Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 27

Übungsaufgaben

Aufgabe 27.1. Sei $R = A_{13}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 13$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 27.2. Sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R. Zeige, dass es ein Element $f \in \mathfrak{a}$ mit der Eigenschaft gibt, dass für alle maximale Ideale $\mathfrak{m}$ gilt:

$$f \in \mathfrak{m} \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\,.$$

Aufgabe 27.3. Sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R. Zeige, dass es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass das inverse Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ zu $\mathfrak{a}^m$ äquivalent ist.

Aufgabe 27.4. Zeige mit Korollar 27.9, dass der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ faktoriell ist.

Aufgabe 27.5. Es sei R ein Zahlbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Definiere eine „Divisorenklassengruppe“ für die Nenneraufnahme R_f. Dabei soll wieder gelten, dass diese Divisorenklassengruppe genau dann 0 ist, wenn R_f faktoriell ist. Ferner soll es einen natürlichen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{DKG}\,(R) \longrightarrow \mathrm{DKG}\,(R_f)$$

geben.

Aufgabe 27.6. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 27.7. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass es Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ mit der Eigenschaft gibt, dass für beliebige Punkte $P \in X$ und $Q \in Y$ die Abschätzung

$$d(x, y) \leq d(P, Q)$$

gilt.

Tipp: Betrachte die Produktmenge $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ und darauf die Abbildung $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$. Argumentiere dann mit Satz 36.12 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.8. (4 Punkte)

Sei $R = A_{-43}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -43$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 27.9. (4 Punkte)

Sei $R = A_{-67}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -67$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 27.10. (5 Punkte)

Sei R ein quadratischer Zahlbereich. Zeige, dass es ein $f \in R$, $f \neq 0$, mit der Eigenschaft gibt, dass die Nenneraufnahme R_f faktoriell ist.

Aufgabe 27.11. (5 Punkte)

Sei D quadratfrei und sei A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Ferner sei D ein Vielfaches von 5 und $D = 2, 3 \mod 4$. Zeige: A_D ist nicht faktoriell.

Tipp: Siehe Aufgabe 25.20.