Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 23

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.1. Epimenides der Kreter sagte: „Alle Kreter sind Lügner“. Ist diese Aussage ein Widerspruch?

Aufgabe 23.2. Eine Person sagt: „Ich lüge (jetzt)“. Kann das wahr sein?

Aufgabe 23.3. In der *Russellsche Antinomie* wird die Definition

$$M = \{N \mid N \text{ ist eine Menge, die sich nicht selbst enthält}\}$$

betrachtet. Kann M eine Menge sein?

Aufgabe 23.4. Betrachte die Aussage: „Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren“. Rasiert er sich selbst?

Aufgabe 23.5.*

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Aufgabe 23.6. Die Klasse 8c hat an jedem Wochentag eine Stunde mathematische Logik. Der Lehrer sagt am Freitag: „nächste Woche werden wir eine Klassenarbeit schreiben, und das wird eine Überraschung sein“. Begründe, dass der Lehrer lügt.

Aufgabe 23.7. Das Brennersche Putzparadoxon besagt: „Immer wenn ich putze, sieht es danach so aus, wie bei einer durchschnittlichen Hausfrau vor dem Putzen“. Ist dies ein Widerspruch, eine Antinomie, ein Paradoxon, oder einfach nur mangelndes Talent?

Aufgabe 23.8. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 23.9. Bei der Fußball-Europameisterschaft 2016 qualifizieren sich die vier besten Drittplatzierten (der Vorrundengruppen A,B,C,D,E,F) für das Achtelfinale, und zwar nach dem Schema

$$\text{Sieger Gruppe } D \text{ spielt gegen einen Dritten aus } (B, E, F)\,,$$

$$\text{Sieger Gruppe } B \text{ spielt gegen einen Dritten aus } (A, C, D)\,,$$

$$\text{Sieger Gruppe } C \text{ spielt gegen einen Dritten aus } (A, B, F)\,,$$

und

$$\text{Sieger Gruppe } A \text{ spielt gegen einen Dritten aus } (C, D, E)\,.$$

(1) Zeige, dass dies stets durchführbar ist.
(2) Zeige, dass es eine Reihenfolge der Drittplatzierten derart gibt, dass daraus die Aufteilung der Drittplatzierten eindeutig festgelegt ist.
(3) Zeige, dass es eine Reihenfolge der Drittplatzierten derart gibt, dass daraus die Aufteilung der Drittplatzierten nicht eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 23.10. Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das zugehörige Ableitungsprädikat. Zeige aus den in Bemerkung 23.7 aufgeführten Eigenschaften für einen Fixpunkt q mit

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,,$$

dass weder $\Gamma \vdash q$ noch $\Gamma \vdash \neg q$ gilt.

Aufgabe 23.11. Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das zugehörige Beweisbarkeitsprädikat und es sei q ein Fixpunkt zum negierten Ableitungsprädikat, also

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,.$$

(1) Welche Eigenschaften aus Bemerkung 23.7 gelten in $\mathbb{N}$?

(2) Gilt
$$\neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
in $\mathbb{N}$?

(3) Welche der Ausdrücke $q, \neg q, \alpha(GN(q)), \neg\alpha(GN(q))$ gelten in $\mathbb{N}$?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.12. (4 Punkte)

Es seien $n_1, \ldots, n_r$ natürliche Zahlen und sei
$$\alpha(x) \;:=\; (x = n_1) \wedge \ldots \wedge (x = n_r)\,,$$
wobei n_j durch die n_j-fache Summe der 1 mit sich selbst realisiert werde. Zeige, dass es Sätze $p, q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit
$$\vdash \alpha(GN(p)) \leftrightarrow p$$
und mit
$$\vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
gibt.

Aufgabe 23.13. (3 Punkte)

Folgere aus dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz die Unentscheidbarkeit der Arithmetik.

Aufgabe 23.14. (4 Punkte)

Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das zugehörige Beweisbarkeitsprädikat und es sei q ein Fixpunkt zum negierten Ableitungsprädikat, also
$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,.$$
Zu einem beliebigen Ausdruck p betrachten wir $\neg\alpha(GN(p \wedge \neg p))$. Welche der Ausdrücke
$$\neg\alpha(GN(p \wedge \neg p)),\ \neg\alpha(GN(q)),\ \neg\alpha(GN(p \wedge \neg p)) \rightarrow \neg\alpha(GN(q))$$
gelten in $\mathbb{N}$?