 P 關於 l_1、l_2 的軸對稱點,各為 Q 與 R,

則　$rt.\triangle OKP \equiv rt.\triangle OKQ$,　$rt.\triangle OLP \equiv rt.\triangle OLR$.

$$\therefore \quad OQ = OP = OR. \qquad (1)$$

且　$\angle POK = \angle QOK$, $\angle POL = \angle ROL$.

$$\therefore \quad \angle QOR = 2(\angle POK + \angle POL) = 2rt.\angle s. \quad (2)$$

由(1)與(2),即明 Q、R 是關於 O 的二個心對稱點.

習題十

1. 圓是心對稱形麼?又是軸對稱形麼?對稱心是什麼?對稱軸呢?

2. 二平行線有多少對稱心?　多少對稱軸?

3. 試證邊數為奇數的正多角形是軸對稱形;為偶數的是心對稱形,又是軸對稱形.

4. 何種四邊形關於二對角線都成軸對稱? 如關於二對角線交點也對稱時,應該是那一種?

5. F、F' 爲二心對稱形. A、B、C, A'、B'、C', 是其上二組對應點.試證 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (不能用旋轉或對摺的證法).

6. 如 F、F' 爲二軸對稱形,上題是否也成立?

7. 試證二(心或軸)對稱多角形,必爲全等形.

提示 用上面二題的結果.

8. 試證第 5 題中 $AB \parallel A'B'$.

9. 試證第 6 題中 AB 與 $A'B'$ 如相交,則交點必在對稱軸 l 上;如不相交,則 $AB \parallel A'B'$.

10. 兩種對稱關係定理[§34(三)]的逆命辭能否成立(卽一心對稱形是否必有二垂直對稱軸)?

11. 如一心對稱形,又是關於過這心一已知直線的軸對稱形,試證這圖形必以過已知心而與已知軸垂直的直線爲一對稱軸.

第二編　摘要

本章授下列各項:

平行線性質與判別.
三角形及多角形內外角和.
相交線的判定法.
同序與逆序平行邊的角.
同序與逆序垂直邊的角.
全等直角三角形條件.
垂線與斜線性質.
離接命辭.
不全等三角形.
平行四邊形性質與判別.
平行截線性質和應用.
軌跡基本要義.
三角形的(1)內心,(2)外心,(3)旁心,(4)垂心,(5)重心.
心對稱,軸對稱.
對稱基本定理.

1.離接命辭是合主命辭與轉命辭而成,故離接命辭與逆命辭,必同時成立或不成立.

2.軌跡爲一切合於某幾何條件的點總集合所成圖形,所以證時應分別指明軌跡上(1)未雜有不合條件的點;(2)未漏去合於條件的點.

3.軌跡證明的兩方面,即一命辭和其逆命辭,而各得以逆轉命辭代之,所以共有四種證法.

(一)證(1)軌跡上點,皆合原設條件;(2)合題設條件的點,皆在軌跡上.

(二)證(1)凡不合題設條件的點,不在軌跡上;(2)同(一).

(三)證(1)同(一);(2)凡不在軌跡上的點,不合題設條件.

(四)證(1)同(二);(2)同(三).

4.基本軌跡有二種如下:

(一)距一線段兩端等遠點的軌跡,是這線段的中垂線.

(二)距一角兩邊等遠點的軌跡,是這角的分角線.

5.對稱心與對稱軸的存在定理:

(一)任意二點,都有而只有一對稱心,或對稱軸.

(二)任意一點對於已知心或軸,都有而只有一對稱點.

6.如一圖形有二垂直對稱軸,則其交點必為圖形的對稱心.

第三編

圓

35.圓的基本性質　圓是距定點等遠點的軌跡.完全疊合的二圓叫等圓.由此和 §31 可得各理如下:

(一)等圓定理　同圓或等圓的半徑或直徑必等.

(二)點與圓關係定理　如一點在圓內、圓上或圓外,則這點與圓心距離小於、等於或大於半徑.

逆定理　與圓心距離小於其半徑的點,必在圓內;等於半徑的,必在圓上;大於半徑的,必在圓外.

(四)三點定圓定理　不在一直線上的三點確定唯一的圓.

(五)過三點(不在一直線上者)的圓的作圖.

求聯三點所成三角形的外心,即爲求作的圓心.

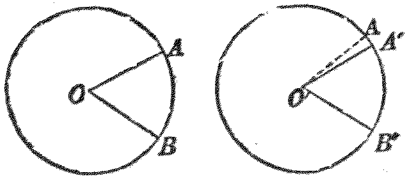
36.圓心角、弧與弦

(一)圓心角定理　在同圓或等圓中,等圓心角所含的弧必等,大圓心角所含的弧必大.

設$\odot O=\odot O'$,而

(1) $\angle AOB=\angle A'O'B'$,

則疊合OB與$O'B'$後,可使OA必落於$O'A'$上,而A與A'合,故$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.



(2) $\angle AOB>\angle A'O'B'$,

則疊合OB與$O'B'$後,OA必落於$O'A'$外,故$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B'}$.

系一　一圓的直徑平分全圓.

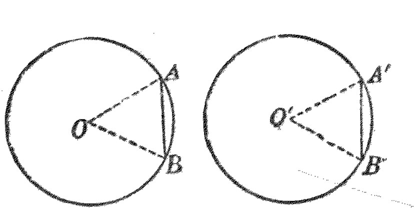
註　除特殊聲明者外,所言角與弧,皆指劣角、劣弧.

這定理是離接命辭,所以逆命辭也成立(下同):

逆定理　在同圓或等圓中,等弧所對的圓心角必等,大弧所對的角必大.

(二)弧對弦定理　同圓或等圓中,等弧所對的弦必等大弧所對的弦必大.

設$\odot O=\odot O'$;AB、$A'B'$為弦,聯OA、OB、$O'A'$、$O'B'$.



(1)如$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$,則$\angle AOB=\angle A'O'B'$(圓心角逆定理),故

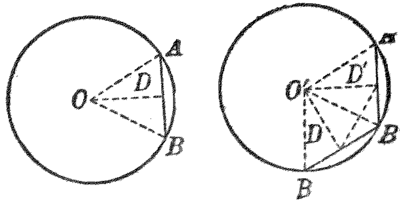
$$\triangle AOB\cong\triangle A'O'B'\ (s.a.s.),\ 而\ AB=A'B'.$$

(2)如$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{A'B'}$,則$\angle AOB>\angle A'O'B'$,而$AB>A'B'$.(何故?)

逆定理　同圓或等圓中等弦所對的弧必

等大弦所對的弧必大.

(三)弦心距定理 **同圓或等圓中,等弦距圓心等遠,大弦距圓心較近.**



設 $\odot O=\odot O'$; 餘同上.更作 $OD\perp AB$, $O'D'\perp A'B'$.

(1) 如 $AB=A'B'$, 則疊合全等三角形 AOB、$A'O'B'$ 時, OD 必落於 $O'D'$ 上(垂線確定定理, §24), 即 $OD=O'D'$.

(2) 如 $AB>A'B'$, 將 OA 疊放 $O'B'$ 上.因 $DB'=\frac{1}{2}AB$, $D'B'=\frac{1}{2}A'B'$(見 §30 基本軌跡一下注意),故 $DB'>D'B'$, 而 $\angle DD'B'>\angle D'DB'$. 但 $\angle DD'O'=rt.\angle-\angle DD'B'$, $\angle D'DO'=rt.\angle-\angle D'DB'$,所以 $\angle DD'O'<\angle D'DO'$,[不等量公理(3), §6], 因而得 $O'D<O'D'$, 即 $OD<O'D'$.

逆定理 **同圓或等圓中,距圓心等遠的弦等長距心較近的弦必較大.**

注意 圓心角,對弧和對弦三者關係,可列表如下:

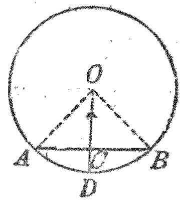
二圓心角	二對弧	二對弦	二弦與心距離
相　等	相　等	相　等	相　等
大　者	大　者	大　者	近　者

由四種性質之一,都可推知其他三性質.

37.弧,弦與半徑

弦與對弧平分線定理　一圓中,弦與對弧二者中點聯線必過圓心.

設$\odot O$中,C為AB弦中點,D為$\overset{\frown}{AB}$中點,則按§30 基本軌跡一的系及注意,即知CD為AB的中垂線,而應經過圓心O(因$OA=OB$).



注意　CD一直線有四性質:(1)平分AB弦,(2)平分$\overset{\frown}{AB}$,(3)過圓心O,(4)與AB垂直.但僅取二性質即可決定唯一的直線(何故?),且必具他二性質.如此可推得五條定理(連上述定理共六條),都可說是上面定理的逆定理.

習題十一

1.試證一圓中弦上點在圓內,其延線上點在圓外.

2.試證直徑為圓內的最長弦.

3.試證圓內垂直二直徑,分全圓為四等分.

4.試用習題八第5題的理去證弦心距定理.

5.寫出弦與對弧平分線定理的五條逆定理,而一一加以直接證明.

6.試證圓內平行弦中點的軌跡為這圓的直徑.

7.在$\odot O$的AB弦上,取C與D二點,使$AC=CD=DB$,

聯 OC、OD,交圓於 E、F,求證 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}<\overset{\frown}{EF}$.

8. 設 $\odot O$ 內 OE、OF 二半徑,三等分圓心角 $\angle AOB$,試證這二半徑必不能三等分 AB 弦.

9. 設 A 爲 $\odot O$ 外一點,自 A 引二直線,與圓的第一交點各爲 B、C,而 AO 平分 $\angle BAC$,則 $AB=AC$,試證明之.

10. 設 A 不是圓心,試證這圓上距 A 等遠的點不能多於二.

11. 如一點距一圓上三點等遠,試證該點必爲這圓的心.

12. 圓內相等二弦 AB、CD 或其延長線交於 P,則 PA 與 PB,必各等於 PC 與 PD,試加證明.

13. 除直徑外,圓內任何二弦,不能互相平分,試證之.

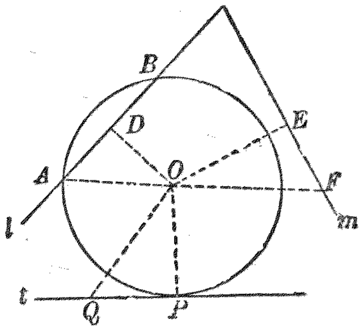
38. 圓與直線 由三點定圓定理,即可知一直線至多只能與圓交於二點(又一證法,見習題七第12題).因弦與圓心距離,至大等於半徑,而弦長可小至於無〔看§35(二),§36(三)〕,故可推知:

(一)如一直線與圓心距離,小於半徑,則有二交點.

(二)如一直線與圓心距離,等於半徑,則只一交點.

(三)如一直線與圓心距離,大於半徑,則無交點.

下圖中,O 為圓心,OD 與直線 l 垂直而小於半徑 OA,則 l 為一割線.



如 OE 與直線 m 垂直而大於半徑 r,則 E 在圓外;在 m 上任取一點 F,則 $OF>OE>r$,亦必在圓外.故 m 不能與⊙O 相交.

假若自圓心 O 到直線 t 的距離 OP 等於半徑,則因 $OP\perp t$,故在 t 上任取一點 Q,都有 $OQ>OP$,而在圓外;所以 t 只能與⊙O 交於一點 P,是⊙切線.由此可推出:

切線定理　過一圓半徑外端而與這半徑垂直的直線,必是這圓的切線.

據這定理立即可得過圓上一點切線作法.

系　過已知圓上一點,只能作一切線.

注意　半徑 OP 有三性質:(1)過圓心 O; (2)過切點 P; (3)和切線 t 垂直.但僅取二性質,即可決定唯一的直線,且必具他一性質.如此可求得半徑與切線性質定理三條,每二條皆可當做其餘一條的逆定理.

39.圓與三角形　由 §31 的外心、內心、旁心定理,即可得一定理如下:

圓與相關三角形定理　已知一三角形,則

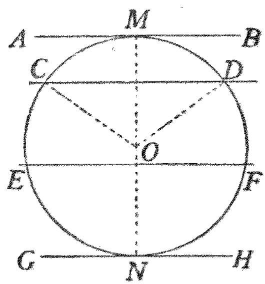
必有:(一)一圓過各頂點(外接圓),(二)一圓以三邊爲切線(內切圓),(三)三圓以一邊和他二邊延長線爲切線(旁切圓).

註 一圓有無數內接、外切、旁切三角形,且有無數內接、外切多角形.但任意多角形未必有外接圓、內切圓.

一四邊形有無內切圓的條件,見下面習題十三第2題;有無外接圓的條件,見下面的§§46、72、73.

40.圓與角 如一角兩邊均爲圓的割線或切線,或一爲割線,一爲切線,則這角大小,與交點或切點間弧,有簡單的關係.

(一)等截弧定理 **與一圓相交(或相切)的二平行線在圓上截取等弧.**



(1)設二平行線,一爲切線,一爲割線,如AB、CD.聯OC、OD,則因$\angle COM=\angle DOM$,故$\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$.

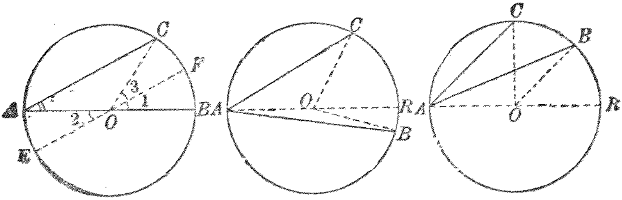
(2)設二平行線爲二割線,如CD、EF.過圓心,作二弦公垂線MN,在M作圓的切線,則$\overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{FM}$,$\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$,故$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{FD}$.

(3)二線均爲切線,如AB、GH.任作一平行線CD,則$\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$,$\overset{\frown}{CN}=\overset{\frown}{DN}$,故$\overset{\frown}{MCN}=\overset{\frown}{MDN}=$半圓周.

(二)圓周角定理 **二弦交於圓上,則所成角**

(地)

等於其截弧所對圓心角的一半.



(1)設有一邊是直徑,如 AB. 過 O 作 $EF \parallel AC$, 則 $\angle BAC = \angle 1 = \angle 2$. 但因 $\widehat{AE} = \widehat{CF}$, 故 $\angle 2 = \angle 3$, 而 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$.

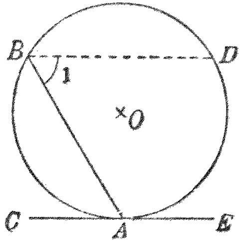
(2)如圓心 O 在 $\angle BAC$ 內,可聯直徑 AR, 則按(1)有 $\angle BAR = \frac{1}{2}\angle BOR$, $\angle RAC = \frac{1}{2}\angle ROC$, $\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$.

(3)如圓心 O 在 $\angle BAC$ 外,可做(2)分為二角差去證.

系　內接於半圓的角是直角.

注意　由特例入手推出通例,并合幾種情形成一普遍定理,是算學中常有的事.

(三)弦切角定理　一弦一切線交於圓上(交點即切點),則其交角等於在交角內的弧所對圓心角之半.

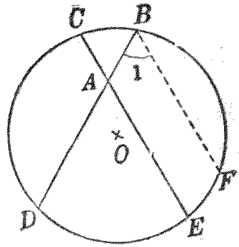


設 CE 切 $\odot O$ 於 A. 作 $BD \parallel CE$, 則 $AB = AD$(何故?).故 $\angle AOB = \angle AOD$. 是以知

$$\angle BAC = \angle 1 = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

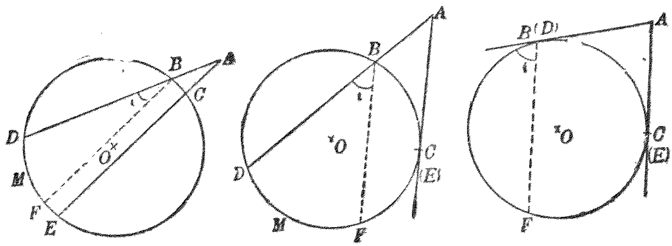
註　如 $\angle BAC$ 是銳角,則 $\widehat{AB}$ 為劣弧,而 $\angle AOB$ 為劣角.如 $\angle BAC$ 是鈍角,則 $\widehat{AB}$ 為優弧,而 $\angle AOB$ 指優角而言. (地)

(四)圓內角定理　**二弦交於圓內,則所成角等於二截弧所對圓心角之和之半.**



過 B 作 $BF \parallel AC$,則 $\angle BAC = \angle 1$
$= \frac{1}{2}\angle DOF = \frac{1}{2}(\angle DOE + \angle EOF)$
$= \frac{1}{2}(\angle DOE + \angle BOC)$.

(五)圓外角定理　**二弦,或一弦一切線,或二切線,交於圓外,所成角等於二截弧所對圓心角之差之半.**



過 B 作 $BF \parallel AC$,則

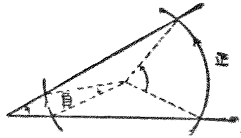
$$\angle BAC = \angle 1 = \frac{1}{2}\angle DOF = \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle FOE)$$
$$= \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle BOC).$$

注意在切線時,設 D 與 B 相合,E 與 C 相合.又在二切線情形,則 $\angle DOE$ 指優角,$\angle BOC$ 指劣角.

註　在一邊爲弦時,$\angle DOE$ 指 $\overset{\frown}{DME}$ 弧的對角.故這角的優,劣,視相關弧的優,劣而定〔試與(三)中的註比較〕.

(地)

(六)結論　有一圓和二直線.設直線交點移動,由圓內,而圓上,而圓外,直線亦移動,爲割線爲切線,便盡得上述各條.取表上時針旋轉反向爲正,同向爲負,而弧的正、負,由所對圓心角決定,如此則設一角依正向移動時,可別所截弧的正、負如上圖.更以平行線交角爲0,便可合上述各理爲一條:**二直線交角,等於其在一圓上截弧所對圓心角之和之半.**



習題十二

1. 何種三角形的外心,不在三角形內?

2. 試證內接於圓的梯形必等腰.

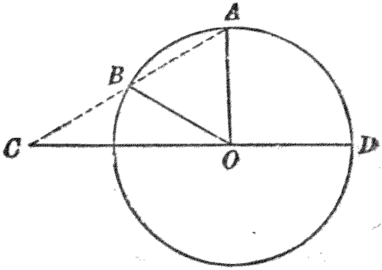
3. 過$\triangle ABC$的B、C二頂點作一圓,與AB、AC各交於D和E,試證如$AB>AC$,則$BE>CD$.

4. 舉半徑與切線性質三定理(§38注意),并一一證明.

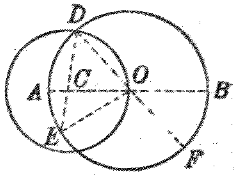
5. AB爲一圓的直徑,一直線與圓切於C,而AD爲這切線的垂線,試證$\angle BAC=\angle CAD$.

6. C爲圓外一點,B點在圓上,且$CB=OB$,CB延線 (增)
與$\odot O$交於另一點A,而CO與圓的另一交點爲D,求證

$\angle BOC=\frac{1}{3}\angle DOA$.



7. $\overset{\frown}{APB}$、$\overset{\frown}{AQB}$ 二弧在線段 AB 同側，M 為 $\overset{\frown}{APB}$ 上任意點，連 AM、BM，延長之，與 $\overset{\frown}{AQB}$ 交於 E 及 D，試證 $\overset{\frown}{DE}$ 有定長。



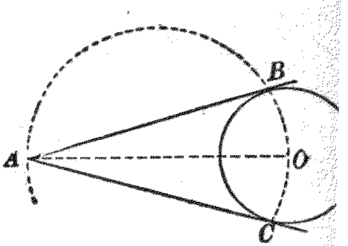
8. 在⊙O 直徑 AB 上任取一點 C，以 C 為心，CO 為半徑作圓，與⊙O 交於 D，連 DC、DO，交⊙O 於 E、F，求證 $\overset{\frown}{BE}=3\overset{\frown}{AD}$。

9. AB 為一圓直徑，與 PQ 弦垂直，在 $\overset{\frown}{APB}$ 上任取一點 R，連 RQ，交 AB 於 S，試證 PB 平分 $\angle RPS$ 或其補隣角。

10. 設 M、N 各為 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 二弧中點，連 MN 弦，試證其與 AB、AC 相交，成一等腰三角形。

11. ⊙O 中，AB、CD 二弦互相垂直，試證自圓心 O 至 CB 弦的距離，等於 AD 的一半。

41. 切線 由圓周角定理系，與切線定理即得**過圓外一點的切線作法。**



設 A 為⊙O 外一點，聯接 AO，取為直徑作圓，交⊙O 於 B、C，即得二切點。

（地）

由上述作圖法,更可明:

切線長定理 **自圓外一點,可作這圓的二切線,且二切點距這點等遠.**

這點到切點的距離,叫**切線長.**

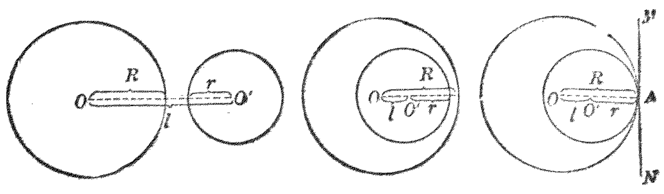
系 **圓外一點與圓心聯線,平分自這點所引二切線夾角,及過切點的二半徑夾角.**

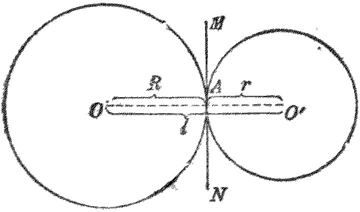
42. 二圓 由三點定圓定理,(或習題十一,10題),知二圓除相疊合外,至多只有二交點.就三角形二邊和差定理易明:

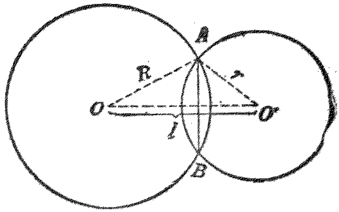
(1) 如二圓心距離,大於半徑和,則二圓相離,而無交點;小於半徑差,則二圓相含,而無交點.

(2) 如二圓心距離,等於半徑和,則二圓外切,有而僅有一交點;等於半徑差,則相內切,亦有而僅有一交點.

(3) 如二圓心距離介於半徑和,差間,則有二交點.







圖中設 l 爲⊙O及⊙O'二心距離,R、r爲二半徑.

43.**公弦與公切線** 按§30基本軌跡一系,即得:

(一)公弦定理 **相交二圓聯心線爲其公弦的中垂線.**

因 $OA \pm O'A = OO'$,故 O、O'、A 必在一直線上(否則與§17所述的三角形二邊和差定理相背).過 A 點作 $MN \perp OO'$,則按切線定理,便知 MN 同爲⊙O及⊙O'的切線,如此便有:

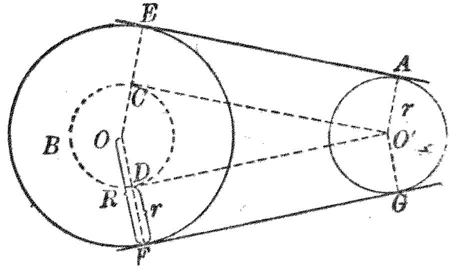
(二)切圓定理 **二圓內切或外切,則切點必與二圓心共在一直線上,且這直線與公共切線垂直.**

(地)

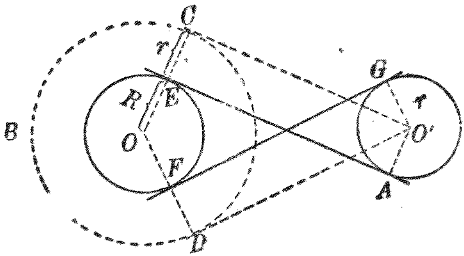
(三)公切線的作圖

(1)**作外公切線法**

設$\odot O$、$\odot O'$的半徑各為R、r，而$R>r$。以O為心，$R-r$為半徑，作$\odot O$的同心圓BCD。再自O'作BCD圓的二切線，以C和D為切點。聯OC、OD而延長之，交$\odot O$於E、F。自E、F作共切線即得。



(2)**作內公切線法**　除用$R+r$代$R-r$外，餘與上法相同。

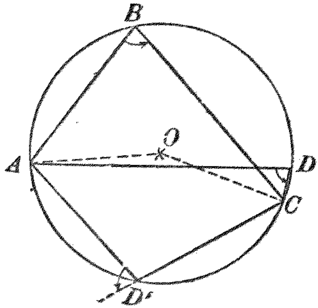


註　這二節的重要結果，可合成一表如下：

情形＼二圓		相離	外切	相交	內切	相含
$R+r$		$<l$	$=l$	$>l$		
$R-r$				$<l$	$=l$	$>l$
公切線	外	2	2	2	1	0
	內	2	1	0	0	0

44．**共圓點**　共在一圓上的諸點叫共圓點。

共圓點性質定理一 如 A、B、C、D 四點共在一圓上,則 $\angle ABC$ 必與 $\angle ADC$ 相等或相補.



(1)設 B、D 在 AC 弦同側,則

$\angle ABC=\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC$.

(2)如 B、D' 在 AC 弦異側,則

$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$(劣角),

$\angle AD'C=\frac{1}{2}\angle AOC$(優角).

$\therefore \angle ABC+\angle AD'C=2rt.\angle s$.

習題十三

1.如一四邊形有一內切圓,試證其一組對邊的和與他組對邊的和相等.

2.試用間接法證明上題的逆定理.

3.由三角形一頂點到這角內旁切圓的切線長,等於這三角形三邊和的一半,試加證明.

4.在內切圓的情形,上題應如何改動,使仍得成立.

5.$\odot O$、$\odot O'$ 二圓相切,過公切點 A 任作一割線,另一交點各為 B 及 B',試證 $OB\parallel O'B'$.

6.有二圓內切於 A,大圓的 BC 弦與小圓切於 E,試證 AE 必為 $\angle BAC$ 的分角線.

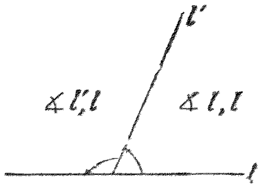
7.有 $\odot O$、$\odot O'$,二圓均與 $\odot O''$ 相切,試就其為內切或外切的情形,討論 OO''、$O'O''$ 與前二圓半徑的關係.

(地)

8. ⊙O 與 ⊙O' 二圓與二外(或內)公切線的切點爲 E、H 與 F、G，試證 $EH=FG$.

9. 試證二圓聯心線必經過其外(及內)公切線交點.

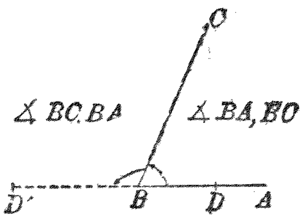
10. 自一圓的心 O，作其等圓切線 OA，又作其內公切線 BC，A、B、C 皆爲切點.試證如 OA 等於直徑，則 BC 等於半徑.



45. <u>有向角</u>　取鐘表上時針旋轉方向爲負，相反者爲正〔如 §40 (六)〕，而以 $\measuredangle l, l'$ 記 l 依正向旋至 l' 的角，則

$$\measuredangle l', l = 2rt\angle s - \measuredangle l, l'.$$

如書 $\measuredangle BA, BC = \measuredangle ABC$，$\measuredangle BC, BA = \measuredangle CBA$，則 $\measuredangle CBA = 2rt.\angle s - \measuredangle ABC$.



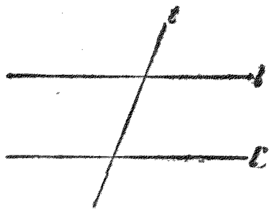
注意　初中幾何以及本書前此所論的角，其兩邊皆爲半直線，在此則二邊爲直線.又在本書，規定有向角恆爲正，而祇取 0° 與 180° 間的值.

用這種記法，常可將幾何定理中數種情形，合爲一條.

(一)設 A、B、D 三點在一直線上，C 爲線外一點，則必 $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$，或 $\measuredangle ABD = 0$.由這條件 (地)

可斷三點是否共在一直線上.

(二)設有直線 t 與 l' 及 l 二平行線,則必 $\measuredangle l, t = \measuredangle l', t$. (可包括錯角,同位角相等,同側內或外角相補各種情形).反之,由此可斷直線的平行性.

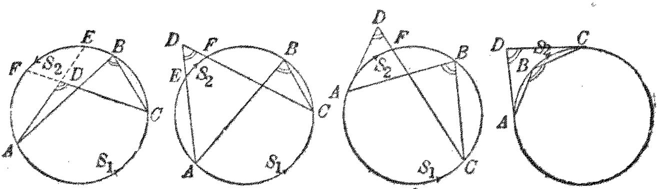


(三)共圓點性質可化簡如下:

如 A、B、C、D 四點共圓,

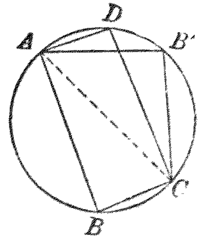
則有 $$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC.$$

46.共圓點判別　今用間接證法證明 §44 的逆定理: 如 $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$, 則 A、B、C、D 共圓.



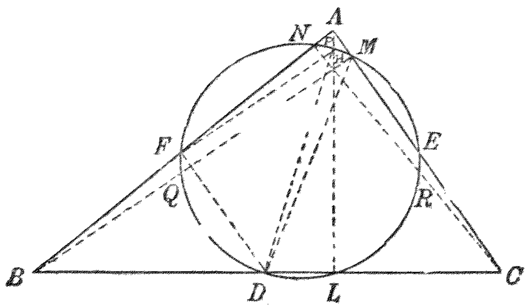
(一)設 $\angle ABC = \angle ADC$. 作過 A、B、C 三點的圓,如 D 不在這圓上,則必在圓內或圓外.如在圓內,則 AD、CD 必與圓有另一交點;如在圓外,則因 AD 和 CD 可爲切線而可無另一交點.如上圖各種情形.按 §40(六), $\angle ADC$ 均爲 S_1、S_2 二弧所對圓心角的和之半;但 $\angle ABC$, 則爲 S_1 弧所對圓心角的一半,因此 $\angle ABC$ 不能和 $\angle ADC$ 相等.

(二)設$\angle ABC = 2rt.\angle s - \angle ADC$.仍作過$A$、$B$、$C$三點的圓,而在其上取一點$B'$,使與$B$分處$AC$弦異側,則$\angle AB'C = \angle ADC$,而歸入上款.



47.九點圓　$\angle ABC$為$rt.\angle$時,則$\measuredangle ABC = \measuredangle CBA$,證法中無區別方向角的必要,今舉九點圓為例.

定理　任何三角形各邊中點,三頂垂線垂趾,垂心至頂點的聯線中點,共九點,都在一圓上.



設D、E、F為$\triangle ABC$各邊中點;H為垂心;L、M、N為各垂趾;P、Q、R為HA,HB,HC的各中點.

(1)作過D、P、L的圓,則因$\angle DLP = rt.\angle$,故DP是直徑.聯FD、FP,則$FD \parallel CA$, $FP \parallel BM$.故$\angle DFP = \angle CMB = rt.\angle$,而$F$在這圓上.同理$E$、$Q$、$R$亦然.

(2)又$\angle AMH = rt.\angle$,故為半圓內的圓周角.且$AP =$

PH，所以 P 卽圓心。由此知 $PA=PM$ 爲半徑，而 $\angle PMA = \angle PAM$。

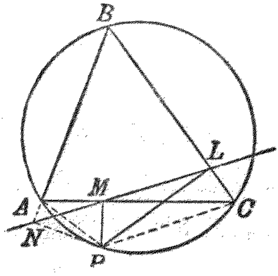
同理，就 rt. $\triangle BMC$，可見 $\angle DMC = \angle DCM$。

在 rt. $\triangle ALC$ 中，$\angle PAM + \angle DCM =$ rt. $\angle$，故 $\angle DMP = 2$rt. $\angle$s $-(\angle PMA + \angle DMC) = 2$rt. $\angle$s $-(\angle PAM + \angle DCM) =$ rt. $\angle$，卽 M 在這圓上。同法可證 N 也在同圓上。

註 這圓叫做 $\triangle ABC$ 的**九點圓**，也稱爲龐氏(Poncelet)圓或福氏(Feuerbach)圓。

48. 西摩松(Simson)線　定理　自三角形外接圓上任一點，向各邊作垂線，則三垂趾必在一直線上。

設 P 爲 $\triangle ABC$ 外接圓上任意點；$PL \perp BC$，$PM \perp CA$，$PN \perp AB$。聯 PA、PC、ML、MN，則 $\angle PMA = \angle PNA =$ rt. $\angle$。故 P、M、A、N 四點共圓。因而 $\measuredangle NMP = \measuredangle NAP$。



但 A、B、C、P 共圓，故 $\measuredangle BCP = \measuredangle BAP = \measuredangle NAP$。與上式較，可得 $\measuredangle NMP = \measuredangle BCP$；卽 $\measuredangle NMP = \measuredangle LCP$。

又 $\measuredangle PMC = \measuredangle PLC$，故 P、M、L、C 四點共圓，故 $\measuredangle LCP = \measuredangle LMP$，卽 $\measuredangle NMP = \measuredangle LMP$，所以 L、M、N 在一直線上。

註 直線 LMN 稱爲 $\triangle ABC$ 對 P 點的西摩松線。

習題十四

1. 試證等腰梯形有一外接圓(習題十二第2題的逆定理).

2. 如 $l_1 \parallel l_1'$, $l_2 \parallel l_2'$, 或 $l_1 \perp l_1'$, $l_2 \perp l_2'$, 求證 $\measuredangle l_1, l_2 = \measuredangle l_1', l_2'$.

3. l_1、l_2、l_3、l_4 爲任意四直線,求證 $\measuredangle l_1, l_2 + \measuredangle l_3, l_4 = \measuredangle l_1, l_4 + \measuredangle l_3, l_2$.

4. A、B、C、D 爲任意四點,則 $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = \measuredangle BAD + \measuredangle DCB$, 試加證明.

5. 在三角形的三邊上,向外各作一等邊三角形,試證這三個三角形的外接圓,必有一公共交點.

提示　證這二圓的交點,在第三圓上.

6. 設 A 爲 $\overparen{BAC}$ 的中點.過 A 任作 AD、AE 二弦,延長之與 BC 弦延長線交於 F 和 G.試證 F、D、E、G 四點共圓.

7. 設 AB 爲已知圓的直徑, XY 與 AB 垂直, P、Q 爲圓上任意二點, AP、AQ(或延線)與 XY 各交於 S、R. 試證 P、Q、R、S 四點共圓.

8. 已知 $ABCD$ 爲圓內接四邊形, AB 與 CD 交於 E, BC 與 AD 交於 F.試證 $\angle E$、$\angle F$ 二角的平分線互相垂直.

9. 一內接四邊形的二對角線互相垂直,過其交點,作一邊的垂線,必平分其對邊,試加證明.

註　這題叫布拉馬加塔(Brahma-gupta)定理.

10.設 PL、PM、PN 爲 $\triangle ABC$ 各邊垂線, L、M、N 三垂趾在一直線上,試證 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上(§48的逆定理)

11.在 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 三邊上各取一點,如 P、Q、R. 試證 AQR、BRP、CPQ 三圓共過一點(叫麥氏 Miquel 點).

12.設 AP 爲 $\triangle ABC$ 外接圓直徑,則 P 點關於 $\triangle ABC$ 的西摩松線如何?

13.試按西摩松線定理及其逆定理(第10題),證明:四直線相交成四個三角形,諸外接圓必共過一點.

14.設 $ABCD$ 爲圓內接四邊形,二對角線互垂,且交於 O 點,自 O 點作 AB、BC、CD、DA 各邊的垂線,垂趾依次爲 E、F、G、H. 試證 $EFGH$ 爲內接四邊形,又爲外切四邊形.

15.設 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心,中線 AM 延線與 $\triangle BCH$ 的外接圓交於 K,試證 $AM=MK$.

提示　如 $MK=AM$,則 K 在這外接圓上.

16.上題中 HM 的延線與 $\triangle ABC$ 的外接圓交於 N. 試證 $HM=MN$.

第三編 摘 要

本章授下列各項:

圓的基本性質.　　二圓與其公弦及公切線.

圓心角、弦、弧等關係.　　有向角.

圓與三角形.　　共點圓性質與判別.

圓與相關角.　　西摩松線.

切線性質與作圖法.　　九點圓.

1. 圓的性質可概括爲下列三項:

(1) 圓的基本性質(如圓的確定,圓心角與弦等關係).

(2) 圓與直線,圓與角等等關係.

(3) 二圓與聯心線、公弦、公切線等關係.

2. $\measuredangle l, l'$ 指自 l 依正向轉至 l' 時所經的角,則

(1) $\measuredangle l, l' = 2rt. \underline{/s} - \measuredangle l', l$,或 $\measuredangle BAC = 2rt. \underline{/s} - \measuredangle CAB$.

(2) 欲 A、B、D 共在一直線上,只需而必需 $\measuredangle ABC = \measuredangle DBC$.

(3) 欲 $l \| l'$,只須而必須 $\measuredangle l, t = \measuredangle l', t$. t 是任一截線.

(4) 欲 A、B、C、D 共圓,必須而只須 $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.

3. 自三角形外接圓上任意一點,向各邊作垂線,則三垂趾必在一直線上(西摩松線).

逆定理　如自一點所作至三角形各邊上垂趾在一直線上,則該點必在三角形的外接圓上.

4. 任何三角形:(1)各邊中點,(2)三頂垂線垂趾,(3)垂心與頂點聯線中點,共九點,在一圓上(九點圓).

第四編

度量

49. <u>度量法</u>　欲度一量,可取一同類量爲標準,而求所度量爲這標準量的幾倍或幾分之幾。這標準量叫**單位**,表倍數或幾分之幾的數值,叫做**度**或**值**。

50. <u>基本度量</u>　幾何上基本度量有二種:

(一)**直線段**　我國採用公制,以公尺等爲單位,更以市用制爲輔。面積、體積單位,由長度單位引伸而得。

(二)**角**　最通用的爲六十進制,取周角的$\frac{1}{360}$爲單位叫做度。圓弧也可做此法度量,即取全圓的$\frac{1}{360}$爲單位,仍舊叫度。二者的記號同爲 $\circ$。

註　弧的度數只表示其爲全圓的幾分之幾,例如30°的弧,即全圓的$\frac{30}{360}=\frac{1}{12}$。由此可知弧的長須視圓的大小而定。大圓上弧,長於小圓上同度的弧。

如一角與一弧度數相同,則稱**角被弧所度**。

例　$rt.\angle=90^\circ$, $st.\angle=180^\circ$, 又四分弧(全圓的$\frac{1}{4}$)爲90°,半圓爲180°。故 $rt.\angle$ 被四分弧所度,而 $st.\angle$ 被半圓所度。

51.<u>量的比</u>　二同類量對於同單位的度值所成比,叫做這二量的比.故一量的度,即其對於單位的比.

注意　量的度雖係視單位而定,但二量的比,却與單位無關.

52.<u>公度</u>　如一量對於某單位的度爲有理數(即整數或分數),則稱其可被這單位度盡.二量能被某單位度盡時,則稱爲**有公度量**,否則稱爲**無公度量**.

如二量的比成爲有理數,則有公度,而量的比爲無理數時,就是無公度量.

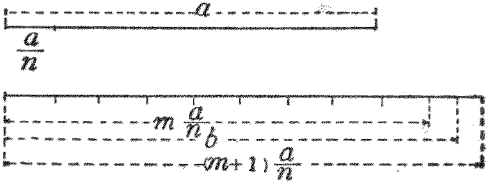
例　一正方形的對角線與其邊的比爲 $\sqrt{2}:1=\sqrt{2}$,是一無理數,所以是無公度量.

53.<u>極限</u>　極限是算學中很重要的一個基本觀念,在高中代數學裏,當作詳細的研究,在此先略述要義,以爲討論無公度量時之用.

註　參看著者編修正課程標準高中代數學§§114——5,這書也係本局印行.

設 a、b 爲二無公度量,則任何單位不能同時度盡這二量.今用 a 的 $\frac{1}{n}$ 爲單位以度 b,得 m 倍,而餘一小於 $\frac{a}{n}$ 的量

因 $m\cdot\frac{a}{n}<b<(m+1)\frac{a}{n}$，故用 $m\cdot\frac{a}{n}$ 或 $(m+1)\frac{a}{n}$ 代 b 時，相差小於 $\frac{a}{n}$。如 n 的值，無限增大（則 m 亦無限增大），可使 $\frac{a}{n}$ 小於任何預定的數。我們便叫 b 為 $m\cdot\frac{a}{n}$ 或 $(m+1)\frac{a}{n}$ 所趨的極限；任取其一組所歷的各值，為 b 的迭次差近值。



註　任取一 n 值，同時即可得一 m 值，而 $m\cdot\frac{a}{n}$ 或 $(m+1)\frac{a}{n}$ 亦同時各得一值。更取一較大的 n 值，則又可各得 $m\cdot\frac{a}{n}$ 或 $(m+1)\frac{a}{n}$ 的另一值，且較近於 b。如此逐次以 n 的指定值代入，而逐次所得 $m\cdot\frac{a}{n}$ 或 $(m+1)\frac{a}{n}$ 漸近於 b 的值，便叫做 b 的迭次差近值。

例　取正方形邊長為單位，則其對角線各迭次差近值為　1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421,……………

或　2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422,……………

又各迭次差近值與 $\sqrt{2}$ 的較，依次小於

1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001,……………

54. <u>比例量</u>　a、b 與 c、d 為二組同類量。如 a 對 b 的比等於 c 對 d 的比，則稱四量為比例量，而記為　$a:b=c:d$　或　$a:b::c:d$。

各項名稱及變化的理都與代數相同,列舉如下:

(一)基本關係式　如 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$。

反之,　如 $ad=bc$,則 $a:b=c:d$。

(二)更比定理　如 $a:b=c:d$,則 $a:c=b:d$。

(三)反比定理　如 $a:b=c:d$,則 $b:a=d:c$。

(四)合比定理　如 $a:b=c:d$,則 $(a+b):b=(c+d):d$。

(五)分比定理　如 $a:b=c:d$ 則 $(a-b):b=(c-d):d$。

(六)合分定理　如 $a:b=c:d$,則

$$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$$

(七)和比定理　如 $a:b=c:d=e:f$, 則

$$(a+c+e):(b+d+f)=a:b.$$

(八)乘比定理　如 $a:b=c:d$, 且 $m:n=p:q$, 則

$$am:bn=cp:dq.$$

註　諸理的證明已詳代數,且皆很簡明,故不再述。

注意　二量的比卽其度的比,所以比例量可當作數的比例去算。

習題十五

1. m 等分一線段(或角), 如 m 無限增大,各份的值如何?

2. $\triangle ABC$ 中, $\angle C=rt.\angle$, 二腰長為 a, b, 斜邊長為 c, 而 $a^2+b^2=c^2$.

註　參看§59 畢氏定理.

(一)如 a 的長固定, b 以零爲極限, c 的極限如何?

(二)如 c 的長固定, a 以零爲極限, b 的極限如何?

3. 一已知圓的內接多角形,當邊數增加,邊長均漸減,而以零爲極限時,自圓心到各邊距離的極限是什麼?

4. 一已知圓的外接多角形,當邊數增加,邊長均漸減,而以零爲極限時,自圓心到各頂點距離的極限是什麼?

5. 如 $a:b=c:d$,則 $a \gtreqless b$ 時,亦有 $c \gtreqless d$, 試證之.

6. 設 $a:b=c:d=e:f$, 則 $ka+lc+me:kb+ld+mf=a:b$, 求證.如式中 $kb+ld+mf=0$ 時, $ka+lc+me$ 應如何?

7. 設 $a:b=c:d$ 中, a 爲最大,試證 $a+d>b+c$.

8. 如 $a:b=c:d=e:f$, 求證

$$(a^2+c^2+e^2):(b^2+d^2+f^2)=(a+c+e)^2:(b+d+f)^2$$

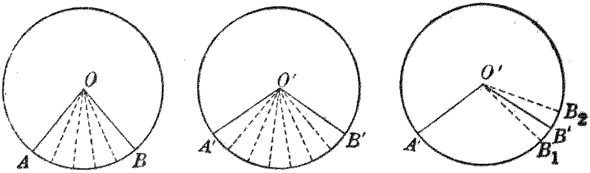
9. §54 各定理的逆命辭,那幾條爲真?試加證明.

10. 如 $(a+c+e):(b+d+f)=a:b=c:d$,試證 $a:b=c:d=e:f$.

註　注意這題較和比定理逆命辭條件稍多.

11. 設 $a:b=p:q$, $b:c=q:r$, $c:a=r:p$ 三比例式中,有二式成立,則第三式亦必成立.試證明之.

55. 以弧度角　定理　在同圓或等圓內,二圓心角與其相對弧成比例.



設 ⊙O=⊙O', 各有一圓心角 $\angle AOB$、$\angle A'O'B'$.

(1) $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{A'B'}$ 有公度　如 $\overset{\frown}{AB}$ 爲公度的 m 倍, $\overset{\frown}{A'B'}$ 爲其 n 倍,則過各等分點作半徑,可 m 等分 $\angle AOB$, n 等分 $\angle A'O'B'$, 且各角盡等,而 $\angle A'O'B':\angle AOB=n:m=\overset{\frown}{A'B'}:\overset{\frown}{AB}$.

(2) $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{A'B'}$ 無公度　m 等分 $\overset{\frown}{AB}$, 取一份爲單位,以度 $\overset{\frown}{A'B'}$, 照§53的理,可得　$\overset{\frown}{A'B_1}<\overset{\frown}{A'B'}<\overset{\frown}{A'B_2}$,

而　$\overset{\frown}{A'B_1}:\overset{\frown}{AB}=n:m$, $\overset{\frown}{A'B_2}:\overset{\frown}{AB}=(n+1):m$,　則按(1)應得:

$$\angle A'O'B_1:\angle AOB=\overset{\frown}{A'B_1}:\overset{\frown}{AB},\ \angle A'O'B_2:\angle AOB=\overset{\frown}{A'B_2}:\overset{\frown}{AB}.$$

設 m 無限增大,則單位無限縮小,因而 $\angle A'O'B_1$ 與 $\angle A'O'B_2$ 都以 $\angle A'O'B'$ 爲極限; $\overset{\frown}{A'B_1}$ 與 $\overset{\frown}{A'B_2}$ 都以 $\overset{\frown}{A'B'}$ 爲極限,上面比例式變成　$\angle A'O'B':\angle AOB=\overset{\frown}{A'B'}:\overset{\frown}{AB}$.

系一　圓心角被其對弧所度.

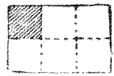
只須取 $\angle AOB=1°$, 按§50(二)即明.

系二　圓周角被其截弧之半所度.圓內角被二截弧的和之半所度.圓外角被二截弧的差之半所度.

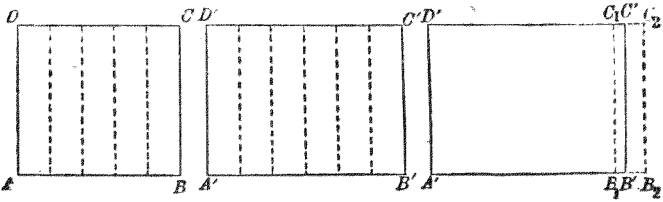
56. <u>面積</u>　因等邊的正方形皆全等(□全等定理系二, §27), 所以我們即取單位邊長的正方

形的面積爲面積單位,而一平面形的面積,即指其含有若干單位面積.

例 一長方形高 2 公分,闊 3 公分,則可分爲 6 個單位面積正方形(即平方公分),故其面積爲 6 平方公分.



57. 長方形面積 (一)等高長方形面積比定理 二等高長方形面積的比等於其底的比.



在長方形 $ABCD$、$A'B'C'D'$ 中, $AD=A'D'$.

(1) AB 與 $A'B'$ 有公度 設 AB 爲其公度的 m 倍, $A'B'$ 爲其 n 倍,則過等分點作垂線,分成全等長方形(□全等定理系一),而可斷 $A'B'C'D':ABCD=n:m=A'B':AB$.

(2) AB 與 $A'B'$ 無公度 m 等分 AB, 取一份爲單位,以度 $A'B'$,照 §53 的理,可得 $A'B_1<A'B'<A'B_2$,

而 $A'B_1:AB=n:m$ 與 $A'B_2:AB=(n+1):m$. 按(1)應得:

$A'B_1C_1D':ABCD=A'B_1:AB$ 與 $A'B_2C_2D':ABCD=A'B_2:AB$.

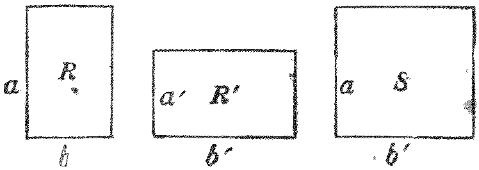
設 m 無限增大,則單位無限縮小,而 B_1 與 B_2 都向 B' 趨近,上面的比例式即變爲 $A'B'C'D':ABCD=A'B':AB$.

註 $ABCD$ 表 □$ABCD$ 的面積,餘倣此.

(二)長方形面積比定理　**二長方形面積的比,等於其底與高乘積的比。**

設長方形 R 的高、闊爲 a、b;長方形 R' 的高、闊爲 a'、b'。另作一長方形 S,以 a 爲高,b' 爲闊,則按(一),

$$R:S=b:b',\qquad S:R'=a:a',$$



按乘比定理[§54(八)]即得　$R:R'=ab:a'b'$.

今取 R' 爲面積單位,即 $a'b'=1$,就可推得:

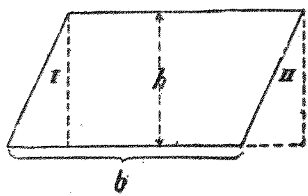
(三)長方形面積定理　**長方形面積的度,等於其高與底二者的度的乘積。**

注意　幾何計算中的量,皆指度言,故上理可簡爲:**長方形面積,等於其底與高的乘積**(下文皆依此敍述)。

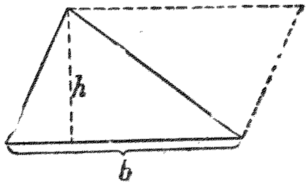
58.<u>割補術</u>　任何直線形面積,皆以這法求得。

(一)平行四邊形　如下圖,以 $rt.\triangle\mathrm{I}$ 補於 $rt.\triangle\mathrm{II}$ 處,即得一長方形,故如▱的高爲 h,底爲 b,面積爲 A,則

$$A=hb.$$

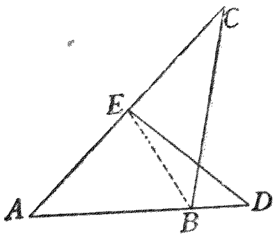


(二)三角形　將二個全等三角形,顛倒配合,便成一平行四邊形如右圖.故如三角形的高爲 h, 底爲 b, 面積爲 A, 則



$$A=\frac{1}{2}hb.$$

系一　同高二三角形面積比,等於其底的比.



系二　有一等角的二三角形面積比,等於等角夾邊乘積的比.

因可疊合等角如右圖,則得:

$\triangle ABC:\triangle ABE=AC:AE$, 與 $\triangle ABE:\triangle AED=AB:AD$.

二式兩邊各乘即明.

(三)n 角形　用對角線分成 $n-2$ 個△去求.

習題十六

1. 已知梯形的二底(即二平行邊)和高,求其面積.

2. 試證四邊形被對角線分成四個△,面積成比例.

3. 一平行四邊形二頂點,爲一三角形兩腰中點,對邊在三角形底邊上,試證其面積爲這三角形面積之半.

4. 有二三角形底邊全合,試證其他各邊中點所成平行四邊形的面積,等於這二三角形面積的和或差.之半

5. 在▱$ABCD$內一點 P, 作 $KPM\|AD\|BC$, $LPN\|AB\|$

CD;而 K、L、M、N 等點,依次在 AB、BC、CD、DA 各邊上.試證 $\square PLBK$ 與 $\square PMDN$ 二形面積的差,等於 $2\triangle PAC$. 若 P 點在 $\square ABCD$ 外則如何?P 點在對角線 AC 上又如何?

6. 上題中如 $\square PLBK=\square PMDN$, 試證 P 必在 AC 上

7. 試證三角形重心至各頂點的聯線,三等分原形

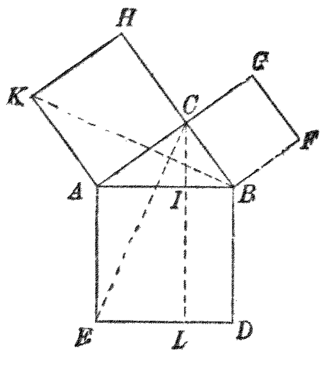
8. 試證等邊三角形內任一點,至三邊距離和為一定.

9. 有 $\square ABCD$, 作 AC 的平行線,交 AB、BC 於 E 和 F, 試證 $\triangle AED=\triangle CDF$.

10. 同底且同在一側的二個等積△,被底邊的一平行線所截,試證截線上被二三角形頂角夾邊截取的部分必等.

11. 設 $rt.\triangle ACB$ 斜邊 AB 與其內切圓相切於 D, 試證以 AD 與 BD 為邊的長方形,與 $\triangle ACB$ 等積.

59.畢氏(Pythagoras)定理



直角三角形斜邊上正方形,必與他二邊上正方形的和等積.

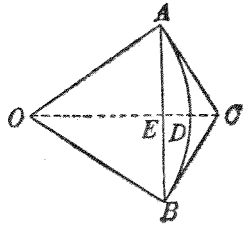
設 $\triangle ACB$ 中,$\angle C=rt.\angle$.命 $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. 作 $CL\perp ED$, 則必與 AE 平行.再連 KB、CE, 則 $\angle KAB=\angle CAE=rt.\angle+\angle BAC$.

且 $KA=AC, AB=AE$. $\therefore \triangle KAB \cong \triangle CAE$.

但$\triangle KAB$與正方形$ACHK$同底等高,故$\triangle KAB=\frac{1}{2}b^2$.同理知長方形$AILE=2\triangle CAE$,所以$\square AILE=b^2$.

同法可證 $\square BILD=a^2$.

$$\therefore c^2=\square AILE+\square BILD$$
$$=a^2+b^2.$$

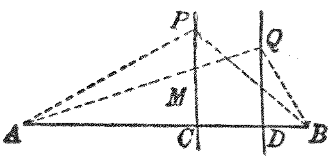


應用 (一)設AB為⊙O內一弦,在A、B二點作切線交於C,連OC,與AB交於E,又與$\overset{\frown}{AB}$交於D,則在$rt.\triangle AEO$中,$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}$,當AB趨於零時,則AE趨於零,故OE趨於OA.

(二)同法,由$rt\triangle OAC$,知OC趨於OA. $\therefore EC=OC-OE$趨於零.但$AC-AE<EC$,故$AC-AE$趨於零,即AC趨於AE.

60. 與二定點距離平方差一定的點的軌跡

與二定點距離平方差一定的點其軌跡是二點聯線的一垂線.

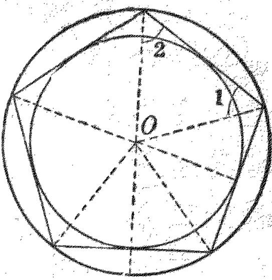


設A,B為已知點,d為定平方差,P為軌跡上一點,則$AP^2-BP^2=d$.

(1)作$PC\perp AB$,則$AP^2-BP^2=(AC^2+CP^2)-(BC^2+CP^2)=AC^2-BC^2=d$.同理,可知$CP$上任一點$M$均合條件,即$CP$上點均合條件.

(2) 設一點 Q, 不在 CP 上. 作 $QD\perp AB$, 則 D 必不與 C 相合. 如 $AD>AC$, 則 $BD<BC$, 而 $AD^2-BD^2>AC^2-BC^2$. 依上法可證明 $AQ^2-BQ^2=(AD^2+DQ^2)-(BD^2+DQ^2)=AD^2-BD^2\neq AC^2-BC^2$, 即不等於 d, 故不合條件.

61. <u>正多角形</u>　如一等腰三角形中相等的角為 $\frac{n-2}{n}rt.\angle$, 則其頂角必為 $2rt.\angle s-\frac{2(n-2)}{n}rt.\angle=\frac{4}{n}rt.\angle$. 取 n 個這樣的全等 $\triangle s$, 集頂點於一點, 依次配合則各頂角適合成一周角, 而得一正 n 角形, 各邊長為原三角形底邊, 且各內角為 $\frac{2(n-2)}{n}rt.\angle$.



反之, 如有一正 n 角形, 可作二相隣內角分角線. 故 $\angle 1+\angle 2$ 等于正 n 角形內角, 故即為 $\frac{1}{n}[2(n-2)]rt.\angle<2rt.\angle s$. 故這二分角線, 必交於一點 O (§21), 便成一等腰三角形, 與上面所說的相同. 集這樣的三角形所成的正 n 角形, 邊角都和所設的相等, 故可完全疊合, 由此可知這正 n 角形各頂點距 O 等遠, 各邊也距 O 等遠.

今以 O 為心, O 與頂點距離及與邊距離為半徑各作一圓, 則為這正 n 角形的外接圓和內

切圓.故得:

(一)正多角形外接內切圓定理　**任何正多角形,必有一外接圓和一內切圓,且這二圓同心.**

由弧對弦逆定理〔§36(二)〕,即知正多角形各項點,等分其外接圓.又邊心距平分各等腰三角形頂角,故每二相鄰邊心距夾角,等於每二相隣項心距所成角,因而盡等,故其內切圓上各切點,也等分其內切圓.

但同等分二等圓疊置,使一等分點相合時,則各等分點盡合,而諸弦與諸切線也各自相合.因此又得:

(二)圓內接外切正多角形定理　**等分一圓,依次聯各等分點,則得其內接正多角形;過各等分點作切線,則得其外切正多角形.**

(三)正多角形面積　由上理易知正 n 角形面積 A, 為所分成 n 個全等等腰△的和,而各等腰三角形面積又為邊心距 r 與邊長 s 乘積之半,故

$$A=\frac{1}{2}nrs.$$

如 p 表周界,即 $p=ns$, 則　$A=\frac{1}{2}pr.$

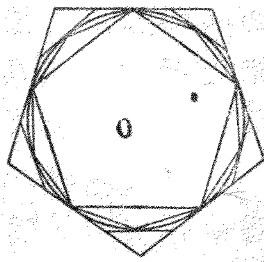
62. <u>正多角形的作圖</u>　由上節(二)可知圓內　(地)

接,外切正 n 角形的作圖,即在將一圓分為 n 等

分,亦即求作$\frac{4}{n}rt.\angle$.這問題叫分圓問題.初等幾何能作的,有正三角形,正方形和正3×2^n角形,正4×2^n角形等.因$\frac{4}{3}rt.\angle$(正三角形內角爲$\frac{2}{3}rt.\angle$)及$rt.\angle$可作,而任何角又都可繼續平分也.

63.<u>圓的度量</u>　圓的度量,有(一)求圓周,(二)求面積二個問題.其困難在不能使單位與所度量相疊合(直線段不能與弧相合,圓不能割補成直線形).換句話說,即圓周與面積的定義,必須先定,方可研究求其值.

(一)<u>圓周</u>　圓的全長叫圓周,其意義由下法確定.



將全圓分爲n等分(例如5等分),則連各等分點,成內接正n角形;過各點作切線,成外切正n角形.設以p_m,q_m表內接,外切m角形周界,則易見有:

$$p_k<p_{2k}<\cdots\cdots<p_{mk}<\cdots\cdots<q_{nk}<\cdots\cdots<q_k$$

(m,n爲2的乘方,即$m=2^r$,$n=2^s$)可見邊數增加時,諸內接正n角形的周界增長,而外切的減短,且二者大小的次序排列如上,不相踰越.

又由§59應用,即知n無限增加時,內接,外

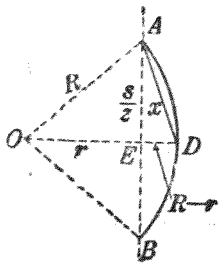
切正 n 角形二者邊長互相趨近,因此知二者周界也如此.故可見圓內接外切正多角形,於邊數無限倍增時,共趨於同一的極限.這極限長,就叫做圓周.

(二)圓面積　圓面積的定義,可做上法規定,即可免去上面所說的困難.設 A_m、B_m 爲一圓內接、外切正 m 角形面積,則顯有:

$$A_k<A_{2k}<\cdots\cdots<A_{mk}<\cdots\cdots<B_{nk}<\cdots\cdots<B_{2k}<B_k.$$

且 $$A_k=\frac{1}{2}p_k r_k,\qquad B_k=\frac{1}{2}q_k R,$$

式中諸 r 表邊心距,R 表頂心距.但按 §59 應用,知多角形邊數無限增加時,r_k 趨於 R,又 p_k 與 q_k 相趨近,故 A_k 與 B_k 也互相趨近,其共同極限值,就叫做圓面積.



64.圓周率　在 §59 應用的圖中,命 $AB=s$ 爲內接正 n 角形一邊,則 $AD=x$ 爲內接正 $2n$ 角形一邊,而 $AE=\frac{s}{2}$.又設 $OE=r$, 則

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2+r^2=R^2,\quad \left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(R-r\right)^2=x^2.$$

消去 r, 得 $$x^2=R^2\left[2-\sqrt{4-\left(\frac{s}{R}\right)^2}\right].$$ (地)

上式爲已知內接正 n 角形的一邊 s, 而求

內接正$2n$角形的一邊x的公式.若式中令$R=1$, $n=6$,則得

$$x=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

這是單位圓內接正12角形每邊的長.由是可逐次推得單位圓內接正24角形,48角形,96角形等每邊的長.若能求到1536角形,則易於推知其周界和其外接圓的直徑之比的差近值爲3.14159………這常數叫做圓周率,常用π表之.由是可知:

(一)圓周公式:　　$C=2\pi R$.

(二)圓面積公式:　$A=\pi R^2$.

習題十七

1. 應用畢氏定理,證明§24中的斜線定理及其逆定理.

2. 設一四邊形兩對角線正交,試證二對邊平方和必等於他組對邊平方和.

3. 設AD爲$\triangle ABC$的一頂垂線,D爲垂趾,試證AB與AC的平方差,必等於BD、CD二線段的平方差.

4. 如一三角形三邊合於$c^2=a^2+b^2$,試證必爲$rt.\triangle$.

5. $\odot O$、$\odot O'$二圓相等,P爲二圓外一點,以O爲心,PO'爲半徑,另作一圓,求證自P至三圓切線長恰好爲$rt.\triangle$三邊.

(幾)

6. ⊙O 內 AB、CD 二弦直交於 P，試證 AP、BP、CP、DP 的平方和，等於⊙O 直徑 d 的平方.

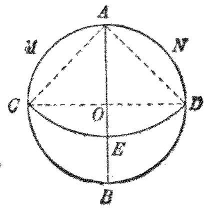
7. 設 H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心，試證

$$AH^2+BC^2=BH^2+AC^2=CH^2+AB^2.$$

8. ⊙O 的 AB 弦上或其延長線上，取一點 P，試證 $PA\cdot PB=OP^2-OA^2$ 或 OA^2-OP^2.

9. 以一正六角形各邊爲直徑，向內作半圓，求其交點爲頂點，各弧圍成圖形的面積和周長(注意邊長爲已知量，下同).

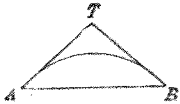
10. 以一正六角形各邊爲弦，向內作各弧相切且相等，求所成圖形的面積和周長.



11. AB 與 CD 爲⊙O 內直交二直徑，以 A 爲心，AC 爲半徑，作弧交 AB 於 E. 試證：

(一)弓形 $CED=$ 弓形 $AMC+$ 弓形 AND.

(二)月形 $CBDE=\triangle ACD$.



12. 試倣§63(一)的方法，定圓弧長的定義.

13. 上圖中 $\overset{\frown}{AB}$ 爲圓上一段弧，AT、BT 爲這圓上二切線，試就上題定義，證明 $AB<\overset{\frown}{AB}<AT+BT$.

(地)

第四編 摘 要

本章授下列各項:

度量,量的比。　　畢氏定理。

度量中無公度情形。　　正多角形特性。

以弧度角。　　正多角形的作圖。

直線形面積,割補法。　　圓周,圓面積,圓周率。

1. 度量由於量與單位的比。

2. 度量論中無公度情形,可用極限的理說明,如:

(一)圓心角與對弧的比例關係。

(二)等高長方形,底與面積比例關係。

3. 面積公式以長方形者為基本.直線形面積,皆可用割補法求出。

4. 畢氏定理:在 $rt.\triangle$ 中, c 為斜邊,a,b 為二腰,則 $c^2=a^2+b^2$。

5. 正多角形皆有一外接圓和一內切圓,且二圓同心。

6. 等分一圓,聯等分點,得其內接正多角形;過等分點作切線,得其外切正多角形。

7. 圓周為一圓內接,外切正 n 角形,當 n 無限增大時,二者周界所共趨的極限。

8. 圓面積為上述二種正 n 角形面積共趨的極限

9. 圓的計算公式: (一)圓周 $C=2\pi R$.

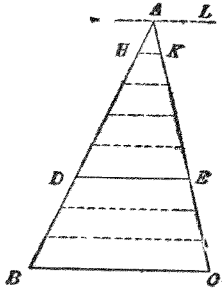
(二)圓面積 $A=\pi R^2$.

第五編

比例線段 相似形

65. 三角形內比例線段 定理 **一直線和一三角形二邊相交,底邊平行,則分二邊成比例線段.**

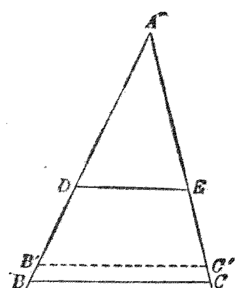
設 $DE \parallel BC$. 過 A 作 $AL \parallel BC$.



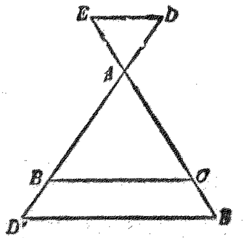
(1) AD 與 DB 有公度:

如 AD 為公度的 m 倍, DB 為其 n 倍,則過各等分點作 BC 的平行線,必與 AC 相交(§21 例), 且 m 等分 AE, n 等分 EC(平行截線定理).故得 $DB:AD=n:m=EC:AE$.

(2) AD 與 DB 無公度:



取 AD 的$\frac{1}{m}$為單位,以度DB,照§53 的理,可得$DB'<DB<DB''$,而$DB':AD=n:m$, $DB'':AD=(n+1):m$. 作$B'C'$、$B''C''$均$\parallel BC$, 按(1)得 $DB':AD=EC':AE$; $DB'':AD=EC'':AE$. 設 m 無限增大,則單位無限縮小,DB'與DB''皆以DB為極限; EC'、EC''皆以 EC 為極限,上面的比例式遂變為$DB:AD=EC:AE$.

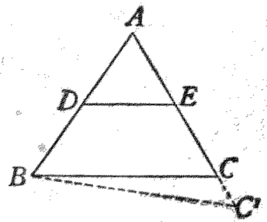


註一　如 D、E 在二邊延長線上,證法仍同.

註二　變化比例式,尙可得:

$DB:AB=EC:AC$ 等式.

逆定理　如一直線分三角形兩邊依次成比例線段,則這線必與第三邊平行.



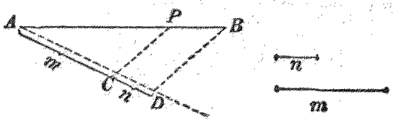
設 $DB:AD=EC:AE$.

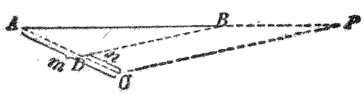
過 B 作 DE 的平行線,必與 AC 或其延長線交於一點 C'(何故?). 按本定理,則有

$DB:AD=EC':AE$.

比較二比例式,得 $EC=EC'$. 故 C' 與 C 相合,而 $BC\|DE$.

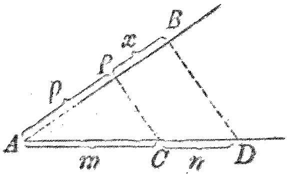
66. <u>比例線段的作圖</u>　按上節的理,即可依定比分一已知線段,或作一線段,使與三已知線段成比例.





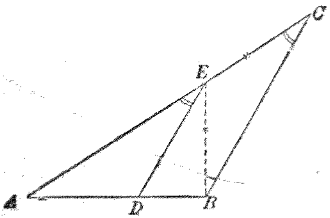
(一)設 $m:n$ 爲已知比, AB 爲已知線段.過 A 任引一直線,幷在其上取 $AC=m$, $CD=n$.聯 BD, 且作 $CP\|BD$, 則 P 點分 AB 成定比 $m:n$, 卽 $AP:PB=m:n$.

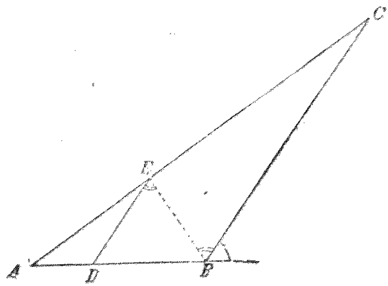
注意　由此知依定比內、外分已知線段的點，只各有一.



(二)設 m、n、p 為三已知線段.在一角的二邊上，依次取 $AC=m$, $CD=n$, $BP=p$. 作 $DB\|CP$, 則得 $PB=x$, 而合比例式　$m:n=p:x$.

67. <u>三角形分角線性質</u>　比例線段裏基本定理，為三角形內比例線段(§65). 當底邊平行截線在特殊位置，得推出三角形內、外分角線性質如下:





在 $\triangle ABC$ 中, $DE\|BC$, 則 $AE:EC=AD:DB$　(1),

或　$AC:EC=AB:DB$　(2).

(一)設 $BE=CE$, 則 $\angle EBC=\angle ECB$. 但 $\angle AED=\angle ECB$; $\angle DEB=\angle EBC$. 故 $\angle AED=\angle DEB$, 即 ED 平分 $\angle AEB$. 就 $\triangle AEB$ 看，而改書(1)式如　$AE:EB=AD:DB$, 即明:

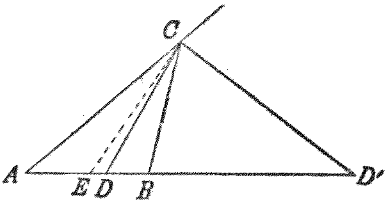
三角形內分角線，內分對邊成二段的比，等

於他二邊的比.

(二)設 $BE=BD$, 則同上法可證 BC 爲 $\triangle ABE$ 的一外分角線,改書(2)式如　$AC:EC=AB:EB$, 卽明:

三角形外分角線,外分對邊成二段的比,等於他二邊的比.

逆定理　**內分一三角形底邊,使分二段與相隣二邊成比例,則這內分點與頂點聯線,內分三角形的頂角.依法外分,則相當聯線,外分這頂角.**



設 D、D' 各爲 $\triangle ABC$ 的底邊 AB 和其延長線上一點,內、外分 AB 所成比,等於 $AC:BC$, 卽 $AD:DB=AD':D'B=AC:BC$.

作 $\angle ACB$ 的內分角線 CE, 則 $AE:EB=AC:BC$. 但依定比內分定線段的點,只有一個[§66(一)注意],故 E 應與 D 相合,卽 CD 爲 $\angle ACB$ 的分角線.

同理可證 CD' 爲 $\angle ACB$ 的外分角線.

習題十八

1. 三平行線依次截一直線於 A、B、C, 另一直線於 D、E、F, 試證 $AB:BC=DE:EF$.

2. 如三直線依次截一直線於 A、B、C, 另一直線於 D、E、F, 而 $AB:BC=DE:EF$, 這三直線是否必平行?

3. 假設上題中三直線,已知有二條平行,則第三條是不是也平行? 何故?

4. 過一定點的三直線依次截一直線於 A、B、C 及其平行線於 D、E、F, 試證 $AB:BC=DE:EF$.

5. 三直線依次截一直線於 A、B、C 及其平行線於 D、E、F, 而 $AB:BC=DE:EF$, 試證他們必平行或共過一點.

6. 設 D 是 $\triangle ABC$ 底邊的中點, $\angle ADB$、$\angle ADC$ 內分角線交他二邊於 E、F, 求證 $EF \parallel BC$.

7. 如 D 爲 $\triangle ABC$ 底邊中點, BC 的平行線交 AB、AC 於 E 和 F, 則 DE、DF 是否一定各爲 $\angle ADB$、$\angle ADC$ 的內分角線?如知其一爲內分角線,則其他應如何?試證之.

8. $\triangle ABC$ 中 $\angle B=2\angle C$, 而 BC 中點爲 M,其上頂垂線垂趾爲 D, 試證 $MD=\frac{1}{2}AB$.

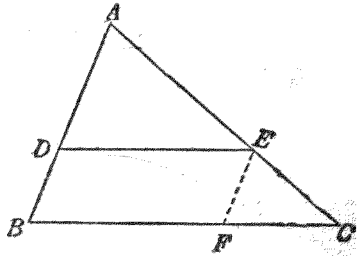
9. 設 $\triangle ABC$ 的內分角線 AD 與 BC 交於 D, 又 I 爲內心,求證 $BC:(AB+AC)=DI:AI$.

10. 如四邊形 $ABCD$ 內 $\angle A$、$\angle C$ 的分角線交點在對角線 BD 上,試證 $\angle B$、$\angle D$ 的分角線,必交於對角線 AC 上

68. <u>相似三角形</u> 有二多角形 $ABC\cdots F$ 與 $A'B'C'\cdots F'$, 如(一) $AB:A'B'=BC:B'C'=\cdots=FA:F'A'$, (二) $\angle ABC=\angle A'B'C',\cdots,\angle FAB=\angle F'A'B'$, 則成相

似多角形.但相似三角形的條件可化簡.

按 §65 所述的 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 相似,但 $\triangle ADE$ 可由其二邊與所夾角決定,即得:



相似三角形條件一　**兩邊對應成比例,且夾角相等.**

作 $EF \parallel BD$, 得 $\square BDEF$, 而 $BF=DE$. 故 $AB:AD=AC:AE=BC:BF=BC:DE$. 今視 $\triangle ADE$ 由其三邊決定,則得:

相似三角形條件二　**三邊對應成比例.**

又如二三角形各角對應相等,則疊置一組等角,並使他二組等角各有一邊相重合,則必成 $\triangle ABC$、ADE 的位置形狀.但三角形內角和為 $2rt.\angle$, 故只須兩組對應等角,則餘一組角必等,因此更得:

相似三角形條件三　**二角對應相等.**

注意　合三種條件之一的二三角形必相似.

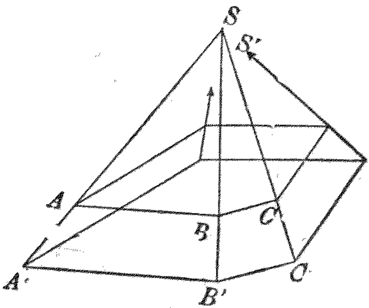
註　相似三角形為推證比例線段基本方法.又多角形的相似性,也往往分為相似三角形去證.

69.<u>位似多角形</u>　如二相似多角形的相當邊對應平行,則稱為**位似多角形.**

位似心定理　**二位似多角形對應頂點的聯線必過一定點.**

(地)

有 $ABC\cdots\cdots$、$A'B'C'\cdots\cdots$爲二位似多角形,而 $AB\parallel A'B'$, $BC\parallel B'C'\cdots$. 設 $AB\neq A'B'$, 則$A'A$、$B'B$二直線必相交,因不如此,就得 $\square A'ABB'$, 而 $AB=A'B'$. 命這交點爲 S, 則 $AB:A'B'=BS:B'S$.



因 $AB:A'B'=BC:B'C'$, 而 $AB\neq A'B'$, 故 $BC\neq B'C'$. 故知BB'、CC'也必相交.設交點爲 S',則 $BC:B'C'=BS':B'S'$.

由上面的三個比例式,卽得 $BS:B'S=BS':B'S'$. 所以 S' 應與 S 相合〔§66(一)注意〕,卽 $C'C$ 過 $A'A$、$B'B$ 的交點.

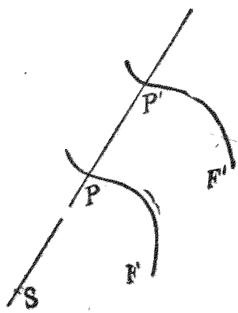
同理可知其他對應頂點聯線,也必經過 S.

註 如 $AB=A'B'$, 則他對應邊也各等,而爲全等形.

定義 S 叫做這二位似多角形的**位似心**.

系 位似多角形相當邊的比,等於相當頂點到位似心距離的比.

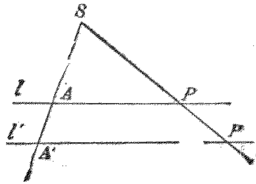
70. <u>位似圖</u> 一直線過定點 S 而旋轉,其上 P 和 P' 二點,常使 $SP:SP'=k$(定比).設 P 移動作一圖 F,則 P' 也作一圖形 F', 二者互稱**位似圖**,S 叫**位似心**, P 與 P' 叫**對應點**, k 叫**位似率**.



(地)

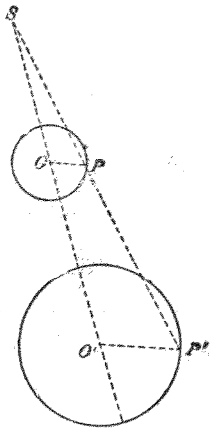
(一)直線　**直線的位似圖,爲一平行直線.**

設 S 爲位似心,A、A' 爲對應點,而 A 在直線 l 上.命 P 爲 l 上任意另一點,而 l 的平行線 l' 與 SP 交於 P',則 $SP':SP=SA':SA$,即 P' 是 P 的對應點,必在 l' 上.



(二)圓　**圓的位似圖仍爲圓.**

設 S 爲位似心,k 爲位似率,O 爲已知圓心.在 SO 上取 O' 點,使 $SO:SO'=k$.如 P' 與 P 相對應,則 $SP:SP'=k=SO:SO'$,而必 $O'P' \parallel OP$,且 $OP:O'P'=SO:SO'=k$,即 $O'P'=\frac{OP}{k}$.所以 P'的軌跡是圓.



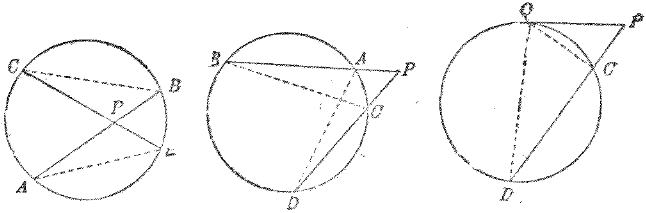
71.<u>**等積線段**</u>　**由比例線段一變即成等積線段,茲舉其重要者如下:**

注意　線段乘積的意義,指其度言,見§57注意.

(一)圓　**由圓內或外一點,作二割線,則這點與不在一割線上二交點所成三角形,和與他二交點所成者相似.即一割線變成切線時也如此.**

如下圖，$\triangle PBC \backsim \triangle PDA$，或 $\triangle PQC \backsim \triangle PDQ$.

$\therefore \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$，或 $PQ^2 = PC \cdot PD$.

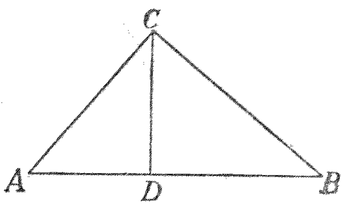


註　又一證法見習題十七內第8題.

割線定理　二割線交於圓內或外一點,則其上的弦被交點內分或外分所成二段的乘積相等;如一割線與一切線交於圓外,則這乘積等於切線長平方.

(二)直角三角形

$rt. \triangle ABC$ 被其斜邊上的高 CD 分爲二個和原三角形相似的三角形,



即　$\triangle ADC \backsim \triangle CDB \backsim \triangle ACB$.

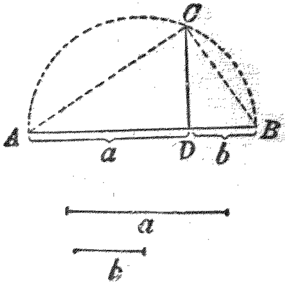
$\therefore AC^2 = AB \cdot AD,\ \ BC^2 = AB \cdot BC\,(1),\ \ CD^2 = AD \cdot DB\,(2)$.

斜邊上高定理　一直角三角形爲斜邊上的高所分成的二直角三角形,都與原三角形相似.且(一)斜邊及其被高分成的一段,以這段相隣一腰爲比例中項;(二)高分斜邊所成的二段,以

高爲比例中項.

註　因直角內接於半圓,故得:

二已知線段的比例中項作法.



設 a、b 爲二已知線段.在一直線上,取 $AD=a$, $DB=b$. 以 AB 爲直徑作半圓,并作 $CD\perp AB$. 如 C 爲圓上交點,則 $CD=\sqrt{ab}$.

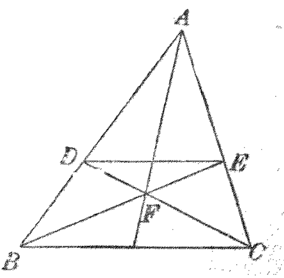
習題十九

1. 試證二相似三角形內(一)二相當頂垂線長,(二)二相當內分角線長,(三)二相當中線長,(四)二內切圓半徑,(五)二外接圓半徑,都與相當邊成比例.

註　頂垂線長等,指自頂點到對邊上交點間距離.

2. 已知一線的度爲 a, 求作一線,使其度爲 a^2, 爲 $\sqrt{a}$, 爲 a^3.

3. 設 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中, $\angle B=\angle B'$, 且 $AB:A'B'=AC:A'C'$, 這二三角形是否必相似?試加討論.



4. 設 $\triangle ABC$ 中, $DE\parallel BC$, 而 BE 與 CD 交於 F, 試證 AF 必是 BC 邊上的中線.

5.已知多角形 $ABCD$……，自定點 S 聯 SA、SB、SC、SD、……，而在各線上取 A'、B'、C'、D'、……，使 $SA':SA=SB':SB=SC':SC=SD':SD=\cdots\cdots=k$，試證 $A'B'C'D'$……與 $ABCD$……位似。

6.試證不等二圓皆為位似圖.如非相含,則位似心為公切線與聯心線交點.并論相含時,求位似心的方法.

7.設 ⊙C 與 ⊙O 及 ⊙O' 切於 A、B，試證 AB 必過 ⊙O 與 ⊙O' 的位似心.

8.試證二直線的交角,等於其位似圖的交角.

9.過 ⊙O 上一點 A，作一切線,與這圓的他二平行切線交於 P 與 Q，試證這圓半徑為 AP、AQ 的比例中項.

10.自 P 點作至 ⊙O 的二切線 PA、PB，而 A、B 為切點;又另作一割線交這圓於 C、D. 試證 $AC:AD=BC:BD$.

11.試證三角形二邊的乘積,等於其第三邊上的高,與其外接圓直徑的乘積.

12.自二圓公弦上一點 P，作一割線,交一圓於 A、D，他圓於 B、E，試證 $AB:BP=DE:DP$.

13.⊙P 的心在 ⊙O 上,任作前者的一切線,與 ⊙O 交於 M、N,試證 $PM\cdot PN$ 的值為一定.

提示　可利用第10題.

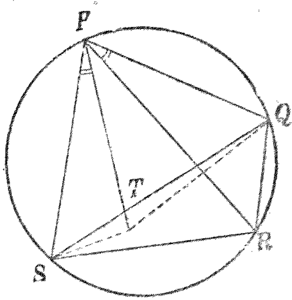
72.判別共圓點又法　由上節(一)的等積線段式,易反推得 $\triangle PBC\backsim\triangle PDA$，因而得 $\angle PBC=$ (地)

$\angle PDA$. 按§46卽可斷定 A、B、C、D 四點共圓.故得:

割線定理逆定理　**AB、CD 二線段交於 P,如 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$,則 A、B、C、D 四點共圓.**

73. 托勒密(Ptol·my)定理　**圓內接四邊形兩組對邊乘積的和,等於其對角線的乘積.**

設 P、Q、R、S 四點共圓.



作 $\angle SPT=\angle RPQ$,而 T 爲 SQ 上一點.又因 $\angle PST=\angle PRQ$,

$\therefore \triangle PST \backsim \triangle PRQ$.

$\therefore PS:PR=ST:RQ$,

卽　$PS\cdot RQ=PR\cdot ST$.　(1)

同法因　$\triangle PQT \backsim \triangle PRS$,

$\therefore PQ\cdot SR=PR\cdot TQ$.　(2)

(1)+(2),　$PS\cdot RQ+PQ\cdot SR=PR(ST+TQ)=PR\cdot SQ$.

逆定理　**如一四邊形兩組對邊乘積的和等於其對角線乘積,則這四邊形有一外接圓.**

作 $\triangle PST \backsim \triangle PRQ$,則 T 點未必卽在 SQ 上.由相似三角形條件一,易證 $\triangle PQT \backsim \triangle PRS$.故仍有(1),(2)二式,相加得

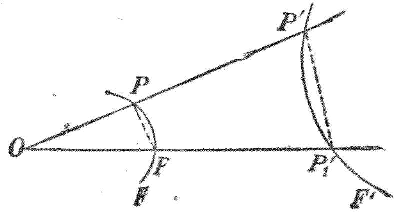
$$PS\cdot RQ+PQ\cdot SR=PR\cdot(ST+TQ).$$

但按前詞,右端應等於 $PR\cdot SQ$,故必 $ST+TQ=SQ$,卽 T 點必在 SQ 上.因此得 $\angle PRQ=\angle PST=\angle PSQ$,而知 P、Q、R、S 共圓.

(地)

註　共圓點判別方法,已在 §46 中述及.上節和本節中的二個逆定理,對於證共圓點時,也頗有效用.

74.反點　在過定點 O 的直線上,取 P、P' 二點,使 $OP \cdot OP' = k$(定數),則 P、P' 互稱反點,O 叫反圖心,k 叫反圖常數.



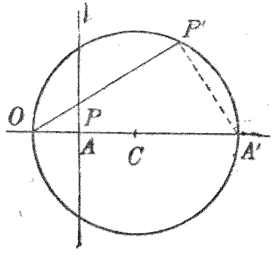
由 §72 中逆定理卽得:

反點定理　**反圖心和反圖常數相同的兩組反點,必同在一圓上.**

注意　由此可知 $\angle OP_1P = \angle OP'P_1'$.

75.反圖　由上節所述 P 點作一圖形 F,則 P' 也作一圖形 F',與 F 互稱爲反圖.

(一)直線的反圖　**不過反圖心的直線,其反圖爲經過反圖心的一圓.**



設 l 爲已知直線,O 爲反圖心,P 與 P' 爲一組反點.過 O 作 l 的垂線,與 l 交於 A,更設 A 的反點是 A',則按上面的反點定理便知 A、A'、P'、P 共圓.故

$\angle OP'A' = \angle PAA' = rt.\angle$,而 P' 在以 OA' 爲直徑的圓上.

(地)

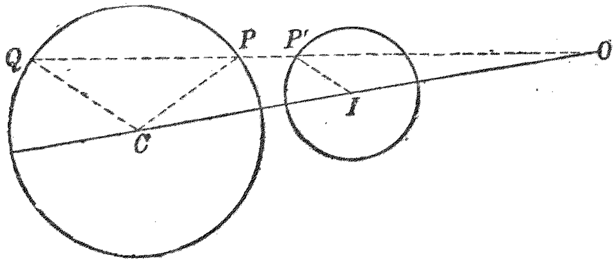
反之,設 $\odot C$ 為過反圖心 O 的一圓,作過 O 的直徑,令其他端為 A',其反點為 A.在圓上任取一點 P',其反點為 P.同上理,知 A、A'、P'、P 共圓,而 $\angle PAA'=\angle PP'A'=rt.\angle$.故有下理:

(二)圓的反圖　**(1)過反圖心的圓,其反圖為一直線,與這圓中過反圖心的直徑垂直.**

如圓不過反圖心 O,則有:

(2)不過反圖心的圓,其反圖仍為一圓.

設 O 為反圖心,k 為反圖常數,P 為已知圓 $\odot C$ 上任意一點,P' 為其反點,OP 與 $\odot C$ 的第二交點為 Q.



按 §71 割線定理,知 $OP\cdot OQ$ 等於自 O 至 $\odot C$ 切線長的平方,故為常值,設為 $OP\cdot OQ=h$.但 $OP\cdot OP'=k$,故得 $OP':OQ=k:h$.即 P'、Q 以 O 為位似心成對應點.所以 P' 的軌跡是 $\odot C$ 的位似圖,而為一圓 $\odot I$〔§70(二)〕.

注意　$\odot C$ 和 $\odot I$ 二圓,既互為位似圖,也互為反圖但其中 P' 與 P 是一組反點,P' 與 Q 是一組對應點.

76.反圖圓　今研究反點與本身相合的情形.如 M 是這樣的一點,則 $OM\cdot OM=k$. 設 k 爲正數,則得 $OM=\sqrt{k}$.故 M 點軌跡是一以反圖心爲心,反圖常數平方根爲半徑的一圓,叫做**反圖圓**, $\sqrt{k}$ 叫**反圖半徑**.

習　題　二　十

1. 設過 P 點的一直線上有 C、D 二點,另取線外一點 Q, 使 $PC\cdot PD=PQ^2$. 試證過 C、D、Q 三點的圓,和 PQ 切於 Q 點.

2. 以 $\triangle ABC$ 的 AB、CA 二邊爲直徑作圓,又引過 B、C 的頂垂線,交那二圓於 M、N、P、Q. 試證這四點共圓.

3. 設 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形, P 爲其外接圓上一點,試證 $PC=PA+PB$.

提示　用托勒密定理,下二題同.

4. 設 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形,而 $PC=PA+PB$. 試證 P 點必在 $\triangle ABC$ 的外接圓上.

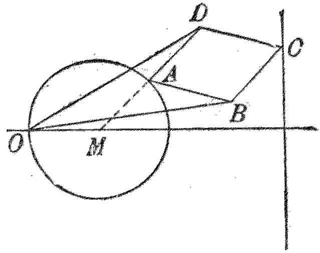
5. 設 P 爲正方形 $ABCD$ 的外接圓上一點,試證

$$(PA+PC):(PB+PD)=PD:PC.$$

6. 以不同的反圖常數,對同一反圖心,作一圖形 F 的二反圖.試證這二反圖爲位似,而以反圖心爲位似心.

(地)

7. 下圖 $ABCD$ 爲四等長木條合成的斜方形,另以二等長木條,連 B、D 於定點 O. 試證當 C 作直線時, A 作



一過 O 的圓,反之亦然.

註　這種器具叫皮氏(Peaucllier)連接器.

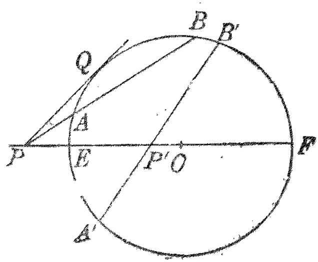
8. 試證任意二圓,皆可視為互成反圖.

9. 設 O 為反圖心,A、A' 與 B、B' 是二組反點,k 是反圖常數,求證 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{k}{OA\cdot OB}$

10. 作二相交線的反圖,試證所得二圓在交點二切線的角,等於那二相交線所成的角.

11. 在 $\triangle OAB$ 中,$\angle OAB=\angle OBA$,以 O 為反圖心,OA 為反圖半徑,求 AB 的反圖,則可由二等角三角形定理(§17 例一)推出三角形分角線性質(§67),試證明之.

提示　須用第 9 題和反點定理下的注意事項.



77. 圓冪　自不在圓上的一點 P,作一動割線 PAB,交 $\odot O$ 於 A 及 B,則 $PA\cdot PB$ 的值為一定〔割線定理,§71(一)〕.

(一)如 P 點在圓外,作過圓心 O 的割線 PEF,命 $PO=d$, $OE=OF=r$,則

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF=(PO-OE)(PO+OF)$$
$$=(d-r)(d+r)=d^2-r^2.$$

(二)如 P' 點在圓內,則由同法可得:

$$P'A'\cdot P'B'=P'E\cdot P'F=r^2-d^2=-(d^2-r^2).$$

定義　**一圓圓心至定點距離平方減去這圓半徑平方的差,叫做那定點對於這圓的圓冪.由上可知:如一點在圓外,則其冪爲正;如在圓內,則冪爲負.**

註　如 P 點在圓外,也可說 P 對這圓的冪,爲切線長 PQ 的平方.但在圓內時,便不能如此說法.

78.等冪軸　定理　**對二定圓有等冪的點,其軌跡爲一直線,與二圓的聯心線垂直.**

設已知 $\odot O$、$\odot O'$ 二圓,以 r、r' 爲半徑.如 P 爲軌跡上一點,則按上節得:

$$OP^2-r^2=O'P^2-r'^2,\text{ 故 }OP^2-O'P^2=r^2-r'^2.$$

由與二點距離平方有定差的點軌跡(§60)卽知 M 軌跡爲 OO' 的一垂線.

這軌跡叫做二圓的等冪軸(也叫根軸).

(一)如二圓交於 A、B,則等冪軸爲公弦及延長線,因其上任一點 P 對二圓的冪同爲 $PA\cdot PB$ 也.

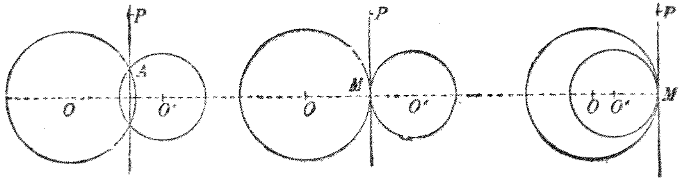
(二)如二圓相切,則等冪軸爲過切點 M 的公切線,因其上任一點對二圓的冪同爲 PM^2 也.

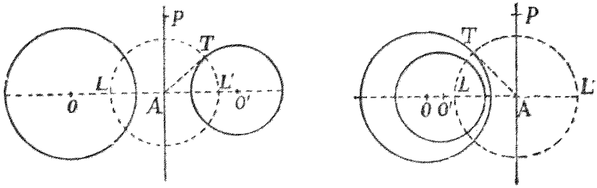
(三)如一圓半徑漸小至於零,則成一點,上理仍眞.卽:

如一動點對一已知圓的冪,等於其距一定點的距

(地)

離平方,則軌跡爲一直線,和定點與圓心的聯線垂直.

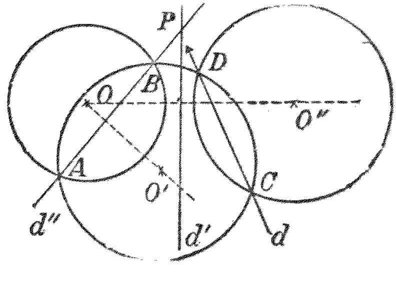




註　若二圓不相交,如上面下列的二圖,設其等冪軸在聯心線上的垂足爲 A, 自 A 畫其中一圓的切線 AT, 以 A 爲心,以 AT 爲半徑作圓弧,與聯心線交於 L、L', 而有 $AL=AT=AL'$.

若 ⊙O(或 ⊙O') 半徑漸漸變小,則其圓心漸漸移近 L (或 L') 點.至半徑小到零時,圓心便移到 L (或 L') 點上,而成爲一點.到此之後,圓心決不能再順向移行.所以 L (或 L')點是一圓半徑漸小至於零時的極限,名叫限點.

79.等冪心　定理　**三圓兩兩取之,其三等冪軸必共過一定點.**



設 ⊙O、⊙O'、⊙O'' 三圓依次兩兩取之,其等冪軸各爲 d''、d、d'.如 O、O'、O''不共在一直線

(地)

上,則 d''、d' 必交於一點 P. 這點對 $\odot O$、$\odot O'$, $\odot O$、$\odot O''$ 均爲等冪,故對 $\odot O''$、$\odot O'$ 亦然,因知必在 d 上.

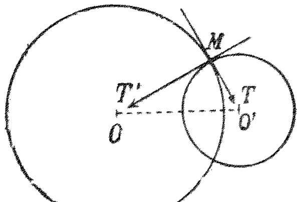
這點叫做三圓的等冪心.

註 如三圓心在一直線上,則三等冪軸爲平行線.

注意 二圓相交或相切,則其等冪軸爲公弦及延長線或公切線,已在§78(一)、(二)中說明.在此種情形,求作等冪軸甚易.若二圓不相交或相切,則可利用等冪心求等冪軸.

設 $\odot O$、$\odot O''$ 不相交或相切,可另作出一適當的 $\odot O'$, 與 $\odot O$ 交於 A、B, 與 $\odot O''$ 交於 C、D. 聯 AB、CD 交於一點 P. 自 P 作 OO'' 的垂線卽得.

80. 正交圓 如二圓以交點爲切點所作的切線垂直,則稱**正交圓**.



設 $\odot O$ 與 $\odot O'$ 二圓的一交點爲 M, 而 $\odot O$ 在 M 的切線 MT 經過 O', 則按切線定理(§38)可知 $\odot O$ 半徑 $OM \perp MT$, 而爲 $\odot O'$ 在 M 點切線,故得:

正交圓判別定理 **如二圓一交點的切線,經過他圓圓心(也可說,過交點的半徑爲他圓切線),則二圓正交.**

逆定理 **如二圓正交,則過交點的一圓切**

線,必過他圓圓心(或可說,過交點的半徑為他圓切線).

過交點 M 作 MT 切於 $\odot O$, MT' 切於 $\odot O'$, 則因二圓正交,故 $MT\perp MT'$. 視 MT' 為 $\odot O'$ 切線,即知 MT 必過 O' 點(何故?).同理知 MT' 必過 O 點.

注意　二圓對稱於其聯心線,故他一交點情形也同.

習題二一

1. 圓上一點對於這圓的冪是什麼?

2. 一點對於二同心圓,能不能有相等的冪?

3. 對於一已知圓有定冪的點,其軌跡如何?

4. 自二圓等冪軸上一點,向二圓各作一割線,求證所得四交點共圓.

5. 如 C_1、C_2 二圓公弦為 C_1 直徑,則 C_2 叫做 C_1 的**徑交圓**,或稱 C_2 平分 C_1. 試證二圓公共徑交圓的心,軌跡成一直線,而與二圓的聯心線垂直.

6. 有二定圓 $\odot O$ 及 $\odot O'$, 求證與 $\odot O$ 直交,與 $\odot O'$ 徑交的圓其圓心軌跡為與二圓聯心線垂直的一直線.

7. 以 $\triangle ABC$ 三邊為直徑,各作一圓,其等冪心與這三角形有什麼關係?

8. 求證三圓的公共正交圓心,即這三圓的等冪心.

(地)　9. 如 A、B 互為反點,以 C 為反圖圓.試證過 A、B 二點的圓必與 C 正交.

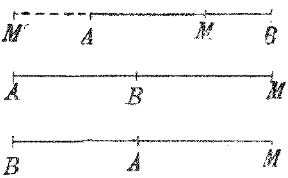
10.於二相交圓公弦異側,對每圓各取一弧.如二弧所對圓周角的和爲$rt.\angle$或$3rt.\angle s$,則爲正交圓.試證之.

11.M爲$\odot O$上任意一點,AB爲任意一直徑,試證明AMO及BMO二圓必正交.

12.試證二相等正交圓的公弦必等於二圓心距離.

81. 有向線段　角的量,除大小外,還有方向上的區別,已在§45說明.在同一直線或平行直線上的線段的量,也有同樣情形.

取A、B兩點,自A到B的綫段,記爲$\overline{AB}$,其反向而等長的量,即自B到A的綫段,記爲$\overline{BA}$.等大小而異向的兩量,猶之代數中同值異號的二數.故



$$\overline{AB}=-\overline{BA},\text{ 或 }\overline{AB}+\overline{BA}=0.$$

沙耳(Chales)定理　**如A、B、M爲一直線上任意三點,則恒有$\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{MA}=0$.**

按上面第二圖,$\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{AM}$,　$\therefore\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{MA}=\overline{AB}+\overline{BM}-\overline{AM}=0$.在第三圖,則$\overline{BA}+\overline{AM}=\overline{BM}$.　$\therefore\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{MA}=\overline{BM}-\overline{BA}-\overline{AM}=0$.$A$、$B$、$C$如取他位置,亦可同法證明.

註　有AB、BM、MA三線段,而AB與BM的和或差等於MA的長,則A、B、M三點必在一直線上.據三角形

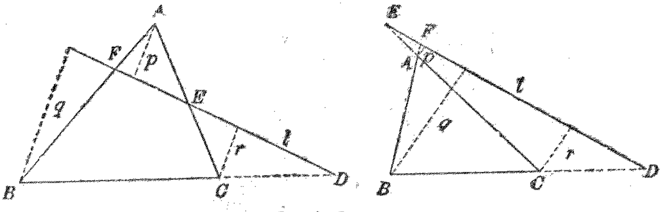
二邊和差定理,卽可用間接法證明之.

注意　如 A、B、M 三點在一直線上,而 $\overline{AM}=\overline{MB}$,則 M 爲 AB 中點;如 $\overline{AM}=\overline{BM}$,則 A、B 二點必定相合爲一.換言之,如 A、B 相異,$\overline{AM}$ 必不等於 $\overline{BM}$.

82. <u>有向比</u>　線段 AB 內一點 M,分成二段的比 $\overline{AM}/\overline{MB}$ 爲正.對外分點 M',則 $\overline{AM'}/\overline{M'B}$ 爲負.有向線段的比,有正負區別,叫**有向比**.按 §66(一)注意,便得:

有向比定理　**依定值有向比分已知線段的點,有一而僅有一.**

83. <u>美耐勞 (Menelaus) 定理</u>　**順一三角形頂點次序取各邊,而以一直線截之,則交點分各邊所成的有向比的連乘積爲 -1.**



設 p、q、r 各爲 A、B、C 到 l 的距離,且如二點在 l 同側時,命其距離爲同號,在異側時爲異號,則

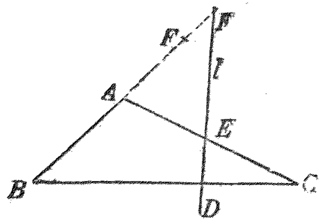
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=-\frac{q}{r},\quad \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=-\frac{r}{p},\quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-\frac{p}{q},$$

故
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\left(-\frac{q}{r}\right)\left(-\frac{r}{p}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)=-1.$$

(地)

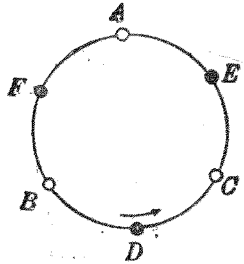
註 設 l 依次截 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 各邊或其延長線於 D、E、F,則三交點,或盡在各邊延長線上,或只有一交點在延長線上,故 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$ 的號顯然為負.

逆定理　順一三角形頂點,依次取各邊,而在諸邊上各取一點,如分各邊所成有向比的連乘積為 -1,則這三點必在一直線上.



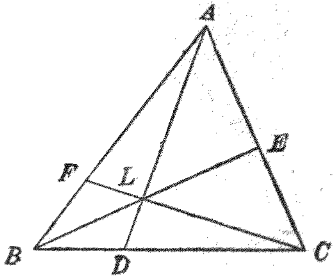
設 D、E、F 為 $\triangle ABC$ 各邊上一點如右.　聯 DE,得截線 l.如 $DE \| BA$,則 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AE}:\overline{EC}$.但 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-1$,故 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-1$,即 $\overline{AF}=-\overline{FB}=\overline{BF}$,是為不可能.故 l 必交 AB 於一點 F'.

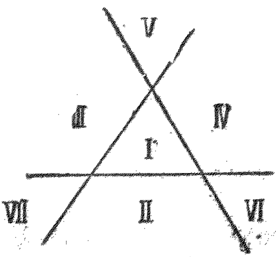
故 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-1$, $\therefore \dfrac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$,即 F'、F 相合(有向比定理,§82),D、E、F 三點在一直線上.



註 若相間書三角形各頂點及截線各交點於一圓上如右圖,則按矢尖所指的向依次取相隣二文字,便可順序得各比如上.下節的定理的情形亦同.

84. 喜瓦(Ceva)定理 順一三角形頂點次序取各邊,自各頂點至一定點的聯線,與對邊相交,則各交點分各邊所成的有向比連乘積爲 1.





設定點爲 L,則對已知的 $\triangle ABC$ 言,有七種位置,如上右圖.有向比 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$ 於 L 在(I)時均爲正,於 L 在其餘位置時,爲二負一正,所以連乘積的號必爲正.

視 CF 爲 $\triangle ABD$ 的截線,則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{DL}}{\overline{LA}}=-1.$

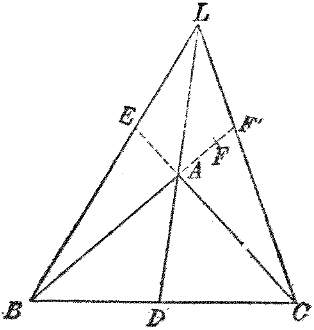
視 BE 爲 $\triangle ADC$ 的截線,則 $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{BC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AL}}{\overline{LD}}=-1.$

將二式兩邊相乘,得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{DB}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$

逆定理 順一三角形頂點次序取各邊,而於每邊上各取一點.如各點分各邊所成有向比的連乘積爲 1,則自各點至對頂點的聯線凡三線,必共過一點,或平行.

(幾)

設 D、E、F 爲 $\triangle ABC$ 各邊上一點,如右圖.聯 AD 和 BE.



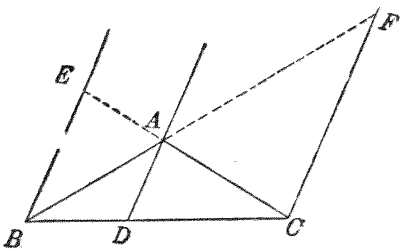
(一)設 AD 與 BE 交於一點 L,聯 CL 交 BA 於 F',則按上述定理和題設,有

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}=$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1,\quad\therefore\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

所以 F 與 F' 相合,即 AD、BE、CF 交於 L.

(二)如 $AD\parallel BE$,則



$$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{EA}:\overline{AC}.$$

但 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1,$

故 $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{AC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=$

$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$, 即 $\overline{CE}:\overline{CA}=\overline{FB}:\overline{FA}$. 按分比定理[§54(五)],得 $(\overline{CE}-\overline{CA}):\overline{CA}=(\overline{FB}-\overline{FA}):\overline{FA}$,即 $\overline{AE}:\overline{CA}=\overline{AB}:\overline{FA}$. 因而 $CF\parallel AD\parallel BE$.

定義　共在一直線上的點,叫**共線點**,或稱**點列**;共過一點的直線,叫**共點線**,或稱**線束**.

美耐勞氏逆定理,是判別共線點的重要方法;喜瓦氏逆定理是判別共點線的重要方法. (地)

習題二二

1. A、B、C、D 是一直線上的任意四點,試證不論其位置如何,均有　$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$.

註　這定理叫尤拉 (Euler) 氏定理.

2. $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 二內分角線,交對邊於 Q 和 R,而 QR 交 BC 於 P,試證 AP 是 $\angle A$ 的外分角線.

3. 試證一三角形三外分角線與對邊交點,爲共線點.

4. 設 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的各中線, D、E、F 等是各邊中點.如 AD 交 EF 於 P, CP 交 AB 於 Q,求證 $AQ=\frac{1}{3}AB$.

5. 試用喜瓦逆定理,證明三角形三中垂線爲共點線.

6. 試用喜瓦逆定理,證明三角形三頂垂線爲共點線.

7. 試用喜瓦逆定理,證明三角形三內分角線必共點.

8. 試用喜瓦逆定理,證明三角形二外分角線,與其餘一角的內分角線,必定共過一點.

9. 設 D、E、F 爲 $\triangle ABC$ 各邊上一點,而 AD、BE、CF 交於一點.在 BC、CA、AB 上,各取一點 D'、E'、F',使 $\overline{BD'}=\overline{DC}$, $\overline{CE'}=\overline{EA}$, $\overline{AF'}=\overline{FB}$,試證 AD'、BE'、CF' 亦爲共點線.

(地)

10.如上題中D、E、F三點共線,試證D'、E'、F'三點也共在一直線上.

註　DEF和$D'E'F'$二截線,互稱為**反極截線**.

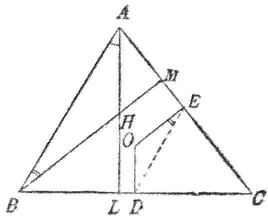
11.$\triangle ABC$的內切圓,與BC、CA、AB諸邊切點,依次為D、E、F,試證AD、BE、CF共過一點.

註　這點叫做三角形的吉剛(Gergonne)點.

12.$\triangle ABC$的各旁切圓,與BC、CA、AB各邊依次切於D、E、F,試證AD、BE、CF共過一點.

註　這點叫做三角形的奈吉(Nagel)點.

85.尤拉(Euler)線　輔定理　三角形垂心與一頂點的距離,二倍於自外心至這頂點對邊的距離.



右圖中,$\triangle ABC$的垂心為H,外心為O,D和E為BC、CA中點,則在$rt.\triangle BMA$中,知$\angle MBA+\angle BAM=rt.\angle$;且$\angle OED+\angle DEC=\angle OEC=rt.\angle$,而$\angle DEC=\angle BAM$,故$\angle HBA=\angle OED$,同理$\angle BAH=\angle ODE$;

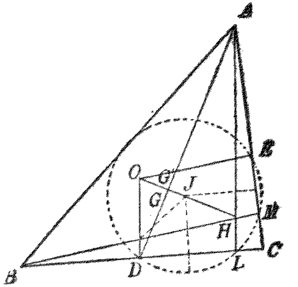
$$\therefore \triangle ABH \backsim \triangle DEO.$$

又$ED=\frac{1}{2}AB$,　因此$OD=\frac{1}{2}AH$,且$OE=\frac{1}{2}BH$.

註　本定理的另一證法,見 §112 例一(本書下册 p. 29),可以參看.

尤拉線定理　三角形的九點圓心、垂心、重心、外心,四點共在一直線上.

設$\triangle ABC$的九點圓心爲J,垂心爲H,重心爲G,外心爲O.



(1) 聯OH,$\triangle ABC$的外心O是BC、CA二邊中垂線交點;九點圓心J,是DL、EM中垂線交點.從梯形$DOHL$、$EOHM$看,就知DL、EM的中垂線,都應過OH中點(何故?).所以J在OH上,且平分OH.

(2) 作中線AD交OH於G',則因$OD \parallel AH$,故$\triangle G'OD \backsim \triangle G'HA$,而$DG':G'A=OD:AH$.但$AH=2\cdot OD$,即$G'A=2\cdot DG'$.

$\therefore AG'=\frac{2}{3}AD$,所以$G'$即$\triangle ABC$的重心.

註　這直線叫做$\triangle ABC$的**尤拉線**.

86. <u>調和點列</u>　設C、D二點,依等比內分、外分線段AB,即$\overline{AC}:\overline{CB}=-\overline{AD}:\overline{DB}$,則$C$與$D$互稱對於$A$、$B$的**調和共軛點**.若將比例式改寫做$\overline{CA}:\overline{AD}=-\overline{CB}:\overline{BD}$,就可見$A$與$B$也是對於$C$、$D$的調和共軛點.這樣的點列,叫**調和點列**.由§66(一)的注意,便知C對於A、B有一共軛點,但只有一共軛點.

例 上節所說的尤拉線上，設 $\overline{OH}=1$，則 $\overline{HJ}=-\frac{1}{2}$，$\overline{OG}=\frac{1}{3}$，$\overline{GJ}=\overline{OJ}-\overline{OG}=\overline{JH}-\overline{OG}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，故 $\overline{OH}:\overline{HJ}=-2$，$\overline{OG}:\overline{GJ}=\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=2$，而有 $\overline{OG}:\overline{GJ}=-\overline{OH}:\overline{HJ}$.所以

一三角形的外心、重心、九點圓心、垂心成調和點列.

注意 在一調和點列中，A 與 B 和 C 與 D 互成二組調和共軛點時，則必成犬牙交錯形，故 A 與 C 不是對於 B、D 的調和共軛點.所以在一調和點列中，須辨明二組互相共軛的點.

87. 調和點列重要特性

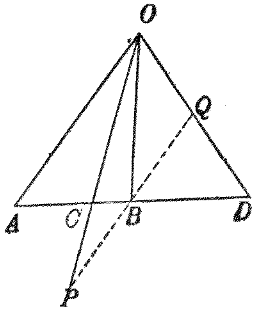
(一) C、D 對於 A、B 為調和共軛點，而 O 為 AB 的中點，則 $\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$.

因 $\overline{AC}:\overline{CB}=-\overline{AD}:\overline{DB}$，故 $(\overline{AC}+\overline{CB}):(\overline{AC}-\overline{CB})=(\overline{DA}+\overline{DB}):(\overline{DA}-\overline{DB})$，但 $\overline{AO}=\overline{OB}$，而得 $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=2\cdot\overline{OB}$；$\overline{AC}-\overline{CB}=(\overline{AO}+\overline{OC})-(\overline{CO}+\overline{OB})=2\cdot\overline{OC}$；$\overline{DA}+\overline{DB}=(\overline{DO}+\overline{OA})+(\overline{DO}+\overline{OB})=2\cdot\overline{DO}=-2\cdot\overline{OD}$；$\overline{DA}-\overline{DB}=-(\overline{AD}+\overline{DB})=-\overline{AB}=-2\cdot\overline{OB}$.就比例式得 $\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OB}^2=\overline{OA}^2$.

照這些步驟逐層逆推，便得：

逆定理 如 $\overline{OC}\cdot\overline{OD}=\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$，則 A、B、C、D 成調和點列.

(二) 設 O 為調和點列 A、B、C、D 所在線外一點.過 B 作 OA 平行線，交 OC 於 P，OD 於 Q，則 $\overline{PB}=\overline{BQ}$.



因 $OA \parallel PQ$,故 $\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AO}:\overline{PB}$;且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AO}:\overline{QB}$.但原設 A、B、C、D 爲調和點列,卽 $\overline{AC}:\overline{CB}=-\overline{AD}:\overline{DB}$;故 $\overline{AO}:\overline{PB}=-\overline{AO}:\overline{QB}$,而得 $\overline{PB}=-\overline{QB}=\overline{BQ}$.

逆定理　**如 OA、OB、OC、OD 爲一線束,而過 B 與 OA 平行的截線,交 OC、OD 於 P、Q,且 $\overline{PB}=\overline{BQ}$,則過 B 的任一截線與線束的四交點,成調和點列.**

因 $\overline{OA} \parallel \overline{PQ}$,故 $\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AO}:\overline{PB}$,且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AO}:\overline{QB}$.又在此假設 $\overline{PB}=\overline{BQ}=-\overline{QB}$,所以 $\overline{AC}:\overline{CB}=-\overline{AD}:\overline{DB}$,就是 A、B、C、D 成一調和點列.

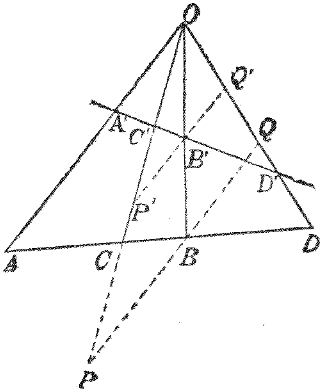
88. <u>調和線束</u>　一線束中各直線,叫射線;共過的一點,叫頂點.以 O 爲頂點,OA、OB、……等爲射線的線束,常記爲 $O(AB\cdots\cdots)$.

定理　**如 A、B、C、D 爲調和點列,O 爲任意一點,則線束 $O(ABCD)$ 被任何直線所截成的點列,皆是調和點列.**

設任作另一截線,交線束於 A'、B'、C'、D'.更過 B、B' 作 OA 的平行線,交 OC、OD 於 P、Q,P'、Q',則 $\overline{PB}=\overline{BQ}$.(何故?).

(地)

但 $PQ \parallel P'Q'$，故 $\overline{PB}:\overline{BQ}=\overline{P'B'}:\overline{B'Q'}$。因而 $\overline{P'B'}=\overline{B'Q'}$。就上節逆定理，即明 A'、B'、C'、D' 爲調和點列。



定義　本定理中的 $O(ABCD)$ 叫**調和線束**。OA、OB 對 OC、OD 互稱**調和共軛線**；OC、OD 對 OA、OB 亦然。

習題二三

1. 設 A、B、C、D 爲調和點列，而 (1) C 與 A 相合，(2) C 是 AB 的中點，或 (3) C 與 B 相合，問 D 點位置如何？

2. 設 P、Q 調分一圓半徑，P'、Q' 調分他一圓半徑，試證 P、Q、P'、Q' 四點共在一圓上。

3. 設 A、B、C、D 爲調和點列，試證 $\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{2}{AB}$。

4. 上題的逆定理也能成立麼？什麼緣故？

5. 試由 §87 (二) 的調和點列特性，推出一作調和點列中第四點的作圖法。

6. 試證一角的內、外分角線與其二邊成調和線束。

7. 上題的逆定理能成立麼？須加何種條件方成立？

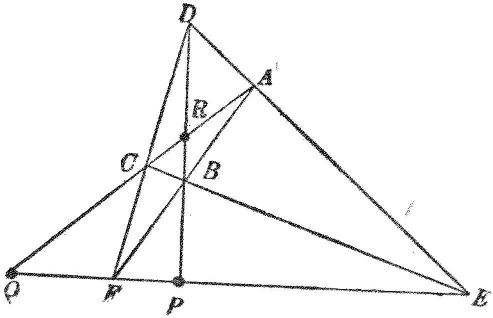
8. 三角形二邊，第三邊上中線，與何線成調和線束？

9. 在一調和點列中,以一組調和共軛點聯線為直徑的圓,必與過他一組調和共軛點的任何圓正交,試證之.

10. 如 A、B、C、D 四點為一調和點列,試證其對於任何反心和反圖率的反圖 A'、B'、C'、D、四點,仍為調和點列.

11. 設 A、B、C、D 與 A'、B'、C'、D' 為二組調和點列,而 AA'、BB'、CC' 共過一點,試證 DD' 也必經過這一點.

89. 完全四邊形 四直線交於 A、B、C、D、E、F 六點,所成的圖形,叫**完全四邊形**.四直線叫**邊**;各交點叫**頂點**;不共在一邊上的二頂點,叫**對頂**



點,如 A、C, B、D, E、F; 不共過一頂點的二邊叫**對邊**,如 AB、CD, CB、DA; 對頂點的聯線,叫**對角線**,如 AC、BD、EF, 其交點 P、Q、R 叫**對角點**.

定理 **完全四邊形各對角線上二頂點,對於其上二對角點,為調和共軛點.**

在 $\triangle DEF$ 中，DP、EC 與 FA 共過 B 點，故

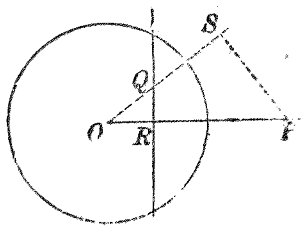
$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{FP}}{\overline{PE}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{AD}}=1. \qquad \text{(喜瓦定理, §84)}$$

又視 ACQ 為 $\triangle DEF$ 的截線，則

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{FQ}}{\overline{QE}}=-1. \qquad \text{(美耐勞定理, §83)}$$

二邊相除，得 $\dfrac{\overline{FP}}{\overline{PE}}\Big/\dfrac{\overline{FQ}}{\overline{QE}}=-1$，故 E、F 對 P、Q 為調和共軛點。同理可證其他。

90. 關於圓的極與極線 設有以 $\odot O$ 為反圖圓的二反點 P 與 R，過 R 作 PR 的垂線 RQ，則 RQ 叫做 P 點關於 $\odot O$ 的極線，而 P 叫做 QR 關於 $\odot O$ 的極。



由這定義，可知除 $\odot O$ 的心外，任何點皆有唯一極線；而不過 O 的任何直線，皆有唯一的極。

基本定理 如一點在他點的極線上，則他點必在前一點關於同圓的極線上。

設 Q 在 P 對 $\odot O$ 的極線上，取 $\odot O$ 為反圖圓，求出 P 與 Q 的反點各為 R 與 S。因 Q 在 P 的極線上，而 P 的極線為過 R 的垂線，故 QR 垂直於 PR。按 §74 反點定理，知 P、R、Q、S 共圓，故 $\angle PSQ=\angle PRQ=rt.\angle$，即 PS 為 Q 關

於$\odot O$的極線.所以P在Q點的極線上.

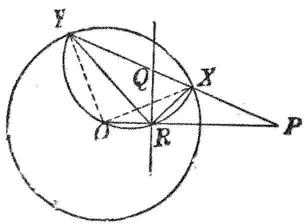
定義　如一點在他點極線上,則互稱共軛點.

91.極與極線對所關圓的調和性

定理　二共軛點聯線與所關圓的交點,對二共軛點成調和共軛點.

設P與Q爲關於$\odot O$的二共軛點.聯P與Q,與$\odot O$交於X和Y.過O、X、Y三點作一圓,與OP相交於R,則因$OX=OY$,故所對弧必等,而$\overparen{OR}=\overparen{OY}-\overparen{RX}$,$\angle OPX=\angle OXR$.因此可知$\triangle OPX \backsim \triangle OXR$,故對於$\odot O$,$R$是$P$的反點.

但原設Q在P的極線上,而這極線應經過P的反點R,且和RP垂直,即$\angle QRP=rt.\angle$.又O、R、X、Y四點共圓,故$\angle PRX=\angle OYX=\angle OXY=\angle ORY$.故$OP$是$\angle XRY$的外角平分線,即$RQ$與$RP$是$\triangle XRY$中$\angle XRY$的內、外角平分線,而應內分、外分$XY$成等比(§67),定理遂得證明.

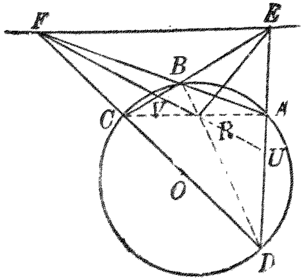


系　過定點P作直線交$\odot O$於二點,Q爲P對二交點的調和共軛點,則直線繞P旋轉時,Q的軌跡爲一直線(即P關於$\odot O$的極線).

此線垂於过P点的直径.

92. 極與極線的作圖

(一)已知極,求極線.



自已知點E,作二直線與$\odot O$相割於A、D與B、C.聯AC、BD交於R,AB、DC交於F,FR即所求極線.

因設FR交AD於U,BC於V,則就$BFCRAD$一完全四邊形,知A、D、E、U與B、C、E、V皆爲調和點列.按§90定義,知U、V均在E對$\odot O$的極線上,而定這極線.

已知點在$\odot O$內時,作法亦同,學生試自述之.

定義 三角形EFR叫做$\odot O$的**自配三角形**,而$\odot O$叫做$\triangle EFR$的**極圓**.

(二)已知極線,求極.

在已知極線上任取二點E、F,作其對$\odot O$的極線交於R,則因EFR爲對$\odot O$的自配三角形,故R爲EF的極,這作法不論已知線是否與$\odot O$相交皆可用.

註 上述作圖法只需單用直尺.

習題二四

1. 試證共線諸點對定圓的各極線,必共過一點.

2. 試證共點諸線對定圓的諸極,必共在一直線上.

3. 自圓外一點,引二切線,試證切點聯線就是該點

的極線.

4. 試述單用直尺,作過圓外一點切線的方法.

5. 自 A 點作 $\odot O$ 二切線 AP、AQ,而 AC 為 B 點關於 $\odot O$ 的極線~~上一點~~,試證 $A(BCPQ)$ 為調和線束.

6. 自 T 引 $\odot O$ 二切線 TP、TQ, 以 P 與 Q 為切點,自 PQ 上任何點 X 作切線,切 $\odot O$ 於 Y,而交 TP、TQ 於 R、S;求證 X、Y、R、S 為調和點列.

7. 自 O 點作 $\odot C$ 二割線,相交於 A、B 和 E、F, 如在 A、F 處二切線交於 P, 在 B、C 處的交於 Q,試證 O、P、Q 共線.

8. 求極圓分割原三角形各邊所成比的情形.

9. 試證一三角形的垂心,即為其極圓的圓心.

10. 自一圓心至任意二點距離的比,必等於自這二點,各至其關於這圓的極線距離所成比,試加證明.

註　這理叫沙爾門(Salmon)定理.

11. 求證二線夾角,等於其聯二極的線段對相關圓心的張角.

第五編 摘 要

本章授下列各項:

比例線段.	正交圓.
相似形.	有向線段.
位似圖、位似心、對應點、位似率.	有向比.
等積線段.	美耐勞定理、喜瓦定理.
托勒密定理.	共線點、共點線判別法.
反圖、反心、反點、反圖常數.	尤拉線.
反圖圓、反圖半徑.	調和點列、調和線束.
圓羃、等羃軸、等羃心.	完全四邊形.
	圓的極線與極.

1. S 為定點,PP' 過 S,而 $SP:SP'=k$,則 P、P' 所作圖 F、F' 互稱位似圖;P、P' 為相應點;S 為位似心.k 為位似率.

2. 直線的位似圖為一平行直線,圓的位似圖為一圓.

3. 托氏定理 $ABCD$ 為圓內接四邊形,則 $PS\cdot RQ+PQ\cdot SR=PR\cdot SQ$.逆之亦真.

4. O 為定點,PP' 過 O,而 $OP\cdot OP'=k$,則 P、P' 所作圖 F、F' 互稱為反圖;P、P' 為反點;O 為反心;k 為反圖常數.

5. 直線和圓的反圖如下表:

原圖＼反心	在原圖上	不在原圖上
直線	原直線	一圓(過反心)
圓	一直線	一圓(不過反心)

6. 自一點到定圓心距離與圓半徑二者的平方差，叫做這點對定圓的冪。

7. 對二定圓有等冪點的軌跡，爲一與聯心線垂直的直線，叫這二定圓的等冪軸。

8. 三圓兩兩取之，其三等冪軸必過一點，叫做這三圓的等冪心。

9. 二相交圓，在交點的切線互相垂直，就叫做正交圓。

10. 二正交圓中，一圓過交點的半徑，必爲他圓切線。反之，如這條件能合，則二圓必爲正交圓。

11. 對於有向線段：(一) $\overline{AB}=-\overline{BA}$，或 $\overline{AB}+\overline{BA}=0$。

(二) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$ (沙耳氏定理)。

12. 美耐勞定理　一直線截 $\triangle ABC$ 各邊於 E、F、D，則 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=-1$。反之，如合這條件，則 D、E、F 共線。

13. 喜瓦定理　過一點 L 與 $\triangle ABC$ 頂點聯成直線，交對邊於 E、F、D，則 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$。反之亦然。

(地)

14. 美氏喜氏逆定理各爲判別共線點和共點線的

要法。

15. $\triangle ABC$ 內的外心、重心、九點圓心、垂心，四點共線，叫尤拉線。

16.如 A、B、C、D 共線，且 $\overline{AC}:\overline{CB}=-\overline{AD}:\overline{DB}$，則稱爲調和點列。

17.如 A、B、C、D 爲調和點列，O 爲 AB 中點，則 $\overline{OA}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$。

18.自調和點列 A、B、C、D 所在線外一點 O，聯 OA、OB、OC、OD，則用任何截線所得四交點，仍爲一調和點列。這線束叫調和線束。

19.完全四邊形各對角線上，二頂點與二對角點，成調和點列。

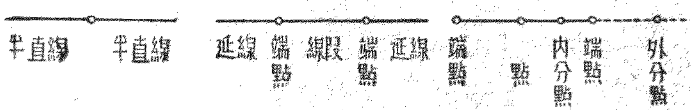
20.過定點 P，任作直線與定圓相交於 A、B。在這直線上取 Q，使 A、B、P、Q 成調和點列，則 Q 的軌跡是一直線，而爲 P 點關於定圓的極線。

附　錄

高中平面幾何名詞定義彙覽

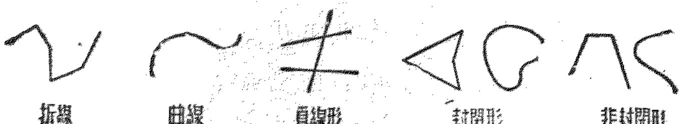
本書習題一第1題,曾將初中所習見的幾何名詞,列為一表,以供複習.今為便於檢查計,特據本局出版的修正標準初中幾何,將各名詞定義彙集於此.

(1)半直線,線段,延線　在一直線上取一點,分為二部,每部份叫**半直線**.如取二點,則其中一部份叫**線段**;這二點,叫**端點**;在線段外的部份,叫這線段的**延線**.



(2)線段的內分點,外分點,中點　線段上一點,叫**內分點**;如分這線段成相等二部份,則稱**中點**.線段延線上一點,叫**外分點**.

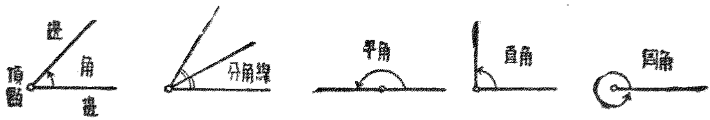
(3)折線,曲線　許多不在一直線上的線段,首尾依次銜接聯成的圖形,叫**折線**.圖形上無一段為直線的,叫**曲線**.



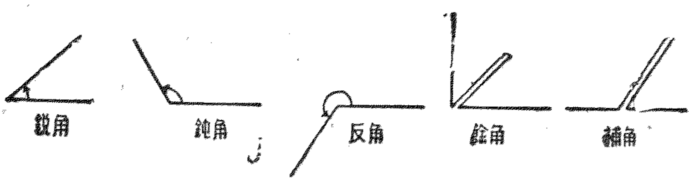
(4)直線形,曲線形,封閉形　單由直線組成的圖形,

叫**直線形**;由曲線組成的,叫**曲線形**.平面上圖形,如將全平面分成不相通的二部份,則稱**封閉形**,或簡稱**閉形**;否則稱**非封閉形**.

(5)角、頂點、邊、分角線　自一點引二條半直線,所成的圖形叫**角**,這點叫**頂點**,這二半直線叫**邊**.過頂點的一半直線,分一角成相等二部分,則稱為這角的**分角線**.

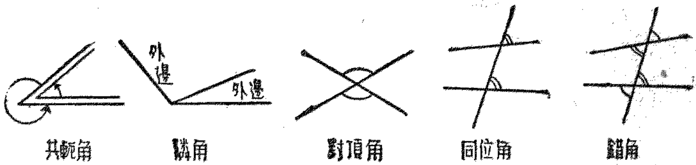


(6)平角、直角、周角、銳角、鈍角、劣角、反角　角的二邊成一全直線時,叫**平角**.分平角為二等分,所成的角叫**直角**.平角的二倍叫**周角**.小於直角的角,叫**銳角**;大於直角而小於平角的,叫**鈍角**;大於平角而小於周角的,叫**反角或優角**.對於反角言,銳角和鈍角,皆稱**劣角**.



(7)鄰角、對頂角、同位角、錯角　同一頂點,共有一邊,而各不相含的二角,叫**鄰角**;不公共的邊,叫**外邊**.二直線相交,成四個角,其中不相鄰的二角,叫**對頂角**.以一直線,截二直線,在截線同側,又皆居被截線上(或下)的二角,叫

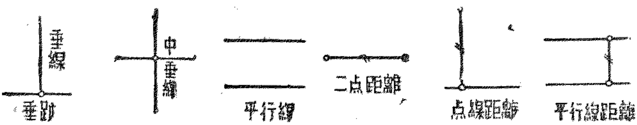
同位角.一角與其同位角的對頂角,叫**錯角**.



(8)垂線、垂趾、中垂線　一直線與另一直線相交,成二相等的隣角,則稱其一為其他的**垂線**,或稱為**互相垂直**;相交的點,叫做**垂趾**.一直線過一線段中點,而與之垂直,則叫做這線段的**中垂線**.

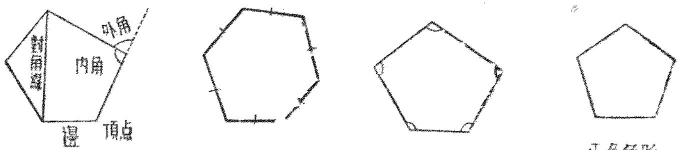
(9)平行線　共在一平面上二直線,無論如何延長總不相交的,叫做**平行線**,或稱其一與其他**平行**.

(10)距離　二點間線段的長,稱為**二點間距離**.自一點作至一直線上垂線,則這點與垂趾間距離,稱為**點線間距離**.二平行線公垂線上二垂趾間距離,稱為**二平行線間距離**.



(11)多角形、邊、周界、對角線、內角、外角　三條或三條以上線段圍成的封閉形,叫**多角形**;各線段叫**邊**,邊長的總和叫**周界**;各線段的端點叫**頂點**;共一頂點的二邊叫**隣邊**;聯不在一邊上二頂點的線段,叫**對角線**;二隣邊所

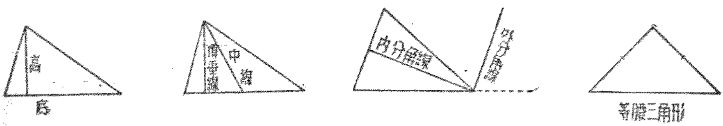
成角叫**內角**,其相補的隣角,叫**外角**.



多角形　　等邊多角形　　等角多角形　　正多角形

(12)等邊多角形、等角多角形、正多角形　各邊皆等的多角形,叫**等邊多角形**;各角皆等的,叫**等角多角形**;既等邊而又等角的,叫**正多角形**.

(13)三角形、底、高、中線、頂垂線、分角線　三線段圍成的封閉形,叫**三角形**.任取其一邊爲底,則自對頂點至這邊的距離,叫做這底上的**高**.自頂點到對邊中點的聯線,叫**中線**;到對邊的垂線叫**頂垂線**;內角、外角的分角線,各稱**內分角線**、**外分角線**.

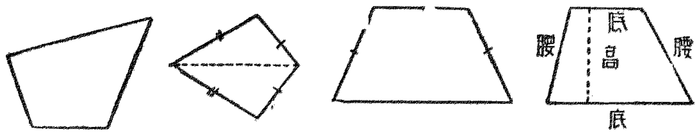


等腰三角形

(14)等腰三角形、等邊三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形　有二邊相等的三角形,叫**等腰三角形**;三邊皆等的,叫**等邊三角形**.各內角都是銳角的三角形,叫**銳角三角形**;有一鈍角的,叫**鈍角三角形**;有一直角的,叫**直角三角形**,直角的對邊叫**斜邊**,他二邊叫**腰**.

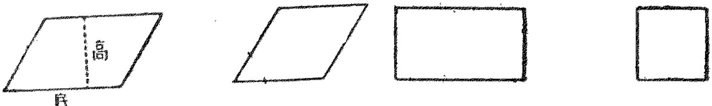
等邊三角形　　銳角三角形　　鈍角三角形　　直角三角形

(15)四邊形、箏形、梯形、等腰梯形　四線段圍成的封閉形,叫**四邊形**.各邊角間無特殊關係的,叫**任意四邊形**;二組隣邊各等的,叫**箏形**;有二相對邊平行的,叫**梯形**,二平行邊叫**底**,其間距離叫**高**,他二邊叫**腰**;等腰的梯形,叫**等腰梯形**.



任意四邊形　　箏形　　等腰梯形　　梯形

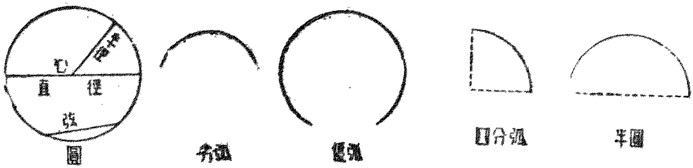
(16)平行四邊形、菱形、長方形、正方形　二組對邊都平行的四邊形,叫**平行四邊形**,任取二平行邊為底,則其間距離為高.二隣邊等長而不垂直的平行四邊形,叫**菱形**;垂直而不等長的,叫**長方形**,或**矩形**;既垂直而又等長的,叫**正方形**.



平行四邊形　　菱形　　長方形　　正方形

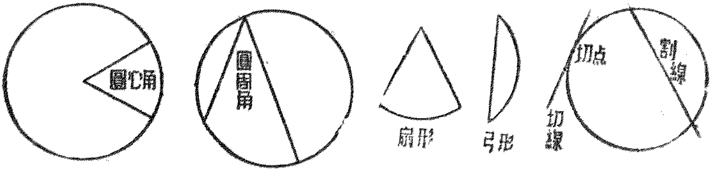
(17)圓、心、半徑、弦、直徑　曲線封閉形上任一點與另一定點距離為定長時,則叫做**圓**,這定點叫**圓心**,聯圓心

與圓上一點的線段(或其長)叫**半徑**.圓上二點聯成的線段叫**弦**;過圓心的弦叫**直徑**.



(18)弧、四分弧、半圓、優弧、劣弧　圓的一段叫**弧**;任一直徑分圓所成相等的二弧,各稱為**半圓**;半圓的一半叫**四分弧**或**象限弧**.大於半圓的弧,叫**優弧**;小於半圓的,叫**劣弧**.

(19)圓心角、圓周角、扇形、弓形　頂點在圓心,二邊為半徑的角,叫**圓心角**;頂點在圓上,二邊為弦的角,叫**圓周角**.圓心角與所截弧圍成的封閉形,叫**扇形**;弦與所截弧所圍成的封閉形,叫**弓形**.

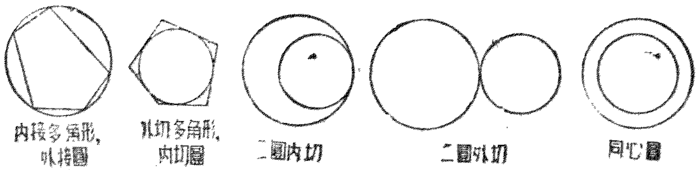


(20)割線、切線　與圓交於二點的直線,叫圓的**割線**;只交於一點的叫圓的**切線**,交點叫**切點**.

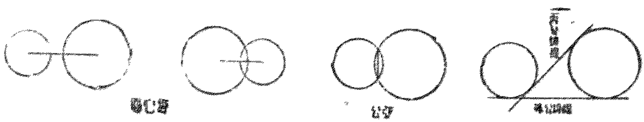
(21)內接多角形、外接圓、外切多角形、內切圓　以一圓上點為頂點的多角形,叫**內接多角形**,這圓叫多角形

的外接圓.一多角形各邊皆與一圓相切的,叫外切多角形,這圓叫多角形的內切圓.

(22)圓的內切、外切,同心圓　二圓只有一交點,則一圓完全含於他圓內時,叫二圓相內切;二圓互不相含時,叫二圓相外切.共有一圓心的諸圓,叫同心圓.



(23)二圓的聯心線、公弦、內公切線、外公切線　二圓心的聯線,叫聯心線.相交二圓交點的聯線,叫公弦.與二圓同時相切的直線叫公切線;如二圓分居二側,則稱內公切線,如只在一側,則稱外公切線.



(24)度量、單位比　欲度一量,可取一同類量為標準,而求所度量為這標準量的幾倍,或幾分之幾.這標準量叫單位;表倍數或幾分之幾的數值,叫度量(簡稱度),或值.二同類量,對於同單位的度量所成的比,叫做這二量的比.

(25)面積　平面中有限的一部份,比另一部份(單位

面積)大小的倍數,叫做面積.

(26)圓周、圓周率、圓面積　圓的全長,叫做圓周.一圓周與其半徑所成的比,叫圓周率.圓內所含平面部分的面積,叫圓面積.

(趙)

(上冊完)

中 西 名 詞 對 照 表

(一) 中 西 對 照

[後面數碼，指所在節數，如係中文字碼，則係第幾習題]

八　畫

九　畫

十　畫

十一畫

十二畫

十三畫

（續）

十 四 畫

十 五 畫

十 六 畫

十 八 畫

十 九 畫

二 十 二 畫

二 十 三 畫

(二) 西中對照

[後面數碼，指所在節數，如係中文字碼，則係第幾習題]

G

H

I

L

(地)

M

N

O

P

R

S

T

U

V

(11053)