H.B.FINE

范氏大代數

駱師曾吳維一譯　莊禮深校訂

$x+y=0$

世界書局發行

代數學

代數並不是一門艱難的學科,牠所涉及的大都是呆板的法則。所以祇要懂得了這些呆板的法則,明白了一定不易的原理,然後依着一定的法則和原理去練習,去演算,是不會沒有成功的。唯一的祕訣便是繼續不斷的演習。祇要有恆心,能忍耐,那麼克服代數這門學科的困難是易如反掌的。

常常聽得學生們說代數難。怕代數的難比任何學科都怕。他們大都把這種事實的原因委之於性情。往往說:「我的性情不近於代數,所以代數對我無緣。」或者說:「我沒有代數的天才。」其實這是一個很大的錯誤。用着患難的心理去看任何學科都是難的。反過來說,如果能用克制困難的精神與毅力去學習,那麼代數決不是一門艱難的學科。

其次,要說到學習代數時應該注意的幾點:

(一)**多做算草多看例題**　代數的習題,全賴多練習,多演算。單靠方法的了解是不夠的。因為解答代數的習題大都要靠經驗,必須親自去體驗,以獲得這種解答的經驗。許多習題的解答,都須親自去思攷過,演習過,才能了解其中的訣巧。各題有各題的解法,各題有各題的奥祕,非親自去演習過,是很難獲有心得的。尤其是多看例題,

學習要點

因爲例題就是已經說出了解答的奧祕的一種演算，可以幫助讀者啓發解答的思路，促成其他各題的解答。讀者不可忽略視之。

(二)**熟記公式熟練方法**　有許多代數習題，解答時可依一定的公式或方法。學者如果能熟讀記憶這些公式，熟練這種方法，那麼逐步求解，循序前進，必可減少許多困難。更可節省許多時間與腦力。

(三)**運用圖解法以求解答**　圖解法不特可使無法解答之方程式，求得一近似之答數；且可幫助學者明瞭求解之原理。更可進一步而爲研究解析幾何之幫助。故圖解在代數學中雖僅佔有一小部份，但其性質與關係亦頗重大。

(四)**克服心理上之困難**　前面所說一般學者對於代數患難的心理，必須設法去克服牠。代數原是一門涉及數字的科學，所以大部份的演算也須以數字作爲根據。繁複的地方固然比較多，但其方法還是比較呆板的，習題的性質還是比較機械的。讀者如果能耐心忍性，不患艱難，依着一定的方法去做，那麼一定會克服這種困難的。

上述諸端，僅就譯者管見所及，略貢陋見。乖謬之處，尚希　讀者更正。

譯 者 例 言

(一)譯書當以信達流暢爲主。譯者筆拙,雖未能流暢,但於信達一點,則力求與原書意義並無參差或遺漏之處。

(二)本書術語,多採吾國最通行者。如一名已有數譯,則始終採用一名,以表一致。其尙無適當譯名者,則由譯者意譯。且於每一術語之初譯處附以原文,以免讀者混淆而生隔胲之弊。

(三)本書頁碼悉依原著。即每頁內容均與原書相同。以便讀者對照。

(四)原文有英文索引一項,本書亦附以中文譯名,以便查閱。

目　　錄

第一編　數

第二編　代數

努力用功，以達目的。

公元一九四九年十月十七日。

購於台北市經緯書局

廖修鐘識

第一編　數

I. 自然數——數法,加法與乘法

事物之羣及其基數

事物之羣. 依吾人日常之經驗,事物之呈現於當前而引起吾人之注意者,不僅單獨的,但亦有集合而成羣或團者。 1

如手之指,家畜之羣,多角形之頂皆爲事物羣之例.

當某事物與其他事物非個別的而從其全體區別,且使成爲吾人注意之單獨目的物時,則某事物可視作構造一羣.

爲便利計,構成一羣之事物,名爲此羣之元素.

等羣. **逐一對應.** 文字 ABC 及 DEF 之二羣有關係,卽可由一羣各元素與他羣各元素,依一元素與一元素相匹配而將其所有元素組合成對.例如 A 與 D, B 與 E, 及 C 與 F 可匹配. 2

無論何時,如二羣之一切元素,皆能如此匹配者,則稱此二羣相等;而諸元素之匹配方法稱爲使二羣成一對一關係,或逐一對應之關係.

3 **定理.** 設二羣皆等於同一第三羣,則互相等.

因依假設,可使其二羣中每一羣與第三羣逐一對應,但設其中二元素與第三羣相同元素視爲成偶,則此二羣當互相逐一對應.

4 **基數.** 吾人可設想所有可能的事物之羣,係分配於等羣之類,而任何二已知羣之屬於同類或異類,依是否可能使其逐一對應而定之.

例如,文字 $ABCD$ 與 $EFGH$ 之二羣屬於同類,而二羣 $ABCD$ 及 EFG 則爲異類.

一類諸羣公有之性質,而從他類諸羣分別者,爲一羣事物之數或其基數.換言之,

一羣中事物之數或其基數,爲其本羣及可與其逐一對應之各羣公有之性質.

或可說:"事物羣之基數,爲此羣之性質,其中事物,設重行排列,或以他事物逐一代換而仍不變者";又可說"此爲羣之性質,而此羣不關係於事物本身之特性及其羣中之排列".

因排列事物或以他事物逐一代換,則僅能變爲一等羣(§ 2).且當其羣中一切如此變化而性質不變,是必無關於事物之特性及其排列.

部分. 第一羣之元素有若干而非全體,爲第二羣之元素時,則稱第一羣爲第二羣之一部分. 5

例如, 羣 ABC 爲羣 $ABCD$ 之一部分.

由此定義逕得:

設第一羣爲第二羣之一部分,而第二羣又爲第三羣之一部分,則第一羣亦爲第三羣之一部分. 6

有限羣及無限羣. 當一羣或團不等於其本身諸部分之一時,則稱爲有限;當等於其本身之某一部分時,則稱爲無限.* 7

例如, 羣 ABC 爲有限,因不能使其與 BC 或其任何部分逐一對應.

但記號或符號之任何不盡連續,例如不盡數串 1, 2, 3, 4……, 爲一無限團.

例如, 可於全團 1, 2, 3, 4,……,及自 2 起之部分間成立一對應關係.

即於　　1, 2, 3, 4, 5,……　　(a)

及　　2, 3, 4, 5, 6,……　　(b)

之間. (a) 中之 1 與 (b) 中之 2 匹配, (a) 中之 2 與 (b) 中之 3 匹配, 餘類推, ——對於 (a) 中所可任擇之數, 在 (b) 中有其對應數.

故團 (a) 等於其部分 (b). 因此 (a) 爲無限.

小基數及大基數. 令 M 及 N 表任何二有限羣,則必爲下列情形之一. 8

1. M 及 N 相等,

或　2. M 等於 N 之一部,

或　3. N 等於 M 之一部.

---

* 當然不能將一無限羣,——多稱爲團之一切元素一一計及. 當已有定則而能由此斷言已知事物是否屬於此團時,則吾人視如此之團,其意義已定.

於第一情形,稱 M 及 N 有同基數 (§ 4), 或等基數;於第二情形,稱 M 之基數小於 N 之基數;於第三情形,稱 M 之基數大於 N 之基數.

例如,設 M 爲文字 abc 之羣,及 N 爲羣 $defg$, 則 M 等於 N 之一部分.例如等於部分 def.

故 M 之基數小於 N 之基數,而 N 之基數大於 M 之基數.

9 **註** 由 § 7 有限羣之定義,此處所定"等","大"及"小"之關係,不可含混.例如,此定義不能使 M 之基數同時等於及小於 N 之基數,因如此則 M 等於 N 亦等於 N 之一部分,故 N 等於其本身之一部分 (§ 3),而其終, N 爲無限 (§ 7).

10 **系.** 設三基數之第一數小於第二數,而第二數小於第三數,則第一數亦小於第三數.

設 M, N, P 表任何事物羣之基數, M 等於 N 之一部分,而 N 等於 P 之一部分;則 M 等於 P 之一部分 (§§ 3, 6).

11 **基數系.** 由含一元素之一羣開始,而屢次"加"一新事物,導得基數表如下:

1. 一"羣"之基數,如 |,即含一元素.
2. 一羣之基數如 ||,即加一元素於第一種之羣而得者.
3. 一羣之基數如 |||,即加一元素於第二種之羣而得者.
4. 如此類推,不止.

吾人名此種連續基數爲"一","二","三",……,而以記號 1, 2, 3,……表之.

就此系觀察. 任何有限羣之基數,名爲有限基數,下列 12
觀察,視爲由上述基數表而得者:

第一. 此表中之各基數,皆爲有限.

如羣 | 有限,因其不能等於其一部分 (§ 7) 故也;而其後各羣爲有限,因加一新事物於有限羣仍爲有限故也.[*]例如 | 爲有限羣,故 || 爲有限羣;因 || 爲有限羣,故 ||| 爲有限羣,餘依此類推.

第二. 各有限基數皆含於此表內.

蓋依定義,各有限基數爲若干有限羣之基數,如 M. 但可於 M 中每一物作一標記,作成一標記羣 ||……| 等於任何已知有限羣 M,此標記羣必有一最後標記,故必含於 § 11 之表內,蓋若標記無盡,則其本羣爲無限,而 M 亦爲無限故也 (§ 7).

第三. 諸基數中無二個相等.

此可由 § 8 定義而知之.蓋因已證明一切羣 |, ||, |||,……皆爲有限,而其中每二羣之一等於他羣之一部分爲眞確故也.

---

[*]可證明如下 (G. Cantor, Math. Ann; 46 卷, 490 頁):

設 M 表一有限羣,而 e 爲單一事物,則羣 Me 爲加 e 於 M 而得,亦爲有限.

令 $G=H$ 表羣 G 及 H 相等.

設 Me 爲無限,則必等於其一部分 (§ 7).

令 P 表此部分,則 $Me=P$.

(1) 假定 P 不含 e.

令 f 表 P 內與 Me 中之 e 匹配之元素,而以 P_1 表 P 之餘部.

則因 $Me=P_1f$ 而 $e=f$, 得 $M=P_1$.

但此爲不可能,因 M 爲有限羣而 P_1 爲 M 之一部分 (§ 7) 故也.

(2) 假定 P 含 e.

則 P 中之 e 不能與 Me 中之 e 匹配,因若能配合,則 P 之餘部亦爲 M 之一部,而等於 M 矣.但可假定 P 中之 e 與他元素如 Me 中之 g 匹配及 Me 中之 e 與 P 中之 f 匹配.

設 $Me=P$ 在此假設爲眞,則設再組合諸元素 e, f, g 使 P 中之 e 與 Me 中之 e 匹配及 P 中之 f 與 Me 中之 g 匹配亦眞.但適如前證,P 之一部分將等於 M 矣,故此假設亦不可能.

自然記法．方程及不等式

13 **自然數．** 符號 1, 2, 3,……或其名"一","二","三",……,謂之正整數或自然數．故

一自然數爲一基數之記號或符號．

14 **自然記法．** 排列此諸數使其次序對應於 § 11 所代表之巳知基數,則得不盡之連續記號

1, 2, 3, 4, 5,……,

或"一","二","三","四","五",……,此名自然記法,或自然數之記法．

15 記法內各記號表其中巳定部分之記號數．

例如, 4 表記號 1, 2, 3, 4 之數,因此記號 1, 2, 3, 4, 之數,與羣 |, ||, |||, |||| 之數相同,易言之,卽與最後羣之標記數 |||| 相同 (§ 8), 普通皆如是．

16 **記法之次序性質．** 自然記法,就其本身而言,僅爲不同記號之團,其第一記號爲 1; 繼其後之一定記號卽 2; 再繼其後之一定記號卽 3; 如此無止境．

易言之,自然記法僅爲不同記號之團,依一定且巳知次序一個隨一個而來,且有第一記號而無最後記號．

自其觀察點而論,自然數本身,僅爲有次序之標記,卽當默誦此記法時——關於時間——其次序自能呈現．

17 顯然可見,此記法與普通一切之團,其元素依一定且巳知次序而排列者,皆有下列性質:

1. 任何二元素可稱爲其一在"前"而他一在"後"，此"前""後"之語，應用於任一對元素與應用於任何其他一對，有同一意義.

2. 設任何二元素爲已知，則常可定其孰前孰後.

3. 設 a, b, 及 c 表任何三元素而 a 在 b 前，及 b 在 c 前，則 a 在 c 前.

一團有已知其具上述性質者，或可由選擇排列方法而置之如是者.此種情形，皆稱此團爲次序系.

第一類之例，如 (1) 自然記法本身；(2) 時間內之連續事件；(3) 沿水平線由左至右排成之點列.第二類之例，爲按諸人之姓名字母依次排列者之一羣.

一團亦可有"一致"之元素，如在事物之羣，有二事或諸事可同時發生. 18

當上述關係 1, 2, 3, 保持於不一致元素中——即不一致元素之眞確如下者，則稱此團爲依次序.

4. 設 a 與 b 一致，及 b 與 c 一致，則 a 與 c 一致.

5. 設 a 與 b 一致，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前.

基數中之大小關係，用自然數依記法中次序關係表示之. 19

因任何二已知基數之一，其在自然數記法中較後者必較大.

且"設三基數之第一個小於第二個，而第二個小於第三個，則第一個小於第三個"之關係，可以記法中"設 a 在 b 前，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前"之關係代表之.

實則罕用任何別法以比較基數，吾人不用 §8 之方法，直接比較物羣之基數．反言之，即以合宜之自然數代表，而由其自然數在記法中之關係次序，推知孰大孰小．此事不必思索，因記法深印腦中，故當述及任何二自然數時，即可認識其孰前孰後。例如設述及 A, B 二城，A 之人口爲 120000，而 B 爲 125000，則可立卽斷定 B 城居民較多，因知 125000 於記法中在 120000 之後故也．

20　**數之方程及不等式．** 以後凡言"數"者，皆指自然數(§13)；而文字 a, b, c, 表此任何數．

21　當欲使 a 及 b 表同數或自然記法中之"一致之數"，應用**方程**．

$a=b$, 讀作"a 等於 b"．

22　但當使自然記法中表 a 在前而 b 在後時，應用**不等式**

$a<b$, 讀作"a 小於 b"；

$b>a$, 讀作"b 大於 a"．

23　依嚴格而論，此"等於""小於"及"大於"諸語，自不涉於記號 a 及 b 之本身，但指其所代表之基數；例如"a 小於 b"一語，僅爲"a 所表之基數小於 b 所表之基數"之略語而已．

但一切不等式 $a<b$ 於記號 a 及 b 本身之意義，爲於記法中 a 在 b 前．

24　**方程及不等式之規則．** 由 §§17, 18 及 §§21, 22 之定義，即得

1　設 $a=b$ 及 $b=c$, 則 $a=c$.

2.　設 $a<b$ 及 $b<c$, 則 $a<c$.

3　設 $a=b$ 及 $b<c$, 則 $a<c$.

數 法

算術之主旨，在論自然數中存在之次序關係，及諸數可組合者之若干演算法。 25

算術之演算，以數法為起原。

數法． 欲發覺已知物羣之基數為何，則數此羣． 26

此運算為人所熟知．先取諸物之一標"一"，次取另一物標"二"，如此至諸物無遺而止．——如用口述記號「一」「二」……則須依記法中次序，愼勿遺漏；但選擇諸物，則依任何次序，或從其便，如此則最後所得之記號，卽所求者——此羣中基數之名．蓋由於記法之基數次序，此最後記號表已數過若干記號(§ 15)，從而此羣內有若干物 (§ 8)．

此數法之運算，可認為引導所計算之羣與自然數法之一部分——對應(§ 2)——此部分自"一"起而以計算時所用最後數為止．

觀察自然數用於數法，有二重目的：(1) 僅用其某一羣為運算時之數碼，及 (2) 應用最後一字以記錄此記法之結果．

前已熟知諸物之選擇，與其次序無關．此可證明如下：

定理． 有限物羣無論依如何次序選擇諸物，其數法之結果皆同． 27

例如，假定依次序 P 選擇諸物時，一定羣數法之結果為 99，但依他次序 Q，則為 97．

則在次序 P 中前 97 物所成之羣,將與次序 Q 中之全羣相等,蓋依假設,二者皆有與自然記法之前 97 數相匹配者 (§ 3).

但此爲不可能,因如此則將使此羣之一部分等於其全體;實則由假設,此羣爲有限羣 (§ 7) 故也.

28　**基數之另一定義.** 適所證明之定理,可作爲一有限羣基數定義之基礎,即:

有限物羣之基數爲此羣之性質,不論以任何次序數此羣,均可由此性質達到同一自然數.

設以如 § 16 所定之自然記法,爲論數之起點,則此爲自然所趨之基數定義.

加　法

29　**加法定義.** 加 3 於 5, 意即求自然記法中, 5 以後何數佔第三位置.

在記法中,自 6 起,向前數三數,如: 6, 7, 8, 可求得此數 8.

表此演算用符號 +,讀作"加",書作 $5+3=8$.

就一般而言,加 b 於 a 意即求自然記法中, a 以後何數佔第 b 位置.

因此記法中無最後之符號,故此數常可求得.稱之爲 a 及 b 之和,而於其 a 與 b 之關係,以式 $a+b$ 表之.

30　**註**　求 $a+b$ 之方法,即於自然記法中,以 b 物一羣之元素逐步對應而加於 a 物之一羣.故 (1) 此方法最後之結果,爲 $a+b$ 物之一羣 (§ 8), 及 (2) 設 a 及 b 爲有限基數,則 $a+b$ 亦然.參看 5 頁脚註.

因 $a+1$, $a+2$ 等等，表 a 以後之第一，第二等數，故連續數 $a+\dot{1}$, $a+2$,……表記法中 a 以後之一切部分. 31

故 a 以後之任何已知數，可以形式 $a+d$ 表之，此處 d 表一定自然數.

演算. 用數法加大數，必致困難，故須記憶若干小數之和(加法表)，而應用下節說明所謂加法"定律"者，以導出大數之和. 32

加法定律. 加法為"交換"及"結合"之演算；卽依下列二定律: 33

交換定律. $a+b=b+a$. 34

加 b 於 a 與加 a 於 b 之結果相同.

結合定律. $a+(b+c)=(a+b)+c$. 35

先加 c 於 b 再加所得之和於 a, 與先加 b 於 a 再加所得之和於 c, 其結果相同.

註 實際可以 $a+b+c$ 代式 $(a+b)+c$. 蓋吾人領悟式 $a+b+c+\cdots\cdots$ 表加 b 於 a, 再加 c 於所得之和等等之結果. 36

定律之證明. 吾人可證明此諸定律如下: 37

第一. 交換定律: $a+b=b+a$.

例如, $3+2$ 之和與 $2+3$ 相等.

因 $3+2$ 表自然記法中先數三數,再數二數；卽

所數之羣	1, 2, 3,	4, 5,	(a)
數號	1, 2, 3,	1, 2.	(b)

但於記號 (a) 及 (b) 之二羣間，為一對一之關係，而每一對一之關係為交互的 (§2), 故可互換 (a) 及 (b) 之工作；則設 (b) 為所數之羣，則 (a) 表數號之羣.

故求 $3+2$ 等於數其記號羣　　1, 2, 3,　　1, 2.　　(b)

同理,求 $2+3$ 等於數其羣　　1, 2,　　1, 2, 3.　　(c)

但(b)及(c)由同記號而成,僅其記號之排列不同,故數法之結果相同(§ 27);即

$$3+2=2+3.$$

任何二自然數 a 及 b 仿此。

第二。 結合定律: $a+(b+c)=(a+b)+c.$

先於 a 以後數至第 b 記號,即至 $a+b$,而於其後再數至第 c 記號,即至 $(a+b)+c$,則已共計算 $b+c$ 個記號於 a 以後遂到第 $(b+c)$ 記號,即至第 $a+(b+c)$.

基數之觀念包含於上述之證明中,但可舍此觀念而下加法之定義及建立其定律,如下列腳註以明之。

---

*意大利數學家裴亞諾氏立自然數系不用基數之觀念,另用一種"公法"如以下所述者——其中之"數"均指"自然數"。

1. 記號 1 為一數。
2. 各數 a 後有一繼續數,——稱之為 $a+$.
3. 此數 $a+$ 永不為 1.　　4. 設 $a+=b+$,則 $a=b$
5. 每一已知數 a 在順序 $1, 1+, (1+)+,\cdots\cdots$ 中,諸數 $2, 3,\cdots$ 定之如下

$$2=1+,\ 3=2+,\cdots\cdots$$

和 $a+b$ 意謂由一串公式 $a+1=a+, a+2=(a+1)+,\cdots$ 所定之數(由 5 推出).

上述一串公式,等於簡單公式

6. $a+(b+1)=(a+b)+1.$

由 6 用"數學歸納法",導出加法定律:

7 $a+(b+c)=(a+b)+c.$　　8. $a+b=b+a.$

第一。 設 $c=k$ 時 7 為眞,則 $c=k+1$ 時亦眞,因由 6 及 7,

$$a+[b+(k+1)]=a+[(b+k)+1]=[a+(b+k)]+1$$
$$=[(a+b)+k]+1=(a+b)+(k+1).$$

但 $c=1$ 時由 6, 7 為眞。

故當 $c=2$ 時 7 為眞, ∴ 當 $c=3$ 時,… ∴ $c=$ 任何數時,則依 6 知 7 亦為眞。

第二。 先證 8 之特殊情形: $8'.\ a+1=1+a.$

於 $a=k$, 設 $8'$ 為眞,則依 6 知 $(k+1)+1=(1+k)+1=1+(k+1).$

故於 $a=k$ 而 $8'$ 為眞,則於 $a=k+1$ 亦為眞. 因 $8'$ 於 $a=1$ 為眞,故於 $a=2$ 亦眞, ∴ $a=3\cdots\cdots$ 皆眞。

最後,設於 $b=k$ 而 8 為眞,則於 $b=k+1$ 亦眞,由 7 及 $8'$.

$$a+(k+1)=(a+k)+1=1+(a+k)$$
$$=1+(k+a)=(1+k)+a=(k+1)+a.$$

因 $b=1$ 時 8 為眞(由 $8'$),故於 $b=2$ 亦眞, ∴ 於 $b=3,\cdots\cdots$ 皆眞.

參看史托耳氏及吉梅尼氏理論算術 13 頁及其後所引證裴亞諾氏之處;亦可參看亨亭吞氏在美國數學會之報告第 IX 編 40 頁,格拉斯曼氏(算術讀本)首先自 6 導出 7 及 8.

關於和之一般定理． 反覆應用第 34, 35 節中之定律可 **38**
證明

任何有限個數之數，不論依如何次序排列之，或不論依如何方法集合之，其相加時之和當相等．

例如　　$a+b+c+d=a+c+b+d.$

蓋因　　$a+b+c+d=a+(b+c)+d$　　§ 35

$=a+(c+b)+d$　　§ 34

$=a+c+b+d.$　　§ 35

和之相等及不等法則． 第一． 自 (§ 29) 和之定義，及 **39**
§ 24 之法則，推得

1. 設 $a=b$, 則 $a+c=b+c.$
2. 設 $a<b$, 則 $a+c<b+c.$
3. 設 $a>b$, 則 $a+c>b+c.$

此處 1 已顯然，因設 $a=b$, 則 a 及 b 表同數．

今可證 3 如下，而以同理證 2.

設 $a>b$, 令 $a=b+d$, (§ 31).

則 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$, (§§ 34, 35). $\therefore\ >b+c.$

第二． 自 1, 2, 3, 可推得其逆

4. 設 $a+c=b+c$, 則 $a=b.$
5. 設 $a+c<b+c$, 則 $a<b.$
6. 設 $a+c>b+c$, 則 $a>b.$

如設 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

蓋不如是則必或得 $a<b$ 因而 $a+c<b+c$ (由 2), 或 $a>b$ 因而 $a+c>b+c$ (由 3)

第三． 自 1, 2, 3, 又可推得

7. 設 $a=b$, 及 $c=d$, 則 $a+c=b+d.$
8. 設 $a<b$, 及 $c<d$, 則 $a+c<b+d.$
9. 設 $a>b$, 及 $c>d$, 則 $a+c>b+d.$

例如，設 $a=b$, 則 $a+c=b+c$, 又設 $c=d$, 則 $b+c=b+d$.

故 $a+c=b+d$.

乘　法

40　**乘法定義.** 以 b 乘 a 卽求 b 個數每數皆爲 a 者之和。

今名其和爲以 b 乘 a 之積，而將 a 及 b 以 $a\times b$ 或 $a\cdot b$ 或簡書 ab 表之。

故由定義

41　$$ab=a+a\cdots\cdots \text{至 } b \text{ 項}.$$

42　a 亦名爲被乘數，b 爲乘數，而 a 及 b 爲 ab 之因數。

43　**演算.** 如欲用累次加法以求積，則甚繁，故宜熟記小數之積(乘法表)，而由此藉加法定律與下節所說明之乘法定律以導出大數之積。

44　**乘法定律.** 乘法亦如加法，爲交換及結合之演算，而關於加法爲分配，卽依以下三定律:

45　**交換定律.**　$ab=ba,$

以 b 乘 a 之結果，與以 a 乘 b 相同。

例如，$2\cdot3=6$ 及 $3\cdot2=6$.

46　**結合定律.**　$a(bc)=(ab)c.$

以積 bc 乘 a 之結果，與以 c 乘積 ab 相同。

例如，$2(3\cdot4)=2\cdot12=24$; 及 $(3\cdot2)4=6\cdot4=24$.

實際書 abc 以代 $(ab)c$，比較 §36.

47　**分配定律.**　$a(b+c)=ab+ac.$

先加 b 及 c 而以其和乘 a 之結果，與先以 b 乘 a 及 c 乘 a 而加其所得之積相同。

例如，$3(4+5)=3\cdot 9=27$；及 $3\cdot 4+3\cdot 5=12+15=27$.

定律之證明. 此諸定律可證明如下： 48

第一. 分配定律： $$ab+ac=a(b+c). \qquad (1)$$

因 $ab+ac=(a+a+\cdots\cdots$至 b 項$)+(a+a\cdots\cdots$至 c 項$)$　(§ 41)

$=a+a+a+\cdots\cdots$至 $(b+c)$ 項$=a(b+c)$.　(§§ 35, 41).

故 $$a(b+c+\cdots\cdots)=ab+ac+\cdots\cdots. \qquad (2)$$

例如，$a(b+c+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad$.　由 (1) 及 (§ 35).

又有 $$ac+bc=(a+b)c. \qquad (3)$$

因 $ac+bc=(a+a+\cdots\cdots$至 c 項$)+(b+b+\cdots\cdots$至 c 項$)$

$=(a+b)+(a+b)\cdots\cdots$至 c 項$=(a+b)c$.　(§ 38).

第二. 交換定律 $ab=ba$.

$ab=(1+1+\cdots\cdots$至 a 項$)\,b$

$=1\cdot b+1\cdot b+\cdots\cdots$至 a 項　由 (3)

$=b+b+\cdots\cdots$至 a 項$=ba$.　(§ 41)

第三. 結合定律 $(ab)c=a(bc)$.

$(ab)c=ab+ab+\cdots\cdots$至 c 項　(§ 41)

$=a(b+b+\cdots\cdots$至 c 項$)=a(bc)$.　由 (2) 及 (§ 41).

積之一般定理. 此諸定律可推廣於任何有限個因數之 49
積，即

任何有限個因數之積，與相乘諸因數之次序無關。

積之等式及不等式法則. 即爲： 50

1. 設 $a=b$，則 $ac=bc$.　4. 設 $ac=bc$，則 $a=b$.

2. 設 $a<b$，則 $ac<bc$.　5. 設 $ac<bc$，則 $a<b$.

3. 設 $a>b$，則 $ac>bc$.　6. 設 $ac>bc$，則 $a>b$.

其 1 已顯然，因設 $a=b$，則 a 及 b 表同數．今可證 3 如下，而依以同理證 2.
設 $a>b$，令 $a=b+d$，則 $ac=(b+d)c=bc+dc$ $\therefore >bc$.
法則 4, 5, 6 爲 1, 2, 3 之逆，而由 § 39 所用之理由證之.

自 1, 2, 3, 應用 § 39 之理由，而得

設 $a=b$ 及 $c=d$，則 $ac=bd$.

設 $a<b$ 及 $c<d$，則 $ac<bd$.

設 $a>b$ 及 $c>d$，則 $ac>bd$.

II. 減法與負數

完全記法

51 **減法．** 由 5 減 3，卽求於自然記法中在 5 以前佔第三位置者爲何數.

在記法中，從 4 起，逆數三數如 4, 3, 2 而求得其數 2.

以符號 $-$ 表此演算，讀作"減"寫作 $5-3=2$.

一般，自 a 減 b，卽求在 a 以前佔第 b 位置者爲何數.

此數名爲由 a 減 b 所得之餘數，而於 a 及 b 之關係，以式 $a-b$ 表之．a 名被減數，而 b 名爲減數.

52 **加法與減法演算相反．** 易知在 5 以前之第三數，亦爲從此加三可得 5 之數.

一般，可稱此餘數 $a-b$ 爲在 a 以前之第 b 數，或從此加 b 可得 a 之數，卽爲用下列方程決定之數

53 $$(a-b)+b=a.$$

再者，因說 7 佔 4 以後第三位置，等於說 4 佔 7 以前第三位置，故得 $4+3-3=4$. 普通言之，

$$(a+b)-b=a.$$ 54

55 因 $a+b-b=a$ (§ 54)，以減法取消加法；及因 $a-b+b=a$(§ 53)，以加法取消減法，故斷定加法與減法爲相反演算。

56 **完全記法.** 自然記法不足應減法之所需；因此記法有第一數 1，而不能逆數至超出於此之數。

例如，於自然記法中不能從 2 減 4.

但逆數能如順數之自由，則甚便利。且因自然記法本身，不過爲依一定次序排列之記號系統，自無理由不許推廣於逆數而於其前置新次序系統之記號者。

故另創依次相連之記號：0 置於 1 前；-1 置於 0 前；-2 置於 -1 前；餘類推。

依此方法造成完全記法.

$$\cdots\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

此記法中無最前無最後記號或"數"，故可逆數仍可順數至任何大小。

57 觀察此記法關於記號 0 爲對稱。如 3 爲 0 以後之第三符號，而 -3 爲 0 以前之第三符號；且一般皆然。

58 **新數之意義.** 此新記號之一即 0，可謂有基數意義。例如自 3 逆數，相當於由任何羣之三物每次消去一個元素。

此演算可繼續至一切元素完全消去,而稱0爲此結果無元素之"羣"之基數符號,故常視0爲自然數之一.

但 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 不論如何無基數意義.

在他方面而言,所有此項新記號與自然數有相同次序性質.其每一記號亦在含有自然數之次序系中佔一定位置.且可將其視爲由此種位置所決定,正如將自然數視爲由其記法中之位置所決定者然.此可認作此諸記號 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 名爲數之充足理由.

59 **正與負.** 新數 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 爲一類以與舊數一類區別起見,稱之爲負,而稱舊者爲正.

此二種數及0名爲整數,以與嗣後所論之他數區別.

60 **代數等式及不等式.** 令 a, b, c, 表完全記法之任何三數.視 a 在 b 以前與 b 一致,或在 b 以後,而書作 $a<b$, $a=b$, 或 $a>b$.

61 因由定義完全記法爲一次序系(§17),故§24之法則亦可應用於此;例如,

設 $a<b$ 而 $b<c$, 則 $a<c$.

62 當 $a<b$ 時,卽在完全記法中 a 在 b 以前時,常稱爲代數的小於 b, 或 b 爲代數的大於 a.

注意如此所用"小於"及"大於"二語完全記法中之"在前"及"在後"而言——祇此別無他意.例如"-20 小於 -18"只謂"-20 在 -18"以前.

63 **絕對值或數字值.** 吾人名3爲 -3 之數字值或其絕對值,而用符號 $|-3|$ 表之,書作 $|-3|=3$. 任何負數均同此.

正數或0之數字值,爲其數之本身.例如 $|3|=3$.

數的相等及不等. 又完全記法之任何二數如 a 及 b，其 a 稱為數字的小於，等於，或大於 b，依 $|a|<,=,$ 或 $>|b|$ 定之。 64

例如，-3 為代數的小於 2 時，則為數字的大於 2；又 -7 為代數的小於 -3 時，則為數字的大於 -3。

負數之演算

新演算. 吾人又創新演算，由此可將負數與 0 互相結合及與諸自然數結合，一如自然數本身之由加，乘及減法以結合者然。 65

吾人以同一之名義稱此項演算，而以與所對應自然數演算之同法表之。

如 §60，用 a 表完全記法之任何數，但 a 及 b 只表自然數，則可作此新演算之定義如下：

加法及減法之定義. 此為： 66

1. $a+b$ 意即 a 以後之第 b 數。
2. $a-b$ 意即 a 以前之第 b 數。
3. $a+0$ 及 $a-0$ 意即與 a 相同之數。
4. $a+(-b)$ 意即與 $a-b$ 相同之數。
5. $a-(-b)$ 意即與 $a+b$ 相同之數。

易言之，加正數 b 於任何數 a，意即如前在記法上向前數 b 個位置；自 a 減之，則向後數 b 個位置：然加及減一負數，則順次等於減及加其對應之正數。

例如 由 1, $-3+2=-1$, 因 -1 爲 -3 以後之第二數.

由 2, $2-5=-3$, 因 -3 爲 2 以前之第五數。

由 4, $-5+(-2)=-5-2=-7$ (由 2).

由 5, $-6-(-2)=-6+2=-4$ (由 1).

67 **乘法之定義.** 此爲:

1. $0\cdot a$ 及 $a\cdot 0$ 意卽 0,

2. $a(-b)$ 及 $(-a)b$ 意卽 $-ab$.

3. $(-a)(-b)$ 意卽 ab.

易言之,無一爲 0 之二因數之積,其爲正或負,依其因數之有同號或異號而定;而在各情形中,其積之數值,爲其二因數數值之積.

例如, 由 2, $3\times-2=-6$, 及 $-3\times2=-6$.

由 3, $-3\times-2=6$.

68 **諸定義之本原及意義.** 觀察 §§66 及 67 所述,旣非假設,又非須證明之定理,僅稱之爲——新演算之定義.

例如,欲證明 $2(-3)=-2\cdot3$, 除由自然數之乘法定義外 (§ 40) 別無其他根據以開始者必不合理.因 -3 非自然數,其理甚明.故"將 2 取 -3 次"爲無意義.

然則何須發明此種演算耶? 蓋欲使負數在諸數本身間及諸物間關係之研究能盡量效用也.

此新演算並非隨意發明;反言之,此實爲舊演算對於新數之自然推廣.

處理自然數時,先規定加法爲——順數——方法,而證

此方法之結果，有兩種性質，與所加數之値無關，即：

1. $a+b=b+a.$　　　　2. $a+(b+c)=(a+b)+c.$

同理，證明其積有三種一般性質：

3. $ab=ba.$　4. $a(bc)=(ab)c.$　5. $a(b+c)=ab+ac.$

用文字表數時，此性質 1 至 5 即成爲加法及乘法演算定義之一切目的；而當然不能實際爲順數之演算，餘類推。

設新數之對應演算，爲有效用，則"定義" 1－5 亦必須用之甚明．而 §§ 66, 67 僅敍述下面問題之解答：

欲使加法，乘法及減法之意義推廣，在完全記法上任意數之和及積可有性質 1－5，而其減法仍可繼續爲加法之逆．

例如，(1) 當規定加一正數 b 於 a 爲順數，而自 a 減 b 爲逆數時，此僅爲加法及減法舊定義之重述而已。

(2) 由此加法定義而得 $-b+b=0.$

但設交換律 $a+b=b+a$, 仍適用，則必得 $-b+b=b+(-b)$, 故 $b+(-b)=0$; 或因 $b-b=0$, 故必有 $b+(-b)=b-b.$

此即暗示定義 $a+(-b)=a-b.$

(3) 設新加法及減法亦如舊者爲相反之演算，則必有 $a-(-b)=a+b.$ 如 § 66, 5.

(4) 次之，欲保持加法及乘法之舊關係 (§ 41)，則如 § 67, 2, 必有

$$(-a)b=-a+(-a)+\cdots\cdots\text{至 } b \text{ 項}$$
$$=-a-a-\cdots\cdots\text{至 } b \text{ 項}=-ab.$$

(5) 設交換律 $ab=ba$ 仍適用，則亦必有 $a(-b)=(-b)a=-ba=-ab$, 如 § 67, 2.

(6) 同理，$0+0+\cdots\cdots$至 a 項 $=0$，而此事實與定律 $ab=ba$ 二者，以導出 §67, 1 之定義，卽 $0\cdot a=0$ 及 $a\cdot 0=0$.

(7) 最後，由 (6) 得 $(-a)(-b+b)=-a\cdot 0=0$.

然設分配定律仍適用，則亦必有

$$(-a)(-b+b)=(-a)(-b)+(-a)b=(-a)(-b)-ab,\ \text{由 (4).}$$

故得 $(-a)(-b)-ab=0$. 且因 $ab-ab=0$，以定 $(-a)(-b)$ 爲 ab，如 §67, 3.

69 **以上所定諸演算，適合於交換，結合，及分配定律．今再證明此新演算完全與前述諸定律相應：**

首先有

$$a+(b+c)=a+b+c, \tag{1}$$

$$a-(b+c)=a-b-c, \tag{2}$$

$$a+b-b=a-b+b=a, \tag{3}$$

是用 § 37, 52 之理，由加法及減法之定義爲順數及逆數而得．

I. 交換定律， $a+b=b+a$.

第一．　$-a+b=b+(-a)$.

因設 $a<b$，令　$a=d+b$.　§§ 31, 34.

則　$-a+b=-(d+b)+b$

$=-d-b+b=-d$;　由 (2) 及 (3)

及　$b+(-a)=b-(b+d)$,　§ 66, 4,

$=b-b-d=-d$.　由 (2)

當 $b>a$ 時，證法相同．

第二．　$-a+(-b)=-b+(-a)$.

因　$-a+(-b)=-(a+b)=-(b+a)=-b+(-a)$,　由 (2) 及 § 66, 4.

II. 結合定律， $a+(b+c)=(a+b)+c$.

第一．　$a+[b+(-c)]=a+b+(-c)$.

設 $b>c$，令　$b=d+c$.　§§ 31, 34.

則 $$a+[b+(-c)]=a+[d+c+(-c)]=a+d.$$

及 $$a+b+(-c)=a+d+c+(-c)=a+d. \quad \text{由 (3) 及 § 66, 4.}$$

當 $c>b$ 時，證法相同。

第二。 $$a+[(-b)+c]=a+(-b)+c.$$

此由 I 方才所述情形而得。

第三。 $$a+[-b+(-c)]=a+(-b)+(-c).$$

此由 (2) 及 § 66, 4 而得，因 $-b+(-c)=-(b+c)$.

III. 交換定律，$ab=ba$.

第一。 $$(-a)b=b(-a).$$

因 $$(-a)b=-ab=-ba=b(-a). \quad \text{§ 45; § 67, 2}$$

第二。 $$(-a)(-b)=(-b)(-a).$$

因 $$(-a)(-b)=ab=ba=(-b)(-a), \quad \text{§ 45, § 67, 3}$$

IV. 結合定律，$a(bc)=(ab)c$.

第一。 $$(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-b)](-c).$$

因 $$(-a)[(-b)(-c)]=(-a)\cdot bc=-abc. \quad \text{§ 46; § 67, 2, 3}$$

及 $$[(-a)(-b)](-c)=ab\cdot(-c)=-abc. \quad \text{§ 67, 2, 3}$$

第二。 其他情形，可依同法證明。

V. 分配定律，$a(b+c)=ab+ac$.

第一。 $$a[b+(-c)]=ab+a(-c).$$

因 $[b+(-c)]a=[b+(-c)]+[b+(-c)]+\cdots\cdots$至 a 項

$=b+b+\cdots\cdots$至 a 項$+(-c)+(-c)+\cdots\cdots$至 a 項

$=ba+(-c)a.$ § 41; § 67; 2; II 及 III

故 $$a[b+(-c)]=ab+a(-c). \quad \text{由 III}$$

第二。 其他情形，易於由此推出。

例如 $$(-a)[b+(-c)]=-a[b+(-c)]$$
$$=-[ab+a(-c)]=(-a)b+(-a)(-c).$$

70 **一般結果.** 如前 §68 所示，於文字算術或代數中，定律 $a+b=b+a$ 等等，卽當文字 a, b, c 表自然數時，等於加法及乘法之定義．今已證明此諸定義可應用於完全記法之一切數．

應用此諸定律，可變換文字式之形狀而不影響其值，不論式中所含文字表完全記法之任何數．

例如，無論 a, b, c, d 表正或負整數，得

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$$
$$=ac+bc+ad+bd.$$

71 **和之相等及不等法則.** 用 §39 同一理由，可證明

依　$a<, =$ 或 $>b$,

得　$a+c<, =$ 或 $>b+c$;

及其逆．

故此於正數及負數皆眞，卽如下

72 加同數於兩邊，或自兩邊各減同數時，則方程仍爲方程，而不等式之向仍不變．

73 **積之相等及不等法則.** 觀察變更任何二數 a 及 b 之記號，卽顚倒其在完全記法中之順序 (§57).

例如　$-3<-2$, 但 $3>2$; $-5<2$, 但 $5>-2$.

由此事實及 §50 之理由，則

依　$a<, =$, 或 $>b$.

得　$ac<, =$, 或 $>bc$.

但　$a(-c)>, =$, 或 $<b(-c)$;

及其逆．故

以同一正數或負數乘方程之二邊，仍爲一方程。 74

以同一正數乘不等式之二邊，其向不變。

但以同一負數乘不等式之二邊，則變其向，從<變爲>，或其逆。

由上述第一法則及用 0 乘之定義，卽 $a\cdot 0=0$，導出下列重要定理。

1. 設 $a=b$，則 $ac=bc$. 75

2. 設 $ac=bc$，則 $a=b$，除 $c=0$ 外。

於 2 之例外情形，須加以注意.

例如，由眞方程 $2\cdot 0=3\cdot 0$，當然非 $2=3$.

零之積. 設一積爲 0，則其因數之一必爲 0. 76

例如，設 $ab=0$，則二者之一 $a=0$，或 $b=0$.

因 $0\cdot b$ 亦等於 0，

得 $$ab=0\cdot b,$$

故 $$a=0,\ 除\ b=0\ 外。\qquad \S 75$$

積之數字值. 二或多因數之積之數字值，爲其各因數之數字值之積。 77

例如，$|(-2)(-3)(-4)|=|-24|=24$；及 $|-2|\cdot|-3|\cdot|-4|=24$.

和之數字值. 二數之和之數字值，當二數爲同號時，則爲其數字值之和；但二數爲異號時，則爲其數字值之差。 78

例如，$|-3+(-5)|=|-8|=8$；及 $|-3|+|-5|=3+5=8$.

但 $|2+(-5)|=|-3|=3$；及 $|-5|-2=3$

整數應用於量

79 **量.** 應用數目，不僅記錄各物羣諸物數得之結果，但亦表示所測之量之結果；如時間，直線，表面之部分等等.

80 凡測一“量”，須選同類之特別量爲量之單位，與原“量”比較.

81 設此量適含單位之一定次數，則稱此次數爲其測度.

特例，稱線段之測度爲其線段之長.

例如，測一線段，可選單位線段稱爲尺者，沿尺量之，以求其若干次.

設求得適含此尺三次，則稱之爲三尺長，或其長——卽其測度——爲 3.

82 自然數之應用於量，卽以其在自然記法中之位置關係，表示此測度之量之大小關係.

83 **負數應用於量.** 吾人常有特別事故，須從某一定“關點”依反對“方向”以測量者.

例如，測時間在耶蘇降生之前，及後之年份；測經度在格林維基或華盛頓之西及東之度數；測溫度在零下及零上之度數.

於是可用簡單圖以區別由一方向與他方向所成之量，其一以正數表之，他一以負數表之.

84 例如觀察下圖：

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots\cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots \\
\hline
\cdots\cdots & P_{-4} & P_{-3} & P_{-2} & P_{-1} & O & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots\cdots
\end{array}
$$

此處之一定相關點，或原點爲 O，其單位爲 OP_1，而諸點 $P_2, P_3, \cdots\cdots, P_{-1}, P_{-2}, \cdots\cdots$ 皆依 $OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots\cdots P_{-1}O = P_{-2}P_{-1} = \cdots\cdots$ 而得.

在諸點之上,依合宜次序,書完全記法之數,使 0 正在 O 上.

自 O 至各點 P 之距離,——卽線段 OP 之長——以書於其上之數值表之;而自 O 至 P 之方向,以其數之符號表之.

例如，-3 在 P_{-3} 上,表 P_{-3} 在 O 之左邊距離 3 單位.

又線上諸點之次序,以記法中對應數之次序表之.

用點描寫數目. 因諸點系$\cdots\cdots, P_{-2}, P_{-1}, O, P_1, P_2, \cdots\cdots$ 85
及諸數系$\cdots\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots$之間,成一對一之關係,故可用每一系以表其他系.因此常可用點描寫數目.

III. 除法與分數

除法爲累減法

除法之二種. 所謂除法,有兩種演算應用於算術及代數 86
中,其一可稱爲累減法,其他稱爲乘法之逆;有時二者相一致,此時稱爲整除.

除法爲累減法. 欲以 3 除 7,在第一種意義爲答次列 87
二問題:

1. 自 7 減 3 之幾倍始得一餘數小於 3?
2. 其餘數如何?

吾人可累減 3 以求得二問題之答。例如，因 $7-3=4$ 及 $4-3=1$，故必須兩次減 3，或減 3×2，可得同一結果，其餘數爲 1.

故此類除法，等於累減法。其關係於減法，一如乘法之於加法。

觀察四數 7, 3, 2, 1，可用方程結合如下：

$$7=3\cdot 2+1.$$

推廣之，設 a b 爲任何二自然數，則以 b 除 a，在觀察上之意義，爲求二自然數 q 及 r，其一可爲 0，使合於

88 $$a=bq+r \text{ 而 } r<b.$$

89 吾人稱 a 爲被除數，b 爲除數，q 爲商，而 r 爲餘數。

90 **註** 當 a 及 b 已知時，常可求得滿足 § 88 之二數 q 及 r.

例如，設 $a<b$，則得 $q=0$ 及 $r=a$.

設 $a\geqq b$，則由 §§ 31, 35 可續得 $b+b+\cdots\cdots$ 之和至等於 a，或設再加一 b 則將大於 a 而止。且設 q 表此和之項數，則由 § 41，得 $a=bq$，或 $a=bq+r$，其 $r<b$

再者，當 a 及 b 已知時，則僅有適合於 § 88 之一對數 q 及 r 存在。

因設有如此之第二對數，如 q', r'，則當有

$$bq+r=bq'+r', \text{ 故 } b(q-q')=r'-r.$$

但此爲不可能，因 $r'-r$ 之數值將小於 b，而 $b(q-q')$ 之數值不小於 b 故也。

91 **整除。** 設被除數 a 爲除數 b 之倍數，當 $a=12$ 而 $b=3$ 時，餘數 r 爲 0，則稱 a 可以 b 整除。此時 § 88 之方程化爲 $a=bq$，或

92 $$qb=a.$$

故當 a 可以 b 整除時，亦可稱商 q 爲以 b 乘之而得 a 之數.

此時可表此除法如 $a \div b$，而於 a 與 b 中用符號 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 94
之一表其商 q，常書爲 $q=\frac{a}{b}$，或 $qb=a$.

整除定理及公式

定理 1. 整除及乘法爲相反之演算；即 95

$$a \div b \times b = a, \text{ 及 } a \times b \div b = a.$$

此方程順次由 § 93 及 § 87 之定義而得.

定理 2. 當除法爲整除時，則以同數乘被除數及除數，其 96
商不變.

因設 $a=qb$，則 $am=q \cdot bm$. §§ 50, 46

即設 $q=\frac{a}{b}$，則 $q=\frac{am}{bm}$. § 94

定理 3. 整除一如乘法，遇加法及減法而分配；即 97

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \text{ 及 } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a \quad b}{c}.$$

因設 $a=qc$，及 $b=q'c$，

得 $a+b=qc+q'c=(q+q')c$. §§ 39, 47

故 $\frac{a+b}{c}=q+q'=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$. § 94

減法亦仿此.

例如 $\frac{18}{3}+\frac{9}{3}=6+3=9$； 及 $\frac{18+9}{3}=\frac{27}{3}=9$.

加減商之公式. 此種爲 98

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

因　$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$　§§ 96, 97

減式亦仿此。

例如　$$\frac{18}{3}+\frac{10}{5}=6+2=8,\ 及\ \frac{18\cdot5+10\cdot3}{3\cdot5}=\frac{120}{15}=8.$$

99　**商相乘之公式.**　即:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

因設 $a=qb$, 及 $c=q'd$. 得 $ac=qq'\cdot bd$.　§§ 50, 45, 46

故　$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=q\cdot q'=\frac{ac}{bd}.$$　§ 94

例如　$$\frac{15}{3}\cdot\frac{6}{2}=5\cdot3=15;\ 及\ \frac{15\cdot6}{3\cdot2}=\frac{90}{6}=15.$$

100　**整除時一商除他商之公式.**　如

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

因設 $a=qb$, $c=q'd$, 且 $q=q''q'$,

則有　$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=q\div q'=q''.$$　§ 94

及　$$\frac{ad}{bc}=\frac{qbd}{bq'd}=\frac{q}{q'}=q''.$$　§§ 96, 94

例如　$$\frac{24}{6}\div\frac{10}{5}=4\div2=2;\ 及\ \frac{24\cdot5}{6\cdot10}=\frac{120}{60}=2.$$

101　**負數之整除.**　無論何時，被除數之數值如可爲除數整除，則 § 93, 所述商之定義，於負數亦有意義甚明.表此諸商如 § 94, 則得下列定理:

102　**定理 4.**　設 a 可以 b 整除，則

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

因設 $a=qb$, 則有 $\qquad -a=(-q)b.$ §§ 73, 67.

故 $\qquad \dfrac{-a}{b}=-q=-\dfrac{a}{b}.$ § 94

其他情形仿此.

零與整除之關係. 1. 就別方面而論, § 93 所示商之定義, 當除數爲 0 時, 則無意義. 103

因無論 q 表何數, $q\times 0=0$, 故 (1) 各數爲以 0 乘而得 0 之數; 及 (2) 以 0 乘而得 a 者, 實無此數.

換言之, 依 § 93 及 § 94 之定義, 符號 $0/0$ 表任意各數, 而 $a/0$ 則非任何數.

2. 但設被除數爲 0, 而除數 b 非 0, 則 § 93 之定義有意義. 在此事實, 以 $0/b$ 所表之商爲 0.

因依 § 94, $0/b$ 係表以 b 乘而得 0 之數; 而 0 卽爲此數 (祇此一個), 因 $0\cdot b=0$ 故也.

分數. 除法與乘法相反

於 § 86 所述除法之第二種爲 § 93 所述整除之概括. 由此可導入分數於數系. 一如 § 56 之定負數, 求此新數之次序定義, 下列定理暗示其定義之一, 其 a, b, c, d 表自然數.

定理 5. 當 a 可以 b, 及 c 可以 d 整除時, 則商 a/b 及 c/d 在自然記法中之關係次序與積 ad 及 bc 之次序相同; 卽 104

$a/b<, =,$ 或 $>c/d$, 依 $ad<, =$ 或 $>bc$ 定之.

1. 因設 $\qquad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 則 $\dfrac{a}{b}bd=\dfrac{c}{d}db.$ § 50

但 $\qquad \dfrac{a}{b}\cdot b=a$ 及 $\dfrac{c}{d}d=c.$ §§ 93, 94,

故 $\qquad ad=bc.$

同法可證：

設 $a/b<c/d$，則 $ad<bc$；又設 $a/b>c/d$，則 $ad>bc$。

2. 由上諸式，而得下列逆定理：

$$設\ ad=bc,\ 則\ a/b=c/d.$$

否則將有 (1) $a/b<c/d$，因此 $ad<bc$，或 (2) $a/b<c/d$ 因此 $ad>bc$。

同法可證：

設 $ad<bc$，則 $a/b<c/d$；設 $ad>bc$，則 $a/b>c/d$。

105　**擴充次序數系．** 無論 a, b, c, d 所表諸值能否以 b 整除 a 及以 d 整除 c，但 ad 及 bc 在記法中之關係次序可知。

故取任何二自然數 a 及 b，其 b 不爲零，可以之成 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 之式。

設 a 爲 b 整除，則如前令 a/b 表自然數以 b 除 a 之商。設不能整除，可視 a/b 僅爲一新符號，讀作"b 分之 a"，其關係於除法者尚須另定 (§ 122)。

於是由假定此諸符號如 a/b, c/d 等等，依下述法則而排列：a/b 在 c/d 以前，一致或以後，依 ad 在 bc 以前，一致或以後而定。而予此種符號以次序之性質，一如表自然數符號所具有者。

或如前用符號 $<, =, >$，以表"在前""一致""在後"之意，—

106　依 $ad<, =,$ 或 $>bc$ 令 $a/b<, =,$ 或 $>c/d$.

例如，4/5 在 7/8 以前，卽 $4/5<7/8$，因 $4\cdot 8<7\cdot 5$. 其次，2/3在0 與 1 之間，或 $0<2/3<1$. 蓋 $0/1<2/3$，因 $0\cdot 3<1\cdot 1$；及 $2/3<1/1$，因 $2\cdot 1<3\cdot 1$ 故也.

107　對此諸符號 a/b，此法則指定其在記法中本身之適當位置，如表自然數，其次，則更指定記法中連續諸數間之位置。

註　欲求任何特別符號 a/b 在記法中之數如前述所定之位置,只須將 a 化爲式 $a=bq+r$, 其 $r<b$ (§ 88). 設 $r=0$, 因而 $a=bq$, 則此法則使 a/b 與 q 一致,但設 r 不爲 0, 則依此法則, a/b 在 q 與 $q+1$ 之間. 108

符號 a/b 之全團於是如此規定而排列——似成一部分之自然記法——而爲一次序系。 109

因其有 §§ 17, 18 中列舉之次序系一切性質.

例如　設　$a/b<c/d$, 及 $c/d<e/f$, 則 $a/b<e/f$.

因設　$a/b<c/d$, 及 $c/d<e/f$.

則有　$ad<bc$, 及 $cf<ed$.　§ 106

以第二式之二邊乘第一式之對應邊,則有

$adcf<bced$.　§ 50

因此　$af<be$.　§ 50

故　$a/b<e/f$.　§ 106

分式.　**當 a/b 不表自然數,則稱爲分數; a 稱爲分子, b 稱爲分母,而 a 與 b 二者皆稱爲項,故** 110

分數爲形式 a/b 之符號,以其包含自然數之次序系中之位置而定.

自次序之觀點,故可稱分數爲數.

---

* § 106 之法則,亦可用以定形式 1/0, 2/0 等之次序的符號.

例如,由法則, 1, 0 必在分母 b 不爲 0 之 a/b 各數之後, 蓋 $1/0>a/b$, 因 $1\cdot b>a\cdot 0$ 故也.

次之, 1/0, 2/0 等等,必佔次序系中之同一位置,蓋 $1/0=2/0$, 因 $1\cdot 0=2\cdot 0$ 故也.

但此法則,不能給符號 0/0 以一定位置,蓋無論 a 及 b 之值如何,皆有 $0/0=a/b$, 因 $0\cdot b=a\cdot 0$ 故也.

111 **負分數.** 吾人亦可作一分數令其分子,分母或二者,爲負整數,如 $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$, $\frac{-a}{-b}$, 定其次序如下:

1. $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

2. 各負分數皆在 0 之前.

3. 負分數相互之關係(及負整數),依下法排列.

$-\frac{a}{b}<,=,$或$>-\frac{c}{d}$, 依 $-ad<,=,$或$>-bc$ 而定.

112 **有理數系.** 欲將整數分數與以後他種數區別,而稱整數分數爲有理數.由一切此種數所成之系,稱爲有理數系.

此系具有一重要性質,不屬於其一部分之爲整數系者.即

113 有理數系爲稠密的;即在每二不等有理數間另有有理數.

因令 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲任何二分數,使 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. 吾人可證分數 $\frac{bc+ad}{2bd}$ 在 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 之間如下:

因 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, 則有 $ad<bc$. § 106

1. 設加 ad 於 $ad<bc$ 之二邊,由 §§ 39, 50, 106,

$$2ad<bc+ad,\ \therefore\ a(2bd)<b(bc+ad).\ \therefore\ \frac{a}{b}<\frac{bc+ad}{2bd}.$$

2. 設加 bc 於 $ad<bc$ 之二邊,同法得

$$bc+ad<2bc,\quad \therefore\quad (bc+ad)d<c(2bd),\quad \therefore\quad \frac{bc+ad}{2bd}<\frac{c}{d}.$$

例如,在 $\frac{3}{4}$ 及 $\frac{5}{6}$ 之間,有 $\frac{4\cdot5+3\cdot6}{2\cdot4\cdot6}=\frac{38}{48}=\frac{19}{24}$.

故當說及有理數時，必須避免"相鄰數大於或小於已知數之語句"因並無此數存在也．每一整數可有一相鄰整數，但於任何有理數與規定之相鄰有理數間，常有其他有理數． 114

分數演算． 以下令 a, b, c, d 表任何已知正或負整數． 115

於 §§ 98—102 已證明，當 a/b 及 c/d 表整數時，有

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.　　2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.　　4. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, 當 $\frac{ad}{bc}$ 爲整數時．

但當 a/b 及 c/d 不爲整數時，各方程 1, 2, 3, 4 之右邊仍有意義．上列各式皆爲 §§ 110, 111 所定一類之一定分數．

故 1, 2, 3, 4 常示加減乘除意義之推廣，而使此諸算法應用於分數，即

二分數 a/b 及 c/d 之和，即分數 $(ad+bc)/bd$ 之意． 116

由分數 a/b 減 c/d 所得之差，即分數 $(ad-bc)/bd$ 之意． 117

二分數 a/b 與 c/d 之積，即分數 ac/bd 之意． 118

以分數 c/d 除分數 a/b 所得之商，即分數 ad/bc 之意． 119

觀察諸定義，與初等算術所已知計算分數之法則相同．

交換，結合，及分配定律統馭此種概括演算． 120

例如　$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$.　　§§ 118, 69

121 **相等及不等之法則，§§ 71, 73, 亦可用於此種演算。**

例如，設 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$，則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

因設 $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$，則 $aedf=cebf$. §§ 118, 106, 111.

故 $ad=cb$，因而 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. §§ 73, 106, 111.

122 **分數之定義為商.** 分數 a/b 今可視為乘以 b 而得 a 之一數，卽下列方程所定之一數.

123
$$\frac{a}{b}\cdot b=a.$$

因 $\frac{a}{b}\cdot b=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1\cdot b}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{b}=a.$ §§ 106, 111, 118

124 **除法為乘法之逆.** 由 §§ 118, 119, 因得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b} \text{ 及 } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b};$$

易言之，§§ 118, 119 中規定之乘法及除法為相反演算。比較 § 55.

因由 §§ 118, 119, 及 §§ 106, 111, 得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{dc}{cd}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\div\frac{c}{d}=\frac{acd}{bdc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{cd}{dc}=\frac{a}{b}.$$

故可稱上述此種除法為乘法之逆，而曰

125 以 c/d 除 a/b，卽求以 c/d 乘之而得積 a/b 之一數.

導入分數於數系，使常可求得如此之數，而除數 c/d 為 0 時除外.

此爲算術與代數中除法之普通意義，即爲整除之推廣，§ 93.

化分數爲最低項． 不可約分數． 設分數之分子及分母 126
有一公因數，則可同時約去之，不變其分數之値．

如 $$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$ 因 $am\cdot b=a\cdot bm,$ § 106.

當其所有公因數皆已約去，則此分數稱爲最低項或不可約．

定理． 設 a/b 爲不可約分數，而 a'/b' 爲與其相等之任 127
何他分數，則 a' 及 b' 順次爲 a 及 b 之同倍數．

因 $a'/b'=a/b$, 故 $a'b=ab'$, a 爲 $a'b$ 之一因數．

但由假設，a 與 b 無公因數，故 a 必爲 a' 之因數． § 492, 1.

因此有 $a'=ma$, 其 m 爲整數．

但以 ma 代入於 $a'b=ab'$ 之 a', 得 $mab=ab'$ 故 $b'=mb$, § 50.

系． 設二不可約分數相等，則其分子必相等，而分母亦 128
相等．

分數應用於量

分數長度． § 81 所述長度之定義，僅能應用於含單位線 129
段 s 一定整倍數之線段 S.

但設 S 不含 s 整倍數，則依然與 s 可通約，而可適含 s 之半，三分之一，或其他有盡部分．在此種情形，可規定其長如次：

設已知線段適含單位線段 b 分之一之 a 倍，則稱其長爲 130
分數 a/b.

例如，設 S 適合 s 之 10 分之一之 7 倍，則 S 之長(以 s 表之)爲 $7/10$.

131 **註** 設 a/b 爲依定義以 s 所表 S 之長，則亦爲式 ma/mb 之各分數。

因設 S 適合 s 之 b 分之一之 a 倍，則亦必適合 S 之 mb 分之一之 ma 倍.

132 分數應用於量，其理由與整數應用於量相同．即以有理數系中之關係位置，表其線段長之關係大小．

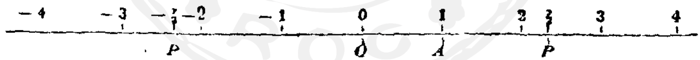
因設 a/b 及 c/d 爲以 s 所表 S 及 T 之長，則亦爲 ad/bd，及 bc/bd (§ 131)；即 s 之 bd 分之一，在 S 中適合 ad 倍，在 T 中適合 bc 倍.

故 $S<, =,$ 或 $>T$，依 $ad<, =,$ 或 $>bc$ 而定。

即 $S<, =,$ 或 $>T$，依 $a/b<, =,$ 或 $>c/d$ 而定. § 106

133 **註** 此處所言長之定義，與初等算術中之分數定義相同．而其較大或較小分數，則依對應於較大或較小線段或其他數量定之，自不待言．

134 **以點描寫有理數．** 分數亦如整數，可在無限長之直線上用點描寫 (§ 85).



例如，欲作一點 P 表 $7/3$，與 A 表 1 同法，只須由原點 O 起向右截取單位 OA 三分之一之七倍．

O 左邊之對應點 P' 爲 $-7/3$ 之圖形。

於任何已知正或負分數之情形，皆可施以同法。

135 凡如此之點皆依對應於圖形所表有理數之順序沿線排列．有此印象故常稱有理數在另一有理數之左或右，或在其他二有理數之間。

IV. 無 理 數

緒 論

定義. 以 a^2 表積 aa, 讀作"a 平方",以 a^3 表積 aaa, 136
讀作"a 立方";以 a^n 表 $aaa\cdots\cdots$ 至 n 個因數之積,讀作"a 之 n 次冪".

在符號 a^2, a^3, a^n 中,諸數 2, 3, n 名爲指數, a 本身稱爲底.

由 a 求 a^2 名爲將 a 平方;求 a^3 名爲將 a 立方;求 a^n 名爲 a 自乘至 n 次冪.

一已知數自乘至已知乘冪之演算,亦稱乘方.

方根與對數. 設假定 a 爲有理數,而 n 爲正整數,則 a^n 173
亦爲有理數,稱之爲 b; 則 $a^n=b$.

此方程暗示二新問題:

其一,定 n 及 b 之值而求 a.

其二,定 a 及 b 之值而求 n.

例如, (1) 令 $n=2$ 及 $b=9$. 則此方程化爲

$$a^2=9.$$

而求得 $a=3$ 或 -3; 因 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$.

其次, (2) 令 $a=2$ 及 $b=8$. 則此方程化爲

$$2^n=8.$$

而求得 $n=3$; 因 $2^3=8$.

當 $a^n=b$ 時, 138

1. a 名爲 b 之 n 次根,而於 n 及 b 之關係以符號 $\sqrt[n]{b}$ 表之,其簡單符號 $\sqrt{b}$ 讀作"b 之平方根",則用於 $n=2$ 時.

2. n 名爲 a 底 b 之對數,而於 a 及 b 之關係以符號 $\log_a b$ 表之.

例如，因 $3^2=9$ 及 $(-3)^2=9$，故 3 及 -3 二者皆為 9 之平方根，而二者皆可寫作 $\sqrt{9}$；仍須參看 §139.

其次，2 為以 3 為底 9 之對數；即 $2=\log_3 9$.

139 **註** 9 之二平方根皆以符號 $\sqrt{9}$ 代表，吾人竟可代之以 $\sqrt{9}$ 表其一正根 3，而以 $-\sqrt{9}$ 表其一負根 -3. 此為初等代數中表平方根之常法，本書仍之.

140 **開方與求對數.** 當 n 及 b 已知時，求 $\sqrt[n]{b}$ 之演算，名為求 b 之 n 次根或開方.

當 a 及 b 已知時，求 $\log_a b$ 之演算，名為求以 a 為底之 b 之對數.

此種演算皆與乘方相反 (§§ 55, 124).

141 **註** 加法與乘法各僅有一種相反演算，而乘方則有二種，其理由可比較下列三方程而知之：

1. $a+b=c$, 2. $ab=c$, 3. $b^b=c$.

因 $a+b=b+a$，及 $ab=ba$，故此問題：在 1 或 2 中，已知 c 及 b 而求 a，與問題：已知 c 及 a 而求 b 為同類.

但因 a^b 不等於 b^a，故此問題：在 3 中已知 c 及 b 而求 a，與問題：已知 c 及 a 而求 b 非同類.

142 **新數之需要.** 今後將詳細研究新演算法，蓋在代數學中，其重要僅亞於基本四則耳. 但其主要點，則為：數系有再進一步擴充之必要.

實際可知 $\sqrt[n]{a}$ 僅於例外情形，能表有理數.

舉一簡單之例，如 $\sqrt{-1}$ 及 $\sqrt{2}$ 皆不能表有理數，蓋

1. 因每一有理數之平方為正，有理數無平方為 -1 者存在，故 $\sqrt{-1}$ 不能表一有理數.

2. 有理數無平方為 2 者存在. 因 2 非任何整數之平方甚明，且可如下證明 2 非任何分數之平方.

假使 p/q 為一最低項分數，而

$$(p/q)^2=2,\ \text{或}\ p^2/q^2=2/1.$$

但因 p^2/q^2 為其最低項（§ 492, 2），依 § 123，得 $p^2=2$，此為不可能，因 p 為整數故也。

故 $\sqrt{2}$ 不能表一有理數。

設 a/b 為任何最低項分數，同法可證 $\sqrt[n]{a/b}$ 除非 a 與 b 為整數之 n 次冪，不能表一有理數。

吾人欲彌補數系之缺點，創立二種新數：即無理數，如 $\sqrt{2}$ 及虛數如 $\sqrt{-1}$。

今於本章討論無理數，而於下章討論虛數。

無理數之次序定義

本章中，文字 a, b, c 等，皆表任何有理數，為正或負為整數或分數。

有理數系之一般性質． 有理數所成之系有下列性質： **143**

1. 為一次序系。

2. 為稠密的；即此系中每二不等數 a 及 b 之間，仍有此系之其他諸數。

3. 此系中每二數之和，差，積及商，仍為此系之數，以 0 除任何數之商除外。

由下列定義，吾人將創立一種擴大數系，具有與此相同三性質，且包括有理數系。

第一種之區分． 1. 數 $\frac{1}{3}$ 區分有理數系之殘數為二類： **144**

其一類由 $\frac{1}{3}$ 以前(小於)之一切有理數而成,其他一類由 $\frac{1}{3}$ 以後(大於)之一切有理數而成.命此二類數順次為 C_1 及 C_2.

$$\underline{\quad C_1 \qquad\qquad \tfrac{1}{3} \qquad\qquad C_2 \quad}$$

如圖,在點 $\frac{1}{3}$ 左邊之半線,含類 C_1 中一切數之圖點,而其右邊之半線,含類 C_2 中一切數之圖點 (§ 134).

由 §§ 109, 111 及 113, 即得

1. C_1 中各數在 C_2 中每一數之前.

2. C_1 中無最後數, C_2 中無最前數.

例如, C_1 中有最後數,則將有諸數在此數與 $\frac{1}{3}$ 之間 (§ 113), 此為不可能,因由假設,小於 $\frac{1}{3}$ 之一切有理數皆在 C_1 中故也.

145 2. 區分有理數系為三部分 $C_1, \frac{1}{3}, C_2$, 可代以連接 $\frac{1}{3}$ 於 C_1, 使 C_1 及 $\frac{1}{3}$ 組成類 C_1' 而稱:

數 $\frac{1}{3}$ 區分全部有理數系為二部分 C_1' 及 C_2; 如此則

1. C_1' 中各數在 C_2 中每一數之前.

2. C_1' 中有一最後數即 $\frac{1}{3}$, 但 C_2 中無最前數.

146 3. 或連接 $\frac{1}{3}$ 於 C_2, 稱其結果為類 C_2', 而稱:

數 $\frac{1}{3}$ 區分全部有理數系為二部分 C_1 及 C_2', 如此則

1. C_1 中各數均在 C_2' 中每一數之前.

2. C_1 中無最後數,但 C_2' 中有一最前數即 $\frac{1}{3}$.

顯然可見各個有理數,皆可作為有理數系之相似區分而解釋之.

147 反言之,設能以任何方法區分全部有理數系為二部 B_1 及

B_2, 其 B_1 中各數在 B_2 中每一數之[illegible]而 B_1 中有一最後數，或 B_2 中有一最前數，則此區分足[illegible]數或最後數與其他之數有所分別，且據此意而決定之。

例如，指定負有理數在 B_1，而其餘諸有理數在 B_2，則 B_1 中無最後數，而 0 為 B_2 中之最前數。當零解為 B_2 之最前數時，與其他一切數有所區別，亦如用符號 0.

註. 顯然可見 B_1 中之最後數及 B_2 中之最前數，不能同時具有，因此二數間必有有理數也 (§ 113). 然依假設，此每一有理數屬於 B_1，或屬於 B_2，二者必居其一。 143

第二種之區分. 然亦可用各種方法區分全部有理數系爲無最後數之部分 A_1，及無最前數之部分 A_2. 149

例如，因有理數無平方為 2 者存在，(§ 142)，各有理數必有一個，其平方小於 2 者，或其平方大於 2 者。

命 A_2 由平方大於 2 者之一切正有理數而成，A_1 由其他一切有理數而成，則

1. A_1 中各數在 A_2 中每一數之前。

蓋令 a_1 為 A_1 中任何數，而 a_2 為 A_2 中任何數。
設 a_1 為負或 0，則 $a_1 < a_2$ 甚明。又設 a_1 為正，則 $a_1^2 < a_2^2$，故 $a_1 < a_2$.

2. A_1 中無最後數，而 A_2 中無最前數。

蓋當 a_1 為任何正有理數，指定其平方小於 2 時，可再求得一較大之有理數其平方小於 2 者 (§ 183, 2 (3))；故無一數能指定為 A_1 中之最後數。同理，無一有理數能指定為 A_2 中之最前數.

新數 $a = \sqrt{2}$. 在二類數 A_1 及 A_2 間之關係，與 § 144 中所述對應於 $\frac{1}{3}$ 所區分二類 C_1 及 C_2 間之關係，適相同。 150

但可說對應於區分 A_1, A_2 無有理數存在，或不能依此以決定之.

蓋因各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2，故無有理數存在於 A_1 及 A_2 之間，如 $\frac{1}{3}$ 之在 C_1 及 C_2 之間者然.

且因 A_1 無最後數及 A_2 無最前數，故對應於此區分無有理數存在，如 $\frac{1}{3}$ 對應於 § 145 之區分 C_1', C_2，或 § 146 之區分 C_1, C_2' (比較 § 147).

故此區分 A_1, A_2 爲一新序數設立一位置，卽一數必須在 A_1 中一切數之後及在 A_2 中一切數之前.

發明如此之一數.今可以文字 a 表之：關於 a 之乘法意義已明之後，將得 $a^2=2$，而可用更有意義之符號 $\sqrt{2}$ 以代 a 矣(§ 182).

151　於是定此新數 a 爲在平方小於 2 及平方大於 2 之一切正有理數間之一數.

亦可用下列公式表此定義：

$$a_1 < \mathbf{a} < a_2.$$

式中 a_1 及 a_2 順次表 A_1 及 A_2 中之任何數，而 $<$ 意卽"在前".

152　**註.** 觀察此定義與 §§ 56, 110 所示負數及分數之定義爲同類.如此種之數中，a 爲包含自然數諸符號之次序系中以其位置所定之一符號，故稱之爲數，實亦同一合宜.

發明此數及相似諸數之理由，亦與發明負數及分數之理由相同.此種數在已有諸數間及社會上事物間關係之研究，足供應用.*

---

*進而由次序之觀點而言，發明比一較多之數對應於區分 A_1, A_2 中以公式 $a_1<\mathbf{a}<\mathbf{b}<a_2$ 依次序決定之二數 a 及 b，並無衝突.

但發明比一較多如此之數，則有他種衝突，參看 67 頁脚註 (3).

無理數之一般.實數系.　前面所述有理數系之特别區分，不過爲類似性質中之無窮可能區分之一。 153

於每一區分發明一新數，依照有理數系之數按次序而定其義，適如 § 151 定 $a=\sqrt{2}$ 者然.

欲使此種新數區别於有理數，稱之爲無理數.

其次，欲使此有理數及無理數區别於尚須研究之虛數，稱之爲實數.

最後，由一切有理數及無理數所成之系，名爲實數系.

故用 a 表任何無理數，得此種數之一般定義如下：

決定一無理數 a, 無論何時，有一定律可以敍述，即指定已知各有理數屬於二類 A_1 及 A_2 之一且僅屬於一，使 (1) A_1 中各數在 A_2 中每一數之前，及 (2) A_1 中無最後數而 A_2 中無最前數；於是 a 之定義爲 在 A_1 中一切數與 A_2 中一切數間之一數. 154

此處暗示在二類 A_1 及 A_2 中，皆有數存在；亦卽 A_1 及 A_2 共含全部有理數系.

一無理數 a 稱爲負或正，依其在 0 以前或以後定之. 155

實數系爲次序系.　卽構成此系之諸數，皆按一定且已知次序而排列 (§ 17)，蓋各無理數之定義，指明其與每一有理數之關係如何；而由任何二已知無理數之定義，卽能推知其彼此之關係如何. 156

例如，令 a 及 b 表任何二已知無理數；於是

1. 設每一有理數在 a 以前亦在 b 以前，及每一有理數在 a 以後亦在 b 以後，則二數 a, b 關於有理數系之諸數佔有同一位置．故依無理數之定義（§ 154）a 及 b 表同一數，可以下列公式表之：

$$a=b.$$

2. 設一類有理數，在 a 以後，其中有若干數在 b 以前，則 a 本身必在 b 以前（或 b 在 a 以後）．可以下列公式表之：

$$a<b \text{ 或 } b>a.$$

3. 設一類有理數在 a 前，其中有若干數在 b 以後，則 a 本身必在 b 以後（或 b 在 a 以前）．可以下列公式表之：

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

157 此甚顯明當任何二不同實數爲已知，卽可推知其孰先孰後；關於三已知實數 a, b, c, 亦可推出下列之結論：

$$\text{設 } a=b, \text{ 及 } b=c, \text{ 則 } a=c,$$

$$\text{設 } a<b, \text{ 及 } b<c, \text{ 則 } a<c,$$

$$\text{設 } a=b, \text{ 及 } b<c, \text{ 則 } a<c.$$

158 **實數系爲稠密的．** 蓋因不僅在任何二不等有理數間有有理數（§ 113），卽在任何二不等無理數間，及任何二數一爲有理數一爲無理數間亦有之故也（§ 156）．

159 **實數系爲連續的．** 故實數系實佔有 § 143 中列舉之有

理數系諸性質之第一及第二，但尙有不屬於有理數系之附加性質，即：

設全部實數系分爲二部分 R_1 及 R_2，使 R_1 中各數在 R_2 中每一數之前，則 R_1 中無最後數，或 R_2 中無最前數，但不能二者皆無。

蓋分實數系爲二部分 R_1 及 R_2，即分有理數系爲二部分 A_1 及 A_2，其一部分由 R_1 中一切有理數而成，他一部分由 R_2 中一切有理數而成。

各有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2，而 A_1 中各有理數在 A_2 中各有理數之前。

令 **a** 爲區分 A_1，A_2 所定之一數（§§ 147, 154）.

則 **a** 或爲有理數——即 A_1 中之最後數或 A_2 中之最前數（§ 147）。——或設 A_1 無最後數而 A_2 無最前數，**a** 爲在 A_1 及 A_2 間之無理數（§ 154）.

1. 設 **a** 爲 A_1 中之最後數，則亦爲 R_1 中之最後數；何則，若 R_1 中在 **a** 以後有任何數，則在此數及 **a** 之間將有有理數，即 A_1 中在 **a** 以後有有理數，此爲不可能。

2. 同理，設 **a** 爲 A_2 中之最前數，則亦爲 R_2 中之最前數。

3. 設 **a** 爲無理數，則由假設必屬於 R_1 或 R_2. 設 **a** 屬於 R_1，則爲 R_1 中之最後數；何則，若 R_1 中有任何數在 **a** 以後，則在此數及 **a** 之間將有有理數（§ 158），即 A_1 中在 **a** 以後有有理數，此爲不可能. 同理，設 **a** 屬於 R_2，則爲 R_2 中之最前數。

最後，R_1 中之最後數及 R_2 中之最前數，不能同時俱有。蓋如是則此二數之間，將有有理數（§ 158），即有有理數不屬於 A_1，亦不屬於 A_2，此爲不可能。

欲指示實數系爲稠密的，且同時具有上述性質，故稱實數系爲連續的。

定理. 無論何時，有一定律可述，依此則全部實數系，可 **160**
分爲二部分 R_1，R_2，使 R_1 中各數在 R_2 中每一數之前. 以決定一實數 **a** 爲有理數或無理數；此數 **a** 或爲 R_1 中之最後數，或爲 R_2 中之最前數.

此爲 §§ 147, 159 之直接結果。

無理數之近似値

161 已知任何無理數 $\mathbf{a}$, 如 § 154 所定，由以下說明之法則可求得一對有理數，其一小於 $\mathbf{a}$, 又一大於 $\mathbf{a}$; 使其彼此之差，小至如吾人所願．如此之有理數，名為 $\mathbf{a}$ 之近似値．

令 $\mathbf{a}$ 為無理數 $\sqrt{2}$, 即在"平方小於 2 及平方大於 2"之一切正有理數之間。

1. 逐次計算 1, 2, 3,……之平方，至大於 $\mathbf{a}$ 為止，可求得 $\mathbf{a}$ 在某一對連續整數之間．

即得 $1^2<2$ 及 $2^2>2$.

故 $\mathbf{a}$ 在 1 及 2 之間，或 $1<\mathbf{a}<2$.

2. 逐次計算 $1.1^2, 1.2^2$,……至大於 2 者為止，可求得 $\mathbf{a}$ 在某一對連續一位小數之間。

例如，得 $1.4^2<2$ 及 $1.5^2>2$; 因 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$.

故 $\mathbf{a}$ 在 1.4 及 1.5 之間，或 $1.4<\mathbf{a}<1.5$.

3. 依同法繼續進行，求得

$1.41<\mathbf{a}<1.42$, $1.414<\mathbf{a}<1.415$, 仿此至無窮。

4. 令 a_1 表如此求得連系 1.4, 1.41, 1.414,……中之第 n 數，及 a_2 表連系，1.5, 1.42, 1.415,……中之第 n 數。

則 $$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } a_2-a_1=1/10^n.$$

選 n 大至足用，可使 $1/10^n$ 小於任何指定極小之正數 δ.

5. 今稱 1.4, 1.41, 1.414 為 $\mathbf{a}=\sqrt{2}$ 至第一，第二，第三位小數之近似値；餘類推。

如此說明之方法，顯然可應用於任何已知無理數 $\mathbf{a}$; 蓋此方法所需為決定某有理數小於 $\mathbf{a}$ 或大於 $\mathbf{a}$ 者之試驗，而 § 154，$\mathbf{a}$ 之定義，常給與如此之試驗也．故得下列定理：

令 a 表任何已知無理數，設假定 δ 爲任何正數，不論小至如何，常能求得二有理數 a_1, a_2，使 162

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } a_2-a_1<\delta.$$

此定理顯然於有理數亦眞。

例如，設 a 表已知有理數，及 $a_1=a-1/10^n$, $a_2=a+1/10^n$，已知 $a_1<a<a_2$，則有 $a_2-a_1=2/10^n$，且選 n 至足用之大，可使 $2/10^n$ 小至如願。

加法，減法，乘法，除法

欲將 § 143 中列舉有理數系之第三性質，留遺於實數系，因此需用下列定理：

定理． 令 A_1 及 A_2 爲二類有理數，使 163

1. A_1 中各數小於 A_2 中每一數．

2. A_1 中無最後數而 A_2 中無最前數．

3. 可假定每一正數 δ 無論小至如何，能於 A_1 中求得一數 a_1 及 A_2 中求得一數 a_2，使

$$a_2-a_1<\delta.$$

則可斷定在 A_1 及 A_2 之間有一數而僅有一數．

依 § 154，由 1 及 2 知至少有一如此之數。

由 3 而知如此之數不能多於一個。

何則，假使在 A_1 中每一 a_1 及 A_2 中每一 a_2 之間，有二有理數 d 及 d'，如下圖所示：

$$\underline{\quad a_1 \qquad d \qquad d' \qquad a_2 \quad}$$

則於每一 a_1, a_2, 將有

$$a_2>d' \text{ 及 } -a_1>-d, \qquad §§ 78, 121$$

故

$$a_2-a_1>d'-d, \qquad §§ 39, 121$$

此與 3 衝突，故不可能。

在每一 a_1 及 a_2 之間，亦不能 二數其一或二者爲無理數；蓋如是則將有二有理數在此二數之間，亦在每一 a_1 及 a_2 之間（§ 158），此事適已證明其不可能矣。

164　**註.** 此定理與無理數之定義（§ 154）不同者，在於各有理數，或在 A_1 中或在 A_2 中，並非假設之一部分。

165　**加法.**　令 a 及 b 表任何二已知實數，有理數或無理數，而令 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何有理數，使

$$a_1 < \mathrm{a} < a_2 \text{ 及 } b_1 < \mathrm{b} < b_2 \tag{1}$$

觀察由 a_1 或 b_1 所表之一種數無最後數，而由 a_2 或 b_2 所表之一種數無最前數；又設假定任何正數如 δ. 不論小至如何，則常能選擇 a_1, a_2 及 b_1, b_2（§ 162），使

$$a_2 - a_1 < \delta \text{ 及 } b_2 - b_1 < \delta. \tag{2}$$

當 a 及 b 皆爲有理數，即假定 $\mathrm{a} = \alpha$ 而 $\mathrm{b} = \beta$ 時，則可依 § 116 之法則求得其和 $\alpha + \beta$；依 § 121 由 (1) 而得

$$a_1 + b_1 < \alpha + \beta < a_2 + b_2$$

而且無論 a 及 b 爲有理與否，依 § 121 由 (1) 而得

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_2. \tag{3}$$

此種考慮，當 a, b 之一或二者爲無理時，用以定 a, b 之和如下：

166　a 及 b 之和書作 a + b，其意爲在一切數 $a_1 + b_1$ 及一切數 $a_2 + b_2$ 間之一數，換言之，即此數依下列公式而定：

$$a_1 + b_1 < \mathrm{a} + \mathrm{b} < a_2 + b_2.$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2，表任何有理數，而

$$a_1 < \mathrm{a} < a_2 \text{ 及 } b_1 < \mathrm{b} < b_2.$$

欲證此定義爲合理，必須證明如此之數 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 有一個但祇有一個，此可由§163 而得，蓋因

1. 每一 a_1+b_1 小於每一 a_2+b_2

2. 無最後數 a_1+b_1，且無最前數 a_2+b_2.

例如，$a_1'+b_1'$ 不能爲最後數 a_1+b_1；因無最後數 a_1 且無最後數 b_1 故也，可選定 a_1 及 b_1 令 $a_1>a_1'$ 及 $b_1>b_1'$，故 $a_1+b_1>a_1'+b_1'$.

3. 設假定任何正有理數 δ，則能選定 a_1, a_2, b_1, b_2，使

$$a_2-a_1<\delta/2 \text{ 及 } b_2-b_1<\delta/2, \qquad \text{§ 162}$$

故得
$$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)<\delta. \qquad \text{§ 121}$$

$-\mathbf{a}$ 之定義. 令 $\mathbf{a}$, a_1, a_2, 如 § 165 中有相同意義.與§165 所用類似之考慮,當 $\mathbf{a}$ 爲無理數時,可下 $-\mathbf{a}$ 之定義如下： 167

符號 $-\mathbf{a}$ 之意，爲依下列公式所定之一數： 168

$$-a_2<-\mathbf{a}<-a_1,$$

式中 a_1, a_2 表任何有理數，使

$$a_1<\mathbf{a}<a_2.$$

由 § 163 知如此之數 $-\mathbf{a}$ 有一個但僅有一個；蓋

1 每一 $-a_2$ 小於每一 $-a_1$，因 $a_1<a_2$ §§ 73, 111.

2. 無最後數 $-a_2$ 且無最前數 $-a_1$. 例如若有一最後數 $-a_2$，則將有最前數 a_2；但無此種數存在。

3 常能選定 a_1, a_2，使

$$-a_1-(-a_2)=a_2-a_1<\delta. \qquad \text{§ 162}$$

減法. $\mathbf{a}$ 減 $\mathbf{b}$ 之結果，書作 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$，其意爲數 $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$；卽 169

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ 本身之意義，由 §§ 166, 168 可知。

由 §§ 166, 168，得 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$，亦可用下列公式定之：

$$a_1-b_2<\mathbf{a}-\mathbf{b}<a_2-b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何有理數使

$$a_1<\mathbf{a}<a_2 \text{ 及 } b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

170　**二正因數之乘法.** 命 a 及 b 為任何二已知正數,及 a_1, a_2, b_1, b_2 為任何正有理數,使

$$a_1 < \mathrm{a} < a_2,\ 及\ b_1 < \mathrm{b} < b_2. \tag{1}$$

當 a 及 b 皆為有理數,卽假定 $\mathrm{a}=\alpha$, $\mathrm{b}=\beta$ 時,則由 (1) 依 § 121, 得

$$a_1b_1 < \alpha\beta < a_2b_2,$$

且在一切情形,而得

$$a_1b_1 < a_2b_2. \tag{2}$$

故當二數 a, b 之一或二者為無理數時,而定其積為:

171　二正數 a, b 之積書作 ab, 其意為在一切數 a_1b_1 及一切數 a_2b_2 間之一數.換言之,卽 ab 為依下列公式所定之一數:

$$a_1b_1 < \mathrm{ab} < a_2b_2,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 表任何正有理數合於:

$$a_1 < \mathrm{a} < a_2\ 及\ b_1 < \mathrm{b} < b_2.$$

由 § 163 而得如此之數 ab 有一而僅有一;蓋

1. 各 a_1b_1 小於每一 a_2b_2.
2. 無最後數 a_1b_1, 且無最前數 a_2b_2 (比較 § 166, 2 之證).
3. 已知任何正數 δ, 可選定 a_1, a_2, b_1, b_2, 使

$$a_2b_2 - a_1b_1 < \delta.$$

因　$$a_2b_2 - a_1b_1 = a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1).$$

且能選定 a_1, a_2, b_1, b_2, (§ 162) 使

$$b_2 - b_1 < \delta/2a_2\ 及\ a_2 - a_1 < \delta/2b_1, \tag{1}$$

故　$$a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1) < \delta. \tag{2}$$

今可使 a_1, a_2, b_1, b_2, 之選擇如下:

先取一種 b_2 之任何特殊數 b_2' 再選定 a_1, a_2, 使

$$a_2 - a_1 < \delta/2b_2'. \tag{3}$$

次用求得之 a_2，選定 b_1，b_2，使

$$b_2-b_1<\delta/2a_2,\qquad \text{如 (1)}$$

因 $b_1<b_2'$ 故 $\delta/2b_2'<\delta/2b_1$，由 (3) 而得

$$a_2-a_1<\delta/2b_1,\qquad \text{如 (1)}$$

一或二因數爲負或零者之乘法． 令 a 及 b 表任何二已知正數，則 172

1. $\mathbf{a}(-\mathbf{b})$ 及 $(-\mathbf{a})\mathbf{b}$ 之意爲 $-\mathbf{ab}$.
2. $(-\mathbf{a})(-\mathbf{b})$ 之意爲 $\mathbf{ab}$.
3. $\mathbf{a}\cdot 0$ 及 $0\cdot\mathbf{a}$ 之意爲 0.

1/a 之定義． 令 a 爲任何已知正數，而 a_1, a_2 爲任何正有理數，無論何時使 173

$$a_1<\mathbf{a}<a_2.$$

與 § 165 所用之類似考慮，當 a 爲無理數時定 1/a 如下：

符號 1/a 之意，爲依下列公式所定之一數： 174

$$1/a_2<1/\mathbf{a}<1/a_1,$$

式中 a_1, a_2 表任何正有理數，使

$$a_1<\mathbf{a}<a_2.$$

由 § 163 而得如此之數，1/a 有一但僅有一；蓋

1. 各 $1/a_2$ 小於每一 $1/a_1$ (§ 106).
2. 無最後數 $1/a_2$，且無最前數 $1/a_1$ (比較 § 168, 2 之證).
3. 已知任何正數 δ，能選定 a_1, a_2，使

$$1/a_1-1/a_2<\delta.$$

設 $\qquad a_2-a_1<\delta\cdot a_1a_2$ 則 $1/a_1-1/a_2<\delta.\qquad$ §§ 106, 117.

但設 a_1' 表一種 a_1 之任何特殊數，則能擇定 a_1, a_2，使 $a_1>a_1'$，及 $a_2-a_1<\delta a_1'^2$，故 $<\delta a_1a_2$.

1/(−a) 之定義． 令 a 表任何已知正數，則 1/(−a) 之意爲 −1/a. 175

176 **除法.** 以 b 除 a 之商 (b 不為 0), 其意為 $a\cdot 1/b$, 即

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

$a\cdot 1/b$ 本身之意,由以前諸定義可知。

當 a 及 b 為正時,由 §§ 171, 174, a/b 可依下列公式而定:

$$a_1/b_2<a/b<a_2/b_1,$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2, 表任何正有理數,使

$$a_1<a<a_2 \text{ 及 } b_1<b<b_2.$$

177 **交換,結合,及分配定律.** 方才說明之演算,為有理數對應演算之擴張,減法依然為加法之逆,除法依然為乘法之逆.終則加法乘法依然服從交換,結合,及分配諸定律.

例如,設 a, b 及 c 為任何三正數,用下列公式如 § 170 所定者:

$$a_1<a<a_2,\ b_1<b<b_2,\ c_1<c<c_2,$$

則有 $$a(b+c)=ab+ac.$$

蓋由 §§ 166, 171, $a(b+c)$ 及 $ab+ac$ 為依下列公式所定:

$$a_1(b_1+c_1)<a(b+c)<a_2(b_2+c_2), \tag{1}$$

$$a_1b_1+a_1c_1<ab+ac<a_2b_2+a_2c_2. \tag{2}$$

且因 $a_1(b_1+c_1)=a_1b_1+a_1c_1$ 及 $a_2(b_2+c_2)=a_2b_2+a_2c_2$ (§ 120), 故由 (1) 及 (2) 所定之數相同.

178 **相等及不等法則.** 此種亦能適用於方才所定之和及積,即:

依 $a<,\ =,\ \text{或}\ >b,$

故 $a+c<,\ =,\ \text{或}\ >b+c,$

又 $ac<,\ =,\ \text{或}\ >bc,$ 設 $c>0,$

但 $ac>,\ =,\ \text{或}\ <bc,$ 設 $c<0,$

例如,設 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{a}+\mathbf{c}<\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

何則,令 d 及 $d+\alpha$ 爲 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 間之任何二有理數,且選定 c_1 使

$$c_1<\mathbf{c}<c_1+\alpha.$$

則因 $\mathbf{a}<d$ 及 $\mathbf{c}<c_1+\alpha$, 故有 $\mathbf{a}+\mathbf{c}<d+c_1+\alpha$, (1)

且因 $d+\alpha<\mathbf{b}$ 及 $c_1<\mathbf{c}$, 故有 $d+\alpha+c_1<\mathbf{b}+\mathbf{c}$ (§ 165). (2)

但由 (1) 及 (2) 而得 $\mathbf{a}+\mathbf{c}<\mathbf{b}+\mathbf{c}$. (§ 157).

依此可證,設 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ 而 $\mathbf{c}>0$, 則 $\mathbf{ac}<\mathbf{bc}$.

但此時可選定 c_1 使 $c_1<\mathbf{c}<c_1(1+\alpha/d)$.

如 § 39, 由此法則而知設 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{c}<\mathbf{d}$, 則 $\mathbf{a}+\mathbf{c}<\mathbf{b}+\mathbf{d}$, 餘類推;又如 § 50, 當 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 爲正時,設 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{c}<\mathbf{d}$, 則 $\mathbf{ac}<\mathbf{bd}$, 餘類推. 179

關於近似值. 1. 今已定無理數減法之義於 § 169, 可敍述 § 162 之定義如下: 180

當任何無理數 $\mathbf{a}$ 已知時,且任何有理數 δ 假定爲任何小,則常能求得有理數 a_1 及 a_2, 使其與 $\mathbf{a}$ 之差小於 δ.

因依 § 162, 可求得 α_1 及 α_2, 使 $\alpha_1<\mathbf{a}<\alpha_2$ 及 $\alpha_2-\alpha_1<\delta$ 故也.

但從 $\mathbf{a}<\alpha_2$ 而知 $\mathbf{a}-\alpha_1<\alpha_2-\alpha_1$ (§ 178) 故 $\mathbf{a}-\alpha_2<\delta$.

同法,因 $-\mathbf{a}<-\alpha_1$ 可證 $\alpha_2-\mathbf{a}<\delta$.

例如, 依 § 161, $\sqrt{2}-1.41<.01$ 及 $1.42-\sqrt{2}<.01$.

吾人謂以如此之 a_1 或 a_2 代表 $\mathbf{a}$, 其誤差不超過 δ.

2. 於實用計算,用無理數之近似值,常較用其本數爲多.設 a_1 及 b_1 順次爲 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 之近似值,則 a_1+b_1 爲其和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 之近似值.但欲確保 a_1+b_1 之誤差不超過 δ, 通常須選定 a_1 及 b_1 使其相關誤差不超過 $\delta/2$. 此可由 § 166 之證明而知之.同法求 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{ab}$, 及 $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ 之近似值,使其誤差不超過 δ, 可由 §§ 168, 171, 174 之證明引申之.

乘方與開方

181　**乘冪.** 在無理數之情形,與有理數同,亦以a^2, a^3, ……表 aa, aaa,……

182　**根.** 任何已知正數 b 之 m 次根,書作 $\sqrt[m]{b}$, 意卽其 m 次方爲 b 之一正數;例如 $\sqrt[m]{b}$ 表公式 $(\sqrt[m]{b})^m = b$ 所定之正數.

欲明此定義,須證其有如此之數一個但祇一個確實存在,完成之如下:

183　**定理.** 實數系包含每一正實數 b 之 m 次根.

1. 設 b 爲一有理數之 m 次方,則此定理之眞確甚明.

例如,設 $\mathbf{b} = 8/27 = (2/3)^3$, 則 $\sqrt[3]{\mathbf{b}} = 2/3$.

2. 設 b 非一有理數之 m 次方,則其 m 次根爲實數 a, 而在 m 次方小於 b 之一切正有理數 a_1, 及 m 次方大於 b 之一切正有理數 a_2 之間.比較 § 151.

由 § 154 知如此之數 **a** 有一,但僅有一,因 (1) 每一正有理數爲 a_1 或 a_2, (2) 各 a_1 小於每一 a_2 及 (3) 無最後數 a_1 且無最前數 a_3.

可證明 (3) 如下:

設有一最後數 a_1 稱爲 p 則因 $p^m < \mathbf{b}$ 在 p^m 及 **b** 之間有諸有理數.令其一爲 $p^m + \delta$. 今僅證明可求得一有理數 $q > p$ 使 $q^m < p^m + \delta$, 或 $q^m - p^m < \delta$; 蓋如是則有 $p^m < q^m < \mathbf{b}$ 使 p 非最後數 a_1.

但　$q^m - p^m = (q-p)(q^{m-1} + q^{m-2}p + \cdots\cdots + qp^{m-2} + p^{m-1})$　§ 308.

$\therefore$　$< (q-p)ma_2'^{m-1}$,　設 a_2' 爲任何特殊數 a_2,

$\therefore$　$< \delta$,　設 $q = p + \delta/ma_2'^{m-1}$.

同法可證其無最前數 a_2.

此旣成立,卽可易於證明 $\mathbf{a} = \sqrt[m]{\mathbf{b}}$.

何則，$a_1<\mathbf{a}<a_2$, 則有 $a_1^m<\mathbf{a}^m<a_2^m$. §§ 171, 181.

但 $\mathbf{b}$ 爲每一 a_1^m 及每一 a_2^m 間之惟一數。

故 $\mathbf{a}^m=\mathbf{b}$, 卽 $\mathbf{a}=\sqrt[m]{\mathbf{b}}$.

相等及不等法則． 令 a 及 b 表任何正實數，及 m 爲任 184
何正整數，則

依 $$a<, =, \text{或} >b,$$

得 $$a^m<, =, \text{或} >b^m, \quad (1)$$

及 $$\sqrt[m]{a}<, =, \text{或} >\sqrt[m]{b}. \quad (2)$$

可屢用 § 179 證明 (1).

例如，設 $a<b$ 則 $a\cdot a<b\cdot b$, 卽 $a^2<b^2$; 餘類推。

由 (1) 導得 (2). 例如，設 $a=b$, 則 $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$, 蓋若 $\sqrt[m]{a}<$ 或 $>\sqrt[m]{b}$, 將有 $a<$ 或 $>b$ 故也。

指數法則． 令 a 及 b 表任何二實數，而 m 及 n 表任何 185
二正整數，則

$$1.\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n}.\qquad 2.\quad (a^m)^n=a^{mn},\qquad 3.\quad (ab)^m=a^mb^m.$$

例如，
$$a^3\cdot a^2=aaa\cdot aa=aaaaa=a^5=a^{3+2}, \quad \S\,177$$
$$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}, \quad \text{由 } 1$$
$$(ab)^3=ab\cdot ab\cdot ab=aaa\cdot bbb=a^3\cdot b^3. \quad \S\,177$$

關於 m 及 n 之任何其他正整數值亦仿此。

關於根之定理． 令 a 及 b 表任何正實數，而 m 表任何 186
正整數，則 $$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

因 $$(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{b})^m=ab. \quad \S\S\,182,\ 185,\ 3$$

及 $$(\sqrt[m]{ab})^m=ab. \quad \S\,182$$

故 $$(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{ab})^m.$$

及 $$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}. \quad \S\,184,\ (2)$$

變數與極限

187 **變數** 設無窮數串

$$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots, a_n\cdots\cdots,$$

中每一特別項 a_n，當其表示在數串之位置之標號 n 爲已知時，此項之值卽爲已知或可計算而得，則稱此數串爲已知。

吾人常有機會考察變數假定爲歷經如此已知無窮數串之值而變動者。

例如，$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},\cdots\cdots\frac{n}{n+1},\cdots\cdots$ 爲一如此之已知無窮數串，而設假定 x 爲歷經此數串卽連續取諸値 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\cdots\cdots$ 者，則 x 爲如此一變數.

188 **極限**. 當 x 歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},\cdots\cdots$，不絕趨近於値 1 時，在此情形，設指定任何正數如 δ，不論如何小，則差 $1-x$ 最後必變成且永遠小於指定之數。例如 x 至此數串之第 100 項後，$1-x$ 永遠小於 .01.

吾人表明此事，稱 x 爲歷經此數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},\cdots\cdots$，趨近於 1 爲其極限。在一般.

189 **變數 x 假定其歷經已知無窮數串之各値而變動，設差 $\mathbf{a}-x$ 最後可變成且永遠小於能指定之每一正數 δ 者稱 x 爲趨近於數 $\mathbf{a}$ 爲其極限.**

設 x 趨近於 $\mathbf{a}$ 爲極限，僅觀察 $\mathbf{a}-x$ 變成小於 δ，尙嫌不足，必須永遠小於 δ.

例如，設 x 歷經數串 $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0,\cdots\cdots$，而變差 $1-x$ 雖將變成小於可指定之各 δ，但不能永遠小於 δ，則 x 不趨近於 1 爲極限.

在特例，$\mathbf{a}-x$ 可變成 0，卽 x 可至其極限 $\mathbf{a}$.

欲指明 x 趨近極限 a, 書作 $x \doteq$ a, 讀作"x 趨近於 a 爲極限", 或 $\lim x = a$, 讀作"x 之極限爲 a". 190

一變數 x 漸近於極限或否, 完全依照其假定爲變動時所歷經諸值之數串之性質. 191

例如, x 當歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$ 而變時, 雖趨近於極限, 顯然可見, 當其歷經數串 1, 2, 3, 4, ……, 或數串 1, 2, 1, 2, …… 而變時, 則不趨近於極限.

故下列定理皆甚重要:

定理 1. 設變數 x 不絕增大, 但在他方面常永小於某已知數 c, 則 x 趨近於極限. 而此極限或爲 c 或爲小於 c 之某數. 192

何則, 由假設, 有 x 決不超過之諸數, 指定如此諸數屬於類 R_2, 而一切他數卽 x 最後能超過之一切數屬於類 R_1.

則得全部實數系分爲二部分 R_1, R_2, 之區分, 而生 R_1 中各數小於 R_2 中各數之關係.

R_1 中顯然無最後數故由 §160, R_2 中有一最前數. 稱此數爲 a, 當 x 增大時, 趨近於 a 爲極限.

設 δ 可至無論如何小, 但爲正數, 則 a $-\ \delta$ 屬於 x 最後超過之數 R_1 一類. 故 x 最後永在 a $-\ \delta$ 及 a 之間, 而與 a 之差小於 δ.

同法可證:

設變數 x 不絕減小, 但在他方面, 常永大於某已知數 c, 則 x 趨近於極限. 而此極限或爲 c 或爲大於 c 之某數. 193

194 **規則數串.** 然設 x 趨近於極限,並非必須常增大,或常減小.

例如,當 x 歷經數串 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\cdots\cdots$,有時增大,有時減小;但 x 趨近於 0 爲極限.

證 x 是否趨近於極限,須依 x 歷經數值 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots, a_n,\cdots\cdots$ 之數串而變時,有否下列定義所述之性質而定.

195 設數串 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$ 中,可假定之每一試驗正數,有一對應項 a_k 可求,其與後各項之數值差小於 δ,則此數串稱爲規則數串.

1. 例如,數串 1.4, 1.41, 1.414 ……(1)(§ 161) 爲規則的.

蓋第一項 1.4 與其後各項之差小於 1/10;第二項 1.41 與其後各項之差小於 $1/10^2$;第 n 項與其後各項之差小於 $1/10^n$ 故也.

今不論 δ 可至如何小,吾人能以一值予 n,使 $1/10^n$ 更小;且設 k 指示 n 之如此一值,則 1.4, 1.41……之第 k 項與其後各項之差小於 δ.

例如,設指定 δ 之值爲 1/500000,則有 $1/10^6<\delta$,故 1.4, 1.41……之第六項與其後各項之差,小於 δ 之此值.

2. 下列數串亦爲規則的.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots\cdots, \quad (2) \qquad \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \cdots\cdots, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\cdots\cdots \quad (4) \qquad 2, 1, 1, 1\cdots\cdots \quad (5)$$

觀察 (2) 中各項之後爲較大項,(3) 中則爲較小項,(4) 中則有時爲較大項,有時爲較小項.

吾人常遇規則數串在某項以後皆相同,如 (5). 顯然可見變數歷經此種數串而變,最後將變成常數,卽至其極限.

3. 下列數串爲不規則的:

$$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, \quad (6) \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \quad (7)$$

因 (6) 中一項與其後一項之差，常可爲無限大，而 (7) 中則可常爲 $\frac{1}{8}$，故不小於能指定之數，例如 $\frac{1}{7}$.

規則數串之公式.　1.　吾人可用下列公式指示項 a_k 與 196
其後每一項 a_p 之關係 (§ 63):

$$|a_p - a_k| < \delta \qquad \text{因每一 } p > k. \tag{1}$$

2.　其次，因任何項 a_p 可 $>a_k$，必在 a_k 及 $a_k+\delta$ 之間，而任何項 a_p 可 $<a_k$，必在 $a_k-\delta$ 及 a_k 之間，故亦可寫作

$$a_k - \delta < a_p < a_k + \delta \qquad \text{因每一 } p > k. \tag{2}$$

3.　由 (2) 可知設 a_p 有若干項小於 a_k 及若干項大於 a_k，則其中二項間之差可超過 δ，但不超過 2δ.

然常能求得一項 a_l 對應於 $\delta/2$，如 a_k 對應於 δ. a_l 以後每二項之差，其值小於 $2(\delta/2)$ 或 δ；卽此諸項中每二項間之關係，可以下列公式指示之.

$$|a_p - a_q| < \delta \qquad \text{因每一 } p > q > l. \tag{3}$$

定理 2.　設諸値 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 之數串爲規則數 197
串，假定變數 x 歷經此種數値而變時，則 x 趨近於極限.

因 x 歷經 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n \cdots\cdots$ 之數串而變時，最後將止於諸數之右.　(1)

如設 δ 及 a_k 之意同上，則 x 抵達値 a_k 之後，將止於 $a_k - \delta$ 之右. [§ 196 (2)].

指定此一切數屬於類 R_1，而其他一切數——卽 x 不能止於其右之一切數——屬於類 R_2.

於是可得區分全部實數爲二部 R_1, R_2, 使 R_1 中各數小於 R_2 中每一數. 依 § 160, 此區分決定有一數 $\mathbf{a}$ 存在.

例如, 設數串爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$, 則諸負有理數組成 R_1, 但 0 及諸正有理數組成 R_2; 而 $\mathbf{a}$ 之本身爲 0.

當 x 歷經數串 (1) 而變時, 則必趨近於 $\mathbf{a}$ 爲極限.

何則, 指定任何正試驗數 δ, 不關係於無論其如何小, 因 (1) 爲規則的, 故能求得一項 a_m [§ 196 (3)], 使

$$|a_p - a_q| < \delta/2 \qquad \text{因每一 } p > q > m. \tag{2}$$

但因 $\mathbf{a} - \delta/2$ 屬於 R_1, 則 x 之一切值在某項之後者必在 $\mathbf{a} - \delta/2$ 之右, 又因 $\mathbf{a} + \delta/2$ 屬於 R_2, 則此諸值中必有若干項在 a_m 之後而在 $\mathbf{a} + \delta/2$ 之左; 否則 $\mathbf{a} + \delta/2$ 將屬於 R_1, 因 x 最後能止於其右故也.

例如, 設數串爲 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots$ 而 $\delta = \frac{1}{10}$, 則在第四項 $\frac{1}{16}$ 以後 x 之一切值, 必在 $\mathbf{a} - \delta/2$ 及 $\mathbf{a} + \delta/2$ 之間, 卽在 $-\frac{1}{20}$ 及 $\frac{1}{20}$ 之間.

令 a_q' 表 x 如此之值, 則

$$\mathbf{a} - \delta/2 < a_q' < \mathbf{a} + \delta/2,$$

或

$$|\mathbf{a} - a_q'| < \delta/2. \tag{3}$$

由 (2) 及 (3), 因 $q' > m$, 由 §§ 78, 178, 而得

$$|\mathbf{a} - a_p| < \delta \qquad \text{因每一 } p > q'.$$

易言之, 在 x 至值 a_q' 之後, 其差 $\mathbf{a} - x$ 之絕對值永小於 δ. 故 x 趨近於 $\mathbf{a}$ 爲極限. (§ 189)

198 反言之, 設 x 趨近於極限 $\mathbf{a}$, 則 x 變動時所歷經諸值 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$ 之數串爲規則數串.

因差 $a-x$ 之絕對值，最後能變爲且永遠小於每一指定之正數 δ,（§ 189），可選定 a_k 使

$$|a-a_k|<\delta/2 \text{ 及 } |a-a_p|<\delta/2 \qquad \text{因每一 } p>k;$$

因此得

$$|a_p-a_k|<\delta \qquad \text{因每一 } p>k.$$

故數串 $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 爲規則的，[§ 196 (1)].

聯合 §§ 197, 198 可得簡單敍述如下：

一變數趨近於極限，其充足且必要之條件，爲假定此變數變動時歷經諸值之數串爲規則的。 199

關於極限之數個重要定理

本節中 a 及 b 表任何已知實數，而 x 及 y 表變數，假定其變動時歷經已知無窮數串之諸值者。

極限 0. 由極限定義（§ 189），即得： 200

1. 設變數 x 之絕對值，最後能變成且永遠小於能指定之正數 δ, 則 x 趨近於 0 爲極限；其逆亦眞。

2. 設 x 趨近於 a 爲極限，則 $a-x$ 趨近於 0 爲極限；其逆亦眞。

例如 x 變動時歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\cdots\cdots$，則趨近於極限 0；而 x 變動時歷經數串 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots$，則 $1-x$ 趨 於極限 0.

極限爲 0 之變數，名爲無窮小。

定理 1. 設 $x \doteq 0$ 及 $y \doteq 0$, 而當 x 及 y 俱變時，A 及 B 之絕對值永小於定數 c, 則 $Ax+By \doteq 0$. 201

指定任何正數 δ, 不論其小至如何。

因 $x \doteq 0$ 時，x 之絕對值最後能永 $<\delta/2c$. 　　§ 200, 1

因 $y \doteq 0$ 時，y 之絕對值最後能永 $<\delta/2c$. § 200, 1

故 $Ax+By$ 之絕對值，最後能永 $<2c\dfrac{\delta}{2c}$, $\therefore <\delta$, 故趨近於 0 爲極限 (§ 200, 1).

例如，設 $x \doteq 0$ 及 $y \doteq 0$, 則 $(xy-3)x+2y \doteq 0$.

202 **註** 此定理推廣於有限數之變數甚易。

例如，設 $x \doteq 0$, $y \doteq 0$ 及 $z \doteq 0$, 則 $Ax+By+Cz \doteq 0$.

203 **定理 2.** 各趨近於極限之二變數，其和，差，積，商爲其極限之和，差，積，商；即設 x 及 y 順次趨近其極限 a 及 b, 則

1. $x+y \doteq a+b$. 3. $xy \doteq ab$.

2. $x-y \doteq a-b$. 4. $x/y \doteq a/b$. 除非 $b=0$.

因 $a-x \doteq 0$ 及 $b-y \doteq 0$, (§ 200), 由 § 201 而得

$$A(a-x)+B(b-y) \doteq 0. \tag{1}$$

公式 1, 2, 3, 4 可由 (1) 導出，例如

1. $a+b-(x+y)=(a-x)+(b-y) \quad \therefore \doteq 0.$ 由 (1)

即 $$x+y \doteq a+b.$$ § 200, 2

2. $a-b-(x-y)=(a-x)-(b-y) \quad \therefore \doteq 0,$ 由 (1)

即 $$x-y \doteq a-b.$$ § 200, 2

3. $ab-xy=(a-x)b+(b-y)x \quad \therefore \doteq 0,$ 由 (1)

即 $$xy \doteq ab.$$ § 200, 2

4. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{b}\right)+\left(\dfrac{x}{b}-\dfrac{x}{y}\right)=(a-x)\dfrac{1}{b}+(b-y)\dfrac{x}{by}, \quad \therefore \doteq 0,$ 由 (1)

即 $$x/y \doteq a/b.$$ § 200, 2

204 **系.** 設 $x \doteq a$, 則 $x^n \doteq a^n$.

205 **定理 3.** 趨近於極限之變數，其 n 次根之極限，爲其極限之 n 次根；即

設 $x \doteq a$, 則 $\sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}$.

1. 當 $a=0$ 時，指定任何正數 δ.

因 $\doteq 0$ 時，x 之絕對值，最後能永 $<\delta^n$.　§ 200, 1

故 $\sqrt[n]{x}$ 之絕對值，最後能永 $<\delta$.　§ 184

故　$$\sqrt[n]{x} \doteq 0.$$　§ 200, 1

2. 當 a 不為 0 時，則由後節 (§ 308) 可知 $x-a$ 常能以 $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}$ 整除，且當 $x \doteq a$ 時，其商 Q 不趨近於極限 0.

故由 § 203 (1)，使 $A=1/Q$ 及 $B=0$，則

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}=(x-a)/Q \doteq 0,\ \text{即}\ \sqrt[n]{x} \doteq \sqrt[n]{a}.$$　§ 200, 2

無理數之關係於量

線段之長同單位不可通約.　設一線段 S 與單位線段 s 不可通約——如設當 S 及 s 為正方形之對角線，及一邊時，則可證 s 雖分至任何小，無有盡部分適含於 S 之內——則 § 130 所述長度之定義不能應用於 S.　**206**

但有一定無理數 a，與 S 發生如下關係：

與單位 s 可通約之二線段，歸屬於各異之二類，其一類小於 S，又一類大於 S

有理數之為其長者 (§ 130)，歸屬於對應二類，可稱為 A_1 及 A_2. 每一正有理數或屬於 A_1 或屬於 A_2，A_1 中各數在 A_2 中每一數之前，且其終 A_1 中無最後數，A_2 中無最前數*.

由是依 § 154，有一定無理數 a 在 A_1 中一切數及 A_2 中一切數之間. 今稱此數 a 為 S 之長，故有下列定義：

---

* 因如 A_1 中有最後數，則與 s 可通約且小於 S 之諸線段中，將有一極大者稱為 S′.

但無如此之線段存在，因依下頁腳註說明之阿基米得氏公理，可求得 s 之有盡部分小於 S − S′；且 S′ 及 s 此部分之和，將與 S 可通約，而小於 S 大於 S′.

207 與單位 s 不可通約之任何線段 S 之長，爲一無理數 a, 而在小於 S 線段長度之一切有理數及大於 S 線段長度之一切有理數之間.

例如，$\sqrt{2}$ 爲以正方形一邊所表對角線之長.

208 設以 s 作單位以表 S 之長爲 a, 書作 S＝as, 其 a 爲有理數或無理數.

209 **以點描寫實數.** 如 § 134 內之圖，任作正直線，而在其上取定點 O 爲原點；且取合宜單位 s, 以度線長. 則從此直線任何點 P 至 O 之距離，可知爲以 s 表示線段 OP 之長 (§§ 130, 207).

作任何已知數 a 之圖形，可選定直線上之點 P, 使其與 O 之距離，爲 a 之絕對值，此點取於 O 之右或左，依 a 之爲正或負而定.

設 a 爲有理數，則能實際作 P (§ 134). 反之，設 a 爲無理數，則常不能作 P. 假定 P 存在，換言之，卽在此線上有一單獨點 P, 在圖示有理數小於 a 一切點及圖示有理數大於 a 一切點之間*.

*幾何公理之討論，並非本書分內之事，但下列關於度量本旨者，此時應考慮也.

1. 阿基米得氏公理 設 s 及 S 表二線段，使 s＜S, 則常能求得一整數 m 使 ms＞S.

2. 連續之公理 設一直線所有諸點，分爲二類 R_1 及 R_2, 使 R_1 中各點在 R_2 中每一點之左，則 R_1 中有一最後點或 R_2 中有一最前點.

(1) 阿基米得氏公理含於假定各線段爲能度者，因第一步以 s 表 S 以求整數 m, 使 $(m-1)$s＜S＜ms 故也.

(2) 公理 1 及 2 可證 § 209 中之假定，卽每一已知無理數 a, 有一對應點 P 存在.

因 a 區分有理數系爲二部分，可順次名爲 B 及 C, 其對應於各數之點，順次

反之,當 P 已知時,可度 OP 以求得 $\mathbf{a}$, 至少可得近似値, 210
而附加+或−號於其結果,依 P 在 O 之右或左而定.

例如設 P 在 O 之右, 而用 $\mathbf{s}$ 沿 OP 量得五次,用 $\mathbf{s}$ 十分之一沿其餘部分量得七次,又用 $\mathbf{s}$ 百分之一沿其餘部分量得六次,於是 5.76 爲 $\mathbf{a}$ 之値至第二位小數。

如是於一切實數及線上一切點之間, 創立一對一關係 211
(§2);且設 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 表任何二實數,而 P 及 Q 表其對應點, P 在 Q 之左或右,依 $\mathbf{a}$ 小於或大於 $\mathbf{b}$ 而定.

例如設 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 爲正,而 $\mathbf{a}<\mathbf{b}$, 且設 c 表 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 間之有理數,而 R 表其對應點,則有 (§206)

$$OP<OR \text{ 及 } OR<OQ, \text{ 故 } OP<OP.$$

名爲 B 點及 C 點.則可證在此線內有一定點 P, 將一切 C 點與一切 B 點分離。

先指定 B 點及一切中間點屬於類 R_1, 而以其右之一切點屬於 R_2. 且令 P 表此區分依 2 所定之點。

次指定 C 點及一切中間點屬於類 S_2, 而以其左之一切點屬於類 S_1, 且令 Q 表此區分依 2 所定之點。

則點 P 及 Q 必重合.設不重合,則令 PQ 表其中間線段,從 1, 可求一整數 m, 使

$$m\cdot PQ>\mathbf{s}, \text{ 故 } PQ>\mathbf{s}/m.$$

但此爲不可能,因能從 B 選一數 b, 從 C 選一數 c, 使 $c-b<1/m$, 又設 L 及 M 爲順次對應於 b 及 c 之點,則有

$$LM<\mathbf{s}/m, \text{ 及 } PQ<LM, \text{ 故 } PQ<s/m.$$

卽此一點 P 或 Q 依 §209, 對應於 $\mathbf{a}$.

(3) 末後觀察實數系對應於 2 者,有 §160 所述之性質,而對應於 1 者,有下列性質:

設 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 爲任何二正實數,常能求得一整數 m, 使 $m\mathbf{b}>\mathbf{a}$.

因依 §§108, 176, 178 能選定一整數 m, 使 $m>\mathbf{a}/\mathbf{b}$, 故 $m\mathbf{b}>\mathbf{a}$.

一種有理數系之區分, 欲發明多於一之無理數, 則實數系將不能具此性質——至少非放棄其他若干性質不可——設於 §154 所述.

例如,設每一有理數或爲 a_1 或爲 a_2, 而對於每一 a_1, a_2, 有 $a_1<\mathbf{b}<\mathbf{c}<a_2$, 則必有 $\mathbf{c}-\mathbf{b}<a_2-a_1$ (§178 及 §163 之證)

但不論指定正數 δ 至任何小,決不能求得一整數 m 大至如 $m(\mathbf{c}-\mathbf{b})>\delta$.

如可求得,則 $\mathbf{c}-\mathbf{b}>\delta/m$, 此爲不可能,因 $\mathbf{c}-\mathbf{b}<a_2-a_1$ 且能選定 a_1, a_2 使 $a_2-a_1<\delta/m$ 故也。

212 **定理.** 設以 T 表 S 之長爲 $\mathbf{a}$, 又以 s 表 T 之長爲 $\mathbf{b}$, 則以 s 表 S 之長爲 $\mathbf{ab}$.

1. 當 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 爲有理數時.

令 $\mathbf{a}=a/b$. 及 $\mathbf{b}=c/d$, 式中 a, b, c, d 表整數.

因 S 含 T 之 b 分一之 a 倍 (§ 130), 故 $b\mathrm{S}$ 必含 T 本身 a 倍, 卽

$$b\mathrm{S}=a\mathrm{T}. \tag{1}$$

同理
$$d\mathrm{T}=c\mathrm{s}. \tag{2}$$

但由 (1) 及 (2), 易得

$$bd\mathrm{S}=ad\mathrm{T},\ 及\ ad\mathrm{T}=ac\mathrm{s},$$

故
$$bd\mathrm{S}=ac\mathrm{s}.$$

卽 S 之長如以 s 表之爲 $\frac{ac}{bd}$ 或 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. § 130

2. 當 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 有一或二者爲無理數時.

令 S_1 及 S_2 表任何線段與 T 可通約者, 使

$$\mathrm{S}_1<\mathrm{S}<\mathrm{S}_2,$$

而令 a_1, a_2 爲以 T 所表 $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ 之長, 卽

$$\mathrm{S}_1=a_1\mathrm{T}\ 及\ \mathrm{S}_2=a_2\mathrm{T},\ 式中\ a_1<\mathbf{a}<a_2, \qquad § 208$$

同法, 令 T_1 及 T_2 表任何線段與 s 可通約者, 使

$$\mathrm{T}_1<\mathrm{T}<\mathrm{T}_2.$$

而令 b_1, b_2, 爲以 s 所表 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ 之長, 卽

$$\mathrm{T}_1=b_1\mathrm{s},\ 及\ \mathrm{T}_2=b_2\mathrm{s},\ 式中\ b_1<\mathbf{b}<b_2.$$

因
$$\mathrm{S}_1=a_1\mathrm{T},\ 及\ \mathrm{T}>\mathrm{T}_1,\ 及\ \mathrm{T}_1=b_1\mathrm{s}.$$

依情形 1, 有
$$\mathrm{S}_1>a_1b_1\mathrm{s}.$$

同理,
$$\mathrm{S}_2<a_2b_2\mathrm{s}.$$

故
$$a_1b_1\mathrm{s}<\mathrm{S}_1<\mathrm{S}<\mathrm{S}_2<a_2b_2\mathrm{s},$$

由此得
$$a_1b_1\mathrm{s}<\mathrm{S}<a_2b_2\mathrm{s}.$$

如此證明一切數 a_1b_1 及 a_2b_2 爲以 s 順次所表線段小於或大於 S 者之長, 故在一切數 a_1b_1 及 a_2b_2 間之一數 $\mathbf{ab}$ (§ 171), 爲以 s 表 S 本身之長 (§ 207).

系. 設以 s 表 S 及 T 之長順次爲 a 及 b, 則以 T 表 S 213
之長爲 a/b.

因令 T 表 S 之長爲 x, 而以 s 表 T 之長爲 b, 故以 s 表 S 之長爲 xb (§ 212).

但依假設,以 s 表 S 之長爲 a,

故 $$xb=a,$$

由是 $$x=a/b.$$

連續變數. 吾人最熟知直覺之一爲連續運動. 214

設 P 點沿直線 OAB 自 A 繼續運動至 B; 而令 a, x 及 b 順次表 OA, OP 及 OB 之長, O 爲原點.

按 § 209 假定,對於 a 及 b 間之每一數,線段 AB 均有其點,蓋當 P 自 A 向 B 運動時,必須經過之.於是可謂 P 自 A 至 B 連續運動時, x 自 a 值增至 b 值而經過中間一切諸值,或 x 自 a 至 b 連續而變.

因對於 x 之任一已知值,不能知其後繼之值,自然不能描寫 x 之變動,設欲 x 作數學上合理之推究,須如下列規定方爲滿意: (1) x 可於 a 及 b 間取每一已知值,及 (2) 設 p 及 q 表此值中之任何一對,而 $p<q$, 則 x 當先取值 p 後取值 q. 當 x 之性質只有第一項時,亦常稱 x 爲連續變數.

比. 令 M 及 N 表同類之任何二量.當 M 及 N 表線段 215
時,如 §§ 81, 130, 207, 中所定爲長之各數,稱爲以 N 所表 M 之測度,或稱 M 與 N 之比.

故 §§ 212, 213,……與長相關之定理，可應用於同類任何量之測度或比.於特例

216 設以同單位所表 M 及 N 之測度順次爲 a 及 b, 則 M 與 N 之比爲 a/b.

V. 虛數與複素數

純虛數

217 實數系不含負數之偶次根；因一切實數之偶次乘冪均爲正數故也.例如實數系不含 -1 之平方根.

爲應付此種困難，故發明一種符號之新系，名爲虛數或複素數.

218 此種新符號之最簡者爲 i, 名爲虛數單位. 用此單位及實數 a, 成符號 ai, 此數視其係數 a 在實數系中之次序而排列之.於是得數之新連續次序系，名爲純虛數.

如前展開實數系時，可先作成完全虛數記法:

$$\cdots -3i, \ -2i, \ -i, \ 0, \ i, \ 2i, \ 3i, \cdots,$$

次引入分數係數之虛數以推廣其稠密系，末引入無理係數之虛數以推廣其連續系.

$2i$ 僅爲新數中之一名稱，其惟一之性質，即於新次序系中有一定位置耳。但在乘法定義，則此 $2i$ 亦表示 $2\times i$ 或 $i\times 2$ 之積。每一純虛數 ai 皆如此。

在特例，定 $0\cdot i$ 爲 0. 故 $0i$ 可書作 0.

注意 0 爲實數系與純虛數系公有之唯一數。

爲此新數，吾人發明所謂加法與乘法之演算，此法可依下式定之：

$$1.\quad ai+bi=(a+b)i. \qquad 2.\quad a\cdot bi=bi\cdot a=abi.$$

$$3.\quad ai\cdot bi=-ab.$$

例如，3，二純虛數 ai 與 bi 之積爲實數 $-ab$，此係以 ai 及 bi 之係數相乘而變其結果之符號所得者．

定乘冪如 § 13．例如 $(ai)^2=ai\cdot ai$.

純虛數系包含實數系內一切負數之平方根，即 220

$$\sqrt{-1}=i \text{ 及 } \sqrt{-a^2}=ai.$$

此因 $i^2=i\cdot i=1i\cdot 1i=-1$. § 219, 3

故 i 爲 -1 之平方根 (§ 138). 以 $\sqrt{-1}$ 表其根，而有 $i=\sqrt{-1}$.

同法可證 $-i$ 爲 -1 之平方根以 $-\sqrt{-1}$ 表之．

同理，因 $(ai)^2=ai\cdot ai=-a^2$. 故有 $ai=\sqrt{-a^2}$.

複　素　數

欲使數系包含負數之較高偶次根，遂發明複素數．此數如式 $a+bi$，係由實數 a 與純虛數 bi 以＋號連結而成．此種數亦常名爲虛數． 221

在複素數加法意義未定以前，式 $a+bi$，可視作簡單符號，而＋號僅爲此符號之一部分．

因 $a=a+0i$ 及 $bi=0+bi$，故實數與純虛數皆含於複素數中． 222

223　複素數可視作一切數 $a+bi$ 中依直行與橫列而排列者；其中同一之 b 在同一橫列，而依 a 之次序自左而右排成橫列；同一之 a 在同一直行，而依 b 之次序自下而上排成直行．吾人可注意任何特殊複素數，係依其在此"二向度序列"中之位置所決定．

在後 § 238，將說明對於 a 與 b 之一切值，圖示所排列之法則．對於 a 與 b 之整數值，可指示如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots \\
\cdots & -2+2i & -1+2i & 2i & 1+2i & 2+2i & \cdots \\
\cdots & -2+\ i & -1+\ i & i & 1+\ i & 2+\ i & \cdots \\
\cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\
\cdots & -2-\ i & -1-\ i & -\ i & 1-\ i & 2-\ i & \cdots \\
\cdots & -2-2i & -1-2i & -2i & 1-2i & 2-2i & \cdots \\
\cdots & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots
\end{array}$$

此排列次序系其爲元素之橫列（或直行）亦爲敍述（§ 17），而各列均在式 $a+bi$ 之記號次序數系中．

224　**相等定義．**　當二複素數在上述二向度序列中佔有同一位置時，則此複素數稱爲相等．故

225　設 $a+bi=c+di$，則 $a=c$ 及 $b=d$；反之亦眞．在特例，設 $a+bi=0$，則 $a=0$ 及 $b=0$；反之亦眞．

二不等複素數如 $2+3i$ 與 $3+i$，不能謂其一小於或大於——在前或在後——其他數，因複素數不成單一次序系故也．

226　**加法減法乘法之定義．**　二複素數 $a+bi$，$c+di$ 之和，差，與積，爲成下列方程右邊之複素數．

1. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$

2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

3. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

按 1 與 2, 加法與減法爲相反演算.在特例,由 1,

$$(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi;$$

卽由定義 1, $a+bi$ 爲 a 與 bi 之和。

此種定義,與交換,結合,分配諸定律符合.其實可連合此諸定律與上述定義而得之.例如

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=(a+bi)c+(a+bi)di\\&=ac+bi\cdot c+a\cdot di+bi\cdot di\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i,\end{aligned}$$ 因 $i^2=-1$.

系. 一因數爲零時,其積爲零. 227

因 $(a+bi)(0+0i)=(a\cdot 0-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 0)i=0.$

除法. 以 $c+di$ 除 $a+bi$ 之商,可定爲以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之複素數.當 $c+di$ 不爲 0 時,如此之數有一但僅有一,卽下列方程右邊之複素數: 228

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

當 $c+di$ 爲 0 時,無一定之商存在。

因以 $c+di$ 乘此方程右邊之積爲 $a+bi$, 讀者用 § 226 易於證明。

吾人發見此數爲其商如次:

設有一數存在,以 $c+di$ 乘之可得 $a+bi$, 令其爲 $x+yi$.

則 $$(x+yi)(c+di)=a+bi. \quad (1)$$

或 $$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi. \quad (2)$$

故 $$cx-dy=a \text{ 及 } dx+cy=b. \quad (3)$$ § 225

解此一對方程求 x, y, 得

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, \text{ 除 } c^2+d^2=0 \text{ 外}. \quad (4)$$

且因 (4) 爲 x 與 y 滿足 (3) 之一對惟一之值，故其對應數 $x+yi$ 爲以 $c+di$ 乘之而得 $a+bi$ 之惟一數。

由 (4)，當 $c^2+d^2=0$ 時，商之定義失其意義甚明，但設 $c^2+d^2=0$，則必 $c=0$ 及 $d=0$，否則將有一正數等於 0 矣．且設 $c=0$ 及 $d=0$，則除數 $c+di$ 爲 0.

229 **交換，結合，及分配定律．** 適所定之演算，顯然包含實數之對應演算．一如實數，亦適於交換，結合及分配諸定律．

例如，
$$(a+a'i)(b+b'i)=ab-a'b'+(ab'+a'b)i, \qquad (1)$$
及
$$(b+b'i)(a+a'i)=ba-b'a'+(b'a+ba')i. \qquad (2)$$
但 (1) 與 (2) 之右邊相等 (§ 177).

故
$$(a+a'i)(b+b'i)=(b+b'i)(a+a'i).$$
其餘定律，可依同法成立．

230 **相等法則．** 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表任何複素數．

1. 設 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

2. 設 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, 則 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

3. 設 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, 則 $\mathbf{ac}=\mathbf{bc}$.

4. 設 $\mathbf{ac}=\mathbf{bc}$, 則 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$. 除 $\mathbf{c}=0$ 外．

1. 因令 $\mathbf{a}=a+a'i$, $\mathbf{b}=b+b'i$, 及 $\mathbf{c}=c+c'i$.

設 $a+a'i=b+b'i$.

則 $a=b$ 及 $a'=b'$ § 225

故 $a+c=b+c$ 及 $a'+c'=b'+c'$, § 178

由是 $(a+c)+(a'+c')i=(b+c)+(b'+c')i$, § 225

即 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$. § 226

2. 設 $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$

則有 $\mathbf{a}+\mathbf{c}+(-\mathbf{c})=\mathbf{b}+\mathbf{c}+(-\mathbf{c})$. 由 1

故 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$. § 226

3 及 4. 此二法則之證明，順次與 1 及 2 相似．

系. 設積爲零,則其因子之一必爲零. 231

由 § 230, 4, 用 § 76 之理,卽得.

複素數之絶對值. 正實數 $\sqrt{a^2+b^2}$ 稱爲 $a+bi$ 之絶對值,以 $|a+bi|$ 表之.故由定義. 232

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例如, $|2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}.$

當 $b=0$ 時,此絶對值之定義化爲 § 63 所述之實數絶對值,對於此定義之幾何解釋,參看 § 239.

二複素數中,亦稱其第一數在數値上小於,等於,或大於其第二數,依其第一數之絶對值小於,等於,或大於第二數而定. 233

如 $2+3i$ 之數値大於 $3+i$.

因 $|2+3i|=\sqrt{13}$ 及 $|3+i|=\sqrt{10}$, 而 $\sqrt{13}>\sqrt{10}$.

定理 1. 二複素數積之絶對值,等於其絶對值之積. 234

令此二數爲 $\mathbf{a}=a+a'i$ 及 $\mathbf{b}=b+b'i$.

因 $\mathbf{ab}=ab-a'b'+(ab'+a'b)i.$ § 226

得 $|\mathbf{ab}|=\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}.$ § 232

但實行此指定演算,則得

$$(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2=(a^2+a'^2)(a^2+b'^2).$$

故 $\sqrt{(ab-a'b')^2+(ab'+a'b)^2}=\sqrt{a^2+a'^2}\cdot\sqrt{b^2+b'^2}.$ § 186

卽 $|\mathbf{ab}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|.$

定理 2. 二複素數和之絶對值,不能超過其絶對值之和. 235

用 § 234 之同一記法.

則 $\sqrt{a^2+a'^2}+\sqrt{b^2+b'^2}\geqq\sqrt{(a+b)^2+(a'+b')^2}.$ (1)

設 $a^2+a'^2+b^2+b'^2+2\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}$

$\geqq a^2+b^2+a'^2+b'^2+2(ab+a'b').$ § 184

$\therefore$ 設 $$\sqrt{(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)} \geqq ab+a'b'.$$ § 178

$\therefore$ 設 $$a^2b^2+a'^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq a^2b^2+a'^2b'^2+2aba'b'$$ § 184

$\therefore$ 設 $$a^2b'^2+a'^2b^2 \geqq 2aba'b'$$ § 178

$\therefore$ 設 $$(ab'-a'b)^2 \geqq 0.$$ (2) § 178

但 (2) 常眞確，因各實數之平方爲正(或 0)故也。故 (1) 常眞確——卽已證明此定理。

如， $$|2+i|=\sqrt{5} \text{ 及 } |1+3i|=\sqrt{10}.$$

但 $$|(2+i)+(1+3i)|=5, \text{ 而 } 5<\sqrt{5}+\sqrt{10}.$$

236 **冪及根.** 1. $a+bi$ 之 n 次冪，書作 $(a+bi)^n$，其意爲 n 個因數各爲 $a+bi$ 者之積。由 § 226, 3 而知其積爲複素積如 $c+di$.

如 § 185 可證明指數定律適用於複素數之乘冪。

2. 設 $(a+bi)^n=c+di$，則稱 $a+bi$ 爲 $a+di$ 之一個 n 次根，而可以 $\sqrt[n]{c+di}$ 表之。

後將證明每一已知複素數，有如此 n 個 n 次根：易言之，卽虛數系中有 n 個不同之數其 n 次冪等於 $c+di$.

例如， $$(1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2})^2=1/2+2i/2-1/2=i,$$
故數 $1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$ 爲 i 之平方根，卽爲 -1 之四次根. -1 之其他三四次個根爲 $-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}$.

237 **總結論.** 數組無再事擴充之必要，因如 §§ 226, 236 所示，虛數系已足供一切基本四法與開方之需要. 雖此外關於數之某種演算，在數學上佔有地位，——其中如 § 140 求數之對數演算，卽爲其一，——然此種演算容納用諸項爲複素數之無窮級數如 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 之定義；且設如此之級數有和，則其和爲一複素數。

複素數之圖示法

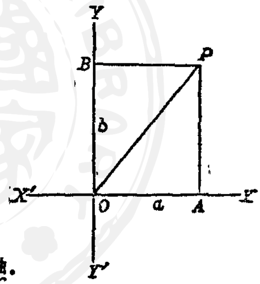
複素數可在平面上用點繪出，其點名爲對應數之圖形. 238

任取二直線 $X'OX$, $Y'OY$ 互相正交於原點 O; 而用一定單位線段 s 以量長度.

1. 用 $X'OX$ 上點 A 表各實數 a, A 與 O 之距離以 s 表之爲 $|a|$ (§ 209). 取 A 於 O 之右或左，依 a 爲正或負而定.

2. 用 $Y'OY$ 上點 B 表各純虛數, bi, B 與 O 之距離爲 $|b|$, 取 B 於 O 之上或下，依 b 爲正或負而定.

3. 用下列作圖法所得之點 P 表各複素數 $a+bi$:



先依 1 及 2 求得 a 及 bi 之圖形 A 及 B, 通過 A 及 B 順次作 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 之平行線，在二線相交處之點 P, 爲 $a+bi$ 之圖形.

今稱 $X'OX$ 爲實數軸，而 $Y'OY$ 爲純虛數軸.

用此法則，使複素數系與平面內一切點之圖成逐一對應之關係 (§ 2). 更得複素數系之二向度次序性質之完全表示法 (§ 223).

觀察一切數有同一虛數部分者之圖形，在 $X'OX$ 之同一平行線上，而有同一實數部分者之圖形，在 $Y'OY$ 之同一平行線上.

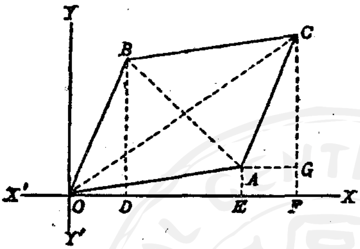
任何複素數之絕對值，爲其圖形與原點之距離. 239

因 § 238 之圖中, OA 及 AP 之長，順次爲 a 及 b, 故 OP 之長爲

$$\sqrt{a^2+b^2} \text{ 或 } |a+bi| \ (\S\ 232).$$

240 二複素數 $\mathbf{a}=a+a'i$, $\mathbf{b}=b+b'i$ 之和及積之圖形,可如下求得:

已知 A 及 B 順次爲 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 之圖形.連結 OA, 及 OB, 且完成平行四邊形 $OACB$, 則 C 爲 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 之圖形.



因作垂線 BD, AE, CF, AG, 則 a, a', b, b' 順次爲 OE, EA, OD, DB 之長, 而三角形 ODB 及 AGC 爲全等形.

今 $OF=OE+EF=OE+OD$ $=a+b$ 就其長.

及 $FC=FG+GC=EA+DB=a'+b'$, 就其長.

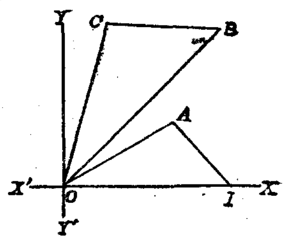
故 C 爲 $a+b+(a'+b')i$ 或 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 之圖形 (§ 226, 1).

當 O, A, B 在一直線時,則作 AC 等於 OB 之長且與 OB 同向,常可得 C.

因 $OC\leqq OA+AC$, 即 $\leqq OA+OB$, 故得 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$.

差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 之圖形,爲和 $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ 之圖形.

已知 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 之圖形爲 A 及 B, 而令 I 表 1 之圖形.連結 OA, OB, IA, 而在 OB 上作三角形 OBC, 與 OIA 相似.且使 OB 繞 O 旋轉至落於 OX 上, OC 落於 OA 上,則 C 爲 $\mathbf{ab}$ 之圖形.



此法則俟後證明,且由此導出作商及乘冪之圖形諸法.

當 $\mathbf{b}=i$ 時, OC 爲以 OA 繞 O (反時針方向)轉 90°.

241 此可將複素數中之恆等關係,轉移爲幾何定理,故虛數可表實在事物之關係.

例如, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2=\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/2$ 表示平行四邊形之對角線互相平分;因 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$ 及 $\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})/2$ 之圖形,爲第一圖中 OC 及 AB 之中點 (§ 240).

第二編　代數

I. 緒論

用文字表數

常數與變數． 代數學中常用文字表任何數．例如公式 242
$ab=ba$, 文字 a 及 b 表任何二數，此公式之意爲：以任何第二數乘任何第一數之積，與以其第一數乘第二數之積相同．

在許多代數討論中，有意義之文字間，例如式 $x+b$ 之二文字 b 及 x 間，如下分別，更覺便利．

第一． 視其一文字 b, 首先假定有特別值任意如吾人所願，而於討論中，自始至終保留之．如此之文字，名爲已知文字或已知數或常數．

第二． 反言之，視其他文字 x 在自始至終討論中，可自由取任何可能之值，且由任何一值變至任何他值者．如此之文字，名爲變數．

未知文字． 但文字亦可用以表示所求值之特殊數．如此 243
之文字，名爲未知文字或未知數．

對於未知文字，不能如對於常數或變數文字，自由如願假定爲任意值．

例如，於方程 $2x-5=0$ 中，x 爲未知字，其值易於求得爲 $5/2$. 在式 $2x-5$ 中，可隨意假定 x 爲任何值，但在方程 $2x-5=0$ 中，則除 $5/2$ 外不能假定 x 爲他值．

244 **文字之選擇.** 文字之選擇，必須限制不可使同一文字，同時代表不同之二數.

慣例用字母之首先文字如 a, b, c 表已知數或常數；而以末後文字如 x, y, z 表未知數或變數.

除單一文字外，有時加以小撇或附碼，如 a', a'', a''' 讀作"a 第一""a 第二""a 第三"；及 a_0, a_1, a_2, 讀作"a 附零""a 附 1","a 附 2".

245 **文字計算.** 常以文字 a, b, c 表數時，只能用算術演算，表示其連合之結果. 例如加 b 於 a 之意，僅為成式 $a+b$, 故此式稱為 a 及 b 之和. 同法，以 b 乘 a 之積為式 ab.

如此所得之文字式表數，可用算術演算法計算之. 但在此種計算中，不能直接用於式之值，因其值未知故也. 今只能以演算之適當符號連結諸式，而用種種變化使其結果之形式化簡，此種變化須不影響於其結果之值，不必顧其值如何.

今於 § 68 已知一切變化能施於和及積之形式而不影響其值者，皆表現於下列公式：

1. $a+b=b+a$. 2. $a+(b+c)=(a+b)+c$.

3. $ab=ba$. 4. $a(bc)=(ab)c$. 5. $a(b+c)=ab+ac$.

故可說公式 1 至 5, 皆為加法及乘法之定義，或為所需，或能用以連結文字式時. 且如此之事，在算術上其餘演算亦眞.

例如，加 $2x+3y$ 及 $4x+5y$，其意僅爲將式 $2x+3y+(4x+5y)$，用公式 1 至 5，且加其已知數，以求其所能化之最簡式，於是得

$$2x+3y+(4x+5y)=2x+3y+4x+5y \qquad \text{由 } 2$$
$$=2x+(3y+4x)+5y=2x+(4x+3y)+5y \qquad \text{由 } 2 \text{ 及 } 1$$
$$=2x+4x+3y+5y=(2x+4x)+(3y+5y) \qquad \text{由 } 2$$
$$=(2+4)x+(3+5)y=6x+8y, \text{即所求之和.} \qquad \text{由 } 3 \text{ 及 } 5$$

計算之基本法則

按照以上所述，可視加法，減法，乘法，除法，乘方，及開方 246
爲用下列法則及公式在代數學上所定之義，故稱之爲計算之基本法則.

在此種公式中——於本書第一編中爲各類數所設立者——文字 a, b, c 表任何有限數，而相等記號 $=$，意謂"代表同數".

加法. 加 b 於 a 之結果爲式 $a+b$. 稱此式爲 a 及 b 之 247
和. 此式關於 a 及 b 之任何已知值有一值，且祇有一值. 在特例，$a+0=0+a=a$.

加法爲交換及結合之演算；即適合於二定律 (§§ 34, 35)： 248

$$a+b=b+a, \quad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

下列相等之法則，在和亦眞 (§ 39)： 249

設 $a=b$，　則 $a+c=b+c$.

設 $a+c=b+c$，　則 $a=b$.*

減法. 此爲加法之反求 (§ 55). 已知任何二數 a 及 b，常 250

* 以後將知當 c 爲無限時此法則無效.

有一數且僅有一數能加 b 而得 a. 稱此數為自 a 減 b 而得之餘數,而以式 $a-b$ 表之. 故由定義

$$(a-b)+b=a.$$

在特例,可以 $-b$ 代 $0-b$.

251 **乘法.** 以 b 乘 a 之結果為式 ab. 稱 ab 為以 b 乘 a 之積. 此式關於 a 及 b 之任何已知數有一値,且只有一値.

在特例, $a\cdot 0=0\cdot a=0$, 無論 a 可有如何有限値.

當 b 為正整數時, $ab=a+a+\cdots\cdots$ 至 b 項.

252 乘法為交換及結合之演算,而關於加法為分配演算;即適合於三定律 (§§ 45—47):

$$ab=ba,\quad a(bc)=(ab)c,\quad a(b+c)=ab+ac.$$

253 下列相等之法則,在積亦眞. (§§ 75, 76):

$$\text{設}\ a=b,\qquad \text{則}\ ac=bc,$$

$$\text{設}\ ac=bc,\qquad \text{則}\ a=b,\qquad \text{除}\ c=0\ \text{外}^{*}.$$

$$\text{設}\ ac=0,\qquad \text{則}\ a=0,\qquad \text{或}\ c=0.$$

254 **除法.** 此為乘法之反求 (§ 124). 已知任何二數 a 及 b, 除 b 為 0 外, 常有一數且僅有一數能以 b 乘之而得 a. 稱此數為以 b 除 a 所得之商, 而以式 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 表之. 故由定義

$$\left(\frac{a}{b}\right)b=a,\quad \text{除}\ b=0\ \text{外}.$$

255 **乘方.** 此為屢次乘法之一種情形, 以 a^n 表 $a\cdot a\cdots\cdots$ 至 n 因數之連乘積, 而稱之為 a 之 n 次冪.

* 以後將知當 c 為無限時此法則無效.

在符號 a^n 中，n 名爲指數，而 a 爲其底。

乘方或乘冪適合於下列三定律，名爲指數定律 (§ 185)： 256

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

下列相等之法則，在乘冪亦眞確 (§ 184)： 257

設 $a=b$, 則 $a^n=b^n$.

設 $a^2=b^2$, 則 $a=b$, 或 $a=-b$.

此第二法則及特別情形之一般法則，俟後證明。

開方。 開方爲乘方相反算法之一種 (§ § 138, 140). 已知 258
任何正數 a, 必有一正數且僅有一正數其 n 次冪等於 a. 稱此數爲 a 之 n 次主根，而以 $\sqrt[n]{a}$ 表之。當 $n=2$ 時，則以 $\sqrt{a}$ 表之。故由定義

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

但此正數 $\sqrt[n]{a}$, 並非 n 次冪等於 a 者之惟一數。反之，有 a 個不同之數，其 n 次冪等於 a, 俟後證明。且此不但當 a 爲正時眞確，即 a 爲任何他種之數時亦眞。

當 a 爲正數而 n 爲奇數時，則 $-a$ 之 n 次主根爲 $-\sqrt[n]{a}$.

以上法則之逆。 吾人稱上述法則之若干種爲相等法則； 259
餘者可稱爲結合法則。

注意凡結合法則及相等法則，關於和爲可逆的，但相等法則關於積及乘冪則並不完全可逆。

例如，依分配定律 $a(b+c)=ab+ac$, 此爲結合法則之一，玆可以 $ab+ac$ 代 $a(b+c)$, 或反之，以 $a(b+c)$ 代 $ab+ac$.

其次,設 $a=b$, 常可決定 $a+c=b+c$, 且反之,設 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

但設 $a=b$, 雖常可決定 $ac=bc$, 然反之, 設 $ac=bc$, 須已知 c 不為 0 始能決定 $a=b$.

由 $a=b$ 雖常可得 $a^2=b^2$, 然由 $a^2=b^2$, 則僅可得 $a=b$ 或 $a=-b$.

260 **不等法則.** 公式 $a\neq b$ 之意,為"a 不等於 b".

二已知不等實數 a 及 b, 其一數為代數的較大, 而他數為代數的較小 (§ 62).

設 a 較大而 b 較小, 寫作

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

在特例, $a>0$ 或 $a<0$, 依 a 為正或負而定.

261 關於任何已知實數 a, b, c, 有下列法則 (§ § 178, 184):

1. 設 $a=b$ 及 $b=c$, 則 $a=c$.

   設 $a=b$ 及 $b<c$. 則 $a<c$.

   設 $a<b$ 及 $b<c$, 則 $a<c$.

2. 依 $a<,=,$ 或 $>b$.

得 $a+c<,=,$ 或 $>b+c$.

及 $ac<,=,$ 或 $>bc$, 設 $c>0$;

但 $ac>,=,$ 或 $<bc$, 設 $c<0$.

3. 當 a 及 b 為正數時.

依 $a<,=,$ 或 $>b$.

得 $a^n<,=,$ 或 $>b^n$.

及 $\sqrt[n]{a}<,=,$ 或 $>\sqrt[n]{b}$.

如前所示, 2 及 3 內之法則只含 = 號者,亦適用於虛數. 下法對於虛數亦眞: 設 $a=b$ 及 $b=c$, 則 $a=c$, 故可稱為相等之一般法則.

增廣代數符號

前諸節所說明符號之意義外，尙有下列符號亦爲代數學 262
中所常用者：

1. 各種聚合記號．如前所用之括號（ ）及［ ］，｛ ｝，指示其所包括之式，作爲單一符號之用．

2. 複號 $\pm$，讀作"加或減"及 $\mp$ 讀作"減或加"．

例如，$a\pm b\mp c$，其意爲 $a+b-c$ 或 $a-b+c$，其在上記號須同時讀出，在下記號亦然．

3. 符號 $\therefore$ 表故字．

4. 符號……表類推或等等．

5. 又，$\because$ 表因字；$\ngtr$ 表不大於；$\nless$ 表不小於；$\gtrless$ 表大於或小於．

代 數 式

依上述演算，聯合文字或文字與數所成之任何式，名爲**代** 263
數式．

註．式中所含演算之次數，可爲有限，如在 $1+x+x^2$ 者是，或爲無限，如在 264
$1+x+x^2\cdots\cdots$，假定爲繼續無窮盡者是．在第一種情形，稱其式為有限；在第二種情形，則爲無限．今將僅就無限式而論之．

慣例將代數式依其變數（或未知數）文字在式中之情形分 265
類如下：

設一式中不含變數文字所指示之除法，則此式名爲**整式**， 266
設其含之，則名爲**分式**．

例如，設 x 及 y 爲變數文字 但 a, b, c, 爲常數。

則 ax^2+bx+c 及 $\frac{y}{b}+\sqrt{x}$ 皆爲整式，

但 $y+\frac{1}{x}$ 及 $\frac{2+x}{1-x}$ 皆爲分式。

267 設一式中不含變數文字所指示之方根者則此式名爲**有理式**；設其含之，則爲**無理式**。

例如，$a+\sqrt{bx}$ 爲有理式，但 $\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$ 爲無理式。

268 **註**。1. 應用此種名稱於一式，須假定其已化爲最簡式。例如，$\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 爲有理式，因其能化爲有理式 $x+y$ 故也。

2. 整式，分式，等等名稱，與其用於式中之數值無關。

例如，$x+2$ 爲有理整式。但祇可於 x 本身表整數時始表整數。此式關於 x 之每一分數值，則表一分數，而關於 x 之每一無理數值，則表一無理數。

269 當一代數式 A 由＋或－諸記號聯合若干部分而成時，則此諸部分連帶其前之符號，名爲 A 之**諸項**。

例如，下式：

$$a+a^2c-(b+c)+[d+e]-\{f+g\}+\overline{h+i}\left.\begin{matrix}+j\\+k\end{matrix}\right|-\frac{l+m}{n+p}.$$

之諸項爲 a, a^2c, $-(b+c)$ 等等，其諸項本身由若干項而成者，皆以括號或其他聚合記號括之（§ 262, 1）。

270 整式名爲**單項式**，**二項式**，**三項式**，及一般**多項式**，依其項數而定。

271 在任何單項式中，常數因數之積，名爲變數因數之積之**係數**。

例如，$4ab^2x^3y^4$ 中，$4ab^2$ 爲 x^3y^4 之係數。

同時應稱任何因數爲積之其餘部分之係數。

每一單項式中，係數須先書。當係數不書時則爲 1，例如 1 爲 x^2y 之係數。

同類項爲諸項之至多僅有係數不同者。 272

例如，$-2x^2y$ 及 bx^2y 爲同類項。

單項式之次數，爲其式中所討論變數之指數和。 273

例如，設變數爲 x 及 y，則 $4ab^2x^3y^4$ 之次數爲七；ax^3 之次數爲三，b 之次數爲零（參看 § 595）.

多項式之次數，爲其最高次項之次數；而任何整式之次 274
數，爲可化成最簡多項式之次數。

例如，$ax^3+bx^2y+cy^3+dx^2+ey+f$ 之次數爲三；而 $(x-1)(x-2)$ 之次數爲二。

欲求便利，可將多項式之諸項依其次數之次序遞升或遞 275
降排列，且設有同次之若干項，則依其一變數之次序排列。

此次序可觀察 § 274 中多項式而知之。

多項式當其諸項爲同次時，名爲**齊次式**。 276

例如，$5x^3-2x^2y+4xy^2+y^3$ 爲齊次式。

一變數之多項式. 含一變數如 x 之有理整式，最爲特別 277
重要。其在代數學中所任之工作，一如整數之於算術。實際上將發見其具有若干性質類似於整數之性質。此種之式，常能化爲 x 之多項式，例如下列諸式之一：

$$a_0x+a_1,\quad a_0x^2+a_1x+a_2,\quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\cdots,$$

或可化成下式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

式中 n 表此式之次數,而點線表作成項 $n+1$ 全部所需要之諸項.

係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots$, 表常數,不論任何種類皆可.在特例,除 a_0 外皆可爲 0, 此時多項式名爲不全式.

所宜注意者,各項中 a 之附碼與 x 之指數之和,爲此多項式之次數.

例如, $5x^6-x^3+2x^2+x-3$ 中, 有 $n=6$, $a_0=5$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=-1$, $a_4=2$, $a_5=1$, $a_6=-3$.

278 **函數**. 一代數式如 $x+2$ 或 x^2+y 之含一或多變數,其本身亦爲變數甚明.稱 $x+2$ 爲 x 之函數,因其值依 x 之值而變,關於 x 之每一值,對應於 $x+2$ 之一定值故也.

同理,稱 x^2+y 爲 x 及 y 之函數,一般可稱每一代數式爲其所含一切變數之函數.

279 以前所定 x, x 及 y 等等之整式,分式,有理式或無理式,亦可稱爲 x, x 及 y 等等之整函數,分函數,有理函數或無理函數.

280 x 之已知函數,常以符號 $f(x)$ 表之,讀作"x 之函數".函數之對應於 $x=0, 1, b$, 之值者,以 $f(0)$, $f(1)$, $f(b)$ 表之.

例如,設 $f(x)=x+2$, 則 $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(b)=b+2$. 一般設 $f(x)$ 表含 x 之任何已知式,則 $f(b)$ 表用 b 代式中 x 所得之結果.

處置 x 之二或多函數時,可用 $f(x)$ 表其一,用相似符號如 $F(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 表其他.

由同法,可以符號 $f(x, y)$ 表二變數 x 及 y 之函數,餘依此類推.

習　題　I.

1. $x^2yz^3+2x^5y^4z^6+3x^7y^2z^8$ 順次關於 x, y 及 z，其次數如何？關於 y 與 z 連合則如何？關於 x, y, z 連合則如何？

2. $(x+1)(2x^2+3)(x^4-7)$ 之次數如何？

3. 已知 $3x^7+x^6-4x^4+x^3-12$，依 § 277 之記法，n, a_0, a_1,……之值如何？

4. 設 $f(x)=2x^3-x^2+3$，求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(8)$.

5. 設 $f(x)=(x^2-3x+2)/(2x+5)$，求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(6)$.

6. 設 $f(x)=x+\sqrt{x}+3$，求 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$.

7. 設 $f(x)=2x+3$，則 $f(x-2)$ 如何？$f(x^2+1)$ 如何？

8. 設 $f(x, y)=x^3+x-y+8$，求以下各值：

$$f(0, 0),\ f(1, 0),\ f(0, 1),\ f(1, 1),\ f(-2, -3).$$

恆等方程或恆等式

設 A 表與 B 相同之式，或可用計算法則（§§ 247—258）變形為 B，則稱 A 恆等於 B. 281

記法 $A\equiv B$ 之意為"A 恆等於 B".

例如，$x(x+2)+4$ 恆等於 $x^2+2(x+2)$.

因　$x(x+2)+4\equiv(x^2+2x)+4\equiv x^2+(2x+4)\equiv x^2+2(x+2)$. §§ 248, 252.

稱 $A\equiv B$ 為恆等方程或恆等式. 故

恆等式 $A\equiv B$ 者，敍述第一式 A 可用計算法則變形為 B 也. 282

在特例，恆等式如 283

$$3-8+2\equiv4+7-14$$

中無文字，稱為數目恆等式.

下列常用定理,隱含於 § 282 中。

284　**定理.** 設含 x 之二多項式恆等,則其對應係數相等,即

設 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$,

則　$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\cdots,a_n=b_n$.

因如係數不同,則二多項式亦不同,而第一式不能用計算方法變形為第二式。

例如,設 $ax^2+3x-3\equiv 2x^2+bx+c$,則 $a=2,\ b=3,\ c=-3$.

設係數 $a_0,a_1,\cdots,b_0,b_1,\cdots$ 不為常數,而表不含 x 之代數式,則從恆等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots$ 而得 $a_0\equiv b_0,\ a_1\equiv b_1\cdots$,易言之,即對應係數 a_0 與 b_0 等等所表之代數式皆為恆等.

285　二恆等多項式,其諸項為有常數係數之二或多變數乘冪之積者,與上述之相似定理亦有效.

例如,設 $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+\cdots$

$$\equiv a'+b'x+c'y+d'x^2+e'xy+f'y^2+\cdots,$$

則　$a=a',\ b=b',\ c=c',\ d=d',\ e=e',\ f=f',\cdots$.

286　**恆等方程之性質.** 在代數計算中,常用下列定理:

定理 1. 設 $A\equiv B$,則 $B\equiv A$.

何則,A 變形為 B 之方法,為可逆,因其僅含結合法則故也 (§ 259).但其逆方法係 B 變形為 A.

例如,可用逆算法將 § 281 之例變形.

因　$x^2+2(x+2)\equiv x^2+(2x+4)$

$$\equiv(x^2+2x)+4\equiv x(x+2)+4, \qquad (\S\S\ 248,\ 252).$$

定理 2. 設 $A\equiv C$ 及 $B\equiv C$,則 $A\equiv B$.

因 $B\equiv C$,故有 $C\equiv B$.　　由理定 1

因 $A\equiv C$ 及 $C\equiv B$,故 $A\equiv B$.

例如因 $$x(x+2)+4=x^2+2x+4,\qquad \S\S\ 248,252$$

及 $$x^2+2(x+2)=x^2+2x+4,\qquad \S\S\ 248,252$$

故有 $$x(x+2)+4=x^2+2(x+2).$$

定理 3. 於恆等式之二邊施行相同演算，仍得恆等式。

此由 §§ 249, 253, 257, 相等之法則而得。

例如，設 $A=B$，則 $A+C=B+C$，餘類推。

證恆等式. 欲證明二已知式 A 及 B 成爲 $A\equiv B$，無須實行將 A 變形爲 B. 如 § 286 之 2 所示，證明設能化 A 及 B 成同一形式 C 爲已足。 287

下之定理，供給其他最常用方法。

設從假定恆等式 $A\equiv B$，能用可逆的方法導出已知恆等式 $C\equiv D$，則此假定恆等式 $A\equiv B$ 爲眞。 288

因此方法爲可逆的，故能從 $C=D$ 導出 $A=B$. 因 $C=D$ 爲眞，故 $A=B$ 亦眞。

例。證明 $a+b-b$ 恆等於 a.

假定 $$a+b-b=a. \qquad (1)$$

則得 $$[(a+b)-b]+b=a+b. \qquad (2)\ \S\ 249$$

但 (2) 爲已知恆等式 (§ 250)，而 (1) 至 (2) 之步驟爲可逆的. 故 (1) 爲眞。

若從 $A=B$ 至 $C=D$ 之方法不可逆，卽斷定結論 $A=B$，殊不可靠，此可舉例說明：

設假定 $$x=-x. \qquad (1)$$

由此得 $$x^2=(-x)^2. \qquad (2)$$

其 (2) 爲眞，但不能由此以證明 (1) 爲眞，因 (1) 至 (2) 之步驟不可逆故也 (§ 259). 實則 (1) 爲謬誤。

恆等與相等. 最須記憶者，恆等式原本爲式之關係，比其爲值之關係較當. 同時 289

設 A 及 B 皆爲有限式，而 $A\equiv B$，則對於其式中所有文字之一切值，A 及 B 有等值。

因依假設，可應用法則 $a+b=b+a$ 等有限次將 A 變形為 B. 但不論 a 及 b 之值如何，$a+b$ 及 $b+a$ 有等值，餘類推。

此定理限於有限式之理由見後。

反之，設 A 及 B 關於 A 及 B 中諸文字之一切值有等值，則 $A=B$，此理俟後證明。

故在有限式之情形，常可用值之相等記號 $=$，代式之恆等記號 $\equiv$，而當 $A\equiv B$ 時，寫作 $A=B$. 後面均如此通用。

符號 $=$ 之如此用法，須與 § 325 所述者小心分別。

命題之轉換

290 考察有下列形式之命題：

$$\text{設 } A, \text{ 則 } B, \tag{1}$$

或完全表明：設某敍述 A 為眞，則他敍述 B 亦眞。

例如，設一圖形為正方形，則此圖形為矩形。

設 $x=1$，則 $x-1=0$.

291 交換 (1) 之假設 A 及結論 B，得逆命題

$$\text{設 } B, \text{ 則 } A.^{*} \tag{2}$$

例如，適所述命題之逆為：

設一圖形為矩形，則此圖形為矩方形。

設 $x-1=0$，則 $x=1$.

292 如上第一例解釋，一眞命題之逆可不眞。

---

* 一命題如設 A 及 B，則 C，有二重假設，則有二逆：卽，設 C 及 B，則 A，及設 A 及 C，則 B. 同理，設有三重假設，則有三逆；餘類推。

但當從假設 A 導出結論 B 之理論方法爲可逆時，則眞命題：設 A 則 B 之逆常眞；蓋逆其方法，可從 B 導出 A，易言之，可證明設 B 則 A 故也。 293

用可逆之方法證明逆命題，用此以證明原命題之法則，代數學中常用之。此法之說明已述於 § 288.

當一命題：設 A 則 B 爲眞時，則稱 A 爲 B 之**充足條件**，而 B 爲 A 之**必要條件**。 294

例如，命題　設 $x=1$，則 $(x-1)(x-2)=0$ 爲眞，故 $x=1$ 爲 $(x-1)(x-2)=0$ 之充足條件，而 $(x-1)(x-2)=0$ 爲 $x=1$ 之必要條件。

當命題設 A 則 B，及其逆設 B 則 A 二者皆眞時，則稱 A 爲 B 之充足及必要條件；而 B 亦爲 A 之充足及必要條件。 295

例如，(1) 設 $x=1$ 則 $x-1=0$，及 (2) 設 $x-1=0$，則 $x=1$ 二者皆爲眞，則 $x=1$ 爲 $x-1=0$ 之充足及必要條件；而 $x-1=0$，亦爲 $x=1$ 之充足及必要條件。

II. 基 本 演 算

加 法 與 減 法

和與餘． 令 A 及 B 表任何二代數式，其 A 及 B 之和及自 A 減 B 所得之餘，意謂式 $A+B$ 及 $A-B$ 能用 §§ 247–258 之計算法則化成之最簡式。 296

幾個常用公式． 完成此種簡化法，下列公式皆甚有用，即： 297

1. $a+b-c=a-c+b$.　2. $a-(b+c)=a-b-c$.

3. $a+(b-c)=a+b-c$.　4. $a-(b-c)=a-b+c$.

5. $a(b-c)=ab-ac$.

以上諸公式，可稱爲交換，結合及分配諸律對於減法之擴張.

可用下列之法則證 1 及 2 (§249):

設加同式於某二式，其結果相等，則此二式相等.

1. $a+b-c=a-c+b.$

因加 c 於其各邊之結果皆爲 $a+b$.

即，$[(a+b)-c]+c=a+b,$ §250

及 $(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b.$ §§248, 250

2. $a-(b+c)=a-b-c.$

因加 $b+c$ 於其各邊之結果皆爲 a.

即，$[a-(b+c)]+(b+c)=a.$ §250

及 $a-b-c+(b+c)=a-b-c+c+b$

$=a-b+b=a.$ §§248, 250

3, 4, 5 可如下證之:

因 $b=(b-c)+c.$ §250

故有，

3. $a+b-c=a+[(b-c)+c]-c$

$=a+(b-c)+c-c$ §248

$=a+(b-c).$ 由 1 及 §250

4. $a-b+c=a-[(b-c)+c]+c$

$=a-(b-c)-c+c$ 由 2

$=a-(b-c).$ §250

5. $ab-ac=a[(b-c)+c]-ac$

$=a(b-c)+ac-ac$ §252

$=a(b-c).$ 由 1 及 §250

由 §248 及公式 1－4，即知一組加法與減法可不拘其任何次序演算之.

例如，　$a-b+c-d+e=a+c-b-d+e,$　由 1

$=a+c-(b+d)+e=a+c+e-(b+d),$　由 2 及 1

$=a+c+e-b-d.$　由 2

記號法則.　此"記號法則"，爲上述公式 3, 4, 5 之特殊情 298
形.

1.　$a+(-c)=a-c.$　　2.　$a-(-c)=a+c.$

3.　$a(-c)=-ac.$　　4.　$(-a)(-c)=ac.$

於 § 297 之 3, 4, 5, 順次使 $b=0$, 逕得 1, 2, 3.

4 可如下證之:

$$(-a)(-c)=(-a)(0-c)=(-a)0-(-a)c \qquad \text{§ 297, 5}$$

$$=0-(-ac)=ac. \qquad \text{由 2 及 3}$$

括號法則.　從公式 § 248 及 § 297 之 2, 3, 4, 得下列重 299
要法則:

括號之前用＋號者，可撤去之；括弧之前用－號者，設變括號中各項之記號，亦可撤去之.

括號可依同一法則插入.

例如，　$a+b-c-d+e=a+b-(c+d-e).$

欲將含括號中又有括號之式化簡，可屢次應用上法於若干層括號.

例如，

$$a-\{b-[c-(d-c)]\}=a-b+[c-(d-e)]$$

$$=a-b+c-(d-e)$$

$$=a-b+c-d+e.$$

括號當然可依任何順序撤去；但先從最外一層起（如上例），可避免變換任何符號多於一次.

300　**整式加減法則.**　從§§248, 252, 297 之公式，導出下列法則:

欲加(或減)二同類項，可加(或減)其係數，而附書其公共文字於結果.

欲加二或若干多項式，可接連書其一切項不必變記號，再合併其同類項而化簡.

欲將一多項式從他式減去，可變其減式內各項之記號而加之.

例 1.　加 $4ab^2$ 及 $-5ab^2$; 又從 $4ab^2$ 減 $-5ab^2$.

$$4ab^2+(-5ab^2)=(4-5)ab^2=-ab^2; \qquad \S\ 248$$

及

$$4ab^2-(-5ab^2)=[4-(-5)]ab^2=9ab^2. \qquad \S\ 297,\ 5$$

例 2.　加　$x^3+ax^2y+2ab^3$ 及 bx^2y-5ab^3.

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3)\\&=x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3 && \S\ 299\\&=x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3 && \S\ 248\\&=x^3+(a+b)x^2y-3ab^3. && \S\S\ 252,\ 297,\ 5\end{aligned}$$

例 3.　從 $a^3+a^2b+b^3$ 減 $2a^2b-ab^2+b^3$

$$\begin{aligned}&a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3)\\&=a^3+a^2b+b^3-2a^2b+ab^2-b^3 && \S\ 299\\&=a^3-a^2b+ab^2. && \S\S\ 252,\ 297\end{aligned}$$

當所加(或減)之多項式中有同類項時，則將此諸項排列於直行，而依直行加(或減)之較便.

例 4.　加 $a^4+a^3b-2a^2b^2-b^4$ 及 $ab^3+3a^2b^2-a^3b$, 且從其結果減 $5a^2b^2-ab^3$.

$$\begin{array}{rrrrr}a^4&+a^3b&-2a^2b^2&&-b^4\\&-a^3b&+3a^2b^2&+\ ab^3&\\&&-5a^2b^2&+\ ab^3&\\\hline a^4&&-4a^2b^2&+2ab^3&-b^4\end{array}$$

習　題　II.

1. 加 $4ax^2y$, $-6ax^2y$, $5bx^2y$, 及 $-3bx^2y$.
2. 加 $7a^2+2a-b^2$, $3a+b^2-2a^2$, 及 $b^2-4a-4a^2$.
3. 加 $3x^2-5x+6$, x^2+2x-8, 及 $-4x^2+3x-7$.
4. 加 $4a^3+a^2b-5b^3$, $\frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b$, $\frac{1}{3}a^3+10b^3$,
   及 $6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3$.
5. 從 $3a+b-c$ 減 $4a-2b+6c$.
6. 從 x^3+6x^2+5 減 $2x^2-5x+7$.
7. 須以何式加於 a^3+5a^2b 則得 a^3+b^3?
8. 自 $x^3+y^3-6x+5y$ 減 $-2x^2-6x+7y-8$ 及 x^3+2x^2-5y+9 之和。
9. 化簡 $-(a+b)+\{-a-(2a-b)\}-6(a-4b)$.
10. 化簡 $6x-\{4x+[2x-(3x+\overline{5x+7}-1)+3]-8\}$.
11. 化簡 $2a-[4a-c+\{3a-(4b-c)-(b+3c)\}-6c]$.
12. 從 $z-[3x+(y+5z)]$ 減 $x-(3y+2z)$.
13. 須加 x^2+8x+5 於何式則得 x^3-7?
14. 須加 x^4-9x^2+3y 於何式則得 y^2+x-7?

乘　法

積. 二代數式 A 及 B 之積，意謂式 AB 能以計算法則化成之最簡式. 301

在如此化簡法中，特別重要者爲:

1. 交換，結合，及分配定律.
2. 指數定律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.
3. 記號法則:

$$a(-b)=(-a)b=-ab;\ (-a)(-b)=ab.$$

整式乘法. 1. 欲求二單項式之積，可以其數字因數之 302

積乘其文字因數之積，再依同文字乘冪之指數相加以化簡其文字因數之積.

依二單項式有同號或異號，而以＋號或－號予其結果.

2. 欲求單項式或多項式乘多項式之積，可以乘式之各項乘被乘式之各項，而將其所得之積相加.

第一法則從交換及結合定律及指數定律而得. 第二法則從分配定律而得.

例如，
$$(a+b+c)(m+n)=(a+b+c)m+(a+b+c)n$$
$$=am+bm+cm+an+bn+cn.$$

第一法則亦可應用於二個以上單項式之積. 當單項式具－號者爲奇數式時，其積之號爲－，否則爲＋.

二個以上多項式之積，可屢次應用第二法則求之.

例 1. 求 $-4a^2b^2x^3$, $2bx^4$, 及 $-3a^3x$ 之積.

$$-4a^2b^2x^3\cdot 2bx^4\cdot -3a^3x=24a^2b^2x^3bx^4a^3x=24a^5b^3x^8.$$

例 2. 求 $a-2b$ 及 $ab-b^2+a^2$ 之積.

爲便利計，依 a 之降冪排列此二因式，而擇其簡因式作乘式. 則有

$$(a^2+ab-b^2)(a-2b)=a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3$$
$$=a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.$$

303 關於任何文字(或文字組)之積之次數，爲關於此文字(或文字組)之諸因數次數之和.

此由 § 302, 1 而得. 實則在任何積中最高次之項，爲其因式中最高次項之積.

例如，x^2+1 及 x^3-1 之次數順次爲二及三，而其積 $(x^2+1)(x^3-1)$ 或 $x^5+x^3-x^2-1$ 之次數爲五.

當二因式爲齊次式(§ 276)時,其積爲齊次式. 304

因設各因式之一切項皆爲同次,則以一因式之一項乘他因式之一項,所得之積皆爲同次.故此諸積之和爲一齊次多項式.

計算之排列. 當二因式皆爲 x 或其他單一文字之多項式,或二者皆爲二文字之齊次函數時,則如下例排列計算較便. 305

例 1. 以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & -\ x^2 & & +5 & & \\
x^2 & +\ x & -3 & & & \\
\hline
2x^5 & -\ x^4 & & +5x^2 & & \\
 & 2x^4 & -\ x^3 & & +5x & \\
 & & -6x^3 & +3x^2 & & -15 \\
\hline
2x^5 & +\ x^4 & -7x^3 & +8x^2 & +5x & -15
\end{array}
$$

依 x 之降冪(或升冪)排列二因式,而置乘式於被乘式之下.

當即將對應於乘式若干項之"部分積"書於分離各列,令其同類項即同次項皆置同行.

最後依各行將其同類項相加.

例 2. 以 $2y+x$ 乘 x^2-y^2+2xy.

$$
\begin{array}{rrrr}
x^2 & +2xy & -y^2 & \\
x & +2y & & \\
\hline
x^3 & +2x^2y & -\ xy^2 & \\
 & 2x^2y & +4xy^2 & -2y^3 \\
\hline
x^3 & +4x^2y & +3xy^2 & -2y^3
\end{array}
$$

在此情形,二因式皆爲 x 及 y 之齊次函數.

依 x 之降冪即 y 之升冪排列二因式,而後演算如例 1.

分離係數法 在 § 305 例 1 之計算說明中,諸項之排列,其位置足以表示其所含 x 之乘冪如何.實際應用,可略去 x 而僅書其係數以簡約其演算.當已知多項式有數字係數時,此法頗有價值. 306

設其中有一多項式爲不完全,則須以係數0表其每一缺項.

例。以 x^3+3x^2-2 乘 x^3-3x^2+2.

$$
\begin{array}{l}
1-3+0+2\\
\underline{1+3+0-2}\\
1-3+0+2\\
\quad 3-9+0+\ 6\\
\qquad\quad \underline{-2+\ 6-0-4}\\
1+0-9+0+12-0-4
\end{array}
$$

排列計算如 § 305 例 1，但僅書其係數，以 0 係數表其缺項。

略去其對應於乘式 0 項之部分積．在末後結果中塡入 x 之合宜方冪——由 x^6 始，因其諸因數次數之和爲六——卽得所求之積爲 $x^6-9x^4+12x^2-4$.

積之次數六，亦可由其結果 $1+0-9+0+12-0-4$ 之項數爲七得之，(§ 277).

此法名爲分離係數法。不但應用於單一文字之多項式，——二者皆依此文字之降冪或升冪排列——亦能應用於二文字之齊次式。蓋因排列如此二多項式，依其一文字之降冪，同時亦依他文字之升冪，故任何係數之位置，將指示其二文字雙方之乘冪如何。

307　分離係數法導出之公式．　試考下例。

例 1．證明下列恆等式爲眞。

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5.$$

$$
\begin{array}{l}
1+1+1+1+1\\
\underline{1-1}\\
1+1+1+1+1\\
\quad \underline{-1-1-1-1-1}\\
1+0+0+0+0-1
\end{array}
$$

將左邊指示之乘法，用分離係數法實行，而得積之係數依 a 之降冪且依 b 之升冪排列．

預知其積之次數爲五，此亦可由其結果中項數爲六而知之，故其積爲

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5，\text{或}\ a^5-b^5.$$

例 2．證明下列恆等式爲眞。

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3. \tag{1}$$

$$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^4-b^4. \tag{2}$$

如例 1 正確進行，得

$$\begin{array}{l} 1-1+1 \quad (1) \\ \underline{1+1} \\ 1-1+1 \\ \underline{\quad 1-1+1} \\ 1+0+0+1, \text{ 即 } a^3+b^3. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1-1+1-1 \quad (2) \\ \underline{1+1} \\ 1-1+1-1 \\ \underline{\quad 1-1+1-1} \\ 1+0+0+0-1, \text{ 即 } a^4-b^4. \end{array}$$

由上諸例中所說明之法則，可證明下列恆等式爲眞，以前諸例不過爲其特殊情形耳，即：

對於 n 之每一正整數值，有 308

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

對於 n 之每一正奇數值，有 309

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

而對於 n 之各正偶數值，有 310

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

二項式之乘冪. 屢用乘法可計算 $a+b$ 之順次諸乘冪. 311 此種乘法可用分離係數法演之.

因其乘式之係數常爲 $1+1$，故在每一乘法中，只須記其部分積及其和爲已足. 因得

$$\begin{array}{lll} (1) & 1+1 & \text{即 } a+b \\ & \underline{\quad 1+1} & \\ (2) & 1+2+1 & \text{即 } a^2+2ab+b^2 \qquad =(a+b)^2. \\ & \underline{\quad 1+2+1} & \\ (3) & 1+3+3+1 & \text{即 } a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad =(a+b)^3. \\ & \underline{\quad 1+3+3+1} & \\ (4) & 1+4+6+4+1 & \text{即 } a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \qquad =(a+b)^4. \end{array}$$

觀察各乘法中，其第二部分積之係數爲其第一部分積之係數向右移一位，故當加此二部分積之係數而得其次乘冪之

係數時，只須應用下列法則：

312 已知一乘冪之任何係數，以其前一係數加之；其和卽爲其次乘冪中之對應係數.

其次乘冪之一切係數，除首項末項外，皆可用此法得之．此首項末項之係數爲 1 及 1.

例如，(4) 之係數對應於 (3) 之 3, 3, 1 者爲 3+1 或 4, 3+3 或 6, 1+3 或 4.

應用此法於 (4)，得 4+1 或 5, 6+4 或 10, 4+6 或 10, 1+4 或 5. 故

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

$a+b$ 之任何已知乘冪之係數，顯然可由屢用此法得之。

例. 試順次求 $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, $(a+b)^8$.

313 **一次兩二項因式之積.** 學者須使自己慣於用觀察法以求此種之積．今有

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab. \tag{1}$$

$$(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)=a_0b_0x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_1b_1. \tag{2}$$

乘積 (1) 中，x 之係數爲 a 及 b 之和，而末項爲其積.

乘積 (2) 中，其首項及末項之係數，爲其因式首二係數及末二係數之積，而中項係數爲"交錯乘積" a_0b_1 及 a_1b_0 之和。

例 1. 求 $(x+5)(x-8)$ 之積。

$$(x+5)(x-8)=x^2+(5-8)x-40=x^2-3x-40.$$

例 2. 求 $(x+3y)(x+10y)$ 之積.

$$(x+3y)(x+10y)=x^2+(3+10)xy+30y^2=x^2+13xy+30y^2.$$

例 3. 求 $(2x+3)(4x+7)$ 之積。

$$(2x+3)(4x+7)=2\cdot 4x^2+(2\cdot 7+3\cdot 4)x+3\cdot 7=8x^2+26x+21.$$

例 4. 用方才說明之諸法，求以下各積：

$$(x-10)(x-15),\ (3a+4b)(5a-6b),\ (7x-y)(5x-3y).$$

含 x 任何二多項式之積. 觀察下列之積： 314

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(b_0x^2+b_1x+b_2)$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^2+(a_2b_2+a_3b_1)x+a_3b_2.$$

此積爲 x 之多項式，其次數爲二因式次數之和。而其各項之係數，可由下法得之，其中 a_h 表諸數 a_0, a_1, a_2, a_3 之一，及 b_k 表諸數 b_0, b_1, b_2 之一。求積之次數與項次數間之差，然後加一切乘積 $a_h\,b_k$ 之 $h+k$ 等於此差者。

例如，欲求 x^2 之係數，先求其差 $5-2$ 或 3，然後加 a_1b_2, a_2b_1, a_3b_0，即一切積 a_hb_k 之 $h+k=3$ 者。

此法應用於 x 之任何二多項式其形狀如 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 及 $b_0x^n+\cdots+b_n$ 者之積。

當諸因式有數係數時，此法亦可指示積中任何特別係數之求法。

例 1. 求下列積中 x^{100} 之係數：

$$(a_0x^{75}+a_1x^{74}+\cdots+a_{74}x+a_{75})(b_0x^{60}+b_1x^{59}+\cdots+b_{59}x+b_{60}).$$

此積之次數爲 $75+60$ 或 135；而 $135-100=35$.

故 x^{100} 之係數爲 $a_0b_{35}+a_1b_{34}+\cdots+a_{34}b_1+a_{35}b_0$.

同法，x^{35} 之係數爲 $a_{40}b_{60}+a_{41}b_{59}+\cdots+a_{74}b_{26}+a_{75}b_{25}$.

例 2. 求下列積中 x^3 之係數：

$$(3x^4-2x^3+x^2-8x+7)(2x^3+5x^2+6x-3).$$

所求係數爲 $(-2)(-3)+1\cdot 6+(-8)5+7\cdot 2$ 或 -14.

例 3. 例 1 之積中求 x^{110} 及 x^{23} 之係數.

例 4. 例 2 之積中,各別求 x^6, x^5, x^4, x^2, 及 x 之係數.

315 **藉已知恆等式求積.** 下列公式或恆等式,均甚重要,須用心記憶:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \tag{2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \tag{3}$$

上表中尙可加入 § 308, 309, 310, 所述之公式及下列公式,(§ 311 節):

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \tag{4}$$

因文字 a 及 b 可用任何代數式代表, 故此諸公式爲求大多數乘積之簡法,觀下列諸例自明:

例 1. 求積 $(3x-5y)^2$.

$$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=9x^2-30xy+25y^2. \qquad \text{由 (2).}$$

例 2. 求積 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

$$\begin{aligned}(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)&=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]\\&=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=x^4+x^2y^2+y^4. \qquad \text{由 (3), (1).}\end{aligned}$$

例 3. 解釋下列演算中之步驟:

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)\\&\quad=[x+(y+z)][x-(y+z)]\cdot[x+(y-z)][x-(y-z)]\\&\quad=[x^2-(y+z)^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]\\&\quad=[(x^2-y^2-z^2)-2yz]\cdot[(x^2-y^2-z^2)+2yz]\\&\quad=[x^2-(y^2+z^2)]^2-4y^2z^2\\&\quad=x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2-4y^2z^2\\&\quad=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2.\end{aligned}$$

須特別注意者，用此法可從 (1) 及 (4) 導出任何多項式之平方及立方。

例如，

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$
$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3b^2c+3c^2b+3c^2a+3a^2c+6abc.$$

總括此諸結果之前者，得定理如下：

任何多項式之平方，等於其一切項平方之和，加每二項乘 316
積之二倍。

例 1. 求積 $(a-b+2c-3d)^2$.

例 2. 求積 $(1+2x+3x^2)^2$.

例 3. 求積 $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)^2$.

單項積之乘冪. 任何代數式 A 之 n 次冪者，意謂式 A^n 317
能用計算法則化成之最簡式也。

從指數定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 及 $(ab)^n=a^nb^n$ 導出以下法則：

欲將單項式 A 自乘至 n 次冪，可將其數係數自乘至 n 次 318
冪，而以 n 乘各文字因數之指數。

設 A 之符號爲 $-$，則其結果依 n 之爲偶數或奇數而定 $+$ 號或 $-$ 號。

例如 $$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4x^8y^{28}=16a^4x^8y^{28}.$$

因應用定律 $(ab)^n=a^nb^n$，得

$$(-2ax^2y^7)^4=(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4,$$

又應用定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 得

$$(-2)^4a^4(x^2)^4(y^7)^4=16a^4x^8y^{28}.$$

習 題 III.

下列各例題，須以可能的迅速法則實行乘法。在特殊時，能用分離係數法較便者，則用之；能用 § 315 之恆等式者亦如是。

1. $3x^5-2x^4-x^3+7x^2-6x+5$ 以 $2x^2-3x+1$ 乘之。
2. $5x^3-3ax^2+2a^2x+a^3$ 以 $3x^2-ax-2a^2$ 乘之。
3. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$ 以 $x+y$ 乘之。
4. $3x^3-2x^2+7$ 以 $2x^3-3x+5$ 乘之。
5. 由觀察法，以 $4x-5y$ 乘 $7x-2y$.
6. $a^2-ax+bx-x^2$ 以 $b+x$ 乘之。
7. $x^4-2x+5x^2-x^3$，以 $3+x^2-x$ 乘之。
8. $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$，以 $x^{n-2}-x^{n-3}$ 乘之。
9. $a^2-ab+3b^2$ 以 $a^2+ab-3b^2$ 乘之。
10. $x+3y-2z$ 以 $x-3y+2z$ 乘之。
11. $x^2+xy+y^2+x-y+1$ 以 $x-y-1$ 乘之。
12. $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$ 以 $a+b-c$ 乘之。
13. $3x-2y+5$ 以 $x-4y+6$ 乘之。
14. $x+7y-3z$ 以 $2x+y-8z$ 乘之。
15. 求積 $(b+x)(b-x)(b^2+x^2)$.
16. 又求 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.
17. 又求 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$.
18. 試作 x^2+x+1 起首四個乘冪之係數表。
19. 試作 $a+b$ 順次乘冪之係數表至 10 次冪。
20. 求 $(4x-3y)^2$ 及 $(4x-3y)^3$.
21. 求 $(x+2y+3z-4u)^2$.
22. 求 $(x+2y+3z)^3$；及 $(x+2y-3z)^3$.
23. $(a+2b)^2$ 以 $(a-2b)^2$ 乘之。
24. 下列積中，求 x^{29} 及 x^{15} 之係數：

$$(a_0x^{27}+a_1x^{26}+\cdots+a_{26}x+a_{27})(b_0x^{19}+b_1x^{18}+\cdots b_{18}x+b_{19}).$$

25. 下列積中，求 x^6, x^8 及 x^4 之係數

$$(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8).$$

26. 證明以下恆等式：

1. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)(x+y)$.
2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.
3. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.
4. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$.

27. 化簡以下乘冪：

$$(2a^2x^3y^7)^5,\ (-x^5y^8z^9)^7,\ (a^2b^mc^3)^{2n},\ (a^mb^nc^{2n})^n.$$

28. 化簡以下乘積：

$$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5,\ (-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2.$$

除　法

商． 令 A 及 B 表任何二代數式，其 B 不等於 0. 以 B 除 319
之之商，意謂分式 A/B 能用計算法則化成之最簡式也．

公式． 作如此化簡，下列公式特別有用，即 320

1. $\dfrac{ac}{bc}=\dfrac{a}{b}$.

2. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$，當 $m>n$ 時；$\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{1}{a^{n-m}}$ 當 $n>m$ 時．

3. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b},\ \dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b},\ \dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$.

4. $\dfrac{a+b}{d}=\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d}$.

用下列法則 (§ 253) 可證明 1, 3 及 4.

設二式以任何第三式(不為 0)乘之，其積相等，則此二式相等．

因在 1 中，以 bc 乘各邊之積爲 ac.

例如，$$\frac{ac}{bc}bc=ac;\ 及\ \frac{a}{b}bc=\frac{a}{b}b\cdot c=ac. \qquad §§\ 254,252.$$

其次，在 3 中，以 b 乘第一方程各邊之積爲 $-a$，而以 $-b$ 乘第二及第三方程各邊之積順次爲 a 及 $-a$.

例如，$$\frac{-a}{b}b=-a;\ 及\ \left(-\frac{a}{b}\right)b=-\frac{a}{b}b=-a. \qquad §§\ 298,254.$$

最後在 4 中，以 d 乘各邊之積爲 $a+b$.

例如，$$\frac{a+b}{d}d=a+b;\ \left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)d=\frac{a}{d}d+\frac{b}{d}d=a+b. \qquad §§\ 254,252.$$

公式 2 爲公式 1 之特例。

例如，設 $m>n$，$a^m=a^{m-n}\cdot a^n$ §256

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{m-n}a^n}{a^n}=a^{m-n}. \qquad 由\ 1$$

321 **化簡 A/B 法則。** 公式 1, 2 及 3, 予吾人以下列法則化簡 A/B.

1. 約去分子分母之一切公因數。

2. 當分子分母含有同文字(或式)之不同乘冪之因數時，可由其高次乘冪之指數減去低次乘冪之指數而約去其低次乘冪。

3. 依分子分母有同號或異號，而以＋或－號予其商。

例如，$$\frac{bca^5}{ca^2}=ba^{5-2}=ba^3,\ 及\ \frac{a^2}{-a^7}=-\frac{1}{a^{7-2}}=-\frac{1}{a^5}.$$

322 **用單項式除之法則。** 由除法定義及 §320 之 4，導出下法

欲以單項式除他單項式，可書被除式於除式之上，成一分式而化簡之。

2. 欲以單項式除多項式,可用除式除被除式各項,而加其所得諸商.

例如 $-8a^3b^2c\div 6ab^6d=\frac{-8a^3b^2c}{6ab^6d}=-\frac{4a^2c}{3b^4d}$, 卽約去其公因式 $2ab^2$ 而應用記號法則.

其次, $$(ax^3-4a^2x^2)\div ax=\frac{ax^3}{ax}-\frac{4a^2x^2}{ax}=x^2-4ax.$$

然當 d 與 a 及 b 無公因式時,則吾人視 $(a+b)/d$ 較 $a/d+b/d$ 爲其商之最簡式.

多項式之除法. 設 A 及 B 爲有公因式之二多項式,則其商爲 A/B 約去其公因式化得之式. **323**

例如,設 $A=x^2-y^2$, $B=x^2+2xy+y^2$, 則其商爲 $(x-y)/(x+y)$.

因 $$\frac{A}{B}=\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}$$ 故也.

求二多項式公共因式之法則,將示於他章.其法稱爲長除法,當於 V 章論及.

複式. 觀察 $a\div b\times c$, 意謂 $\frac{a}{b}c$, 然 $a\div bc$, 則與 $a\div(b\times c)$ 相同,意謂 a/bc. **324**

在分式一章中,將論及複式之含有幾個乘法及除法所表示者.在特例可得

$$a\times(b\times c\div d)=a\times b\times c\div d. \tag{1}$$

$$a\div(b\times c\div d)=a\div b\div c\times d. \tag{2}$$

在(1)式中,當括號解去時,其括號內之記號 × 及 ÷ 不變;但在(2)式中,則 × 各變爲 ÷, 而 ÷ 各變爲 ×.

習　題　IV.

1. 以 $10ab^2c^2$ 除 $15a^3bc^2$.
2. 以 $-100ax^7z^9$ 除 $75x^2y^4z^{10}$.
3. 以 $28x^my^{m+n}$ 除 $-35x^{2m}y^n$.
4. 以 $-18\{a(b^2c)^2\}^3$ 除 $-54\{(ab^2)^2c\}^3$.
5. 以 x^2-y^2 除 x^2y-xy^2.
6. 以 $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ 除 $(x^3-y^3)(x^3+y^3)$.
7. 化簡 $\dfrac{(a-b)^2(b-c)^3(c-a)^4}{(b-a)(c-b)^2(a-c)^3}$.
8. 化簡 $\dfrac{30a^2b^3c^4-25a^3b^2c^5+20a^4b^4c^7}{-5ab^2c^3}$.
9. 化簡 $\dfrac{3(x-y)^4-2(x-y)^3+5(x-y)^2}{(y-x)^2}$.
10. 化簡 $4a^7\times(3ab^3c^2)^2\div(abc)^2\div6bc$.
11. 化簡下式 (1) 依指示之次序演算，(2) 先解去其括弧：

$$a^7\div\{a^5\div(a^4\div a^2\times a)\times(a^3\times a\div a^2)\}.$$

12. 須用何式乘 $2a(x^2y^3)^2$ 方可得 $-4a^2(x^3y^2)^2$?

III. 一元一次方程

條　件　方　程

325. 式 $3x-4$ 及 $x+6$ 並非恆等式 (§ 281)，故其值，對於 x 之一切值不等．設問"對於 x 之如何值，此二式之值始相同?"則先假定此二式相同，而敍述之爲：

$$3x-4=x+6.$$

如此作成之式，名爲條件方程．因其敍述一條件，爲"未知文字" x 所可滿足者故也．此已足限制 x 取滿足此條件之

値，當 $3x-4$ 及 $x+6$ 之値相同時，且僅於此時爲眞。

同理，$x+y=0$ 爲二未知文字 x 及 y 之條件方程，於一般，

當式 A 及 B 非恆等式時，則 $A=B$ 爲**條件方程**．此方程 326
之意爲："A 及 B 假定有等値" 且限制 A 及 B 中變數文字之
値，使此假定爲眞。

文字之値受方程 $A=B$ 如此限制者，名爲方程之未知文字。

嗣後凡"方程"一語，皆指"條件方程."

設一方程內文字，只有未知文字如 x, y, z, 者，名爲**數字方程**；設尙有已知文字如 a, b, c, 者，則名爲**文字方程**． 327

例如，$2x-3y=5$ 爲數字方程，但 $ax+by=c$ 則爲文字方程，文字方程不限制其已知文字之値。

設 A 及 B 二者爲關於其未知文字之有理式及整式，則方程 $A=B$ 稱爲**有理方程**及**整方程**．設 A 或 B 爲無理式或分式，則此方程稱爲**無理方程**或**分式方程**． 328

在此分類中，不計其數字及已知文字．例如 $\sqrt{2}x+y/b=c$ 爲有理整方程。

在有理整方程化爲最簡式 (§ 340) 時，其項或最高次項之次數，名爲此**方程本身之次數**． 329

例如，$ax^2+bx+c=0$ 之次數爲二；$x^3z^2+y^4=b$ 之次數爲五，凡次數係一切未知文字計算，但僅限於此種文字。

330　一次方程常稱爲**簡單方程**或**直線方程**；其二次，三次，四次者，順次稱爲**二次方程**，**三次方程**，**四次方程**.

331　含一未知文字 x 之方程，限制 x 取有限數之值.吾人稱此 x 之值爲滿足此方程，或方程之解或根.故

332　含 x 之方程之根者，即任何數或已知式，設以之代 x 能令此方程成恆等式者也.

例如，1 及 -2 爲方程 $x^2+x=2$ 之根；因 $1^2+1=2$ 及 $(-2)^2+(-2)=2$ 故也。

其次，$a-b$ 爲 $x+b=a$ 之根，因 $(a-b)+b=a$.

333　**註。** 1．一方程可以無根；因其可敍述之條件，無一數能滿足也。

例如，無有限數能滿足方程 $x+2=x+3$.

2．凡含 x 之方程而有根者，x 僅爲其諸根中一根之符號.實則方程本身僅爲變相恆等式，以各根輪流代 x 可得幾個眞恆等式，故方程實爲恆等式之代替式。

例如，$x^2+x=2$ 僅爲二恆等式 $1^2+1=2$ 及 $(-2)^2+(-2)=2$ 之代替式。

方　程　解　法

334　解一未知文字之方程，即求其一切之根，或證明其無根.解法所依賴之理由，說明於下例。

例 1　解方程 $3x-4=x+6$.

先假定 x 有一值能令此方程爲眞，推理如次：

設　$3x-4=x+6,$　(1)

則　$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4),$　(2) § 249

或　$2x=10,$　(3) § 300

故　$x=5.$　(4) § 253

故，設　$3x-4=x+6$，則 $x=5$.　(a)

前面證明之命題 (a)，敍述，設 (1) 常眞，則在 $x=5$ 時，易言之，只有一數能爲 (1) 之根卽 5，然尙不言及 5 爲 (1) 之根。此後一句之敍述，當爲

設 $$x=5，則\ 3x-4=x+6. \tag{b}$$

而 (b) 與 (a) 不同，但爲其逆 (§ 291).

以 5 代入 (1) 中之 x，可證明 5 爲 (1) 之根；因可得眞恆等式 $3\cdot5-4=5+6$ 故也。

但除證明計算之正確外，此一步並不需要。因一眞確命題能以可逆之方法證明時，常可決定其逆爲眞 (§ 293)，而 (a) 卽合此情形，因從 (1) 導出 (4) 之方法，由可逆之步驟連結，故全體皆爲可逆矣。例如

設 $$x=5, \qquad (4)$$

則 $$2x=10, \qquad (3)\ §\ 253$$

或 $$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4). \qquad (2)\ §\ 300$$

故 $$3x-4=x+6. \qquad (1)\ §\ 249$$

故以可逆方法證明命題 (a)，已同時證明其逆命題 (b)，卽不但證明除 5 以外無他數能爲 (1) 之根，且已證明 5 本身爲 (1) 之根。

例 2. 解方程 $$x^2=9.$$

設 $$x^2=9. \qquad (1)$$

則 $x=3$, (2) 或 $x=-3$, (3) § 257

故 (1) 除 3 及 -3 以外不能有其他之根。

但 3 及 -3 均爲 (1) 之根，因從 (1) 各導出方程 (2) 及 (3)，其步驟爲可逆故也。例如，從 (2) 可得 (1)，從 (3) 亦然 (§ 257).

以上諸例釋明下列一般原則。

求含 x 之方程之根，可先視此方程爲恆等式，然後依計算 335
方法從此以求形如 $x=c$ 之一切方程。

設導出諸方程 $x=c$ 之一，其方法爲可逆的，則當 x 有一

值 c 時,卽可決定 c 爲一根。又設此方法由可逆的步驟連結,則卽爲可逆的。

336 用計算方法從方程導出 x 之某值,祇憑此事,尙未能證明此值必爲其根,此有記憶之必要。必須方法爲可逆的,始能保證此結論。

例如,從 $$x-2=0, \tag{1}$$

因得 $$(x-2)(x-3)=0, \tag{2} \quad \S\ 253$$

故 $$x=2,\ 或\ x=3. \tag{3} \quad \S\ 253$$

但吾人不宜背理的推斷 3 爲 (1) 之根,蓋當 $x=3$ 時,此方法不可逆,卽不能以 $x-3$ 除 (2) 之二邊,因除數 $x-3$ 是時爲 0 故也。

就他方面而言,當 $x=2$ 時,此方法爲可逆,因 $x-3$ 是時不爲 0 但爲 -1;而 2 爲 (1) 之根。

變 形 定 理

337 徵諸以上所述,計算方法之任何正當應用於方程,可視爲方程之合理變形;且設如此變形爲可逆的,則可斷定其方程之根不變,故得下列定理:

338 **定理 1.** 方程之如下變形,其根保留不變,卽

1. 分別用結合法則 (§ 259) 於各邊。
2. 加有限值之任何式於二邊,或從二邊減之。
3. 以同一常數 (非 0) 乘或除其二邊。

因含此變形之一切計算方法爲可逆故也。(§ 259).

2 及 3 之證法,亦可敍述如下:

設 A 及 B 表含 x 之式，則方程 $A=B$ 之根，爲以之代 A 及 B 中之 x 能令 $A=B$ 之諸數 (§ 332).

然 x 之任何值能令 $A=B$ 及 C 爲有限值，必能令 $A+C=B+C$，其逆亦然 (§ 219)；故 $A=B$ 之根與 $A+C=B+C$ 之根相同。

其次，設 c 表除 0 以外之任何常數，則 x 之任何值能令 $A=B$ 者，必能令 $cA=cB$，其逆亦然 (§ 253)；故 $A=B$ 之根與 $cA=cB$ 之根相同。

例如，§ 334 例 1，方程

$$3x-4=x+6, \tag{1}$$

$$3x-4+(-x+4)=x+6+(-x+4), \tag{2}$$

$$2x=10, \tag{3}$$

$$x=5. \tag{4}$$

皆有此同根 5.

(2) 爲用變形法 2 從 (1) 導出，(3) 爲用變形 1 從 (2) 導來，而 (4) 爲用變形 3 從 (3) 導出。

系. **方程之如下變形，其根保留不變，即：** 339

1. 移一項變其號，從一邊至他邊。
2. 約去二邊中公有之任何項。
3. 悉變二邊中一切項之號。

因 3 等於以 -1 乘二邊，而 1 及 2 等於從方程二邊減去該項。

例如，設自二邊 $x-a+b=\quad c+b$

減 $\underline{-a+b}=-\underline{a+b}$ (1)

得 $x\qquad = c+a$ (2)

此減法之效力，爲消去 (1) 二邊之 b，且將 $-a$ 變號從左邊移於右邊。

藉此種變形 (§ § 338, 339)，凡含 x 之有理整方程，可不變其根，而化爲標準式 340

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

此種方程皆宜化爲標準式後，而計算其次數 (§ 329). 多於一未知文字之有理整方程，亦同此情形。

例如，$x^2+3x+5=x^2-4x+7$ 能化爲 $7x-2=0$，故其次數爲一，非二。

341 **定理** 2. 當 $A, B,$ 及 C 爲整式時，則方程

$$AC=BC$$

與下二方程有同根：

$$A=B \text{ 及 } C=0.$$

因 x 之任何値者，能令 $AC=BC$，必能令 $A=B$ 或 $C=0$；及其逆，x 之任何値能令 $A=B$ 或 $C=0$ 者，必能令 $AC=BC$ (§ § 251, 253).

在此證明中，假定對於所述 x 之値 A, B, C 有有限値。設 A, B, C 爲整式如上，假定時，此理常眞；但 A, B, C 爲分式時，則未必常眞。

在特例，當 A 及 C 爲整式時，則方程 $AC=0$ 與方程 $A=0$ 及 $C=0$ 有同根。

例如，方程 $x^2=3x$ 之根，與二方程 $x=3$ 及 $x=0$ 之根卽 3 與 0 相同。

同理，$(x-1)(x-2)=0$ 之根，與二方程 $x-1=0$ 及 $x-2=0$ 之根卽 1 與 2 相同。

342 故以同一整函數 C 乘整方程二邊之影響，爲引入增根，卽方程 $C=0$ 之根。反之，於整方程式 $AC=BC$ 之二邊消去相同整因式 C，其影響爲失去其某根，卽 $C=0$ 之根。

就他方面而言，在分式方程，以諸分式之最低公分母乘其二邊時，常無增根引入。

例如，設方程爲 $1/x=1/(2x-1)$，而以 $x(2x-1)$ 乘其二邊，得 $2x-1=x$，其根爲 1，實則 1 非 $x(2x-1)=0$ 之根，故並無增根引入。

系. 整方程 $A^2=B^2$ 與方程 $A=B$ 及 $A=-B$ 有同根. **343**

因 $A^2=B^2$ 與 $A^2-B^2=0$ 有同根 (§ 339), 且因 $A^2-B^2\equiv(A-B)(A+B)$, 故方程 $A^2-B^2=0$ 與二方程 $A-B=0$ 及 $A+B=0$ 有同根 (§ 341), 故與二方程 $A=B$ 及 $A=-B$ 有同根 (§ 339).

例如, 方程 $(2x-1)^2=(x-2)^2$ 之根與二方程 $2x-1=x-2$ 及 $2x-1=-(x-2)$ 有同根,卽 -1 與 1.

故方程 $A=B$ 二邊同時平方之影響引入增根, 卽方程 $A=-B$ 之根. 反之, 從 $A^2=B^2$ 導出簡單方程 $A=B$ 之影響爲失去其某根,卽方程 $A=-B$ 之根. **344**

因 $A^n-B^n\equiv(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1})$, (§ 308), 由 § 343 之理, 知 $A^n=B^n$ 之根,爲 $A=B$ 及 $A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1}=0$ 之根. **345**

例如,因 $x^3-1\equiv(x-1)(x^2+x+1)$, 方程 $x^3=1$ 與方程 $x=1$ 及 $x^2+x+1=0$ 有同根.

以上論證之定理 (§ § 338—345), 設以"解"字代"根"字,則在多於一未知文字之方程,亦爲有效 (§ 355). **346**

例如, 由 § 339, 方程 $x+2y-3=0$ (1) 與方程 $x=-2y+3$ (2) 有同解,卽 x, y 能滿足 (1) 之各組值,亦滿足 (2), 其逆亦然.

等值方程. 當二或多方程有同根 (或同解) 時, 稱之爲等值方程. **347**

例如, § 338 方程 $A=B$ 及 $A+C=B+C$ 爲等值, 其次 § 341, 方程 $AC=BC$ 與二方程 $A=B$ 及 $C=0$ 爲等值.

但 $x^2=9$ (1) 及 $x=3$ (2) 雖皆有根 3, 然非等值. 因 (1) 亦有根 -3, 而 (2) 則無之.

簡單方程之解法

348　從§§338, 339之變形定理，即可導出含一未知文字 x 之簡單方程之解法如下：

欲解含 x 之簡單方程，先化為 $ax=b$ 之形．因此

1. 設 $a\neq 0$，則此方程有單純根 b/a.
2. 設 $a=0$，而 $b\neq 0$，則此方程無根．
3. 設 $a=0$ 及 $b=0$，則此方程為一恆等式．

設方程有分數係數，常先用諸分式之最小公分母乘其二邊，此方法名為去分數．

次移其未知項於左邊及已知項於右邊，且於各邊中合併其項，而化此方程為 $ax=b$ 之形．欲檢驗其結果，以之代於已知方程之 x 即得．

例 1．解　$\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{6}-(4-x).$

欲去分數先以最小公分母 6 乘其二邊．

則　$4x-3(x-2)=x-6(4-x).$

或　$4x-3x+6=x-24+6x.$

移項而合併各項，　$-6x=-30.$

故　$x=5.$

驗算：　$\frac{2\cdot 5}{3}-\frac{5-2}{2}=\frac{5}{6}-(4-5).$

例 2．解 $mx+n=px+q$.

移項而併項，　$(m-p)x=q-n$.

設 $m\neq p$，此方程有單一根 $(q-n)/(m-p)$.

設 $m=p$，而 $q\neq n$，則無根．

設 $m=p$，及 $q=n$，則為恆等式，而凡 x 之值無不滿足之．

例 3. 解 $$(x+a)(x+b)=(x-a)^2.$$

展開之， $$x^2+(a+b)x+ab=x^2-2ax+a^2.$$

消去 x^2，移項而併項。

則 $$(3a+b)x=a^2-ab,$$

故 $$x=\frac{a^2-ab}{3a+b}.$$

方程之根有時可由觀察得之。設爲簡單方程，則此方程已完全解出，因求得一根，不能再有他根也。 **349**

例。 解 $(x-a)^2-(x-b)^2=(a-b)^2$.

此顯然爲一簡單方程，當 $x=b$ 時，即化爲恆等式 $(b-a)^2=(a-b)^2$. 故其根爲 b.

形如 $AB=0$ 之方程之根，其中 A 及 B 表 x 之一次整式者，可解二簡單方程 $A=0$ 及 $B=0$ 而得之 (§ 341). 同法，當 A, B, C 皆爲一次式時，則 $ABC=0$, $AC=BC$, 及 $A^2=B^2$ 之根，可解簡單方程而得之 (§ § 341, 343). **350**

例 1. 解 $(x-2)(x+3)(2x-5)(3x+2)=0$.

此方程等値於下列四方程 (§ 347)：

$$x-2=0,\quad x+3=0,\quad 2x-5=0,\quad 3x+2=0.$$

故其根爲 2, -3, $5/2$, $-2/3$.

例 2. 解 $4x^2-5x=3x^2+7x$.

此方程與下列二方程有同根：

$$x=0 \text{ 及 } 4x-5=3x+7.$$

故其根爲 0 及 12.

習 題 V.

解以下各方程：

1. $15-(7-5x)=2x+(5-3x)$.
2. $x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16$.
3. $(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=0$.

4. $x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}$.

5. $x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2$.

6 $2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1$.

7 $\frac{1}{2}\{\frac{1}{3}[\frac{1}{4}(\frac{1}{5}x-1)-6]+4\}=1$.

8 $3-\frac{\cdot-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}$.

9. $\frac{3x-1}{3}+3=-\frac{x-4}{6}+\frac{3x+5}{4}-2\frac{1}{2}$.

10. $\frac{5x-.4}{.3}+\frac{1.3x-.05}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}$.

11. $3cx-5a+b-2c=6b-(a+3bx+2c)$.

12 $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x$.

13. $\frac{x+1}{a+1}+\frac{x}{a}=2$, 由觀察。

14 $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

15. $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x$.

16. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+2)=0$.

17. $(x^2-x)(2x+5)=(x^2-x)(x+9)$.

18. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$.

19. $[(a+b)x-c]^2=[(a-b)x+c]^2$.

20 $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$.

應用問題

351 **解應用題．** 在下列問題中，須由已知關係，以求導出某未知數之值；此種關係，名爲問題之條件，卽聯絡未知數與已知數及其間相互之關係．

在各情形中，常以文字如 x 代未知數之一．則已知條件使能以 x 表其餘未知數，而聯絡所得諸式作成簡單方程．此方

程為以代數符號敍述問題．吾人可就 x 以解之．設問題有任何解答，則必爲所求 x 之值，共同爲其他未知數之對應值．

然偶有所得 x 之值，非問題可許之解答．蓋問題可於未知 352
數之性質加以限制，如限爲整數，而由問題之敍述轉譯於 x 之方程，則不能表此限制也．

故解得 x 之方程，在認爲此問題之解答前，必須注意其結果是否爲所求之一種數，設非此一種，則斷定此問題爲不能解．

例 1　有二位數，其數字之和爲 12．設顚倒其位置，則得一數爲原數之 4/7．問此數如何？

此題有四未知數，卽十位數，單位數，此數之值，及顚倒其數字時之值；但此四數皆易於以單位數字或十位數字表之．

如令　$x=$ 十位數字．

則　$12-x=$ 單位數字，

$10x+(12-x)=$ 所求數之值，

$10(12-x)+x=$ 位置顚倒後之值．

由此題之其餘條件，得

$$10(12-x)+x=\tfrac{4}{7}[10x+(12-x)]. \tag{1}$$

解此方程，得 $x=8$，爲小於 10 之整數，卽爲此題之可許解．同理，$12-x$ 或 4 亦如此，故所求數爲 84．

注意：若少許改變此問題，卽變爲不能解，例如設顚倒其位置爲二倍於原數之值，則得下列方程以代 (1)，

$$10(12-x)+x=2[10x+(12-x)]. \tag{2}$$

解 (2)，得 $x=32/9$，爲一分數，即非此問題之可許解答。

353 當處理某量，如時間等之問題時，須憶及代數的敍述問題中所用之文字，非表量之本身，僅表其用已知單位所得測度之數。亦宜注意表已知或未知同類一切量之測度，必須用同一單位。

例 1. 一池有進水管 A，三時可注滿，及一放水管 B，3 時 40 分可放盡。設空池時二管齊開，問若干時後可注滿此池？

令 x 表所求之時數。

則 $1/x$ 爲 A 及 B 齊開時每時注入之量。

但 A 獨開，一時注入量爲 $1/3$.

而 B 獨開(池中有水)一時放出量爲 $1/3\frac{2}{3}$ 或 $3/11$.

故 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{3}{11}, \text{或} \frac{2}{33}.$$

故得 $$x=33/2 \text{ 時，或 } 16 \text{ 時 } 30 \text{ 分。}$$

例 2. 一舟夫在某河中能於 15 分鐘逆流划行 2 哩；順流則只須 10 分鐘，問流速如何？又此舟夫在靜水中划行速度如何？

令 $x=$ 每分鐘流速之哩數。

因此舟夫逆流之速度爲每分鐘 $2/15$ 哩，故於靜水中當爲 $2/15+x$.

又因此舟夫順流之速度爲每分鐘 $2/10$ 或 $1/5$ 哩，故於靜水中當爲 $1/5-x$.

故 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{5}-x,$$

由是得 $$x=\frac{1}{30} \text{ (每分鐘哩數)},$$

及 $$\frac{2}{15}+x=\frac{1}{6} \text{ (每分鐘哩數)}.$$

例 3. 在二點鐘與三點鐘之間，時鐘之分針與時針何時指反對方向？

令 $x=$ 二點鐘後所求時間之分數。

因分針自 XII 起行，此時當行 x 分格。

時針在分針前 10 分格之 II 起行，但其移動僅爲分針 1/12.

故分針在 XII 後 x 分格時，時針在 XII 後 $10+x/12$ 分格。

但按此問題之條件，在所求時間，分針應在時針前 30 分格。

故 $$x=\left(10+\frac{x}{12}\right)+30,$$

解之， $$x=43\frac{7}{11}\text{ 分格。}$$

故二針指反對方向在二點鐘後 $43\frac{7}{11}$ 分，或三點前 $16\frac{4}{11}$ 分。

在問題之敍述中，有時以文字 a, b, c 表已知數.求得 x 之值，爲 a, b, c 所表之式，此式對於諸文字若干值，可表此問題之可許解答，其餘則不能。下列郵差問題之討論，當闡明此點。 **354**

例. 二郵差 A 及 B 沿同路依同方向順次以每時 m 及 n 哩之速度進行。今 B 在 A 前 d 哩，問二人能否相遇？設能相遇，則在何時？

令 $x=$ 至二人相遇之時數。

則 A 行 mx 哩，而 B 行 nx 哩；因今 B 在 A 前 d 哩，故有

$$mx=nx+d, \tag{1}$$

由是 $$(m-n)x=d, \tag{2}$$

故 $$x=\frac{d}{m-n}\text{ 時。} \tag{3}$$

1. 設 A 追及 B，則 x 之值須爲正。且因依假設 d, m, n 皆表正數，故必須 $m>n$. 適應於此顯然事實，即設 A 追及 B，則其行必須較 B 爲速。

2. 同時可解釋 x 所取之負值：設假定 $m<n$，則其意爲 A 與 B 已在 $d/(n-m)$ 時以前相遇。

3. 設 $m=n$, 則其實不能從 (1) 導出 (3), 因方法中含有以 $m-n$ 即 0 除之故也。但設 m 與 n 完全不同, 不論 n 小至如何, 則可從 (1) 導出 (3). 設在 (3) 中視 m 爲變數, 雖常大於 n 然繼續漸近而等於 n, 則分數 $d/(m-n)$ 成爲變數, 繼續增大而至於無限 (§ 510). 凡此所論, 適應於下述顯然事實, 即 A 超過於 B 之速度漸小, 則 A 追及 B 之時間漸長, 設 A 與 B 之速度相同, 則 A 永不能追及 B.

4. 最後,設假定 $m=n$, 而 $d=0$, 則方程 (1) 可以 x 之任何値滿足.適應於此顯然事實,爲設 A 與 B 以同速度進行而今同在一處, 則二人常同在一處。

習 題 VI.

1. 有二位數, 其數字和爲 14. 設顚倒其位置, 則得數較原數增 18. 問原數如何?

2. 須用何數除 156, 則其商爲 11, 餘數爲 2?

3. 有二數, 其差爲 298, 設以小者除大者, 則商及餘數皆爲 12. 問此二數如何?

4. 有二位數, 其十位數字爲個位數字之二倍。設加 1 於十位數字, 加 5 於個位數字,則所得之數, 三倍於顚倒其位置後從十位數字減 1, 個位數字減 5, 問此數如何?

5. 設從某數減 2 而以 4 乘其餘數,則其結果,與二倍某數加某數減 1 之半相同, 問某數如何?

6. 父年今爲四倍於其子。設 20 年後, 父年爲子年之二倍, 問父子現年各若干, 又若干年後, 父年爲其子之三倍?

7. 一池以第一管注水, 3 時可滿, 以第二管放水, 2 時可盡, 以第三管放水, 4 時可盡。設池中滿水, 而三管齊開, 問須若干時方能將池水放盡?

8 A 與 B 能於 10 日成一件工程，但 7 日後，A 因病休工，B 獨作 5 日完成。問每人獨作全工程，各須幾日？

9. 在八點鐘至九點鐘間，時鐘之二針，何時在同一方向？何時在相反方向？

10. 在四時後，錶之二針何時成直角？

11. 有一不準之時鐘，察其時針與分針繼續重合，須經 66 分鐘。問此時鐘之錯誤如何（每時中秒數）？

12. 四人 A, B, C, D 分款 1300 元，B 所得為 A 之 $\frac{2}{3}$，C 為 B 之 $\frac{2}{3}$，D 為 C 之 $\frac{2}{3}$，問各得若干？

13. 某人將其財產之 $\frac{1}{2}$ 又 1000 元給長子；餘數之 $\frac{1}{2}$ 又 1000 元與次子；再以其餘之 $\frac{1}{2}$ 又 1000 元與幼子。設尚餘 3500 元，問其全部財產之總數若干？

14. 設加二呎於某正方形之各邊上，則面積增大 100 方呎。問原正方形之面積如何？

15. 不知某旗竿之高；但知其繫於竿頂之繩，長於竿 2 呎，而繩之末端達地時，距竿足 18 呎。問竿之高如何？

16. 袋中有一元貨幣若干，半元貨幣為其二倍，又一角貨幣為其三倍。設貨幣之總值為 11.50 元。問各種貨幣有若干？

17 某人放款 5000 元，其利率一部為 6%，一部為 4%，放款全部之平均利率為 $5\frac{1}{2}$%，問此人以此二種利率，各放款若干？

18. 有二種咖啡，每磅之價順次為 20 分及 30 分，問須依何種比例混合，始成每磅價 26 分？

19. 有銀與銅之合金一磅，含銀二份，銅三份。問須加銅若干，始含銀三份，銅七份？

20. 設於一眷之已知液體內，加入某量之水，則此液體中含酒精 30%；設加二倍某量之水，則含酒精 20%. 求每次加水若干，及原液體中含酒精之百分率?

21. 一列火車之速率，爲每時 45 哩，於上午 10 時從 A 站開往 B 站，又一列，速率爲每時 50 哩，於上午 10 時 30 分從 B 站開往 A 站。假定二站相距 90 哩，問二列車何時相遇，且相遇處與 B 站之距離如何?

22. 設二列車開出之時間如上題所述，而相遇於 B 站與 A 站間之半途，又設慢車之速率爲快車之 $\frac{3}{5}$，問二列車之速率各如何，又在何時相遇?

23. 有兔在距離等於 50 步之前爲狐所追，設兔行 5 步時狐行 4 步，但狐行二步等於兔之三步，問兔再行若干步，爲狐追及?

24. 設金 19 兩，在水中權之，重 18 兩，銀 10 兩在水中權之，重 9 兩。今有此二金屬之合金，在空氣中重 387 兩，在水中重 351 兩，問含金銀各若干兩?

25. 一旅客置若干款項於囊中旅行，每日用其所有款之 $\frac{1}{2}$ 又 2 元，至第三日終，其款用盡，問其最初有款若干?

26. 某角錐體之底爲一正方形，其側面所圍三角形之高，等於其底之一稜。如稜與高各增 3 吋，則角錐體之面積增 117 方吋。問此角錐體之面積如何?

27. 有二位數，其二數字之和爲 a，如轉換其數字之次序，則其數增 b. 問此數如何? 試證其解答僅於 $9a \geqq b$ 及 $9a+b$ 與 $9a-b$ 二者爲 18 所整除時方合。

28. 二人 A, B 現今順次爲 a 與 b 歲. 問以前或以後 A 年有爲 B 年 c 倍之時否? 如其有之，則在何時?

對於 a, b, c 種種之值，討論其結果，如 § 354.

IV. 聯立一次方程系

聯立方程

含二未知文字 x 及 y 之條件方程，可以此種文字之無 355
限對值滿足之.稱其如此各對之值爲方程之解。多於二未知文字之方程亦如是。

例如，方程 $2x+y=3$ (1)，設予 x 以任何值，而予 y 以 $3-2x$ 之對應值，卽能滿足。蓋於 (1) 中以任何數 b 代 x 而以 $3-2b$ 代 y，則得一眞恆等式 $2b+(3-2b)=3$ 故也.

例如，$x=0$, $y=3$; $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=-1$; ……俱爲 (1) 之解答。

註。就二未知文字 x, y 而論之，方程 $x=2$ 之意，爲 x 有值 2. 而 y 有無論如何之值；易言之，方程 $x=2$ 有無限數之解。含諸未知文字中一文字之任何方程皆如是。 356

因此之故，當然須探究 x 及 y 是否有一對之值可滿足含 357
此種文字之二已知方程.如此一對之值，常可存在.

例如，二方程 $2x+y=3$ 及 $4x+3y=5$，當 $x=2$ 及 $y=-1$ 時，俱能滿足；蓋 $2\cdot 2+(-1)=3$，及 $4\cdot 2+3(-1)=5$ 故也.

聯立方程. 二或多方程之含幾個未知文字者，當其各未 358
知文字假定爲在一切方程中代表同數時，則稱爲聯立方程.

例如 方程 $2x+y=3$ (1) 及 $4x+3y=5$ (2)，設假定其 x 在 (1) 及 (2) 中俱表同數，而 y 亦然，則 (1) 及 (2) 爲聯立方程。

各方程中，並非必須含一切未知文字。例如，$x=2$, $y=3$ 亦可成爲含 x 及 y 之一對聯立方程。

359 就一般而言,若干方程爲聯立之推測,僅限於方程之個數等於或少於未知文字之個數時方爲正當.

例如,二方程 $x=2$ 及 $x=3$ 不得爲聯立,蓋 x 在此二方程中表不同之數故也.

360 聯立方程系之解,爲其未知文字之任何組值,能滿足此系之一切方程者.

例如,$x=2$, $y=-1$ 爲以下方程系之解

$$2x+y=3,\ 4x+3y=5.$$

361 解聯立方程系,即求其一切之解或證明其無解.

362 解法所依據之理由,與 §§ 334, 335 所敍述及說明相彷.

設有含 x 及 y 之一對方程,可假定 x 及 y 實有其値能滿足二方程.在此假定,可將方程如恆等式處理,而計算法則亦可應用. 藉此種法則,努力將方程變形爲一對或數對形如 $x=a$, $y=b$ 之方程.設導出如此一對 $x=a$, $y=b$ 之方法當 x, y 有値 a,b 時爲可逆,即可決定 a,b 爲所求解答之一;且設由可逆的步驟所成之方法,皆爲可逆.

凡此所云,含唯一新原則如下:

363 代換原則. 設假定一切已知方程確能適合,而由此得式 A,B 之若干對値爲相同,則可以一式代他式於任一方程中

例. 解一對方程 $$2x+y=12. \tag{1}$$
$$y=8. \tag{2}$$

由假定 x 及 y 實有其值能滿足二方程，因在 (2) 中，y 之值，而知在 (1) 中爲 8，以 8 代 (1) 中之 y，得

$$2x+8=12 \tag{3}$$

由是，
$$x=2. \tag{4}$$

故設 (1), (2) 有任何解，則其解爲 $x=2$, $y=8$.

反之，$x=2$, $y=8$ 爲 (1), (2) 之解，因方法 從 (1), (2) 至 (4), (2) 爲可逆之故也.

例如，由 (4) 得 (3)，而由 (3), (2) 得 (1).

註 1. 代換原則爲幾個等式法則 (§§ 249, 253, 257)，及一般等式法則，364
設 $a=b$, $b=c$ 則 $a=c$, (§ 261) 之結果.

例如，以上代換法，可證明其合宜如下：

設 $y=8$，則 $y+2x=8+2x$，或 $2x+8=2x+y$ (§ 249).

又設 $2x+8=2x+y$ 及 $2x+y=12$，則 $2x+8=12$ (§ 261).

註 2. 此原則當然只能用於正當的假定已知方程爲聯立時. 365

例如，從 $x=2$ 及 $x=3$，不能作背理結論 $2=3$，因無理由以假定 $x=2$, $x=3$ 爲聯立故也.

變形定理

就以上所述觀之，計算法則之任何正當應用於一對方程 366
可視爲此一對之合法變形；且設如此變形爲可逆，即可決定此一對之解答不致變更.

故以下諸定理，對於任何數未知文字之方程皆屬有效.

定理 1. 當 §§ 338, 339 之變形分別應用於方程時，則 367
一對方程之解保留不變.

因用如此變形，每個方程之解保留不變故也。

例如，一對方程 $3x-2y=1$ 及 $y-2x=5$ 與 $3x-2y=1$ 及 $y=5+2x$ 有同解。

368 **定理 2.** 一對方程

$$y=X,\quad f(x,y)=0,$$

與下列一對方程有同解：

$$y=X,\quad f(x,X)=0.$$

式中 X 表 x 之任何式（或常數），$f(x,y)$ 表 x 及 y 之任何式，而 $f(x,X)$ 表 $f(x,y)$ 中以 X 代 y 之結果（§ 280）。

此定理不過爲代換原則之特殊情形。

例如，一對方程 $y=x+2$ 及 $3x-2y=1$ 與 $y=x+2$ 及 $3x-2(x+2)=1$ 有同解。

369 **定理 3.** 一對方程

$$A=B,\quad C=D.$$

與下列一對有同解：

$$A+C=B+D,\ C=D.$$

因 $A=B, C=D$ 與 $A+C=B+C, C=D$ 有同解（§ 338），及 $A+C=B+C$，$C=D$ 與 $A+C=B+D$，$C=D$ 有同解（§ 363）。

例如，$x+y=5$ 及 $x-y=1$

與 $x+y+(x-y)=5+1$ 及 $x-y=1$ 有同解，

故亦與 $2x=6$ 及 $x-y=1$ 有同解。

370 **推論.** 在應用 § 369 之定理以前，用不爲 0 之任何常數乘已知方程——例如各方程之二邊——其解不變，故

設 k 及 l 表不爲 0 之任何常數，則一對方程

$$A=B,\ C=D$$

與一對方程

$kA\pm lC=kB\pm lD$，$C=D$ 有同解。

定理 4. 當 A, B 及 C 俱為整式時，一對方程 371

$$AB=0, \quad C=0.$$

與下列二對有同解：

$$A=0, C=0 \text{ 及 } B=0, C=0.$$

因 $AB=0$ 與二方程 $A=0$ 及 $B=0$ 有同解 (§ 341).

故一對 $AB=0, C=0$ 與二對 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 有同解。

例如， $xy=0$ 及 $x+y=2$ 之解

為 $x=0$ 及 $x+y=2$,

與 $y=0$ 及 $x+y=2$

共同之解。

等值系. 聯立方程之二系，當其有同解時，稱為等值。 372

例如，一對方程 $x+2y=5$, $2x+y=4$ 與一對方程 $3x+y=5$, $4x+3y=10$, 二者有同解 1, 2, 即為等值。

其次一對 $xy=0$, $x+y=2$, 與二對 $x=0$, $x+y=0$ 及 $y=0$, $x+y=2$ 為等值。

消去法. 一對簡單方程之解法

消去法. 欲從一對方程消去一未知數如 x, 即欲從此一對中導出不含 x 之一方程。 373

今進而解釋從含 x, y 之一對簡單方程消去 x 或 y, 且從此結果導出此一對方程之解之較為有用法則。

代換法. 此法根據 § 368 之定理。 374

例. 解： $x+3y=3,$ (1)

$3x+5y=1.$ (2)

解 (1), 以 y 表 x, $x=3-3y.$ (3)

在 (2) 中，以 $3-3y$ 代 x, $3(3-3y)+5y=1.$ (4)

解 (4), $y=2.$ (5)

在 (3) 中，以 2 代 y, $x=-3.$ (6)

故 (1) (2) 之解惟一，卽 $x=-3,\ y=2$.

因按 §§ 367, 368, 下列各對方程有同解，卽 (1), (2); (3), (2); (3), (4); (3) (5); (6), (5); 而 (5), (6) 之解爲 $x=-3,\ y=2$.

此同一結論，可直接從 § 362 而得．蓋從 (1), (2) 至 (5), (6) 之方法爲可逆故也．

檢驗 $-3+3\cdot2=3,\quad(1)\qquad 3(-3)+5\cdot2=1.\quad(2)$

此處之 (4) 係用代換法消去 x 而得．

欲用代換法從一對方程消去一未知文字如 x，可從一方程以他文字表 x 得一式，而在他方程中以此式代 x.

375 下例解釋此法之特別形式，名爲**比較消去法**．

例．解：

$$x+5y=7,\qquad(1)$$

$$x+6y=8.\qquad(2)$$

解 (1), (2) 二者，以 y 表 x，

$$x=7-5y,\qquad(3)$$

$$x=8-6y.\qquad(4)$$

二式關於 x 相等，

$$7-5y=8-6y.\qquad(5)$$

解 (5)，

$$y=1.\qquad(6)$$

在 (3) 中，以 1 代 y，

$$x=2.\qquad(7)$$

故 (1), (2) 之解爲 $x=2,\ y=1$.

376 **加減法**． 此法根據 §§ 369, 370 之定理．

例．解：

$$2x-6y=7,\qquad(1)$$

$$3x+4y=4.\qquad(2)$$

以 3 乘 (1)

$$6x-18y=21.\qquad(3)$$

以 2 乘 (2)

$$\underline{6x+\ 8y=\ 8.}\qquad(4)$$

從 (3) 減 (4)

$$-26y=13.\qquad(5)$$

由是

$$y=-\tfrac{1}{2}.\qquad(6)$$

在 (1) 中以 $-\frac{1}{2}$ 代 y，

$$2x-6\left(-\tfrac{1}{2}\right)=7.\qquad(7)$$

由是

$$x=2.\qquad(8)$$

故 (1), (2) 之解爲 $x=2,\ y=-\frac{1}{2}$.

因按 §§ 367, 368, 370, 下列各對方程有同解,即 (1), (2); (1), (5); (1), (6); (7), (6); (8), (6); 而 (8), (6) 之解爲 $x=2$, $y=-\frac{1}{2}$.

檢驗　　$2\cdot2-6(-\frac{1}{2})=7$,　(1)　　$3\cdot2+4(-\frac{1}{2})=4$.　(2)

此處 x 用減法消去。

直接從 (1), (2) 用加法消去 y, 亦可求得 x 之值。如下:

以 2 乘 (1),　$4x-12y=14$.　(9)

以 3 乘 (2),　$\underline{9x+12y=12}$.　(10)

加 (9) 與 (10),　$13x\qquad=26$.　(11)

故與前相同,　$x\qquad=2$.　(12)

欲用加減法從一對簡單方程消去一未知文字如 x, 可用數目乘方程,使其結果之方程中 x 之係數絕對值相等。其後用減法或加法,依此種係數有同號或異號而定。

異常情形。 令 $A=0$, $B=0$ 表 x, y 之一對簡單方程。以前數節 (§§ 374 37) 已明示 $A=0$, $B=0$ 有一解且只有一解,苟非式 A 及 B 爲於消去 x, 同時亦消去 y 者。此惟於下列情形中能發生。 377

1. 設式 A 與 B 之關係爲 $A\equiv kB$, 式中 k 爲常數, 則稱方程 $A=0$, $B=0$ 不獨立。

顯然可見。設 $A=kB$, 則 $B=0$ 之每一解,爲 $A=0$ 之解,反之亦然,故 $A=0$, $B=0$ 有無限多之解。

例如,令 $A=2x+6y-10=0$,　(1)　　$B=x+3y-5=0$.　(2)

此處 $A\equiv2B$, 故 $A=0$, $B=0$ 爲非獨立方程。可見其設欲消去 x 而以 2 乘 (2), 再從 (1) 減去其結果,則同時消去 y.

2. 設 A 與 B 之關係爲 $A\equiv kB+l$, 此處 k 與 l 表常數, l 非 0, 則稱方程 $A=0$ 與 $B=0$ 爲不合理。

此時一對 $A=0$ 與 $B=0$ 無解；因能令 $B\equiv 0$ 之 x, y 之任何値，必令 $A\equiv l$ 而非 $A\equiv 0$ 故也。

例如，令 $A=2x+6y-9=0$, (3) $B=x+3y-5=0$. (4)
此處 $A\equiv 2B+1$, 故 $A=0$ 與 $B=0$ 爲不合理。設從 (3), (4) 消去 x, 則同時亦消去 y.

378 **解答公式.** 任何已知一對 x,y 之簡單方程，可化爲下式：

$$ax+by=c, \quad (1) \qquad a'x+b'y=c', \quad (2)$$

式中 a, b, c, a', b', c', 表已知數或式。

按 § 377, 一對 (1), (2) 有一解，且只有一解，但常數 k 能求得以致 $a'=ka$ 及 $b'=kb$, 因此而 $ab'-a'b=k(ab-ab)=0$ 者須除外。

欲得其解，可用代換法 (§ 376) 消去 y 與 x. 其結果爲

$$(ab'-a'b)x=b'c-bc', \quad (3) \qquad (ab'-a'b)y=ac'-a'c. \quad (4)$$

故設 $ab'-a'b\neq 0$, 則 (1)(2) 之解爲

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \quad (5)$$

此公式設寫爲下式，則較易記憶。

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}. \quad (6)$$

若預先未知一對 (1) (2), 當 $ab'-a'b\neq 0$ 時有一解，則以上所論，僅證明設一對 (1), (2) 有任何解，則其解爲 (5) 也。

習題 VII

就 x, y 解以下各對方程：

1. $\begin{cases} x+y=62, \\ x-y=12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-5y=25, \\ 4x-3y=19. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 45x-13y=161, \\ 18x+11y=32. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-3=7-x, \\ 8x-3y-61=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 12x=9-10y, \\ 8y=7-9x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2y-3x=0, \\ 5x-3y-2=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x/.3+5y=3\frac{1}{2}, \\ 5x+3y=1.65. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10, \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+2)(y+1)=(x-5)(y-1), \\ x(4+y)=-y(8-x). \end{cases}$

10. $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2, \\ bx+ay=a^2+2b+b^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} ax+by=c, \\ px=qy. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2), \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2). \end{cases}$

13 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=5, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6}, \\ 5x-2y+6=0. \end{cases}$

15 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c'}. \end{cases}$

16 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x, \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y. \end{cases}$

17. 證明下列方程爲不合理：

$$1\tfrac{1}{2}x-2\tfrac{1}{2}y=10, \qquad 6x-10y=15.$$

18 在習題 15 內,試決定 a, b, c, a', b', c' 之值,使方程爲 (1) 不合理 (2) 不獨立.

一對簡單方程解法在解一對非一次方程時之應用

含 x 及 y 之一對非一次方程,而對於 x, y 之某對函數仍 379
可爲一次者.可就此一對函數以解方程,再從其結果而導出 x 及 y 本身之值.

例 1. 解 $$\frac{2}{x}+\frac{5}{3y}=1,\ \frac{9}{x}+\frac{10}{y}=5.$$

各方程關於 $1/x$, 及 $1/y$ 爲一次.

解 $1/x$, $1/y$, 求得 $1/x=1/3$, $1/y=1/5$, 故 $x=3$, $y=5$.

例 2. 解　　$3x+\frac{y}{x}=6,\qquad 7x-\frac{2y}{x}=1.$

解 x 及 y/x, 求得 $x=1$ 及 $y/x=3$, 故 $x=1, y=3$.

380　已知一對方程可化爲 $AB=0, A'B'=0$ 之形式,其中 A, B, A', B', 表 x, y 之一次整式，則依 § 371 之定理，此對方程之一切解,可由解下列四對簡單方程而得：$A=0,\ \ A'=0$； $A=0,\ B'=0$； $B=0, A'=0$； $B=0, B'=0$.

例，解　　$$x^2-2xy=0, \tag{1}$$
$$(x+y-1)(2x+y-3)=0. \tag{2}$$

此一對與下列四對等值：

$$x=0,\qquad x+y-1=0, \tag{3}$$
$$x=0,\qquad 2x+y-3=0, \tag{4}$$
$$x-2y=0,\qquad x+y-1=0, \tag{5}$$
$$x-2y=0,\qquad 2x+y-3=0. \tag{6}$$

解此四對 (3), (4), (5), (6), 得 (1), (2) 之四解,即：$x, y=0, 1$; $0, 3$; $2/3, 1/3$; $6/5, 3/5$.

381　於一般，設 $ABC\cdots$ 及 $A'B'C'\cdots$ 表 x, y 之 m 個及 n 個一次整因式之積，則欲求一對方程 $ABC\cdots=0, A'B'C'\cdots=0$ 之一切解，可使第一積之各因子等於 0 及第二積之各因子等於 0, 各各組合而成 mn 對簡單方程，再解此 mn 對而得之。

設諸對簡單方程俱爲獨立及合理,則可得 mn 解，即已知方程解答之數,爲其次數之積。

習　題　XIII

解下列各對方程：

1. $\frac{7}{2x}+\frac{1}{3y}=0,\qquad \frac{3}{x}+\frac{14}{y}+3=0.$

2. $10x+\frac{6}{y}=5,\qquad 15x+\frac{10}{y}=8.$

3. $\frac{y}{x}=\frac{2(3-y)}{x}+\frac{3}{2}$, $\frac{y+3}{x}=\frac{3y-5}{x}+1$.

4. $xy=0$, $(x+2y-1)(3x-y+2)=0$.

5. $xy-y=0$, $3x-8y+5=0$.

6. $x(x-y)(x+y)=0$, $x+2y-5=0$.

7. $(x-1)(y-2)=0$, $(x-2)(y-3)=0$.

8. $y^2=(x-1)^2$, $2x+3y-7=0$.

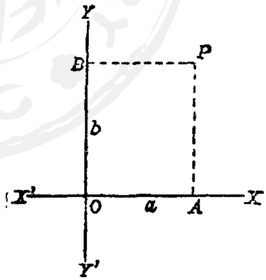
9. $(2x+y)^2=(x-3y+5)^2$, $(x+y)^2=1$.

10. $(x-5y+8)(x+3y+5)=0$, $(2x+y+5)(5x+2y-14)=0$.

一次方程含二變數者之圖形

x 及 y 一對值之圖形. 變數如 x, y 之一對值，用平面 332
上一點表之甚便.

在平面上選取正交二定直線 $X'OX$, 及 $Y'OY$ 爲軸，其交點 O 名爲原點；並擇適宜單位以量長度.



設已知一對值爲 $x=a$, $y=b$, 則作法如下：

在 $X'OX$ 上且依 a 之爲正或負而在 O 之右或左，截一線段 OA, 其長爲 $|a|$, 即 a 之絕對值.

同法在 $Y'OY$ 上依 b 之爲正或負在 O 之上或下截一線段 OB, 其長爲 $|b|$.

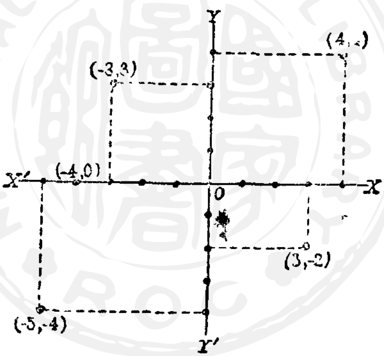
過 A 與 B 順次畫 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 之平行線，取此種平行線之交點 P, 爲一對值 $x=a, y=b$ 之點或圖形. 爲便利計，

以符號 (a, b) 表此一對值 $x=a, y=b$ 及其圖形 P.

吾人稱數 a 或等長線段 OA, BP 之一，爲 P 之橫坐標；而 b 或等長線段 OB, AP 之一，爲 P 之縱坐標：總稱橫坐標及縱坐標爲 P 之坐標.

又稱 $X'OX$ 爲 x 軸或橫軸，而 $Y'OY$ 爲 y 軸或縱軸.

觀察此法，導引 x, y 之各對值與平面上之點成逐一對應（§ 2），卽每有一對值 (a, b) 必有一點 P，反之，每有一點 P 必有一對值 (a, b)，此可從 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 順次量點 P 之距離而予以適當符號得之，在特例 $(0, 0)$ 之圖形爲原



點，$(a, 0)$ 之圖形爲 X 軸上一點，$(0, b)$ 之圖形爲 y 軸上一點.

例：　作圖表示下列各對值：$(4,4)$，$(-3,3)$，$(-4,0)$，$(-5,-4)$，$(3,-2)$.

就各對值依次實行上述作法，卽得圖形如附圖所指示.

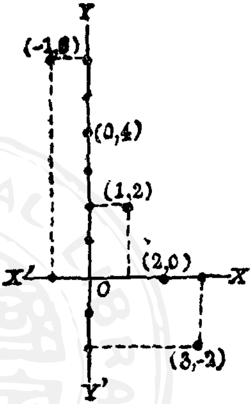
應特別注意者，圖形位置與其坐標符號之關係.

383　**含 x, y 之方程之圖形.**　在普通情形，設含 x 及 y 之一已知方程有無限多實數解，通常含此一切解之圖形爲一定曲線，而別無他點.吾人稱此曲線爲此方程之圖形.

但一方程之圖形，可由多於一之曲線而成。又須注意於曲線中包含直線。

定理. 凡含一或二文字 x, y 之簡單方程，其圖形為一直線。 384

因此之故，簡單方程常稱為直線方程。



學者任選特殊方程而作圖以表其若干解，卽可自信此定理之眞。

例如，取方程 $y=-2x+4$.

當 $x=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 時，

有 $y=4, 2, 0, -2, \cdots\cdots$

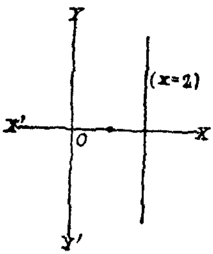
作圖以表諸對値 $(0,4)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(3,-2)$ $\cdots\cdots$ 如附圖，發見其圖形在同一直線上。

吾人可證明此定理如下：

1. 當方程有形狀 $x=a$ 或 $y=b$ 時。

例. 求 $x=2$ 之圖形.

此方程為 x 之値 2 及 y 之任何値所滿足 (§ 356)，故其圖形平行於 y 軸，距離為 2 而在其右邊. 蓋此線含橫坐標為 2 之一切點，且只含如此諸點故也。



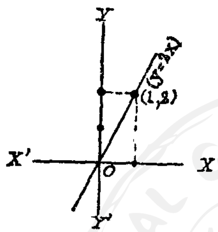
於一般，$x=a$ 之圖形，為平行於 y 軸，距離為 $|a|$，其在右或左，依 a 之為正或負，而定. 又 $y=b$ 之圖形為平行於 x 軸，距離為 $|b|$，其在上或下依 b 之為正或負而定。

在特例，$y=0$ 之圖形為 x 軸，而 $x=0$ 之圖形為 y 軸。

2. 當方程有形狀 $y=mx$ 時。

例．求 $y=2x$ 之圖形。

此圖形爲通過原點 $(0,0)$ 及點 $(1,2)$ 之直線；蓋此線含縱坐標二倍於橫坐標之各點，且只含如此之點故也。



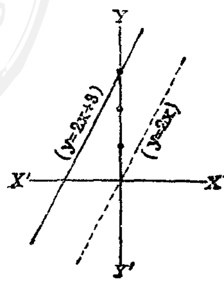
於一般，$y=mx$ 之圖形爲通過原點及點 $(1,m)$ 之直線。

3. 當方程有形狀 $y=mx+c$ 時。

例．求 $y=2x+3$ 之圖形。

顯然可見，設將 $y=2x$ 之圖形中各點之縱坐標增 3，卽得此方程之圖形，但此事同於將直線 $y=2x$ 平行於其本身向上移動，直至與 y 軸之交點在原點上 3 單位爲止。

於一般，$y=mx+c$ 之圖形爲平行於 $y=mx$ 圖形之一直線，遇 y 軸於距原點爲 $|c|$ 之處，其在原點之上或下依 c 之爲正或負而定。



385　**求作直線．** 因任何二點足以定一直線，故可求任何方程 $ax+by+c=0$ 之圖形，如下例。

例。作 $3x+y-6=0$ 之圖形。

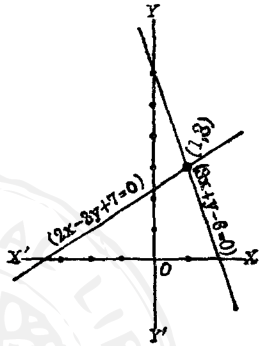
先設 $y=0$，則 $x=2$．次設 $x=0$，則 $y=6$．

故只有此二點 $(2,0)$ 及 $(0,6)$ 可作，卽此二點爲直線與二軸之交點，又畫此二點所決定之直線，卽得此方程之圖形（觀 § 386 之圖）。

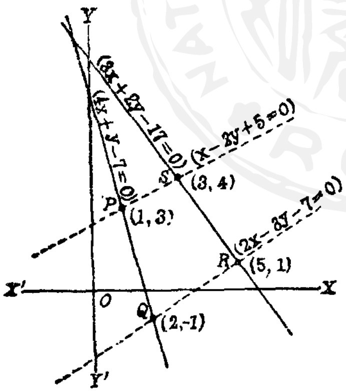
當方程形狀 $x=a$，$y=b$，$y=mx$ 之一時，此法失敗。當時須用 § 384 之 1 及 2 中說明之法則，以求其直線。

一對聯立簡單方程之圖解. 此為表二方程圖形之二直線之交點;蓋此點且只有此點同為二方程之解之圖形故也. 386

例如,$2x-3y+7=0$ (1), 及 $3x+y-6=0$ (2) 之解為 $x=1, y=3$. 又如圖示 (1) 及 (2) 之圖形相交於點 (1, 3).



當已知方程為不合理時, (§ 377, 2) 則其圖形為無一點公有之直線,即為平行線;當已知方程為不獨立時 (§ 377, 1), 則其圖形為公有一切點之直線,即為重合線. 387



例如, 方程 $y=2x$ 及 $y=2x+3$ 為不合理,而此二方程之圖形為平行線 (§ 384, 3).

其次, 方程 $y=2x$ 及 $3y=6x$ 為不獨立,有同一圖形.

形如 $AB=0$ 之方程圖形, 由 $A=0, B=0$ 之圖形連合而成; 因方程 $AB=0$ 之解為 $A=0, B=0$ 連合之解故也 (§ § 341, 346). 388

例. 求下列方程之圖形及圖解:

$$(4x+y-7)(3x+2y-17)=0, \tag{1}$$

$$(x-2y+5)(2x-3y-7)=0. \tag{2}$$

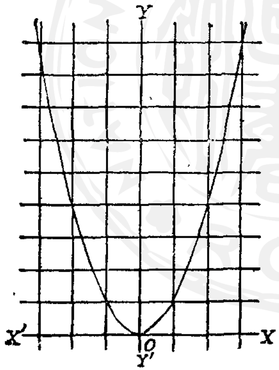
(1) 之圖形由直線 PQ 及 RS 而成，此二直線順次為 $4x+y-7=0$ 及 $3x+2y-17=0$ 之圖形.

(2) 之圖形由直線 PS 及 QR 而成，此二直線順次為 $x-2y+5=0$ 及 $2x-3y-7=0$ 之圖形.

點 P,Q,R,S 在一對 PQ, RS 與一對 PS, QR 之交處，為 (1) 及 (2) 之圖解，即 $(1,3)$, $(2,-1)$, $(5,1)$, $(3,4)$.

389　**高次方程含 x 及 y 者之圖形.** 求方程之若干解，作圖以表此種解，再徒手作一曲線，過所得一切點. 如取解十分接近，則可得曲線能與眞圖形相差甚微.

在此種工作用方格紙如附圖者頗便.



例. 求方程 $y=x^2$ 之圖形.

當 $x=0, 1, 2, 3, 4,$………………時,

$y=0, 1, 4, 9, 16,$ ……………

而當 $x=-1, -2, -3, -4,$………時,

$y=1, 4, 9, 16,$………………

取正方形之一邊為長之單位，畫出對應點 $(0,0)$ $(1,1)(2,4)$……$(-1,1)$ $(-2,4)$……除 $x=1, x=-1$ 之間外，有少數幾點，已足以指示此圖形之大概性質，如圖中之曲線.

此曲線全在 x 軸之上面，向上伸展無限，而關於 y 軸為對稱，對應於 $x=a$ 及 $a=-x$ 而 y 有同值.

當　　　　$x=\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$,……時

$$y=\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ldots\ldots.$$

畫出其對應點之一或二，即發見此圖形接觸 x 軸.

習題 IX

1. 畫下列 x 及 y 之各對值：

$$(0,0),\ (5,0),\ (0,-7),\ (6,2),\ (-7,-1),\ (-4,3),\ (5,-9).$$

2. 求下列各方程之圖形：

$$x=0,\ y=0,\ 2y+7=0,\ 3y+x=0,\ x+y+5=0.$$
$$7x+3y-18=0,\ 3x-4y=24.$$

3. 求以下之圖形：

$$xy=0,\ (x+y-3)(x-2y)=0,\ x^2-1=0,$$
$$x^2=4y^2,\ x^2+y^2=0.$$

4. 以圖解法求下列各對方程之解，並用代數解法檢驗。

(1) $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3y+2x+19=0, \\ 2y-3x+4=0. \end{cases}$

5. 同法解下列各對方程：

(1) $\begin{cases} (x-4y+6)(x+3y+6)=0, \\ (3x+2y-10)(2x-y+5)=0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (y-x-2)x=0, \\ (y-x+2)y=0. \end{cases}$

6. 求下列方程之圖形：

$$y=-(x+1)^2, \qquad y=x^3.$$

含多未知數之聯立簡單方程系

n 個方程含 n 個未知文字者之解法． 含三未知文字之一對方程，常有無限個解． **390**

例如，二方程 $x=2z,\ y=z+1$ 有無限個解；蓋設以任何值 b 予 z，而以值 $2b$ 及 $b+1$ 予 x 及 y，則二方程均能滿足故也．

但含三未知文字之三個一次方程系，常有一解，且只有一解，可如下例得之． **391**

例．解下列方程系：

$$3x-2y+4z=13, \tag{1}$$
$$2x+5y-3z=-9, \tag{2}$$
$$6x+3y+2z=7. \tag{3}$$

在二對方程間消去 z，如：

以 3 乘 (1)，　$9x-6y+12z=39$　(4)

以 4 乘 (2)，　$8x+20y-12z=-36$　(5)

相加　$17x+14y\qquad=3$　(6)

其次，(1) 爲　$3x-2y+4z=13$　(7)

以 2 乘 (3)，　$12x+6y+4z=14$　(8)

從 (8) 減 (7)，　$9x+8y\qquad=1$　(9)

在結果方程 (6)，(9) 之間消去 y，如：

以 4 乘 (6)，　$68x+56y=12$　(10)

以 7 乘 (9)，　$63x+56y=7$　(11)

從 (10) 減 (11)，　$5x\qquad=5$　(12)

故　$x=1.$

以 $x=1$ 代入 (9)，求得　$y=-1.$

以 $x=1$，$y=-1$ 代入 (1)，求得　$z=2.$

故依 § 362，設 (1)，(2)，(3)有解，則爲 $x=1$，$y=-1$，$z=2$，但從 (1)，(2)，(3) 導出 $x=1$，$y=-1$，$z=2$，其方法爲可逆，其實可一步一步逆推溯源頗易，故 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 爲 (1)，(2)，(3) 之解。

吾人亦可證 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 爲 (1)(2)(3) 之解如下：

據 § 368，顯然可見 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 爲 (12)，(9)，(1) 之解。故只須證明系 (12)，(9)，(1) 與系 (1)，(2)，(3) 有同解可也。

將方程 (1)，(2)，(3) 之已知項移於左邊，令代之如下：

$$A=0,\ (1)\quad B=0,\ (2)\quad C=0.\ ($$

則從導出 (9)，及 (12) 之法，可表方程 (1)，(9)，(12) 如下：

$$A=0,\ (1)\quad -A+2C=0,\ (9)\quad 19A+16B-14C=0.\ (12)$$

顯然可見能使 $A=0$，$B=0$，$C=0$ 之 x，y，z 任何組之値，必能使 $A=0$，$-A+2C=0$，$19A+16B-14C=0$。

反之，當 $A=0$，$-A+2C=0$，則 $C=0$；又當 $19A+16B-14C=0$，則 $B=0$，

故系 (1)，(2)，(3) 與系 (1)，(9)，(12) 有同解。卽 $x=1$，$y=-1$，$z=2$。

由是觀之，從含三未知文字 x, y, z 之三方程系可導出含二文字 x, y 之二方程系，再由此系可導出含一文字 x 之簡單方程. 392

一般，設開始從含 n 個未知文字之 n 個簡單方程，而行此種步驟 $n-1$ 次，必達到含一文字如 x 形狀如 $ax-b=0$ 之簡單方程.

於是除 $a=0$ 外，此系有一解，且只有一解，其中 x 之值爲 b/a，而其他未知文字之值，可於行上法所得之諸方程中逐次用代換法而得之. 此理常可如上例證明.

就他方面而言，設 $a=0$，當 $b=0$ 時，則此系通常有無限個解. 而當 $b\neq 0$ 時則無解. 俟於 § 394 證明之.

解簡單方程系，尙有極省力之法則，俟於行列式章示之. 在某種情形，用殊巧法可省勞力. 393

例. 解

$$x+y+z=8, \tag{1}$$
$$x+y+u=12, \tag{2}$$
$$x+z+u=14, \tag{3}$$
$$y+z+u=14, \tag{4}$$

加 (1), (2), (3), (4), $3x+3y+3z+3u=48$.

故
$$x+y+z+u=16. \tag{5}$$

自 (5) 依次減各方程 (1), (2), (3), (4), 得 $x=2$, $y=2$　$z=4$, $u=8$.

異常情形.　令 $A=0, B=0, C=0$ 表 x, y, z 之簡單方程系，而如 § 392, 令 $ax-b=0$ 表已消去 y, z 所得之方程. 394

1.　設 $a=0, b=0$. 則必得函數 A, B, C 之一可以其他二函數表之，如：$A\equiv kB+lC$，其中 k 與 l 爲常數. 其時稱方程 $A=0, B=0, C=0$ 爲不獨立.

由恆等式 $A=kB+lC$, 可得 $B=0, C=0$ 之各解,爲 $A=0$ 之解,故設 $B=0$ 及 $C=0$ 爲合理 (§ 377, 2), 則三方程 $A=0$, $B=0, C=0$ 必有無限之解.

例如,就下列方程系考之:

$$A=3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$

$$B=2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C=7x+8y-2z+5=0. \tag{3}$$

(1) 與 (2) 間消去 z.

$$3A+4B\equiv 17x+14y-3=0. \tag{4}$$

(1) 與 (3) 間消去 z.

$$A+2B\equiv 17x+14y-3=0. \tag{5}$$

(4) 與 (5) 間消去 y.

$$2A+4B-2C\equiv 0.\ x-0=0.$$

此處最後方程 $ax-b=0$ 有形狀 $0\cdot x-0=0$, 又在導出此式時,吾人發見式 A, B, C 係以恆等式 $2A+4B-2C\equiv 0$, 或 $C=A+2B$ 連絡.

其實檢查 (1), (2), (3), 即知 C 可以 2 乘 B 加 A 而得.

故系 (1), (2), (3) 有無限之解.

2. 設 $a=0$, 而 $b\neq 0$ 則求得函數 A, B, C 之一可以其他二函數表之.如:

$$A\equiv kB+lC+m,$$

此處 k, l, m 爲常數,而 m 不爲 0. 其時方程 $A=0, B=0, C=0$ 爲不合理.

從恆等式 $A=kB+lC+m$ 而知 $A=0, B=0, C=0$ 無解.蓋 x, y,z 之任何值能使 $B\equiv 0, C\equiv 0$ 者必能使 $A\equiv m$ 非 $A\equiv 0$ 故也.

例如,就下列方程系考之:

$$A=3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$

$$B=2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C=7x+8y-2z+6=0. \tag{3}$$

如上消去 z 及 y, 得

$$2A+4B-2C\equiv 0\cdot x-2=0.$$

故最後方程 $ax-b=0$ 有形狀 $0\cdot x-2=0$, 而 A, B, C 係以恆等式 $C\equiv A+2B+1$ 連絡，其實檢查 (1), (2), (3) 卽發見其屬於此情形.

故系 (1), 2), (3) 無解.

一般簡單方程系. 從上面討論，可得結論如下： 395

通常含 n 未知文字之 m 個簡單方程系，當 $m=n$ 時有一解. 當 $m<n$ 時有無限之解. 當 $m>n$ 時無解.

無論何時對於此法則如有例外發見，則此二個或多個方程，爲以§§377, 394 所述之恆等關係結合.

在特例，含二未知文字 x, y 之三個簡單方程系 $A=0$, $B=0$, $C=0$, 當 A, B, C 係以恆等式 $A\equiv kB+lC$ 結合，而 $B=0, C=0$ 爲合理時，則有一解.

例如，方程系 $x-y=1$ (1), $x+y=7$ (2), $3x-y=10$ (3) 無解；蓋 (1)(2) 之解卽 $x=4, y=3$ 不能滿足 (3) 故也.

就他方面而言，系 $x-y=1$(1), $x+y=7$(2), $3x-y=9$ (4) 有一解；蓋 (4) 爲 $x=4$, $y=3$ 所滿足故也. 但須注意於 $3x-y-9\equiv 2(x-y-1)+(x+y-7)$.

令學者畫 (1), (2), (4) 之圖形，可見其相遇於一公共點.

習題 X

解下列方程系：

1. $\begin{cases} x+y=11, \\ y+z=13, \\ z+x=12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=4, \\ x+3y+7z=13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ 3x-5y+7z=19, \\ 5x-8y-11z=-13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-2y=-33, \\ x+y-7z=13, \\ x+3y=-10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y-4z=11, \\ 2x-3y=0, \\ y-4z=0. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 3x-5=2(x-2), \\ (x+1)(y-1)=(x+2)(y-2)+5, \\ 2x+3y+z=6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5, \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} y+z+u=4, \\ x+z+u=3, \\ x+y+u=1, \\ x+y+z=10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-3z+u=9, \\ 5y+z-4u=17, \\ 3y+u=12, \\ x+2y+3u=8. \end{cases}$　　10. $\begin{cases} cx+by=l, \\ by+az=m, \\ az+cx=n. \end{cases}$

11. $\begin{cases} lx=my=nz, \\ ax+by+cz=d. \end{cases}$　　12. $\begin{cases} 2x=3y=6z, \\ (x+2y+z-16)(3x-2y+20)=0. \end{cases}$

證明下列方程系爲不獨立,幷求連絡各系方程之恆等式:

13. $\begin{cases} x-y=3, \\ y-z=-5, \\ z-x=2. \end{cases}$　　14. $\begin{cases} 3x-8y+7z=10, \\ 2x+5y-3z=12, \\ 16x+9y-z=80. \end{cases}$

✓應用問題

396　以下問題，可用二個或多個未知文字如 $x, y, \cdots$ 之簡單方程系解之.在任何情形，用若干文字爲最宜，須依問題之條件而定. 當擇定文字 $x, y, \cdots\cdots$ 以代問題中之幾個未知數，設能以此種文字之關係表其餘未知數時，則將知問題中未用及之條件,產生以 $x, y, \cdots\cdots$ 所連絡之獨立合理之方程,其個數適與 $x, y, \cdots\cdots$ 之字數相等，其實設方程數較多，則此問題無解;設少則有無限之解 (§ 395).

§ 352 所論述問題本性，可限制未知數之性質上，亦適用於此。

例 1. 有三位數，其第二數字等於第一第三數字之和，第二第三數字之和爲 8. 設第一第三數字互換，則此數增加 99. 求此數.

設 $x=$ 百位數字，$y=$ 十位數字，$z=$ 個位數字.

則此數爲 $100x+10y+z$.

但依問題之條件，有

$$x+z=y, \tag{1}$$

$$y+z=8, \tag{2}$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99. \tag{3}$$

解 (1), (2), (3), 得 $x=2$, $y=5$, $z=3$.

故此數爲 253.

例 2. 一旅客步行某距離後休息 30 分鐘，以後依原速 $\frac{7}{8}$ 繼續旅行，到達目的地後，知在 6 時中共行全距離 20 哩. 設原速多行四哩仍休息如前，則旅行只須 $5\frac{6}{7}$ 時. 問原速如何？從起身處至休息處有若干遠？

設 $x=$ 每時原速之哩數，$y=$ 起身處至休息處之哩數.

(1) 實在行程及 (2) 假定行程所需時數，各以 x 與 y 之關係表之，則有

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}+\frac{20-y}{\frac{7x}{8}}=6, \quad (1) \qquad \frac{y+4}{x}+\frac{1}{2}+\frac{16-y}{\frac{7x}{8}}=5\frac{6}{7}. \quad (2)$$

(1) 及 (2) 就 $\frac{y}{x}$ 及 $\frac{1}{x}$ 解之，得 $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$.

故 $$x=4,\ y=6.$$

例 3. 二桶 A 與 B 各盛酒精與水之混合液. 如從 A 取 3 份及從 B 取 2 份混合，則含酒精 40%；如從 A 取 1 份，從 B 取 2 份混合則含酒精 32%. 問 A 與 B，各含酒精之百分率如何？

設 x 及 y 表 A 及 B 所含酒精之百分率。

則依已知條件，有

$$\frac{3x}{5}+\frac{2y}{5}=\frac{40}{100}, \qquad (1) \qquad\qquad \frac{x}{3}+\frac{2y}{3}=\frac{32}{100}. \qquad (2)$$

解 (1), (2), 得 $x=\frac{52}{100}$ 或 52%, $y=\frac{22}{100}$ 或 22%.

習　題　XI

1. 有三數,其和爲 20, 而 (1) 第一數加第二數之 2 倍,再加第三數之 3 倍,等於 44, 及 (2) 從第一第二數和之 2 倍,減第三數之 4 倍,等於 -14. 求各數。

2. 三數之和爲 51. 設第一數除以第二數，則得商爲 2 而餘 5; 設第二數除以第三數,則得商爲 3 而餘 2. 問各數如何?

3. 求如下所述二數字之一數，(1) 2 倍第一數字加 3 倍第二數字,等於 37; (2) 設二數字交換位置,則較原數減 9.

4. A 負債 \$ 5000, 而 B 負債 \$ 3000. A 除其所有銀外,如再有 B 之 $\frac{3}{4}$, 適可淸償債務;而 B 除其所有銀外, 如再有 A 之 $\frac{1}{2}$ 淸償債務尙不足 \$ 100. 問各有銀若干?

5. 三人 A, B, C 之財產如下: A 與 B 共有 p 元, B 與 C 共有 q 元, C 與 A 共有 r 元。問 p, q, r 必須滿足如何條件,始能爲此解所許可?

6. 一種款項依單利放出, 2 年後得本利和 \$ 2556.05. 而 4 年後得本利和 \$ 2767.10. 問此種款項及利率各如何?

7. 一人投資若干, 一部分爲照票面之 4%, 公債一部分爲每百市價 110 之 5% 公債,而其投資之進款爲 \$ 650. 設 4% 公債每百市價 80 而 5% 公債每百市價 110, 則其進款將多得 100 元。問此人投資若干?

8. 從下所述求矩形面積: 設一矩形之長增 6 吋, 寬增 6 吋,則長變爲寬之 $\frac{3}{2}$, 而面積大 84 方吋。

9 A 以款與 B 如 B 所原有；其後 B 與 A 如 A 之餘款；最後 A 又與 B 如 B 之餘數.此時 A 有 \$ 16, B 有 \$ 24. 問 A, B 原有款各若干?

10. A 與 B 合作,能於 $5\frac{1}{7}$ 日成一工程；A 與 C 合作，則需 $4\frac{4}{5}$ 日. 若三人作 2 日後，A 退出，而 B, C 又經 $1\frac{9}{17}$ 日作成。問 A, B, C 獨作，各需若干日可成?

11. 二點沿長 150 呎之圓周，依定速度而移動。依反向移動時，每 5 秒鐘相遇；同向移動時，每 25 秒鐘同在一處。問其速度如何?

12. 二列貨車之長，順次爲 240 碼及 200 碼，當反向進行時，經 20 秒而彼此馳過. 當同向進行時，則快車於 $3\frac{3}{4}$ 分超越慢車，問此二車每時之速度如何?

13. 二輪船 A 與 B 往來於相距 200 哩二城 C 與 D 之間。A 輪從 C 較 B 遲 1 時起程，能於 2 時後追及 B，而至 D 後停留 4 時，回來於距 D 城 10 哩之處遇 B。問 A 與 B 之速度如何?

14. 在半哩賽跑，A 能勝 B 20 碼，而勝 C 30 碼。問 B 能勝 C 若干碼?

15. A 與 B 作 440 碼之賽跑二次。第一次 A 讓 B 先行 20 碼而勝其二秒，第二次 A 讓 B 先行四秒而勝其 6 碼。問 A 與 B 之速度如何?

16. 二旅客共有行李 500 磅，因超過應帶重量，一客付 \$1.25，他客付 \$1.75. 設此行李歸一人攜帶，則須付 \$4. 問每人免費行李若干?

17. 已知如下合成之三種合金，A 含 5 份金（按重量），2 份銀，1 份鉛；B 含 2 份金，5 份銀，1 份鉛；C 含 3 份金，1 份銀，4 份鉛。如欲得 9 盎斯之合金，而含金銀鉛之量相等，問須在 A, B, C 中各取若干盎斯而鎔成?

18. A 與 B 爲銀與銅之合金. 一種含 5 份 A 與 3 份 B 之合金，有 52% 之銀；一種含 5 份 A，11 份 B 之合金，有 42% 之銀。求 A 與 B 中銀之百分率如何?

19 一射手距靶 500 碼開搶，$2\frac{2}{5}$ 秒鐘後聞子彈擊靶之聲。一觀者距靶600碼而距射手 210 碼，聞槍聲後 $2\frac{1}{10}$ 秒始聞子彈擊靶之聲。求聲之速度與彈之速，假定二者俱爲常數。

20. 一池由二管 A 及 B 注水，而由第三管 C 放水。設滿池時諸管齊開，則 3 時放盡；設只開 A 及 C，則 1 時放盡；設只開 B 及 C，則 45 分鐘放盡。設每分鐘 A 較 B 多注 100 嗧。問池之容量如何，及每分鐘各管流過若干嗧。

說明未定係數法之問題

397 今進而討論關於代數本身主旨之一二簡單問題。

注目於所論變數之特別函數，可引起疑問，即此函數能否化爲某種形式，設其能之，則化爲此種形式時，其係數如何？

下例說明此種問題着手之法則。

例. 一式 x^2+4x+6 能否化爲 $(x+1)$ 之二次多項式之形式，如能，則化爲此種形式時，其係數如何？

在問題內此形式之一般式，必可寫爲 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$，此處 a, b, c 俱表常數。

設所論化法爲可能，則必有

$$x^2+4x+6 \equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c. \tag{1}$$

或

$$x^2+4x+6 \equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c). \tag{2}$$

按 § 284 之 (2)，當 (2) 中 x 之同次冪係數相等時，且祇在此時，(1) 爲恆等式，即 $a=1$, $2a+b=4$, $a+b+c=6$ 時或依 a, b, c 解之，得 $a=1$, $b=2$, $c=3$ 時。

故

$$x^2+4x+6 \equiv (x+1)^2+2(x+1)+3.$$

觀於使已知式等於所求形式，惟用未定係數。於是假設此恆等式爲眞，則其係數必須滿足數個條件方程。而解此種方程可得各係數之值。

以下爲包含上述之最普通問題。 398

說明某種條件且發問題如下：某種特殊形式之任何函數，能滿足此種條件能否存在，設能存在，則其係數如何？

欲解如此問題，可用未定係數作此形式之式。此種係數卽爲問題中之未知數，而已知條件產出方程系而爲未知數所應滿足者。設方程有一解，則得滿足已知條件之單一函數；設此系無解，則無如此函數存在；設此系有無限之解，則問題爲不定，卽有無限數函數能滿足已知條件。此處所論，假定其函數爲有限式（§ 264）。

例. 設爲可能，求 x 之二次多項式，當 $x=1$ 及 $x=3$ 時，使其爲 0，當 $x=4$ 時，使其值爲 6.

問題內之多項式，必有形狀 ax^2+bx+c. 而問題之條件

$$a+b+c=0,\quad 9a+3b+c=0,\quad 16a+4b+c=6.$$

依 a, b, c 解之，得 $a=2, b=-8, c=6$.

故所求之多項式爲 $2x^2-8x+6$.

如問題爲求一次多項式滿足已知條件，則無解；如爲求三次多項式，則有無限之解.

399. 以上諸節中所說明之法則，名爲未定係數法．此爲代數學上研究之主要法則，以後常有應用之處。

習 題 XII

1. 試以 $x-2$ 之多項式表 $3x^3-x^2+2x-5$.

2. 試以 $2x+3$ 之多項式表 $4x^2+8x+7$.

3. 求 $f(x)=ax^2+bx+c$, 使 $f(-1)=11$, $f(1)=-5$, $f(5)=6$.

4. 求 $f(x)=ax^3-bx^2+cx+d$ 使 $f(0)=5$, $f(-1)=1$, $f(1)=9$, $f(2)=31$.

5. 求 $f(x, y)=ax+by+c$, 使 $f(0,0)=4$, $f(4,4)=0$, $f(1,0)=6$.

6. 求簡單方程 $ax+by+1=0$, 其二解爲 $x=3$, $y=1$ 及 $x=4$, $y=-1$.

7. 簡單方程 $ax+by+c=0$ 有三解爲 $x=3$, $y=1$; $x=4$, $y=-1$; $x=1$, $y=1$; 能求得此方程否?

8. 求簡單方程，其圖形爲通過點 $(2, 3)(-4, 5)$ 之直線。

9. 定 c 之值，使 $3x+y+c=0$ 之圖形通過點 $(-2, 3)$.

10. 求二簡單方程，$ax+by+1=0$ (1), $a'x+b'y+1=0$ (2), 使二者皆能爲 $x=2$, $y=3$ 所滿足，而 (1) 能爲 $x=7$, $y=5$ 所滿足，及 (2) 能爲 $x=3$, $y=7$ 所滿足．求作此種方程之圖形。

11. 求方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$, 其根爲 -2,1 及 3.

12. 求形式 $x^2+bxy+cx+dy=0$ 之方程，有解爲 $x=1$, $y=0$; $x=2$, $y=1$; $x=-2$, $y=1$.

13. 化 $3x+2y-3$ 爲下之形式:

$$a(x+y-1)+b(2x-y+2)+c(x+2y-3)$$

此處 a, b, c 爲常數。

V. 除法變形

一般法則

初步討論. 在 § 319 內,規定以 B 除 A 之商,爲能以計 400
算法則化成如分式 A/B 之簡單形式.

當 A 及 B 爲同文字 x 之多項式,而 A 之次數不小於 B 時,則求如此規定之商,其一般法如下:

1. B 如能爲 A 之因式,換言之,A 能化爲下式

$$A \equiv QB, \tag{1}$$

此處 Q 爲 x 之整函數.

則得
$$\frac{A}{B} \equiv Q,$$

卽以 B 除 A 之商爲整函數 Q,而稱 B 能整除 A.

例如,$A=x^3+4x^2-2x-5$ 及 $B=x^2+3x-5$,則得 x^3+4x^2-2x-5 $=(x+1)(x^2+3x-5)$ 此爲與 (1) 同形之恆等式,其 Q 爲 $x+1$.

故
$$\frac{A}{B}=\frac{x^3+4x^2-2x-5}{x^2+3x-5}=x+1.$$

2 但 B 常非 A 之因式,故不能化 A 爲 QB 之形;然據 § 401,可化成下式:

$$A \equiv QB + R, \tag{2}$$

此處 Q 及 R 俱爲 x 之整函數,且 R 之次數小於 B.

故得
$$\frac{A}{B} \equiv Q + \frac{R}{B},$$

即以 B 除 A 之商，爲一整函數 Q 與一分式 $\frac{R}{B}$ 之和，此分式中分子之次數小於分母之次數.

在此情形，Q 稱爲商之整式部分，R 稱爲餘式.

例如，$A=x^3+2x^2+3x+3$ 及 $B=x^2+2x+2$，書作下式，即能化 A 爲形式 (2)，

$$x^3+2x^2+3x+3=x(x^2+2x+2)+(x+3),$$

此處 Q 爲 x，而 R 爲 $x+3$，其次數小於 B.

故
$$\frac{A}{B}=\frac{x^3+2x^2+3x+3}{x^2+2x+2}=x+\frac{x+3}{x^2+2x+2}.$$

401 **除法變形.** 今須表示如何化 A 爲形式 $QB+R$，此處 R 之次數小於 B，亦可爲 0. 通常完成此種變化之方法稱爲除法變形或"長除法". 茲以下例說明之.

令 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$ 及 $B=x^2-x+1$.

此處 B 爲二次，而此題卽求一整函數 Q，使自 A 減去 QB 所得之 R，至多爲一次或 0；設如此函數 Q 已求得，則有

$$A-QB\equiv R,\ 故\ A\equiv QB+R.$$

因 A 之次數爲四，而 R 之次數不能大於一，Q 必須當 A 減 QB 時 A 之前三項消去. 此點啓發下法以求 Q.

$$\begin{array}{rlll}
A= & 2x^4+3x^3+4x^2+x-2 & \quad x^2-x+1=B & \\
2x^2B= & 2x^4-2x^3+2x^2 & \quad 2x^2+5x+7=Q & \\
A-2x^2B= & 5x^3+2x^2+x-2 & & (1)\\
5xB= & 5x^3-5x^2+5x & & \\
A-(2x^2+5x)B= & 7x^2-4x-2 & & (2)\\
7B= & 7x^2-7x+7 & & \\
A-(2x^2+5x+7)B= & 3x-9=R & & (3)
\end{array}$$

顯然可見設從 A 減 B 之任何倍式與 A 有同一首項者，則消去 A 之首項.此種最簡倍式爲 $2x^2B$, 此處乘式 $2x^2$ 係用 B 之首項 x^2 除 A 之首項 $2x^4$ 而得。

如上從 A 減去 $2x^2B$, 得

$$A-2x^2B=5x^3+2x^2+x-2. \tag{1}$$

用同法可消去餘式 (1) 之首項，即消去 A 之第二項.以 x^2 除 $5x^3$ 之商爲 $5x$, 而以 $5x$ 乘 B 從餘式減之，則得

$$A-(2x^2+5x)B=7x^2-4x-2. \tag{2}$$

最後，以 x^2 除 $7x^2$ 得 7, 以 $7B$, 從 (2). 減之，則消去餘式 (2) 之首項，即消去 A 之第三項，其結果爲

$$A-(2x^2+5x+7)B=3x-9. \tag{3}$$

餘式 (3) 爲一次式，係從 A 減 $(2x^2+5x+7)B$ 而得。

故求得之多項式 Q 及 R 爲

$$Q=2x^2+5x+7 \text{ 及 } R=3x-9.$$

寫恆等式 (3) 爲

$$A=(2x^2+5x+7)B+(3x-9).$$

即得 A 成爲形式 $QB+R$, 此處 R 之次數小於 B.

故當 A 與 B 爲已知時，得求 Q 及 R 之法則如下：

依 x 之降冪排列 A 與 B 二者.

以 B 之首項除 A 之首項；其商爲 Q 之第一項.

以 Q 之第一項乘 B, 從 A 減其積.

所得之餘式，依同法進行，以 B 之首項除餘式之首項，依此類推。

繼續進行，直至餘式之次數小於 B 之次數爲止，於是得 Q 之一切項，而最後餘式必爲 $A-QB$ 或 R.

尋常排列演算，如上說明。以後可用分離係數法，猶如乘法。

例 1. 已知 $A=2x^5-6x^4+7x^3+8x^2-19x+20$, 及 $B=x^2-3x+4$; 求 Q 與 R.

$$
\begin{array}{l|l}
2-6+7+8-19+20 & 1-3+4 \\
\underline{2-6+8} & \overline{2+0-1+5} \\
\quad -1+8-19 & \\
\quad \underline{-1+3-\ \ 4} & \text{故 } Q=2x^3-x+5 \\
\qquad\quad 5-15+20 & \text{及 } R=0. \\
\qquad\quad \underline{5-15+20} &
\end{array}
$$

注意，代第一餘式之 $-1+8-19+20$; 今僅書其在減法中用及之一部分 $-1-8-19$. Q 之第二項係數爲 0, 因 A 之首二項已在第一次減法消去故也。

例 2. 已知 $A=x^4+2x^3+3x^2+2x+4$, $B=x^2+2x$, 求 Q 及 R.

402 **此法應注意之點.** 1. 在此除法變形，其中間餘式皆作爲新被除式；且設 R_1 表任何餘式，Q_1 爲 Q 之已得一部，而 Q_2 爲 Q 之其餘一部，則得

$$A\equiv Q_1B+R_1 \text{ 及 } R_1\equiv Q_2B+R.$$

2. 求 Q 及 R 之方法，本非以 B 除 A, 僅爲乘法及減法所成之預備演算，藉此以化 A 爲 $A\equiv QB+R$ 之形式而已。以 B 除 A 之法，從恆等式 $A\equiv QB+R$ 直至恆等式 $A/B\equiv Q+R/B$, 不能發生。

求 Q 及 R 之演算，通常稱為"除法"，亦稱 Q 為"商"，以代"商之整式部分"，當 R 不為 0 時亦然，本書沿用之，但如此則"以 B 除 A"非如 § 254 所言，求一式乘 B 而得 A 之意義，乃為第一求 B 之倍式如何，方能從 A 減之得次數小於 B 之餘式，及此餘式如何。比較 § 87。

3. 將整式 A 化為整形式 $QB+R$ 之步驟中，無論 x 之值如何皆可，故 A 與 $QB+R$ 關於 x 之一切值有等值，雖致 B 等於 0 者時亦如此，就他方面而言，當 $B=0$ 時，則 $\frac{A}{B}$ 及 $Q+\frac{R}{B}$ 皆無意義。

例如，設　$A=x^2+x+1$ 及 $B=x-1$，

依 § 401，得　$$x^2+x+1=(x+2)(x-1)+3, \tag{1}$$

故　$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=x+2+\frac{3}{x-1}. \tag{2}$$

當 $x=1$ 時，$B=0$。在 (1) 及 (2) 中以 1 代 x 得 $3=3$ 為眞，但 $\frac{3}{0}=3+\frac{3}{0}$ 則無意義。

4. A 之變形至 $QB+R$，只有一法，卽只有一對整函數 Q 及 R 存在（R 較 B 為低次）可使

$$A\equiv QB+R.$$

因若有如此之第二對 Q' 及 R'，則得

$$QB+R=Q'B+R', \text{ 故 } (Q-Q')B=R'-R.$$

但此為不可能，因 $R'-R$ 較 B 為低次，而 $(Q-Q')B$ 則不較 B 為低次故也。

常數乘被除式或除式之影響。 下列定理，後皆有用。 **403**

1. 設以任何常數 c 乘被除式，則商及餘式皆被 c 乘。

因設　$A=QB+R$，則 $cA=cQ\cdot B+cR$。

2. 設以 c 乘除式,則以 c 除其商,而餘式不變。

因設 $$A=QB+R,\text{ 則 }A=\frac{Q}{c}\cdot cB+R.$$

3. 設以 c 乘被除式及除式,則以 c 乘其餘式,而商不變。

因設 $$A=QB+R,\text{ 則 }cA=Q\cdot cB+cR.$$

4. 設於除法變形之任何步驟中,以 c 乘其中間餘式或被除式,則其最後餘式設有變動,僅爲 c 所乘。

此從 1 與 2, 及 § 402, 1 而來。

學者可就特例證驗以上諸定理。

例如,先以 $B=2x-1$, 次以 $B=4x-2$ 除 $A=4x^2+6x+1$, 可驗證第二定理。

$$\begin{array}{r|l} 4+6+1 & 2-1 \\ 4-2 & \overline{2+4} \\ \hline 8+1 & \\ 8-4 & \therefore\ Q=2x+4, \\ \hline 5 & R=5. \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4+6+1 & 4-2 \\ 4-2 & \overline{1+2} \\ \hline 8+1 & \\ 8-4 & \therefore\ Q=x+2, \\ \hline 5 & R=5. \end{array}$$

404 **用未定係數法演除法。** 當 A 及 B 爲已知時,亦可求 Q 及 R 如次:

例 1. 以 $B=x^2-x+1$ 除 $A=2x^4+3x^3+4x^2+x-2$.

因 A 爲四次,而 B 爲二次,可預知 Q 爲二次,R 至多爲一次。

故令 $$Q=c_0x^2+c_1x+c_2\text{ 及 }R=d_0x+d_1.$$

此處關於係數 c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, 之值,必須使

$$2x^4+3x^3+4x^2+x-2=(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^2-x+1)+d_0x+d_1$$

$$=c_0x^4+\left.\begin{array}{l}-c_0\\+c_1\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{l}c_0\\-c_1\\+c_2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}c_1\\-c_2\\+d_0\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{l}c_2\\+d_1\end{array}\right| \qquad (1)$$

但使 (1) 爲恆等式,須有 (§ 284),

$$\begin{aligned}
c_0 &= 2. \\
-c_0+c_1 &= 3, \quad \therefore\ c_1 = 3+c_0 = 3+2 = 5. \\
c_0-c_1+c_2 &= 4, \quad \therefore\ c_2 = 4-c_0+c_1 = 4-2+5 = 7. \\
c_1-c_2+d_0 &= 1, \quad \therefore\ d_0 = 1-c_1+c_2 = 1-5+7 = 3. \\
c_2+d_1 &= -2, \quad \therefore\ d_1 = -2-c_2 = -2-7 = -9.
\end{aligned}$$

故 $Q=2x^2+5x+7$ 及 $R=3x-9$ 與 § 401 相同。

例 2. 以 $2x^2+x-2$ 除 $6x^5+13x^4-12x^3-11x^2+11x-2$.

整除法. 設 A 與 B 表文字係數之 x 之多項式,而假定 B 之次數爲 m, 因 B 能整除 A, 其餘式 R 必恆爲 0, 此必需 R 之諸係數皆爲 0. 因 R 之次數爲 $m-1$, 故有 m 個係數 (§ 277), 此諸係數顯然爲 A 與 B 之係數之函數,故 405

欲以 m 次多項式 B 整除一多項式 A, 則 A 與 B 之係數,必須滿足 m 個條件.

下例說明此事:

例 1. x^2+ax+1 能整除 x^3+3x^2+bx+2, 其 a 與 b 之值如何?

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2+bx \qquad +2 & x^2+ax+1 \\
\underline{x^3+ax^2+x} & \overline{x+(3-a)} \\
(3-a)x^2+(b-1)x \quad +2 & \\
\underline{(3-a)x^2+(3a-a^2)x+(3-a)} & \\
\qquad (b-1-3a+a^2)x+(a-1) &
\end{array}$$

故 a 與 b 必須滿足二條件:

$b-1-3a+a^2=0$, $a-1=0$; 因得 $a=1$ 及 $b=3$.

例 2. 試定 l 及 m 使 x^2+x-6 能整除 $2x^3+3x^2+lx+m$.

依 x 之升冪排列被除式及除式. 令 A 與 B 表依 x 之升冪排列之被除式與除式,而假定 A 首項之次數不較 B 首項低.用 § 40 所言,消去首數項之方法,可得以 B 表 A 之 406

整式. 設 B 能整除 A, 則其結果與 A, B 依降冪排列時相同; 但設 B 不能整除 A, 則其結果全然各異. 以下例明之.

$$
\begin{array}{r|l}
1+3x+3x^2+x^3 & 1+x \\
\underline{1+x} & \overline{1+2x-x^2} \\
2x+3x^2 & \\
\underline{2x+2x^2} & \\
x^2+x^3 & \\
\underline{x^2+x^3} & \\
0 &
\end{array}
\qquad (1)
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
1-2x+x^2 & 1+x \\
\underline{1+x} & \overline{1-3x+4x^2} \\
-3x+x^2 & \\
\underline{-3x-3x^2} & \\
4x^2 & \\
\underline{4x^2+4x^3} & \\
-4x^3 &
\end{array}
\qquad (2)
$$

依 § 401 之理由, 從上列之計算, 得

$$1+3x+3x^2+x^3=(1+2x+x^2)(1+x) \tag{1}$$

$$1-2x+x^2 \qquad =(1-3x+4x^2)(1+x)-4x^3. \tag{2}$$

結果 (1) 與依 x 之降冪排列除式及被除式時所得者相同. 此爲在整除時必有之情形, 可從 § 402, 4 知之.

但結果 (2) 與依 x 之降冪排列 $1-2x+x^2$ 及 $1+x$ 時所得者完全不同. 於是得

$$x^2-2x+1=(x-3)(x+1)+4. \tag{3}$$

(2) 與 (3) 爲眞恆等式, 但以 $x+1$ 表 x^2-2x+1 爲不同之二式, 而因此對於以 $x+1$ 除 x^2-2x+1 之商, 亦得不同之二式, 卽:

$$\frac{1-2x+x^2}{1+x}=1-3x+4x^2-\frac{4x^3}{1+x},$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x+1}= \qquad x-3 \quad +\frac{4}{x+1}.$$

407　由此可見依升冪排列, 各餘式首項之次數, 逐漸增加, 且除整除法外, 演算方法無自然止境. 如果逐步進行, 可得一任何項之多項式, 爲商之整式部分, 從而其次數之高可如心所欲. 故

設 A 及 B 表依 x 之升冪排列之多項式，B 不能整除 A，而 A 之首項次數不低於 B，則以 B 除 A 之商，可化爲下式：

$$\frac{A}{B}\equiv Q'+\frac{R'}{B},$$

此處 Q' 及 R' 爲依 x 之升冪排列之整函數．Q' 之末項次數之高，可如心所欲而 R' 之首項次數亦愈高．

設 Q' 之項數爲 n，則稱 Q' 爲以 B 除 A 之商至 n 項，而 R' 爲其對應餘式．

當 x 之值小（小至如何，將說明於後）時，則取 n 至足用之大，可使 $\frac{R'}{B}$ 之值小至如心所欲，即可求得多項式 Q'，其值與 $\frac{A}{B}$ 相差小至如心所欲．因此之故，多項式 Q' 常稱爲關於分式 $\frac{A}{B}$ 之近似整式．

例如，以 $1-x$ 除 1 至 n 個"步驟"，則得

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

設 x 爲小於 1 之任何值，可選得 n，使 $1+x+\cdots+x^{n-1}$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 之差小至如心所欲．例如設 $x=\frac{1}{3}$，則 $\frac{x^3}{1-x}=\frac{1}{18}$，因此 $1+x+x^2$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 僅差 $\frac{1}{18}$．同理，$1+x+x^2+x^3$ 與 $\frac{1}{1-x}$ 僅差 $\frac{1}{54}$；餘類推．

用未定係數法求商至 n 項． 今以下例說明之： 408

例 1.　求商 $\frac{3-x}{1-x+2x^2}$ 至四項．

令
$$\frac{3-x}{1-x+2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots. \qquad (1)$$

以 $1-x+2x^2$ 乘其二端，並集項，

$$
3-x \equiv a_0 + \begin{array}{c|c|c|l} a_1 & x + \;\; a_2 & x^2 + \;\; a_3 & x^3+\cdots \\ -a_0 & -\;a_1 & -\;a_2 & \\ & +2a_0 & +2a_1 & \end{array} \tag{2}
$$

但欲使 (2) 爲恆等式，必有 (§ 284)，

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 3, && \\
&a_1 - a_0 = -1, &\therefore\quad & a_1 = -1 + a_0 = 2. \\
&a_2 - a_1 + 2a_0 = 0, &\therefore\quad & a_2 = a_1 - 2a_0 = -4. \\
&a_3 - a_2 + 2a_1 = 0, &\therefore\quad & a_3 = a_2 - 2a_1 = -8.
\end{aligned}
$$

故　　$(3-x)/(1-x+2x^2) = 3 + 2x - 4x^2 - 8x^3 + \cdots$.

例 2.　求 $\dfrac{2+x+3x^2}{1+x-x^2}$ 至五項。

409　**含一變數以上之多項式.**　命 A 與 B 爲二多項式各含一變數以上。關於變數之一，苟非 A 之次數低於 B，則 B 有整除 A 之可能，換言之，卽有使 $\dfrac{A}{B} \equiv Q$ 之整函數 Q 存在。設先將 A 與 B 排列爲一變數之多項式，次用 § 401 之法則以求 Q，卽可發見其是否可能。

例 1.　以 $x+y+z$ 除 $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3yz\cdot x + (y^3+z^3) & x + (y+z) \\ \cline{2-2}
x^3 + (y+z)x^2 & x^2 - (y+z)x + (y^2 - yz + z^2) \\ \cline{1-1}
\quad -(y+z)x^2 - 3yz\cdot x & \\
\quad -(y+z)x^2 - (y+z)^2 x & \\ \cline{1-1}
\qquad (y^2 - yz + z^2)x + (y^3+z^3) & \\
\qquad (y^2 - yz + z^2)x + (y^3+z^3) & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

故　　$(x^3+y^3+z^3-3xyz)/(x+y+z) = x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

例 2.　以 $x+y+4$ 除 $2x^2+5xy+3y^2+7x+11y-4$.

設 B 不能整除 A，則得 $\dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$ 之式，此處 Q 及 R 爲關於排列文字之整式，而 R 關於此文字之次數低於 B，但

此式之形式，隨其所選擇之排列文字而不同。

例. 以 $2x+y$ 除 $4x^2+6xy+y^2$.

(1) 選擇 x 爲排列文字，得

$$\begin{array}{l|l}
4x^2+6xy+y^2 & 2x+y \\ \cline{2-2}
4x^2+2xy & 2x+2y \\ \cline{1-1}
\quad 4xy+y^2 & \\
\quad 4xy+2y^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad -y^2 &
\end{array}$$

故

$$\frac{4x^2+6xy+y^2}{2x+y}=2x+2y-\frac{y^2}{2x+y}.$$

(2) 選擇 y 爲排列文字，得

$$\begin{array}{l|l}
y^2+6yx+4x^2 & y+2x \\ \cline{2-2}
y^2+2yx & y+4x \\ \cline{1-1}
\quad 4yx+4x^2 & \\
\quad 4yx+8x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad -4x^2 &
\end{array}$$

故

$$\frac{y^2+6yx+4x^2}{y+2x}=y+4x-\frac{4x^2}{y+2x}.$$

習 題 XIII

1. 用 § 401 之法則與分離係數法，以 $3x^2+x-6$ 除

$$6x^4-7x^3-3x^2+24x-20.$$

2. 如上以 x^2+2x-7 除 $3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$.

3. 如上以 x^2-2x+4 除 $2x^5-5x^4+13x^3-15x^2+22x$.

4. 如上以 x^3-x+5 除 $4x^7-3x^5+19x^4+2x^3+4x^2-4x+7$.

5. 用未定係數法 (§ 404) 以 x^2-3x+2 除 $2x^3-3x^2+x-5$.

6. 如上以 x^3-3x+2 除 $2x^5-3x^4+x^2-5$.

7. 已知 $A=3x^3-5x^2-7x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$，化 A 爲形式 $A=QB+R$，此處 R 之次數低於 B. 又將 A/B 之對應式書出。

8. 試定 a 與 b 使 $x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 可被 x^2-2x+1 整除。

9. a 與 b 爲何值，則 $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+ax+b}{x^2+3x+5}$ 可化爲整式。

10. 以 x^2+x+1 除 $x^6+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2)$.

11. 以 $x+3y-4$ 除 $2x^2+5xy-3y^2-5x+13y-12$.

12. 以 $2a+b-3c$ 除 $2a^2-b^2-6c^2-ab+ac+5bc$.

13. 以 $ab+bc+ca$ 除 $a^2(b+c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)+abc$.

14. 以 x^2-3x+4 除 $x^4+(a-3)x^3+(4-a)x^2-2ax+8a$.

15. 用分離係數法，以 $2x-3y$ 除 $8x^3-27y^3$.

16. 如上，以 $x-y$ 除 $x^4-4xy^3+3y^4$.

17. 如上，以 $2a^2-ab+b^2$ 除 $6a^5+a^4b-a^3b^2+11a^2b^3-5ab^4+4b^5$.

18. 被除式爲 $2x^3+xy^2+y^3$，除式爲 $2x+y$，求 Q 及 R，先選擇 x 爲"排列文字"時；次選擇 y 爲"排列文字"時。

19. 當被除式爲 $1-3x+5x^2$，除式爲 $1+x+3x^2$ 時，將被除式與除式皆依 x 之升冪排列，求商至第三項及餘式。

20. 被除式爲 $1+x+3x^2$，除式爲 $1-3x+5x^2$ 時，如上求之。

21. 用未定係數法 (§ 408)，求 $\dfrac{1}{1+2x}$ 之商至四項。

22. 如上求 $(2+3x+4x^2)/(1-x+2x^2)$ 之商至四項。

綜合除法與餘式定理

410　**綜合除法．** 今將進述除法變形之簡捷法則，可用於除式爲 $x-b$ 卽首項係數爲 1 之一次二項式時．

就 $x-b$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之結果考之，

$$
\begin{array}{l|l}
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x-b \\
\underline{a_0x^3-a_0bx^2} & \overline{a_0x^2+(a_0b+a_1)x+(a_0b^2+a_1b+a_2)} \\
(a_0b+a_1)x^2+a_2x & \\
\underline{(a_0b+a_1)x^2-(a_0b^2+a_1b)x} & \\
\qquad (a_0b^2+a_1b+a_2)x+a_3 & \\
\qquad \underline{(a_0b^2+a_1b+a_2)x-(a_0b^3+a_1b^2+a_2b)} & \\
\qquad\qquad a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=R &
\end{array}
$$

其 Q 及 R 之係數爲

$$a_0,\ a_0b+a_1,\ a_0b^2+a_1b+a_2,\ a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3.$$

應注意於第一係數爲被除式之首項係數，其餘之係數可依下法得之：

以 b 乘已得之係數，再加被除式之其次未用係數。

例如，
$$a_0b^2+a_1b+a_2=(a_0b+a_1)b+a_2,$$
及
$$a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=(a_0b^2+a_1b+a_2)b+a_3.$$

不論被除式之次數如何，此法皆可適用。蓋因除式之首項係數爲 1，Q 之各個新係數，常與最近所得餘式之首項係數相同故也。故以 b 乘 Q 之前一係數，再加被除式之新係數，即得 Q 之後一係數。同理，以 b 乘 Q 之末項係數，再加被除式之末項係數即得 R.

故除式有形式 $x-b$，被除式有形式 $a_0x^n+a_1x^{n+1}+\cdots+a_n$ 411
時，可求得 Q 及 R 如下，此處之 $c_0, c_1, \cdots\cdots c_{n-1}$ 表 Q 之係數。

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & b \\
\hline
 & c_0b & c_1b & \cdots & c_{n-2}b & c_{n-1}b & \\
\hline
c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & R &
\end{array}$$

先依固有次序書被除式之係數，而於其右書 b.

在 a_0 之下書 c_0，可知 c_0 與 a_0 相等。

以 b 乘 c_0，書其積 c_0b 於 a_1 之下，相加得 c_1.

同法，以 b 乘 c_1 書其積 c_1b 於 a_2 之下，相加得 c_2.

如此進行，更迭相乘而加之，直至 $a_0, a_1 \cdots a_n$ 用盡爲止。

例。 以 $x-2$ 除 $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$.

得

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -5 & -4 & +3 & -2 & 2 \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1 & -4 & \end{array}$$

故 $Q=3x^3+x^2-2x-1$ 及 $R=-4$.

此簡潔法則，名爲綜合除法，讀者遇除式有形式 $x-b$ 時，須用此法以養成自己之習慣。

412 **此法應注意之點.** 1. 用綜合除法，當被除數爲不完全多項式時，須以 0 係數表其 x 之缺冪。

2. 因 $x+b=x-(-b)$，故形式 $x+b$ 之二項式，亦可演綜合除法。此只須以 $-b$ 代 b 於上述計算中足矣。

例 1. 以 $x+1$ 除 x^4-1.

此處 $x+1=x-(-1)$，以 $x-(-1)$ 除之，則有

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +0 & +0 & +0 & -1 & -1 \\ & -1 & +1 & -1 & +1 & \\ \hline 1 & -1 & +1 & -1, & 0 & \end{array}$$

故 $Q=x^3-x^2+x-1$，而 $R=0$.

3. 欲以形式 $ax-\beta$ 之二項式除之，則可書爲 $a\left(x-\dfrac{\beta}{a}\right)$.

於是以 $\left(x-\dfrac{\beta}{a}\right)$ 施綜合除法，而令 Q 及 R 表其所得之商及餘式。

則對應於 $ax-\beta$ 之商及餘式必爲 $\dfrac{Q}{a}$ 及 R (§ 403, 2).

例 2. 以 $3x-2$ 除 $3x^3-11x^2+18x-3$.

此處 $3x-2=3(x-\frac{2}{3})$，以 $x-\frac{2}{3}$ 除之，則有

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -11 & +18 & -3 & 2/3 \\ & 2 & -6 & 8 & \\ \hline 3 & -9 & 12, & 5 & \end{array}$$

故所求之商為 $\frac{3x^2-9x+12}{3}$ 或 x^2-3x+4, 而餘式為 5.

例 3. 以 $x-3$ 除 $5x^5-x^3+x+2$.

例 4. 以 $x+3$ 除 $x^3+6x^2+11x+6$.

例 5. 以 $2x-3$ 除 $2x^3-3x^2+8x-12$.

餘數定理. 含 x 之多項式除以 $x-b$ 時,則其所得之餘數等於以 b 代被除數中 x 之結果;因此設 $f(x)$ 表被除式,則 $f(b)$ 表其餘式. 413

此定理之證明已述於 § 410; 蓋因其已證明設以 $x-b$ 除 $a_0x^3-a_1x^2+a_2x+a_3$ 則得其餘式 $a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3$ 故也. 就一般而言,設以 $x-b$ 除 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 則其餘式必為 $a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots+a_n$ 或 $f(b)$.

此定理亦可用下法證明:

設 $f(x)$ 為被除式, $x-b$ 為除式, $\phi(x)$ 為商, R 為餘式,則依 § 401,

$$f(x)=\phi(x)(x-b)+R.$$

此處 R 之次數低於 $x-b$, 即不含 x, 故對於 x 之一切值,有同值.

無論 x 為何值,此恆等式之二端有等值.於特例,當 $x=b$ 時,二端仍有等值,

故
$$f(b)=\phi(b)(b-b)+R.$$

但 $b-b=0$; 且因 $\phi(x)$ 為整式, $\phi(b)$ 為有限值。

故 $\phi(b)(b-b)=0$, 因此而

$$f(b)=R.$$

下例適應二種需要,一為表明餘式定理之眞確,一為指示當 b 及 $f(x)$ 之係數為已知數時,普通計算 $f(b)$ 之值之最簡法,為以 $x-b$ 除 $f(x)$ 用綜合除法所得之餘式即 $f(b)$. 414

例 1. 當 $x=4$ 時, $f(x)=5x^4-12x^3-20x^2-43x+6$ 之值如何?

1. 用直接代入法,得

$$f(4)=5\cdot 4^4-12\cdot 4^3-20\cdot 4^2-43\cdot 4+6=1280-768-320-172+6=26.$$

2. 用綜合除法,得

$$\begin{array}{rrrrrl}
5 & -12 & -20 & -43 & +6 & \underline{|4} \\
 & 20 & 32 & 48 & 20 & \\
\hline
5 & 8 & 12 & 5 & 26 & =f(4).
\end{array}$$

例 2. 已知 $f(x)=3x^4-x^3+5x^2-8x+4$, 用綜合除法求 $f(2), f(-2), f(4)$, $f(-2/3)$.

415 系 1. 當 $x=b$ 時,設 $f(x)$ 爲 0; 則 $x-b$ 必能整除 $f(x)$, 其逆亦眞.

依據 § 413, 因 $f(b)$ 爲 $x-b$ 除 $f(x)$ 之餘式,而當餘式爲 0 時,即此除法爲除盡故也.

例如, $x=1$ 時, $f(x)=x^3-3x^2+2$, 即 $f(1)=1-3+2=0$.

故 $x-1$ 能整除 $f(x)$, 可實行除法證驗.

其次 $f(x)=x^n-b^n$ 可用 $x-b$ 整除, 因 $f(b)=b^n-b^n=0$ 故也.

例 1. 設 $x-2$ 能整除 x^3+3x^2-m, 則 m 之值如何?

必有 $$2^3+3\cdot 2^2-m=0, \text{ 或 } m=20.$$

例 2. 設 n 爲奇數,則 $x+b$ 能整除 x^n+b^n, 但設 n 爲偶數則不能,試證之.

416 系 2. 含二個或多個變數之整函數,設其中二變數 x 及 y 假定相等時爲零,則變數之差 $x-y$, 能整除此函數.

因此函數可化爲係數含他變數之 x 之多項式.由假設,當 $x=y$ 時,函數爲零.故可用 $x-y$ 整除 (§ 415).

例如, $x=y$ 時, $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ 爲零,因以 y 代 x, 則有

$$y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)=0.$$

故 $x-y$ 能整除 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$. 今可實行除法以證明此結論如下:

$$\begin{array}{l|l} (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y^2z-z^2y) & x-y \\ \cline{2-2} \underline{(y-z)x^2-(y^2-yz)x} & (y-z)x-(yz-z^2) \\ \qquad -(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y) & \\ \qquad \underline{-(yz-z^2)x+(y^2z-z^2y)} & \end{array}$$

例. 證明 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 可用 $x-y$, $y-z$ 及 $z-x$ 整除.

定理. 當 $x=a$ 時及當 $x=b$ 時,設多項式 $f(x)$ 爲零,則 $f(x)$ 可用 $(x-a)(x-b)$ 整除. **417**

因依假設, $f(a)=0$, 故 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除 (§ 415), 設其商爲 $\phi_1(x)$, 則

$$f(x)\equiv(x-a)\phi_1(x),\ \text{此處}\ \phi_1(x)\ \text{爲整式}. \tag{1}$$

設在 (1) 中,使 $x=b$, 則有

$$f(b)=(b-a)\phi_1(b). \tag{2}$$

但依假設, $f(b)=0$, 而 $b-a\neq0$.

因積爲零時,其因數中必有一爲零 (§ 253), 故從 (2) 得 $\phi_1(b)=0$.

但設 $\phi_1(b)=0$, 則 $\phi_1(x)$ 可用 $x-b$ 整除 (§ 415), 設其商爲 $\phi_2(x)$, 則有

$$\phi_1(x)\equiv(x-b)\phi_2(x),\ \text{此處}\ \phi_2(x)\ \text{爲整式}. \tag{3}$$

以此式代入 (1) 中之 $\phi_1(x)$, 則有

$$f(x)\equiv(x-a)(x-b)\cdot\phi_2(x), \tag{4}$$

即已證明 $f(x)$ 可用 $(x-a)(x-b)$ 整除.

續行此法,可證明下述之一般定理

設 $f(x)$ 關於 $x=a, b, c, \cdots$ 爲零,則 $f(x)$ 可用 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$ 整除. **418**

例如,當 $x=1$ 及 $=-1$ 時, $2x^3+3x^2-2x-3$ 爲零,即 $2+3-2-3=0$ 及 $-2+3+2-3=0$.

故 $2x^3+3x^2-2x-3$ 可用 $(x-1)(x+1)$ 或 x^2-1 整除,可實行除法證驗.

例 1. 求一二次多項式 $f(x)$, 當 $x=2$ 時及當 $x=3$ 時, $f(x)=0$, 而當 $x=4$ 時, $f(x)=6$.

因 $f(x)$ 爲二次式,且可用 $(x-2)(x-3)$ 整除 (§ 417), 故此式可用形式 $f(x)=a_0(x-2)(x-3)$, 此處 a_0 爲常數。

又因 $f(4)=6$, 故有 $6=a_0(4-2)(4-3)$, 由此得 $a_0=3$.

故 $f(x)=3(x-2)(x-3)=3x^3-15x+18$.

例 2. 求一三次多項式 $f(x)$, 當 $x=2$ 時及 $x=4$ 時, $f(x)=0$, 而當 $x=1$ 時, $f(x)=6$; 當 $x=4$ 時, $f(x)=18$.

理由如前,則有 $f(x)=(a_0x+a_1)(x-2)(x-3)$, 此處 a_0, a_1 爲常數。

其次,因 $f(1)=6$ 及 $f(4)=18$, 故得

$$6=(a_0+a_1)(1-2)(1-3), \text{ 或 } a_0+a_1=3, \tag{1}$$

$$18=(4a_0+a_1)(4-2)(4-3), \text{ 或 } 4a_0+a_1=9. \tag{2}$$

解 (1) 及 (2), 得 $a_0=2$, $a_1=1$.

故 $f(x)=(2x+1)(x-2)(x-3)=2x^3-9x^2+7x+6$.

419 **定理.** 次數爲 n 之多項式 $f(x)$, 能使 $f(x)$ 爲零之 x 之值,不能多於 n 個.

設 x 之値能使 $f(x)$ 爲零者多於 n 個,則形如 $(x-a)$ 之因式多於 n 個者之積,可以整除 $f(x)$, (§ 481), 此顯然不可能,因其積之次數超過 n 故也.

420 **定理.** 設知某多項式 $f(x)$ 之次數不能超過 n, 而使 $f(x)$ 爲零之 x 之値多於 n 個,則可斷定 $f(x)$ 之一切係數皆爲 0.

因設係數不皆爲 0, 則 x 之値能使 $f(x)$ 爲零者,不能多於 n 個故也 (§ 419).

如此多項式,稱爲恆等於 0.

421 **定理.** 設 n 次二多項式 $f(x)$ 及 $\phi(x)$, 關於 x 之値,多於 n 個者能有等值,則其對應係數相等.

因令 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

及 $$\phi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

又令 $$\psi(x)=f(x)-\phi(x)$$

$$=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_n-b_n).$$

則當 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之值相同時，$\psi(x)$ 爲 0，而依假設，關於 x 之值多於 n 個者，此種值相同。

故多項式 $\psi(x)=(a_0-b_0)x^n+\cdots+(a_n-b_n)$ 之次數不超過 n，而關於 x 之值多於 n 個者爲零，從而其一切係數皆爲 0 (§ 420).

故 $$a_0-b_0=0,\ a_1-b_1=0,\cdots,\ a_n-b_n=0,$$

即 $$a_0=b_0,\quad a_1=b_1\cdots,\quad a_n=b_n,$$

此即 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之對應係數相等。

例如，當 $x=2,\ 4,\ 6$ 時，設 $f(x)=2x^2+bx+5$ 及 $\phi(x)=ax^2+3x+c$ 有等值，則必有 $a=2,\ b=3$ 及 $c=5$.

習 題 XIV

1. 用綜合法以 $x-4$ 除 $x^4-3x^3-x^2-11x-4$ 之商.

2. 如上以 $x-3$ 除 $5x^5-6x^4-8x^3+7x^2+6x+3$.

3. 如上以 $x+2$ 除 $3x^4+x^2-1$.

4. 如上以 $3x+1$ 除 $3x^3+16x^2-13x-6$.

5. 如上以 $3x-1$ 除 $3x^3-6x^2+x+2$.

6. 如上以 $x-a$ 除 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$.

7. 如上以 $x-2y$ 除 $2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$.

8. 已知 $f(x)=2x^3-5x+3$，用 § 414 之法則求 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(-6)$.

9. 用餘式定理定 m，使 $x^3+mx^2-20x+6$ 可用 $x-3$ 整除。

10. 依同法，定 l 及 m，使 $2x^3-x^2+lx+m$ 可用 $(x+2)(x-4)$ 整除。

11. 依 § 416, 示明 $3bm+am-2an-6bn$ 可用 $m-2n$ 整除,亦可用 $a+3b$ 整除.

12. 依 §§ 416, 417, 示明 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 能用 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 整除.

13. 求 x 之三次整函數,當 $x=1, 4, -2$ 時,函數之値爲零,當 $x=2$ 時,函數之値爲 -16.

14. 求 x 之三次整函數,當 $x=2, 3$ 時,函數之値爲零,當 $x=0$ 時,函數之値爲 6, 當 $x=-1$ 時,函數之値爲 12.

15. 試證 $2x^3-ax+1$ 與 x^3+5x+2, 對於 x 之四値不能有等値.

以另一多項式表一多項式

422 令 A 與 B 表 x 之二多項式, A 之次數高於 B.

以 B 除 A, 設其商爲 Q, 餘式爲 R, 則

$$A \equiv QB+R. \tag{1}$$

設 Q 之次數不低於 B, 則以 B 除 Q, 設其商爲 Q_1, 餘式爲 R_1, 則

$$Q \equiv Q_1B+R_1. \tag{2}$$

同法,設 Q_1 之次數不低於 B, 則以 B 除 Q_1, 設其商爲 Q_2, 餘式爲 R_2, 則

$$Q_1 \equiv Q_2B+R_2. \tag{3}$$

假定 Q_2 之次數低於 B. 則有

$$\begin{aligned} A &\equiv QB+R && \text{由 (1)} \\ &\equiv \{Q_1B+R_1\}B+R && \text{由 (2)} \\ &\equiv \{(Q_2B+R_2)B+R_1\}B+R && \text{由 (3)} \\ &\equiv Q_2B^3+R_2B^2+R_1B+R, \end{aligned}$$

此處一切係數 Q_2, R_2, R_1, R 之次數皆低於 B.

於一般，任何多項式 A，已知其次數高於 B，而依上述之法進行，直至得一商其次數低於 B 爲止，則有

$$A\equiv Q_{r-1}B^r+R_{r-1}B^{r-1}+\cdots+R_1B+R$$

此處 $R, R_1,\cdots, R_{r-1}, Q_{r-1}$ 表屢次各餘式，及最後之商，其次數皆低於 B.

例。 化 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$ 爲 x^2+x+1 之多項式形式，其係數之次數，皆小於二。

用分離係數法，可排列計算如下：

$$\begin{array}{l|l|l}
1-4+3-1+1+4 & 1+1+\ 1 & \\
\underline{1+1+1} & 1-5+\ 7-3 & 1+1+1 \\
\quad -5+2-1 & \underline{1+1+\ 1} & 1-6 \qquad \therefore\ Q_1=x-6 \\
\quad \underline{-5-5-5} & \quad -6+\ 6-3 & \\
\qquad\quad 7+4+1 & \quad \underline{-6-\ 6-6} & \\
\qquad\quad \underline{7+7+7} & \qquad\quad 12+3 \qquad \therefore\ R_1=12x+3 & \\
\qquad\qquad -3-6+4 & & \\
\qquad\qquad \underline{-3-3-3} & & \\
\qquad\qquad\qquad -3+7 \qquad \therefore\ R=-3x+7. & &
\end{array}$$

故 $x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4$.

$$=(x-6)(x^2+x+1)^2+(12x+3)(x^2+x+1)-(3x-7).$$

在特例，此法能使 x 之任何多項式，變形爲 $x-b$ 之同次 423
多項式，具有常數係數。

例。 將 $2x^3-x^2+4x-5$ 變形爲 $x-2$ 之多項式。

可屢次實行綜合除法而排列計算如下：

$$\begin{array}{cccc|l}
2 & -1 & +4 & -5 & \underline{2} \\
 & \underline{\quad 4} & \underline{\quad 6} & \underline{\ 20} & \\
2 & +3 & +10, & 15 & \qquad \therefore\ R=15 \\
 & \underline{\quad 4} & \underline{\ 11} & & \\
2 & +7, & 24 & & \qquad \therefore\ R_1=24 \\
 & \underline{\quad 4} & & & \\
2 & 11 & & & \qquad \therefore\ R_2=11 \text{ 及 } Q_2=2.
\end{array}$$

故 $2x^3-x^2+4x-5=2(x-2)^3+11(x-2)^2+24(x-2)+15.$

習題 XV

1. 用 § 422 之法則，以 x^2+1 表 x^4+x^3-1.

2. 如上用 $2x^2+1$ 表 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$.

3. 如上以 x^3-x^2+x+3 表 $2x^7-3x^6+2x^5+5x^4-x^2+6$.

4. 如上以 x^2+xy+y^2 表 $x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$.

5. 用 § 423 之法則，以 $x-3$ 表 $2x^3-8x^2+x+6$.

6. 如上以 $x+2$ 表 $x^5+3x^4-6x^3+2x^2-3x+7$.

7. 如上以 $x+3$ 表 x^3+9x^2+27x.

8. 如上以 $x+1$ 表 x^3+3x^2+x-1.

VI. 有理整式之因式

緒論

424 **因式**. 令 A 表含一或多變數之有理函數. 含此種變數之任何有理整函數而能整除 A 者，名為 A 之因式.

故欲使一函數 F 可為 A 之因式，充分且必要者為

1. F 關於函數 A 之變數為有理整式.

2. A 可化為形式 $A\equiv GF$, 此處 G 亦為整式.

例 1. 因 $2x^2-2xy=2x(x-y)$, 故 x 及 $x-y$ 二者俱為 $2x^2-2xy$ 之因式.

例 2. 因 $3x^2-2y^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$, 故 $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y$ 及 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y$ 俱為 $3x^2-2y^2$ 之因式.

例 3. 雖 $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, 但 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 及 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 不得為 $x-y$ 之因式，因其關於 x 及 y 俱非有理式也.

註 1. 因式之係數不必爲整數,或有理數。反言之,可爲任何種類之數或式,如例 2 中,因式之係數爲無理數。 425

因 $x^2-y=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$, 故式 x^2-y 視爲 x 及 y 兩者之函數,不能析因式;但視爲 x 單獨之函數,則有因式 $x+\sqrt{y}$ 及 $x-\sqrt{y}$. 含多於一文字之他式亦然。

註 2. 除單獨處理有整係數之函數時外,通常不將其"數字因數",如例 1 中之 2 者包括於已知整函數 A 之因式內;蓋不需整函數係數須爲整數,則任何單獨數(或常數)皆可謂其能整除 A 故也。 426

同理,設 F 爲 A 之因式,而 c 爲任何常數(非 0),則 cF 亦爲 A 之因式,但吾人視 F 與 cF 在本質上爲相同因式,而 A 之因式範圍內只含其一。

例如,在例 1 中,可稱 $2x$ 及 $x-y$ 或 $-2x$ 及 $y-x$ 爲其因式。

定理. 設 F 爲 B 之因式,而 B 爲 A 之因式,則 F 亦爲 A 之因式。 427

蓋依 § 424, A 與 B 可化爲下式:

$$A\equiv GB, \text{ 及 } B\equiv HF,$$

此處 G 與 H 爲整式.

故 $$A\equiv G\cdot HF\equiv GH\cdot F,$$

即 F 爲 A 之因式 (§ 424).

質函數,複函數. 一整函數除本身(或常數)外無其他因式,在此情形,名爲質函數.設含他因式者,則名爲複函數。 428

例如, $x+y^2$ 及 $x-2y$ 爲質函數,但 x^2-y^2 爲複函數.

n 次之複函數 A, 爲不少於二個不多於 n 個之質函數 B, C,…之積.此種質函數名爲 A 之質因式。 429

430 嗣後假定:

1 任何已知函數 A 只有一組質因式.

2. A 之一切其他因式,爲此種質因式之積.

3. 此種質因式可有二個或多個相等,但 A 能以其不同質因式乘冪之積表之,只有一法.

此種定理之 2 及 3, 爲 1 之系,後當於 §§ 484, 485 中,就 A 爲一變數之函數時證明之,且可一般證明.

例如, 因 $x^3y^3-2x^2y^4=xxyyy(x-2y)$, 而 $x^3y^3-2x^2y^4$ 之質因式爲 $x, x, y, y, y, x-2y$. 其他因式如 x^2, xy 等等,爲此種質因式中二個或多個之積. 其不同之質因式爲 $x, y, x-2y$, 而用此種因式乘冪之積表原式,只有一法即 $x^2y^3(x-2y)$.

431 **析因式法.** 欲將已知函數 A, 完全析因式,意謂"分解爲質因式",即化 A 爲 $A=B\cdot C\cdot D\cdots$ 之形,此處 $B, C, D\cdots$ 表質函數.

但通常於起始時,不必遽求其質因式. 可先分解 A 爲二因式 F 與 G 之積,再分解 F 及 G, 如此進行,直至質因式達到爲止,上法第一步名爲 A 之"析因式法".

析因式法與乘法相反. 乘法含二重要步驟; (1) 分配律之數次應用, 即以 $ac+bc$ 代 $(a+b)c$ 等; (2) 於所得結果內,合併同類項,欲逆其方法,必須 (1) 分開所合併之項——析因式之難處在此——及 (2) 用分配律以 $(a+b)c$ 代 $ac+bc$ 等.

各種複函數不可假定其皆能實際析因式. 例如雖可證明 $x^5+ax^3+bx^2+cx+d$ 爲複式,亦可證明此式之因式不能用代數法則求得; 此所謂代數法則,即應用各種代數演算至有限次也.

式之各項有一公因式者

各項皆有單項或多項公因式之式，可應用分配律以析因 432
式，即

$$ab+ac+ad+\cdots=a(b+c+d+\cdots).$$

例 1. 將 $2a^2c+2abc+4ac^2-6acd$ 析因式。

各項皆有因式 $2ac$，"析"出之，得

$$2a^2c+2abc+4ac^2-6acd=2ac(a+b+2c-3d).$$

例 2. 將 $a(c-d)+b(d-c)$ 析因式。

各項皆有因式 $c-d$，析出之，得

$$a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d).$$

如此之因式，須先析出。

有若干式原非如上述之形式，而聯合其具有公因式之各 433
項方能化之如此者。

例 1. 將 $ac+bd+ad+bc$ 析因式。

聯合 ac 與 ad，又聯合 bc 與 bd，得 $a(c+d)+b(c+d)$ 爲一含公因式 $c+d$ 之二項式。

故 $$ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d).$$

由此觀之，用此法分原式爲各部分，每一部分須有同數之項。

例 2. 將 $a^2+ab-bd-ad+ac-cd$ 析因式。

此式必有三項之二羣，或有二項之三羣，式中有四項含 a，如 a^2, ab, $-ad$, ac，餘二項含 d，如 $-bd$ 及 $-cd$. 欲得項數相同之羣，可將 $-ad$，與 d 項聯合，而有

$$\begin{aligned}a^2+ab+ac-ad-bd-cd&=a(a+b+c)-d(a+b+c)\\&=(a-d)(a+b+c).\end{aligned}$$

習題 XVI

將下列各式析因式:

1. $6x^4y^3z^2-12x^2y^4z+8x^2y^3$.
2. $2n^2+(n-3)n$.
3. $ab-a+b-1$.
4. $mx-nx-mn+n^2$.
5. $3xy-2x-12y+8$.
6. $10xy+5y^2+6x+3y$.
7. $x^3y^2-x^2y^3+2x^2y-2xy^2$.
8. $x^4+x^3+x^2+x$.
9. $ac+bd-(bc+ad)$.
10. $a^2c-abd-abc+a^2d$.
11. $ad+ce+bd+ae+cd+be$.
12. $a^2+cd-ab-bd+ac+ad$.

藉已知恆等式析因式

434 於第二章中已導出數個特種積,如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 設已知函數 A 能化爲如此積之一之形式,則可立即書出其因式. 下節將說明如此析因式之法則.

435 **完全三項平方式.** 此名謂有形式 $a^2\pm 2ab+b^2$ 之一之式,此種式可藉下列公式析因式:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2,$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

完全三項平方式中(正當排列)所宜注意者,中項爲二外項平方根乘積之二倍,而其相等之二因式,可用其中項之記號連結二外項之主平方根而得之.

求完全平方之平方根,即求此種相等因式之一.

例 1. 析 $9x^2-12xy+4y^2$ 之因式.

此爲完全平方,因 $12xy=2\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{4y^2}$.

又因 $\sqrt{9x^2}=3x$, $\sqrt{4y^2}=2y$, 其中項之記號爲 $-$, 故得 $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)(3x-2y)=(3x-2y)^2$.

例 2. 析 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 之因式。

集項如下，可化爲三項平方之形式。

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=(a+b+c)^2.$$

例 3. 將下列諸式析因式：

1. $x^2+14x+49$.
2. $9-6a+a^2$.
3. $9x^2y^2+30xy+25$.
4. $x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$.
5. $64a^8-48a^4+9$.
6. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

二平方之差。 此種形式或可化爲此種形式之式，可藉下 436
列公式之助以析因式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

例如，
$$x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2)$$
$$=x^2-(y-z)^2$$
$$=(x+y-z)(x-y+z).$$

化三項式爲平方差之形式，其最有用之方法，卽先加一適宜量於其中之一項，使成一完全平方，再從其結果之式減此量。

例如
$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$$

例 析下列諸式之因式：

1. x^4-y^6.
2. $6a^3-6ab^2$.
3. $12a^3x^3-75axy^2$.
4. $25x^{2n}-49x^{2m}$.
5. $36x^4-1$.
6. $x^4-3x^2y^2+y^4$.

二平方之和。 用虛數單位 $i=\sqrt{-1}$ (§§ 218, 220)，則平 437
方之和 a^2+b^2 可化爲平方之差之形式，而依 § 436 析因式，其、因式爲虛數。

因 $i^2=-1$, 故有 $b^2=-(-b^2)=-(ib)^2$.

故 $a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib)$.

從 §§ 219, 220, 已知 i 服從一切普通計算法則.於應用時,只須記憶 $i^2=-1$.

438 **任何二同乘冪之和與差.** 在§§ 308, 309, 310 中,已證明

第一. 不論 n 爲奇數或爲偶數,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}). \quad (1)$$

第二. 當 n 爲偶數時,

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}). \quad (2)$$

第三. 當 n 爲奇數時,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}). \quad (3)$$

故得下列定理:

1 a^n-b^n 常可用 $a-b$ 除盡.

2 當 n 爲偶數時, a^n-b^n 可用 $a+b$ 除盡.

3. 當 n 爲奇數時, a^n+b^n 可用 $a+b$ 除盡.

4 在各種情形中,各商皆由下列諸項而成

$$a^{n-1} \quad a^{n-2}b\cdots ab^{n-2} \quad b^{n-1}$$

當 $a-b$ 爲除式時,皆以+號連結,但當 $a+b$ 爲除式時,則輪流用-與+連結.

例如, 1. $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

2. $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$.

3. $8a^3+27b^3c^3=(2a)^3+(3bc)^3$

$$=(2a+3bc)[(2a)^2-(2a)(3bc)+(3bc)^2]$$

$$=(2a+3bc)(4a^2-6abc+9b^2c^2).$$

例. 析下列諸式之因式:

1. $64x^3-125y^3$. 2. $27x^3+1$. 3. $16x^4-81y^4$.

439 **n 爲複數時.** 下列定理,爲 § 438 (1)(2)(3) 及 § 436 之直接結果.

1. 設 n 爲任何整數 P 之倍數,則 a^n-b^n 可用 a^p-b^p 整除.

例如，
$$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$$
$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4).$$

2. 設 n 爲任何整數 p 之偶倍數，則 a^n-b^n 可用 a^p+b^p 整除。

例如，
$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$$
$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3).$$

3. 設 n 爲任何整數 p 之奇倍數，則 a^n+b^n 可用 a^p+b^p 整除，不論 n 本身爲奇數或偶數。

例如，
$$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3$$
$$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$$

4. 設 n 爲 2 之乘冪，則屢用 § 436 所說明之法，可分解 a^n+b^n 爲二次之因式。

例如，
$$x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4$$
$$=(x^4+y^4)^2-2x^4y^4$$
$$=(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2).$$

其次，
$$x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2=x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(2-\sqrt{2})x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}xy)(x^2+y^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}xy),$$

餘類推。

此種各個"二次"因式，可用後 § 444 之法，化爲二個一次因式（虛數）。當 a 爲 2 之乘冪時，a^n+b^n 之完全析因式常爲可能。

當 n 爲複數時，最好先分解 a^n+b^n 或 a^n-b^n 爲二因式，使其次數愈近於相等爲愈妙。如是則所得因式中，至少有一個常可再行分解。

例如，x^6-y^6 之析因式，如上 2 爲最佳。續行之，得
$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

例. 析下列諸式之因式:

1. x^4+y^4. 2. x^8-y^8. 3. x^9+y^9.

440 §§ 438, 439 之定理,亦適用於形式如 $a^m \pm b^n$ 之式,當 m 及 n 爲同一整數 p 之倍數時.

例如,
$$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3$$
$$=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

習 題 XVII

在下列各式,盡其可能以析因式,不可導入無理數或虛數之係數.

1. $4x^3y-20x^2y^2+25xy^3$. 2. $28tx^2-63ty^2$.

3. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$.

4. $(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$.

5. $(7x^2+4x-3)^2-(x^2+4x+3)^2$.

6. $4(1-b^2-ab)-a^2$.

7. x^4+x^2+1. 8. $a^4-6a^2b^2+b^4$.

9. a^4+4a^2+16. 10. $9x^4+15x^2y^2+16y^4$.

11. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

12. $576x^6y^3-9y^{15}$. 13. x^9-y^9. 14. $x^{12}-y^{12}$.

15. $x^{10}+y^{10}$. 16. x^5-32. 17. x^7+y^{14}.

集 項 求 因 式

441 x 之多項式各項,常可集爲若干羣,每羣含公共因式 F. 則此公因式 F 爲全式之因式,與 § 433 比較.

例 1. 析 x^3+3x^2-2x-6 之因式.

注意於末二係數爲首二係數之等倍數,故得
$$x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$$
$$=(x^2-2)(x+3)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3).$$

例 2. 析 x^3+2x^2+2x+1 之因式。

集同係數之項，得

$$
\begin{aligned}
x^3+2x^2+2x+1 &= x^3+1+2x(x+1)\\
&=(x^2-x+1)(x+1)+2x(x+1)\\
&=(x^2-x+1+2x)(x+1)=(x^2+x+1)(x+1).
\end{aligned}
$$

有時先將其已知諸項中之一分開為二項，始可實行。

例 3. 析 x^3+4x^2+5x+6 之因式。

$$
\begin{aligned}
x^3+4x^2+5x+6 &= x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6\\
&=x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3)\\
&=(x^2+x+2)(x+3).
\end{aligned}
$$

再就下例考之。

例 4. 析 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ 之因式。

$$
\begin{aligned}
x^4+2x^3+3x^2+2x+1 &= x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1\\
&=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1\\
&=(x^2+x+1)^2.
\end{aligned}
$$

習 題 XVIII

析下列各式之因式。

1. x^4-x^3+x-1.
2. $x^5-x^3-8x^2+8$.
3. x^4-2x^3+2x-1.
4. $x^3-7x^2-4x+28$.
5. $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6$.
6. x^3+2x^2+3x+2.
7. $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$.
8. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.

二次式之析因式

用視察法析二次式 x^2+px+q 之因式． 當 p 及 q 為整 442
數時，此法有時可能．

因 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

設能求二數 a 與 b，能使 $a+b=p$ 及 $ab=q$，則知 x^2+px+q 之因式．

如此之二數常存在，然未必爲有理數（§ 444）．但當爲有理數時，則爲整數（§ 454），而可由視察法求得之，如下例。

例 1．析 $x^2+13x+42$ 之因子。

求二整數 a 及 b，其積爲 42，其和爲 13．因 ab 及 $a+b$ 俱爲正，故 a 及 b 必俱爲正。在二整數中其積爲 42 者——即 1 與 42．2 與 21，14 與 3，7 與 6，——求其中一對之和爲 13 者，即 7 與 6.

故　$$x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$$

例 2．析 $x^2-13x+22$ 之因式。

此處 a 與 b 須俱爲負；因其積爲正，其和爲負故也．如前法試算一對負整數其積爲 22 者，即 -11 與 -2，因 $-11-2=-13$ 故也。

故　$$x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$$

例 3．析 $x^2-9x-22$ 之因式。

此處 ab 爲負，故 a 與 b 須有相反記號；又因 $a+b$ 爲負，故負數之絕對值較大．故取 $-22=-22\times1=-11\times2$；試算如前，得 $a=-11$，及 $b=2$，因 $-11+2=-9$ 故也。

故　$$x^2-9x-22=(x-11)(x+2).$$

例 4．析以下諸式之因式。

1．x^2+3x+2.　　2．$x^2-16x+15$.　　3．$x^2-4x-12$.

4．x^2+x-30.　　5．$x^2+20x+96$.　　6．$x^2-21x+80$.

443　**用視察法析二次式 ax^2+bx+c 之因式．** 當 a, b 及 c 爲整數時，此法有時可能。

用 a 乘而除之，可化 ax^2+bx+c 爲 $[(ax)^2+b(ax)+ac]/a$，則括號內之式，可用上法就 ax 析其因式，即求二整數，其積爲 ac，其和爲 b 者。

例 1．析 $2x^2+7x+3$ 之因式。

$$2x^2+7x+3=\frac{(2x)^2+7(2x)+6}{2}$$

$$=\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}=(x+3)(2x+1).$$

例 2. 析 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$ 之因式.

$$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{(abx)^2+(a^2+b^2)\cdot abx+a^2b^2}{ab}$$

$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}$$

$$=(bx+a)(ax+b).$$

例 3. 析 $16x^2+72x-63$ 之因式.

在此情形,無須以 16 乘除之,因有

$$16x^2+72x-63=(4x)^2+18(4x)-63$$

$$=(4x+21)(4x-3).$$

例 4 析以下諸式之因式.

1. $6x^2-13x+6$.
2. $5x^2+14x-3$.
3. $14x^2+x-3$.
4. $18x^2+21x+5$.
5. $49x^2+105x+44$.
6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc$.

用配方法析二次式 x^2+px+q 或 ax^2+bx+c 之因式. **444**

上法僅用於特殊情形,下法則完全一般可用.

因 $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

故加 $\frac{p^2}{4}$ 即 x 之半係數之平方於 x^2+px,可使之爲一完全平方.

此法名爲 x^2+px 之配方.

1. 設於 x^2+px+q 加減 $\frac{p^2}{4}$,則不影響於其值.但藉此能將此式變形爲二平方之差,而依 § 436 析因式.於是

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right). \quad (1)$$

2. 因 $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$.

故於 (1) 中以 $\dfrac{b}{a}$ 代 p, 以 $\dfrac{c}{a}$ 代 q, 可得其因式,化簡其結果,得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \quad (2)$$

例 1. 析 x^2-6x+2 之因式.

$$\begin{aligned}x^2-6x+2&=x^2-6x+3^2-3^2+2\\&=(x-3)^2-7\\&=(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7}).\end{aligned}$$

例 2. 析 $x^2+8x+20$ 之因式.

$$\begin{aligned}x^2+8x+20&=x^2+8x+4^2-4^2+20\\&=(x+4)^2+4\\&=(x+4)^2-4i^2\\&=(x+4+2i)(x+4-2i).\end{aligned}$$

此處先得二平方之和 $(x+4)^2+4$, 再以 $-4i^2$ 代 4 變和爲差之形 (§ 437). 此二因子爲虛數.

例 3. 析 $3x^2-5x+1$ 之因式.

$$\begin{aligned}3x^2-5x+1&=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right]\\&=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right]\\&=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]\\&=3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right).\end{aligned}$$

例 4 析下列諸式之因式.

1. $x^2+10x+23$.
2. $x^2-10x+24$.
3. $x^2-12x+45$.
4. x^2+x+1.
5. $2x^2+3x+2$.
6. $x^2-4ax-4b^2+8ab$.

二變數之齊次二次函數。 §§ 442—444 之法，適用於如 445
下形式之二次式

$$ax^2+bxy+cy^2.$$

例 1. 析 $x^2-8xy+14y^2$ 之因式.

$$\begin{aligned} x^2-8xy+14y^2 &= x^2-8xy+16y^2-2y^2 \\ &= (x-4y)^2-2y^2 \\ &= [x-(4+\sqrt{2})y][x-(4-\sqrt{2})y]. \end{aligned}$$

例 2 析下列諸式之因式.

1. $x^2+5xy+4y^2$.　　2. x^2-xy+y^2.

二變數之非齊次二次函數。 如此之函數，普通多爲質函 446
數。但當爲複函數時，可如下例析因式。

例 1. 析 $A=x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 之因式.

設 A 爲複函數，必爲二個一次多項式之積.再者，其二次項 $x^2+2xy-8y^2$，必爲此多項式中一次項之積.

用視察法求得 $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$.

故設 A 爲複函數，則必有二數 l 及 m，可使

$$\begin{aligned} & x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3 \\ &\quad = (x+4y+l)(x-2y+m) \\ &\quad = x^2+2xy-8y^2+(l+m)x+(4m-2l)y+lm. \end{aligned} \tag{1}$$

但欲使 (1) 爲恆等式，必有 (§ 285)，

$$l+m=2 \ (2), \quad -2l+4m=14 \ (3), \quad lm=-3 \ (4).$$

從 (2) 及 (3)，得 $l=-1$, $m=3$. 此種值滿足 (4)，因 $-1\cdot 3=-3$ 故也.

故　$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3)$.

註。 此例示此種複函數之例外情形.設 A 無其他變動，僅以任何他數代其末項 -3，則 A 變爲質函數；因 $l=-1$, $m=3$ 必不能滿足 (4) 故也。

此法亦可應用於三變數之齊次二次函數。

例如，欲析 $x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2$ 之因式，可設

$$x^2+2xy-8y^2+2xz+14yz-3z^2\equiv(x+4y+lz)(x-2y+mz).$$

依上法行之，又得 $l=-1,\ m=3$.

例 2. 析 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$ 之因式。

例 3 證明 $x^2-y^2+2x+y-1$ 爲實函數.

447 **n 次多項式.** 前已證明各二次多項式 $a_0x^2+a_1x+a_2$, 爲一次因式之積.實則 x 之各次多項式，亦同樣眞確，惟無求此種因式之一般法則存在而已；換言之，

定理. 凡 x 之 n 次多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n.$$

俱爲 n 個一次因式之積，卽 n 個二項式 $x-\beta_1,\ x-\beta_2,\cdots,\ x-\beta_n$, 可使

$$f(x)\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n).$$

此定理之證明見後.

448 **系.** 二變數 x 與 y 之 n 次齊次式，爲 n 個 x 與 y 之一次齊次因式之積.

例如，齊次式 $a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3,\cdots$ 可用 x/y 代 x 於形式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 中，再以 y^3 乘其結果而導出.

但由 § 447, $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3\equiv a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$, 設以 $\dfrac{x}{y}$ 代 x 於此恆等式中，再以 y^3 乘其二端，則得

$$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3\equiv a_0(x-\beta_1y)(x-\beta_2y)(x-\beta_3y).$$

習 題 XIX

析下列諸式之因式：

1. $x^2-14x+48$.　　2. $x^2-21x-120$.

3. $5x^2-53x-22$.　　4. $16x^2+64x+63$.

5. $54x^2-21x+2$.　　6. $12x^2+20xy-8y^2$.

√7. x^4-13x^2+36. 8. $x^3y-3x^2y^2-18xy^3$.

9. x^2-3x+3. 10. $3x^2+2x-3$.

11. $x^2-4xy-2y^2$. 12. $x^2-6ax-9b^2-18ab$.

13. $abx^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)$. 14. $x^2+bd+dx+bx+cx^2+cdx$.

15. $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$. 16. $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$.

餘式定理與綜合除法之應用

藉餘式定理求因式. 令 $f(x)$ 表 x 之多項式. 由餘式定理 (§ 415), 設 b 表能使 $f(b)=0$ 之一數, 則 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之一因式, 有時可用視察法求得如此之數 b. 449

例. 析 $f(x)=x^3-5x+4$ 之因式.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & -5 & +4 & \underline{1} \\ & 1 & 1 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & -4, & 0 & \end{array}$$

因 $f(1)=1-5+4=0$, 故 $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因式.

以 $x-1$ 除 $f(x)$ 得商 x^2+x-4.

故 $f(x)=(x-1)(x^2+x-4)$.

註. 如上例, 察知 $f(x)$ 之係數之代數和爲 0, 則 $x-1$ 爲 $f(x)$ 之因式.

整係數多項式. 設欲求整係數多項式 $f(x)$ 之因式, 通常最好先查考其可有整係數之一次任何因式. 此種因式, 常可藉以下之原則求得 (§§ 451, 452). 450

整係數之多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 可有形如 $x-b$ 之因式, 此處 b 爲整數. 設其如是, 則 b 必爲 $f(x)$ 之常數項 a_n 之因數. 451

例如, 令 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$. 設欲使 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之因式, 則須有 (§ 415),

$$f(b)=a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3=0.$$

故
$$(a_0b^2+a_1b+a_2)b=-a_3.$$

因 $a_0b^2+a_1b+a_2$ 爲整數, 故 b 爲 a_3 之因數.

故一切如此之因式 $x-b$, 可如下例求之。

例. 析 $f(x)=3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$ 之因式.

常數項 -6 之因數,爲 ±1, ±2, ±3, ±6, 設欲使 $x-b$ 爲 $f(x)$ 之因式,則 b 須有此種値之一.用綜合除法試驗 b 之諸値如下:

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
3 & -3 & -13 & -11 & -10 & -6 & -1 \\
 & -3 & +6 & +7 & +4 & +6 & \\
\hline
3 & -6 & -7 & -4 & -6, & 0 & -1 \\
 & -3 & +9 & -2 & +6 & & \\
\hline
3 & -9 & +2 & -6, & 0 & & 3 \\
 & 9 & 0 & +6 & & & \\
\hline
3 & 0 & 2, & 0 & & &
\end{array}$$

因 $f(1)\neq0$, 則 $x-1$ 非其一因式.故試驗 $x-(-1)$ 或 $x+1$. 此除法證其除盡, 得商 $Q_1=3x^4-6x^3-7x^2-4x-6$, 而餘式爲 0. 故 $x+1$ 爲 $f(x)$ 之因式。而 Q_1 爲其餘因式之積。

次欲析 Q_1 之因式,亦可證明其能用 $x+1$ 除盡,得商

$$Q_2=5x^3-9x^2+2x-6.$$

欲將 Q_2 析因式,其常數項仍爲 -6, 繼續試驗 $x+1$, $x-2$, $x+2$. 但所得各餘式皆不爲 0. 故此種式無一爲其因式。但試驗 $x-3$, 適能除盡 Q_2, 得商 $Q_3=3x^2+2$. 故

$$f(x)=(x+1)^2(x-3)(3x^2+2).$$

452 整係數之多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 可有形如 $\alpha x-\beta$ 之因式,此處 α 與 β 表無公因數之整數。設其如是,則 α 須爲 a_0 之因數,而 β 須爲 a_n 之因數。此定理含 § 451 之定理。

例如, 令 $$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

設欲使 $\alpha x-\beta$ 或 $\alpha(x-\beta/\alpha)$ 爲 $f(x)$ 之一因式,由 § 415, 則須有

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=a_0\frac{\beta^3}{\alpha^3}+a_1\frac{\beta^2}{\alpha^2}+a_2\frac{\beta}{\alpha}+a_3=0,$$

故 $$a_0\beta^3+a_1\beta^2\alpha+a_2\beta\alpha^2+a_3\alpha^3=0. \tag{1}$$

從 (1) 得 $$a_0\beta^3=-(a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2)\alpha. \tag{2}$$

因 $a_1\beta^2+a_2\beta\alpha+a_3\alpha^2$ 爲整數,故 α 爲 $a_0\beta^3$ 之因數. 但 α 與 β^3 無公共因數 (§ 492, 2). 故 α 爲 a_0 之因數 (§ 492, 1).

又從 (1) $$(a_0\beta^2+a_1\beta\alpha+a_2\alpha^2)\beta=a_3\alpha^3, \tag{3}$$

理由同前,故決定 β 爲 a_3 之因子。

故一切如此之因式 $ax-\beta$，可如下例求得之：

例。 析 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$ 之因式。

設欲使 $ax-\beta$ 爲 $f(x)$ 之因式，則 a 須有諸値 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ 之一，而 β 須有諸値 $\pm1, \pm2$ 之一；故 β/a 須有諸値 $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$ 之一。

就 β/a 之各値，可試驗 $ax-\beta$，依綜合除法以 $x-\beta/a$ 除 $f(x)$. 設恰能除盡，而以 Q 表其商，則 $ax-\beta$ 爲 $f(x)$ 之因式，而 Q/a 爲其餘因式之積（§ 412, 3).

$$
\begin{array}{rrrrrl}
6 & +5 & +3 & -3 & -2 & \underline{|-1/2} \\
 & -3 & -1 & -1 & 2 & \\
\hline
6 & +2 & +2 & -4, & 0 & \\
3 & +1 & +1 & -2 & \underline{|2/3} & \\
 & 2 & +2 & +2 & & \\
\hline
3 & +3 & +3, & 0 & & \\
1 & +1 & +1 & & &
\end{array}
$$

屢用 $x-1, x+1, x-2, x+2$ 試驗，無一能除盡 $f(x)$. 惟 $x+\frac{1}{2}$ 能之，得商 $Q_1=6x^3+2x^2+2x-4$，故 $2x+1$ 爲 $f(x)$ 之一因式，而其餘因式之積爲 $Q_1/2=3x^3+x^2+x-2$.

次進行析 $Q_1/2$ 之因式。設欲使 $ax-\beta$ 爲一因式，則 β/a 須有諸値 $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$ 之一．但已知 $x-1, x+1, x-2, x+2$ 非其因式，因俱非 $f(x)$ 之因式故也．試驗 $x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3}$，皆不能除盡 $Q_1/2$；惟 $x-\frac{2}{3}$ 能之，得商 $Q_2=3x^2+3x+3$. 故 $3x-2$ 爲 $Q_1/2$ 之因式，其餘因式之積爲 $Q_2/3=x^2+x+1$. 故

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1).$$

註。 以 $x-b$ 或 $x-\beta/a$ 行除法，常可在除法完成以前，明知其不能除盡． 453
例如，此處所示之計算，已足證明 $x-2$ 不能整除 $5x^3-4x^2+x+8$；因除數

$$
\begin{array}{rrrrl}
5 & -4 & +1 & +8 & \underline{|2} \\
 & 10 & & & \\
\hline
5 & 6 & & &
\end{array}
$$

2，已得 Q 之最後係數 6，而被除式之未用係數 1 與 8，俱爲正數，故 Q 及 R 之其餘係數，必須爲正，於是 R 不爲 0.

$$
\begin{array}{rrrrl}
3 & +1 & +1 & -2 & \underline{|1/3} \\
 & 1 & & & \\
\hline
3 & 2 & & &
\end{array}
$$

同理，從此處所示之計算，可斷定 $x-\frac{1}{3}$ 不能整除 $3x^3+x^2+x-2$. 因在計算中繼此之數，$2\cdot\frac{1}{3}$，或 $\frac{2}{3}$，爲一分數，而致 Q 及 R 之其餘係數，俱爲分數，於是 R 不爲 0.

454 從 § 452, 多項式 $f(x)=x^n+\cdots+a_n$ 之首項係數爲 1, 其他係數俱爲整數者, 關於 x 之有理分數值, 不能爲 0.

因設 $f(\beta/\alpha)=0$, 則 $\alpha x-\beta$ 必能除盡 $f(x)$, 因此而 α 必爲 1 之因數, 此惟於 $\alpha=\pm1$ 時可能也.

455 **多項式析因式與解方程.** 從 § 350, 分解多項式 $f(x)$ 爲一次因式之問題, 與解方程 $f(x)=0$ 相同.

例 1. 解 $f(x)=2x^4+x^3-17x^2-16x+12=0$.

由 § 452 求得 $f(x)=(2x-1)(x+2)^2(x-3)$.

故方程 $f(x)=0$ 與以下四方程等値:

$$2x-1=0,\qquad x+2=0,\qquad x+2=0,\qquad x-3=0.$$

故 $f(x)=0$ 之根爲 1/2, −2, −2, 及 3.

例 2. 解 $x^3+3x^2=10x+24$.

移項, $x^3+3x^2-10x-24=0$.

析因式, $(x+2)(x-3)(x+4)=0$.

故所求之根爲 −2, 3 及 −4.

習題 XX

析以下各式之因式:

1. x^3-7x+6.
2. $x^3+6x^2+11x+6$.
3. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.
4. x^4-2x^2+3x-2.
5. $6x^3-13x^2-14x-3$.
6. $2x^3-5x^2y-2xy^2+2y^3$.
7. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$.
8. $4x^6-41x^4+46x^2-9$.
9. $6x^5+19x^4+22x^3+23x^2+16x+4$.
10. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$.

解下列各方程:

11. $x^2-4x-12=0$.
12. $6x^2-7x+2=0$.
13. $x^2-5x=14$.
14. $x^2+6x=2$.
15. $x^3-9x^2+26x=24$.
16. $x^4+2x^3-4x^2-2x+3=0$.
17. $x^3-1=0$.
18. $10x^3-9x^2-3x+2=0$.

習 題 XXI

以下各式，可用本章所說明之法則析因式。實行析因式，須盡其可能，不可引入無理數或虛數係數。

1. $6xy+15x-4y-10.$
2. $a^2bc-ac^2d-ab^2d+bcd^2.$
3. $a^3(a-b)+b^3(b-a).$
4. $a^5-81ab^4.$
5. $a^4b-a^2b^3+a^3b^2-ab^4.$
6. $3abx^2-6axy+bxy-2y^2.$
7. $3x^6-192y^6.$
8. $(x^2+x)^3-8.$
9. $64x^6y^3-y^{15}.$
10. $x^2-(a-b)x-ab.$
11. $x^{2n}-3x^n-18.$
12. $x-x^2+42.$
13. $3x^4+3x^3-24x-24.$
14. $x^5-9x^3+8x^2-72.$
15. $2xc-a^2+x^2-2ab+c^2-b^2.$
16. $x^2(x^2-20)+64.$
17. $a^2-2ab+b^2-5a+5b+6.$
18. $x^4-10x^2y^2+9y^4.$
19. $6x^2-7xy-5y^2-4x-2y.$
20. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2.$
21. $4(xz+uy)^2-(x^2-y^2+z^2-u^2)^2.$
22. $14x^2+19x-3.$
23. $1+19y-66y^2.$
24. $xy^3+55x^2y^2+204x^3y.$
25. $a^4-18a^2b^2c^2+81b^4c^4.$
26. $(x^2-7x)^2+6x^2-42x.$
27. $8(x+y)^3-27(x-y)^3.$
28. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3.$
29. $x^2+a^2-bx-ab+2ax.$
30. $x^5-y^5-(x-y)^5.$
31. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1.$
32. $b^4+b^2+1.$
33. $2x^2+7xy+3y^2+9x+2y-5.$
34. $a^4+4.$
35. $x^2-xy-2y^2+4xz-5yz+3z^2.$
36. $4a^4+3a^2b^2+9b^4.$
37. $x^2-8ax-40ab-25b^2.$
38. $x^8+x^4+1.$
39. $(x^2+2x-1)^2-(x^2-2x+1)^2.$
40. $(ax+by)^2-(bx+ay)^2.$
41. $x^3-ax^2-b^2x+ab^2.$
42. $x^4+bx^3-a^3x-a^3b.$
43. $a^2-9b^2+12bc-4c^2.$
44. $8a^3+12a^2+6a+1.$
45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$
46. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2.$
47. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9.$
48. $x^4-4x+3.$
49. $x^2+5ax+6a^2-ab-b^2.$
50. $15x^3+29x^2-8x-12.$
51. $abcx^2+(a^2b^2+c^2)x+abc.$
52. $2x^3-ax^2-5a^2x-2a^3.$

53. $(a-b)x^2+2ax+(a+b)$.　　54. $x^{15}-y^{15}$.

55. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$.　　56. $4x^3-3x-1$.

57. $3x^5-10x^4-8x^3-3x^2+10x+8$.

58. $5x^4+24x^3-15x^2-118x+24$.

59. $a^2bc+ac^2+acd-abd-cd-d^2$.

60. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$.

VII. 最高公因式與最低公倍式

最高公因式

456 **最高公因式.** 設 $A, B, \cdots$ 表一或多變數如 x 或 x 與 y 之有理整函數.

設 $A, B, \cdots$ 無公因式,則稱爲互質. 但設有任何公因式,則必有一個其次數最高;此名爲最高公因式 (H. C. F.)

例如, x^2+y^2 與 $x+y$ 爲互質.

但 $4xyz^5$, $8xz^4$, 與 $4x^2yz^3$ 有公因式 x, z, z^2, z^3, xz, xz^2, xz^3, 而其最高公因式爲 xz^3.

457 **註.** 1. 此處不計數字公因式.

2. 互質之二或多函數,常稱其 H. C. F. 爲 1.

3. A 與 B 之 H. C. F. 之數值,未必爲 A 與 B 之整數值之最大公約數. 例如 $(2x+1)x$ 與 $(x-1)x$ 之 H. C. F 爲 x; 但當 $x=4$ 時, $(2x+1)x$ 與 $(x-1)x$ 之值爲 36 與 12, 而 36 與 12 之最大公約數,不爲 4 而爲 12.

458 **定理 1.** $A, B, \cdots$ 之 H. C. F. 爲 $A, B, \cdots$ 之一切不同公質因式,在諸函數中所含最低次冪之乘積.

設假定各函數 $A, B, \cdots$ 俱以其不同質因式乘冪之積表之,而如 § 430, 假定其關於各函數僅有如此之一式,則此定理之眞確甚明.

例如，xyz^5, xz^4 與 x^2yz^3 之不同公質因式爲 x 及 z，而在此各函數中 x 與 z 之最低冪爲 x 與 z^3. 故其 H. C. F 爲 xz^3.

設以質因式表一已知函數有多種方法可能，則此定理所述之方法，對應於表函數 A, $B\cdots$ 之各種方法，將可得多種結果，而最高公因式，亦將多於一個矣，此宜注意.

此定理之應用. 當已知函數能完全析因式時，則其 H. C. F. 可藉 § 458 之定理，即刻書出. 459

例 1. 求 $x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4$ 與 $x^4y-9x^2y^3$ 之 H. C. F.

$$x^5y^2-6x^4y^3+9x^3y^4=x^3y^2(x-3y)^2.$$

及
$$x^4y-9x^2y^3=x^2y(x-3y)(x+3y).$$

故 H. C F. 爲 $x^2y(x-3y)$.

例 2. 求以下諸式之 H. C. F.

1. $2x^4y^2z^5$, $3x^5y^3z$, 與 $4x^3y^4$.
2. x^2-y^2, $x^2+2xy+y^2$ 與 x^3+y^3.
3. x^2-x-6, x^2+6x+8, 與 x^2+5x+6.
4. $x^3-6x^2+11x-6$ 與 $2x^3-9x^2+7x+6$.

設諸函數 $A, B, \cdots$ 之一之質因式爲已知，則其中何者爲一切其他函數之因式，可用除法或餘式定理求之. 其 H. C. F. 可藉 § 458 求得. 460

例 1. 求 $f(x)=x^2-3x+2$ 與 $\phi(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+5$ 之 H. C. F.

由視察法得 $f(x)=(x-1)(x-2)$. 試驗 $x=1$ 與 $x=2$ 於 $\phi(x)$，得 $\phi(1)=0$，但 $\phi(2)\neq 0$ 故 H. C. F 爲 $x-1$.

例 2. 求 $f(x)=x^2+4x+4$ 及 $\phi(x)=x^4+5x^3+9x^2+8x+4$ 之 H. C. F.

因 $f(x)=(x+2)^2$，故不僅須判定 $x+2$ 是否爲 $\phi(x)$ 之一因式，又須判定其

有此因式一次或二次。以 $x+2$ 除 $\phi(x)$ (綜合除法),得 $Q_1=x^3+3x^2+3x+2$ 而 $R_1=0$; 再以 $(x+2)$ 除 Q_1 得 $Q_2=x^2+x+1$ 而 $R_2=0$. 故 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之 H. C. F. 爲 $(x+2)^2$.

例 3. 求下列諸式之 H. C. F.

1. x^2+x-6 與 $2x^3+7x^2+4x+3$.
2. x^2+5x+6 與 $x^4+6x^3+13x^2+16x+12$.
3. $(x-1)^2(x-3)^3(3x+1)^2$ 與 $x^4-5x^3+x^2+21x-18$.

461 **定理 2.** 令 A, B 表二已知整函數,M 及 N 表任何二整函數或常數,則 A 與 B 之各公因式,爲 $MA+NB$ 之因式.

因令 F 爲 A 與 B 之公因式.

則 $$A\equiv GF \text{ 及 } B\equiv HF,$$

此處 $$G \text{ 與 } H \text{ 爲整式.}$$

故 $$MA+NB\equiv M\cdot GF+N\cdot HF\equiv(MG+NH)F,$$

此處 $$MG+NH \text{ 爲整式.}$$

故 F 爲 $MA+NB$ 之因式 (§ 424).

462 **此定理之應用.** x 之同次二多項式,求其 H. C. F. 之問題用此定理可化爲低次簡單多項式而析其因式.

例 1. 求 $A=x^2+2x-4$ 與 $B=x^2+x-3$ 之 H. C. F.

從 A 減 B, 得 $A-B=x-1$.

故 $x-1$ 爲 A 與 B 僅僅可能之公因式.

但當 $x=1$ 時,因 A 不爲零,知 $x-1$ 非 A 之因式.

故 A 與 B 爲互質.

例 2. 求 $A=2x^3-3x^2-3x+2$ 與 $B=3x^3-2x^2-7x-2$ 之 H. C. F.

1. 先以可使已知結果有相同首項之數乘 A 與 B, 即以 3 乘 A 以 2 乘 B. 從 $3A$ 減 $2B$, 得

$$3A-2B=-5x^2+5x+10=-5(x^2-x-2)=-5(x+1)(x-2).$$

故 A 與 B 僅僅可能之公因式爲 $x+1$ 及 $x-2$. 依餘式定理, 知二者皆爲

A 與 B 之因式

故 A 與 B 之 H. C. F. 爲 $(x+1)(x-2)$.

2. 亦可加 A 與 B, 得

$$A+B=5x^3-5x^2-10x=5x(x^2-x-2)=5x(x+1)(x-2).$$

顯然可見 x 非 A 或 B 之因式,故如前只須試驗 $x+1$ 與 $x-2$.

例 3. 求以下之 H. C. F.

1. $x^4-x^3+3x^2-4x-12$ 與 $x^4-x^3+2x^2+3x-22$.

2. $6x^3+25x^2+5x+4$ 與 $4x^3+15x^2-2x+8$.

定理 3. 設四個整函數 A, B, Q, R 有 $A\equiv QB+R$ 之關係,則 A 與 B 之公因式,相同於 B 與 R 之公因式. 463

今 $$A\equiv QB+R, \tag{1}$$

故 $$A-QB\equiv R. \tag{2}$$

從 (2) 依 § 461, A 與 B 之每一公因式爲 R 之因式,因此又爲 B 與 R 之公因式.

反言之,從 (1) 依 § 461, B 與 R 之每一公因式,爲 A 之因式,因此又爲 A 與 B 之公因式.

故 A 與 B 之公因式,相同於 B 與 R 之公因式.

含 x 之二多項式求其 H. C. F. 之一般法則. 當以 x 之多項式除他一多項式時,其被除式,除式,商式,與餘式可用恆等式 $A\equiv QB+R$ 連結,故從 § 463, 得 464

被除式與除式之公因式,常相同於除式與餘式之公因式.

利用此事, x 之任何二多項式,其 H. C. F. 常可求得.此法與算術中求二整數之最大公約法相似.於下之方法敍述之,此處 A 與 B 表已知多項式,設其次數不同,則 A 爲高次式.

465 **法則．** 以 B 除 A，令其商爲 q，餘式爲 R_1.

再以 R_1 除 B，令其商爲 q_1，餘式爲 R_2

復以 R_2 除 R_1，如此繼續演算，以每次所得餘式除前次餘式，直至餘式不含 x 爲止．

設最後餘式不爲零，則 A 與 B 無公因式．設爲零，則最後之除式，即爲 A 與 B 之 H.C.F.

蓋爲明確計，假定最後餘式爲 R_3，則依 (1) $R_3=c$，此處 c 表一常數不爲零，或 (2) $R_3=0$，當有

$$\begin{array}{llll} (1) & A\equiv qB+R_1 \quad \text{或} & (2) & A\equiv qB+R_1 \\ & B\equiv q_1R_1+R_2 & & B\equiv q_1R_1+R_2 \\ & R_1\equiv q_2R_2+c & & R_1\equiv q_2R_2. \end{array}$$

(1) 此時 A 與 B 無公因式．

因從恆等式 (1) 依 § 463，A 與 B 及 B 與 R_1 之公因式相同，B 與 R_1 及 R_1 與 R_2 亦如此，R_1 與 R_2 及 R_2 與 c 亦如是．

故各對函數 A 與 B，B 與 R_1，R_1 與 R_2，R_2 及 c 皆有相同公因式．

但 c 爲常數（不爲零），R 與 c 無公因式，故 A 與 B 無一公因式．

(2) 此時 R_2 爲 A 與 B 之公因式．

因 $R_1\equiv q_2R_2$，R_2 之每一因式，爲 R_1 與 R_2 之公因式，而 R_2 本身爲次數最高之公因式．

但因 R_1 與 R_2 及 A 與 B 之公因式相同，R_1 與 R_2 中所公有次數最高之因式，亦即 A 與 B 中所公有次數最高之因式．故 R_2 爲 A 與 B 之最高公因式．

例 1. 求 x^2+x+1 與 x^3+x^2+2x+3 之最高公因式。

書除式於被除式之左，則有

$$
\begin{array}{rl}
B = x^2+x+1 & \left|\, x^3+x^2+2x+3 \,\right| \underline{x} = q \\
 & \underline{x^3+x^2+\ \ x} \\
R_1 = & x+3 \,\left|\, x^2+\ x+1 \,\right| x-2 = q_1 \\
 & \qquad \underline{x^2+3x} \\
 & \qquad -2x+1 \\
 & \qquad \underline{-2x-6} \\
R_2 = & \qquad\qquad 7
\end{array}
$$

因最後餘式 R_2 不爲零，故 x^2+x+1 與 x^3+x^2+2x+3 無公因式。

例 2. 求 x^3+x^2+2x+2 及 x^3+2x^2+3x+2 之 H. C. F.

如例 1. 排列算草，得

$$
\begin{array}{rl}
B = x^3+x^2+2x+2 & \left|\, x^3+2x^2+3x+2 \,\right| \underline{1} \\
 & \underline{x^3+\ x^2+2x+2} \\
R_1 = & x^2+\ x \,\left|\, x^3+x^2+2x+2 \,\right| \underline{x} \\
 & \qquad \underline{x^3+x^2} \\
R_2 = & \qquad 2x+2 \,\left|\, x^2+x \,\right| \underline{x/2} \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2+x} \\
R_3 = & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

此處能以 R_2 整除，R_3 爲 0. 故棄去 R_2 中之因數 2，而有 H. C. F. $=x+1$.

此處初次實際證明——關於一變數之函數——設二整函數有任何公因式則必有一最高公因式；因在 §§ 463, 465 中，未曾如 § 458 假定已知整函數以其質因式表之，只有一法故也。 466

就 § 465 之證明中觀察之，可證明 467

1. 在 $A, B, R_1, R_2, \cdots$ 中，每二連續函數及 A 與 B 有相同 H. C. F.

2. A 與 B 之每一公因式卽爲 A 與 B 之 H. C. F. 之約數。

此法之節略. 1. 設 A 與 B 之任何質因式一望而知，則可先抽出此質因式，再求其結果式之 H. C. F. 此所得之結果， 468

乘以最先抽出之因式，爲 A 與 B 所公有者，即爲 A 與 B 之 H. C. F. (§ 458).

在 $A, B, R_1, R_2, \cdots$ 中每二連續函數之 H. C. F.，可依同法進行，因每二個如此函數，有 H. C. F. 與 A, B 之 H. C. F. 相同 (§ 467).

例如，$A=x^4+x^3+2x^2+2x$ 與 $B=x^4+2x^3+3x^2+2x$，顯然可見其有公因式 x 抽出之，得 x^3+x^2+2x+2 與 x^3+2x^2+3x+2，其 H. C. F. 已求得爲 $x+1$ (見 § 465 例 2). 故 A 與 B 之 H. C. F. 爲 $x(x+1)$.

又在例 2 中，因 x 爲 R_1 之因式，而非 B 之因式. 故 x 非 B 與 R_1 之 H. C. F. 之因式，從而非 A 與 B 之 H. C. F. 之因式. 故可棄去 R_1 之因式 x，而以其餘因式 $x+1$ 除 B，如是可減少除法之次數.

2. 在任何除法中，可用一因數乘或除其除式或被除式或任何中間餘式；因其影響所及，至多爲其後餘式少一因數 (§ 403)；而不及其 H. C. F. 故也. 當已知係數爲有理數時，此法可避免分數係數.

3. 用分離係數法尤爲便利.

例 1. 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $B=2x^3+5x^2-x-1$ 之 H. C. F.

以 2 乘 A，且用分離係數法，得

$$
\begin{array}{r|l}
2+5-1-1 & 2+6+4+6+2 \;\underline{|1} \\
 & \underline{2+5-1-1} \\
 & \quad 1+5+7+2 \\
 & \underline{\quad 2} \\
 & 2+10+14+4 \;\underline{|1} \\
 & \underline{2+5-1-1} \\
 & 5)\,5+15+5 \\
 & \quad 1+3+1 \;|\; 2+5-1-1 \;\underline{|2-1} \\
 & \qquad\qquad \underline{2+6+2} \\
 & \qquad\qquad -1-3-1 \\
 & \qquad\qquad \underline{-1-3-1}
\end{array}
$$

故 A 與 B 之 H. C. F. 爲

$x^2+3x+1.$

此種計算可簡列如下：

$$
\begin{array}{r|r|l}
2+5-1-1 & 2+6+\ 4+\ 6+2 & 1+1 \\
2+6+2 & 2+5-\ 1-\ 1 & \\
\hline
1-3-1 & 1+\ 5+\ 7+2 & \\
-1-3-1 & 2+10+14+4 & \\
\hline
 & 2+\ 5-\ 1-1 & \\
\cline{2-2}
 & 5+15+5 & \\
 & 1+\ 3+1 & 2-1
\end{array}
$$

例 2. 求以下之 H. C. F.

$$2x^4+3x^3+4x^2+2x+1 \text{ 與 } 2x^4-x^3+2x^2+1.$$

定理. 設 A 與 B 之係數爲有理數，則其 H. C. F. 之係數亦爲有理數；設 A 與 B 之係數爲實數，則其 H. C. F. 亦爲實數. 469

因 A 與 B 之 H. C. F. 可由 § 465 之法求得. 故其係數卽爲 A 與 B 之係數之有理結合，故當 A 與 B 之係數爲有理數時，其 H. C. F. 之係數亦爲有理數，當爲實數時，亦爲實數.

此定理有重要結論，將述其一二於後，用此以求 H. C. F. 常能節省勞力.

例. 求 x^2-2 與 x^3+x^2-5x+6 之 H. C. F.

此二多項式如非爲互質，卽其 H. C. F. 爲 x^2-2；因 x^2-2 之因式 $x+\sqrt{2}$ 與 $x-\sqrt{2}$, 有無理係數，故俱不能爲 H. C. F.

但由試驗而知 x^2-2 不能整除 x^3+x^2-5x+6, 故此二式爲互質.

多於二個之 x 多項式之 H. C. F. 可依下法求得. 470

先求二多項式之 H. C. F. 次求此 H. C. F. 與第三多項式之 H. C. F. 餘類推. 最後結果爲所求之 H. C. F.

例如，設 D_1 爲 A 與 B 之 H. C. F., 而 D_2 爲 D_1 與 C 之 H. C. F. 則 D_2 卽爲 A, B, 與 C 之 H. C. F.

因 (1), D_2 爲 D_1 與 C 之因式；而 D_1 爲 A 與 B 之因式，故由 § 427, D_2 爲 A, B, 與 C 之一因式。

(2) A, B 與 C 之每一公因式，即爲 D_1 與 C 之一公因式，故亦爲 D_2 之一因式 (§ 467), 故 D_2 爲 A, B, 與 C 之最高公因式。

從 § 458 可得相同之結論。

例. 求 $A=x^4+x^3-x^2+x-2$, $B=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$, 與 $C=3x^4-x^3-x^2-1$ 之 H. C. F.

由 § 465, 得 A 與 B 之 H. C. F. 爲 $D_1=x^2+x-2$; 而 D_1 與 C 之 H. C. F. 爲 $x-1$.

故 A, B 與 C 之 H. C. F. 爲 $x-1$.

471 含多變數之多項式之 H. C. F. 求二個如此多項式之 H. C. F., 其一般問題在此處討論太覺複雜。然二多項式之爲二變數 x 及 y 之齊次函數者，其 H. C. F. 即可藉 § 465 所述之法求得。

習題 XXII.

求以下之 H. C. F.

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^5yz^3$, $6x^4y^3z^5$, 與 $8x^4y^4z^4u$.
2. $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$, 與 a^3b-ab^3.
3. y^4+y^2+1 與 y^2-y+1.
4. a^2-1, a^2+2a+1, 與 a^3+1.
5. x^3-1 與 x^3+ax^2-ax-1.
6. x^4-y^4, x^6+y^6, 與 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
7. x^2+5x+6, x^2+x-2, 與 $x^2-14x-32$.
8. $(x-1)(x-2)$ 與 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
9. x^3-1 與 x^3-4x^2-4x-5.
10. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 與 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.
11. $(x-1)^2(x-2)^2$ 與 $(x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$.
12. $2x^3-3x^2-11x+6$ 與 $4x^3+3x^2-9x+2$.
13. x^3-2x^2-2x-3 與 $2x^3+x^2+x-1$.

14. $3x^3+2x^2-19x+6$ 與 $2x^3+x^2-13x+6$.

15. $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 與 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.

16. $3x^3-13x^2+23x-21$ 與 $6x^3+x^2-44x+21$.

17. $3x^3+8x^2-4x-15$ 與 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$.

18. $6x^5+7x^4-9x^3-7x^2+3x$ 與 $6x^5+7x^4+3x^3+7x^2-3x$.

19. $6x^4-3x^3+7x^2+x-3$ 與 $2x^4+3x^3+7x^2+3x+9$.

20. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ 與 $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

21. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$ 與 $5x^4-3x^2-8x-3$.

22. $3x^3-x^2-12x+4$, x^3-2x^2-5x+6, 與 $7x^3+19x^2+8x-4$.

23. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3, 與 x^3+x^2-3x-3.

24 $7x^4y-6x^3y^2-18x^2y^3+4xy^4$ 與 $14x^3y-19x^2y^2-32xy^3+28y^4$.

25. $x(x-1)(x^3+4x^2+4x+3)$ 與 $(x-1)(x+3)(12x^3+x^2+x-1)$.

26. $4x^3-8x^2-3x+9$ 與 $(2x^2-x-3)(2x^2-7x+6)$.

最低公倍式

最低公倍式. 二以上整函數 $A, B, \cdots$ 之公倍式，即爲 472
$A, B, \cdots$ 各函數能整除之整函數.

在如此公倍式中，必有次數最低之一式，是謂 $A, B, \cdots$ 之最低公倍式 (L. C. M.).

定理 1. 二以上整函數 $A, B, \cdots$ 之 L. C. M. 爲 $A, B, \cdots$ 之 473
一切不同質因式在各函數中具有最高乘冪者之積.

此定理從下述事實而起，$A, B, \cdots$ 之公倍式，必含各函數 $A, B, \cdots$ 之每一質因式，次數至少須如其函數中所有者；故須有定理中述及之一切此種因式. 而其最低次之公倍式即 L. C. M，爲含不在此外因式之一式.

此處略去因數(卽數字因式)如前，而假定整函數以其不同質因式乘冪之積表之，僅有一法。

474 **用視察法求 L. C. M.** 設能分解 $A, B, \cdots$ 爲諸質因式，則應用上述定理，可立得其 L. C. M.

例 1. 求 $3x^5y^2z$, xy^4z^3 與 $2x^2yz^6$ 之 L. C. M.

此處不同質因式在各函數中具最高乘冪者爲 x^5, y^4, z^6.

故其 L. C. M. 爲 $x^5y^4z^6$.

例 2. 求 $x^2y^2-4xy^2+4y^2$ 與 x^2y-4y 之 L. C. M.

今 $x^2y^2-4xy^2+4y^2=y^2(x-2)^2$ 與 $x^2y-4y=y(x-2)(x+2)$.

故其 L. C. M. 爲 $y^2(x-2)^2(x+2)$.

475 **定理 2.** 二整函數 A 與 B 之 L. C. M.，爲以此二函數之 H. C. F. 除其積.

因命 D 表 A 與 B 之 H. C. F. 而命 A_1 與 B_1 表以 D 除 A 與 B 所得之商，使

$$A\equiv A_1D \text{ 而 } B\equiv B_1D.$$

設 M 表 A 與 B 之 L. C. M.，則

$$M\equiv A_1B_1D\equiv AB/D.$$

因 A 與 B 之公倍式，顯然必含 (1) A 與 B 所公有之一切質因式之積如 D; (2) A 之不屬於 B 之一切質因式之積如 A_1; (3) B 之不屬於 A 之一切質因式之積如 B_1; 而其最低公倍式除含此種因式外，別無其他因式.

476 **系.** 二整函數 A 與 B 之積，等於其 L. C. M. 與 H. C. F. 之積.

477 **含 x 之二多項式求其 L. C. M. 之一般法則.** 從 §§ 465, 475, 如此二多項式 A 與 B 之 L. C. M.，常可依下法得之.

欲求 A 與 B 之 L. C. M.，可用 A 與 B 之 H. C. F. 除 A，而以 B 乘其結果.

此法等於以 A 中一切質因式之未呈現於 B 者乘 B，宜注意。

例． 求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之 L. C. M.

由 § 465，得 H. C. F. $=x^2+3x+1$.

其次 $(2x^3+5x^2-x-1)/(x^2+3x+1)=2x-1$.

故其 L. C. M. 爲 $(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)$.

含 x 之二以上多項式之 L. C. M. 此可由下法得之。 **478**

先求二多項式之 L. C. M.，次求其結果與第三多項式之 L. C. M. 如此進行．最後結果爲所求之 L. C. M.

此法從下述事實而來，此方法中之各步驟，等於將上次所得之 L. C. M.，以此次函數中諸質因式之未呈現於此 L. C. M. 者乘之。

例． 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$，$B=2x^3+5x^2-x-1$，及 $C=2x^3-3x^2+2x-3$ 之 L. C. M.

已得 A 及 B 之 L. C. M. 爲 (§ 477)

$$M_1=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1).$$

次欲求 M_1 與 C 之 L. C. M.

由除法知 $2x-1$ 與 C 爲互質，而由 § 465，得 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 C 之 H. C. F. 爲 x^2+i.

且又 $$C/(x^2+1)=2x-3.$$

故 M_1 與 C 之 L. C. M. 亦卽 A, B, C 之 L. C. M. 爲

$$M=(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$

求 M_1 與 C 之 H. C. F. 之前，不可將 M_1 之因式乘爲一式，宜注意。

習　題　XXIII.

求以下之 L. C. M.

1. $3x-1$，$9x^2-1$，與 $9x^2+1$.
2. $(a+b)(a^5-b^5)$，與 $(a-b)(a^5+b^5)$.

3. a^3+a^2+a, a^5-a^3, 與 a^6-a^3.

4. $(x^3-y^3)(x-y)^3$, $(x^4-y^4)(x-y)^2$, 與 $(x^2-y^2)^2$.

5. x^2-3x+2, x^2-5x+6, 與 x^2-4x+3.

6. $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$, 與 $z^2-(x+y)^2$.

7. $2x^2+3xy-9y^2$, $3x^2+8xy-3y^2$, 與 $6x^2-11xy+3y^2$.

8. x^3+x^2+x+1, 與 x^3-x^2+x-1.

9. $2a^2x+2x^2y+3y^2x+3a^2y$, 與 $(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$.

10. $8x^3-18xy^2$, $8x^3+8x^2y-6xy^2$, 與 $8x^2-2xy-15y^2$.

11. x^3+y^3, x^3-y^3, 與 $x^4+x^2y^2+y^4$.

12. x^6-1, $3x^3-5x^2-3x+5$, 與 x^4-1.

13. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, 與 $6x^2+5x-6$.

14. x^2-4a^2, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$, 與 $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.

15. x^2+2x, $x^2+bx+2x+2b$, 與 $x^3+ax^2-b^2x-ab^2$.

16. $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)$, 與 $(x^2+5x+6)(2x^2-3x-5)$.

17. $(x^3-8)(27x^3+1)$, 與 $(2x^3+5x^2+10x+4)(x^3-x^2-x-2)$.

18. $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$, 與 $2x^3+x^2-13x+6$.

19. x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$, 與 $2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.

20. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2$, $2x^4+3x^3-4x^2+13x-6$, 與
$x^4+3x^3+x^2+5x+6$.

一變數函數之質因式與不可約因式

在下列定理中，A 與 B 表 x 之多項式。

479 **基本定理.** 設 A 對於 B 爲互質，則可求得二整函數 M 與 N,使

$$MA+NB\equiv 1.$$

因設用 § 465 法於 A 及 B, 則得不爲 0 之常數 c 爲最後餘式。

如 § 465, 設假定 c 爲第三餘式,而用其說明之記法,則有

1. $A=qB+R_1$, 故　　　4. $R_1=A-qB$,
2. $B=q_1R_1+R_2$.　　　5. $R_2=B-q_1R_1$,
3. $R_1=q_2R_2+c$,　　　6. $c=R_1-q_2R_2$.

以 (5) 中已知 R_2 之値代入 (6), 合併 R_1 與 B 諸項,再以 (4) 中已知 R_1 之値代入於其結果,合併 A 與 B 諸項. 則得

$$\begin{aligned} c &= R_1-q_2R_2 \\ &= (1+q_1q_2)R_1-q_2B \\ &= (1+q_1q_2)A-(q+q_2+qq_1q_2)B. \end{aligned}$$

以 c 除此最後恆等式之二邊,因 c 爲常數,故 $(1+q_1q_2)/c$ 與 $-(q+q_2+qq_1q_2)/c$ 俱爲整函數,書作 M 及 N. 卽得

$$1=MA+NB,$$

此處 M 與 N 爲整函數如定理所云.

當常數餘式 c, 比第三次除法早得或遲得時,此定理仍可依同法證明.

逆定理. 設 $MA+NB=1$, 此處 M 與 N 爲整函數,則 A 對於 B 爲互質. 480

因 A 與 B 之公因式必爲 $MA+NB$ 之一因式 (§ 461), 卽爲 1 之因式,此爲不可能故也.

下列諸定理,爲已證明之基本定理之主要結論.

定理 1. 設 A 對於 B 爲互質, 而 B 可除盡積 AC, 則 B 可除盡 C. 481

因 A 對於 B 爲互質, 可求得 M 與 N (§ 479), 使

$$MA+NB=1.$$

故 $$M\cdot AC+NC\cdot B=C.$$

但 B 爲 AC 與 B 之一因式. 故亦爲 C 之因式 (§ 461).

定理 2. 設 A 對於各函數 B, C 爲互質, 則亦對於其積 BC 爲互質. 482

因 A 對於 B 爲互質，可求得 M 與 N (§ 479)，使

$$MA+NB=1,$$

故 $$MC\cdot A+N\cdot BC=C.$$

設 A 與 BC 有一公因式，則此公因式必含於 C 中 (§ 461)，但此爲不可能，因 A 對於 C 爲互質故也.

483 **系.** 設 A 對於各函數 B, C, D 爲互質，則對於 B, C, D …之積亦爲互質.

因如前證明 A 對於 BC 爲互質.

又因 A 對於 BC 亦對於 D 爲互質，故對於積 B, C, D 爲互質，餘類推.

484 **定理 3** 一複函數有一組且僅有一組質因式.

因令 P 表此已知函數，而 n 表其次數.

設 P 爲復函數，則必有因式 A. 設 A 亦爲複式，則必有因式 B. 如此繼續進行，終可得到一質函數；因此順次諸函數 $P, A, B,$…之次數，從有限數 n 起逐次降低，而不能低於 1 故也.

令 F 表此質函數. 此爲 P 之質因式之一 (§ 427)，而有 $P=FM$，此處 M 爲整式.

同理，設 M 爲復函數，有一質函數 F' 存在，可使 $M=F'M'$，故 $P=FF'M'$，此處 M' 爲一整式.

如此繼續進行，可達到結論爲有一組之質函數存在，其數不能超過 n，可使

$$P=F\cdot F'\cdot F''\cdots.$$

故 P 至少有一組質因式.

尤有進者，P 僅能有如此一組因式. 因假定

$$P=FF'F''=G\cdot G'\cdot G''\cdots$$

此處 G, G', G'' 亦表質函數.

則 G 不能對於一切函數 $F, F', F'', \cdots$ 爲互質，因設爲互質，則對於其積 P 爲互質 (§ 483)，然彼固爲 P 之因式也.

設 G 對於 F 非互質，則 G 與 F 有一公因式. 但 G 與 F 俱爲質函數，而二質函數除其本身外不能公有含 x 之因式. 故 G 與 F 至多有一數字因式如 c 之差，而有 $G=cF$.

但以 G 之值代入恆等式 $FF'F''\cdots=GG'G''\cdots$，而以 F 除其二端，得

$$F'F''=cG'G''\cdots,$$

重複用前理，即知 G' 與函數 $F'F''\cdots$ 之一至多僅有一數字因式之差。

依此進行，可達到結論為一組函數 $GG'G'',\cdots$ 與一組函數 $FF'F''\cdots$ 至多僅有一數字因式之差，或僅其次序在排列上不同耳。

系. 一複函數以其諸不同質因式乘冪之積表之，僅有一法。 485

從恆等式 $P=F\cdot F'\cdot F''\cdots$，設將其積 $F\cdot F'\cdot F''$ 中各組相等因式，以此等因式之一之對應乘冪表之，則立得此系。

不可約因式. 整函數者具有理係數之不可約因式，通常指其最低次因式具有理係數者而言。 486

例如，$(x-1)(x^2-2)$ 之質因式為 $x-1$, $x-\sqrt{2}$, $x+\sqrt{2}$，其不可約因式為 $x-1$ 與 x^2-2.

由以上已證明之定理及 § 469 之定理，可得 487

具有理係數之可約整函數，可以其諸不同不可約因式乘冪之積表之，但僅有一法。

旁涉於數論之事

類似於以上所證明之定理，適用於整數。 488

以文字 a, b 等表正或負之整數（不為零），凡能整除 a 之任何整數，稱為 a 之因數。

質數乃一整數，除其本身與 1 外，別無他因數者也。 489

490 設二整數 a, b, 除 1 外別無公因數者，則 a 稱爲對於 b 爲互質。

491 **定理**。 設 a 對於 b 爲互質，常可求得二整數 m 與 n；使

$$ma+nb=1.$$

因 a 對於 b 爲互質，設用普通方法求其最大公約數，則必得其最後餘數。由 § 479 之理由，從此事實可得此定理。

例如，設 $a=325$, $b=116$. 應用求 G. C. D. 之法，得

$$\begin{array}{lll}
116 \,|\, 325 \,|\, 2 & & \\
\quad\ \ 232 & & \\
r_1 = 93 \,|\, 116 \,|\, 1 & \text{即}\ 325=2\cdot116+93,\ \text{或}\ 93=325-2\cdot116 & (1) \\
\qquad\quad 93 & & \\
r_2 = 23 \,|\, 93 \,|\, 4 & 116=1\cdot 93+23,\ \text{或}\ 23=116-1\cdot 93 & (2) \\
\qquad\quad 92 & & \\
r_3 = 1 & 93=4\cdot 23+1,\ \text{或}\ 1=93-4\cdot 23 & (3)
\end{array}$$

從 (3) 開始，先以 (2) 中 23 之值代入，次以 (1) 中 93 之值代入，則有

$$\begin{aligned}1&=93-4\cdot23\\&=5\cdot93-4\cdot116\\&=5\cdot325-14\cdot116.\end{aligned}$$

故 $$5\cdot325+(-14)\cdot116=1.$$

由此求得二整數 $m=5$ 及 $n=-14$, 故

$$m\cdot325+n\cdot116=1.$$

在其他情形同此。

例。 求整數 m 與 n 使 $223m+125n=1$.

492 **系**。 從此基本定理，可導出關於整數之定理，類似於 §§ 481-485 中寫出關於整函數者爲同一理由。在特例可證明

1. 設 a 對於 b 爲互質，而積 ac 可用 b 除盡，則 c 可用 b 除盡。

2. 設 a 對於 b 與 c 爲互質，則 a 對於 bc 爲互質。

3. 複數能以其諸不同質因數乘冪之積表之，但僅有一法。

VIII. 有 理 分 式

約 分

分式. 設 A 與 B 表任何二代數式，其 B 不爲 0. 以 B 除 A 之商，以形式 A/B 表之，名爲分式，而 A 名爲分子，B 名爲分母，A 與 B 二者爲分式之項. 493

當 A 與 B 俱爲有理式時，A/B 名爲**有理分式**. 494

當 A 與 B 俱爲整式時，A/B 名爲**簡分式**；但設 A 與 B 俱爲分式，則 A/B 名爲**繁分式**. 495

一簡分式之爲**眞分式**或**假分式**，依其分子之次數小於或不小於分母之次數而定. 496

例如，$\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ 與 $\dfrac{2x^2-3}{x^3+1}$ 爲眞分式，而 $\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ 及 $\dfrac{x^3+3}{x^2+1}$ 爲假分式.

一假分式之項爲一變數函數者，可化爲一整式與一眞分式之和 (§ 400). 此和名爲**帶分式**. 497

例如，$\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}=2-\dfrac{1}{x^2+1}$，$\dfrac{x^3-3}{x^2+1}=x-\dfrac{x+3}{x^2+1}$.

分式之正當變形. 此須根據下列定理 (§ 320, 1). 498

以同式(不爲 0) 乘或除一分式之分母與分子時，其値不變.

特別時，可同時變其分子與分母之記號，此等於以 -1 乘其分子與分母二者. 變分子或分母之記號，卽僅變此分式本身之記號. (§ 320, 3)

設分式之分子或分母為多項式,則變其記號,等於變其所有各項之記號。

例如,
$$\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{c-a-b}{b-c-a}=-\frac{c-a-b}{a-b+c}=-\frac{a+b-c}{b-c-a}.$$

設分式之分子,分母,或二者為數個因子之積;則可變其偶數個因式之記號。但變其奇數個因式之記號,則變其分式之記號。

例如,
$$\frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)}=\frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)}=-\frac{(b-a)(d-c)}{(f-e)(g-h)}.$$

499　**約分.** 化簡一分式,即約去其分子與分母所公有之一切因式.此法變分式之形式而不影響其值 (§ 498).

已化簡後之分式,稱為最低項或不可約.

用 VII 章之法可發見其公因式或證明其無公因式.先查考單項因式,及由視察法可明知,或用餘式定理可求得之其他公因式;當用此種簡單法則失敗時,則可應用 § 465 之一般法則.

下例說明此種法則.

例 1. 化簡 $(aec-ade)/(bde-ebc)$.

$$\frac{aec-ade}{bde-ebc}=\frac{ae(c-d)}{be(d-c)}=-\frac{a(c-d)}{b(c-d)}=-\frac{a}{b}.$$

例 2. 化簡 $(x^3+x^2+x+6)/(x^2+3x+2)$.

由視察法知分母之因式為 $x+1$ 與 $x+2$. 故設分子與分母有任何公因式,則必為上二因式之一. 用綜合除法試驗,知分子不能為 $x-1$ 除盡,但能為 $x+2$ 除盡,其商為 x^2-x+3.

故
$$\frac{x^3+x^2+x+6}{x^2+3x+2}=\frac{x^2-x+3}{x+1}.$$

例 3. 化簡 $(x^3+7x+10)/(x^3+5x+6)$.

從分子減分母，得

$$x^3+7x+10-(x^3+5x+6)=2(x+2).$$

故設分子與分母有任何公因式，則必為 $x+2$(§ 461). 但當 $x=-2$ 時分子不為零。故此分式已在最低項 (§ 415).

例 4. 化簡 $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

此處僅有可能公因式 $(a-b)$, $(b-c)$ 與 $(c-a)$, 於分子中使 $a=b$, 得 $b^2(b-c)+b^2(c-b)$ 或 0. 故分子可用 $a-b$ 除盡, (§ 417) 同法可證其亦能用 $b-c$ 與 $c-a$ 除盡。

故分子可用分母整除，但此二式為 a, b, c 之同次式，卽三次. 故其商必為一單獨數；又因 a^2 項有二，當排列為 a 之多項式時，各爲 $a^2(b-c)$ 與 $-a^2(b-c)$, 故此數為 -1.

故已知分式等於 -1.

例 5. 化簡 $(2x^3+13x^2-6x+7)/(2x^4+5x^3+8x^2-2x+5)$.

由 § 465, 求得分子與分母之 H. C. F. 為 $2x^2-x+1$. 以 $2x^2-x+1$ 同除分子分母，得

$$\frac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}=\frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

習題 XXIV.

化以下諸分式至最簡式：

1. $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$.

2. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

3. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$.

4. $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$.

5. $\dfrac{3x^2-18bx+27b^2}{2x^2-18b^2}$.

6. $\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$.

7. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.

8. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

9. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$.
10. $\dfrac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

11. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.
12. $\dfrac{2mx-my-12nx+6ny}{6mx-3my-2nx+ny}$.

13. $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}$.
14. $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{2x^3-13x^2+17x+12}$.

15. $\dfrac{x^4+x^3+5x^2+4x+4}{2x^4+2x^3+14x^2+12x+12}$.
16. $\dfrac{x^3-2x^2-x-6}{x^4+3x^3+8x^2+8x+8}$.

17. $\dfrac{(x^2+c^2)^2-4b^2x^2}{x^4+4bx^3+4b^2x^2-c^4}$.
18. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

分式之演算

500 **最低公分母.** 欲加或減分式,可先化諸分式爲有公分母之等值分式.

顯然可見已知諸分母之最低公倍式，爲其最低次之公分母,故名之爲已知分式之最低公分母 (L. C. D.).

例. 化 $\dfrac{a}{bc}$, $\dfrac{b}{ca}$, $\dfrac{c}{ab}$ 至最低公分母.

已知諸分母之 L. C. M. 爲 abc.

欲化 $\dfrac{a}{bc}$ 爲有公母 abc 等值分式,須以 a 乘其二項.

同法須以 b 乘 $\dfrac{b}{ca}$ 之二項，及以 c 乘 $\dfrac{c}{ab}$ 之二項.

如，
$$\frac{a}{bc}=\frac{a^2}{abc},\quad \frac{b}{ca}=\frac{b^2}{abc},\quad \frac{c}{ab}=\frac{c^2}{abc}.$$

501 欲化二或多分式爲有最低公分母之等值分式，先求已知分母之最低公倍式.

次於各分式中,以最低公分母代分母,而以引入於此分母中之新因子乘其分子.

加法與減法． 關於有公分母之分式，其加法與減法之法則，已包括於下列公式中（§ 320, 4），　502

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}.$$

故求二或多分式之代數和，

設必要時，可化之至最低公分母．

以連結已知分式之記號連接結果分式之新分子，而書其結果於公分母之上．

最後化簡所得之結果．

當整式代替一或多分式時，此法則亦可應用，因整式可視作分母爲 1 之分式故也．

各已知分式，苟非可約之因式存在於其他一分母之中，皆以化至最低項爲最善．

應顧慮所選爲分母之一式，是否爲眞實之最低公分母．常有之錯誤，乃處理僅有記號相異之因式 $a-b$ 與 $b-a$，認爲不同而同時引入於最低公分母之中．

將已知分式成對合併，常較便利．

例 1. 化簡 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2b}{a^2-b^2}$.

此處最低公分母爲 a^2-b^2，而有

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

當化至最低項時和之分母，可僅爲其最低公分母之因式，宜注意．

例 2. 化簡 $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

因第一分母爲 1, 而第二分母爲 $-(x-1)$, 最低公分母爲 x^2-1, 故得

$$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例 3. 化簡 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

此處以將分式成對合併較簡. 例如,

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=-\frac{4}{x^2-1}.$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

例 4. 化簡 $\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$.

藉餘式定理 (§ 415), 知 $x-1$ 爲第一分式二項之公因式, 但非第二分母之因式. 故化簡第一分式於其二項中約去 $x-1$, 得 $(x+1)/(x^3+x^2+2x)$.

由 § 465, 得 x^3+x^2+2x 及 $2x^3+x^2+3x-2$ 之 H. C. F. 爲 x^2+x+2; 而 $x^3+x^2+2x=(x^2+x+2)x$, $2x^3+x^2+3x-2=(2x-1)(x^2+x+2)$.

在化爲公分母之前,須審察 $2x-1$ 是否亦爲分子 $2x^2+3x-2$ 之一因式. 今知其確爲因式而約去之, 化第二分式爲 $(x+2)/(x^2+x+2)$.

故 $$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}=\frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x+2}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{x+1+x^2+2x}{x^3+x^2+2x}=\frac{x^2+3x+1}{x^3+x^2+2x}.$$

503 乘法. 應用下列定理, 可求得二, 或多分式之積.

二或多分式之積，爲一分式，其分子爲已知分式分子之積，而分母爲已知分式分母之積。

例如，
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

因以 bd 乘各端之積爲 ac 故也 (見 § 253).

例如， $\frac{ac}{bd}bd=ac$; 而 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot bd=\frac{a}{b}b\cdot\frac{c}{d}d=ac.$　§ § 252, 254.

在特例，以一整式乘一分式，即以此整式乘其分子。

分式 ac/bd 常先化至最低項，然後實行其分子與分母所示之乘法。

例 1. 以 $(x+1)/(x-1)$ 乘 $(x^3-1)/(x^3+1)$.
$$\frac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例 2. 以 $(x+2)/x$ 乘 $1-(x-2)/(x^2+x-2)$.
$$\left(1-\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x^2}{x^2+x-2}\cdot\frac{x+2}{x}=\frac{x}{x-1}.$$

乘方. 從 § 503 導出下之法則：　504

欲將分式自乘至已知冪，可將分子與分母二者各自乘至此冪。

例如，
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

因 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots$至 n 因式 $=\frac{a\cdot a\cdot \text{至 } n \text{ 因式}}{b\cdot b\cdot \text{至 } n \text{ 因式}}=\frac{a^n}{b^n}.$

例. 求 $-ab^2c^3/efg^4$ 之立方。
$$\left(-\frac{ab^2c^3}{efg^4}\right)^3=-\frac{a^3b^6c^9}{e^3f^3g^{12}}.$$

除法. 顛倒一分式 a/b, 即交換其分子與分母也。如此所得之分式 b/a, 名爲 a/b 之倒分式。　505

欲以一分式除他分式，可用除式之倒式乘被除式。

例如，
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

因以 c/d 乘各端之積均爲 a/b 故也 (見 § 253).

例如， $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$; 而 $\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}$. (§ § 252, 254, 503).

在特例，欲以一整式除一分式，可用此整式乘其分母。

例 1. 以 $(x^4+x^2y^2+y^4)/(x^4-y^4)$ 除 $(x^2-xy+y^2)/(x^2-y^2)$.

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

例 2. 以 x^2+6x+8 除 $(x^2+5x+6)/(x+1)$.

$$\frac{x^2+5x+6}{x+1}\div(x^2+6x+8)=\frac{x^2+5x+6}{(x+1)(x^2+6x+8)}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+4)}$$

$$=\frac{x+3}{x^2+5x+4}.$$

506 **有理式一般．繁分式及連分式．** 前已證明二分式之和，差，積與商，仍爲分式，故每一有理式 (§ 267) 俱能化爲簡單有理分式之形。

關於化已知有理式爲最簡之形，以何法爲最善，本無一般法則。一切不需步驟，須竭力避免。應特別注意於利用時機化分式爲最低項，直至不能再化爲止，方可實行多項式之乘法。

507 前已言及 (§ 495) 當 A 或 B 有一或二者爲分式時，則分式 A/B 名爲繁分式。

化簡一繁分式 A/B，有時用 § 505 之法，先以 B 除 A，有時先以 A 與 B 中一切分母之 L. C. M. 同時，乘 A 與 B 爲較善。在用此種步驟之前，最好分别化簡 A 與 B。

例 1. 化簡 $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)\Big/\left(\frac{a-b}{a+b}+1\right)$.

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}+1}{\frac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\frac{a+b+a-b}{a-b}}{\frac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\frac{2a}{a-b}}{\frac{2a}{a+b}}$$

$$=\frac{2a}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2a}=\frac{a+b}{a-b}.$$

宜注意於當繁分式之二項爲簡分式時，可約去此種分式分子或分母所公有之任何因式。如上第三步，可先約去 $2a$.

例 2. 化簡 $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$.

可如例 1 進行，但其簡法爲先以 $(a+b)(a-b)$ 乘其二項，如是得

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1.$$

例 3. 化簡 $\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}$.

從下而上演算，得

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}=\cfrac{a}{b+\cfrac{cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}.$$

如例 3 之繁分式，名爲連分式。

習 題 XXV

化簡下列諸式：

1. $\frac{1}{2a-3b}+\frac{1}{2a+3b}-\frac{6b}{4a^2-9b^2}$.

2. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^3+1}$.

3. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-4x+3}$.

4. $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\frac{x+3}{(3-x)(1-x)}$.

5. $\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}$.

6. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

7. $\frac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\frac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\frac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$.

8. $x+\frac{1}{3-2x}-\frac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\frac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$.

10. $\frac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\frac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\frac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$.

11. $\frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\frac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

12. $\frac{1}{x^4-4x^2-x+2}+\frac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}+\frac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$.

13. $\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)\div\left(a-\frac{1}{a}\right)$. 14 $\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$.

15. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$.

16. $\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$.

17. $\dfrac{ax+x^2}{2b-cx}\cdot\dfrac{2bx^2-cx^3}{(a+x)^2}$.

18. $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$.

19. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

20. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}$.

21. $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}$.

22. $\dfrac{x-3}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

23. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

不 定 式

極限. 設變數 x 連續取諸值 1/2, 3/4, 7/8, 15/16 等等 **503**
而無盡，顯然 x 趨近於值 1，在如此意味上，差 $1-x$ 終能變成且永久小於吾人能指定之每一正數，無論小至如何．吾人指示一切如此者稱爲 x 歷經諸值 1/2, 3/4, 7/8, 15/16,…之數串而趨近於 1 爲極限．

於一般，設 x 表一變數，假定此變數歷經若干已知值之數串而無盡者，又設有一數 a 能使差 $a-x$ 終能變成且永久爲絕對值小於能指定之每一正數，則稱 x 趨近於此數 a 爲極限．

欲表 x 趨近於其極限 a，書作 $x\doteq a$，或 $x=\lim a$.

須注意於此處變數一語，較 § 242 中之意義更有限制．

此種變數是否趨近於極限，須視假定其所歷經諸值之數串如何而定之．例如

設數串為 1, 2, 1, 2,……則此變數不趨近於極限。

變數與極限之詳細討論，已述於 §§ 187—205，學者可用心重讀，至少須讀其一部分，以資聯絡。

509 **極限定理。** 在 § 203 中，已證明設變數 x 及 y 趨近於極限，則其和，差，積，商，亦趨近於極限，而

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y.$$

$$\lim(x-y)=\lim x-\lim y.$$

$$\lim xy=\lim x\cdot\lim y.$$

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y},\ \text{除} \lim y=0\ \text{外}.$$

從此種定理，設 $F(x)$ 表 x 之任何已知有理函數，而當 $x=a$ 時，$F(a)$ 為其值，則當 x 趨近於 a 為極限時，F(x) 必趨近於 F(a) 為極限，即

$$\lim_{x\doteq a}F(x)=F(a),$$

此處 $\lim\limits_{x\doteq a}F(x)$ 讀為"x 趨近於 a 時 $F(x)$ 之極限"。

例如，$\lim\limits_{x\doteq a}(2x^2-3x+1)=2a^2-3a+1.$

510 **無窮大。** 設 x 歷經無盡數串 1, 2, 3, 4,…，則終能變成且永久大於能指定之每一數甚明。

一變數 x 如上終能變成且永久為絕對值大於能指定之每一數，則稱為趨近於無窮大。

關於"無窮大"一語，用符號 ∞. 而表 x 趨近於無窮大，書作 $x\doteq\infty$ 或 $\lim x=\infty$.

511 **註。** 必須注意者，如此規定之 ∞，非表定數，而關於數之計算法則皆不適用。此種說明，俟後述之。

"x 趨近於無窮大"一語，即"一變數終能變成且永久爲大於可指定之每一數"之簡稱．

有時爲簡便計，書作 $\lim x=\infty$，此時 limit 一字，當然無 § 508 所述之定義．

定理． 分子爲常數而分母爲變數之任何已知分式． 512

設分母趨近於 0 爲極限，則分式趨近於 ∞；設分母趨近於 ∞，則分式趨近於 0 爲極限．

例如，考分式 $1/x$．

設 x 歷經數串 1, .1, .01, .001, ⋯，趨近於 0，則 $1/x$ 必歷經數串 1, 10, 100, 1000, ⋯，而趨近於 ∞．

又設 x 歷經數串 1, 10, 100, 1000, ⋯，趨近於 ∞，則 $1/x$ 必歷經數串 1, .1, .01, .001, ⋯，而趨近於 0 爲極限．

在一般亦如是．

不定式． 形如 $f(x)/\phi(x)$ 之有理分式，除 $\phi(x)=0$ 外，對於 x 之任何已知值必有一定值．但當 $\phi(x)=0$ 時，則分式變爲形式 $0/0$ 或 $a/0$ 之一，便無算術意義 (§ 103)．雖然如此，若假定此分數在此二種情形各有意義，甚爲便利． 513

分式 0/0． 當 $x=1$ 時，分式 $(x^2-1)/(x-1)$ 成 $0/0$ 之形． 514

今除 $x=1$ 時外，能以 $x-1$ 除 x^2-1，而得

$$(x^2-1)/(x-1)=x+1.$$

不論 x 與 1 之差小至如何，此式爲眞．設實際不使 x 以 1 爲值，而使其趨近於 1 爲極限，則得：

$$\lim (x^2-1)/(x-1)=\lim (x+1)=2.$$

於是當 $x=1$ 時，計算法則雖對於 $(x^2-1)/(x-1)$ 無意義，

然能由此以證明當 x 趨近於 1 爲極限時，此分式趨近於一定極限 2.

前已證明 (§ 509) 當 $F(x)$ 表一有理函數而 $F(a)$ 有意義時，$F(a)=\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$. 故當計算法則對於 $F(a)$ 無意義如此處時，指定 $F(a)$ 之值爲 $\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$ 頗便；換言之，取公式 $F(a)=\lim\limits_{x \doteq a} F(x)$ 爲 $F(a)$ 之定義。

故當 $x=1$ 時，可予 $(x^2-1)/(x-1)$ 以值 2. 於是對於 x 之一切值，包括 1 在內，有 $(x^2-1)/(x-1)=x+1$.

同理，每一分式可書作 $(x-a)f(x)/(x-a)\phi(x)$，此處 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 爲整式，而 $\phi(x)$ 不能以 $x-a$ 除盡者，當 $x=a$ 時，可指定其值爲 $f(x)/\phi(x)$ 而對於 x 之一切值，包括 a 在內，得

$$\frac{(x-a)f(x)}{(x-a)\phi(x)}=\frac{f(x)}{\phi(x)}.$$

515 **$a/0$ 之形。** 當 $x=0$ 時，分式 $1/x$ 成 $1/0$ 之形。

1 雖不能以 0 除之，然能取 x 之一值與 0 相差小至如心所欲者除 1. 前已證明 (§ 512)，設使 x 趨近於 0 爲極限，則 $1/x$ 趨近於 ∞.

故當 $a \neq 0$ 時，可指定 ∞ 爲 $1/0$，一般爲 $a/0$ 之"值"，書爲

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

同理，如下列形狀之每一分式

$$f(x)/(x-a)\phi(x).$$

此處 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 俱爲整式，而 $x-a$ 不能除盡 $f(x)$，當 $x=a$ 時，可指定其"值"爲 ∞；意謂 x 趨近於 a 爲極限時，此分式

常趨近於 ∞.

分式值之結論. 注目於形如 $f(x)/\phi(x)$ 之簡分式，從 516
§§ 514, 515 可得下列結論.

1. 設 $f(x)/\phi(x)$ 爲最低項，對於 x 之諸值使分子 $f(x)$ 爲 0 者，則分式之值爲 0；對於 x 之諸值使分母 $\phi(x)$ 爲 0 者，則分式之値成 ∞. 關於 x 之其他有限値，則此分式有不同於 0 及 ∞ 之一值.

2. 但設 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有一公因式 $x-a$，而 $f(x)$ 含此因式 m 次，$\phi(x)$ 含此因式 n 次，則對於 $x=a$，當 $m>n$ 時，$f(x)/\phi(x)$ 爲 0；當 $m<n$ 時，此分式變成 ∞，當 $m=n$，此分式有不同於 0 及 ∞ 之一值.

例如當 $x=2$ 時，則有

$$\frac{x-2}{x+1}=0,\ \frac{x+1}{x-2}=\infty,\ \frac{(x-2)^3}{x(x-2)}=0,\ \frac{(x-2)}{x(x-2)^2}=\infty,\ \frac{(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{1}{2}.$$

∞/∞ 之形. 當 x 無限增大即當 $x\doteq\infty$ 時，$f(x)/\phi(x)$ 517
之值究趨近於何種極限，此常爲重大之事，不可不知.

今就下例考之.

前已證明 (§ 512)，當 $x\doteq\infty$ 時，$1/x,\ 1/x^2,\cdots\doteq 0$.

故當 $x\doteq\infty$ 時，
$$\frac{x^2-x+3}{2x^2+x-4}=\frac{1-1/x+3/x^2}{2+1/x-4/x^2}\doteq 1/2, \tag{1}$$

$$\frac{x+2}{x^2+x+5}=\frac{1+2/x}{x+1+5/x}\doteq 0, \tag{2}$$

$$\frac{x^2+x-7}{2x+3}=\frac{x+1-7/x}{2+3/x}\doteq\infty. \tag{3}$$

一般，當 $x\doteq\infty$ 時，分式

$$(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)/(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n)$$

趨近於極限 a_0/b_0，設分子分母之次數相同如 (1)；趨近於極限 0，設分母之次數較大如 (2)；趨近於極限 ∞，設分子之次數較

大如 (3).

且於此各情形中，其極限多爲"當 $x=\infty$ 時此分式所取之值"，即當分式本身假定爲不定式 ∞/∞ 時所取之值.

518 **$0\cdot\infty$ 與 $\infty-\infty$ 之形.** x 之有理函數對於 x 之特別值可作不定式 $0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$ 之形. 但此式可化爲前所述形式 $0/0$, $a/0$, ∞/∞ 之一.

1. 例如，當 $x=1$ 時，$(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}$ 成 $0\cdot\infty$ 之形. 但除 $x=1$ 以外，則得 $(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，故

$$\lim_{x \doteq 1}\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x \doteq 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x \doteq 1}(x+1)=2.$$

故當 $x=1$ 時，可指定已知式之值爲 2.

2 其次，當 $x=0$ 時，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}$ 成 $\infty-\infty$ 之形. 但除 $x=0$ 以外，則得 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{x}{x(x+2)}$，故

$$\lim_{x \doteq 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(x+2)}\right]=\lim_{x \doteq 0}\frac{x}{x(x+2)}=\lim_{x \doteq 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

故當 $x=0$ 時，可定已知式之值爲 $\frac{1}{2}$.

519 **一般結論.** 是故設一變數之已知函數如 $F(x)$，當 $x=a$ 時，則可指定爲不定式，如下進行：

先化此式爲最簡式，次求當 x 趨近於 a 爲極限時，此式之值趨近於何種極限. 稱此極限爲此函數當 x=a 時所有之值.

520 **註.** 此法限於單變數之函數如 $F(x)$. 此法則所以能得一定結果其原因，爲：$\lim\limits_{x \doteq a}F(x)$ 之值僅隨 a 之值而定，不隨 x 趨近於 a 時可取之值而定；而於多變數之函數則不眞故也.

例如 x 與 y 爲無關係之變數，當 $x=0$ 與 $y=0$ 時考慮分式 x/y.

當 $x \doteq 0$, $y \doteq 0$ 時，設 x/y 能趨近任何極限，則此極限，視 x 及 y 所歷經諸値之數串而定.

例如設變數歷經以下數串趨近於 0 爲極限:

$$1/2,\ 1/3,\ 1/4, \cdots\cdots (1); \quad 1/2^2,\ 1/3^2,\ 1/4^2, \cdots\cdots (2).$$

設 x 歷經 (1), y 歷經 (2), 則 x/y 必歷經數串 $2, 3, 4, \cdots\cdots$ 而趨近於 ∞. 但設 x 歷經 (2), y 歷經 (1), 則 x/y 必歷經數串 $1/2, 1/3, 1/4, \cdots\cdots$ 而趨近於 0.

故設 x 及 y 爲無關係之變數，則當 $x=0$, $y=0$ 時，視 x/y 爲絕對不定式。於一般皆如是.

與計算法則相關之無窮大. 設取文字之無窮大於計算內，必須陳述 §§ 249, 251, 253 之法則如下: 521

1. $a \cdot 0 = 0$,　　除 $a = \infty$ 外。
2. 設 $ac = bc$,　則 $a = b$, 除 $c = 0$ 或 ∞ 外。
3. 設 $a + c = b + c$,　則 $a = b$, 除 $c = \infty$ 外。

用此法則於方程之解法時，務須留意於此種例外情形。

例如，考慮乘積 $\dfrac{1}{x^2-1} \cdot \overline{x-1}$. 當 $x=1$ 時，第二因式 $x-1$ 爲 0; 但第一因式 $1/(x^2-1)$ 爲 ∞, 此乘積不隨第二因式而爲 0. 實則此乘積爲 $\frac{1}{2}$ (§ 518).

方程之無窮大根. 今用已往工作以代說述，如方程 $x+2 = x+3$ 及他一次方程可化爲 $0 \cdot x = b$ 之形者，以前謂其無根今可謂其根爲 ∞. 522

蓋 a 雖可小如何，設實不爲 0, 則 $ax = b$ 之根爲 b/a. 又設 b 爲常數而不爲 0, 則使 a 趨近於 0 爲極限，b/a 必趨近於 ∞ (§ 512). 換言之，如 $ax = b$ 趨近於 $0x = b$ 之形時，其根

b/a 趨近於值 ∞. 故與 §515 中所說明之實情相一致,可稱 $ax=b$ 當有 $0x=b$ 之形時有根 ∞.

設將 $x+2=x+3$ 視作根爲 ∞ 之眞方程,則不致生出悖謬之結論 $2=3$. 蓋因 $x=\infty$,則同時從其二邊減 x 之結果,不能正當斷論爲眞方程故也 (§521, 3). 此宜注意。

523 **聯立方程無窮大之解.** 同理,矛盾一次方程系 (§377, 2, §394, 2),以前謂其無解者,有時可謂其有無窮大之解;蓋從如此方程系用消去法可得一個一次方程如 $0x=b$ 之形,而由 §522, 此方程之根爲 ∞ 故也.

例如,一對矛盾方程 $y-x=0$ (1), $y-x=1$ (2), 可謂其有無窮大之解。

所宜注意者,此對 (1), (2) 當 $m \doteq 1$ 時爲下列一對之極限情形。

$$y-mx=0 \ (3), \quad y-x=1 \ (2).$$

(3), (2) 之解爲

$$x=1/(m-1), \quad y=m/(m-1).$$

而當 $m \doteq 1$ 時, $1/(m-1)$ 與 $m/(m-1)$ 同時趨近於無窮大。

用圖解法則 (§§386, 387), 可證明同一事實. 因當 $m \doteq 1$ 時 (3) 之圖形漸平行於 (1) 之圖形,而此二圖形之交點,在此平面上無窮遠處故也。

習題 XXVI

約定以下諸式之適當值:

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$, 當 $x=2$ 時.

2. $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-2x+1}$, 當 $x=1$ 時。

3. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$, 當 $x=1$ 時。

4. $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$, 當 $x=a$ 時。

5. $\dfrac{(3x+1)(x+2)^2}{(x^2-4)(x^2+3x+2)}$, 當 $x=-2$ 時。

6. $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$, 當 $x=1$ 時。

7. $\dfrac{3x^2-x+5}{2x^2+6x-7}$, $\dfrac{x^2+1}{x}$, $\dfrac{3x}{x^2+1}$, $\dfrac{(2x^2+1)(x^3-5)}{(x^4+1)(x-6)}$, 當 $x=\infty$ 時.

8. $\dfrac{x-1}{x^2-9}-\dfrac{x-2}{x(x-3)}$, 當 $x=3$ 時.

9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x(x-1)}$, 當 $x=1$ 時.

10. $\dfrac{x^2+\dfrac{x+1}{x-2}}{x^2+\dfrac{x-1}{x-2}}$, 當 $x=2$ 時.　　11. $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{3x+1}{x^2-1}}$, 當 $x=\infty$ 時.

分式方程

分式方程之解法. 任何已知分式方程,可以其一切分式 524
之最低公分母 D 乘其二邊,而將分式變形爲整式,此過程謂之去分母.

從 §§ 341, 342, 可知如此導出之整方程,有已知方程之一切根. 又設此外尙有任何根,則必爲方程 $D=0$ 之根,故可迅速發見而捨棄之.

例 1. 解 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+13}{x(x-1)}=0.$ (1)

去分母,以 $D=x(x-1)$ 乘之.

得 $$3(x-1)+6x-(x+13)=0. \qquad (2)$$

解 (2), $$x=2 \qquad (3)$$

因 2 非 $D=x(x-1)=0$ 之根,故爲 (1) 之根,且 (1) 只有此根.

例 2. 解 $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x+5}{x(x-1)}=0.$ (1)

去分母, $$3(x-1)+6x-(x+5)=0. \qquad (2)$$

解 (2), $$x=1. \qquad (3)$$

因 1 為 $D=x(x-1)=0$ 之根，故非 (1) 之根。實則當 $x=1$ 時，(1) 之第一端有 $3+\frac{6}{0}-\frac{6}{0}$ 之形；而由 § 518 求得其值為 8 而非 0。

故 (1) 無根。

以上說明之法則，可總括為下列法則：

525 欲解分式方程，可用一切分式之最低公分母 D 乘其二邊以去分母。

解所得之整方程。

此方程之根——設任一根能使 D 為 0 者則除外——即為已知方程之根。

526 **註**。亦可設立此法則如下：

移已知方程之一切項於一端而集項，其結果以 $N/D=0$ 表之；則去分母後得一整方程 $N=0$.

1. 設 N/D 為最低項，則 $N/D=0$ 與 $N=0$ 之根相同；因當分子為 0 時且只有此時最低項分式為 0 故也 (§ 516).

例如，在 § 524 例 1 中，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+13}{x(x-1)}=\frac{8(x-2)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

此處 N/D 為最低項，而 $N/D=0$ 之根與 $N=0$ 之根相同，即 2.

2. 設 N/D 非最低項，則 $N=0$ 之根有 $N/D=0$ 所未有之根，即為使 N 與 D 之公因式為 0 之根。

例如在 § 524 例 2 中，

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+5}{x(x-1)}=\frac{8(x-1)}{x(x-1)}=\frac{N}{D}.$$

此處 N/D 非最低項，而 $N=0$ 之根即 1，非 $N/D=0$ 之根；因 $x=1$ 時，$N/D=8$ 故也. (§ 514).

1 為一般情形而 2 為例外甚明。

例如，考慮方程 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+a}{x(x-1)}=0.$

此處 $N/D=[8x-(a+3)]/x(x-1)$，而除 $a=5$ 或 -3 外，此為最低項。

3. 上文所述，不能據以謂 $N=0$ 之根，亦卽 $D=0$ 之根，未曾滿足已知方程也。

例如，思考方程 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x(x-1)}=0.$

此處 $N/D=(x-1)^2/x(x-1)$，而由 § 516，當 $x=1$ 時，此式爲 0. 但察知 $N=(x-1)^2=0$ 有根 1 之次數，較多於 $D=x(x-1)=0$ 有此根之次數。

用 § 525 之法則，須留意於選爲最低公分母之式，不可使引入另外因式。 527

在方程中，設任何分式非爲最低項，苟非其可約之式存在於其他分母中者，須先化簡此分式。

在去分母之前，有時合併若干分式或化爲帶分式較善。

例 1. 解 $\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\frac{x^2}{6x-2x^2}=\frac{11}{5}.$

此處第一分式之各項有公因式 $x-5$，而第二分式有公因式 x. 消去此種公因式，得

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x}{6-2x}=\frac{11}{5},\text{ 或 }\frac{x-1}{x-3}+\frac{x}{2(x-3)}=\frac{11}{5}.$$

去分母， $$10x-10+5x=22x-66.$$

解之， $$x=8.$$

例 2. 解 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}.$

化各分式爲帶分式而簡之，

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}.$$

移項，使各端之項以減號連結，

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}.$$

各端分別集項，

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42}.$$

去分母，　$x^2+13x+42=x^2+5x+6.$

解之，　$x=-9/2.$

此已知方程可先去分母而解之，惟費力較多。

528　**聯立分式方程。** 解如此方程系之一般法則，先去各方程之分母，設其可能，再求所得整方程組系之解。如此求得之解——設任何解可使已知方程之分母為零者須除外——即為此種方程之解 (§ 371).

但設方程為 § 379 所述之形式，或能化成如此形式者，須用彼節所說明之法則解之。

例 1. 下列一對方程就 x, y 解之.

$$\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-3}{y-4}=0,\ \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y-2y^2}-\frac{2}{xy}=0.$$

去分母而化簡之，得

$$x-y+1=0,\ x+2y-8=0.$$

解之，　$x=2,\ y=3.$

因當 $x=2, y=3$ 時，已知方程之分母無一為 0，故此種方程有解 $x=2, y=3$.

例 2. 下列方程系就 x, y, z 解之。

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\ \frac{yz}{y+z}=-\frac{3}{2},\ 2(z+x)+xz=0.$$

此諸方程可化為如下形式 (§ 379):

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

依 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 解之，得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{z}=-1.$

故所求之解為 $x=2,\ y=3,\ z=-1.$

習　題　XXVII

下列方程就 x 解之.

1. $\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0.$

2. $\dfrac{6x}{5x-1}+\dfrac{8}{3-15x}=\dfrac{1}{6}.$

3. $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x^2-6x+8}.$

4. $\dfrac{3}{2x+3}+\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{8}{2x^2-7x-15}=0.$

5. $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+1)}=0.$

6. $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+4x-5}+\dfrac{3}{x^2+6x+5}=0.$

7. $\dfrac{x+1}{3x+1}+\dfrac{2x}{5-6x}=\dfrac{5}{5+9x-18x^2}.$

8. $\dfrac{x+a}{b(x+b)}+\dfrac{x+b}{a(x+a)}=\dfrac{a+b}{ab}.$

9. $\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{x^3-1}{x-1}=20.$

10. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}+\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}=0.$

11. $\dfrac{x-8}{x-3}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x+7}{x+8}-\dfrac{x+2}{x+3}.$

12. $\dfrac{x+7}{x+6}+\dfrac{x+9}{x+8}=\dfrac{x+10}{x+9}+\dfrac{x+6}{x+5}.$

13. $\dfrac{x^3+2}{x-2}-\dfrac{x^3-2}{x+2}-\dfrac{15}{x^2-4}=4x.$

14. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}+\dfrac{3x^2+x}{1-x^4}=0.$

15. $\dfrac{3}{x^3-8}+\dfrac{2x+5}{2x^2+4x+8}-\dfrac{1}{x-2}=0.$

16. $\dfrac{ax+c}{x-p}+\dfrac{bx+d}{x-q}=a+b.$

17. $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}+\dfrac{x^2+x+3}{x+2}+\dfrac{2x^2-x+7}{x+3}=4x.$

18. $\dfrac{x^2-ax+2bx-2ab}{x-a}+\dfrac{b^2-x^2}{x-2b}+\dfrac{3c^2}{x-2c}=0.$

19. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3.$

20. $\dfrac{3x+2}{x^2+x}-\dfrac{x-5}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-x}=0.$

21. $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x+6}{x^2-4}=0.$

以下方程,就 x, y 或 x, y, z 解之。

22. $\begin{cases}\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7},\\[2ex] \dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+3}{y+3}.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-3}+\dfrac{x-y}{x^2-9}=\dfrac{y-4}{x+3},\\[2ex] \dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{xy-2y}+\dfrac{9}{xy}=0.\end{cases}$

24. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a,\\[2ex] \dfrac{yz}{y+z}=b,\\[2ex] \dfrac{zx}{z+x}=c.\end{cases}$

25. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3,\\[2ex] \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2},\\[2ex] \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1.\end{cases}$

分項分式

529 由 § 506, 可知一變數如 x 之每一有理函數,可化爲形式如整函數,或眞分式,或整函數與眞分式之和。

爲某種目的,須實施進一步之化法,即當眞分式 A/B 爲已知時,求一組簡單分式而其和爲 A/B 者. 此法繫於次諸定理,其中文字 A, B, P, Q 等,表 x 之有理整函數。

定理 1. 二眞分式 A/B 與 C/D 之和與差，仍爲眞分式. 530

蓋 $$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}.$$

因 A 之次數低於 B，故 AD 之次數低於 BD.

又因 C 之次數低於 D，故 BC 之次數低於 BD.

故 $AD\pm BC$ 之次數低於 BD.

定理 2. 令 I 與 I' 表整函數，而 A/B 與 A'/B' 表眞分 531
式.

設 $I+A/B\equiv I'+A'/B'$，則 $I\equiv I'$ 而 $A/B\equiv A'/B'$.

蓋依題意，$I-I'\equiv A'/B'-A/B$

但 $I-I'$ 表整式(或 0)，而依 § 530, $A'/B'-A/B$ 表眞分式(或 0).

因一整函數不能恆等於一眞分式，故得

$$I-I'\equiv 0 \text{ 及 } A'/B'-A/B\equiv 0,$$

或 $$I\equiv I' \text{ 及 } A/B\equiv A'/B'.$$

定理 3. 令 A/PQ 表眞分式，其分母已分爲互質之因式 532
P 及 Q.

此分式可化爲形如 B/P 與 C/Q 二眞分式之和.

因 Q 對於 P 爲互質，依 § 479 可求得二整式 M 與 N，能使

$$1\equiv MQ+NP, \text{ 故 } A\equiv AMQ+ANP.$$

故 $$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}. \qquad (1)$$

設 AM/P 與 AN/Q 爲眞分式，則此定理已證明矣.

設 AM/P 與 AN/Q 非眞分式，則各化爲整式與眞分式之和，而令其結果爲

$$\frac{AM}{P} \equiv I + \frac{B}{P} \text{ 及 } \frac{AN}{Q} \equiv K + \frac{C}{Q}. \qquad (2)$$

以此諸式代入於 (1) 中之 AM/P 與 AN/Q，得

$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} + I + K. \qquad (3)$$

但 A/PQ, B/P, 與 C/Q 爲眞分式，從 (3) 依 §§ 530, 531, 可知 $I+K \equiv 0$，而

$$\frac{A}{PQ} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C}{Q},$$

卽此定理已證明矣。

533 **註.** 分式 A/PQ 能化爲如此惟一之和 $B/P+C/Q$.

假定 $$\frac{A}{PQ} = \frac{B}{P} + \frac{C}{Q} = \frac{B'}{P} + \frac{C'}{Q}. \qquad (1)$$

此處 B'/P 與 C'/Q 亦表眞分式。

則 $$\frac{B-B'}{P} = \frac{C'-C}{Q}, \text{ 故 } \frac{(B-B')Q}{P} = C'-C. \qquad (2)$$

但苟非 $B-B'=0$ 與 $C'-C=0$，則 (2) 爲不可能；蓋不如是，則 (2) 中可以 P 除盡 $(B-B')Q$，而此爲不可能，因 Q 對於 P 爲互質，而 $B-B'$ 之次數低於 P 故也 (§ 481).

534 **分項分式.** 以上證明其存在之分式 B/P 與 C/Q，名爲 A/PQ 之分項分式.

欲化形如 A/PQ 之已知分式爲分項分式 B/P 與 C/Q，無須如 § 532 所指示之方法，可應用未定係數法 (§ 397)，如下例。

例 1. 化 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 爲二分項分式之和。

此爲眞分式，其分母爲互質二因式 $(x-1)$ 與 x^2+x+1 之積。

故 $(2x^2+1)/(x^3-1)$ 等於分母各為 $x-1$ 與 x^2+x+1 之二眞分式之和(§ 532), 其第一分式之分子須爲常數,第二分式之分子,其次數至多爲1故得

$$\frac{2x^2+1}{x^3-1}\equiv\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}. \tag{1}$$

此處 a, b, 及 c 表常數.

欲求 a, b, c, 先將 (1) 去分母。

得 $$2x^2+1\equiv a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1),$$

或 $$2x^2+1\equiv(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c). \tag{2}$$

因 (2) 爲恆等式, x 同次冪之係數皆相等 (§ 284).

故 $$a+b=2,\ a-b+c=0,\ a-c=1. \tag{3}$$

解 (3), $$a=1,\ b=1,\ c=0.$$

故 $$\frac{2x^2+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

例 2. 化 $(5x+4)/(x^4+x^3+x^2-x)$ 爲二分項分式之和。

關於分項分式之一般定理. 從 § 532 之定理,可得如下之結論. 535

1. 令 A/PQR 爲眞分式,其分母之三因式 P, Q, R 爲互質.此分式可化爲如下形式之和

$$\frac{A}{PQR}\equiv\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\frac{E}{R}.$$

此處 B/P, D/Q 與 E/R 表眞分式.

因 P 對於 QR 爲互質 (§ 482), 故 A/PQR 爲形式如 $B/P+C/QR$ 二眞分式之和 (§ 532); 又因 Q 對於 R 爲互質, 故 C/QR 爲形式如 $D/Q+E/R$ 二眞分式之和 (§ 532).

當分母爲任何個互質因式之積時,此理仍眞.

2. 就眞分式 A/PQ^3 其 P 與 Q 爲互質者考之,依 § 532 可化爲和之形式如

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}.$$

因因式 Q, Q, Q 非互質，故不能應用 §532 之定理於 C/Q^3.

但因 C 之次數低於 Q^3，故可化 C 為 Q 之多項式如下列之形 (§ 422)：

$$C \equiv C_1Q^2 + C_2Q + C_3,$$

此處 C_1, C_2, 與 C_3 之次數俱低於 Q.

以 Q^3 除此恆等式之各端，得

$$\frac{C}{Q^3} \equiv \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3}.$$

故已知分式可化為和之形式如：

$$\frac{A}{PQ^3} \equiv \frac{B}{P} + \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2}{Q^2} + \frac{C_3}{Q^3},$$

此處 B 之次數低於 P，而 C_1, C_2, C_3 之次數俱低於 Q.

於一般，當分母中之因式如 Q，其次數多於一時，俱如此。

故有下列定理：

假定已知眞分式之分母已析為因式——有一次者，有多次者——各因式皆為互質。

此分式可化為一組眞分式之和，且僅有一組，其中 (1) 關於佔有一次之各因式 P，有一簡分式如 B/P 之形。(2) 關於佔有 r 次之各因式 Q，有 r 個分式之一羣如 $C_1/Q + C_2/Q^2 + \cdots + C_r/Q^r$ 之形，此處 C_1, C_2, C_3 之次數俱低於 Q.

536 **最簡分項分式.** x 之每一多項式具有實係數者，皆可證明其為形式如 $x-a$ 與 x^2+px+q 之一或二因式之積，此處 a, p, q 俱為實數，但 x^2+px+q 之因式有虛係數。

尤有進者，從 §§ 469, 532, 可知設已知眞分式之分子與所

析分母之因式，俱有實係數，則其對應分項分式之分子，亦如是。故由 § 534，得：

分子與分母有實係數之每一眞分式，等於一定個數分項分式之和，其與分母中因式 $x-a$ 及 x^2+px+q 之關係如下。

1. 關於各因式 $x-a$ 佔有一次者，有一簡分式形如 $A/(x-a)$，此處 A 爲實常數。

2. 關於各因式 $x-a$ 佔有 r 次者，有 r 個分式之一羣，其形如

$$A_1/(x-a)+A_2/(x-a)^2+\cdots+A_r/(x-a)^r,$$

此處 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 俱爲實常數。

3. 關於各因式 x^2+px+q 佔有一次者，有一簡分式形如 $(Dx+E)/(x^2+px+q)$，此處 D 及 E 俱爲實常數。

4. 關於各因式 x^2+px+q 佔有 r 次者，有 r 個分式之一羣，形如

$$(D_1x+E_1)/(x^2+px+q)+\cdots+(D_rx+E_r)/(x^2+px+q)^r.$$

此處 $D_1, E_1, D_2, E_2, \cdots, D_r, E_r$ 俱爲實常數。

此處敍述之分式，通常名爲已知分式之最簡分項分式。最 **537**
好用未定係數法求之。

例 1. 化 $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 爲最簡分項分式。

由 § 536，得 $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \qquad (1)$$

此處 A, B, C 爲常數。

去 (1) 之分母，得

$$x^2+x-3\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2). \qquad (2)$$

將 (2) 之右端依 x 之乘冪排列而使其同乘冪之係數相等，卽可求得 A, B, C；但因 A, B, C 爲常數，故用下法求得同一結果，較爲簡便。

在 (2) 中令 $x=1$，則得 $-1=A(-1)(-2)$，$\therefore A=-1/2$；

次令 $x=2$，　　則得 $3=B(-1)\cdot 1$　　$\therefore B=-3$；

又令 $x=3$，　　則得 $9=C\cdot 2\cdot 1$，　　$\therefore C=9/2$.

故 $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}.$$

例 2. 化 $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}$ 爲最簡分項分式。

由 § 536，得 $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3},$$

故 $$x+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx. \qquad (1)$$

在 (1) 中令 $x=0$，則得 $1=A(-1)^3$，　$\therefore A=-1$；

次令 $x=1$，　　則得 $2=D$，　$\therefore D=2$.

以 A，與 D 之值代入 (1)，將所得之項 $-(x-1)^3$ 與 $2x$ 移於左端而化簡之。得

$$x^3-3x^2+2x=Bx(x-1)^2+Cx(x-1). \qquad (2)$$

以 $x(x-1)$ 除 (2) 之二端，得

$$x-2=B(x-1)+C. \qquad (3)$$

在 (3) 中，使 x 同乘冪之係數相等，則得

$$1=B \text{ 而 } -2=-B+C, \quad \therefore B=1 \text{ 而 } C=-1.$$

故 $$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

或可將 (1) 依 x 之乘冪排列，則得

$$x+1=(A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

使 x 同乘冪之係數相等，則得

$$A+B=0,\ 3A+2B-C=0,\ 3A+B-C+D=1,\ -A=1.$$

從此諸方程，如前求得

$$A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=2.$$

例 3. 化 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 爲最簡分項分式。

x^2-x+1 之因式爲虛數，故得 (§ 536)，

$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{E}{x-3},$$

此處 A, B, C, D, E 俱爲常數。

去分母.

$$5x^2-4x+16=(Ax+B)(x-3)$$
$$+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)+E(x^2-x+1)^2. \quad (1)$$

依 x 之乘冪排列 (1), 而使其同乘冪之係數相等,即可求得 A, B, C, D, E; 但以用下法較簡.

在 (1) 中令 $x=3$, 則得 $49=49E$, $\therefore E=1$.

以 E 之值代入 (1), 將所得之項 $(x^2-x+1)^2$ 移於左端而化簡之,且以 $x-3$ 除其二端, 得

$$-(x^3+x^2+x+5)=Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1). \quad (2)$$

次以 x^2-x+1 除 (2) 之二端, 得

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^2-x+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D. \quad (3)$$

由 § 531, 在 (3) 中整式部分與分式部分各相等.

即 $-x-2=Cx+D$, 故 $C=-1$, $D=-2$,

又 $-2x-3=Ax+B$, 故 $A=-2$, $B=-3$.

故 $$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

當已知分式之分母有 $(x-a)^r$ 之形時, 最好先以 $x-a$ 之 538
乘冪表其分子 (§ 423). 同理, 當分母有 $(x^2+px+q)^r$ 之形, 而 x^2+px+q 之因式爲虛數時; 可以 x^2+px+q 之乘冪表其分子.

例. 化 $\dfrac{x^4+x^3-8x^2-6x-32}{(x-2)^5}$ 爲最簡分項分式.

由 § 423, 得

$$x^4+x^3-8x^2+6x-32=(x-2)^4+9(x-2)^3+22(x-2)^2+18(x-2)-28.$$

以 $(x-2)^5$ 除二端, 得

$$\frac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}=\frac{1}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{18}{(x-2)^4}-\frac{28}{(x-2)^5}.$$

設已知一假分式, 可先化爲一整式與一眞分式之和, 然後 539
再化爲分項分式.

例.　應用此法於 $\dfrac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$.

$$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{x^2-4x-5}=x+2+\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)};$$

用前法求得

$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)}=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-5}.$$

習　題　XXVIII.

化以下諸式為簡單分項分式，其分母有實係數.

1. $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$.　　2. $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$.

3. $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.　　4. $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$.

5. $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$.　　6. $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$.

7. $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.　　8. $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$.

9. $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}$.　　10. $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$.

11. $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$.　　12. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

13. $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.　　14. $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}$.

15. $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$.　　16. $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$.

17. $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2+2)(x^2-x-2)}$.　　18. $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

19. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$.　　20. $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}$.

IX. 對稱函數

絕對對稱與輪轉對稱

絕對對稱. 於式 $x^2+y^2+z^2$ 中,文字 x, y, z 包括一種意味,卽設將其中任何二文字互換,則 $x^2+y^2+z^2$ 變形爲其恆等式如 $y^2+x^2+z^2$, 或 $z^2+y^2+x^2$ 或 $x^2+z^2+y^2$. 欲表明此事,稱 $x^2+y^2+z^2$ 爲關於 x, y, z 而對稱. 540

於一般,一定組文字之函數,當互換其每二文字而將此函數變形爲恆等函數時,則稱此函數關於此諸文字爲對稱.

對稱函數其他之例,如

$(xy+xz+yx)/(x+y)(x+z)(y+z)$ 關於 x, y, z 爲對稱。

$a+b+c$ 與 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 關於 a, b, c 爲對稱.

就他方面而言,$x+y-z$ 非對稱,因設將 y 與 z 互換,則得 $x+z-y$, 不等於 $x+y-z$ 故也.

$2x^2y$ 及 $3y^2z$ 稱爲關於變數 x, y, z 之同形項,蓋其項之變數部分如 x^2y 與 y^2z, 可將其文字 x, y, z 成對互換而相互變形故也。於一般亦如此。 541

若干文字如 x, y, z 之整函數,關於此種字母爲對稱之充分及必要條件,爲同形式之一切項有相同係數。 542

設一對稱函數含某形式之一項,則必含此形式之一切項;卽一切項可從所述之項盡其可能互換文字而導出者。

例如,設欲 $ax^2+by^2+cz^2$ 爲對稱,則必須有 $a=b=c$.

又,設 x, y, z 之對稱函數含一項 x^2y, 則必須含一切項 $x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$.

543 此定理表示已知次數關於已知一組文字之對稱函數一般形。

例如，關於 x, y, z, u 之一次對稱函數，其一般形式爲 $a(x+y+z+u)+b$，此處 a, b 表常數。

又關於 x, y, z 之一次，二次與三次之一般對稱齊次函數爲：

1. $a(x+y+z)$.　　2. $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+xz+yz)$.

3. $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+cxyz$.

544 **對稱函數之表示法.** 記法 Σx^2 意謂與同形如 x^2 之一切項之和；卽設 x, y, z 爲討論之文字，則 $\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2$. 同理 $\Sigma x^2y=x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y$；餘類推。

任何對稱函數，可從其諸項中選擇各種形式之一項，而書符號 Σ 於其和之前以表示之。

例如，

$$\Sigma(2x-x^3y^2)=2x+2y+2z-x^3y^2-y^3x^2-x^3z^2-z^3x^2-y^3z^2-z^3y^2.$$

545 當書對稱函數之全部時，最好依定法排列。下例示排列整對稱函數之合宜法則。

設討論之文字爲 a, b, c, d，而依其規定次序，知次序爲 a, b, c, d.

於是書 Σab 與 Σabc 如下：

$$\Sigma ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd,\ \Sigma abc=abc+abd+acd+bcd.$$

應注意於各項依規定次序書文字。

書 Σab 應輪流取各字母 a, b, c，而書其次文字於其後。Σabc 之諸項，可從 Σab 依同法導出。

當 $m\neq n$ 時，可排列 Σa^mb^n 之諸項如下：

$$\Sigma a^2b^3=a^2b^3+b^2a^3+a^2c^3+c^2a^3+\cdots+c^2d^3+d^2c^3.$$

應注意於其指數之次序爲一定，而依照指數，可用二種次序 ab 與 ba 書 Σab 之第一項，餘類推。

同法可書

$$\Sigma a^2b^3c^4 = a^2b^3c^4 + a^2c^3b^4 + b^2c^3a^4 + b^2a^3c^4 + c^2a^3b^4 + c^2b^3a^4$$

+(同法從 Σabc 其餘各項導出之諸項)。

關於對稱之一般定理. 從對稱之定義 (§ 540), 可知對稱函數，當以計算法則變其形式時，仍爲對稱函數。於特例， 546

二對稱函數之和，差，積，與商仍爲對稱。

藉此定理，可用代數演算結合已知對稱函數不必實行計算而求得其結果。只須計算其結果之各種模範項。

例 1. 求 $(\Sigma a)^2 = (a+b+c+\cdots)^2$.

所求結果，顯然爲二種形式 a^2 與 $2ab$ 之項所成之二次齊次對稱函數。

故
$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

例 2. 求 $\Sigma x^2 \cdot \Sigma x = (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)$.

此積顯然爲二種形式 x^3 與 x^2y 之項之和。

故 $\Sigma x^2 \cdot \Sigma x = \Sigma x^3 + \Sigma x^2y = x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y.$

例 3. 求 $(\Sigma x)^3 = (x+y+z)^3$.

所求結果爲關於 x, y, z 之三次齊次對稱函數，故須有 (§ 543)

$$(x+y+z)^3 = a(x^3+y^3+z^3) + b(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y) + cxyz.$$

欲求常數 a, b, c 之值，可假定以任何三組値予 x, y, z 產生 a, b, c 之方程而解之。

例如，使 $x=1, y=0, z=0$, 則得 $1=a$. (1)

次使 $x=1, y=1, z=0$, 則得 $8=2a+2b$. (2)

終使 $x=1, y=1, z=1$, 則得 $27=3a+6b+c$. (3)

解 (1), (2), (3), 得 $a=1, b=3, c=6$.

$$\therefore \quad (\Sigma x)^3 = \Sigma x^3 + 3\Sigma x^2y + 6\Sigma xyz.$$

547 **輪換對稱.** 於式 $x^2y+y^2z+z^2x$ 中，文字 x, y, z 包括一種意味，卽設以 y 換 x，以 z 換 y，以 x 換 z，則得一恆等式 $y^2z+z^2x+x^2y$. 欲表明此事，稱 $x^2y+y^2z+z^2x$ 爲關於文字 x, y, z 依次序 x, y, z 而輪換對稱。

於一般，設一式中之文字以第二換第一，第三換第二，如此進行，末以第一文字換最後文字，而此式變形爲恆等式時，則此式稱爲關於若干文字依已知次序排列者而輪換對稱。

文字之如此交換，名爲輪換.

548 所宜注意者，$x^2y+y^2z+z^2x$ 之項，係其本身依輪換排列。蓋當以 y 換 x，以 z 換 y，以 x 換 z 時，則第一項變爲第二項，第二項變爲第三項，而第三項變爲第一項也。輪換式爲常見之式，而依輪換排列，於計算上有極大便利.

549 顯然可見每一對稱函數，必爲輪換，但每一輪換式，未必爲對稱。

例如，$x^2y+y^2z+z^2x$ 雖爲輪換而非對稱。設將 x 與 y 互換，則其值卽變。欲使其爲對稱，須加入一羣之項 $y^2x+z^2y+x^2z$.

550 如上例所示，一輪換函數常不含已知形式之一切項，但其所含之諸項，必有相同係數。

551 **定理.** 二輪換函數之和，差，積，商仍爲輪換函數。

此理可從輪換對稱之定義得之。

例。 求積 $(x^2y+y^2z+z^2x)(x+y+z)$.

此積爲輪換而非對稱甚明。又此積含諸項 x^3y, x^2y^2, x^2yz, 各一次，且只含此種形式之項。

故其積爲

$$x^3y+y^3z+z^3x+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2yz+y^2zx+z^2xy.$$

習 題 XXIX.

1. 指明下式中關於何文字爲對稱?

$$x^4-2y^4+z^4+4(x^3-y^3)(y^3-z^3)(x^2+z^2).$$

2. 寫全以下之 a, b, c 之對稱函數.

$$\Sigma a^2b^2,\ \Sigma a^3b^4,\ \Sigma a^2/b,\ \Sigma a^2b^3c^5,\ \Sigma a^2b^2c^4,$$
$$\Sigma(a+b)c,\quad \Sigma(a+b^2)c^3,\quad \Sigma(a+2b+3c).$$

3. 試證明 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 關於 a, b, c 爲輪換而非對稱; 又 $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 爲對稱.

4. $(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2$ 是否關於 a, b, c, d 爲對稱?

5. 排列下列各組之式爲輪換次序:

$$y^2-x^2,\ z^2-y^2,\ x^2-z^2;\ a^2bc,\ abd^2,\ ac^2d,\ b^2cd;$$
$$(a-c)(b-a),\ (a-c)(c-b),\ (a-b)(b-c).$$

6. 寫全 a, b, c, d 之輪換函數,其第一項爲:

$$ab^3c^2,\ a(b-c),\ (b+2c)(a+d),\ a^2/(a-b)(a-c).$$

7. 證明以下恆等式爲眞.

$$\Sigma a^3\cdot\Sigma a=\Sigma a^4+\Sigma a^3b;\ \Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc.$$

對稱與輪換函數之析因式法

藉餘式定理與上述原則, 常能用較簡之計算以析複雜之對稱或輪換函數之因式. 552

例 1. 將 $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ 析因式.

當 $y=z$ 時,此函數爲 0, 蓋

$$x^3(z-z)+z^3(z-x)+z^3(x-z)=0.$$

故此函數可用 $y-z$ 整除 (§ 416); 同理, 亦可用 $z-x$ 與 $x-y$ 整除, 從而可用 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 整除.

被除式與除式俱爲輪換齊次函數,而其次數各爲四次與三次.故其商必爲一次輪換齊次函數, 從而有 $k(x+y+z)$ 之形, 此處 k 表一常數, 故

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=k(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z) \qquad (1)$$

欲求 k, 可假定以任何一組值不使 k 之係數爲 0 者予 x, y, z.

例如，使 $x=2, y=1, z=0$, 則得 $6=-6k$, 或 $k=-1$.

或將 (1) 之二端依 x 之多項式排列，使其 x 同乘冪之係數相等，即可得 k, 例如[illegible]在左端爲 $x^3(y-z)$, 而在右端則爲 $-kx^3(y-z)$, 因此得 $k=-1$ 如前同。故

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

例 2. 將 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 析因式。

當 $x=-y$ 時此函數爲零，因

$$(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5=0.$$

故此函數可用 $x+y$ 整除；同理亦可用 $(y+z)$ 與 $(z+x)$ 整除，從而可用 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 整除.

此被除式與除式俱對稱齊次式，各爲五次與三次。故其商必如 $k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)$ 之形 (§ 543).

故
$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)].$$

使 $x=1, y=1, z=0$, 則得 $15=2k+l$.

使 $x=2, y=1, z=0$, 則得 $35=5k+2l$.

就 k 及 l 解之，求得 $k=5, l=5$, 從而

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

例 3. 析下式之因式

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3.$$

當 $x=0$ 時，此函數爲零，因

$$(y+z)^3-(y+z)^3-(z-y)^3-(y-z)^3=0.$$

故此函數可用 x 整除；同理，可用 y 與 z 整除；從而可用 xyz 整除。

因被除式與除式俱爲三次，故商爲常數 k, 故

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=kxyz.$$

使 $x=1, y=1, z=1$, 求得 $k=24$, 從而

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz.$$

上述之法則，有時可用於化簡輪換分式。 553

例。 化簡

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

此式關於 a, b, c 爲輪換。

最低公分母爲 $(b-c)(c-a)(a-b)$.

化各分式至此最低公分母，得第一分子爲 $-a^3(b-c)$. 故依輪換對稱，得第二與第三分子爲 $-b^3(c-a)$ 與 $-c^3(a-b)$.

加此三分子而析其結果之因式（§ 552 例 1），得

$$(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

故已知式化爲 $a+b+c$.

習　題　XXX.

析下列諸式之因式。

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.
2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$.
3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.
4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.
5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.
6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.
7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.
8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.
9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.
10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$.
11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.
12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

化簡以下諸分式。

13. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.
14. $\dfrac{x+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

16. $\frac{(b+c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c+a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

X. 二項式定理

554 **連乘積之構成.** 欲求積

$$(a+b+c+d)(e+f+g)(h+k),$$

可用 $e+f+g$ 之各項乘 $a+b+c+d$ 之各項，再用 $h+k$ 之各項乘其所得各乘積，終則加其最後諸乘法之結果.

故設從三已知因式中各選一項而相乘，卽得積之一項.而設用一切可能方法，從三已知因式中行項之此種選擇，卽可得乘積之一切項.

例如從首因式選取 b, 次因式選 g, 第三因式選 k, 則得乘積之項 bgk, 餘類推.

因從 $a+b+c+d$ 選一項可有四法，從 $e+f+g$ 選一項，可有三法，而從 $h+k$ 內選一項可有二法，故完全乘積中之項數爲 $4\cdot3\cdot2$ 或 24. 如此，於一般，

任何若干多項式之積，爲從各因式選一項相乘，所得一切積之和.

又設第一因式有 m 項，第二因式有 n 項，第三因式有 p 項等等，則其完全乘積中之項數——設有任何同類項尙未合併之前，爲 $mnp\cdots$.

此定理在乘法之正確上可供檢驗之用。亦可適用於已合 555
併同類項之積，倘其諸項代表同號而無數字係數之諸項之和，則項之係數，即表示其所代表未合併之項有若干也。

例如，由所述定理，$(a+b+c)(a+b+c)$ 之積，必有 $3\cdot3$ 或 9 項，俱爲同號。但前已示明 $(a+b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$，而此式代表 $1+1+1+2+2+2$ 或 9 項未合併項之乘積，如其所需。

同理，$(a+b)(a+b)(a+b)$ 之積必有 $2\cdot2\cdot2$ 或 8 項。但此積化簡後則成爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，代表 $1+3+3+1$ 或 8 項未合併項之乘積，如其所需。

用上章方法計算對稱函數時，此定理須熟記。 556

例如，讀者已證明 429 頁習題 7，$\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc$.

欲檢驗此公式可假定其僅含文字 a, b, c.

於是 Σab 有三項，Σa 有三項，Σa^2b 有 6 項，Σabc 有 1 項；而 $3\cdot3=6+3\cdot1$.

一次二項因式之積。 § 554 之定理，能使以視察法求得 557
形如 $x+b$ 任何多個因式之積，例如

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$$
$$=x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3.$$

因從各因式選 x 得項 x^3.

用一切可能方法，從二因式選 x，從第三因式選 b 得 b_1x^2, b_2x^2, b_3x^2. 諸項。

用一切可能方法從一因式選 x，他二因式選 b，得 b_1b_2x, b_1b_3x, b_2b_3x. 諸項。

從所有三因式選 b，得 $b_1b_2b_3$ 項。

宜注意者，於公式中，當積之諸項合併後，x^2 之係數爲三文字 b_1, b_2, b_3 之和，x 之係數，爲三文字中每二個之積之和，

而最後一項爲所有三文字之積.

因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 自身關於 b_1, b_2, b_3 爲對稱,故諸係數爲 b_1, b_2, b_3 之對稱函數,如吾人所料.

宜注意者,因 $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$ 關於 b_1, b_2, b_3 爲對稱,故求得各種形式之一項如 $x^3, b_1x^2, a_1b_2x, b_1b_2b_3$,而寫全此各種形式之一切項,即可求得其積.

558 由同理可證明其一般公式爲

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots(x+b_n)$$
$$=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n,$$

此處
$$\begin{aligned} B_1&=\Sigma b_1 &&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n,\\ B_2&=\Sigma b_1b_2 &&=b_1b_2+b_1b_3+\cdots+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n,\\ B_3&=\Sigma b_1b_2b_3 &&=b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\cdots+b_{n-2}b_{n-1}b_n,\\ B_n&= && b_1b_2b_3\cdots b_n; \end{aligned}$$

即,B_1, B_n 爲一切文字 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 之和與積,其間之係數爲:B_2 爲此種文字中每二個之積之和;B_3 爲每三個之積之和,餘類推.

例如,每次從三因式選 b,從其餘因式選 x,得積之一項.用一切可能方法行此種選法,則得諸項 $b_1b_2b_3x^{n-3}, b_1b_2b_4x^{n-3}, \cdots$,而其和爲 B_3x^{n-3}.

觀察以上所示,知係數

$$B_1, B_2, \cdots, B_n$$

爲文字 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 之對稱函數.

559 依同法得

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)$$
$$=x^n-B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nB_n,$$

此處 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 有相同意義如 § 558,而連絡各項之記號爲

一與十相間，末項 $(-1)^n B_n$ 之號，當 n 爲偶數時用十，爲奇數時用一。

於 § 558 之公式中，僅須變其一切文字 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 之號，卽得此公式。因每一 B 之諸項爲偶數個 b 之乘積者保持不變，而每一 B 之諸項爲奇數個 b 之乘積者，則僅變其號故也。

例． 由 §§ 557－559 法則，求以下各積．

1． $(x+1)(x+2)(x+3)$． 2． $(x+2)(x-3)(x+4)$．

3． $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$． 4． $(x-y)(x+2y)(x-3y)(x+4y)$．

和 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \cdots$ 中之項數． 令 $n_1, n_2, \cdots$ 順次表 $\Sigma b_1, \Sigma b_1 b_2, \cdots$ 中和之項數． 560

1． 因 $\Sigma b_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，顯然 $n_1 = n$．

2． 設 n 個文字 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 之每一個，各以其他 $n-1$ 個文字輪流乘之，則得 $n(n-1)$ 個積．但此 $n(n-1)$ 個積爲 $\Sigma b_1 b_2$ 之諸項，每項計算二次．故在 $\Sigma b_1 b_2$ 中之項數 n_2 爲 $n(n-1)/2$，或

$$n_2 = n_1 \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

於是得

$b_1 b_2, b_1 b_3, \cdots, b_1 b_n$; $b_2 b_1, b_2 b_3, \cdots, b_2 b_n$; $\cdots$; $b_n b_1, b_n b_2, \cdots, b_n b_{n-1}$.

此爲 n 羣積，每羣有 $n-1$ 個積，故全數有 $n(n-1)$ 個積．

但積 $b_1 b_2$ 發見二次，卽一爲 $b_1 b_2$ 之形，一爲 $b_2 b_1$ 之形；餘類推．

3． 次設將 $\Sigma b_1 b_2$ 之 n_2 項，各以 $n-2$ 文字，未見於此項中者乘之，共得 $n_2(n-2)$ 個積．但此 $n_2(n-2)$ 個積爲 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 之諸項，每項計算三次．故在 $\Sigma b_1 b_2 b_3$ 中之項數 n_3 爲 $n_2(n-2)/3$，或

$$n_3 = n_2 \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

於是得

$b_1b_2b_3,\ b_1b_2b_4,\cdots,\ b_1b_2b_n,\ b_1b_3b_2,\ b_1b_3b_4,\cdots,\ b_1b_3b_n;$

$\cdots;\ b_{n-1}b_nb_1,\ b_{n-1}b_nb_2,\cdots,\ b_{n-1}b_nb_{n-2}.$

此爲 n_2 羣乘積，每羣有 $n-2$ 個積，故共有 $n_2(n-2)$ 個積。

但積 $b_1b_2b_3$ 發現三次，即有三種形式 $b_1b_2\cdot b_3,\ b_1b_3\cdot b_2,\ b_2b_3\cdot b_1$. 同理，$\Sigma b_1b_2b_3$ 中之每一項皆發現三次，蓋每次對於此三文字之積中每一種方法，可將其中二文字以其餘一文字乘之而得也。

4. 由同理，可證明

$$n_4=n_3\frac{n-3}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

而於一般，

$$n_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\text{至 } r \text{ 因式}}{1\cdot2\cdot3\cdots r}.$$

例如，四文字 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$，每次取一，二，三，四相乘之積，其個數爲

$$n_1=4,\ n_2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6,\ n_3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4,\ n_4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1.$$

561 **二項式定理.** 設於 § 558 之公式，即

$$(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\cdots+B_n,$$

以同文字母 b 易其 n 個不同文字 $b_1,\ b_2,\cdots b_n$，而以 a 易其 x，則左端變爲 $(a+b)^n$.

次因 B_1 中之 n 項皆變爲 b，而 B_2 中之 n_2 項皆變爲 b^2，餘類推，故得 (§ 560)，

$$B_1=nb,\ B_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}b^2,\ B_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}b^3,\cdots.$$

故此公式化爲如下：

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots,$$

是故

1. 右端之項數爲 $n+1$.

2. a 之指數逐項減一，而 b 之指數逐項增一，各項中指數之和皆爲 n.

3. 首項係數爲 1，第二項係數爲 n，而其餘各項係數，可用下法求得：

以任一項中 a 之指數，乘此項之係數，而以 b 之指數加 1 除之，其結果卽爲其次項之係數.

此公式卽所謂二項式定理，在右端之式，名爲依此定理所得 $(a+b)^n$ 之展開式.

例如，
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

因 $a+b$ 關於 a, b 爲對稱，故從 § 542 可知，在 $(a+b)^n$ 之展開式中同形之諸項——卽含 a^n 與 b^n, $a^{n-1}b$ 與 ab^{n-1}, 等等——必有相同係數．但此爲首項與末項，第二項與末第二項，而於一般，卽爲距展開式首末等遠之每二項. 562

故末項爲 b^n，末第二項爲 nab^{n-1}，餘類推．因項數爲 $n+1$，故當 n 爲偶數時有一中項，爲奇數時有二中項．當有二中項時，則此二中項爲同形且有同係數．由上所述可知中項前後各項之係數相同，但次序相反.

亦可證明各項之係數漸增，至中項以後而漸減，故中項之係數爲最大. 563

此由 § 561, 3 之係數法則而得，因在中項前各項中，a 之指數較 b 之指數增一爲大，而在中項後之各項中則爲小故也.

564　　於前公式中變 b 之號而化簡，得

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots,$$

其中諸項含 b 之奇次冪者爲負號，含偶次冪者爲正號。

例． 求 $(2x-y^3)^6$ 之展開式．

於公式中，以 $2x$ 代 a，y^3 代 b，憶及末三係數與首三係數相同，而次序相反 (§ 563)，則得

$$(2x-y^3)^6=(2x)^6-6(2x)^5y^3+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(2x)^4(y^3)^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^3(y^3)^3+\cdots$$

$$=(2x)^6-6(2x)^5y^3+15(2x)^4(y^3)^2-20(2x)^3(y^3)^3$$

$$+15(2x)^2(y^3)^4-6(2x)(y^3)^5+(y^3)^6$$

$$=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9-60x^2y^{12}-12xy^{15}+y^{18}.$$

565　　**一般項．** 從 § 561，知 $(a+b)^n$ 展開式中之第 $(r+1)$ 項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 至\ r\ 因式}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}a^{n-r}b^r.$$

當 r 爲奇數時，此式之前附負號，即爲 $(a-b)^n$ 展開式中之第 $(r+1)$ 項。

例 1． 求 $(x-y)^{15}$ 展開式中之第八項。

此處 $n=16$ 而 $r+1=8$，$r=7$，故所求項爲

$$-\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^9y^7=-11440x^9y^7.$$

例 2． $(x^3+1/x)^{12}$ 之展開式中，有無含 x^{20} 之項？設有之，試求此項。

令 $r+1$ 表項數．於是因 $n=12$，$a=x^3$，與 $b=1/x$，故必有

$$a^{n-r}b^r=(x^3)^{12-r}/x^r=x^{36-4r}=x^{20}.$$

設 $36-4r=20$, 或 $r=4$, 則能滿足此條件.

故第五項含 x^{20}, 而代入公式,求得此項爲 $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^{20}=495x^{20}$.

習 題 XXXI.

用二項式定理,展開下列諸式:

1. $(3x+2y)^5$. 2 $(a-b)^8$. 3. $(1+2x^2)^7$.

4. $(2+1/x)^4$. 5. $(x-3/x)^6$ 6. $(x/y-y/x)^5$.

7. $(1-x+2x^2)^4$. 8. $(a^2+ax-x^2)^3$.

9. 求 $(1+x/2)^{11}$ 中之第六項.

10. 求 $(3a-4b)^{12}$ 中之第八項.

11. 求 $(a^2-2bc)^{10}$ 中之中項.

12. 求 $(1-x)^9$ 中之二中項.

13. 求 $(1+x)^8$ 中 x^5 之係數.

14. 求 $(3-2x)^7$ 中 x^4 之係數.

15. $(1-x^2)^6$ 中 x^8 之係數.

16 求 $(1+2x)^9+(1-2x)^{11}$ 中 x^3 之係數.

17. 求 $(x+1/x)^{12}$ 中之常數項.

18. 求 $(2x-1/x)^{15}$ 中 x^7 之係數.

19. 用觀察法求 $(x+2y)(x-3y)(x-5y)$.

20. 用觀察法求 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$.

21. 積 $(a+b+c+d)(f+g+h)(k+l)(m+n+p+q)$ 中之項數如何?

22. 於下列各積中,求其係數之和.

 1. $(1+x^2+x^3+x^4)^3$. 2. $(1+2x+x^2)^2(1+x+2x^3)^2$.

23. 於下列四文字 a, b, c, d 之對稱函數,當展開時,其係數之和如何?

 1. $\Sigma a^2\cdot\Sigma a$. 2. $\Sigma a^3\cdot\Sigma abc$. 3. $\Sigma ab\cdot\Sigma abc$.

24. 試證 $(a+b)^n$ 之展開式中,其係數之和爲 2^n.

25. 試證 $(a-b)^n$ 之展開式中,其正係數之和之數值,等於其負係數之和.

XI. 開 方

566 **完全乘冪.** 已知一有理函數 P. 此函數 P 有爲完全 n 次方的可能;換言之,卽有第二函數 Q 存在,能使 $P=Q^n$. 設其如是,則有理式 Q 爲 P 之 n 次根.

本章就此問題考之: 已知一有理函數 P,求定 P 是否爲完全 n 次方,若然,則求其 n 次根 Q. 假定 n 表已知正整數.

567 **單項式之方根.** 令 P 表已化爲最簡形式之單項式.

設 P 爲完全 n 次方,則 P 之 n 次根之一,可用下法求得: 以 n 除 P 中各字母之指數,而以 P 之數字係數之 n 次主根乘其結果.

此法則由乘方法則 (§ 318) 卽可得之.

例如, $(a^kb^l/c^m)^n=a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ (§ 318), 故 a^kb^l/c^m 爲 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之 n 次根 (§ 566), 而由以 n 除 $a^{kn}b^{ln}/c^{mn}$ 之指數求得.

568 如是求得之根,名爲 P 之 n 次主根(比較 § 258). 當述及 P 之 n 次根或用符號 $\sqrt[n]{P}$ 時,皆指此根.

例 1. 求 $-8a^3b^6/27x^3y^9$ 之立方根.

今
$$\sqrt[3]{\frac{-8a^3b^6}{27x^3y^9}}=-\frac{2ab^2}{3xy^3}.$$

例 2. 求以下各根.

1. $\sqrt{\dfrac{64a^4b^6}{100c^8d^{12}}}$. 2. $\sqrt[4]{81x^4y^8z^{12}}$. 3. $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}y^{30}}{a^5z^{25}}}$.

569 **多項式之方根.** 思考以下諸例.

例 1. 決定 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 是否爲完全平方,若然,試求其平方根.

設其爲完全平方，顯然必有一形如 $2x^2+px+q$ 之平方根，其 p 與 q 爲常數，由是必有

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9=(2x^2+px+q)^2$$
$$=4x^4+4px^3+(p^2+4q)x^2+2pqx+q^2,$$

卽須求此 p 與 q 須滿足下列諸方程 (§ 284)：

$$4p=-4 \quad (1), \qquad p^2+4q=13 \quad (2), \qquad 2pq=-6 \quad (3), \qquad q^2=9 \quad (4).$$

從 (1) 與 (2) 得 $p=-1$, $q=3$, 又因 $2(-1)3=-6$, 與 $3^2=9$, 故此 p 及 q 之值滿足 (3) 與 (4).

故 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 爲完全平方，其平方根爲 $2x^2-x+3$.

例 2. 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根。

設其爲完全立方，則必有形如 x^2+px+q 之立方根。

由是必有：

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27=(x^2+px+q)^3$$
$$=x^6+3px^5+3(p^2+q)x^4+(p^3+6pq)x^3$$
$$+3(p^2q+q^2)x^2+3pq^2x+q^3,$$

卽須求此 p 與 q 滿足以下六方程 (§ 284)：

$$3p=6 \quad (1), \qquad 3(p^2+q)=21 \quad (2), \cdots \qquad q^3=27 \quad (6).$$

從 (1) 與 (2) 得 $p=2$, $q=3$. 而求得 p 與 q 之此種值，滿足其餘方程 (3), … (6).

故 $x^6+6x^5+\cdots+54x+27$ 爲完全立方，而其立方根爲 x^2+2x+3.

用上例所說明方法，以決定一已知 x 之多項式是否爲完全 n 次方，常爲可能；且若然，則可求得其 n 次根。

令此多項式爲 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$. 設此爲完全 n 次方，則次數 m 必爲 n 之倍數，而使 $m=kn$, 此處 k 爲整數，且必有一 n 次根如 $ax^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k$ 之形，此處 a 表 a_0 之 n 次主根，而 $A_1, \cdots, A_k$ 爲未知常數。今稱此根爲 n 次主根。

欲定 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 是否有如此之根；設其存在，欲求此根，可使

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\equiv(ax^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_k)^n,$$

化右端爲 x 之多項式，而令其與左端中 x 同次冪之係數相等．則得 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 之 nk 個方程系．前 k 個方程予 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 以一組值，而設 $a_0x^m+\cdots+a_m$ 爲完全 n 次方，則此組值必滿足其餘方程．

例 3. 求 $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$ 之立方根.

570 **多項式之平方根．** 設一多項式 P 爲完全平方，則其平方根亦可用下法求得．

如前節，令 P 表 x 之偶次多項式，而依 x 之降冪排列者．

假定 P 爲完全平方，而 $a, b, c, \cdots$ 表其平方根中依 x 降冪排列之諸項，可使 $P\equiv(a+b+c+\cdots)^2$．

則問題爲已知 P 欲求 $a, b, c, \cdots$

今不論 $a, b, c, \cdots$ 之值如何，可有

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b,$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2=a^2&+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d,\end{aligned}$$

餘類推，左端每加一新文字，右端卽增一羣之新項，卽此新羣爲加新文字於二倍原文字之和，再以新文字乘其結果而成．

因由假設 $P\equiv(a+b+c+\cdots)^2$，故有

$$\begin{aligned}P\equiv a^2&+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c\\&+[2(a+b+c)+d]d+\cdots,\end{aligned}$$

此處右端各羣之首項卽 $a^2, 2ab, 2ac, 2ad, \cdots$，其 x 之次數皆高於其後之任何項。

從此恆等式，可如下求 $a, b, c, \cdots$

1. 顯然 a 爲 P 之首項之平方根。

2. 從 P 減 a^2，餘式 R_1 之首項必等於 $2ab$，以 $2a$ 除之可求得 b.

3. 已得 b，作 $(2a+b)b$ 之形，從 R_1 減去，餘式 R_2 之首項必等於 $2ac$，以 $2a$ 除之可求得 c.

4. 繼續進行，至餘式之次數低於 a 而止。

設最後餘式爲零，則 P 爲完全平方，而其平方根爲 $a+b+c+\cdots$，與假定合。

設最後餘式不爲零，則 P 非完全平方，但可化 P 爲如下之形

$$P \equiv (a+b+c+\cdots)^2 + R,$$

卽爲一完全平方與一整函數之和，此函數之次數低於 a.

排列上述計算如下例較便。

例． 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 之平方根。

$$\begin{array}{rr|l}
 & P = 4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3 = a+b+c} \\
 & a^2 = 4x^4 & \\
\hline
2a+b = 4x^2-x & -4x^3+13x^2-6x+9 & = R_1 = P-a^2 \\
 & -4x^3+x^2 & = (2a+b)b \\
\hline
2(a+b)+c = 4x^2-2x+3 & 12x^2-6x+9 & = R_2 = P-(a+b)^2 \\
 & 12x^2-6x+9 & = [2(a+b)+c]c \\
\hline
 & 0 & = R = P-(a+b+c)^2
\end{array}$$

因最後餘式爲零，故 P 爲完全平方，其平方根爲 $2x^2-x+3$ 與 §569，例 1 比較。

可見求得各新餘式 $R_1, R_2, \cdots$，以 $2a$ 除其首項，卽得根之次項．於餘式之左方，書已得根之部分之二倍加根之新項，以

根之新項乘此和，從所述餘式減之，於是得其次餘式。

例。求 $25x^4-40x^3+46x^2-24x+9$ 之平方根。

571 含多文字之多項式 P 若爲完全平方，此法則亦可應用。先依一文字之降羃排列 P，其係數包含所餘文字，而如 § 570 方法進行，須知 x 今表所排列之字母。

572 **近似平方根.** 此法則亦可應用於依 x 升羃排列之多項式.惟 $a, b, c, \cdots$ 亦須依 x 之升羃排列.而連續餘式之次數將依次遞增，故如 § 570, 4, 設 P 非完全平方，惟有一常數項，則可化爲如下形式

$$P\equiv(a+b+c+\cdots)^2+R',$$

即一完全平方與多項式 R' 之和，此 R' 之最低次項，其次數之高可如心所欲.

因 x 之小值，由盡量實施此種計算，能使 R' 之值如選定之小.故於此情形，稱 $a+b, a+b+c, \cdots$ 爲 P 之二項，三項，等等近似平方根.

求此種近似根，用 § 569 之方法尤爲敏捷.

例 1. 求 $1+x$ 之平方根至四項.

由 § 569, 書爲 $\sqrt{1+x}=1+px+qx^2+rx^3+\cdots$.

平方之， $1+x=1+2px+(p^2+2q)x^2+2(pq+r)x^3+\cdots$

由 § 284, $2p=1,\quad p^2+2q=0,\quad pq+r=0,$

解之， $p=1/2,\quad q=-1/8,\quad r=1/16.$

故所求結果爲 $1+x/2-x^2/8+x^3/16$.

令學者用 §§ 570, 571 之法檢驗之。

例 2. 求 $4-x+x^2$ 之平方根至三項。

數之平方根.　從§570之公式，亦可導出求數之平方根之常用法則。 573

例.　求 53361 之平方根。

令 a 表平方含於 53361 中者之最大整數之一有效數字，此有效數字爲根之首位數字，其餘數字俱作爲 0. 求 a 如次。

記取 a 末每有一 0, a^2 末卽有二 0, 故在 53361 中可從右而左，每二位分爲一節，如 5'33'61.

各節 61 與 33 在 a 末須有一 0, 餘一節 5 須有首位數字 2. 因 2 爲平方小於 5 之最大整數故也. 故 $a=200$.

已得 a 後，進行方法，完全與求多項式之平方根時相同。其法如下列左方所示，b 表根之第二數字乘 10, 而 c 爲個位數字。右方所示，爲普通實用之簡略算法。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a+\;\;b+c \\
 & 5'33'61\,\big|\,\underline{200+30+1} \\
 & 4\;00\;00=a^2 \\
\hline
2a=400 & 1\;33\;61=R_1 \\
2a+b=430 & 1\;29\;00=(2a+b)b \\
\hline
2(a+b)=460 & 4\;61=R_2 \\
2(a+b)+c=461 & 4\;61=[2(a+b)+c]c \\
\hline
 & 0\quad=R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 5'33'61\,\big|\,\underline{231} \\
 & 4 \\
\hline
43 & 1\;33 \\
 & 1\;29 \\
\hline
461 & 4\;61 \\
 & 4\;61 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

先減去 a^2, 再以 $2a$ 除餘式 R_1 得 b 之有效數字，復從 R_1 減 $(2a+b)b$ 得 R_2, 最後以 $2(a+b)$ 除 R_2 得 c.

完成全部之最簡方法，如右方所示，省寫數尾之 0, 而每次只書下一節。每得新餘式後，於其左方書根之已得部分之二倍爲"試除數"，以試除數除餘式得根之次一數字，而以此數字附書於試除數後，完成全除數。再以根之新數字，乘全除數，減之而得新餘式。設在過程之任何階段所得之數過大，卽上述之積大於被減之餘數，則再試以略小之數字。

574 **數之近似平方根．** 上述法則，亦能求得非完全平方數之平方根近似值．

例．求 7.342 之平方根近似值準確至小數三位．

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7.34'20'00 \mid 2.709 \\
 & 4 \\
47 & 3\ 34 \\
 & 3\ 29 \\
5409 & 5\ 20\ 00 \\
 & 4\ 86\ 81 \\
 & \quad 33\ 19
\end{array}
$$

故 $\sqrt{7.342}=2.709\cdots$

顯然可見根中每有一位小數，此數中須有二位小數，故分開此數之小數部分，從小數點起向右每二位為一節．此數之整數部分，如 §573，從小數點起向左分節．

設小數之位數為奇數，則此數不能為完全平方，宜注意．

575 **多項式之立方根．** 當多項式 P 為完全立方時，對於求 P 之立方根，亦有特殊法則，類似於上述求平方根之法．

令 P 表 x 之多項式，其次數為 3 之若干倍，而依 x 之降冪排列．

假定 P 為完全立方，而 $a, b, c, \cdots$ 為其立方根之項依 x 之降冪排列者，可使 $P=(a+b+c+\cdots)^3$．

則此問題為已知 P，欲求 $a, b, c, \cdots$．

今不論 $a, b, c, \cdots$ 之值如何，必有

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,$$

$$(a+b+c)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$
$$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c,$$

餘類推，左方每加一新文字，右端即加一新羣之項，此新羣為 3 倍原有文字和之平方，加 3 倍原文字之和乘新文字，加新文字之平方，再以新文字乘此結果而成．

因由假設，$P \equiv (a+b+c+\cdots)^3$，故有

$$P \equiv a^3 + (3a^2+3ab+b^2)b + [3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c + \cdots,$$

此處右端各羣之首項即 $a^3, 3a^2b, 3a^2c$，其 x 之次數皆高於其後之任何項。

從此恆等式，可求得 $a, b, c, \cdots$ 如下：

1. 顯然 a 爲 P 之首項之立方根。

2. 從 P 減 a^3，餘式 R_1 之首項必等於 $3a^2b$，以 $3a^2$ 除此項可得 b。

3. 已得 b，作 $(3a^2+3ab+b^2)b$ 之形，從 R_1 減之。餘式 R_2 之首項必等於 $3a^2c$，以 $3a^2$ 除此項可得 c。

4. 繼續進行至餘式之次數低於 a^2 而止。

設最後餘式爲零，則如所假定 P 爲完全立方，而其立方根爲 $a+b+c+\cdots$。

設最後餘式不爲零，則 P 非完全立方，但可化爲如下之形

$$P \equiv (a+b+c+\cdots)^3 + R,$$

此處 R 之次數低於 a^2。

排列此計算如下較便：

例。 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根。

$$\begin{array}{r|ll}
 & & \underline{x^2+2x+3} \\
3a^2=3x^4 & x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & \\
 & \underline{x^6} & \\
3(x^2)^2=3x^4 & 6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & =R_1 \\
3x^2\cdot 2x+(2x)^2=\underline{6x^3+4x^2} & & \\
3x^4+6x^3+4x^2 & \underline{6x^5+12x^4+\ \ 8x^3} & \\
\hline
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 & =R_2 \\
\underline{3(x^2+2x)3+3^2=\qquad 9x^2+18x+9} & & \\
3x^4+12x^3+21x^2+18x+9 & \underline{9x^4+36x^3+63x^2+54x+27} & \\
 & 0 & =R
\end{array}$$

因最後餘式爲零，故 $x^6+6x^5+\cdots+54x+27$ 爲完全立方，而其立方根爲 x^2+2x+3，與 §569，例 2 比較。

可見求得各新餘數 $R_1, R_2, \cdots$，以 $3a^2$ 除其首項，卽得根之次項。於是在餘式之左方，書 3 倍已得根之部分之平方，3 倍此部分與根之新項相乘之積，及新項平方之和。以新項乘此和，其結果從上述餘式減之，而得其次餘式。

576 此法則亦可應用於含多文字之多項式，設其爲完全立方（與 §571 比較）。

此法則亦可應用於依 x 升冪排列之多項式——設其不缺常數項。設此多項式非完全平方，則如是可得其近似立方根。（與 §572 比較）

577 **數之立方根。** 藉 §575 公式之助，可求得一數之立方根。

例．求 12487168 之立方根。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a+\ \ b+c \\
N=12'487'168 & 200+30+2=232 \\
8\ 000\ 000 & \\
3a^2=120000 & 4\ 487\ 168=R_1=N-a^3 \\
3ab=\ \ 18000 & \\
b^2=\ \ \ \ 900 & \\
138900 & 4\ 167\ 000=(3a^2+3ab+b^2)b \\
3(a+b)^2=158700 & 320\ 168=R_2=N-(a+b)^3 \\
3(a+b)c=\ \ 1380 & \\
c^2=\ \ \ \ 4 & \\
160084 & 320\ 168=[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c \\
 & 0\quad =R=N-(a+b+c)^3
\end{array}
$$

令 a 爲立方含於 N 中者之最大數之一有效數字，爲欲求 a 之故，先在 N 中從右向左每三位分爲一節（當 N 中有小數位時，亦可從小數點向右分節），如 12'487'168. 其 168 與 478 各節，必須在 a 末有一 0，而其餘一節 12，必須有首

位數字 2, 因 2 爲 12 中所含立方之最大整數, 故 $a=200$.

其餘計算, 已完全指示於上。

可見根之每一新數字, 係以 3 倍已得根之部分之平方, 除上次餘數而得; 如以 $3a^2$ 除 R_1 求得 b 之有效數字, 以 $3(a+b)^2$ 除 R_2 求得 c, 設如是求得之數字過大, 則試以略小之數字。

此算法亦可如求一數之平方根同法簡略。

非完全立方之數, 其近似立方根亦可用此法求得(與 §574 比較)。

多項式之高次根. 完全四次方之多項式, 其四次根可求其平方根之平方根而得. 同理, 完全六次方之多項式, 其六次根可求其平方根之立方根而得。 578

求任何次方根, 亦有創立特殊法則類似於 §§ 570, 575 之可能。

但已有 § 569 之一般法則, 此事卽非必要. 其實所以有求平方根及立方根之特殊法則如 §§ 570, 575 所釋明者, 不過由於歷史興味且與求數之平方根及立方根問題有關係而已。

習　題　XXXII

化簡下式:

1. $\sqrt[3]{-\dfrac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}$.　　2. $\sqrt{\dfrac{529a^4b^6}{625c^2d^8}}$.　　3. $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}$.

由 §569 或 §570 求以下之平方根:

4. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

5. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$.

6. $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$.

7. $4x^2-20x+13+30/x+9/x^2$.

8. $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

9. $x^8+2x^7-x^6-x^4-6x^3+5x^2-4x+4$.

10. $(x^2+1)^2-4x(x^2-1)$.

11. $4x^4+9x^2y^2-12x^3y+16x^2-24xy+16$.

12. $x^2/y^2+y^2/x^2+2+2x^2+2y^2+x^2y^2$.

求以下之近似平方根至第四項。

13. $1-2x$. 14. $4-x+3x^2$.

由 §569 或 §575, 求以下之立方根。

15. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

16. $27x^{12}+27x^{10}-18x^8-17x^6+6x^4+3x^2-1$.

17. $8x^6-36ax^5+90a^2x^4-135a^3x^3+135a^4x^2-81a^5x+27a^6$.

18. $x^3/y^3+y^3/x^3+3x^2/y^2+3y^2/x^2+6x/y+6y/x+7$.

19. 求式 $1-x+x^2$ 之近似立方根至第三項.

20. 由 §569 或 §578, 求 $x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1$ 之四次根.

21. 由 §569, 求 $x^{10}+5x^9+15x^8+30x^7+45x^6+51x^5+45x^4+30x^3+15x^2+5x+1$ 之五次根。

22. 欲使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 爲一完全平方,須指定 a, b爲何值?

求下列各數之平方根:

23. 27889. 24. 2313.61. 25. 583.2225.

26. 4149369. 27. .00320356. 28. 9.024016.

求下列各數之近似平方根準確至第三位小數。

29. 2. 30. 55.5. 31. 234.561.

求下列各數之立方根。

32. 1860867. 33. 167284.151. 34. 1036.433728.

XII. 無理函數,根式與分指數

根　式　化　法

根. 此後文字 $a, b, \cdots$ 表正數或文字式之假定其有正數值者. 579

其次 $\sqrt[n]{a}$ 表 a 之 n 次主根,卽其 n 次方爲 a 之正數;換言之,卽由公式 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 所限定之正數.

最後,當 n 爲奇數時,$\sqrt[n]{-a}$ 表 $-a$ 之 n 次主根,卽 $-\sqrt[n]{a}$.

又當用"方根"二字時,俱指主根而言.

註. 此爲方根一語用法之限制,因 n 次冪等於 a 之任何數,其本皆爲 a 之一 n 次根;而如此之數常有 n 個,後將證明之. 580

例如,因 $2^2=4$ 而 $(-2)^2=4$, 故 2 與 -2 俱爲 4 之平方根.吾人以 $\sqrt{4}$ 表主根 2, 以 $-\sqrt{4}$ 表他根 -2.

當 n 爲奇數,而 a 爲實數時,a 之 n 次根中,有一爲實數,與 a 同號,而其餘則爲虛數.

當 n 爲偶數,而 a 爲正數時,a 之 n 次根中,有二根爲實數,數值相等,但記號相反,而其餘俱爲虛數.

當 n 爲偶數,而 a 爲負數時,a 之所有 n 次根俱爲虛數.

於高等數學中,$\sqrt[n]{a}$ 常表 a 之任何 n 次根,非如此處之僅表主根也.

根式. 形如 $\sqrt[n]{a}$ 或 $b\sqrt[n]{a}$ 之任何式,名爲根式;而 n 名爲根指數,a 爲被開方數,b 爲根式之係數. 581

當 a 與 b 俱爲有理數或式時,$b\sqrt[n]{a}$ 稱爲簡根式.

例如,$5\sqrt[3]{4}$ 爲簡根式,其根指數爲 3, 被開方數爲 4, 而係數爲 5.

582 **計算根式之公式.** 關於計算根式之法則,基於下列公式,式中 m, n, p, 表正整數。

$$1.\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

$$2.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}. \qquad 3.\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$4\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}. \qquad 5.\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

宜特別注意者,由公式 1, 設根式之根指數與被開方數之指數,以同一正整數乘之,或約去二者之任何公因式,則根式之值不變;例如 $\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$.此法則類似於化簡分數之法則甚明。

此種公式,可藉定義 $(\sqrt[n]{a})^n=a$, 指數得 $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$ 及相等法則 (§ 261, 3) 以證明之。

設二正數之任何同次冪相等,則此二數相等.

於是

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$, 因其 n 次冪相等。

蓋因 $(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$; 而 $(\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p}=(a^m)^p=a^{mp}$.

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, 因其 n 次冪相等。

蓋因 $(\sqrt[n]{ab})^n=ab$; 而 $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$.

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, 因其 n 次冪相等.

蓋因 $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$; 而 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$.

4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$, 因其 n 次冪相等。

蓋因 $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$, 而 $[(\sqrt[n]{a})^m]^n=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m$.

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, 因其 mn 次冪相等。

蓋因 $(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a$; 而 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m\cdot n}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$.

下例示此種公式之應用。

1 $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.　　2. $\sqrt{8ab^3}=\sqrt{4b^2}\cdot\sqrt{2ab}=2b\sqrt{2ab}$.

3 $\sqrt[3]{\dfrac{3c}{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{\sqrt[3]{d^3e^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3c}}{de^2}$.　　4. $\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}}=\sqrt[10]{32x^{15}y^5}=\sqrt{2x^3y}$.

5 $(\sqrt[3]{2xy^2})^2=\sqrt[3]{(2xy^2)^2}=\sqrt[3]{4x^2y^4}=y\sqrt[3]{4x^2y}$.

化簡根式. 根式之被開方數爲可能的最簡整式時,則認此根式之形爲最簡. 故關於化簡根式,有下列法則,此即以上所證明諸公式之直接結果. 583

1. 設被開方數爲乘冪,其冪指數與根指數有公因數,則在其冪指數與根指數中,同時約去其公因數.

例如, $\sqrt[9]{27x^3y^6}=\sqrt[9]{(3xy^2)^3}=\sqrt[3]{3xy^2}$.

2 設被開方數之任何因式爲乘冪,其冪指數可用根指數除盡,則以根指數除冪指數而移此因式於根號之外.

例如, $\sqrt[4]{16x^7y^9}=\sqrt[4]{2^4x^4x^3y^8y}=2xy^2\sqrt[4]{x^3y}$.

3. 設被開方數爲分式,則盡其可能,以最簡式乘其分子,分母,使可移分母於根號之外.

例如, $\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4xyz}{8z^3}}=\dfrac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}$

相似根式. 當諸根式化爲最簡形後,只有係數不同者,則稱爲相似根式. 584

例如, $\sqrt{4x^3y}$ 與 $\sqrt{81x^5y^3}$ 相似;因其最簡形 $2x\sqrt{xy}$ 與 $9x^2y\sqrt{xy}$,僅有係數不同故也.

585 **移根式係數於根號內。** 因 $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$，故根式之係數，設其指數以根指數乘之，可移入根號之內。

習 題 XXXIII

化以下各根式爲最簡之形：

1. $\sqrt{18}$. 2. $\sqrt{588}$. 3. $\sqrt[3]{-27^2}$. 4. $\sqrt[9]{-1000}$.

5. $\sqrt{3/2}$. 6. $\sqrt[3]{3/2}$. 7. $\sqrt[3]{3/4}$. 8. $\sqrt[5]{3/16}$.

9. $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$. 10. $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}$. 11. $\sqrt[12]{8x^6y^{9-15}}$.

12. $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}$. 13. $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$. 14. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$. 16. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$. 18. $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^2}}$. 20. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. 21. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.

22. $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$. 23. $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$. 24. $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

將以下各係數移入根號內。

25. $3a\sqrt{3a}$. 26. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$. 27. $3ax\sqrt[4]{1/27a^3x^3}$.

試證次之各組之根式相似。

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, 與 $\sqrt{1/8}$. 29. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$, 與 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}$ 與 $\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}$.

根 式 之 運 算

586 **加法與減法。** 有法則如下：

欲化二或多根式之代數和爲最簡形，可先化簡各根式，然後將相似根式加其係數而合併之。

例．加 $\sqrt{16a^2b}$, $-\sqrt{9a^2b}$, $3\sqrt{2}$, 與 $-2\sqrt{1/2}$.

則有 $\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{1/2}$.

$$=4a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=a\sqrt{b}+2\sqrt{2}.$$

不相似二根式之和，不能化爲一簡根式，此宜注意。

例如，除 x 或 y 爲 0 時外，不能有 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$；蓋平方之，得 $x+y+2\sqrt{xy}=x+y$. $\therefore 2\sqrt{xy}=0$, $\therefore xy=0$. $\therefore$ 必有 $x=0$ 或 $y=0$ 故也．

化諸根式爲公共根指數． 由公式 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，常能化 **587**
二或多根式爲公共根指數之等值根式．其最小公共根指數，卽爲已知諸根指數之最小公倍數．

例．化 $\sqrt[6]{a^5}$ 與 $\sqrt[8]{b^3}$ 爲最小公根共指數．

根指數 6 與 8 之最小公倍數爲 24. 而 $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[24]{a^{20}}$ 與 $\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[24]{b^9}$.

根式之比較． 欲比較已知諸根式之大小，可先化爲公共 **588**
根指數．

例 1．比較 $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$, 與 $\sqrt[6]{3}$.

已知根指數 15, 10, 6 之最小公倍數爲 30；而

$$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256};\quad \sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216};\quad \sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}.$$

因 $256>243>216$, 故 $\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

例 2．比較 $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{41}$.

移第一根式之係數於根號內(§ 585)，而化二根式爲公共根指數 6，得

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728};\quad \sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}.$$

因 $1728>1681$, 故 $2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$.

乘法與除法． 從公式 **589**

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \text{ 與 } \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}.$$

導出以下法則：

欲以一根式乘或除他根式，必要時可化之爲最小公共指根數之根式.再分別求其係數與被開方數之積或商.

例 1.　以 $2\sqrt[3]{x^2y^2}$ 乘 $4\sqrt{xy}$.

$$4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt[3]{x^2y^2}=8\sqrt[6]{x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^4}=8\sqrt[6]{x^7y^7}=8xy\sqrt[6]{xy}.$$

例 2.　以 $2\sqrt[4]{xy}$ 除 $6\sqrt{xy}$.

$$6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{xy}.$$

590　**乘方.**　從公式

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\ \text{及}\ \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

導出以下法則:

欲求形如 $\sqrt[n]{a^q}$ 之根式之 m 次方,先約去 m 與其根指數可有之任何公因數,再以 m 之其餘因數乘被開方數之冪指數.

例.　求 $2\sqrt[6]{xy^2}$ 之 9 次方.

$$(2\sqrt[6]{xy^2})^9=2^9(\sqrt[6]{xy^2})^9=512(\sqrt{xy^2})^3=512\sqrt{x^3y^6}=512xy^3\sqrt{x}.$$

591　**開方.**　從公式

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\ \text{與}\ \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

導出以下法則:

欲求形如 $\sqrt[n]{a^q}$ 之根式之 m 次根,先約去 m 與被開方數冪指數可有之任何公因數,再以 n 之其餘因數乘根式之根指數.

例 1.　求 $\sqrt[5]{x^2y^4}$ 之六次根.

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^2y^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{xy^2}}=\sqrt[15]{xy^2}.$$

例 2.　求 $54a\sqrt{b}$ 之立方根.

$$\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2a\sqrt{b}}=3\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b}}=3\sqrt[6]{4a^2b}.$$

簡根式代數式. 所謂簡根式代數式者，意爲僅含簡根式之任何代數式也。例如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲簡根式代數式。當其不含以根式爲分母之分式時，則名爲簡根式整式。 592

由上述法則，簡根式整式之和，差，積，乘方能化爲簡根式之代數和。於 § 607 中，將證明其於商亦眞。但通常一簡根式代數式如 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ 者之根，不能化爲簡根式代數式。

例 1. 以 $2\sqrt{3}-\sqrt{10}$ 乘 $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$.

$$(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}-2\sqrt{50}=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.$$

例 2. 求 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ 之平方。

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

習 題 XXXIV

化以下諸式爲最小公共根指數。

1. $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[10]{3}$, 與 $\sqrt[15]{3}$.　　2. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$, 與 $\sqrt[6]{7b^5}$.

比較以下。

3. $3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt[3]{3}$.　　4. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, 及 $\sqrt[4]{5}$.

以下各化爲最簡形之簡根式。

5. $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}$.　　6. $10\div\sqrt{5}$.　　7. $4\div\sqrt[3]{2}$.

8. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$.　　9. $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}$.　　10. $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$.　　12. $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}$.　　13. $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$.

14. $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$.　　15. $\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}$.

16. $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$.　　17. $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}$.

18. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{a}$　　19. $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}$.

20. $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$.

21. $(\sqrt{12})^3$.　　22. $(\sqrt[3]{a^2})^6$.　　23. $(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^6$.

24. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$　　25. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$.　　26. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}$.

27. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$.　　28. $\sqrt{2\sqrt{2}}$.　　29. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$

30. $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$.　　31. $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}$.　　32. $(\sqrt[2m]{\sqrt[2n]{a}})^{mnp}$.

以下各化簡盡其可能。

33. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.　　34. $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$.

35. $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}$　　36. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

37. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{3}}$.　　38. $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

39. $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$.

40. $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

41. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}$　　42. $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}$.

43. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$.　　44. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

45. $(1+\sqrt{3})^3$.　　46. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

分指數與負指數

593 於數種情形，應用分指數以計算根式甚易。

以前附屬於式 a^n 之意義，僅爲當 n 表正整數時。關於計算此種式之法則，即

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,　　2. $(a^m)^n=a^{mn}$,　　3. $(ab)^n=a^nb^n$,

爲代數中之最簡者。於是自然發生疑問：當 n 不爲正整數時，能否關於 a^n 求得有用意義，仍與此種法則一致。

定義 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$. 取 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲例.設其可能,吾人欲對於此 **594**
符號求一意義而與法則 1, 2, 3 一致.

但欲與法則 1 一致,必須有

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a,$$

即 $a^{\frac{1}{2}}$ 必有意義爲 $\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$.

選擇此二意義之較便者,而定 $a^{\frac{1}{2}}$ 爲 $\sqrt{a}$.

於是已求得滿足 $a^{\frac{1}{2}}$ 條件之一,足以定其意義.

同理,定 $a^{\frac{1}{3}}$ 之意義爲 $\sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{2}{3}}$ 爲 $\sqrt[3]{a^2}$, 而於一般, $a^{\frac{p}{q}}$ 爲 $\sqrt[q]{a^p}$, 卽 a^p 之 q 次主根.

因 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qm]{a^{pm}}=a^{\frac{pm}{qm}}$, 故當 p/q 以同值分式代替時, $a^{\frac{p}{q}}$ 之值不變,此宜注意.

例如, $a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{6}{9}}$; 又 $a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}$.

定義 $a^0=1$. 其次,欲與法則 1 一致,必須有 **595**

$$a^0a^m=a^{0+m}=a^m,$$

故

$$a^0=a^m/a^m=1.$$

於是定 a^0 之意義爲 1.

定義 $a^{-s}=1/a^s$. 最後,欲與法則 1 一致,必須有(§ 595) **596**

$$a^{-s}\cdot a^s=a^{-s+s}=a^0=1,$$

故

$$a^{-s}=1/a^s.$$

於是定 a^{-s} 爲 $1/a^s$.

例如,由定義, $a^{-3}=1/a^3$, $a^{-\frac{5}{6}}=1/a^{\frac{5}{6}}=1/\sqrt[6]{a^5}$.

其餘待證明者,爲對於 $a^{\frac{p}{q}}$, a^0 與 a^{-s} 如是求得之意義,與指數諸法則完全一致.

定理 1. 定律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 對於 m 與 n 之一切有理值俱有效. **597**

令 p, q, r, s 表任何正整數,則

1. 當 $m=p/q$ 而 $n=r/s$ 時,得 (§ 582)

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. 當 $m=-p/q$, 而 $n=-r/s$ 時,由情形 1, 得

$$a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{-\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

3 當 $m=p/q, n=-r/s$, 而 $p/q>r/s$ 時,得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}/\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

4 當 $m=p/q. n=-r/s$ 而 $p/q<r/s$ 時,由情形 3 得

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}=a^{\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}.$$

598 **定理** 2. 定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 對於 m 與 n 之一切有理值俱有效.

因令 m 表任何有理數,則

1. 當 n 為正整數時,得 (§ 597)

$(a^m)^n=a^m\cdot a^m\cdots$ 至 n 因式 $=a^{m+m+\cdots\text{至 } n \text{ 項}}=a^{mn}$.

2. 當 $n=p/q$, 此處 p 與 q 為正整數時,由情形 1, 得

$$(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{q}}=a^{m\cdot\frac{p}{q}}.$$

3. 當 $n=-s$, 此處 s 為任何正有理數時,由情形 1,2 得

$$(a^m)^{-s}=\frac{1}{(a^m)^s}=\frac{1}{a^{ms}}=a^{-ms}=a^{m(-s)}.$$

定理 3. 定律 $(ab)^n=a^nb^n$ 對於 n 之一切有理值俱有效. **599**

1. 令 $n=p/q$, 此處 p 與 q 表正整數,則

$$(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}=\sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[q]{b^p}=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}.$$

2. 令 $n=-s$, 此處 s 表任何正有理數,不論爲整數或分數,則由情形1,

$$(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^s}=\frac{1}{a^sb^s}=a^{-s}b^{-s}.$$

應用. 下例說明分指數與負指數之用途,當用此種記法 **600**
時,根式計算之繁複部分,常能減少其混雜.

例 1. 化簡 $\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt{a/\sqrt[3]{a}}=(aa^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

例 2. 化簡 $\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$.

$$\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$$

$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{a^5b^3}.$$

例 3 展開 $(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3$.

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例 4 以 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ 除 $x-y$.

排列計算如 § 401, 得

$$\begin{array}{l|l}
x-y & x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \\ \cline{2-2}
\underline{x+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} & x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}} \\
\quad -x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y & \\
\quad \underline{-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y} &
\end{array}$$

故其商爲 $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$

習題 XXXV

不用根號以可能之最簡式表

1. $\sqrt[12]{a^8}$.　　2. $\sqrt{c^{\frac{4}{3}}}$.　　3. $a^{\frac{3}{5}}/\sqrt[3]{a^{\frac{6}{5}}}$.

4. $b\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[5]{b^6}$.

不用負指數或分指數表

5. $a^{\frac{14}{21}}$.　　6. $c^{-1\cdot5}$　　7. $(d^{\frac{2}{3}})^{-6}$.

8. $(e^{-3\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{7}}$.

用正指數而不用根號表

9. $a^{-1}/b^{-3}c^{-2}$.　　10. $x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{y^{-3}}$.

11. $(1/\sqrt{x^{-5}})^{-4}$.　　12. $x^{-2}\sqrt{y^{-3}}/y^{-2}\sqrt{x^{-3}}$.

不用分母以可能之最簡式表

13. $\dfrac{a}{bc}-\dfrac{b^{-1}}{c^{-2}}-\dfrac{a^{-1}(b^{-1}+c^{-1})}{a^{-2}(b+c)}+\dfrac{b+c}{b^{-1}+c^{-1}}$.

以下各化爲最簡指數形式

14. $(3\frac{1}{8})^{\frac{3}{2}}$.　　15. $81^{\frac{3}{4}}$.　　16. $(-27)^{\frac{2}{3}}$.

17. $8^{-\frac{5}{2}}$.　　18. $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{5}{6}}$.　　19. $a^{\frac{2}{5}}a^{-\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{15}}$.

20. $(a^{\frac{3}{2}}b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$.　　21. $ab^{-2}/a^{-3}b$.　　22. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{9}}$.

23 $(a^{-1}b^{-2}c^3)^{-2}$.　　24. $(-32a^{10})^{\frac{3}{5}}$.　　25. $(-a^6b^{-9})^{-\frac{2}{3}}$.

26. $b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[12]{b^{-6}}\div b^{-1}\sqrt{b^{-1}}$.　　27. $(a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{bc^5})^{\frac{2}{3}}$.

28. $(8a^{-15}/\sqrt{125a^3})^{-\frac{2}{3}}$.　　29. $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}(bc^{-1})^{-2}}$.

30. $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^3}}$.　　31. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^{-3}}}/\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot\sqrt[3]{a}}$.

32. $[(x^x)^x]^x$.　　33. $(x^{x^2+xy}y^{y^2+xy})^{\frac{xy}{x+y}}$.

34. $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})/(x^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{1}{4}})$.

35. 以 $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$ 乘 $x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$.

36. 以 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除 a^2-b^3.

37. 展開 $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}})^4$.　　38. 化簡 $[(e^x+e^{-x})^2-4]^{\frac{1}{2}}$.

39. 求 $x^2+4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+4xy+6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+12y^2+9x^{-1}y^3$ 之平方根。

40. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6x^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 之立方根。

負指數與分指數之二項式定理

設於二項展開式 (§ 561)

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots$$

中，假定 n 爲分數或負值，則右方將有無盡或無窮級數；因係 601
數 $n, n(n-1)/2, \cdots$ 無一能爲 0 故也。

以後將證明設 $b<a$，當 m 無限增大時，則此級數首 m 項之和，趨近 $(a+b)^n$ 之值爲極限；換言之，取此級數之充分項數而相加可得一結果近似於 $(a+b)^n$ 之值，至如心所欲。

此意如何，卽謂二項式定理當 n 爲分數或負數而 $b<a$ 時，對於 $(a+b)^n$ 爲有效也。

例 1. 展開 $(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$ 至四項.

以 $n=1/3$, $a=8$, $b=x^{-\frac{1}{2}}$ 代入公式中，得

$$(8+x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}8^{-\frac{5}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}8^{-\frac{8}{3}}(x^{-\frac{1}{2}})^3+\cdots$$

$$=2+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{12}-\frac{x^{-1}}{288}+\frac{5x^{-\frac{3}{2}}}{20736}\cdots.$$

例 2. 求 $1/(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^2$ 或 $(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^{-2}$ 之展開式中第六項. 以 $n=-2$, $a=a^{\frac{1}{2}}$, $b=x^{\frac{2}{3}}$, $r=5$, 代入第 $r+1$ 項之公式中 (§ 565), 得

$$\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(a^{\frac{1}{2}})^{-2-5}(x^{\frac{2}{3}})^5=-6a^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{10}{3}}.$$

例 3. 展開 $\sqrt{1+x}$ 至四項。

因　$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$，得 $n=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=x$.

故
$$\sqrt{1+x}=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}x^3+\cdots$$
$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\cdots.$$

此結果與 § 572 例 1 所得者相同。

例 4. 求 $\sqrt{10}$ 之近似值.

$$\sqrt{10}=(3^2+1)^{\frac{1}{2}}=3\left(1+\tfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}},$$

而
$$3\left(1+\tfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=3\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\right]$$
$$=3+\frac{1}{6}-\frac{1}{216}+\frac{1}{3888}+\cdots$$
$$=3+.16666-.00462+.00025+\cdots=3.1623.\ (\text{約})$$

習　題　XXXVI

以下各展開至四項。

1. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$.　　2. $(a^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$.　　3. $\sqrt[3]{(27-2x)^2}$.

4. $(a^m+x)^{\frac{1}{m}}$.　　5. $(a^{-1}-b^{-\frac{1}{2}})^{-4}$.　　6. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{-6}$.

7. $\dfrac{1}{2+3x}$.　　8. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$.　　9. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}}\right)^3$.

10. 求 $(1+x)^{-3}$ 中之第十項。

11. 求 $(x^{-2}-2y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}$ 中之第七項。

12. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$ 中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 之項。

13. 求 $x^{-\frac{3}{2}}(2+x^{-\frac{1}{6}})^{-3}$ 中含 x^{-2} 之項。

14. 用 § 601 例 4 中說明之法，求以下之近似值。

　1. $\sqrt{99}$.　　2. $\sqrt[3]{62}$.　　3. $\sqrt[5]{31}$.

有理化因式

有理化因式. 當二已知根式之積爲有理式時,則二者各 602
稱爲他式之有理化因式.

例如, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$. 故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之有理化因式,反之亦然.

此可證明含簡根式之每一有限式,僅有一有理化因式.下節用以說明此一般定理.

平方根函數之有理化因式. 關於 $\sqrt{x}$ 之每一有理整式, 603
能化爲 $A+B\sqrt{x}$ 之形,此處 A 與 B 爲關於 x 之有理整式;而 $A+B\sqrt{x}$ 有關於 x 之有理化因式 $A-B\sqrt{x}$, 此只須變 $\sqrt{x}$ 之號卽得.

例如, $2(\sqrt{x})^4+3x(\sqrt{x})^3$ 可書爲 $2x^2+3x^2\sqrt{x}$. 故此式有有理化因式 $2x^2-3x^2\sqrt{x}$.

關於任何有限數個平方根如 $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}, \cdots$ 之有理整式可屢用上述方法求得其有理化因式.因設以關於 $\sqrt{x}$ 之有理化因式乘已知式,再以關於 $\sqrt{y}$ 之有理化因式乘其積,依此類推,必得一完全有理之結果故也.

例. 求 $1+\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$ 之有理化因式.

$$1+\sqrt{y}+\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}). \tag{1}$$

乘 (1) 以

$$1+\sqrt{y}-\sqrt{x}(1+2\sqrt{y}). \tag{2}$$

得

$$(1+\sqrt{y})^2-x(1+2\sqrt{y})^2,$$

或

$$1-x+y-4xy+2\sqrt{y}(1-2x). \tag{3}$$

乘 (3) 以

$$1-x+y-4xy-2\sqrt{y}(1-2x). \tag{4}$$

得

$$(1-x+y-4xy)^2-4y(1-2x)^2. \tag{5}$$

因 (5) 爲完全有理,故 (2) 與 (4) 之積爲 (1) 之有理化因式.

604 **二項根式之有理化因式.** 形如 $\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[n]{b}$ 之式，其有理化因式可如下例求得.

例. 求 $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}$ 之有理化因式。

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}=(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}. \tag{1}$$

但由 § 438, $(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$ 可除盡有理式 a^2-b^3, 其商爲

$$(a^2)^{\frac{5}{6}}-(a^2)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}+\cdots-(b^3)^{\frac{5}{6}}. \tag{2}$$

故 (2) 爲 (1) 之有理化因式。

605 **有理化分式之分母.** 形如 A/B 之任何無理式，其 B 僅含簡根式者，可用 B 之有理化因式同乘 A 與 B，化之爲具有理分母之等值式.

例 1. 有理化 $1/\sqrt[4]{a^3}$ 之分母。

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a}=\sqrt[4]{a}/a.$$

例 2. 有理化 $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$ 之分母。

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})}$$

$$=\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}.$$

606 含根式之數字分式，計算其近似值時，須先有理化其分母。於是可避免許多不必需要之計算。

例。求 $(1+\sqrt{8})(3-/\sqrt{2})$ 之近似值，準確第三位小數。

$$\frac{1+\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}=2.414\cdots.$$

根式除法． 欲以一根式除他一根式，可先書其商爲分式 **607**
之形，而有理化此分式之分母．

例． 以 $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 除 $4+2\sqrt{5}$.

$$\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}=\frac{-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{(-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

一般結果． 從 §592 與 §607，可知僅含簡根式之式，可 **608**
化爲簡根式之代數和．

習　題　XXXVII

求以下之有理化因式

1. $\sqrt[7]{a^5}$.　　2. $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$.　　3. $x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}$.

4. $\sqrt{a}+\sqrt{bc}$.　　5. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.　　6. $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$.

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$.　　8. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1$.

9. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.　　10. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$.　　11. $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$.

12. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{2}{3}}$.　　13. $1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$.　　14. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$.

15. $3-\sqrt{5}$.　　16. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.　　17. $1+\sqrt[3]{2}$.

18. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$.　　19. $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}$.

以下各化爲有有理數或有理式作分母之分式。

20. $\dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt[5]{b^2}}$.　　21. $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$.　　22. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{3}}$.

23. $\dfrac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$.　　24. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

25. $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.　　26. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

27. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$.　　28. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

求以下諸式之近似值準確至第三位正確小數。

29. $\dfrac{5}{\sqrt{125}}$.　　30. $\dfrac{2+\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$.　　31. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

無理方程

609 **解無理方程.** 解無理方程之一般法則，如下法所述：

先有理化此方程.

次解所得之有理方程.

末將所得一切解答，於已知方程中試驗之，而棄去其不能滿足者.

因令 $P=0$ 表已知方程，而 $PR=0$ 爲以 P 之有理化因式 R 乘 $P=0$ 二邊所得之有理方程.由 § 341, $PR=0$ 之根，爲 $P=0$ 與 $R=0$ 連合之根.試驗之於已知方程，即發現其中何者爲 $P=0$ 之根.

例. 解 $x-7-\sqrt{x-5}=0$.

以有理化因式 $x-7+\sqrt{x-5}$ 乘二邊，得

$$(x-7)^2-(x-5)=0.$$

或化簡之，

$$x^2-15x+54=0.$$

由 § 455 解之，　　$x=9$ 或 6.

以 9 代 x 於 $x-7-\sqrt{x-5}=0$，得 $9-7-\sqrt{9-5}=0$ 爲眞.故 9 爲一根.

但以 6 代入，得 $6-7-\sqrt{6-5}=0$ 則誤，故 6 非其根.

但察知 6 爲使有理化因式等於 0 所得方程 $x-7+\sqrt{x-5}=0$ 之一根；因 $6-7+\sqrt{6-5}=0$ 爲眞故也.

含根式 $\sqrt[n]{A}$ 之方程，可於此根式有理化，即集合含 $\sqrt[n]{A}$ 之諸項於一端，其餘諸項於他端，而二端同時自乘至 n 次冪，屢用此種方法，可將僅含平方根之方程完全有理化，從 § 345，知此法則等於 § 609 中所述者，但計算較簡。 610

例 1. 解 $\sqrt[3]{\sqrt{x}+a}=\sqrt{b}$.

將二邊立方，　$\sqrt{x}+a=b^{\frac{3}{2}}$.

移項而平方之，　$x=(b^{\frac{3}{2}}-a)^2$.

以此結果代入於已知方程，知其爲所求之根。

例 2. 解 $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9$.

移項，　$\sqrt{x-4}=9-\sqrt{x+5}$.

平方之，　$x-4=81-18\sqrt{x+5}+x+5$.

化簡，　$\sqrt{x+5}=5$.

平方之，　$x+5=25$.

解之，　$x=20$.

以 20 代 x 於已知方程，得 $\sqrt{25}+\sqrt{16}=9$ 爲眞，故 20 爲其根。

註。 1　如例 1 中，察知僅有理化關於未知文字之方程，而不消去其不含此文字之根式。 611

2. 又知無理方程可以無根。

例如，方程 $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9$ 無根，因努力解之，不過如例 2 中再計算一回，仍得 $x=20$；而 $\sqrt{25}-\sqrt{16}=9$ 爲謬誤故也。

3. 可附述者，形如 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$ (或 $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+E=0$) 之方程，其有理化之簡法，爲先書作

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-\sqrt{D}\ (或\ \sqrt{A}+\sqrt{B}=-\sqrt{C}-E)$$

再平方其二端。其結果方程僅含二根式，而可如例 2 有理化之。

612　**聯立無理方程．** 欲解如此方程系，可先有理化各方程，而解所得有理方程系，最後試驗所得結果於已知方程中．

但設方程為 §379 中所述之形，則須用該處所說明之法則解之．

例 1．解 $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+5}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$　　(1)

$$x+2y=17.\tag{2}$$

將 (1) 平方，$x-5+y+5+2\sqrt{xy+5x-5y-25}=x+y+2\sqrt{xy},$

或　$\sqrt{xy+5x-5y-25}=\sqrt{xy}.$　　(3)

將 (3) 平方而化簡，　$x-y=5.$　　(4)

解 (4), (2),　　$x=9,\ y=4.$　　(5)

以 $x=9,\ y=4$ 代入於 (1)，得 $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{9}+\sqrt{4}$ 爲眞．故 $x=9,\ y=4$ 爲 (1), (2) 之解．

例 2．解 $\sqrt{x+6}+2/\sqrt{y}=4,$　　(1)

$$2\sqrt{x+6}+6/\sqrt{y}=9.\tag{2}$$

就 $\sqrt{x+6}$ 與 $1/\sqrt{y}$ 解之，求得 $\sqrt{x+6}=3,\ 1/\sqrt{y}=1/2.$　　(3)

從 (3)，得 $x=3,\ y=4$，此爲 (1), (2) 之解．

習　題　XXXVIII

以下方程，就 x 解之．

1. $x^{\frac{1}{4}}=4.$　　2. $x^{-\frac{1}{2}}=3.$　　3. $x^{\frac{2}{3}}=8.$

4. $(\sqrt{2x-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$　　5. $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2.$

6. $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}+\sqrt{cx}=d.$　　7. $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1.$

8. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$　　9. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0.$

10 $\sqrt{x+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+2}}=0.$　　11. $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2.$

12. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}.$

13. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}}=2.$　　14. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$

以下就 x, y 解之。

15. $\begin{cases} \sqrt{x+17}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x+5}+\sqrt{y+6}, \\ \sqrt{y-x}=\sqrt{3-x}+\sqrt{y-3}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3\sqrt{x-2y}-\sqrt{x+y-4}=3, \\ \sqrt{x-2y}+2\sqrt{x+y-4}=8. \end{cases}$

17. 試證明 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=0.$ 可化爲一次有理方程。

18. 試證 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}-\sqrt{ex+f}=0$, 設 $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{e}=0$, 則可化爲一次有理方程。

二次不盡根

不盡根. 數字根式如 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt[3]{5}$, 其中被開方數爲有理數，但根式本身爲無理數者，名爲不盡根。不盡根名爲二次，三次等等，依其根指數爲 2, 3 等等定之。 **613**

定理 1. 二不相似二次不盡根之積，爲二次不盡根。 **614**

假定當不盡根化爲最簡形時，其根式因式爲 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$. $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 之積爲 $\sqrt{ab}$, 苟非 ab 爲完全平方，則此爲不盡根。

但 ab 不能爲完全平方，因由假設，a 與 b 爲整數，其因數無一爲平方數，且至少 a 之因數中之一，與 b 中之每一因數不同。

例如， $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6},\ \sqrt{6}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$

定理 2. 二不等二次不盡根之和與差爲無理數。 **615**

當不盡根爲相似時，此理甚明。

故令 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 表不相似不盡根。

設其可能，假定　　$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$　　(1)

此處c爲有理數。

平方 (1) 之二邊而移項，

$$2\sqrt{ab}=c^2-a-b. \qquad (2)$$

此爲不可能，因 $2\sqrt{ab}$ 爲無理數 (§ 614)，此時 c^2-a-b 爲有理數故也。

616　**定理** 3.　設 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，此處 $\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{d}$ 爲不盡根．則 $a=c,\ b=d.$

因由假設，　　$\sqrt{b}-\sqrt{d}=c-a.$

但苟非 $\sqrt{b}-\sqrt{d}=0$ 與 $c-a=0$，此爲不可能。因不如是，則 $\sqrt{b}-\sqrt{d}$ 爲無理數 (§ 615)，不能等於有理數 $c-a$ 也。

故　　　$b=d$，而 $a=c.$

617　**二項不盡根之平方根.**　已知

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

故設 $a+2\sqrt{b}$ 表已知二項不盡根，而能求得二正有理數 x 與 y，可使

$$x+y=a,\ 而\ xy=b,$$

則 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 爲 $a+2\sqrt{b}$ 之平方根，而 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 爲 $a-2\sqrt{b}$ 之平方根，且此二根俱爲二項不盡根。

當如此之數 x, y 存在，則可由視察求得。

例 1.　求 $37-20\sqrt{3}$ 之平方根。

化爲如 $a-2\sqrt{b}$ 之形，$37-20\sqrt{3}=37-2\sqrt{300}.$

但　　　$300=25\cdot12$；而 $37=25+12.$

故　　　$\sqrt{37-2\sqrt{300}}=\sqrt{25}-\sqrt{12}=5-2\sqrt{3}.$

例 2.　求 $13/12+\sqrt{5/6}$ 之平方根。

$$\frac{13}{12}+\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{13+2\sqrt{30}}{12}.$$

因 $30=10\cdot 3$ 而 $13=10+3$，得 $\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{10}+\sqrt{3}$.

故 $\sqrt{\dfrac{13+2\sqrt{30}}{12}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{120}+\sqrt{36}}{12}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

註. 今得求 x 與 y 之公式如下： 618

由假設， $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+2\sqrt{b}}$, (1)

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a-2\sqrt{b}}$. (2)

以 (2) 乘 (1) $x-y=\sqrt{a^2-4b}$. (3)

但 $x+y=a$. (4)

解 (3), (4), $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

可見此種值僅當 a^2-4b 成完全平方時爲有理數.故僅於此情形下，$a+2\sqrt{b}$ 之平方根爲二項不盡根。

習 題 XXXIX

求以下之平方根：

1. $9+\sqrt{56}$.
2. $20+2\sqrt{96}$
3. $32-2\sqrt{175}$.
4. $1+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$
5. $7-3\sqrt{5}$.
6. $8\sqrt{2}+2\sqrt{30}$.
7. $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$.
8. $b-2\sqrt{ab-a^2}$.

化簡以下

9. $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.
10. $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$.

虛數與複素數

複素數. 因負數之一切偶次方俱爲正數，故無負數之偶次根能爲實數者.如此之根爲虛數。 619

虛數之定義與其可結合之演算，已見於 §§ 217—228，學者可與此聯絡讀之。

依此種定義，

1. 符號 $i=\sqrt{-1}$ 名爲虛數單位。

2. 形如 ai 之符號，其 a 爲實數者，名爲純虛數。

3. 形如 $a+bi$ 之符號，其 a 與 b 爲實數者，名爲複素數。

4. 二複素數相等，僅限於當其實數部分與其虛數部分各相等時，由是

設 $a+bi=c+di$，則 $a=c$，$b=d$。

5. 二複素數之和，差，積，或商，仍爲複素數（在特殊情形爲實數或純虛數），可應用平常計算法則與關係式 $i^2=-1$ 求得。複素數之任何正整數乘冪亦眞確；因由定義 $(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\cdots$ 至 n 因式故也。

例 1. 加 $5+3i$ 與 $2-4i$.

$$5+3i+(2-4i)=(5+2)+(3-4)i=7-i.$$

例 2. 從 $3+2i$ 減 $6+2i$.

$$3+2i-(6+2i)=(3-6)+(2-2)i=-3.$$

例 3. 以 $1+4i$ 乘 $2+3i$.

$$(2+3i)(1+4i)=2+3i+8i+12i^2$$
$$=2+3i+8i-12=-10+11i.$$

例 4. 展開 $(1+i)^2$.

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i.$$

例 5. 求 x, y 之實數値能滿足下列方程式

$$(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i).$$

實行所示之運算，得

$$-(y+2)+(x+4)i=(x+y)+(x-y)i,$$

使實數與虛數部分各相等（§ 619, 4）

$$-(y+2)=x+y \text{ 及 } x+4=x-y,$$

解之
$$x=6,\quad y=-4.$$

於 §§238—241 中，已述及對於以點代表複素數，即所謂圖形者之法則，及關於從二複素數圖形求得其和與積之圖形之

法則.令學者應用此種法則於例 1, 3, 4.

共軛虛數. 二複素數如 $a+bi$ 與 $a-bi$, 僅在結合實數與虛數部分之號不同者,名爲共軛虛數. 620

二共軛虛數之積爲正實數. 621

例如, $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$

故分數如 $(a+bi)/(c+di)$ 者,可用分母之共軛虛數乘其二項化爲複素數之形. 622

例. 以 $2-4i$ 除 $5+7i$.

$$\frac{5+7i}{2-4i}=\frac{(5+7i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$$

$$=\frac{-18+34i}{20}=-\frac{9}{10}+\frac{17}{10}i.$$

i 之乘冪. 從方程式 $i^2=-1$, 知 i 之偶次冪爲 -1 或 1, i 之奇次冪爲 i 或 $-i$. 623

例如, $i^3=i^2\cdot i=-i$; $i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=1$; 餘類推.

對於 n 之任何已知値,欲求 i^n 之値,可用 4 除 n, 於是依其餘數爲 0, 1, 2, 3, 定 i^n 之値爲 $1, i, -1, -i$.

例如, $i^{24}=(i^4)^6=1$; $i^{25}=i^{24}\cdot i=i$. 餘類推.

負數之偶次方根. 數 -4 有二平方根 $2i$ 與 $-2i$; 因 $(2i)^2=2^2i^2=-4$, 而 $(-2i)^2=(-2)^2i^2=-4$ 故也.吾人選 $2i$ 爲主平方根,而書作 $\sqrt{-4}=2i$, 及 $-\sqrt{-4}=-2i$. 624

同理,任何已知負數 $-a$ 之主平方根爲 $\sqrt{a}i$, 卽 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$.

從此主平方根之定義,可知設 $-a$ 與 $-b$ 爲任何二負數, 625

則 $$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}.$$

因 $$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a}i\cdot\sqrt{b}i=i^2\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}.$$

於是二負數 $-a, -b$ 之主平方根之積，雖爲其積 ab 之平方根之一，然非此積之主平方根，與實數情形不同。

當計算虛數時須熟記法則 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 之此種修正。設最初用 $\sqrt{a}i$ 代記號 $\sqrt{-a}$，則混雜之一切機會，即可避免。

例 1. 化簡 $\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7$.

$$\begin{aligned}\sqrt{-2}\cdot(\sqrt{-3})^5\cdot(\sqrt{-5})^7&=\sqrt{2}i\cdot(\sqrt{3}i)^5(\sqrt{5}i)^7\\&=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3})^5\cdot(\sqrt{5})^7i^{13}\\&=1125\sqrt{30}i.\end{aligned}$$

例 2 以 $1+\sqrt{-1}$ 乘 $2+\sqrt{-9}$.

$$(2+\sqrt{-9})(1+\sqrt{-1})=(2+3i)(1+i)=-1+5i.$$

626 負數之高次偶次根爲複素數，此將於後證明之。

例如，-4 之四次根之一爲 $1+i$；因

$$(1+i)^4=1+4i+6i^2+4i^3+i^4=1+4i-6-4i+1=-4.$$

627 **複素數之平方根。** 此後將證明複素數之一切根亦爲複素數。可求其平方根如下：

$$(\sqrt{x}\pm i\sqrt{y})^2=x-y\pm 2i\sqrt{xy}.$$

故設 $a+bi$ 表已知複素數，其 b 爲正數，必能求得二正數 x 與 y，可使

$$x-y=a,\quad (1)\quad 及\quad 2\sqrt{xy}=b,\quad (2)$$

則 $\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ 爲 $a+bi$ 之平方根，而 $\sqrt{x}-i\sqrt{y}$ 爲 $a-bi$ 之平方根。

可求得如此二數 x, y 如下：

由假設，
$$\sqrt{x}+i\sqrt{y}=\sqrt{a+bi},\tag{3}$$

$$\sqrt{x}-i\sqrt{y}=\sqrt{a-bi}.\tag{4}$$

以 (4) 乘 (3)，
$$x+y=\sqrt{a^2+b^2}.\tag{5}$$

但由 (1),　$x-y=a,$　(6)

故解 (5) 與 (6),　$x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$

$$y=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

又因 $\sqrt{a^2+b^2}>a$, 故上二值皆爲正數。

例。求 $-1+4\sqrt{5}i$ 之平方根。

此處　$a=-1$ 及 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+(4\sqrt{5})^2}=9.$

故　$x=(-1+9)/2=4$ 及 $y=(1+9)/2=5.$

由是　$\sqrt{-1+4\sqrt{5}i}=2+\sqrt{5}i.$

習　題　XL

化簡以下。

1. $\sqrt{-49}$.　2. $\sqrt{-18}$.　3. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-12}$.　4. $\sqrt{-2}$.

5. $(\sqrt{-2})^2$.　6. i^{12}.　7. i^{-7}.　8. i^{15}.

9. $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{y-x}$.　10. $(2+\sqrt{-3})(1+\sqrt{-2})$.

11. $(\sqrt{-2})^7(\sqrt{-3})^9$.　12. $(1+2i)^3+(1-2i)^3$.

13. $\dfrac{b}{\sqrt{-a^2}}-\dfrac{b}{i\sqrt{b^2}}$.　14. $\dfrac{4+6i}{1+i}+\dfrac{4-6i}{1-i}$.

15. $(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2$.　16. $(1+i^3)/(1+i)$.

17. $\dfrac{a+bi}{a-bi}$.　18. $\dfrac{9+3\sqrt{2}i}{(3+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)}$.

19. 以 $1+\sqrt{-3}$ 除 4.

20. 求 -16 之四次根。

21. 求證 $(-1+\sqrt{3}i)/2$ 爲 1 之立方根。

22. 求證 $(1+i)/\sqrt{2}$ 爲 -1 之四次根。

23. 求 x 與 y 之實數值滿足下列方程

$$3+2i+x(i-1)+2yi=(3i+4)(x+y).$$

求以下之平方根。

24. $5+12i$.　25. $2i$.　26. $4ab+2(a^2-b^2)i$.

XIII. 二次方程

628 **方程之一般式.** 含一未知文字,如 x 之每一二次方程可化爲形如

$$ax^2+bx+c=0.$$

此處 a, b, c 表已知數.

設可發生 $b=0$, 則此方程名爲純二次方程;設 $b\neq 0$,則名爲雜二次方程.

629 **視察求根法.** 方程 $ax^2+bx+c=0$ 之根,爲 x 之特別值,此值能使多項式 ax^2+bx+c 爲零(§ 332). 此種根之個數有二.

設已知 ax^2+bx+c 之因式,則可知 $ax^2+bx+c=0$ 之根,因此根爲 x 之值,能使 ax^2+bx+c 之因式爲零者故也(§§ 253, 341). 設二因式爲 $x-\alpha$ 與 $x-\beta$, 則其二根爲 α 與 β.

例 1. 解方程式 $x^2+x-6=0$.

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

因式 $x+3$ 當 $x=-3$ 時爲零,而因式 $x-2$ 當 $x=2$ 時爲零.故二根爲 -3 與 2.

例 2. 解 $abx^2-(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$.

由 § 443 析因式, $[ax-(a+b)][bx-(a-b)]=0$.

故二根爲 $(a+b)/a$ 與 $(a-b)/b$.

於特例,因 $x^2-q=(x-\sqrt{q})(x+\sqrt{q})$, 故純二次方程 $x^2-q=0$ 之根爲 $\sqrt{q}$ 與 $-\sqrt{q}$.

次因 $ax^2+bx=(ax+b)x$, 故形如 $ax^2+bx=0$ 之二次方程之根爲 $-b/a$ 與 0.

例如, $4x^2=9$ 之根爲 $3/2$ 與 $-3/2$; $2x^2-x=0$ 之根爲 0 與 $1/2$; $5x^2=0$ 之根爲 0 與 0.

630 反之,欲得根爲二已知數如 α 與 β 之二次方程,作成積 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 而使此積等於 0 卽得.

例如, 根爲 -2 與 $1/3$ 之二次方程爲 $(x+2)(x-1/3)=0$ 或 $3x^2+5x-2=0$.

例 1. 解以下二次方程式.

1. $x^2+2x-8=0.$ 　　2. $2x^2-7x+3=0.$

3. $(2x-1)(x-2)=x^2+2.$ 　　4. $(x-1)(x-3)=(2x-1)^2.$

例 2. 求作二次方程,其根為

1. $-2/3,\ -3/2.$ 　　2. $a,\ -a.$ 　　3. $1/4,\ 0.$

根之一般公式. 然 ax^2+bx+c 恆可析因式;因如 § 444 已證明, **631**

$$ax^2+bx+c$$
$$=a\left[x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

因
$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$
之根,即能使 ax^2+bx+c 之因式為零之 x 之值,故其二根為

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 與 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

或常書為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

此公式 (2) 必須熟記,因任何二次方程化為形如 (1) 後,只須用代換法以求得其根也.

例. 解 $4x^2+105x=81.$

化為如 (1) 之形, $4x^2+105x-81=0.$

此處 $a=4$, $b=105$, 而 $c=-81$.

故 $x=\dfrac{-105\pm\sqrt{105^2+4\cdot4\cdot81}}{8}$, 即 $\dfrac{3}{4}$ 或 -27.

當 b 為偶整數, a 與 c 亦為整數時,用以下公式甚便, **632**

$$x=\frac{-b/2\pm\sqrt{(b/2)^2-ac}}{a}, \tag{3}$$

此式由以 2 除 (2) 之分子分母而得.

例. 解 $3x^2+56x-220=0$.

此處 $b/2=28$, 代入 (3), 得

$$x=\frac{-28\pm\sqrt{28^2+3.220}}{3}, \text{ 即 } \frac{10}{3} \text{ 或 } -22.$$

633 任何已知二次方程，亦可如下例直接應用配成平方法解之 (§ 444). 但此法含不需要之計算，故苟非忘記 § 631 之公式時，不用此法。

例. 解 $3x^2-6x+2=0$.

移已知項，而以 x^2 之係數除之，

$$x^2-2x=-2/3.$$

配成左邊之平方，

$$x^2-2x+1=1/3.$$

開二邊之平方根，

$$x-1=\pm\sqrt{3}/3, \text{ 由是 } x=(3\pm\sqrt{3})/3.$$

634 任何分式方程，當去其分母而成二次方程時，上述法則亦可解之；但須參考 §§ 524—527.

例 1. 解 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$.

去分母而化簡，$2x^2+10x+11=0$.

解之，
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}.$$

此 x 之二值俱爲已知方程之根，因其使分母無一爲零故也。

例 2. 解 $\frac{x+3}{x^2-1}+\frac{x-3}{x^2-x}+\frac{x+2}{x^2+x}=0$.

用最低公分母 $x(x^2-1)$ 乘之，以去分母而化簡，得

$$3x^2+2x-5=0, \text{ 由是 } x=1 \text{ 或 } -5/3.$$

但 1 不能爲已知方程之根，因當 $x=1$ 時，首二分母爲零故也。故 $-5/3$ 爲此方程僅有之根。

習　題　XLI

解下列方程式：

1. $x^2+2x=35$.

2. $4x^2-4x=3$.

3. $x^2=10x-18$.

4. $9x^2+6x+5=0$.

5. $2x^2+3x-4=0$.

6. $(2x-3)^2=8x$.

7. $x^2+9x-252=0$.

8. $12x^2+56x-255=0$.

9. $8x^2-82x+207=0$.

10. $15x^2-86x-64=0$.

11. $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0$.

12. $x^2-(6+i)x+8+2i=0$.

13. $(x-2)(x^2-7)=(x+2)(x-3)(x-6)$.

14. $\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x}=2$.

15. $\dfrac{x+1}{x}+1=\dfrac{x}{x-1}$.

16. $\dfrac{3}{2(x^2-1)}+\dfrac{x}{4x+4}=\dfrac{3}{8}$.

17. $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{1}{4x-2}-\dfrac{2x}{1-4x^2}=\dfrac{7}{8}$.

18. $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}$.

19. $\dfrac{x+1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{1}{2x}=0$.

20. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{3-x}$.

21. $\dfrac{x+3}{4(x+2)(3x-1)}+\dfrac{2x+1}{3(3x-1)(x+4)}-\dfrac{17x+7}{6(x+4)(x+2)}=0$.

22. $\dfrac{x+7}{2x^2-7x+3}+\dfrac{x}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+3}{2x^2+x-1}=0$.

23. $3x^2+(9a-1)x-3a=0$.

24. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

25. $c^2x^2+c(a-b)x-ab=0$.

26. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0$.

27. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0$.

28. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$.

29. $1/(x-a)+1/(x-b)+1/(x-c)=0$.

30. $\dfrac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0$.

習 題 XLII

1. 求二連續整數,其積爲 506.

2. 求二連續整數,其平方之和爲 481.

3. 求二連續整數,其立方之差爲 91.

4. 求三連續整數,其各對乘積之和爲 587.

5. 從下列條件求一二位數:兩數字之積爲 48,若數位位置互易則所成之數減小 18.

6. 一分數之分子較分母多 2,而此分數較其倒數多 24/35. 求此分數.

7. 一牛販以 1260 元買閹牛若干頭,除失去 4 頭外,餘牛每頭增價 10 元賣出而獲利 260 元.求所買之牛數.

8. 一人以 48 元售出一宗貨物,其獲利之百分數等於貨物原價元數之半,問貨物之原價若干?

9. 設有銀洋 4000 元以複利法存儲二年,利息每年計算複利一次,共得本利和 4410 元,則利率爲若干?

10. 一人得遺產 25,000 元,但以百分之若干繳遺產稅後,又以較遺產稅率多一之百分數作爲費用,故淨得 22,800 元.其遺產稅率爲若干?

11. 一人以 4500 元買有折扣之 50 元一股之股票若干股.其後,除 10 股外,餘均售出,得洋 5850 元,售出票價超過票面價格三倍於買進時之折扣.此人共買若干股?

12. 貨車後輪周圍較前輪長 8 吋.後輪行 1 哩所轉之次數較前輪少 88 次.求各輪周圍之長.

13. 一鑲邊之正方形,其邊之闊度較正方形各邊之長度少一吋,而其面積之平方吋數較正方形週界之吋數多 64. 求正方形及所鑲之邊之面積.

14. 正方形各邊之長爲 2，今截去其四角使成一正八邊形。求該八邊形各邊之長。

15. 一酒商從滿裝 63 霤之桶中取酒若干。原桶用水注滿後再取出與前同量之酒水混合液，然後查得桶內僅餘 28 霤純酒。求每次取出之霤數。

16. 某人乘 A 火車行 50 哩，停留 5 分鐘乘 B 火車而返，B 車較 A 車每小時快 5 哩。全旅程共費 $2\frac{4}{5}$ 小時。則兩火車之速度各若干？

17. 一健步者於一定時間內步行 6 哩。若減少 $\frac{1}{2}$ 小時，則其速度每小時較前大 2 哩。求原有時間及速度。

18. 一健步者以一定速度行 12 哩後，復以每小時大 $\frac{1}{2}$ 哩之速度行 6 哩。若以此較大速度行全程則省 20 分鐘。求此人行 18 哩之時間

19. 兩直路相交成直角，A, B 二人從其交點同時出發，A 以每時 3 哩之速度向一路進行，B 以每時 4 哩之速度向他一路進行。幾小時後兩人相距 30 哩？

20. 如前題所述，若 A, B 二人各以每時 2 哩與每時 3 哩之速度自交點出發各行一路，且 A 先 B 2 小時起行，則 B 行幾小時後二人相距 10 哩？

21. 設一物體從高 a 呎處以每秒 b 呎之速度鉛直上拋，其 t 秒末之高度可以公式 $h=a+bt-16t^2$ 表之。若將此物體鉛直擲下，則其對應公式爲 $h=a-bt-16t^2$.

(1) 若一物體從地面以每秒 32 呎之速度鉛直上拋，則何時高 7 呎？16 呎？能否達 17 呎之高度？

(2) 一物體從高 64 呎處鉛直下擲其最初速度爲每秒 48 呎，何時達 36 呎之高度？

(3) 若一物體從高 36 呎處擲下，何時達地？

XIV. 二次方程式之討論

極大與極小

635　**根之性質．判別式．** 命 α 與 β 表 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，使 § 631,

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

根號內之 b^2-4ac 式稱爲 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式．當係數 a, b, c 爲實數時，α, β 二根之性質可以判別式之符號指明之．如：

1. 當 b^2-4ac 爲正時，二根爲不相等之二實數．
2. 當 b^2-4ac 爲 0 時，二根爲相等之二實數．
3. 當 b^2-4ac 爲負時，二根爲共軛虛數．

下列諸事實亦應察出之：

1. $b^2-4ac=0$, 則 ax^2+bx+c 爲一完全平方．

2. a 爲正而 c 爲負，則二根必爲實數，因斯時之 b^2-4ac 爲正也．

3. 設 a, b, c 爲有理數，則 b^2-4ac 爲一完全平方時，二根方爲有理數．

例 1. 證 $x^2-6x+10=0$ 之二根爲虛數．

因 $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=-4$, 故二根爲虛數．

例 2. $mx^2+3x+2=0$ 之二根相等時，m 之值爲何？

欲二根相等，須得 $3^2-4\cdot m\cdot 2=0$, 即 $m=9/8$.

例 3. 設可能時，試分解 $y^2+xy-2x^2+11x+y-12$.

將上式依 y 之冪序排列，且使之等於 0，則得 $y^2+(x+1)y-(2x^2-11x+12)=0$.

解之，
$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{9x^2-42x+49}}{2},$$

即
$$y=x-4,\quad 或\quad y=-2x+3.$$

故,從 §631, $y^2+xy-2x^2+11x+y-12=(y-x+4)(y+2x-3)$.

注意,此式所以能分解者祇因根號內之 $9x^2-42x+49$ 為一完全平方也.

根與係數之關係. 設 α 與 β 表 $ax^2+bx+c=0$ 之二 636
根,從 §631,得

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

二邊各除以 a,而將右邊乘出,則得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\equiv x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

因此為恆等式,故二邊中 x 之同次冪之係數為相等,從 §264, 即 $\alpha+\beta=-b/a$ 與 $\alpha\beta=c/a$.

此亦可以 §631 中 α 與 β 之值相加及相乘證明之.因 α,β 為 $x^2+bx/a+c/a=0$ 之根,故得以下之定理:

凡具 $x^2+px+q=0$ 形式之任何二次方程式,其 x 之係數變號後與其二根之和相等,而其常數項等於二根之積.

如,在 $6x^2+x=2$ 中,即 $x^2+x/6-1/3=0$, 其二根之和為 $-1/6$, 而其二根之積為 $-1/3$.

例 1. 解 $9x^2-10x+1=0$.

顯然二根之一為 1, 因 $9-10+1=0$. 因二根之積為 $1/9$, 故他一根為 $1/9\div1$ 或 $1/9$.

例 2. 求一方程式其根為 $3x^2+8x+5=0$ 之根之三倍.

命 α 與 β 為 $3x^2+8x+5=0$ 之二根.

於是 $\alpha+\beta=-8/3$ 而 $\alpha\beta=5/3$.

故所求方程式為

$$x^2-(3\alpha+3\beta)x+3\alpha\cdot3\beta\equiv x^2-3(\alpha+\beta)x+9\alpha\beta\equiv x^2+8x+15=0.$$

根之對稱函數. $\alpha+\beta$ 與 $\alpha\beta$ 二式為 α 與 β 二根之對稱 637
函數 (§540). α 與 β 之其他一切有理對稱函數皆可以 $\alpha+\beta$

與 $\alpha\beta$ 二函數表之，故亦可以方程式之係數表之。

因此種函數全可化成對稱函數之整式或分式。設一整對稱函數含 $k\alpha^p\beta^{p+q}$ 形式之一項，則亦必含 $k\alpha^{p+q}\beta^p$ 之一項（§542），故得 $k\alpha^p\beta^p(\alpha^q+\beta^q)$。但 $\alpha^p\beta^p=(\alpha\beta)^p$，而連續應用二項式定理，即可證明 $\alpha^q+\beta^q$ 能化為 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 之函數。

如，由　$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$，得 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

同理，得　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

例．$x^2+px+q=0$ 之二根為 α,β；試以含 p 與 q 之式表 $1/\alpha+1/\beta$ 與 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$.

$$1/\alpha+1/\beta=(\alpha+\beta)/\alpha\beta=-p/q,$$

而

$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]=q(p^2-2q).$$

638　**無限大根．**　設 $ax^2+bx+c=0$ 中之係數不為常數而為變數，則可證明設 a 趨近於 0 為極限時，則二根之一必趨近於 ∞；而設 a 與 b（但 c 則否）趨近於 0，則二根必均趨近於 ∞。

因根之公式為

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

將 α 之等分式之二項均乘以 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$，β 之等分式之二項均乘以 $-b+\sqrt{b^2-4ac}$，則得

$$\alpha=-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},\quad \beta=-\frac{2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

從 §§203, 205，設 $a\doteq 0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}\doteq b$

故　　設 $a\doteq 0$，則 $\alpha\doteq -c/b$ 而 $\beta\doteq\infty$.

又　　設 $a\doteq 0$，與 $b\doteq 0$，則 $\alpha\doteq\infty$ 與 $\beta\doteq\infty$.

此等結論可述之如下（§519）：

當 $ax^2+bx+c=0$ 中之 a 為零時，則其一根成為無限大，當 a 與 b（但 c 則否）全為 0 時，則其二根同成為無限大。

極大與極小. 命§278.y 爲 x 之函數，有時 x 增加時，y 639
漸增至某定值，m，然後漸減，或 y 漸減至某定值，m'，然後漸增.則稱 m 謂 y 之極大值而 m' 謂極小值.

如，$y=(x-1)^2-4$，當 $x=1$ 時，y 有一極小值，-4. 因設 x 從小於 1 之值漸增時，$(x-1)^2$ 先漸減至 0 而後漸增.

同理，$y=4-(x-1)^2$，當 $x=1$ 時，y 有一極大值，4.

每一實係數之二次三項式 ax^2+bx+c 有一極大值或一極 640
小值，其求法如下例.

例 1. 求 $y=x^2+6x-7$ 之極大或極小值.

配方，
$$x^2+6x-7=(x+3)^2-16.$$

故當 $x=-3$ 時，y 有一極小值，-16.

例 2. 分一已知線段爲二份，使所成矩形有極大之面積.

命 $2a$ 表已知線段之長，x 與 $2a-x$ 各爲二份之長，y 爲矩形之面積.

則
$$y=x(2a-x)=2ax-x^2=a^2-(a-x)^2.$$

故當 $x=a$ 時，y 有一極大值，即周界一定，所成矩形爲一正方形時，其面積爲最大.

二次三項式及某種較複雜之函數，其極大與極小值亦可 641
用下法求之.

例. 求 $y=(4x^2-2)/(4x-3)$ 之極大值與極小值.

消去分母，解 x，得
$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-3y+2}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{(y-1)(y-2)}}{2}.$$

從假設，x 限於實數值.故 y 祇能取使根號中 $(y-1)(y-2)$ 爲正（或 0）時之值，即 1 與較小於 1 之值及 2 與較大於 2 之值.

因此 y 之極大值爲 1 而極小值爲 2.

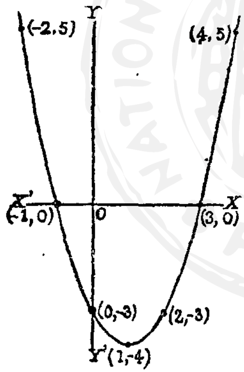
觀𡨚可知當 y 增至 1 時，x 之二值，即 $(y-\sqrt{y^2-3y+2})/2$ 與 $(y+\sqrt{y^2-3y+2})/2$，各自漸增或漸減至 $1/2$. 反之，當 x 漸增而過 $1/2$ 時，y 先漸增至 1 而後漸減.

642 **二次三項式之變化.** 已知 $y=ax^2+bx+c$，其中 a 爲正. 用配方法得

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

故當 $x=-b/2a$ 時，y 有一極小值，其值爲 $(4ac-b^2)/4a$. 當 x 從 $-\infty$ 漸增至 $+\infty$ 時，y 先從 $+\infty$ 漸減至 $(4ac-b^2)/4a$ 而後漸增至 $+\infty$.

例如，命 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.



當 x 從 $-\infty$ 漸增至 $+\infty$ 時，y 先從 ∞ 漸減至 -4，再從 -4 漸增至 ∞.

又當 $x^2-2x-3=0$，即，當 $x=-1$ 或 3 時，$y=0$.

在 x 達 -1 前，y 爲正；此後 y 爲負，直至 $x=3$ 後方復爲正.

當

$x=\cdots-3,\ -2,\ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$

$y=\cdots\ 12,\ \ 5,\ \ 0,\ -3,\ -4,\ -3,\ 0,\ 5,\ 12,\ \cdots$

如 § 389 中所述，描各對數值，過此諸點作一曲線，可得 $y=x^2-2x-3$ 之圖形.

注意 y 之零值相當於此圖形截 x 軸上之諸點. 又 y 之最小值相當於圖形之最低點亦即爲此曲線之轉向點

習 題 XLIII

1. 欲使 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 之二根相等，則 m 之值爲何?

2 當 $m=-1$ 時，$(m^2+m)x^2+3mx-2=0$ 之二根爲何?當 $m=0$ 時，其値爲何?

3. 可能時，分解 $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y-2$.

4. 欲使 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 能分解，m 之值爲何？

5. $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α 與 β，試以 p 與 q 表 $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^4+\beta^4$, 與 $\alpha/\beta+\beta/\alpha$.

6. $2x^2-3x+4=0$ 之二根爲 α 與 β，求 $\alpha/\beta^2+\beta/\alpha^2$ 與 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ 之值。

7. $x^2+x+2=0$ 之二根爲 α 與 β，求以 $-\alpha, -\beta$; $1/\alpha, 1/\beta$; $2\alpha, 2\beta$; $\alpha+1, \beta+1$ 爲二根之諸方程式。

8. 求下列諸式之極大與極小值。

   1. x^2-8x+3.　　2. $2x^2-x+4$.　　3. $1+4x-x^2$.

   4. $x/(x^2+1)$.　　5. $1/x+1/(1-x)$.　　6. $(x+1)/(2x^2-1)$.

9. 求內接於已知圓內之最大矩形，又具最大周界之矩形。

10. 一人在一舟中距岸上之最近點爲 2 哩，今欲以最短時間達到岸上離最近點 6 哩處．設該人每小時能划行 4 哩，步行 5 哩，則應向岸上何點划行？

11. 設以每秒 48 呎之初速將一物體從地面鉛直上拋，則可達之最大高度若何？又何時能達此高度？

XV. 用二次方程式可解之高次方程式

可分解因式之方程式． 已知一整方程式其形爲 $A=0$．設 A 能分解成一次或二次諸因式，則使 A 之諸因式等於零之諸方程式而解之卽得 $A=0$ 之一切根．因設 $A\equiv BC\cdots$，則 $A=0$ 與 $B=0, C=0, \cdots$, 之聯合式相同，§ 341. 643

例 1．解 $x^4+x^2+1=0$.

由 § 436,　　$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

故 $x^4+x^2+1=0$ 與以下二方程式相當：

$$x^2+x+1=0 \quad 與 \quad x^2-x+1=0.$$

解之，
$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad 或 \quad \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

例 2. 解 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$.

用 § 451 之法分解因式，得

$$x^4-x^3-5x^2-7x+12=(x-1)(x-3)(x^2+3x+4).$$

故 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$ 與下列三方程式相當：

$$x-1=0,\ x-3=0,\ 與\ x^2+3x+4=0,$$

其根爲
$$1,\ 3,\ 與\ (-3\pm i\sqrt{7})/2.$$

例 3. 解下列諸方程式：

1. $6x^3-11x^2+8x-2=0$.　　2. $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$.

644　$au^2+bu+c=0$ 型之方程式，其中 u 表 x 之函數. 設解 $au^2+bu+c=0$ 以求 u，得其根爲 α 與 β，則此方程式與 $u=\alpha$ 及 $u=\beta$ 二方程式相當，因從 § 631,

$$au^2+bu+c\equiv a(u-\alpha)(u-\beta).$$

故解 $au^2+bu+c=0$ 以求 x，祇須解 $u=\alpha$ 與 $u=\beta$ 以求 x 卽得.

例 1. 解 $3x^4+10x^2-8=0$.

解之以求 x^2，　$x^2=2/3$ 或 -4.

故　$x=\pm\sqrt{6}/3$ 或 $\pm 2i$.

例 2. 解 $x^{\frac{2}{3}}+3-10x^{-\frac{2}{3}}=0$.

乘以 $x^{\frac{2}{3}}$，　$x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-10=0$.

解之以求 $x^{\frac{2}{3}}$，　$x^{\frac{2}{3}}=2$ 或 -5.

故　$x=\pm 2\sqrt{2}$ 或 $\pm 5i\sqrt{5}$.

例 3 解 $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$.

此方程式可化成 $(x^2+3x)^2+9(x^2+3x)+14=0$ 之形式.

解之以求 x^2+3x，得二方程式

$$x^2+3x=-2,\ 與\ x^2+3x=-7,$$

其根爲
$$-1,\ -2,\ 與\ (-3\pm i\sqrt{19})/2.$$

例 4. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

將第一與第四因式相乘，第二與第三因式相乘，則此方程化成

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$$

之形式而可用與例 3 相同之法解之。

例 5. 解 $x^4+10x^3+31x^2+30x+5=0$.

將前二項配方，得

$$(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)+5=0.$$

解之以求 x^2+5x，得二方程式

$$x^2+5x=-5 \text{ 與 } x^2+5x=-1,$$

其根爲
$$(-5\pm\sqrt{5})/2 \text{ 與 } (-5\pm\sqrt{21})/2.$$

例 6. 解 $8\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}+3\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}-11=0$.

觀察得第二分式爲第一分式之倒數，今以第一分式乘方程式之兩邊，得

$$8\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^2-11\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)+3=0.$$

解之以求 $(x^2+2x)/(x^2-1)$，得二方程式

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1}=1 \text{ 與 } \frac{x^2+2x}{x^2-1}=\frac{3}{8},$$

其根爲
$$-1/2 \text{ 與 } -3,\ -1/5.$$

由此所得 x 之諸值皆爲已知方程式之根，因無一根可使其分母爲零也。

例 7. 解下列方程式。

1. $3x^4-29x^2+18=0$.
2. $x^4-6x^3+8x^2+3x=2$.
3. $(x-a)(x+2a)(x-3a)(x+4a)=24a^4$.
4. $(4x^2+2x)/(x^2+6)+(x^2+6)/(2x^2+x)-3=0$.

倒數方程式. 此等方程式如以 $\dfrac{1}{x}$ 代 x 則消去其分式 645
後，仍與原方程式相同。設將此種方程式之諸項以降冪序排列之，則其首末二係數必相同，又其第二係數與末第二係數亦然，餘類推；或上述各對係數之絕對值相同而符號則相反。

如，
$$2x^4+3x^3+4x^2+3x+2=0$$
與
$$x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-1=0$$
爲倒數方程式.

四次倒數方程式可化作二次式而解之如下。

例 1. 解 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$.

集係數相同諸項而除以 x^2，則得以下之形式：

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

因 $x^2+1/x^2=(x+1/x^2)^2-2$，故此方程式又可化成

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

解之以求 $x+1/x$，得二方程式

$$x+\frac{1}{x}=0,\ 與\ x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.$$

其根爲 $i,\ -i$，與 $(3\pm i\sqrt{7})/4$.

每一奇次倒數方程式必有一根爲 1 或 −1；若將其對應因式 $x-1$ 或 $x+1$ 提出，則其"低一次"之方程式必仍爲倒數方程式。故三次與五次之倒數方程式能以二次方程式解之。

例 2. 解 $2x^3-3x^2-3x+2=0$.

集項，
$$2(x^3+1)-3(x^2+x)=0.$$

因此方程式之各項皆可以 $x+1$ 除盡，故與下列二方程式相同：

$$x+1=0,\ 2x^2-5x+2=0,$$

其根爲 -1，與 $2,\ 1/2$.

例 3. 解 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

集項，
$$(x^5-1)-5x(x^3-1)+9x^2(x-1)=0.$$

以 $x-1$ 除之，則此方程式與下列之二方程式相當：

$$x-1=0\ 與\ x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0,$$

其根爲 1，與 $(1\pm i\sqrt{3})/2,\ (3\pm\sqrt{5})/2$.

例 4. 解下列方程式。

1. $x^3-2x^2+2x-1=0$.　　2. $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$.

3. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

二項方程式. 此乃具 $x^n+a=0$ 形之方程式之名稱.當 646
x^n+a 可分解成一次或二次諸因式時,則此等方程式可用上述之法解之。

例 1. 解 $x^3-1=0$.

因 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 方程式 $x^3-1=0$ 與下列二方程式相當:

$$x-1=0, \text{ 與 } x^2+x+1=0.$$

解之，$$x=1 \text{ 或 } (-1\pm i\sqrt{3})/2.$$

例 2. 解 $x^5-32=0$.

從 $x^5-32=0$, 如命 $x=\sqrt[5]{32}y=2y$, 則得 $y^5-1=0$.

由 §§ 438, 643, $y^5-1=0$ 相當於下列二方程式

$$y-1=0 \text{ 與 } y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

解之，$$y=1,\ (-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4,$$

或 $$(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/4.$$

故 $$x=2y=2,\ (-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2,$$

或 $$(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}})/2.$$

應用上法,每一二項方程式 $x^n\pm a=0$ 皆可化作倒數式 $y^n\pm1=0$.

例 3. 解下列方程式。

1. $x^3+8=0$.　　2. $x^4+1=0$.　　3. $x^6+1=0$.

諸例可說明此定理:每一數必有 n 個 n 次根.如 1 之立方 647
根爲適合於方程式 $x^3=1$ 之任何數;而在例 1 中求得此種數三個,卽 1, $(-1+i\sqrt{3})/2$, 與 $(-1-i\sqrt{3})/2$.

無理方程式. 解無理方程式時,通常先使之有理化(§609). 648
但亦可用較此更簡之法以處理之,將說明如下.但不論所用何法,在確定所求得未知數之値爲方程式之根之前,須加以檢驗。

例 1. 解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$.

移項 $$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}.$$

平方且化簡之, $$\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=1.$$

再平方而化簡之, $$6x^2-19x+14=0.$$

解之,得 $$x=2 \text{ 或 } 7/6.$$

將所得 x 之值代入已知方程式而驗之,可知 2 爲根而 7/6 則否。

亦可用 § 603 之法化已知方程式爲有理方程式.於是發見 $-4(6x^2-19x+14)$ 相同於

$$(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$
$$(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5})(\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}-\sqrt{3x-5}).$$

x 祇有二值能使 $6x^2-19x+14$ 等於零.其中之一值 2 能使右邊之第一因式爲零;他一值 7/6 則使第二因式爲零.故 x 無值能使第三或第四因式爲零.

例 2. 解 $\sqrt{4x+3}+\sqrt{12x+1}=\sqrt{24x+10}$.

方程式之祇含一根式者能化成以此根式爲元之二次方程式.於是先求此根式之值.

例 3. 解 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0$.

由觀察,知根號外諸 x 項適爲根號內諸 x 項之二倍,故可寫成下式:

$$2(x^2-3x-1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0.$$

解之以求 $\sqrt{x^2-3x-1}$,得兩方程式

$$\sqrt{x^2-3x-1}=3, \text{ 與 } \sqrt{x^2-3x-1}=-1/2.$$

第二方程式必須捨去,因照 § 579 所規定具 $\sqrt{a}$ 形之根式不能有負值也。

將第一方程式平方之,得

$$x^2-3x-1=9,$$

其根爲 $$5 \text{ 與 } -2.$$

於已知方程式中驗 5 與 -2 而知二值皆爲其根。

例 4 解 $2x^2-14x-3\sqrt{x^2-7x+10}+18=0$.

有時一方程式可化成兩邊皆為完全平方之形式或一邊為一完全平方而他邊為一常數。

例 5. 解 $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$.

先寫作

$$3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9.$$

第一邊為一完全平方;兩邊各自開方,則得二方程式

$$\sqrt{3x^2+x}+x=3,\text{ 與 }\sqrt{3x^2+x}+x=-3.$$

解之, $x=1,\ -9/2$, 或 $(5\pm\sqrt{97})/4$.

驗算所得之結果,知僅 1 與 $-9/2$ 為此已知方程式之根。

有時經適當之集項後,各項有一公共之無理因式。

例 6. 解 $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a$.

此題各項皆有 $\sqrt{x-2a}$ 為其公因式.

將此因式提出,則此方程式相同於

$$\sqrt{x-2a}=0\text{ 與 }\sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a}.$$

解此等方程式, $x=2a,\ -10a/3$, 或 $6a$.

驗算之,知僅 $2a$ 與 $-10a/3$ 為此已知方程式之根。

例 7. 解 $\sqrt{3x^2-5x-12}-\sqrt{2x^2-11x+15}=x-3$.

設方程式之一項或多項為以無理式為分母之分式,則常先將其分母化作有理式為便利。

例 8 解 $(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})/(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})=2x-5$.

將分母化為有理式而化簡之,得

$$\sqrt{x^2-3x}=2x-6.$$

解之, $x=3$ 或 4.

驗之,得 3 與 4 皆為此方程式之根。

例 9 解 $(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})/(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})=x-3$.

習題 XLIV

解下列諸方程式:

1. $4x^4-17x^2+18=0.$　　2. $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7.$

3. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2.$　　4. $(2x^2-x-3)(3x^2+x-2)^2=0.$

5. $x^4+x^3+x^2+3x-6=0.$　　6. $x^4-2x^3+x^2+2x-2=0.$

7. $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0.$

8. $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0.$

9. $4x^4+4x^3-x^2-x-2=0.$

10. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0.$

11. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$

12. $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0.$

13. $x^5-243=0.$　　14. $(2x-1)^3=1.$

15. $(1+x)^3=(1-x)^3.$　　16. $(x-2)^4-81=0.$

17. $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3.$

18. $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x).$

19. $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-3\dfrac{4x^2+6x-1}{x^2+3x+1}-2=0.$

20. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}.$

21. $3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0.$

22. $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}.$　　23. $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}.$

24. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=0.$

25. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x=\sqrt{\dfrac{6}{x}}.$　　26. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1.$

27. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0.$　　28. $\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}=0.$

29. $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-2}}-3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-5}}+2=0.$

30. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3.$

31. $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1.$

32. $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0$. 33. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$.

34. $(x+a)^{\frac{1}{3}}+(x+b)^{\frac{1}{3}}+(x+c)^{\frac{1}{3}}=0$.

35. $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3$.

36. $(x+a)^2+4(x+a)\sqrt{x}=a^2-4a\sqrt{x}$.

37. $\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^2-1}}=6$.

XVI. 聯立方程式之能以二次方程解之者

一對含 x 與 y 之方程式,一爲一次,一爲二次

一對聯立方程式之形式爲 649

$$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$\phi(x, y)=a'x+b'y+c'=0.$$

可解之如下例.

例. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0,$ (1)

$2x-y-7=0.$ (2)

從 (2), $y=2x-7.$ (3)

將 (3) 代入 (1) 中, $3x^2-22x+39=0.$ (4)

解 (4), $x=13/3$ 或 $3.$ (5)

代入 (3) 中, $y=5/3$ 或 $-1.$ (6)

(1), (2) 之解答爲下列二對數值

$x=13/3,\ y=5/3;\ x=3,\ y=-1.$ (7)

因,從 §§ 368, 371, 下列各對方程式皆相當:

(1), (2) 與 (4), (2); (4), (2) 與 (5), (2); (5), (2) 與 (7).

(7) 之解答,可寫作 13/3, 5/3; 3, −1. 注意配成各對解答時,必須取 x 與之對應值.

通常此一對方程式有二定解,但設 $\phi(x, y)$ 內之一次諸項,即 $a'x+b'y$ 爲 $f(x, y)$ 內二次諸項,即 $ax^2+bxy+cy^2$ 之因 650

式，而 $\phi(x, y)$ 自身並非 $f(x, y)$ 之一因式時，則祇有一有限解答或無此種解答。又設 $\phi(x, y)$ 爲 $f(x, y)$ 之一因式，則有無限個解答。

例 1. 解 $y^2-x^2+2x+2y+4=0,$ (1)

$$y-mx=0. \tag{2}$$

消去 y, $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+4=0.$ (3)

設 $m^2-1\neq0$, 則 (3) 有二有限根，而 (1), (2) 有二有限解答。

但設 $y-mx$ 爲 y^2-x^2 之一因式，卽 $m=\pm1$ 時，(3) 卽無二有限根。

如，設 $m=1$, 則 (3) 化爲 $x+1=0$, 祇有一有限根，其他一根則爲無限大，638. 又設 $m=-1$, 則 (3) 化爲 $4=0$, 二根皆爲無限大，§ 638.

故設 (2) 有 $y-x=0$ 之形式，則 (1), (2) 二聯立方程式祇有一有限解答，他一解答爲無限大. 又設 (2) 有 $y+x=0$ 之形式，則 (1), (2) 二聯立方程式無有限解答，二解答皆爲無限大。

例 2. 解 $y^2-x^2+2x+2y=0,$ (1)

$$y+x=0. \tag{2}$$

消去 y, $x^2-x^2+2x-2x=0.$ (3)

但 (3) 爲一恆等式，而 x 之任何值皆能適合之。

故 $x=a$, $y=-a$ 之各對數值皆爲 (1), (2) 之解答.

此結果乃因 $y+x$ 爲 $y^2-x^2+2x+2y$ 之一因式也。

651 當 A, B, C 爲整函數時，則 $AB=0, C=0$ 此對方程式與 $A=0, C=0$ 及 $B=0, C=0$ 相當 § 371. 此原則與 § 649 可使吾人解二整方程式 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 祇須 $f(x, y)$ 能分解成一次或二次諸因式，而 $\phi(x, y)$ 能分解成一次諸因式。

例。解 $x^3+xy^2-5x=0,$ (1)

$$(2x-y)(x+y-1)=0. \tag{2}$$

此對方程式與下列四對相等

$$x=0, \quad 2x-y=0, \tag{3}$$

$$x=0, \quad x+y-1=0, \tag{4}$$

$$x^2+y^2-5=0, \quad 2x-y=0, \tag{5}$$

$$x^2+y^2-5=0, \quad x+y-1=0. \tag{6}$$

解 (3), (4), (5), (6) 中各對,得 (1), (2) 之解答為: $0, 0; 0, 1; 1, 2; -1, -2; 2, -1; -1, 2$.

含 x, y 之一對整方程式,祇當其有 §§ 649, 651 中所述形式之一時，或從此對方程式誘導出一對相當之方程式而具此種形式之一者均能用二次方程式解之。 652

例如,此對二次方程式 $y^2-x+1=0$, $y=x^2$ 不能用二次方程式解之。因其解法,除消去 y 外更無較簡之法,而消去 y 後則得 $x^4-x+1=0$, 此四次方程式不能用二次方程式解之者.

上節說明下述重要定理之眞實性: 653

一對整方程式 $f(x, y)=0, \phi(x, y)=0$, 其次數各為 m 與 n 者,通常有 mn 個解答。

例如,此對 $x^3+xy^2-5x=0$, $(2x-y)(x+y-1)=0$ 有 $3\cdot 2$, 或 6 個解答, §651. 又參閱 § 381.

應附述者,設 $f(x,y)$ 與 $\phi(x,y)$ 中之最高次諸項,而非 $f(x, y)$ 與 $\phi(x,y)$ 之自身,有一公因式,則其有限解答之數較 mn 為少。例如，二式中最高次諸項每有一個一次公因式,則至少有一個無限大解答; 設每一此種公因式又為其次高次諸項之公因式,則至少有二無限大解答;餘類推。設 $f(x, y)$ 與 $\phi(x, y)$ 之自身有一公因式,則其解答之數無限。 654

例如,此對 $x^3-xy^2+xy-y^2-y=0$ (1), $x^2-y^2-1=0$ (2) 其有限解答不能多於三;因解答之數共有 $3\cdot 2$ 或 6 個,而至少其中之一為無限大,蓋 (1) 與 (2) 中最高次諸項,即 x^3-xy^2 與 x^2-y^2 有公因式 $x+y$ 也。又因 (1) 與 (2) 中最高次諸項及次高次諸項,即 x^3-xy^2, x^2-y^2 與 $xy-y^2$, $0(x-y)$ 有公因式 $x-y$, 故至少又有二解為無限大。

習題 XLV

解下列各對方程式.

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2+x=4y^2, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0, \\ 3x-y-8=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+5y^2-8x-7y=0, \\ x+3y=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0, \\ 7x-6y-4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2-1=0, \\ x+y=0. \end{cases}$ 8 $\begin{cases} 2x+3y=37, \\ 1/x+1/y=14/45. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1/y-3/x=1, \\ 7/xy-1/y^2=12. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2+xy+2=0, \\ (3x+y)(2x+y-1)=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2-8=0, \\ (x+1)^2=(y-1)^2. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2-xy-2y^2+y=0, \\ (x-2y)(x+y-3)=0. \end{cases}$

13. 決定 m 之值使此對方程式 $y^2+4x+4=0$, $y=mx$ 之二個解答相等。

14. 決定 m 與 c 之值使下列二方程式之根皆爲無限大

$$x^2+xy-2y^2+x=0,\ y=mx+c.$$

15. 用 §650, 例 2 之法,證 $2x-y+4$ 爲 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 之因式。

16 試證此對方程式 $xy=1$, $xy+x+y=0$ 無兩個以上之有限解答,又此對方程式 $x^2y+xy=1$,$x^2y+y^2=2$ 無四個以上之有限解答。

可用分解因式法,加法,或減法解得之聯立方程式

655 當二方程式對於 x, y 之一對函數爲一次時. 可先用 §§ 374—376 之方法解此對函數。

例 1. 解
$$2x^2-3y^2=-58, \quad (1)$$
$$3x^2+y^2=111. \quad (2)$$

解之以求 x^2, y^2, 得 $x^2=25,\ y^2=36$,

因此, $$x=\pm 5,\ y=\pm 6.$$

從 §§ 367-372, (1), (2) 相當於下列四對 $x=5, y=6$; $x=-5, y=6$; $x=5, y=-6$; $x=-5, y=-6$.

例 2 解下列各對:

1. $\begin{cases} ax^2+by^2=a, \\ bx^2-ay^2=b. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x^2-1/y^2=2, \\ 5x^2+3/y^2=120. \end{cases}$

當方程式之一能分解因式時. 當所論之方程式,其形式為 **656**

$$ax^2+bxy+cy^2=0$$

時,則常屬可能,總之,當其可化為

$$au^2+bu+c=0$$

之形式時卽可能以其中 u 表 x, y 之函數.

例 1. 解 $$x^2+y^2+x-11y-2=0, \quad (1)$$
$$x^2-5xy+6y^2=0. \quad (2)$$

分解 (2), 以 y 表 x,

$$x=2y, \quad (3)$$

或 $$x=3y. \quad (4)$$

解 (1), (3) 與 (1), (4), 得 (1), (2) 之各種解答,卽 4, 2; $-2/5$, $-1/5$; 3, 1; $-3/5$, $-1/5$.

例 2. 解 $$2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0, \quad (1)$$
$$3x^2-32y^2+5=0. \quad (2)$$

將 (1) 寫成 $$2(x+y)^2+3(x+y)-2=0.$$

解之, $$x+y=1/2, \quad (3)$$

或 $$x+y=-2. \quad (4)$$

解 (2), (3) 與 (2), (4), 得 (1), (2) 之各對解答,卽 1, $-1/2$; 3/29, 23/58; -3, 1; $-41/29$, $-17/29$.

例 3 解下列各對:

1 $\begin{cases} x^2+xy-6=0, \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5}, \\ y^2-2x^2=1. \end{cases}$

657　**當二已知方程式可用加法或減法結合成一能分解之方程式者.** 當二方程式皆爲 $ax^2+bxy+cy^2=d$ 之形式時,則常屬可能.

例 1. 解　$6x^2-xy-2y^2=56,$　(1)

$5x^2-xy-y^2=49.$　(2)

結合 (1) 與 (2) 以消去其常數項.

(1) 乘以 7,　$42x^2-7xy-14y^2=392.$　(3)

(2) 乘以 8,　$40x^2-8xy-8y^2=392.$　(4)

從 (3) 減 (4),　$2x^2+xy-6y^2=0.$　(5)

解 (5) 以求 x,　$x=3y/2,$　(6)

或　$x=-2y.$　(7)

解 (2), (6) 與 (2), (7) 而得 (1), (2) 之各對解答,即 $\pm3\sqrt{35}/10, \pm\sqrt{35}/5$; $\pm2\sqrt{21}/3, \mp\sqrt{21}/3.$

總之,當已知方程式爲二次而可用加法或減法以消去其 (1) 所含諸二次項; (2) 所含二次項以外之諸項; (3) 所有含 x (或 y) 諸項; 或 (4) 所有不含 x (或 y) 諸項者,常得一能分解之方程式.

例 2. 解　$2x^2+4xy-2x-y+2=0,$　(1)

$3x^2+6xy-x+3y=0.$　(2)

此處以 3 乘 (1), 又以 2 乘 (2) 而相減,能消去其所有諸二次項.如是,得

$4x+9y-6=0$　(3)

解 (2), (3), 得 $-3, 2$; $-2, 14/9$; 而此爲 (1), (2) 之有限解答,參閱 § 654.

例 3. 解　$x^2+3xy+2y^2+4x+3y-1=0,$　(1)

$2x^2-6xy+y^2+8x+2y-3=0.$　(2)

此處以 2 乘 (1) 而減去 (2) 卽能消去其所有含 x 諸項.如是,得

$3y^2+4y+1=0.$　(3)

解 (1), (3) 卽得 (1), (2) 所有之四個解答,卽

$1/3, -1/3$; $-16/3, -1/3$; $(-7\pm\sqrt{57})/2, -1.$

更以下例申論之。

例 4. 解
$$x^2+2xy+2y^2+3x=0, \tag{1}$$
$$xy+y^2+3y+1=0. \tag{2}$$

以 2 乘 (2) 而與 (1) 相加，得
$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0. \tag{3}$$

解 (3)，
$$x+2y=-1, \tag{4}$$

或
$$x+2y=-2. \tag{5}$$

解 (2), (4) 與 (2), (5), 卽得 (1), (2) 所有之解答，卽 $-3\pm2\sqrt{2}$, $1\mp\sqrt{2}$; $-3\pm\sqrt{5}$, $(1\mp\sqrt{5})/2$.

例 5. 解下列各對方程式：

1. $\begin{cases}2x^2+xy+5y=0,\\ x^2+y^2+10y=0.\end{cases}$　　2. $\begin{cases}x^2+y^2-13=0,\\ xy+y-x=-1.\end{cases}$

當消去 x 或 y 而得之方程式能分解者. 從任一對二次 658
方程式皆可用下法以消去 x 或 y. 而最後之方程式常屬四次，不能以二次方程式解之. 但若能分解成一次或二次之因式，則能解之而得已知二方程式之解答.

例 1. 解
$$10x^2+5y^2-27x-4y+5=0, \tag{1}$$
$$x^2+y^2-3x-y=0. \tag{2}$$

先將 (2) 乘以 5 而自 (1) 減之，則消去 y^2 而得
$$5x^2-12x+y+5=0,\ \text{或}\ y=-5x^2+12x-5. \tag{3}$$

將 (3) 代入 (2) 中，
$$5x^4-24x^3+40x^2-27x+6=0. \tag{4}$$

用 §451，分解之，
$$(x-1)(x-2)(5x^2-9x+3)=0. \tag{5}$$

解 (5)，§ 643，
$$x=1,\ 2,\ (9\pm\sqrt{21})/10. \tag{6}$$

將 (6) 代入 (3) 中，
$$y=2,\ -1,\ (7\pm3\sqrt{21})/10. \tag{7}$$

(6), (7) 之諸對對應值皆爲 (1), (2) 之解答.

例 2 解
$$x^2-3xy+2y^2+3x-3y=0,$$
$$2x^2+xy-y^2+x-2y+3=0.$$

習題 XLVI

解下列各對方程：

1. $\begin{cases} x^2+3y^2=31, \\ 7x^2-2y^2=10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 36/x^2+1/y^2=18, \\ 1/y^2-4/x^2=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2+xy+6=0, \\ y^2-y-2=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y-39=0, \\ 3x^2-17xy+10y^2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y^2-x^2-5=0, \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y=3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+5xy-2x+3y+1=0, \\ 3x^2+15xy-7x+8y+4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-15xy-3y^2+2x+9y=98, \\ 5xy+y^2-3y=-21. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2+3xy-4y^2=25, \\ 15x^2+24xy-31y^2=200. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x(x+3y)=18, \\ x^2-5y^2=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2-3xy+3y^2=x^2y^2, \\ 7x^2-10xy+4y^2=42x^2y^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2=14. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y), \\ xy=20 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+y-8=0, \\ y^2+15x-46=0. \end{cases}$

可用除法解出之各對方程式

659 解一對方程式，有時以用乘或除結合之爲便；但切勿引入外來解答，亦勿失去其原有解答爲要（參閱§§362, 342）。

660 設已知二方程式之形爲 $AB=CD$ (1), $B=D$ (2), 其中 A, B, C, D 表 x, y 之整函數，則可以 D 代 B 於 (1) 內；如是，得二方程式 $AD=CD$, $B=D$, 此顯然與兩對方程式 $A=C$, $B=D$ 及 $D=0$, $B=0$ 相當. 以 (2) 之兩邊除 (1) 之對應邊得二方程 $A=C$, $B=D$；但祇解方程式 $A=C$, $B=D$, 必失去 (1), (2) 之

若干解答,除非 B 或 D 爲常數,而 $B=0, D=0$ 的一對方程式無解.

例 1. 解 $$x^4+x^2y^2+y^4=21, \quad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=7. \quad (2)$$

以 (2) 除 (1), $$x^2-xy+y^2=3. \quad (3)$$

解 (2), (3) 而得 (1), (2) 之一切有限解答,卽 2, 1; -2, -1; 1, 2; -1, -2. 參閱 § 654.

例 2 解 $$x^3-y^3=-3(x+1)y, \quad (1)$$
$$x^2+xy+y^2=x+1. \quad (2)$$

以 (2) 除 (1), $$x-y=-3y \quad (3)$$

(1), (2) 之有限解答與 (2), (3) 及 $x^2+xy+y^2=0$ (4), $x+1=0$ (5) 二對方程式所有者相同. 而 (2), (3) 與 (4), (5) 之解答爲 2, -1; $-2/3$, $1/3$; -1, $(1\pm i\sqrt{3})/2$.

例 3. 解 $$(x+y)^2=x, \quad (1)$$
$$x^2-y^2=-6y. \quad (2)$$

以 (2) 除 (1), $$(x+y)/(x-y)=-x/6y. \quad (3)$$

消去分母, $$x^2+5xy+6y^2=0. \quad (4)$$

(2), (4) 一對方程式之解答有四對 0, 0; 0, 0; 4, -2; 9/4, $-3/4$.

從 (1), (2) 導得 (4), 其步驟當 x, y 之值爲 4, -2 或 9/4, $-3/4$ 時爲可逆,而當其值爲 0, 0 時則否.故此種測定祇證明 4, -2 與 9/4, $-3/4$ 爲 (1), (2) 之解答, § 362.

用觀察法,顯然 0, 0 亦爲 (1), (2) 之一解答;但祇能計算一次,不能如在 (2), (4) 之情形中計算二次.故 (1), (2) 祇有三對有限解答, § 654. 亦可證明之如:以 $y=tx$ (5) 代入 (1), (2) 中,得 $(1+t)^2x^2=x$ (1′), $(1-t^2)x^2=-6tx$ (2′). 而 (5), (1′), (2′) 產生 $x=0$, $y=0$ 一次而祇有一次.

習 題 XLVII

1. $\begin{cases}x^3-y^3=63,\\ x-y=3.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y=98,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2,\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^4+x^2y^2+y^4=931,\\ x^2+xy+y^2=49.\end{cases}$

4. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=-70,\\ (x-y)(x^2-2y^2)=14.\end{cases}$

5. $\begin{cases}(x+y)^2(x-y)=3xy+6y,\\ x^2-y^2=x+2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=6x,\\ x^2-y^2=-5y.\end{cases}$

對稱方程式組

661 所謂對稱方程式組者，即 x, y 之一對方程式內設 x, y 互易仍保持不變者。如下列 (a), (b) 即爲對稱方程式組。

例如，下列 (a) 及 (b) 爲對稱方程式組：

$$(a)\quad \begin{cases}2x^2+2y^2+3x+3y=0,\\ x^2y^2+xy+1=0.\end{cases}\qquad (b)\quad \begin{cases}x^2=2x+3y,\\ y^2=2y+3x.\end{cases}$$

對稱方程式組可分二類，其類似 (a) 者 x, y 互易後，各方程式不變；類似 (b) 者；x, y 互易後二方程式易位。

662 **第一類對稱方程式組.** 其最簡單者爲 $x+y=a$, $xy=b$；可照 § 649 之解法，而下例爲更較對稱之方法。

例. 解
$$x+y=5, \tag{1}$$
$$xy=6. \tag{2}$$
平方 (1),
$$x^2+2xy+y^2=25. \tag{3}$$
以 4 乘 (2),
$$4xy=24. \tag{4}$$
(3) - (4),
$$x^2-2xy+y^2=1. \tag{5}$$
故
$$x-y=1, \tag{6}$$
或
$$x-y=-1. \tag{7}$$
從 (1), (6), $x=3$, $y=2$；從 (1), (7), $x=2$, $y=3$.

663 注意，設更爲繁複之方程式組，則可變各方程式爲含有 $x+y$, 及 xy 之方程式 § 637, 然後再解之以求其函數；或使 $x=u+v$, $y=u-v$, 代入已知方程式內，以解 u, v 之值。因從 $x=u+v$, $y=u-v$ 得 $u=(x+y)/2$, $v=(x-y)/2$, 故第二法與解 $x+y$ 及 $x-y$ 之方程式同樣重要。

例 1. 解
$$2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0, \tag{1}$$
$$x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0. \tag{2}$$
於 (1) 及 (2) 內以 $(x+y)^2-2xy$ 代 x^2+y^2.

集項，
$$2(x+y)^2+xy+(x+y)+1=0, \tag{3}$$
$$(x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0. \tag{4}$$
消去 xy，
$$3(x+y)^2-10(x+y)-8=0. \tag{5}$$
解之，得
$$x+y=4, \tag{6}$$
或
$$x+y=-2/3. \tag{7}$$
故從 (3)，
$$xy=-37, \tag{8}$$
或
$$xy=-11/9. \tag{9}$$
解 (6), (8) 及 (7), (9) 二對，求 x, y，得
$$x, y=2\pm\sqrt{41},\ 2\mp\sqrt{41};\ (-1\pm2\sqrt{3})/3,\ (-1\mp2\sqrt{3})/3.$$
例 2. 解
$$x^4+y^4=97, \tag{1}$$
$$x+y=5. \tag{2}$$
設
$$x=u+v,\ y=u-v.$$
得
$$(u+v)^4+(u-v)^4=97, \tag{3}$$
及
$$2u=5. \tag{4}$$
消去 u，
$$16v^4+600v^2-151=0. \tag{5}$$
解得
$$v=\pm1/2 \text{ 或 } \pm i\sqrt{151}/2. \tag{6}$$
以 $u=5/2$ (4) 及 v 之四值 (6) 代入方程式 $x=u+v, y=u-v$ 得
$$x, y=2,\ 3;\ 3,\ 2;\ (5\pm i\sqrt{151})/2,\ (5\mp i\sqrt{151})/2.$$

設 $x=\alpha, y=\beta$ 爲對稱方程式之一解答，則 $x=\beta, y=\alpha$ 顯然爲其他解答，除非 $\alpha=\beta$，則此二解答不同；但 $x+y$ 及 xy 由 $x=\alpha, y=\beta$，及 $x=\beta, y=\alpha$ 所得值相同，$x-y$ 之對應值卽 $\alpha-\beta$ 及 $\beta-\alpha$ 僅符號上之不同。

故從對稱方程式導出之 xy 或 $x+y$ 之解答數必少於 x 或 y 之解答數，亦卽如例 1，用對稱式所得 xy 或 $x+y$ 之方程式之次數小於從同一對方程式可化得 x 或 y 之方程式之次數。若 c 爲 $x-y$ 之方程式之一根，則 $-c$ 亦必爲其他一根，故此方程式僅含 $x-y$ 之偶次冪如例 2，或僅奇次冪而無常數項。

664 **注意.** 上法用於 x 及 $-y$ 或其他某對 x, y 函數之對稱方程式組. 故 $x^4+y^4=a$, $x-y=b$ 可寫 $x^4+(-y)^4=a$, $x+(-y)=b$.

665 **第二類對稱方程式組.** 此類方程式組有時可如下法解之.

例. 解
$$x^3=7x+3y, \qquad (1)$$
$$y^3=7y+3x. \qquad (2)$$

(1), (2) 相加,
$$x^3+y^3=10(x+y). \qquad (3)$$

(1) 減 (2),
$$x^3-y^3=4(x-y). \qquad (4)$$

從 § 341, (3) 相當於下列二方程式
$$x+y=0, \qquad (5)$$
及
$$x^2-xy+y^2=10. \qquad (6)$$

同理 (4) 相當於下列二方程式
$$x-y=0, \qquad (7)$$
$$x^2+xy+y^2=4. \qquad (8)$$

解 (5), (7); (5), (8); (6), (7); (6), (8) 得 $0, 0$; $2, -2$; $-2, 2$; $\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}$; $(1\pm\sqrt{13})/2$, $(1\mp\sqrt{13})/2$; $(-1\pm\sqrt{13})/2$, $(-1\mp\sqrt{13})/2$.

習題 XLVIII

解下列方程式組:

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy+36=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2=200, \\ x+y=12. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2+y^2=293, \\ xy=34. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2+y^2=85, \\ x-y=7. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^3+y^3=513, \\ x+y=9. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^3+y^3=468, \\ x^2y+xy^2=420. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 27x^3+64y^3=65, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x-y=2. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^5+y^5=32, \\ x+y=2. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x+y=1/2, \\ 56\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+113=0. \end{cases}$
11. $\begin{cases} xy+x+y+19=0, \\ x^2y+xy^2+20=0. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72, \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ 1/x+1/y=3/10. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8, \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x^3=5y, \\ y^3=5x. \end{cases}$

含二個以上未知數之方程式

含三未知數之三個方程式當其一爲二次方程式及他兩各爲一次方程式時，可用二次方程式解之；又當能化其爲一個或數個相當之方程式組，使其一含一二次方程式，其他均爲一次方程式時，亦可由此法解之。含四未知數之四個方程式，亦可用此法，以類推。 666

設 A, B, C 爲 x, y, z 之 m, n, p 次之整函數，且任何二者之中，均無公因式，則方程式 $A=0, B=0, C=0$ 有 mnp 個解答。惟解答中可有無限大者。

例 1. 解
$$z^2-xy-7=0, \tag{1}$$
$$x+y+z=0, \tag{2}$$
$$3x-2y+2z+2=0. \tag{3}$$
解 (2), (3) 使 x 與 y 用 z 表之，
$$x=-(4z+2)/5, \tag{4}$$
$$y=(-z+2)/5. \tag{5}$$
代入 (1)，并化簡之，
$$7z^2+2z-57=0. \tag{6}$$
解 (6)，
$$z=-3 \text{ 或 } 19/7.$$
故從 (4), (5)，
$$x, y, z=2, 1, -3;\ -\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{19}{7}.$$

例 2. 解
$$xy=6, \tag{1}$$
$$yz=12, \tag{2}$$
$$zx=8. \tag{3}$$
以 (1) 除 (2)，
$$z/x=2 \text{ 或 } z=2x. \tag{4}$$
(4) 代入 (3)，
$$x^2=4, \text{ 故 } x=\pm 2. \tag{5}$$
從 (5), (4), (1)，得 $x, y, z=2, 3, 4;\ -2, -3, -4.$

習　題　XLIX

解下列各組方程式：

1. $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=2, \\ x^2-yz=19. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x(y+z)=12, \\ y(z+x)=6, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$　　3. $\begin{cases} (y+b)(z+c)=a^2, \\ (z+c)(x+a)=b^2, \\ (x+a)(y+b)=c^2. \end{cases}$

習 題 L

用本章任何方法,解以下各組方程式:

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x-y=a, \\ xy=(b^2-a^2)/4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{y^2}=a^2+b^2, \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1, \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{y^2}=12. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x+y=a+b, \\ \dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=5, \\ \dfrac{ab}{xy}=2. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4}xy, \\ x-y=\dfrac{3}{4}xy. \end{cases}$

10. $a(x+y)=b(x-y)=xy.$ **11.** $40xy=21(x^2-y^2)=210(x+y).$

12. $\begin{cases} 4x^2-25y^2=0, \\ 2x^2-10y^2-3y=4. \end{cases}$ **13** $\begin{cases} x^2+3xy-9y^2=9, \\ x^2-13xy+21y^2=-9. \end{cases}$

14 $\begin{cases} x^2-7y^2-29=0, \\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3. \end{cases}$ **15** $\begin{cases} x/y+y/x=65/28, \\ 2(x^2+y^2)+(x-y)=34. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2y=a, \\ xy^2=b. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x^2y+xy^2=a, \\ x^2y-xy^2=b. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x=a(x^2+y^2), \\ y=b(x^2+y^2). \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x+y)/(x-y)=5/3, \\ (2x+3y)(3x-2y)=110a^2. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 3(x^3-y^3)=13xy, \\ x-y=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^4+y^4=a^4, \\ x+y=a. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 21(x+y)=10xy, \\ x+y+x^2+y^2=68. \end{cases}$

23 $x^2+y^2=xy=x+y.$ **24** $x^2-xy+y^2=3a^2=x^2-y^2.$

25. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=21, \\ x+\sqrt{xy}+y=7. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 4x^2-3y^2=12(x-y), \\ xy=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y+20, \\ xy+10=2(x+y). \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x^2+4x-3y=0, \\ y^2+10x-9y=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 28(x^5+y^5)=61(x^3+y^3), \\ x+y=2. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} xy-x/y=a, \\ xy-y/x=1/a. \end{cases}$

31. $\begin{cases}(x+1)^3+(y-2)^3=19,\\ x+y=2.\end{cases}$

32. $\begin{cases}x^2+y=8/3,\\ x+y^2=34/9.\end{cases}$

33. $\begin{cases}y^2-xy-yz=3,\\ x+4y+z=14,\\ x-y+2z=0.\end{cases}$

34. $\begin{cases}x+y+z+u=0,\\ 3x+z+u=0,\\ 3y+2z=0,\\ x^2+y^2+zu=5.\end{cases}$

35. $\begin{cases}(y+z)(x+y+z)=10,\\ (z+x)(x+y+z)=20,\\ (x+y)(x+y+z)=20.\end{cases}$

36. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ xy+yz+zx=-1,\\ 2x+y-2z=-3.\end{cases}$

習題 LI

1. 二數之立方差爲 218，其差之立方爲 8，求各數。

2. 二數和之平方較其積大 63，又其立方之差爲 189，問二數各幾何？

3. 一分數，分母分子之和爲 11；又此分數與分子及分母各較原分數大 3 與 4 之另一分數相乘，其積爲 2/3，求此分數。

4. 分 37 爲三部份，其積爲 1440，又其中二者之積較第三者之三倍多 12；求此三部份。

5. 長方形之對角線長 13 尺，若每邊增 2 尺，則面積將增加 38 方尺；每邊幾尺？

6. 直角三角形之周圍爲 36 寸，又面積爲 54 方寸，各邊長度若干？

7. 直角三角形之弦較其他二邊，一長 3 寸，一長 24 寸，求各邊之長。

8. 由下列之條件，求一室之長寬：此室地板之面積爲 224 方尺之長方形，又其二面牆之面積各爲 126 及 144 方尺。

9. 一長方形周圍鑲以寬 5 寸之邊，長方形面積爲 168 方寸，而所鑲面積爲 360 方寸，求長方形之長與寬。

10. A 以 135 元購煤較 B 多得 3 噸. 又 A 購 4 噸較 B 購 5 噸少付 7 元,求各人每噸購價若干?

11 本金若干在某種利率下按單利計算,經一年後,本利和爲 1248 元,若本金增 100 元,利率增 $1\frac{1}{2}$ 倍, 2 年後之本利和爲 1456 元,問本金若干?利率若干?

12 某人遺 60,000 元分給子孫七人,其子共得全部之 $\frac{1}{3}$,每子所得較孫每人多 2,000 元.問子孫各幾人?每人所得若干?

13. 某人用平常速率能使順流划行 15 里,較其回程少 5 小時,若此人倍其速率則順流划行較回程僅少 1 小時,問在靜水中之划行速度,及水流速度.

14. A, B, C 三人合力工作一小時二十分告成,若 C 單獨作之則需 A 所須時間之二倍,而較 B 多需 2 小時,問各人獨作各需幾時?

15. A, B 二物沿周長 20 尺之圓周於同一方向作等速運動, A 轉一周之時間較 B 少二秒又 A 與 B 每分鐘相遇一次,求二物之速率若干?

16. 二直線正交於 O 點,在其上二點 A, B 向 O 作等速之運動; A 現距 O 點 28 吋, B 距 9 吋, 2 秒後 A, B 相距 13 吋,又 3 秒相距 5 吋.問 A 與 B 速率若干?

17. A, B, C 三人同時起行某路程, A 每時行 $4\frac{1}{2}$ 里,且可較 B 先 2 小時行完, B 較 C 每時多行 1 里,可較 C 先 3 小時行完.求此路程之距離.

18. A, B 二信差各從 P, Q 同時相向起行,當相遇時 A 較 B 多行 12 里,相遇後 A 仍用前速向 Q 進行, $4\frac{4}{5}$ 小時後到達,同樣 B 又經 $7\frac{1}{2}$ 小時後到 P.求 P, Q 間距離.

含 x, y 二次方程式之圖形

此種圖形之例. 任何 x, y 之二次方程式之圖形,可用下法求得. 667

例 1. 求 $y^2=4x$ 之圖形. (1)

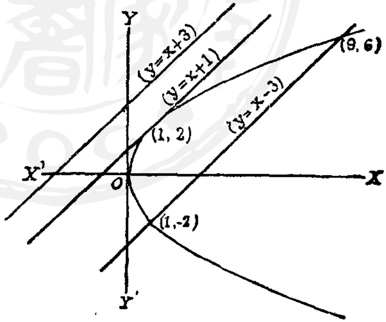
解 y, $$y=\pm 2\sqrt{x}. \quad (2)$$

從 (2) 知 x 為負數時, y 為虛數; x 為 0 時, y 亦為 0; x 為正數時, y 有絕對值相同而符號相反之二實值,故原式之圖形完全在 y-軸之右, 經過原點而與 x-軸對稱.

當	$x=0,$	$1/4,$	$1/2,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4\cdots,$
得	$y=0,$	$\pm 1,$	$\pm\sqrt{2},$	$\pm 2,$	$\pm 2\sqrt{2},$	$\pm 2\sqrt{3},$	$\pm 4\cdots.$

從 $(0, 0)$, $(\frac{1}{4}, 1)$, $(\frac{1}{4}, -1)$, $\cdots$ 諸點, 可作一曲線即如圖形所示之一部分, 參看 § 389 此曲線與 y-軸相切.

此曲線名為抛物線, 含一"無窮支"向右伸展至無限.



例 2. $y^2=4x$ (1) 之圖形與 $y=x-3$ (2), $y=x+1$ (3), $y=x+3$ (4) 相遇於何點?

1. (1), (2) 之解答為 1, −2; 9, 6. 故由 § 386, 如前圖所示 (1), (2) 之圖形交於 $(1, -2)$, $(9, 6)$ 二點.

2. (1), (3) 之兩解答相等, 即 1, 2; 1, 2 是也. 故 (3) 之圖形遇 (1) 之圖形於二重合點 $(1, 2)$ 意即如圖示, (3) 與 (1) 之兩圖形切於 $(1, 2)$.

3. (1), (4) 之解答為虛數, 即 $-1\pm 2\sqrt{2}i$, $2\pm 2\sqrt{2}i$, 故如圖所示, (1), (4) 圖形不相交.

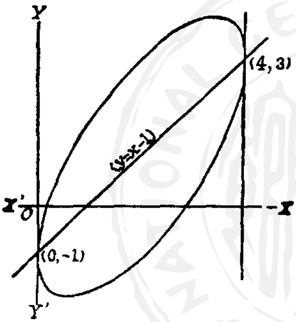
例 3. 求下面圖形

$$y^2-2xy+2x^2-6x+2y+1=0. \tag{1}$$

解 y, 得 $$y=x-1\pm\sqrt{4x-x^2}. \tag{2}$$

y 之值,從 (2) 所示,若根式 $4x-x^2$ 卽 $x(4-x)$ 爲正數 (或 0), 則 y 爲實値; 卽 x 在 0 與 4 之間 (或爲 0 或 4), 故 (1) 之圖形在 $x=0$, $x=4$ 二線之間.

當 $x=0$ 與 $x=4$, 則 y 之値相等.卽當 $x=0$, y 爲 -1, -1; 當 $x=4$, y 爲 3, 3. 此意卽 (1) 的圖與直線 $x=0$ 相切於 $(0,-1)$ 與直線 $x=4$ 切於 $(4,3)$, 參看例 2, 2. 因當 $4x-x^2$ 爲零時 (2) 內 y 之二値相同,如 $y=x-1$ 所示.



以 x 在 0 與 4 間之任一値代入 (2) 可得 y 之二個實値.卽 $x-1$ 加或減 $\sqrt{4x-x^2}$. 故對此中 x 每一値在 (1) 的圖上均有二點. 各點可先畫 $y=x-1$ 之直線,然後將直線上各點之縱坐標增或減 $\sqrt{4x-x^2}$ 卽得.

例如	$x=0$,	1,	2,	3,	4,
得直線之	$y=-1$,	0,	1,	2,	3,
(1) 圖形之	$y=-1$,	$\pm\sqrt{3}$,	1 ± 2,	$2\pm\sqrt{3}$,	3.

圖形成橢圓式,謂之橢圓.

解 (1) 求 x, 且應用 §641 之方法,可知此曲線之最高點及最低點爲 $(2+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ 及 $(2-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.

例 4. 求 $y^2-x^2+2x+2y+4=0$ 之圖形. (1)

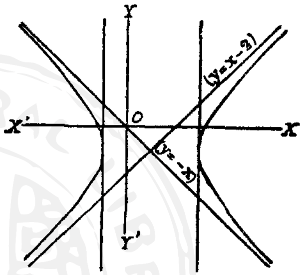
解 y 并析其根式爲因式之積,

$$y=-1\pm\sqrt{(x+1)(x-3)}. \tag{2}$$

當 $x=-1$ 或 $x=3$, 此根式 $(x+1)(x-3)$ 爲零且 (2) 內 y 値相等爲 -1, -1.

意卽 (1) 之圖形切 $x=-1$ 之直線於 $(-1,\ -1)$ 點，切 $x=3$ 之直線於 $(3,\ -1)$ 點。$y=-1$ 之直線爲過二切點之直線。

當 $x<-1$ 或 $x>3$ 時，根式中 $(x+1)(x-3)$ 爲正數。對 x 於此值中之任何一值 y 皆有不同之二値，亦卽 (1) 圖形內有二點。求此諸點，可畫 $y=-1$ 之直線，然後以 $\sqrt{(x+1)(x-3)}$ 之値增減其不變的縱坐標 -1 也。



故 (1) 之圖形含二無窮支，其一與直線 $x=-1$ 相切，而向左方無限伸張，其另一與直線 $x=3$ 相切，而向右方無限伸張，如附圖所示。

此曲線稱爲雙曲線。

有二直線稱謂漸近線者雙曲線之無窮支逐漸與之接近，稱謂在無窮遠處相切。此二直線爲 $y=x-2$ 及 $y=-x$ 兩方程之圖形，吾人求得之如下。比較 § 650，例 1.

由 (1) 及方程式
$$y=mx+c, \tag{3}$$

消去 y，得
$$(m^2-1)x^2+2(mc+m+1)x+(c^2+2c+4)=0. \tag{4}$$

欲 (4) 之二根皆爲無限大，祇須 § 638，

$$m^2-1=0 \text{ 及 } mc+m+1=0,$$

卽
$$m=1,\ c=-2,\ \text{或}\ m=-1,\ c=0.$$

故欲 (1)，(3) 解答皆爲無限大，祇須 (3) 爲下面任何一式。

$$y=x-2 \quad (3') \qquad \text{或} \qquad y=-x \quad (3'')$$

故 (3′) 及 (3″) 之圖形，各與 (1) 之圖形在無窮遠相遇於二重合點。

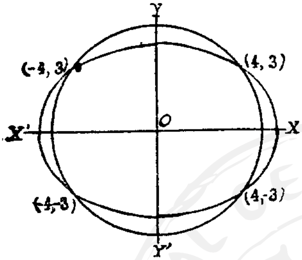
例 5. 求 $y^2-4xy+3x^2+6x-2y=0$ 之圖形。 (1)

解 y，得
$$y=2x+1\pm\sqrt{x^2-2x+1}, \tag{2}$$

卽
$$y=3x \text{ 或 } y=x+2.$$

故 (1) 之圖形由 $y=3x$ 及 $y=x+2$ 二直線組成。除根數爲 0，卽 $x-1=0$ 時外，此方程式常可決定二相異實數之 y。惟當 $x-1=0$ 時，則 y 有二相等之

值，3, 3. 故直線 $x-1=0$ 與 (1) 之圖形在重合點 (1, 3) 相遇二次.惟此若作二者在(1,3)相切之解釋,當爲不可.蓋其意實爲組成(1)之圖形之 $y=3x$ 及 $y=x+2$, 與直線 $x-1=0$ 之二交點相重合也.



例 6. 求下列二方程式之圖形及交點:

$$x^2+y^2=25, \tag{1}$$

$$x^2/16+y^2/9=2. \tag{2}$$

(1) 之圖形爲圓,其中心爲原點, O 半徑爲 5. (2) 之圖形爲橢圓.

此二曲線相交於(4, 3), (−4, 3), (−4, −3), (4, −3) 四點,此諸點卽爲 (1), (2) 之解答.

例 7. 求下列二方程式之圖形及其交點:

$$xy-3y-2=0. \tag{1}$$

$$xy+2y+3=0. \tag{2}$$

從 (1) 得

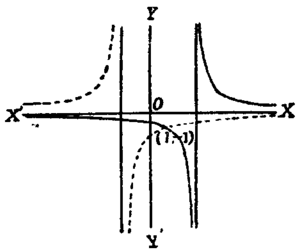
$$y=2/(x-3). \tag{3}$$

對 x 每一實值, y 亦有一實值,故圖形上卽有一點與之對應.

當　$x=-\infty,\ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 2\frac{3}{4},\ \ 3,\ 3\frac{1}{4},\ 4,\ \infty,$

　　$y=0,\ \ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -1,\ -2,\ -8,\ \pm\infty,\ \ 8,\ 2,\ \ 0.$

畫諸解答,得以實線表二無窮支之雙曲線,其漸近線爲 $y=0$(從例 4 求得), 及 $x-3=0$ (因當 $x=3$ 時, $y=\infty$).



仿此,(2) 之圖形爲一雙曲線如虛線所示而有 $y=0$, 與 $x+2=0$ 爲漸近線.

方程式 (1), (2) 祇有 $x=1, y=-1$ 一個解答,其餘三解爲無限大, § 654.

(1),(2)二圖形之雙曲線,相交於(1, −1).

但因其有公共之漸近線 $y=0$, 故認二者在 $(\infty, 0)$ 相交二次, 又因其漸近線 $x-3=0$, 及 $x+2=0$ 互相平行, 故認二者在 $(0, \infty)$ 相交一次.

二次方程式圖形通論. 從前例所得之結果, 吾人可有下列結論. 668

設任何二次方程式有實係數者, 如

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0. \qquad (1)$$

若 b 不等於零, 而解 y 時, 得

$$by=-(hx+f)\pm\sqrt{R}, \qquad (2)$$

其間 $R=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)$.

x 每有一使根數 R 爲正之值, y 即可由 (2) 而得二個實值. 對於此二值, 圖形上有二點與之對應, 可先引直線

$$by=-(hx+f)$$

然後以 $\sqrt{R}/b$ 之值按所設 x 之值增減其縱坐標, 參考 § 667, 例 1, 3, 4.

圖形之形式視 R 之因式之性質而定.

1. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)=0$ 時.

在此情形中根數 R 爲一完全平方 § 635, 而 (1) 之左端可分解爲二一次因式 § 635, 例 3. 若因式有實係數 (1) 之圖形爲二直線. 參看 § 667, 例 5.

2. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)>0$ 時.

在此種情形中, 除 $h^2-ab=0$ 外, 根數 R 可化爲 $R=(h^2-ab)(x-\alpha)(x-\beta)$ (3) 之形式, 此間 α 與 β 爲實數而 $\alpha<\beta$, § 635.

設 $h^2-ab<0$, 則 (3) 之積爲正數, 當且祇當 x 介乎 α 與 β 之間之情形時. 故 (1) 之圖形爲一閉曲線, 介乎 $x-\alpha=0$ 及 $x-\beta=0$ 二直線之間而與之相切. 故爲橢圓 (或圓). 參看 § 667, 例 3.

設 $h^2-ab>0$, 則 (3) 之積爲正數在, 且祇在 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 之情形時. 故圖形含二無窮支; 其一與直線 $x-\alpha=0$ 相切而向左方伸展, 其另一與直線 $x-\beta=0$ 相切而向右方伸展. 故爲雙曲線, 參看 § 667, 例 4.

設 $h^2-ab=0$, 則 $R=2(hf-bg)x+(f^2-bc)$, 其中 $hf-bg \neq 0$, 而 R 在, 且祇在 $x>-(f^2-bc)/2(hf-bg)$ 時爲正. 故圖形由一無窮支而成, 全在直線 $2(hf-bg)x+(f^2-bc)=0$ 之一側, 且與之相切. 此圖形爲一拋物線, 參看 § 667, 例 1.

3. 當 $(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)<0$ 時.

在此情形下, $R=0$ 之二根爲共軛虛數, § 635. 若命之謂 $\lambda+\mu i$ 及 $\lambda-\mu i$, R 得化爲 $R=(h^2-ab)[(x-\lambda)^2+\mu^2]$, (4).

設 $h^2-ab>0$, 無論 x 之值若干, (4) 之積常屬正數. 故 (1) 之圖形由二無窮支而成, 二者分居直線 $by=-(hx+f)$ 之兩側. 故爲雙曲線. $y^2-x^2=1$ 卽其一例.

設 $h^2-ab<0$, 無論 x 之值爲何, (4) 之積常屬負數. 故 (1) 之圖形全無實跡. $x+y^2+1=0$ 卽其一例.

以上之討論皆以 $b \neq 0$ 爲假定, 但若 $b=0$, 而 $a \neq 0$ 則可解 (1) 中之 x 而不解 y, 亦可得相同之結論. 設 $a=0$ 及 $b=0$, 則 (1) 之圖形爲雙曲線如 § 667, 例 7, 或爲一對直線, 一平行於 x 軸, 一平行於 y 軸者.

習題 LII

求下列各方程式之圖形。

1. $y^2=-8x$.　　2. $x^2+y^2=9$.　　3. $(y-x)^2=x$.

4. $x^2+2xy+2y^2=8$.　　5. $y^2-4xy+3x^2+4x=0$.

6 $y^2-2xy+1=0$.　　7. $y^2-2xy-1=0$.

8. $2x^2+3y^2-4x+6y=0$.　　9. $y^2-x^2-3x+y-2=0$.

10. $2x^2+4xy+4y^2+x+4y-5=0$.

11. $4x^2-12xy+9y^2+3x-6y=0$.

求下列各方程組及其交點。

12. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$　　13. $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ x^2-xy+x=0. \end{cases}$　　14. $\begin{cases} x^2+y^2=3, \\ y^2=2x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y^2-xy-2x^2-2x-2y-2=0, \\ y^2-xy-2x^2+2=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-2y)(x+y)+x-3y=0, \\ (x-2y)(x-y)+2x-6y=0. \end{cases}$

17. 求 $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 之圖形及與 x-軸，y-軸之交點.

18. 求證 $(x-y)^2-2(x+y)+1=0$ 之圖形及與 x-軸，y-軸之切點.

19. 試證直線 $y=3x+5$，切 $16x^2+y^2-16=0$ 之圖形於 $(-3/5, 16/5)$ 點。

20. 問 m 爲何值方令直線 $y=mx+3$ 切於 $x^2+2y^2=6$ 之圖形?

21. c 爲何值，則直線 $7x-4y+c=0$ 始能與 $3x^2-y^2+x=0$ 之圖形相切?

22. 證明 $y=0$ 及 $x-2y+1=0$ 二直線爲 $xy-2y^2+y+6=0$ 之圖形之漸近線.

23. 求下列圖形之漸近線:

$$2x^2+3xy-2y^2+x+2y+2=0.$$

24. λ 爲何值，則 $x^2+\lambda xy+y^2=x$ 之圖形始爲橢圓?爲拋物線?爲雙曲線?

XVII. 不等式

669 **單一不等式.** 絕對不等式者,對於所含文字之一切實數值皆能成立如 $x^2+y^2+1>0$ 等是.條件不等式者對於所含文字之一切實數值不能全部成立,而有限制如 $x-1>0$ 等是.

670 不等式計算之原則已見 § 261,從此原則知將某項由一邊移至他邊者變其符號; 或以相同之正數乘不等式之二邊則不等式之符號 $>$ 或 $<$ 仍屬不變.但若兩邊同乘以負數,則符號 $>$ 變爲 $<$;而 $<$ 變爲 $>$ 矣.

例 1. 求證 $$a^2+b^2>2ab.$$

因 $$(a-b)^2>0,$$

卽 $$a^2-2ab+b^2>0,$$

故 $$a^2+b^2>2ab.$$

例 2 求證 $$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

因 $$a^2+b^2>2ab,\ b^2+c^2>2bc,\ c^2+a^2>2ca.$$

以上三不等式左端右端各相加而除以 2 卽得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

例 3. 解不等式 $3x+5>x+11$, 卽求 x 值之限制.

移項 $$2x>6,$$

$$x>3.$$

例 4. 解 $$x^2-2x-3<0.$$

析因式 $$(x+1)(x-3)<0.$$

欲適合此式,二因子必一正一負.故必 $x>-1$ 而 <3, 卽 $-1<x<3$.

671 **聯立不等式.** 一個或數個形式之一組不等式

$$ax+by+c>0$$

可用簡單圖解方法，就變數 x, y 解之，其法基於下列之討論：

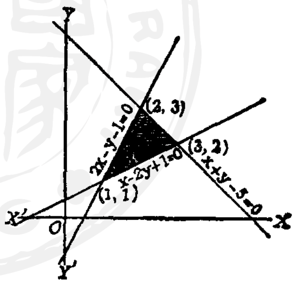
作直線 $ax+by+c=0$, §385, 則對於位在直線一側之圖形其 x, y 之各組值應爲 $ax+by+c>0$, 而對於位在直線他一側之圖形其 x, y 之各組值應爲 $ax+by+c<0$.

使 (x_1, y_1) 爲 $y-(mx+c)=0$ 圖形上之一點，則 $y_1-(mx_1+c)=0$. 又設 $y_2<y_1$, 則 (x_1, y_2) 點在直線下，則得 $y_2-(mx_1+c)<0$；又設 $y_3>y_1$ 則 (x_1, y_3) 在線上，得 $y_3-(mx_1+c)>0$.

例. 解聯立不等式

$$k_1=x-2y+1<0, \quad k_2=x+y-5<0, \quad k_3=2x-y-1>0.$$

先求 $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$, 諸圖形如下：



不等式 $k_2<0$ 適合於位在直線 $k_2=0$ 與原點同側之圖形內 x, y 之數值；因設 $x=0$, $y=0$ 得 $k_2=-5$ 即 <0. 仿此可知不等式 $k_1<0$ 及 $k_3<0$ 皆適合圖形位在直線 $k_1=0$, $k_3=0$, 與原點異側諸組 x, y 之值.

故知位在此三線構成之三角形內的圖形其 x, y 之值，適合於不等式 $k_1<0$, $k_2<0$, 及 $k_3>0$.

習 題 LIII

下列各例內設 a, b, c 諸字母爲不等之正數

1. 證 $a/b+b/a>2$.
2. 證 $(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$.
3. 證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.
4. 證 $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc$.

5. 證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.

6. 解 $x+7>3x/2-8$.

7 解 $2x^2+4x>x^2+6x+8$.

8. 解 $(x+1)(x-3)(x-6)>0$.

9 用圖解法解 $y-x-2<0$, $x-3<0$, $y+1>0$.

10. 再以上法解 $y-x>0$, $y-2x<0$.

11. 再解 $x+y+3>0$, $y-2x-4<0$, $y+2x+4>0$.

12. 證明 $x^2+2x+5>0$ 適合於 x 為任何值.

13. 用圖解法解 $x^2+y^2-1<0$, $y^2-4x<0$.

XVIII. 一次不定方程式

672 **含二變數之單一方程式.** 設有形如

$$ax+by=c$$

之任一方程式內 a, b, c 為整數，且 a, b 無公因數.求一式用以表示適合此方程式的 x, y 之各組整數值；並求表示如是之各組正整數值之式.

673 **定理 1.** 凡上述之方程式 $ax+by=c$ 皆有整數解答.

因 a, b, 為互素數；故用 § 491 所述之法，可求正或負之二整數 p 及 q 能致 $ap+bq=1$, 且 $a(pc)+b(qc)=c$；而此式證明 $x=pc$, $y=qc$ 為 $ax+by=c$ 之整數解答.

674 **定理 2.** 若 $x=x_0$, $y=y_0$ 為方程式 $ax+by=c$ 整數解答之一，則其一切整數解答可用公式

$$x=x_0+bt,\quad y=y_0-at$$

以得之，t 代表一切可能之正整數.

第一，$x=x_0+bt$, $y=y_0-at$ 常爲 $ax+by=c$ (1) 之解答。

因代入 (1)， $a(x_0+bt)+b(y_0-at)=c$,

或，化簡， $ax_0+by_0=c$,

因假定 $x=x_0$, $y=y_0$ 爲 (1) 之一解。

第二，凡 (1) 之整數皆可由 $x=x_0+bt$, $y=y_0-at$ 得之。

因設 $x=x_1$, $y=y_1$, 表任一第二整數解答。

則 $ax_1+by_1=c$ 與 $ax_0+by_0=c$,

相減， $$b(y_1-y_0)=-a(x_1-x_0) \qquad (2)$$

從 (2) 知 b 爲整數 a 及 x_1-x_0 相乘積之因式。故因 b 與 a 爲互素數，b 必含於 x_1-x_0 內，卽爲 x_1-x_0 之因式，§ 492, 1, 若命商爲 t'，卽得

$$x_1-x_0=bt' \text{ 或 } x_1=x_0+bt', \qquad (3)$$

以 (3) 代入 (2) 再化簡，又得

$$y_1=y_0-at. \qquad (4)$$

由 §§673, 674 知上述種類之任何方程式 $ax+by=c$ 皆有 675
無數之整數解。當 a 與 b 之符號相反時，有無數之正數解答。a 與 b 之符號相同時，則僅有有限之正數解答或無正數解答。

例如， $2x+3y=18$ 之一解答爲 $x=3$, $y=4$.

故普通解答爲 $x=3+3t$, $y=4-2t$.

正數解答相當於 $t=-1, 0, 1, 2$, 者爲 $x, y=0, 6; 3, 4; 6, 2; 9, 0$.

從 §647 之定理卽能令人自一特別解答中寫出此方程式之 676
普遍解答。特別解答可由心算求出。例如 $10x+3y=12$ 有一解爲 $x=0$, $y=4$, 用 §673 之指示方法常能求得一特解，用下例之法亦然。

例。 求 $7x+19y=213$ (1) 之整數解答。

解求係數較小之 x 且化簡之，得

$$x=\frac{213-19y}{7}=30-2y+\frac{3-5y}{7} \qquad (2)$$

故如 y 爲整數時 x 亦爲整數，$(3-5y)/7$ 必爲整數，命此整數爲 u，俾 $(3-5y)/7=u$.

則 $$5y+7u=3 \tag{3}$$

用處理 (1) 之法，以處理 (3)，得

$$y=\frac{3-7u}{5}=-u+\frac{3-2u}{5} \tag{4}$$

$(3-2u)/5$ 必爲整數，今命其等於 v.

則 $$2u+5v=3 \tag{5}$$

用處理 (1) 及 (3) 者以處理 (5)，得

$$u=\frac{3-5v}{2}=1-2v+\frac{1-v}{2} \tag{6}$$

當 $v=1$ 時，分數項 $1-v/2$ 等於零而 u 爲整數 -1.

將 $u=-1$ 代入 (4)，得 $y=2$，

將 $y=2$ 代入 (2)，得 $x=25$.

故 (1) 之普通解答爲

$$x=25+19t,\quad y=2-7t.$$

有二正數解答：$x, y=6, 9$；$25, 2$ 相當於 $t=-1$，及 $t=0$.

觀察 (2), (4), (6) 分數項內 y, u, v 之係數適爲求已知係數 7 及 19 之最大公約數時之連續係數，因 7 與 19 無公因數，故最後得餘數或係數 1. 以此法解 a, b 無公因數之任何方程式 $ax+by=c$ 皆爲正確。故以此法解此方程式常可得其解。

但實際上不必演算全部。如已得 (4) 卽可觀出 $u=-1$，能使 $(3-2u)/5$ 成爲整數. 故 $y=2$ 可立卽得出，而 $x=25$ 亦可由 (2) 求得。

677 應注意者方程式 $ax+by=c$ 之有整係數者，其中 a 與 b 有公因數 d 則除 d 亦爲 c 之因數外，不能有整數解。因 x 與 y 若爲整數，d 將爲 $ax+by$ 之因數，亦卽爲 c 之因數也。例如 $4x+6y=7$ 卽無整數解答。

聯立不定方程式. 聯立方程式含有整數係數之三變數者,若有整數解時,可由下例之法求之。 678

例. 求下列方程組之整數解

$$3x+6y-2z=22, \tag{1}$$

$$5x+8y-6z=28. \tag{2}$$

先消去 z 并化簡所得之方程式,

得 $$2x+5y=19. \tag{3}$$

再求 (3) 之普遍解答,如 § 676,

得 $$x=7+5t,\ y=1-2t. \tag{4}$$

復次以 (4) 代入 (1) 并化簡其結果,

得 $$2z-3t=5. \tag{5}$$

復次求 (5) 之普遍解答.

得 $$z=1-3u,\ t=-1-2u. \tag{6}$$

其中 u 指任何整數。

最後將 $t=-1-2u$ 代入 (4) 并化簡.

得 $$x=2-10u,\ y=3+4u,\ z=1-3u, \tag{7}$$

卽爲所求之普遍解答.

唯一之正數解爲 $x=2$, $y=3$, $z=1$, 與 $u=0$ 相應.

注意設含二變數之導來方程式之一如無整數解,則所設之方程式亦無整數解答, § 677.

含四變數之三方程式,亦可用同法處理.

含兩個以上變數之單一方程式. 兩元以上的單一方程式而含整係數者,可用下例之法求其整數解答之公式。 679

例. 求下列方程式之整數解答.

$$5x+8y+19z=50. \tag{1}$$

解之求 x, $$x=10-y-3z-\frac{3y+4z}{5} \tag{2}$$

$(3y+4z)/5$ 須求整數,使之等於 u.

則 $$3y+4z=5u. \tag{3}$$

解之求 y, $$y=u-z+\frac{2u-z}{3}. \tag{4}$$

$(2u-z)/3$ 須爲整數,使之等於 v.

則 $$z=2u-3v. \tag{5}$$

以 (5) 代入 (4), $$y=-u+4v. \tag{6}$$

以 (5) 及 (6) 代入 (2), $$x=10-6u+5v. \tag{7}$$

公式 (5), (6), (7), 其中 u, v 得爲任何整數值,組成所求之普遍解答以 $u=2$, $v=1$ 代入公式 (5), (6), (7) 中,得 (1) 之正整數解,卽爲 $x=3$, $y=2$, $z=1$.

習題 LIV

求下列各方程式或方程組之普遍整數解,及正整數解.

1. $6x-17y=18$.
2. $43x-12y=158$.
3. $16x+39y=1$.
4. $72x+23y=845$.
5. $49x-27y=28$.
6. $47x-97y=501$.
7. $\begin{cases} 2x+5y-8z=27, \\ 3x+2y+z=11. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 5x+2y=42, \\ 3y-7z=2. \end{cases}$
9. $4x+3y=2z+3$.
10. $2x+3y+4z=17$.
11. 求方程式 $3x+7y=1043$ 之正整數解答之個數.
12. 化分數 $41/35$ 成分母爲 5 及 7 之二正分數之和.
13. 一人購牛每頭 7 元又購羊每頭 6 元,共用 110 元,問每種各購若干?
14. 分 23 爲三部分,令其第一部分之三倍,第二部分之二倍及第三部分之五倍之和爲 79. 求此三部分之數.
15. 求以 5, 7, 9 除之而得餘數各爲 4, 6, 8 者之最小數.
16. 分等長之二棒,各爲 250 及 253 等分.設置二棒令其一端排齊,則相距最近之二分格爲何?

XIX. 比及比例　變數法

比與比例

比. 算術及代數中慣將比之一詞 (§ 215) 用爲數目;若 a 與 b 指示任二數,定 a 對 b 之比爲商 a/b (比較 § 216). 680

a 與 b 之比以 a/b 或 $a:b$ 表示之.

在比式 $a:b$ 內, a 稱前項, b 稱後項.

比之性質. 故 $a:b$ 爲分數,而其性質卽分數之性質,由此 681

設以同數乘或除比之兩項,則比值不變.

如 $$a:b=ma:mb=a/n:b/n.$$

又若比之兩項,自乘至同次冪或加以同數,除 $a=b$ 外,則 $a:b$ 之值必變.

設 a, b 及 m 爲正數,如 $a<b$ 則 $a:b$ 之值,於 a, b 同加以 m 後增大,如 $a>b$, 於同加 m 後減小.

因 $$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)},$$

而 $m(b-a)/b(b+m)$ 爲正或負,視 $a<b$ 或 $a>b$ 而定.

比例. 二比 $a:b$ 及 $c:d$ 相等時, a, b, c, d 四數稱謂成比例. 682

此比例可寫爲

$$a/b=c/d \text{ 或 } a:b=c:d \text{ 或 } a:b::c:d$$

讀爲"a 比 b 等於 c 比 d".

比例 $a:b=c:d$ 內, a 及 d 稱謂外項, b 及 c 爲內項,又稱 d 謂 a, b 及 c 之第四比例項.

683 **定理.** 比例式中兩外項之積,等於其兩內項之積.即

若 $a:b=c:d$ 則 $ad=bc$.

因由 $a/b=c/d$, 即 $ad=bc$.

例. 有一比例,其第一,第二及第四項,各爲 1/2, −3 及 5, 求其第三項.

命其第三項爲 x, 則 $1/2:-3=x:5$

故 $5\cdot 1/2=-3\cdot x$,

就 x 解之 $x=-5/6$.

684 反之如二數之積與他二數之積相等, 則無論將此四數如何排列,祇須令一組數爲內項而他組數爲外項,比例常能成立.

因令 $ad=bc$.

以 bd 除兩端,即得 $a/b=c/d$ 故

$$a:b=c:d \quad (1) \qquad 及 \qquad c:d=a:b \quad (2)$$

倣此,依次以 cd, ab, 及 ac 除 $ad=bc$ 之兩端,可得

$$a:c=b:d \quad (3) \qquad 及 \qquad b:d=a:c \quad (4)$$

$$d:b=c:a \quad (5) \qquad 及 \qquad c:a=d:b \quad (6)$$

$$d:c=b:a \quad (7) \qquad 及 \qquad b:a=d:c \quad (8)$$

685 **比例項之易位.** 從 §§ 683, 684 知設 a, b, c, d 列爲 (1)—(8) 之任一種而成比例,則依他種排列亦成比例.

1. 任何比例之兩項可以互換.

如,設 $a:b=c:d$ 則 $b:a=d:c$.

2. 任何比例之兩內項或兩外項可以互換.

如,設 $a:b=c:d$ 則 $a:c=b:d$.

上述變形 1 及 2 各稱謂反比變形及更比變形。

比例之其他正當變形。 686

若已知 $a:b=c:d$, 即可斷言

1. $a+b:b=c+d:d$.　　2. $a-b:b=c-d:d$.

3. $a+b:a-b=c+d:c-d$.　　4. $ma:mb=nc:nd$.

5. $ma:nb=mc:nd$.　　6. $a^n:b^n=c^n:d^n$.

由 1 之外項相乘,及內項相乘得 $ad+bd=bc+bd$, 即 $ad=bc$, 此爲眞確,因 $a:b=c:d$ 也.故變形 1 爲眞.仿此得證變形 2 至 6 皆爲眞確.

將 $a:b=c:d$ 變其形如上述 1, 2, 3 之形式各稱爲合比變形 (Composition) 分比變形 (Division) 及合分比變形 (Composition and division).

例. 解 $x^2+2x+3:x^2-2x-3=2x^2+x-1:2x^2-x+1$.

由 3, $$2x^2:2(2x+3)=4x^2:2(x-1).$$

故 $$x^2=0. \tag{1}$$

或由 4, 5, $$1:2x+3=2:x-1. \tag{2}$$

解 (1) 與 (2) $$x=0,\ 0,\ \text{或}\ -7/3.$$

定理. 連續等比之任一前項比其後項等於諸前項之和比後項之和。 687

如,設 $$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3,$$

則 $$a_1:b_1=a_1+a_2+a_3:b_1+b_2+b_3.$$

因設等比之公値爲 r 則得

$$a_1/b_1=r,\ a_2/b_2=r,\ a_3/b_3=r.$$

故 $$a_1=rb_1,\ a_2=rb_2,\ a_3=rb_3.$$

或,相加, $$a_1+a_2+a_3=r(b_1+b_2+b_3),$$

故 $$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=r=\frac{a_1}{b_1}.$$

例 1.　設 $x:(b-c)yz=y:(c-a)zx=z:(a-b)xy$,

則　　　　　　　　$x^2+y^2+z^2=0$.

因乘第一比各項以 x, 第二比各項以 y, 第三比各項以 z, 然後應用以上原理得,

$$\frac{x^2}{(b-c)xyz}=\frac{y^2}{(c-a)xyz}=\frac{z^2}{(a-b)xyz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{0},$$

則 $x^2+y^2+z^2=0$ 必屬顯然矣.

上例方法頗有助於複雜比例問題之解法.

例 2.　求證設　　　　$a:b=x:y$,

則　　　　$a^3+2b^3:ab^2=x^3+2y^3:xy^2$.

使 $a/b=x/y=r$ 由是 $a=rb$ 及 $x=ry$.

於是　　$(a^3+2b^3)/ab^2=(r^3b^3+2b^3)/rb^3=(r^3+2)/r$,

及　　　$(x^3+2y^3)/xy^2=(r^3y^3+2y^3)/ry^3=(r^3+2)/r$.

688　**連比例.**　設 $a:b=b:c=c:d=\cdots$ 則 $a, b, c, d, \cdots$ 諸數成連比例.

設 a, b, c 三數成連比例, 即 $a:b=b:c$, 則 b 稱謂 a, c, 之比例中項, c 稱謂 a, b 之第三比例項.

設 a, b, c 成連比例, 則 $b^2=ac$.

因 $a:b=b:c$, 故 $b^2=ac$, §683.

習　題　LV

1.　求 15, 24 及 20 之第四比例項; 15 及 24 之第三比例項; $5a^3b^3$ 及 $20ab^3$ 之比例中項; $\sqrt{12}$ 及 $\sqrt{75}$ 之比例中項.

2.　設 $3x-2y=x-5y$, 求 $x:y$; 及 $x+y:x-y$.

3.　設 $2x^2-5xy-3y^2=0$ 求 $x:y$; 及 $y:x$.

4.　設 $ax+by+cz=0$ 及 $a'x+b'y+c'z=0$,

則　　　　$x:y:z=bc'-b'c:ca'-c'a:ab'-a'b$.

5.　設 $a:b=c:d$ 則 $ab+cd$ 爲 a^2+c^2 及 b^2+d^2 之比例中項.

6.　設 $(a^2+b^2)cd=(c^2+d^2)ab$, 則得 $a:b=c:d$ 或 $a:b=d:c$.

7. 設 $a:b=c:d$ 則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{a+b}=\sqrt{c}+\sqrt{d}:\sqrt{c+d}$.

8. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 則 $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^3}$.

9. 設諸數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$; $b_1,b_2,\cdots,b_n$; $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 皆爲正數,則比 $l_1a_1+l_2a_2+\cdots+l_na_n:l_1b_1+l_2b_2+\cdots+l_nb_n$ 之值,介乎 $a_1:b_1$, $a_2:b_2,\cdots,a_n:b_n$ 諸比之最大者與最小者之間.

10. 設 $a-b:k=b-c:l=c-a:m$, 而 a, b, c 不相等則 $k+l+m=0$.

11. 設 $x:mz-ny=y:nx-lz=z:ly-mx$, 則 $lx+my+nz=0$, 又 $x^2+y^2+z^2=0$.

12. 設 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$ 則此三比各等於下比:

$$(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}:(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}$$

13. 用 §686 解下列各方程式:

(1) $\frac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\frac{2x^2+a}{2x^2-a}$.

(2) $\frac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\frac{3x^3-x^2+10x-26}{3x^3-x^2-10x+26}$.

14. 求以 $2:3:5$ 之比分 520 爲三份.

15. A, B 二酒桶貯上下兩種酒之混合物,其混合量之比,在 A 桶中者爲 $3:5$, 在 B 桶中者爲 $3:7$. 今須得上酒 6 加侖下酒 12 加侖之混合物,二桶中各須取出幾加侖?

變　數　法

單獨自變數. 設二變數 x 及 y, 無論其值如何變動而其 689
比不變,則稱 y 隨 x 而變或稱 y 與 x 按比例而變.

即當 $y/x=c$, 或 $y=cx$, 其中 c 指示常數時, y 稱爲隨 x 而變.

記法 $y\propto x$, 即"y 隨 x 而變"之意.

設已知 y 隨 x 而變,即可寫作 $y=cx$; 又設已知 x, y 之一 690
對相當值則可得 c, 於是求出 x 與 y 之關係方程式,由是可算

出 x 為任何值時 y 之相當值。

例. 若 y 隨 x 而變，且 $x=2$ 時，$y=12$，則 $x=20$ 時 y 之值為何？

因 $$y=cx,$$

且由假設 $y=12$ 及 $x=2$ 適合此方程式。

故 $$12=c\cdot 2 \quad 即 \quad c=6.$$

由是 $$y=6x.$$

故當 $x=20$ 時，得 $$y=6\cdot 20=120.$$

691 y 隨 x 自身而變外，亦可隨 x 之某一函數而變，例如 y 可隨 x^2, $x+1$, $1/x$ 等而變。設 y 隨 $1/x$ 而變，則稱 y 隨 x 而反變。

例. 已知 y 為常數與隨 x 反變之一項之和，并知 $x=-1$ 時 $y=1$, $x=1$ 時 $y=5$. 求聯結 x 及 y 之方程式。

依假設，$y=a+b/x$，其中 a, b 為常數。

因此方程式為 $x=-1$, $y=1$ 及 $x=1$, $y=5$ 所適合，故得

$$1=a-b \quad 及 \quad 5=a+b.$$

由是 $a=3$, $b=2$，而所求之方程式為 $y=3+2/x$.

692 **一個以上之自變數.** 使 x 與 y 表各自獨立之二自變數，若另一變數 z 隨積數 xy 而變。因而 $z=cxy$，則稱 z 謂隨 x 及 y 而合變；又若 z 隨商數 x/y 而變，因而 $z=c\cdot x/y$，則稱 z 隨 x 正變而隨 y 反變。

例如，矩形之面積隨其底及高之長而正變；但其高則隨其面積正變而隨其底反變。

693 **定理.** 設 x 為常數時 z 隨 y 而變，y 為常數時，z 隨 x 而變，則 x 及 y 皆變時，z 隨積數 xy 而變。

因任選 x 及 y 之三組值如 x_1, y_1; x_2, y_2; x_1, y_2; 且依 z_1, z_2, z_3 表 z 之相當值，則

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1, \tag{1}$$

$$x_1,\quad y_2,\quad z_3, \tag{2}$$

$$x_2,\quad y_2,\quad z_2, \tag{3}$$

爲三組變數之相當值.

又因,(1) 與 (2) 中之 x 值相同,且按假定對於 x 之任何定值 z 隨 y 而變,故由 § 689 得

$$z_1/y_1=z_3/y_2. \tag{4}$$

仿此,因 y_2 爲 (2) 及 (3) 所公有,得

$$z_3/x_1=z_2/x_2. \tag{5}$$

(4) 及 (5) 相當邊相乘,

$$z_1/x_1y_1=z_2/x_2y_2. \tag{6}$$

故 z 及 xy 之相當值成比例,卽 z 隨 xy 而變, § 689.

習 題 LVI

1. 設 y 隨 x 而變,且 $x=5$ 時 $y=-2$,則 $x=7$ 時 y 之値若何?

2 設 y 隨 x^2 反變,且 $x=2$ 時 $y=1$,則 x 爲何値時 $y=3$?

3. 已知 y 爲常數與隨 x^2 而變之一項之和,幷知 $x=1$ 時 $y=1$, $x=2$ 時 $y=0$,求 x, y 之關係方程式.

4 設 y 隨 x^2 正變,隨 z^3 反變與 $x=-1$ 及 $z=2$ 時 $y=1$,問當 $x=3$ 時及 $z=-1$ 時, y 之值若干?

5. 設 y 隨 x 而正變,證明 x^2-y^2 隨 xy 而變.

6. 設 y 之平方隨 z 之立方而正變, z 隨 x 而反變,試證 xy 隨 x 之平方根反變.

7. 三人作工四星期工資爲 108 元,則五人作工幾星期可得 135 元?

8. 圓盤之體積隨其厚及底面半徑平方而合變,今將厚爲 3 及 2 而半徑爲 24 與 36 之二盤熔化成一盤,其半徑爲 48,則其厚若干?

9. 一高爲 a 之正圓錐體,被截於平行其底之平面,設截面積爲錐底之半時,問錐頂至截面之距離若干?當平面二等分此錐體時,其距錐頂之高爲若干?

XX. 等差級數

[illegible] **等差級數.** 此名爲給與一組得自已知數 a 之數列,連續加一已知數 d, 即形如下式之數列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\cdots,\ a+(n-1)d. \qquad (I)$$

因 d 爲(1)中每二連續數之差,d 稱謂此等差級數之公差。

如 2, 5, 8, 11 爲等差級數,其公差 $d=3$; 又 2, -1, -4, -7 爲等差級數,其公差爲 $d=-3$.

695 **第 n 項.** 注意在(1)之各項,$a, a+d, a+2d, \cdots$ 中,d 之係數,較項數少一.故普通項即第m項爲 $a+(m-1)d$. 若共有 n 項,命末項爲 l, 則得公式,

$$l=a+(n-1)d. \qquad (II)$$

例. 等差級數第七項爲 15, 而第十項爲 21; 求首項 a 及公差 d; 又若共有 20 項,求 l.

$$a+6d=15, \quad a+9d=21.$$

解之求 a 及 d, $\qquad a=3, \quad d=2.$

故 $\qquad l=3+19\cdot 2=41.$

696 **和.** 顯然(1)之末第二項可書 $l-d$, 更前一項則爲 $l-2d$, …首項則爲 $l-(n-1)d$.

故設 S 指(1)諸項之和,則得

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots[a+(n-1)d],$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots[l-(n-1)d].$$

將此兩方程之相當數相加，得 $2S=n(a+l)$ 故

$$S=\frac{n}{2}(a+l). \tag{III}$$

例. 有六項之等差級數 首項爲 5 而公差爲 4，求此級數之和。

因 $n=6$，得 $l=5+5\cdot4=25.$

故 $S=\frac{6}{2}(5+25)=90.$

應用. 等差級數內，設已知 a, l, d, n, S 中之任何三數， 697
則可由公式 (II) 及 (III)，求其他二數。已知數之唯一限制爲 n 必須正整數。

例. 已知 $d=1/2$, $l=3/2$, $S=-15/2$ 求 a 及 n.

代入 (II), (III),
$$\frac{3}{2}=a+\frac{n-1}{2}, \tag{1}$$

$$-\frac{15}{2}=\frac{n}{2}\left(a+\frac{3}{2}\right). \tag{2}$$

消去 a,
$$n^2-7n-30=0. \tag{3}$$

解 (3), $n=10$ 或 $-3.$

$n=-3$ 之値爲不可用. 代 $n=10$ 於(1)，得 $a=-3$. 故 $n=10$, $a=-3$, 及此等差級數爲 $-3,\ -2\frac{1}{2},\ -2,\ -1\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2}.$

等差中項. 設三數成一等差級數，則中間數稱謂他數之等差中項。 698

任二數 a 及 b 之等差中項爲二數和之半。

因設 x 爲 a, b 之等差中項，於是列數 a, x, b 爲等差級數。

由是 $x-a=b-x,$

故 $x=(a+b)/2.$

任何等差級數之中間各項，皆可稱謂首項及末項之等差中項。且常能插入任何數個中項於二已知數 a 及 b 之間。

例. 於 3 與 5 中間插入四等差中項.

此即求一等差級數之中間項，設此級數之 $a=3$, $l=5$, 及 $n=4+2$, 即 6.

代 $l=5$, $a=3$, $n=6$ 入 (II), 得

$$5=3+5d,\ 則\ d=2/5.$$

故所求中項為 $3\frac{2}{5}$, $3\frac{4}{5}$, $4\frac{1}{5}$, $4\frac{3}{5}$.

習　題　LVII

1. 求 (1) 3, 6, 9,…及 (2) -3, $-1\frac{1}{2}$, 0,…之第十二項及首二十項之和.

2. 求 (1) 1, 2, 3…; (2) 1, 3, 5…; 及 (3) 2, 4, 6…至 n 項之和之公式.

3 有 $6r+1$ 形式之數於此，其中 r 指示 0 或正整數；求開首 n 個數之和.

4. 求十項之等差級數，設其第五項為 1, 第八項為 2.

5 於 -1 與 2 之間插入五個等差中項.

6. 已知 $n=16$, $a=0$, $d=4/3$; 求 l 及 S.

7. 已知 $n=7$, $l=-7$, $d=-5/3$; 求 a 及 S.

8. 已知 $n=12$, $a=-5/3$, $l=31\frac{1}{3}$; 求 d 及 S.

9. 已知 $a=2$, $l=-23\frac{1}{2}$, $S=-559$; 求 n 及 d.

10. 已知 $n=7$, $a=3/7$, $S=45$; 求 l 及 d.

11. 已知 $a=4$, $d=1/5$, $l=9$[illegible] 求 n 及 S.

12. 已知 $n=9$, $d=-4$, $S=135$; 求 a 及 l.

13. 已知 $n=10$, $l=-2$, $S=115$; 求 a 及 d.

14. 已知 $d=5$, $l=-47$, $S=-357$; 求 n 及 a.

15. 已知 $a=-10$, $d=7$, $S=20$; 求 n 及 l.

16. 試證若 a^2, b^2, c^2 為等差級數，則 $1/(b+c)$, $1/(c+a)$, $1/(a+b)$ 亦為等差級數.

17. 試證若 n 爲奇數,則任何 n 個連續整數之和得以 n 除盡.

18. 求一等差級數,令其首項爲 1, 又開首三項之和爲其次四項之和之半.

19. 三數成等差級數,其和爲 15, 其平方之和爲 83. 求此三數.

20. 求 9 倍數之一切三位正整數之和.

21. 某人每年儲金 130 元,年利 4% 以單利計算. 11 年後之儲金總額若干?

22 A, B 二人由相距 72 里之處同時相向出發,設 A 之速度每時 4 里, B 於第一時行 2 里,第二時行 $2\frac{1}{2}$ 里,第三時行 3 里,以此類推. 則二人何時何處相遇?

XXI. 等 比 級 數

等比級數. 等比級數命名於已知數 a, 重複乘以已知數 **699**
r 所得之一列數,可寫爲,

$$a,\ ar,\ ar^2, \cdots, ar^{n-1}. \tag{I}$$

r 稱謂等比級數 (I) 之公比,且依 r 之絕對值大於或小於 1, 稱此級數爲遞增級數或遞減級數.

如: 1, 2, 4, 8 及 1, −2, 4, −8 爲遞增級數,其 $r=2$ 及 -2; 而 1, 1/2, 1/4, 1/8 爲遞減級數其 $r=1/2$.

第 n 項. 因 (I) 內各項 r 之指數皆較其項數少 1, 故在 **700**
等比級數中首項爲 a, 公比爲 r 之 n 項,其末項之公式爲

$$l = ar^{n-1}. \tag{II}$$

701 **和.** 使 S 爲等比級數 (I) 之和.

則, $$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1},$$

及 $$rS=\quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

由上式減下式得 $(1-r)S=a-ar^n$ 故

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}. \qquad \text{(III)}$$

此公式用於遞增級數時,可寫成,

$$S=a(r^n-1)/(r-1).$$

從 (II) 得 $rl=ar^n$, 故 (III) 亦可寫爲,

$$S=(a-rl)/(1-r) \text{ 或 } S=(rl-a)/(r-1).$$

例. 求等差級數 $2, -4, 8, -16$ 至八項之 l 及 S.

於此 $a=2,\ r=-2,$ 而 $n=8.$

故依 (II), $l=2(-2)^7=-256,$

又依 (III), $S=2\dfrac{1-(-2)^8}{1-(-2)}=\dfrac{-510}{3}.$

702 **應用.** 設已知等差級數內 a, l, r, n, S 五數中之任何三數,則由公式 (II) 及 (III) 可決定其他二數. 且除已知數爲 a, n, S 或 l, n, S 時外,該二數得用上述方法求出. 若有一未知數爲 n 則其值須用視察法求出;但設已知數有合理之數值時,此事常屬可能,因 n 必爲一正整數也.

例 1. 已知 $r=3, n=6, S=728$; 求 a 及 l.

以已知值代入 (II) 及 (III), 得

$$l=a\cdot 3^5=243a,\ \text{及}\ 728=a\frac{3^6-1}{3-1}=364a.$$

解之,得 $a=2,\quad l=486.$

例 2. 已知 $a=6$, $n=5$, $l=2/27$；求 r 及 S.

由 (II), $2/27=6r^4$, 則 $r^4=1/81$, 卽 $r=\pm 1/3$.

故由 (III) 設 $r=1/3$, 則 $S=6\dfrac{1-(1/3)^5}{1-1/3}=\dfrac{242}{27}$,

$r=-1/3$, 則 $S=6\dfrac{1-(-1/3)^5}{1-(-1/3)}=\dfrac{122}{27}$.

故 $a=6$, $n=5$, 而 $l=2/27$ 之等比級數有二種。

例 3 已知 $a=-3$, $l=-46875$, $S=-39063$ 求 r 及 n. 代入公式 $S=(a-rl)/(1-r)$ 中，§ 701 卽得

$$-39063=\frac{-3+46875r}{1-r},\quad 故\quad r=-5.$$

於是由 (II), $-46875=-3(-5)^{n-1}$, 卽 $(-5)^{n-1}=15625$.

然分解 15625 之因式，得 $15625=5^6=(-5)^6$.

故 $n-1=6$ 卽 $n=7$.

例 4. 已知 $a=3$, $n=5$, $S=93$；求 r 及 l.

由 (III), $93=3\dfrac{1-r^5}{1-r}=3(1+r+r^2+r^3+r^4)$.

故 $r^4+r^3+r^2+r-30=0$.

卽此問題含有解四次方程式之手續；故普通而論，已知 a, n, S 求 r, 必解 $n-1$ 次方程式。但於本問題內可由 § 455 之方法求得 r 之一値爲 2.

將 $r=2$ 代入 (II) 中，得 $l=3\cdot 2^4=48$.

等比中項. 設三數成等比級數，中間之數稱謂他二數之等比中項。 703

任何二數 a 及 b 之等比中項爲其積之平方根。

因設 x 爲 a 與 b 之等比中項，則列數 a, x, b 成等比級數。

故 $x/a=b/x$, 卽 $x=\pm\sqrt{ab}$.

任何等比級數之所有中間項，皆可稱謂首項及末項之等

比中項.在二已知數 a 及 b 中間,可如下例插入任意若干個等比中項.

例. 在 18 及 2/27 之間插入四個等比中項.

此所求者爲 $a=18$, $l=2/27$, $n=4+2=6$ 之等比級數之中間各項.

將已知値代入 (II), 得

$$2/27=18r^5, \text{ 則 } r=1/3.$$

故所求中項爲 6, 2, 2/3, 2/9.

704　**無窮遞減等比級數.** 形如

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots. \tag{1}$$

而項數無窮之式稱謂無窮等比級數.

由公式 (III), 知 (1) 之開首 n 項和爲 $a(1-r^n)/(1-r)$.

設 r 之絕對値小於 1, 則當 n 無限增大時, r^n 漸近於 0 爲其極限, § 724; 故 $a(1-r^n)/(1-r)$ 趨近 $a/(1-r)$ 爲極限.吾人稱此極限爲無窮級數 (1) 之和,故設 S 代表 (1) 之和,則

$$S=\frac{a}{1-r}. \tag{2}$$

例 1. 求 $1+1/2+1/4+1/8+\cdots$ 之和.

此間　　　$a=1$　而　$r=\frac{1}{2}$.

故　　　$S=1/[1-1/2]=2$.

例 2. 求循環小數 0.72323… 之値.

分循環部分爲 $\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots$, 又從 (2), 此無窮級數之和爲 $\frac{0.023}{1-0.01}$ 或 $\frac{23}{990}$, 加非循環部分 0.7, 得已知小數之値爲 $\frac{358}{495}$.

習　題　LVIII

1. 求等比級數 2, −6, 18,… 之第五項及首五項之和.

2. 求等比級數 4, 6, 9,… 之第四項及首六項之和.

3. 求下列無窮等比級數之和：

$$12-6+3-\cdots;\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots;\ \frac{5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots.$$

4. 求下列各循環小數之值：

$$0.341341\cdots;\ 0.0567272\cdots;\ 8.45164516\cdots.$$

5 已知 $a=-0.03$, $r=10$, $n=6$；求 l 及 S.

6 已知 $n=7$, $a=48$, $l=3/4$；求 r 及 S.

7. 已知 $a=1/16$, $r=2$, $l=8$；求 n 及 S.

8. 已知 $n=5$, $r=-3$, $l=81$；求 a 及 S.

9 已知 $a=54$, $r=1/3$, $S=80\frac{1}{3}$；求 n 及 l.

10 已知 $n=4$, $a=-3$, $S=-468$；求 r 及 l.

11. 已知 $a=-9/16$, $l=-16/9$, $S=-781/144$；求 n 及 r.

12. 已知 $n=6$, $r=-2/3$, $S=665/216$；求 a 及 l.

13 已知 $r=3/2$, $l=30\frac{3}{8}$, $S=83\frac{1}{8}$；求 n 及 a.

14 已知 $n=4$, $l=54/25$, $S=544/25$；求 a 及 r.

15 已知 $n=5$, $l=48$, $S=93$；求 a 及 r.

16 求 a^3/b 及 b^3/a 之正等比中項.

17 於 5 及 405 間插入三等比中項.

18. 等比級數之第三項為 3, 第六項為 $-3/8$. 求第七項.

19 求四項之等比級數,設其首末二項,其和為 133, 中二項之和為 70.

20. 求成等比級數的三項,設其和為 7, 其平方和為 91.

21 三數成等差級數,其和為 36, 設於各項各加 1, 4, 43, 則成等比級數. 求三數.

22. 有四數，首三數成等差級數，末三數成等比級數，第一與第四之和為 16, 第二與第三之和為 8, 求四數.

23. 設彈性球從 15 呎之高處落下,如每次反躍之高為落下之高之 2/3, 則在靜止以前,此球所經之距離若干?

XXII. 調和級數

705 **調和級數.** 一列數,其倒數成等差級數者,名曰調和級數.

$$1/a, 1/(a+d), 1/(a+2d), \cdots, 1/[a+(n-1)d].$$

例如, 1, 1/2, 1/3, 1/4 及 3/2, 3/4, 3/6, 3/8 均為調和級數.

例. 設 a, b, c 成調和級數,則 $a:c=a-b:b-c$.

因 $1/a, 1/b, 1/c$ 成等差級數,則

$$1/b-1/a=1/c-1/b.$$

故 $c(a-b)=a(b-c)$, 卽 $a:c=a-b:b-c$.

706 欲求調和級數之任一特殊項,祇須求相當之等差級數中佔同一位置之項,而取其倒數卽是.

例. 求調和級數 3/5, 3/7, 3/9,…之第十項.

由 § 695 相當之等差級數 5/3, 7/3, 9/3,…之第十項為 23/3. 故 3/5, 3/7, 3/9,…之第十項為 3/23.

707 **調和中項.** 設三數成調和級數,則中間數稱為他二數之調和中項.又任何級數之中間項可稱為首末兩項之調和中項.

例 1. 求 a, b 之調和中項.

設其中項為 x, 則 $1/a, 1/x, 1/b$ 成等差級數.

故 $1/x-1/a=1/b-1/x$, 卽 $2/x=1/a+1/b$.

故 $$x=2ab/(a+b).$$

例 2. 求證 a, b 二數之等比中項,亦為其等差中項及調和中項之等比中項.

令 A, G 及 H 表 a, b 之等差,等比,調和等中項.

則 $$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab},\ H=\frac{2ab}{a+b}.$$

故 $$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2.$$

例 3. 若 a 與 b 爲正數,求證 $A>G>H$.

$$A-H=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

故若 $(a-b)^2/2(a+b)$ 爲正數,則 $A>H$.

又因,由例 2, G 之値介乎 A 與 H 之間,故 $A>G>H$.

習 題 LIX

1. 試將調和級數 3/5, 3/7, 1/3, 再續二項.

2. 求 3/4 與 5 之調和中項.

3. 將 10 與 15 之間插入四個調和中項.

4. 調和級數之第二,第四兩項爲 4/5 及 −4. 求第三項.

5. 二數之等差中項爲 4, 調和中項爲 15/4. 求此二數.

6. 二數之等比中項爲 4, 調和中項爲 16/5. 求此二數.

7. 試證若 a, b, c 成調和級數,則 $a/(b+c)$, $b/(c+a)$, $c/(a+b)$ 亦成調和級數.

8. 三數成調和級數.求證若各數減以中項之半,其結果成等比級數.

9. 求證若 x 爲 a 與 b 之調和中項,則 $1/(x-a)+1/(x-b)=1/a+1/b$.

10. 若三角形 ABC 之頂角 C, 其二等分線交底邊 AB 於 D, 其外角之二等分線交 AB 之延長線於 E. 求證 AD, AB, AE 成調和級數.

11. P 點在以 O 爲中心之圓外,由 P 所引之二切線,與圓相切於 T 及 T'. 若直線 PO 交圓於 A 及 B 又交 TT' 於 C, 試示 PC 爲 PA 及 PB 之調和中項.

XXIII. 遞差法 高階等差級數 插入法

高階等差級數

708 **各階遞差.** 任何數列中，若由各項減去其前一項，卽得一列之數，稱為該數列之一階差，仿此又可得該數列之二階差，餘類推。

例如，有數列 $1^3, 2^3, 3^3\cdots$，則

該數列卽	1, 8, 27, 64, 125, 216,⋯,
一階差	7, 19, 37, 61, 91, ⋯,
二階差	12, 18, 24, 30, ⋯,
三階差	6, 6, 6, ⋯.

四階差及以後者皆為 0.

709 **r 階等差級數.** 此名用於 r 階差完全相等之數列，故其以後階差皆為 0.

故 $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \cdots$ 為三階等差級數，因第三階差皆相等也.

普通等差級數（§ 694）為一階，其第一階差為公差 d.

710 **r 階等差級數之 n 項.** 有一 r 階等差級數，

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\cdots, \tag{1}$$

設 $d_1, d_2,\cdots, d_r$ 為各階差之首項。今欲得一以 $a_1, d_1, d_2,\cdots, d_r$ 及 n 表 a_n 之公式.

(1) 之一階差，

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ a_4-a_3,\cdots,\ a_{n+1}-a_n\cdots. \tag{2}$$

(2) 之首項爲 d_1, 又因 (2) 之一階差爲 (1) 之二階差，餘類推；故 (2) 的一，二，…階差之首項爲 $d_2, d_3\cdots$。

故當表示 (1) 內求得任一特項之式後，即能用此法導出 (2) 內相當項之式：

以　　$d_1,\ d_2,\ d_3\cdots$ 易 $a_1,\ d_1,\ d_2,\cdots$.　　(3)

因 $d_1=a_2-a_1$, 得 $a_2=a_1+d_1$. 以求 a_2 之公式爲始，可算出 $a_3, a_4,\cdots$ 如下：

$$
\begin{array}{ll}
\text{因} & a_2=a_1+\ d_1 \\
\text{故由 (3),} & \underline{a_3-a_2=\qquad d_1+\ d_2} \\
\text{相加,} & a_3=a_1+2d_1+\ d_2 \\
\text{由 (3),} & \underline{a_4-a_3=\qquad d_1+2d_2+d_3} \\
\text{相加,} & a_4=a_1+3d_1+3d_2+d_3
\end{array}
$$

繼續相加，其係數的尋求，則如 § 311 所示以求 $a+b$ 之累次冪之係數相同，故用 § 561, 得公式

$$
a_n=a_1+(n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots r}d_r. \qquad \text{(I)}
$$

例. 由此公式 (I) 求 $1^3,\ 2^3,\ 3^3,\cdots$ 之第十五項.

由 § 708,　$a_1=1,\ d_1=7,\ d_2=12,\ d_3=d_r=6.$

故　$a_{15}=1+14\cdot 7+\frac{14\cdot 13}{2}\cdot 12+\frac{14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3}\cdot 6=3375.$

r 階等差級數開首 n 項之和. 設 S_n 爲其和，數列爲　**711**

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\cdots \qquad (1)$$

而 $d_1, d_2,\cdots, d_r$ 之意義同 § 710.

從以 (1) 爲一階差之數列:

$$0,\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+{}_3,\cdots,\ a_1+a_2+\cdots+a_n,\cdots. \qquad (2)$$

則 S_n 爲 (2) 之第 $n+1$ 項,又因 (2) 爲 $r+1$ 階等差級數,其首項爲 0,其各階差之首項爲 $a_1, d_1, d_2, d_3, \cdots, d_r$,由 (I),得

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots(r+1)}d_r. \qquad \text{(II)}$$

例。 求 $1^3, 2^3, 3^3, \cdots$ 首十五項之和。

於 § 708, $n=15,\ a_1=1,\ d_1=7,\ d_2=12,\ d_3=d_r=6.$

故 $$S_{15}=15+\frac{15\cdot 14}{2}\cdot 7+\frac{15\cdot 14\cdot 13}{2\cdot 3}\cdot 12+\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6=14400.$$

712 **彈積. 1. 彈積之形爲三角錐形時,求彈丸之數。**

最上一粒,第二層有 $1+2$ 粒,第三層有 $1+2+3$ 粒,餘類推。

若有 n 層,彈丸之數爲數列 $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$ 之 n 項之和。

此數列之一階差爲 $2, 3, 4, 5, \cdots$, 二階差爲 $1, 1, 1, \cdots$.

故 $1, 3, 6, \cdots$ 爲二階等差級數,而 $a_1=1,\ d_1=2,\ d_2=1.$

故由 (II), $$S_n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

故二十層彈積爲 $20\cdot 21\cdot 22/6=1540$ 粒。

2. 求底爲正方形之角錐時彈丸之數。

列舉各層彈丸之數, $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots$.

其一階差爲 $3, 5, 7, \cdots$, 二階差爲 $2, 2, \cdots$.

故 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$ 爲二階等差級數,而 $a_1=1,\ d_1=3,\ d_2=2.$

故由 (II), $$S_n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

如當 $n=20$, 此彈積含 $20\cdot 21\cdot 41/6=2870$ 粒。

3. 設底爲長方形，其頂層爲 p 粒，求彈積之粒數。

列舉各層粒數，得數列 $p,\ 2(p+1),\ 3(p+2),\ 4(p+3),\cdots$.

一階差爲 $p+2,\ p+4,\ p+6,\cdots$, 二階差爲 $2,\ 2,\cdots$.

故 $p,\ 2(p+1),\ 3(p+2),\cdots$ 爲二階等差級數，其中 $a_1=p,\ d_1=p+2,\ d_2=2$.

故由 (II), $$S_n=np+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(p+2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2$$

$$=\frac{n(n+1)(3p+2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

故當 $n=20,\ p=5$, 彈丸數爲 $20\cdot 21\cdot 53/6=3710$ 粒。

關於等差級數之定理. 觀察 r 階等差級數第 n 項之公 **713**
式，設將 § 710, (I) 中之積乘出，且依 n 之降冪排列，§ 710, (I) 可化爲下式：

$$a_n=b_0n^r+b_1n^{r-1}+\cdots+b_r,$$

其中係數 $b_0,\ b_1,\cdots,\ b_r$ 與 n 無關。

故如當 $r=2$, 得

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2$$

$$=\frac{d_2}{2}n^2+\left(d_1-\frac{3}{2}d_2\right)n+(a_1-d_1+d_2).$$

故任何 r 階等差級數之諸項爲 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ 各值時之某多項式 $b_0n^r+b_1n^{r-1}+\cdots+b_r$, 其中 n 之次數爲 r. 今證明其逆定理如下：

714 **定理.** 設 $\phi(x)$ 代表任一 r 次有理整函數,如

$$\phi(x)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots+b_r,$$

則於 $\phi(x)$ 中依次置 $x=1, 2, 3,\cdots$ 所得之數列 $\phi(1), \phi(2), \phi(3),$ $\cdots$ 爲 r 階等差級數.

已知之數列爲

$$\phi(1),\ \phi(2),\ \phi(3),\ \phi(4),\cdots, \tag{1}$$

而求證其 r 階差皆相等.

顯然 (1) 之一階差,即

$$\phi(2)-\phi(1),\ \phi(3)-\phi(2),\ \phi(4)-\phi(3)\cdots, \tag{2}$$

爲 $x=1, 2, 3,\cdots$ 時 $\phi(x+1)-\phi(x)$ 之諸值.

但 $\phi(x+1)-\phi(x)$ 可變爲 x 之多項式,名此多項式爲 $\phi_1(x)$. 其次數爲 $r-1$.

由二項定理 (§ 561), 得

$$\begin{aligned}\phi(x+1)-\phi(x)&=b_0(x+1)^r+b_1(x+1)^{r-1}+\cdots-(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots)\\&=b_0x^r+rb_0x^{r-1}+\cdots+b_1x^{r-1}+\cdots-(b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots)\\&=rb_0x^{r-1}+\cdots.\end{aligned}$$

仿此,設

$$\phi_1(x+1)-\phi_1(x)=\phi_2(x),\ \ \phi_2(x+1)-\phi_2(x)=\phi_3(x),$$

餘類推,則在 $x=1, 2, 3,\cdots$ 時 $\phi_2(x), \phi_3(x),\cdots\phi_r(x)$ 之値爲(1)之二,三,$\cdots r$ 階差.

但 $\phi_r(x)$ 爲常數,故 (1) 之 r 階差相等.因 $\phi_2(x)$ 之次數爲 $(r-1)-1$, 即 $r-2$; $\phi_3(x)$ 之次數爲 $r-3$; 最後 $\phi_r(x)$ 之次數爲 $r-r$ 即 0.

例如,設 $\phi(x)=2x^3-x+1$, 得,

$$\phi_1(x)=2(x+1)^3-(x+1)+1-(2x^3-x+1)=6x^2+6x+1,$$

$$\phi_2(x)=6(x+1)^2+6(x+1)+1-(6x^2+6x+1)=12x+12,$$

$$\phi_3(x)=12(x+1)+12-(12x+12)=12.$$

故 $x=1, 2, 3, \cdots$ 時, $6x^2+6x+1, 12x+12, 12$ 之值爲 $2x^3-x+1$ 之相當值之一,二,三階差而第三階差皆相等,卽皆爲 12.

例如,在 $x=1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 時

$$2x^3-x+1=2,\ 15,\ 52,\ 125,\ 246,\cdots, \tag{1}$$

$$6x^2+6x+1=13,\ 37,\ 73,\ 121,\ 181,\cdots, \tag{2}$$

$$12x+12=24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 72,\cdots, \tag{3}$$

$$12=12,\ 12,\ 12,\ 12,\ 12,\cdots. \tag{4}$$

比較 (1), (2), (3), (4), 知 (2), (3), (4) 係 (1) 之一,二,三階差.

系 1. 連續整數之 r 次乘冪必成 r 階等差級數. **715**

因 $1^r, 2^r, 3^r, \cdots$ 爲 $x=1, 2, 3, \cdots$ 時, r 次有理整函數 $\phi(x)=x^r$ 之值.

系 2. r 次及 s 次二等差級數相當項之積成 $(r+s)$ 次之等差級數. **716**

因 r 次及 s 次兩有理整函數之積爲 $(r+s)$ 次之有理整函數.

習題 LX

1. 求數列 $1, 2, 4, 7, \cdots$ 之第二十項及首二十項之和.

2. 求數列 $3, 8, 15, 24, 35, \cdots$ 之第八十項及首八十項之和.

3. 下列等差級數屬於何階:

(1) $3, 0, -1, 0, 3, \cdots$; (2) $10, 38, 88, 166, 278, 430, \cdots$;

(3) $285, 204, 140, 91, 55, \cdots$; (4) $2, 20, 90, 272, 650, 1332, \cdots$.

又求 (1) 之第十八項, (2) 之第二十項, (3) 之第十二項及 (4) 之第十項.

4. $1\cdot2\cdot3, 2\cdot3\cdot4, 3\cdot4\cdot5, \cdots$ 爲何階? 第 n 項爲何數? 首 n 項之和爲若干?

又 $1\cdot4\cdot2^2, 2\cdot6\cdot3^2, 3\cdot8\cdot4^2, \cdots$ 爲何階? 第 n 項爲何數?

5. 求十四層之三角錐形彈積中之彈丸數，最下層有彈丸幾粒？

6. 設從十五層之正方形彈積內撤去六層，問餘彈若干？

7. 最上層有 5 個彈丸之十二層矩形彈積，共有彈丸幾個？

8. 最下層有彈丸 253 個之三角錐形彈積，共有彈丸幾個？

9. 三角錐形彈積與正方形彈積層數相同，而前者彈丸之數為後者彈丸數之 $\frac{4}{7}$. 各有彈丸幾個？

10. 最上層有 9 粒，最下層有 240 粒之矩形彈積，共有彈丸若干？

11. 證明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

12. 證明 $1^4+2^4+\cdots+n^4=\dfrac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

13. 級數之次數及首 n 項之和為何？設其第 n 項為 n^2-n+1？為 $n(n+1)\times(n+2)/6$？

14. 若將 $d=1, 2, 3, \cdots$ 之各個一階等差級數書出，再求各個級數之一，二，三，四，…項之和，則得

$$1, 3, 6, 10, \cdots; 1, 4, 9, 16, \cdots; 1, 5, 12, 22, \cdots; \cdots$$

諸數列，各稱為三角數，四角數，五角數，…。

求證此諸數列中之第 k 個，其第 n 項及首 n 項之和，各為 $n(kn-k+2)/2$ 及 $n(n+1)(kn-k+3)/6$.

15. 任何階之等差級數，其各項加以他一低階等差級數之相當項時，證明其仍屬原階.

16. 設 n 次多項式 $f(x)$ 內，次第代 x 以一階等差級數中之各項，即得 n 階等差級數，普通言之，設代 x 以任何 r 階等差級數之各連續項，求證其所得為 nr 階等差級數.

插　入　法

插入法. 設 y 之值隨 x 而定，且 y 對 x 在 a 與 b 間每一值有一定值. 又設 y 之諸值相當於此種 x 值中之某數值，確爲已知；則由此諸已知值，應用所謂插入法得導出 y 之值相當於 x 在 a 與 b 間之他值. 717

當 x 表 y 之公式未知時，或雖知之，而其式過於複雜，不便用以計算 y 之特殊值時，卽可應用此法.

簡述之，其法如下，設 y 等於最簡單之 x 整式，而能適於已知各值者，然後由此方程式導出所求之 y 值. 惟此法求得之值僅爲其近似值也.

待定係數法. 如下例： 718

例. 在 $x=2, 3, 4, 5$, 已知 $y=5, 4, -7, -34$; 則 $x=5/2$ 時求 y 之值.

因 x 之最簡多項式，對於 x 之四已知值，能取已知值者通常爲三次，故假定

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3,$$

然後求 b_0, b_1, b_2, b_3 如下：

因 $x=2$ 時，$y=5$，$\therefore\quad 5=b_0+2b_1+4b_2+8b_3$;

因 $x=3$ 時，$y=4$，$\therefore\quad 4=b_0+3b_1+9b_2+27b_3$;

因 $x=4$ 時，$y=-7$，$\therefore\quad -7=b_0+4b_1+16b_2+64b_3$;

因 $x=5$ 時，$y=-34$，$\therefore\quad -34=b_0+5b_1+25b_2+125b_3$.

解上面方程式，$b_0=1$, $b_1=-2$, $b_2=4$, $b_3=-1$.

故
$$y=1-2x+4x^2-x^3.$$

故當 $x=5/2$ 時，得　$y=1-5+25-125/8=43/8$.

一般言之，設 y 有 $r+1$ 個值爲已知，即 y 相當於 $x=x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}$ 之各值爲 $y=y_1, y_2, \cdots, y_{r+1}$，即假定

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_rx^r, \tag{1}$$

用上法求 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_r$，於是當 x 介乎 $x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}$ 間之各值時，y 之值可以 (1) 爲公式而算出。

719 **遞差法。** 當 $x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}$ 爲連續整數時，§ 718 公式(1)可變爲

$$y=y_1+(x-x_1)d_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{1\cdot 2}d^2+\cdots$$
$$+\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_r)}{1\cdot 2\cdots r}d_r, \tag{2}$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 指 $y_1, y_2, \cdots, y_{r+1}$ 之依次各階差之首項。

因 $x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}$ 爲連續整數，故 $b_0+b_1x+\cdots+b_rx^r$ 之相當值，即 $y_1, y_2, \cdots, y_{r+1}$ 成 r 階等差級數，§ 714. 故 $y_1, y_2, \cdots$ 亦可由 $n=1, 2, \cdots$ 代入 § 710, 公式 (I) 求得之，即

$$y=y_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots r}d_r.$$

然在此公式中，使 $n=1, 2, 3, \cdots$ 所得之結果，常相同於 (2) 使 $x=x_1, x_2, x_3, \cdots=x_1, x_1+1, x_1+2, \cdots$.

由 (2) 之右邊與 (1) 之右邊 (§ 718)，對於 $r+1$ 個 x 之值相等．然二者皆爲 r 次．故二者恆等，§ 421.

例如，§ 718 中，對於 $x=2, 3, 4, 5$ 時，命 $y=5, 4, -7, -34$. 則

$y_1, y_2, y_3, y_4=5, 4, -7, -34.$	
一階差	$-1, -11, -27.$
二階差	$-10, -16.$
三階差	$-6.$

以 $x_1=2, x_2=3, x_3=4, y_1=5, d_1=-1, d_2=-10, d_3=-6$ 代入 (2)，得 $y=5-(x-2)-5(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x-4)$，可變爲 $y=1-2x+4x^2-x^3$，如 § 718.

例．已知 $\sqrt[3]{30}=3.1072$, $\sqrt[3]{31}=3.1414$, $\sqrt[3]{32}=3.1748$ 及 $\sqrt[3]{33}=3.2075$；求 $\sqrt[3]{31.6}$.

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4=$	$3.1072,\ 3.1414,\ 3.1748,\ 3.2075.$
一階差	$0.0342,\ 0.0334,\ 0.0327.$
二階差	$-0.0008,\ -.0007.$
三階差	$0.0001.$

以 $x_1=30$, $x_2=31$, $x_3=32$, $y_1=3.1072$, $d_1=0.0342$, $d_2=-0.0008$, $d_3=0.0001$ 及 $x=31.6$ 代入 (2)，得

$$3.1072+(1.6)(0.0342)+\frac{(1.6)(0.6)}{2}(-0.0008)+\frac{(1.6)(0.6)(-0.4)}{2\cdot 3}(0.0001)$$

$$=3.1072+0.05472-0.000384-0.0000064=3.1615+.$$

拉格蘭其氏公式． §718 公式 (1) 可變爲下式，蓋爲拉格蘭其 (Lagrange) 氏所發明． 720

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{r+1})}$$

$$+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})}$$

$$+\cdots+y_{r+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)}. \tag{3}$$

因 (3) 之右邊爲 x 之 r 次整函數，且當 $x=x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}$ 時之値爲 $y_1, y_2, \cdots, y_{r+1}$. 故使 $x=x_1$, 除首項外，他項皆爲零而首項變爲 y_1. 故 (3) 之右邊與 (1) 之右邊 (§ 718) 對於 $r+1$ 個之値相等，故二者恆等，§ 421.

故如 § 718, 因 $x=2, 3, 4, 5$, 使 $y=5, 4, -7, -34$. 代入 (3)，得

$$y=5\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)}$$

$$+4\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)}-7\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)}-34\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)},$$

此式可化爲 $y=1-2x+4x^2-x^3$, 如 § 718.

習 題 LXI

1. $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0$ 時,已知 $y=-20,\ 6,\ 0,\ 4$; 求 $x=-5/2$ 時及 $x=-1/2$ 時, y 之值若干?

2. 已知 $f(4)=10,\ f(6)=-12,\ f(7)=-20,\ f(8)=-18$; 試求 $f(x)$ 然後計算 $f(12)$.

3. 已知 $25^2=625,\ 26^2=676,\ 27^2=729$; 用遞差法求 26.54^2.

4. 已知 $2^3=8,\ 3^3=27,\ 4^3=64,\ 5^3=125$; 用遞差法求 4.8^3.

5. 已知 $1/22=0.04546,\ 1/23=0.04348,\ 1/24=0.04167,\ 1/25=0.04$; 用遞差法求 $1/23.6$.

6. 已知 $\sqrt{432}=20.7846,\ \sqrt{433}=20.8087,\ \sqrt{434}=20.8327,\ \sqrt{435}=20.8566,\ \sqrt{436}=20.8806$; 用遞差法求 $\sqrt{435.7}$.

7. 用拉格蘭其氏公式,求三次多項式,已知其對於 $x=-2,\ 0,\ 4,\ 5$ 之值為 $5,\ 3,\ -2,\ -4$.

XXIV. 對 數

指數之初步定理

721 **定理 1.** 若 a 爲大於 1 之任何實數,而 p, q 爲正整數,則 $a^{\frac{p}{q}}>1$.

因 $a>1$, $\therefore\ a^p>1$, $\therefore\ \sqrt[q]{a^p}>1$, $\therefore\ a^{\frac{p}{q}}>1$, § 261.

722 **定理 2.** 若 a 爲大於 1 之任何實數, r, s 爲任何二有理數如 $r>s$, 則 $a^r>a^s$.

因 $r-s>0$, $\therefore\ a^{r-s}>1$, $\therefore\ a^{r-s}a^s>a^s$, $\therefore\ a^r>a^s$, §§ 721, 261.

723 **定理 3.** 若 $a>1$, n 爲整數,則 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^n=\infty$.

因 $a>1$, 可書作 $a=1+d$, 其中 d 爲正數.

則 $a^n=(1+d)^n$, 又因 $(1+d)^n>1+nd$, § 561, 故得 $a^n>1+nd$.

因 $\lim\limits_{n \doteq \infty}(1+nd)=\infty$, 故得 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^n=\infty$.

定理 4. 若 $0<a<1$, 而 n 爲整數, 則 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^n=0$. **724**

因令 $a=1/b$, 其中 $b>1$, 因 $a<1$.

則因 $\lim\limits_{n \doteq \infty} b^n=\infty$, § 723, 故 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^n=1/\lim\limits_{n \doteq \infty} b^n=0$, § 512.

定理 5 若 n 爲整數, 則 $\lim\limits_{n \doteq \infty} \sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n \doteq \infty} a^{\frac{1}{n}}=1$. **725**

1. $a>1$ 時, $a^{\frac{1}{n}}>1$, § 721, 因而 $a^{\frac{1}{n}}=1+d_n$, 其中 d_n 爲一正數, 其値由 n 而定.

則 $a=(1+d_n)^n$, $\therefore a>1+nd_n$, $\therefore d_n<(a-1)/n$.

故因 $\lim\limits_{n \doteq \infty}(a-1)/n=0$, § 512, 得 $\lim\limits_{n \doteq \infty} d_n=0$.

而 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n \doteq \infty}(1+d_n)=1$.

2. $0<a<1$ 時, 令 $a=1/b$, 其中 $b>1$, 因 $a<1$.

則由 1, $\lim\limits_{n \doteq \infty} b^{\frac{1}{n}}=1$, 故 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^{\frac{1}{n}}=1/\lim\limits_{n \doteq \infty} b^{\frac{1}{n}}=1$.

定理 6. 若 b 爲有理數, x 爲經歷有理數, 而漸近於 b 之變數, 則 $\lim\limits_{n \doteq b} a^x=a^b$. **726**

1. 此定理適於 x 之極限 b 爲 0 時.

因在此時可選定一變數 n, 此變數僅取整數値, 且如此永遠可使 $-1/n<x<1/n$, 又當 $x \doteq 0$ 時, $n=\infty$.

則 a^x 常在 $a^{\frac{1}{n}}$ 與 $a^{-\frac{1}{n}}$ 之間; § 722, 然 $\lim\limits_{n \doteq \infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n \doteq \infty} a^{-\frac{1}{n}}=1$, § 725, 故 $\lim\limits_{x \doteq 0} a^x=1=a^0$.

2. $b \neq 0$ 時, 此定理亦眞.

因 $a^x=a^b \cdot a^{x-b}$, 由 1, $\lim\limits_{x \doteq b} a^x=a^b \cdot \lim\limits_{x \doteq b} a^{x-b}=a^b$.

定理 7 若 b 爲無理數而 x 爲經歷有理數, 而漸近於 b 之變數, 則 $x \doteq b$ 時, a^x 漸近於一極限, 其値與 x 漸近於 b 時所取之値無關. **727**

無論 $a>1$ 或 $a<1$ 之理皆同, 但先假定 $a>1$.

x 於漸近於 b 爲極限時, 可有無限組有理數値, 爲其經歷. 在其中選一遞增數列, 設 x 依此數列變化時, 以 x' 表之. 則 $x' \doteq b$ 時, 變數 $a^{x'}$ 繼續增大, § 772,

然常取有限値，例如小於 a^c，設 c 表大於 b 之任何有限數，故 $a^{x'}$ 漸近於一極限，§192，稱之謂 L.

今僅欲證明設 x 經過 x' 所經過外之另一有理數列時，a^x 將漸近於同一極限 L. 但 $a^x = a^{x'} \cdot a^{x-x'}$，故 $\lim a^x = \lim a^{x'} \cdot \lim a^{x-x'} = L$，因 $\lim a^{x-x'} = 1$，§726.

728 **無理指數.** 使 x 經歷任何有理數値之列，以漸近於 b，a^x 所漸近之極限，吾人以符號 a^b 表之. 故 b 爲無理數時，a^b 爲 $\lim\limits_{x \doteq b} a^x$.

729 當 x 爲無理數時，a^x 之意義已如前指定，可即證明當 x 經一無理數列而漸近於 b 時，$\lim\limits_{x \doteq b} a^x = a^b$.

因設 x', x, x'' 表示三變數，漸近於極限 b，x' 及 x'' 經歷有理數列，x 經歷無理數列，且 $x' < x < x''$. 於是由 §§726, 727 知 a^x 在 $a^{x'}$ 及 $a^{x''}$ 之間，且因 $\lim\limits_{x' \doteq b} a^{x'} = \lim\limits_{x'' \doteq b} a^{x''} = a^b$，故 $\lim\limits_{x \doteq b} a^x = a^b$.

730 **定理 8.** 指數定律亦可應用於無理指數.

因設 b, c 表無理數，x, y 各表漸近於極限 b 和 c 之二變數. 設 x 及 y 僅取有理値

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

因 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$，得 $\lim a^x a^y = \lim a^{x+y}$.

但 $$\lim a^x a^y = \lim a^x \cdot \lim a^y = a^b a^c, \qquad §§203, 728$$

又 $$\lim a^{x+y} = a^{\lim(x+y)} = a^{b+c}. \qquad §§203, 728$$

2. $(a^b)^c = a^{bc}$.

因 $$(a^x)^y = a^{xy}.$$

故 $$\lim_{x \doteq b}(a^x)^y = \lim_{x \doteq b} a^{xy}，\text{或 } (a^b)^y = a^{by}. \qquad §728$$

故 $$\lim_{y \doteq c}(a^b)^y = \lim_{y \doteq c} a^{by}，\text{或 } (a^b)^c = a^{bc}. \qquad §§728, 729$$

3. $(ab)^c = a^c b^c$.

因 $$(ab)^y = a^y b^y.$$

故 $$\lim (ab)^y = \lim a^y b^y = \lim a^y \cdot \lim b^y. \qquad §203$$

即 $$(ab)^c = a^c b^c. \qquad §728$$

對數　對數之通性

對數. 以 a 爲底數，此間 a 字包括 1 以外之任何正數，731
則 a 之各實數冪如 a^{μ}，表一有限正數，如 m. 下節內擬反證任一實數，m 可取 a^{μ} 代表之.

設 $a^{\mu}=m$，則稱 μ 爲 m 以 a 爲底之對數，且以符號 $\log_a m$ 表之，故 m 之 a 底對數爲將 a 增次以等於 m 所需之冪指數，亦卽 $a^{\log_a m}=m$. 732

例如，$3^4=81$，$\therefore\ 4=\log_3 81$；$2^{-3}=1/8$，$\therefore\ -3=\log_2 1/8$.

因 $a^0=1$，故 $\log_a 1=0$ 常眞；又因 $a^1=a$，故 $\log_a a=1$. 733

$a>1$ 時，依 § 722，由 $a^{\mu}=m$，可知凡 m 之值若屬增加，其對數 μ 之值亦與之俱增；又 m 若大於 1，其對數 μ 爲正數，若 m 在 1 與 0 之間，其對數 μ 爲負數. 734

又 $a>1$，由 § 723， 735

$$\lim_{\mu\doteq\infty} a^{\mu}=\infty,\ \text{而}\ \lim_{\mu\doteq\infty} a^{-\mu}=\lim_{\mu\doteq\infty} 1/a^{\mu}=0.$$

卽 $a>1$ 時，$\log_a \infty=\infty$，又 $\log_a 0=-\infty$.

定理 1. 凡乘積以任何數爲底之對數，等於各因數以同數爲底之對數之和. 736

設　$m=a^{\mu}$，卽 $\mu=\log_a m$，

而　$n=a^{\nu}$，卽 $\nu=\log_a n$.

則　$mn=a^{\mu}a^{\nu}=a^{\mu+\nu}$，

故　$\log_a mn=\mu+\nu=\log_a m+\log_a n$.

定理 2. 凡商之對數，等於被除數之對數減除數之對數. 737

因設　$m=a^{\mu}$ 與 $n=a^{\nu}$，

得　$m/n=a^{\mu}/a^{\nu}=a^{\mu-\nu}$，

故　$\log_a m/n=\mu-\nu=\log_a m-\log_a n$.

738 **定理 3.** 凡一數之任何冪之對數,等於此數之對數乘冪指數.

因設 $$m=a^{\mu},$$

得 $$m^r=(a^{\mu})^r=a^{\mu r},$$

卽 $$\log_a m^r=r\mu=r\log_a m.$$

739 **定理 4.** 凡一數之任何根之對數,等於此數之對數除以根指數.

因設 $$m=a^{\mu},$$

得 $$\sqrt[s]{m}=\sqrt[s]{a^{\mu}}=a^{\frac{\mu}{s}},$$

卽 $$\log_a\sqrt[s]{m}=\mu/s=(\log_a m)/s.$$

740 對數之實用卽利用其 §§ 736—739 所求得之性質. 以 10 爲底之對數已算出且列表焉. 設利用此表,則積之值可用加法,商用減法,冪用乘法,根用除法得之.

如 $$\log\frac{\sqrt[7]{5}\sqrt[8]{6}}{3^{25}}=\log\sqrt[7]{5}+\log\sqrt[8]{6}-\log 3^{25} \qquad §§\ 736,\ 737$$

$$=(\log 5)/7+(\log 6)/8-25\log 3. \qquad §§\ 738,\ 739$$

故求 $\sqrt[7]{5}\sqrt[8]{6}/3^{25}$ 之值僅需尋出表內 $\log 5$, $\log 6$, $\log 3$ 之值,再計算 $(\log 5)/7+(\log 6)/8-25\log 3$ 之值,最後再尋出以此值爲對數之數.

習 題 LXII

1. 求 $\log_2 4$, $\log_4 2$, $\log_{\sqrt{2}} 8$, $\log_5 625$, $\log_3 729$, $\log_{10} 0.001$, $\log_2 1/64$, $\log_2 0.125$, $\log_a\sqrt[3]{a^{-2}}$, $\log_8 128$, $\log_{a^2} a^3$.

2. 設 $\log_{10}2=0.3010$ 又 $\log_{10}3=0.4771$, 求以 10 爲底 12, 9/2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$ 之對數.

3. 以 $\log_a 2$, $\log_a 3$, $\log_a 5$ 表 $\log_a 600^{\frac{1}{4}}$.

4. 以 $\log_a b$, $\log_a c$, $\log_a d$, 表下式以 a 爲底之對數:

(1) $b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{1}{2}}/d^{\frac{4}{5}}$.　　(2) $\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b^6}} \div \sqrt{b^3\sqrt{a^{-3}}}$.

5. 證明 $\log_3\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}}=31/18$.

6. 證明 $\log_a\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$.

常用對數

常用對數之計算. 除 1 外之任何正數皆可爲底,今爲便 741
利計算起見,吾人採用以 10 爲底之對數,此之謂常用對數.故 $\log m$ 即表示 $\log_{10} m$.

因 $10^0=1$, $\therefore \log 1=0$; $10^1=10$, $\therefore \log 10=1$; $10^2=100$, 742
$\therefore \log 100=2,\cdots$; 又 $10^{-1}=0.1$, $\therefore \log 0.1=-1$; $10^{-2}=0.01$, $\therefore \log 0.01=-2,\cdots$.

故其常用對數爲整數者如下表:

數	$\cdots 0.001$,	0.01,	0.1,	1,	10,	100,	$1000\cdots$,
其對數	$\cdots -3$,	-2,	-1,	0,	1,	2,	$3,\cdots$.

觀察此表,諸數成一公比爲10之等比級數,其對數則成公差爲 1 之等差級數.

常用對數爲有理者之有理數僅有上表中之諸數,因 10 之 743
分數方冪皆爲無理數故也.但今將證明任何正數皆有一常用對數,又對數之値皆可算至任意之小數位數.

設將 10 開方,再以其結果開方,類推而計算至第五位小

數，得下表：

$$10^{\frac{1}{2}}=3.16228,\ 10^{\frac{1}{32}}=1.07461,\ 10^{\frac{1}{512}}=1.00451,$$
$$10^{\frac{1}{4}}=1.77828,\ 10^{\frac{1}{64}}=1.03663,\ 10^{\frac{1}{1024}}=1.00225,$$
$$10^{\frac{1}{8}}=1.33352,\ 10^{\frac{1}{128}}=1.01815,\ 10^{\frac{1}{2048}}=1.00112,$$
$$10^{\frac{1}{16}}=1.15478,\ 10^{\frac{1}{256}}=1.00904,\ 10^{\frac{1}{4096}}=1.00056,$$

等，如此推演，則所得結果，漸近於 1 爲極限（比較 § 725）。左方之根數 1/2, 1/4,… 卽右方相當之對數。

744 由此表凡數在 1 與 10 之間者，皆可用下例之法計算其常用對數。

例. 求 4.26 之常用對數.

以表內較小於 4.26 之數 3.16228 除 4.26.

商爲 1.34719. 故 $4.26=3.16228\times1.34719$.

以表內較小於 1 34719 之數 1.33352 除 1.34719.

商爲 1.0102. 故 $4.26=3.16228\times1.33352\times1.0102$.

仿此繼續以表內一較小數除最後商.

設 q_n 表第 n 次除後之商，則用此法必得 4.26, 此爲表內 n 數及 q_n 之積之式，其結果爲

$$4.26=3.16228\times1.33352\times1.00904\times\cdots\times q_n$$
$$=10^{\frac{1}{2}}\cdot10^{\frac{1}{8}}\cdot10^{\frac{1}{256}}\cdot\cdots q_n=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}\text{ 至 }n\text{ 項}}q_n.$$

當 n 增大時，指數 $1/2+1/8+1/256+\cdots$ 至 n 項亦增大. 但永遠小於 1, 因其常爲無窮級數 $1/2+1/4+1/8+\cdots$ 之一部份，而後者之和爲 1 (§ 704, 例 1). 故此式漸近於一極限，其值恆小於 1 (§ 192). 此極限可以 $1/2+1/8+1/256+\cdots$ 表示.

又當 n 增大時，q_n 漸近於 1 爲極限. 因各商之值皆在除得此商之除數與 1 之間，如此繼續，除數漸近於 1 爲極限.

故 $$4.26=\lim_{n\doteq\infty}10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots n\text{ 項}}q_n=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\cdots},$$

則 $$\log 4.26=1/2+1/8+1/256+\cdots=0.6294\cdots,$$

從 1 與 10 間諸數之常用對數,可由加一正數或負數導出其他正數之常用對數。 745

例. 求 42.6 及 0.426 之常用對數。

1. $$42.6=10\times 4.26.$$

故 $$\log 42.6=\log 10+\log 4.26$$
$$=1+\log 4.26=1.6294.$$

2. $$0.426=4.26/10=10^{-1}\times 4.26.$$

故 $$\log 0.426=\log 10^{-1}+\log 4.26$$
$$=-1+\log 4.26=\bar{1}.6294.$$

仿此, $\log 426=2.6294$, $\log 0.0426=\bar{2}.6294$, 餘類推. 即凡數之數字列與 4.26 相同者可加一正整數或負整數於其對數。

指標及尾數. 上例所示對數,其小數部份稱爲尾數,整數部份稱爲指標. 746

如 $\log 42.6=1.6294$ 與 $\log 0.426=\bar{1}.6294$, 尾數 0.6294 相同而各有指標 1 或 -1.

§ 745 內所示,設 n 爲正整數,則 $\log n$ 之尾數僅依 n 之數字列,而其指標則由其小數點之位置而定. 747

設 n 在 1 與 10 之間,則 n 整數部份僅有一位, $\log n$ 之指標爲 0, § 744. 若 n 之小數點,移右一位,卽 n 乘以 10, 則於此 $\log n$ 之指標 0 上加 1. 仿此,若小數點,移右二位,卽加 2 於 $\log n$ 之指標,餘類推, § 745. 故其定律: 748

設 $n>1$, 則 $\log n$ 之指標較 n 之整數部份之位數少一.

如 $\log 426000=5.6294$, $\log 42600000=7.6294$, 餘類推.

749　仿此,整數部份祇有一位數字之數 n, 若將小數點向左移 μ 位,卽 n 若乘 $10^{-\mu}$, 則 $\log n$ 之指標原爲 0 者卽增 $-\mu$. 例如, $\log 0.426=-1+\log 4.26=\overline{1}.6294$, $\log 0.0426=\overline{2}.6294$, 餘類推, § 745.

實際上,將 $\overline{1}, \overline{2}, \cdots$ 等負指標書作 $9-10, 8-10, \cdots$ 之形式,置 $9, 8, \cdots$ 等正數於尾數之前,而書 -10 於其後,較爲便利. 例如, $\overline{1}.6294$ 可書作 $9.6294-10$. 故有下列之法:

若 $n<1$, 則 $\log n$ 之指標爲負數. 其求法可將 n 中緊接於小數點後之 0 之個數,從 9 減去,然後書 -10 於其尾數之後.

例如, $\log 0.00426=7.6294-10$, $\log 0.000000426=3.6294-10$.

設小數點後之零數多於 9 而小於 19, 於是從 19 減之,寫其差於尾數之前,而寫 -20 於其後,餘類推.

例. 已知 $\log 2=0.3010$, 求 2^{25} 所含之位數.

750　**對數表.** 下面 384, 385 頁之對數表,包括三位數之各數之對數尾數,計算至小數四位,按其大小排列而略去小數點.

從此表亦可用下面原則,求得多於三位數之尾數:

設一數受到變化而此變化與此數之本身相較爲量極小,則其對數之變化與此數所受之變化成正比例.

藉此表求得之數,如在四位以上則不可靠. 如更須準確,

則需要一四位以上之對數尾數也．學生亦不[redacted]一五位，六位，七位之表．

從表求一數之對數． 求法如下例． 751

例 1. 求 0.00589 之對數．

在冠以 N 之行內，找出 58，然後沿 58 之列向右至冠以 9 之一行處，得 7701，此卽爲所求之尾數（前有一小數點）．其指標爲 $7-10$，§ 749．故

$$\log 0.00589 = 7.7701 - 10.$$

例 2. 求 8 及 46 之對數．

其對數之尾數各與 800 及 460 相同，故如例 1 求之，得

$$\log 8 = 0.9031, \qquad \log 46 = 1.6628.$$

例 3. 求 4673 之對數．

其尾數同於 $\log 467.3$，故必在 $\log 467$ 之尾數與 $\log 468$ 之尾數之間．

從表上找出 $\log 467$ 之尾數 $=6693$，$\log 468$ 之尾數 $=6702$，二尾數之差爲 9．

故設 467 加 1，則於 $\log 467$ 加 9．由是加 0.3 於 467，則加 9 之 $\frac{3}{10}$ 卽近似之 3 於 $\log 467$ 之尾數．

故 $\log 467.3$ 之尾數 $=6693+3=6696$，卽

$$\log 0.4673 = 9.6696 - 10.$$

注意：未寫指標前，常略去屬於尾數前之小數點．

其例 3 所示求位數多於三位之數之對數方法可述之如下：

從表找得相當於前三位之尾數 m，及該 m 與其次之較大之尾數差 d．

以數之餘留部份冠以小數點而乘以 d，加其積之整數（小數四捨五入）於 m．

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

752 **已知其對數而求某數.** 祇須將前節所述之法逆用之.

例 1. 某數之對數為 $5.9552-10$, 求某數.

從表內列中有 90 及行中有 2 者得尾數 9552, 故所求之數字列為 902.

又因指標為 $5-10$, 故此數為小數點後 $9-5$ 即 4 個 0 後之小數, § 749. 故所求之數為 0.0000902.

例 2 某數之對數為 7.5520, 求某數.

從表內已知尾數 5520 在相當於 356 及 357 之尾數 5514 及 5527 之間, 此較小尾數與較大尾數之差為 13, 與已知尾數 5520 之差為 6.

設尾數 5514 增 13, 則 356 增 1. 設尾數 5514 增 6, 則 356 應增 1 之 6/13, 即約增 0.5.

故所求數字列為 3565, 又由指標法則, § 748, 知此數為 35650000.

吾人由是可求數字列相當於表上所未載之某尾數.

從表求較小尾數 m, 相當之三位數, 及 m 與較大尾數之差 d.

從已知尾數減去 m, 并以 d 除其餘數, 并其商於已得三位數之後.

753 **餘對數.** 一數之餘對數, 為該數倒數之對數.

因 $\operatorname{colog} m=\log 1/m=\log 1-\log m=-\log m$, §§ 733, 737, 故求某數之餘對數, 僅需變其對數之符號已可. 然為便於查表, 必使所有對數之小數部份為正. 故可以下法改之:

例 1.　求 colog 89.2.

得　$\log 1 = 10 \quad -10$

又　$\log 89.2 = \ \ 1.9504$

故　$\operatorname{colog} 89.2 = 8.0496 - 10$

例 2.　求 colog 0.929.

得　$\log 1 = 10 \quad -10$

又　$\log 0.929 = 9.9680 - 10$

故　$\operatorname{colog} 0.929 = 0.0320$

故由某數之對數求其餘對數時，從其對數之指標起將各位數字由 9 減之，至末位前一位有效數字止，末位有效數字則由 10 減之。在此結果之後附以 -10 與否，視所用原對數之有否相附而定。如是則不多於三位數字之各數，其餘對數可直接從表得出也。

用對數計算.　使用對數以求積，商，冪，根之近似值（比較 754
§ 740），下例足以闡明其計算之迅速。

例 1.　求 $0.0325 \times 0.6425 \times 5.26$ 之積.

$\log (0.0325 \times 0.6425 \times 5.26) = \log 0.0325 + \log 0.6425 + \log 5.26.$

而　$\log 0.0325 = 8.5119 - 10$

$\log 0.6425 = 9.8079 - 10$

$\log 5.26 = 0.7210$

故積之對數　$= 19.0408 - 20 = 9.0408 - 10$

故積為 0.1099.

例 2.　求 $46.72/0.0998$ 之商.

$\log (46.72/0.0998) = \log 46.72 - \log 0.0998.$

而　$\log 46.72 = 11.6695 - 10$

$\log 0.0998 = \ \ 8.9991 - 10$

故商之對數　$= 2.6704$

故商為 468.2.

吾人將 log 46.79 即 1.6695 書作 11.6695 − 10 者因須減去 8.9991 − 10，使前者之正數部份較後者之正數部份大也.

例 3. 求 $295\times 0.05631\div 806$ 之值.

$$\log(295\times 0.05631\div 806)=\log 295+\log 0.05631+\operatorname{colog} 806.$$

而
$$\begin{aligned}\log 295 &= 2.4698\\ \log 0.05631 &= 8.7506-10\\ \operatorname{colog} 806 &= \underline{7.0937-10}\end{aligned}$$

故所求結果之對數 $=18.3141-20=8.3141-10$

故其值爲 0.02061.

例 4. 求 0.7929 之六次冪.

$$\log(0.7929)^6=6\times\log 0.7929.$$

而
$$\begin{aligned}\log 0.7929 &= 9.8992-10\\ & \qquad\qquad\ \ 6\end{aligned}$$

故 $\log(0.7929)^6=59.3952-60=9.3952-10$

故 $(0.7929)^6=0.2484.$

例 5. 求 0.00898 之七次根.

$$\log\sqrt[7]{0.00898}=(\log 0.00898)\div 7.$$

而
$$\begin{aligned}\log 0.00898 &= 7.9533-10\\ 7\,)&\underline{67.9533-70}\end{aligned}$$

故 $\log\sqrt[7]{0.00898}=9.7076-10$

故 $\sqrt[7]{0.00898}=0.510.$

注意：如遇將一數除負對數如上時，可先加 10 之倍數於其正負兩部，使負數之商適爲 −10.

凡負數無以 10 爲底之實對數，蓋 10 之實數冪皆爲正數．欲求含負因數之式之值，宜先用對數，求其式之絕對值，再附適當符號於其結果．

例如，設已知式 $456\times(-85.96)$，應先用對數求 456×85.96 之值，然後附一號於其值之前.

習　題　LXIII

用對數求下列各近似值：

1. $79\times470\times0.982$.　　2. $(-9503)\times(-0.0086578)$.

3. 1375600×8799000.　　4. $0.0356\times(-0.00049)$.

5. $\dfrac{8075}{364.9}$.　　6. $\dfrac{0.00542}{0.04708}$.　　7. $\dfrac{24617}{-0.00054}$.

8. $\dfrac{0.643\times7095}{67\times9\times0.462}$.　　9. $\dfrac{9097\times5.4086}{-225\times593\times0.8665}$.

10. $(2.388)^5$.　　11. $(0.57)^{-4}$.　　12. $(19/11)^9$.

13. $(1.014)^{25}$.　　14. $\sqrt{67.54}$　　15. $\sqrt[3]{-0.30892}$.

16. $8^{\frac{5}{4}}$.　　17 $(0.001)^{\frac{2}{3}}$.　　18. $(29\frac{9}{11})^{\frac{1}{2}}$.

19. $\sqrt{\frac{5}{8}}\times\sqrt[3]{\frac{-9}{45}}$.　　20. $\sqrt{0.1}\div(0.009)^{\frac{3}{5}}$.　　21. $(0.00068)^{-\frac{5}{4}}$.

22 $(6\frac{2}{3})^{3.4}$.　　23. $(-9306)^{\frac{3}{7}}$.　　24. $(0.0057)^{2.5}$.

25. $(5648)^{\frac{1}{2}}\times(-0.94)^{\frac{1}{3}}$.　　26. $28927^3\div(0.8)^{\frac{2}{5}}$.

27. $\dfrac{\sqrt[7]{0.0476}\times\sqrt[5]{222}}{\sqrt[3]{5059\times0.0088}}$.　　28 $\dfrac{\sqrt[6]{943\times7298}}{\sqrt[5]{0.00006\times0.99}}$.

29. $\sqrt{\dfrac{854\times\sqrt[3]{0.042}}{7.9856\times\sqrt[4]{0.0005}}}$.　　30. $\sqrt[3]{\dfrac{7^{\frac{1}{4}}\times92^{\frac{1}{5}}\times(0.01)^{\frac{1}{2}}}{(0.00026)^5\times5968^{\frac{1}{3}}}}$.

常用對數之應用

不以 10 爲底之對數． 由下列之定理，由一數以 10 爲底 755
之對數，得求出以 1 之外其他任何正數爲底之對數．

m 之對數以不同之 a 及 b 爲底，其關係可以公式 $\log_b m=\log_a m/\log_a b$ 表示之．

因設　　$m=a^\mu$，即 $\mu=\log_a m$，

又使　　$b=a^\nu$，即 $\nu=\log_a b$．

因　　$a^\nu=b$，得 $a=b^{\frac{1}{\nu}}$．

故　　$m=a^\mu=(b^{\frac{1}{\nu}})^\mu=a^{\frac{\mu}{\nu}}$，

即　　$\log_b m=\mu/\nu=\log_a m/\log_a b$.

例. 求 0.586 之對數，以 7 爲其底數.

$$\log_7 0.586=\frac{\log_{10}0.586}{\log_{10}7}=\frac{9.7679-10}{0.8451}=-\frac{2321}{8451}=-0.2746.$$

將 9 7679－10 化爲全部成負數之形式卽 -0.2321，更用對數以完成最後之除法。

756　$m=a$ 時，由公式得 $\log_b a=1/\log_a b$.

757　除 10 爲底數之外，在實用上僅有一用字母 e 指示之某無理數。此數之近似值爲 2.718. 用 e 爲底之對數稱曰自然對數。以後尙須論及。

758　**指數方程及對數方程.**　未知數在指數或對數式中之方程，有時可解之如下：

例 1.　解方程 $13^{2x+5}=14^{x+7}$.

兩端各取對數，$(2x+5)\log 13=(x+7)\log 14$.

解，
$$x=\frac{7\log 14-5\log 13}{2\log 13-\log 14}=\frac{2.4532}{1.0817}=2.263.$$

例 2.　解方程 $\log\sqrt{x-21}+\frac{1}{2}\log x=1$.

從 §§ 736, 739, 上式可化爲

$$\log\sqrt{x(x-21)}=1=\log 10.$$

故
$$x^2-21x=100.$$

解，
$$x=25 \text{ 或 } -4.$$

例 3.　解方程 $x^{2\log x}=10x$.

取對數，
$$2(\log x)^2=\log x+1.$$

解 $\log x$,
$$\log x=1 \text{ 或 } -1/2.$$

故
$$x=10 \text{ 或 } 1/\sqrt{10}.$$

759　**複利.**　設本金 P 元按複利計算，時期 n 年，利息每年併入本中，而每元每年利息爲 r.

則一年以後，此款變爲 $P+Pr$ 或 $P(1+r)$，第二年以後

爲 $P(1+r)\cdot(1+r)$ 亦即 $P(1+r)^2$，餘類推. 故設 A 指 n 年末之本利和，則得

$$A=P(1+r)^n.$$

設每半年複利一次，則 $A=P(1+r/2)^{2n}$；設每年四次，則 $A=P(1+r/4)^{4n}$；其餘類推.

P 稱爲 A 之現價. 若已知 A, n 及 r, 即可由公式 $P=A(1+r)^{-n}$, 求出 P 之値.

例 1. 本金 2500 元，以複利計算，年利率 4%，求十八年後之本利和.

$$A=2500(1+0.04)^{18}.$$

即 $$\log A=\log 2500+18\log 1.04=3.7039.$$

故 $$A=5057 \text{ 元，約値.}$$

例 2 十年間，於每年之始付給 120 元之保險費. 則十年後設複利率爲 4% 其總計若干?

總值爲 $$120[1.04+(1.04)^2+\cdots+(1.04)^{10}],$$

故由 § 701, $$120\times1.04\times\frac{(1.04)^{10}-1}{1.04-1}.$$

由對數，$(1.04)^{10}=1.479$.

故所求値爲 $120\times1.04\times0.479\div0.04$；由對數計算得近似値 1494 元.

年金. 依固定期間，如每年一次，支付之款，稱爲年金. 760

今求每年支取一次，由本年起支取 n 年之年金 A 元之現價，設一元一年之利息爲 r.

第一次支付之現價爲 $A(1+r)^{-1}$，第二次爲 $A(1+r)^{-2}$，餘類推.

故總現價爲，§ 701，

$$A\left[\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{A}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

設年金永遠繼續，即 $n=\infty$，則 $(1+r)^n=\infty$，而現價之公式化爲 A/r.

例. 求每年支付一次,繼續 20 年之年金 1000 元之現價,年利率為 3%?

現價 $P=\frac{1000}{0.03}\left[1-\frac{1}{(1.03)^{20}}\right]$.

用對數,$(1.03)^{20}=1.803$.

故 $P=\frac{1000}{0.03}\left[1-\frac{1}{1.803}\right]=\frac{1000\times 0.803}{0.03\times 1.803}=14845$ 元,約值.

習題 LXIV

1. 求 $\log_5 555$, $\log_7 0.0463$, $\log_{100} 47$ 之值.

2. 解下列指數方程:

(1) $3^x=729$. (2) $a^{x^2+2}=a^{3x}$. (3) $213^x=516^{-x+4}$.

3. 解下列對數方程:

(1) $\log x+\log(x+3)=1$. (2) $\log x^2+\log x=2$.

(3) $\log(1-2x)^3-\log(3-x)^3=6$. (4) $x^{\log x}=2$

4. 本金 7500 元,時期三十五年,一年一期之 5% 複利率,本利和應若干?

5. 本金 5500 元,複利率 3%,半年一期,二十年之本利和若干?

6. 試證複利率 5% 之本利和,十五年後超過其本金二倍,九十五年超過其本金百倍.

7. 照複利率 4%,存款若干元則能於十五年後得 1250 元之本利和?

8. 某人每年投資儲蓄銀行 200 元,每年利息為全數之 $3\frac{1}{2}$%. 求二十五年末其人應得總數若干?

9. 每年 1200 元,繼續三十年之年金,設年利率 4%,問其現價若干?又設為永續年金其現價若干?

10. 設 c 為直角三角形之弦,a, b 為其餘二邊,$b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$. 已知 $c=586.4$, $a=312.2$, 求 b 及此三角形面積,應用對數計算之.

11. 設 a, b, c 指三角形三邊之長，$s=(a+b+c)/2$，其面積爲 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 若 $a=416.8$, $b=424$, $c=25.68$, 求此三角形之面積.

12. 用公式 $S=4\pi r^2$, $V=4\pi r^3/3$, $\pi=3.1416$, 求半徑 23.6 之圓球之面積及體積.

XXV. 排列及組合

排列及組合之定義. 設一羣字母共 n 個，如 $a,b,c,\cdots,k$, 指任何種之物體. 761

此羣 n 個字母中，若不論其次序，任取 r 個爲一組，則名爲 n 字母中，每次取 r 個之組合或 n 字母中 r 之組合.

其組合之數目，用符號 C^n_r 表之.

例如，a, b, c, d 四字母中 2 之組合爲

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

共有六個組合，即 $c^4_2=6$.

又若按一定次序由 n 個字母中取 r 個而排列之，則名爲 n 字母中 r 之排列.

其排列之數目，用符號 P^n_r 表之.

例如，a, b, c, d 四字母中取 2 字母之排列爲

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

共有十二個排列，即 $P^4_2=12$.

注意：ab 與 ba 在組合中爲一個，而排列上爲二個.

上述字母 $a,b,\cdots,k$ 各不相同，而任何字母之重複在組合及

排列中皆不允許。本章內除特別說明者外，皆作此意義.

762 **基本定理.** §554 中已運用下列之原則:

設一事有 m 個作法，又設其完成後，另一事有 n 個作法，則總計共有 mn 個作法.

其理由：在第一件之每種作法，即有 n 法作第二事，今作第一事有 m 法，故作兩事共有 mn 法.

一般言之，設第一件有 m 個作法，第二件有 n 個作法，第三件有 p 個作法等等，則合成一起，共有 $m\cdot n\cdot p\cdots$ 個作法.

例. 用 1, 2, 3,…, 9 諸數字，可作數字相異之三位數若干?

可取九數字之任一個佔第一位，其餘八個數字中之任一個佔第二位，取定第二位後，其餘七個數字之任一個佔第三位，故所求作法可有 9·8·7 即 504 個.

763 **n 個不同字母之 r 排列數.** 從前例之理論，可證明 P_r^n 可由下公式求得之.

$$P_r^n=n(n-1)(n-2)\cdots \text{至 } r \text{ 個因式}. \tag{1}$$

因 n 個不同字母，每次取 r 個之排列，可取 n 字母中任何之一佔第一位，其餘 $n-1$ 個字母之任一個佔第二位，取定第二位後，其他 $n-2$ 個之任一個可佔第三位，餘類推.

故依 §762 取第一，第二，第三，…，第 r 諸字母之法，即 n

個不同字母之 r 排列法 $=n(n-1)\ n-2)\cdots$ 至 r 個因式。

故 a, b, c, d, e 諸字母，每次取一個，二個，三個，四個，五個之排列數目爲

$$P_1^5=5,\ P_2^5=5\cdot4,\ P_3^5=5\cdot4\cdot3,\ P_4^5=5\cdot4\cdot3\cdot2,\ P_5^5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1.$$

當然在積數 $n(n-1)(n-2)\cdots$ 中之第 r 因式爲 $n-(r-1)$ 卽 $n-r+1$. 故公式 (1) 可寫爲

$$P_r^n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \tag{2}$$

$r=n$ 時，則因式 $n-r+1$ 爲 $n-n+1$，卽 1，而 $P_n^n=n(n-1)\cdots2\cdot1$，卽 $1\cdot2\cdots(n-1)n$. 此連續乘積 $1\cdot2\cdots n$ 謂之 n 階乘，而以符號 $n!$ 或 $\underline{|n}$ 表之。故以 n 個字母，每次全取共有之排列法，以下式表之

$$P_n^n=n! \tag{3}$$

無意義之符號 $0!$ 定其值爲一，將於 § 775 說明之。

例 1. 以不同顏色之四旗作信號，用一旗或數旗上下排列之，問不同之信號有若干？

每次信號可用旗 1,2,3，或 4 枚排列之。故信號數共計爲 $P_1^4+P_2^4+P_3^4+P_4^4$ 卽 64.

例 2. *fancies* 中字母，每次全取而排列之：

(1) 字首，字尾用子音者有幾法？

此字第一位字母之變化，可有 4 法，末位有 3 法，而中間可有 $5!$ 法。故總計 $4\cdot3\cdot5!$ 卽 1440.

(2) 母音在偶位者有幾法？

母音排在偶位者有 $3!$ 法，子音排在奇位者有 $4!$ 法，因每一種子音之排列，可與每一種母音之排列相結合，故總共有 $3!\cdot4!$ 卽 144 法。

(3) c 不排在字母中央者，問有若干排列法？

c 排在中央之法，顯然有 $6!$ 法，因其他各字母可用可能之排列法排列之，故不許在中央之排列法共有 $7!-6!$ 即 4320.

例 3. 求證 $P^8_6=4\cdot P^7_5$，又 $P^{16}_3=2\cdot P^8_4$.

例 4. 設 $P^{2n}_4=127P^{2n}_3$，求 n.

例 5. 一鐵路共分二十站，鐵路局應預備幾種車票？

例 6. 用字母 a, e, i, o, u, y 排列之，取全數有若干排列法？三字母 a, e, i 不許離開，有若干排列法？

例 7. *numerical* 一字中每次取五字母排列之，其奇數位用子音時，共有排列法若干？

例 8. 試證用 0,1,2,…,9 諸數字，可作數目相異之四位數共 $P^{10}_4-P^9_3$ 個。

例 9. 用 3, 4, 5, 7, 8 諸數字可作數目不同之數若干？

例 10. 七童子排成一行，其中某童子不能排在行首或行尾，共有幾種排列法？

764 **環狀排列.** 將 n 個不同之字母沿一圓周或一閉曲線排列之，則其排列法為 $(n-1)!$.

因將 n 字母沿此曲線移過同數之位置，諸字母間相互之次序不變。故祇須一字母位置固定，而將其餘之 $n-1$ 字母用可能方法排列之即為 n 字母之不同排列法。而由 § 763, (3), $n-1$ 字母可能之排列法為 $(n-1)!$.

例如，八人圍圓桌而坐，可有 $7!$ 即 5040 之坐法。

例 1. 求證 n 個不同字母，每次取 r 個，其不同之環狀排列為 P^n_r/r.

例 2. 設有一圓環，若以直徑為軸旋轉 180° 又回原處，求證 n 個不同顏色之珠以線穿之，可得 $(n-1)!/2$ 種不同之項圈。

例 3. 四男四女圍圓桌相間而坐，求共有若干坐法？

許重複時不同字母之排列. 設 n 個不同字母可以重複排列時，每次取 r 個，可有 n^r 個排列法。 765

因欲得此種排列，可在字母中任取其一為第一字母，又因字母可以重複，n 字母中可再任取其一為第二字母，餘仿此。由§762，作此種排列之法，其總數為 $n \cdot n \cdot n \cdots$ 達 r 個因式，卽 n^r。

例如，由 1, 2, 3,…, 9 可作 9^3 卽 729 個三位數。

例 1. 問用 1, 2, 3, 5, 7 可作一位，二位，三位之數若干？

例 2. 三種獎品分給七童子，設每童子皆可得各種獎品，則其授與法有幾種？

不盡相異之 n 字母，每次全取之排列法. 試問 a, a, a, b, c (1) 諸字母中，其中有三字母相同，若每次全取，其排列法有幾？ 766

此種排列法，可與相異之字母，a, a', a'', b, c (2) 之相當排列法比較之。設在 (1) 內之任一種排列 $abaca$，使 b 及 c 不動而將各 a 交換，其排列法仍不變。然在 (2) 內相當之一種排列，卽 $aba'ca''$ 則得 3! 個不同排法，卽 $aba'ca''$, $aba''ca'$, $a'ba''ca$, $a'baca''$, $a''baca'$, $a''ba'ca$. 故凡 (1) 之每一種排列有 3! 個 (2)

之排列與之相當．但 (2) 之排列法爲 $5!$ § 763, (3)．故 (1) 之排列法爲 $5!\div 3!$.

由上推之，則吾人可證明若 n 個字母中有 p 個相同，另有 q 個相同，其他仿此，則其排列法之公式爲：

$$N=\frac{n!}{p!q!\cdots}.$$

例 1. *independence* 中之字母有若干不同之排列法?

此 12 字母中有 4 個 e, 3 個 n, 2 個 d.

故所求之結果爲 $12!/4!\cdot 3!\cdot 2!$ 卽 1,663,200.

例 2. *Antioch* 中交換其字母，但不變母音或子音之相互位置，問有若干排列法?

由上述之證明，顯然知所求之排列數相同，故應爲 $7!/3!\cdot 4!$ 卽 35.

例 3. Σx^3y^2z, $\Sigma x^3y^2z^2$, Σx^3yzu 及 $\Sigma x^3y^3z^2u^2$ 各爲 x, y, z, u, v 五變數之對稱函數，則每一函數之項數爲若干?

若將指數 3, 2, 1 之位置保持不變，則 Σx^3y^2z 所有之項數當爲 x, y, z, u, v 諸字母中每取三個排列於其下之排列數．故爲 P_3^5 卽 60.

設應用同法於 $\Sigma x^3y^2z^2$, 則得 $x^3y^2z^2$ 二次，一次爲 $x^3y^2z^2$ 之形式，另一次爲 $x^3z^2y^2$ 之形式．仿此，可得各式皆有二次，因其字母可各依一順序而書於指數下也．故 $\Sigma x^3y^2z^2$ 之項數爲 $P_3^5/2$ 卽 30.

仿此 Σx^3yzu 有 $P_4^5/3!$ 項卽 20, 而 $\Sigma x^3y^3z^2u^2$ 有 $P_4^5/2!\ 2!$ 卽 30 項.

例 4. 一分銅幣五枚，五分鎳幣六枚，銀角四枚，分與十五個童子，每人各得一枚之分給法有若干?

例 5. 某城由南至北有街十條，由東至西有街五條，一人由該城之西南角至東北角從捷徑而往共有幾法?

n 個不同字母之 r 個組合法. 組合法 C_r^n 可用下式表之. 767

$$C_r^n = P_r^n \div r\,! = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,!}. \qquad (1)$$

因若先取 r 個組合，再從各組合將字母依一切可能之順序排列，則顯然必能得 r 個之排列法。

然因每一組合應產生 $r!$ 個排列法，§ 763 (3). 今有 C_r^n 個組合應產生 $r!\times C_r^n$ 個排列法。

故 $r!\times C_r^n = P_r^n$，則 $C_r^n = P_r^n \div r!$.

例如，a, b, c, d, e 諸字母，每次取一個，二個，三個，四個，五個之組合數為：

$$C_1^5=\frac{5}{1},\quad C_2^5=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2},\quad C_3^5=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3},\quad C_4^5=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\quad C_5^5=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

從 § 565 二項定理 $(a+b)^n$ 之展開式中第 $(r+1)$ 項之係數卽為 C_r^n. 而 § 560 之討論則僅為公式 (1) 之另一證明。

若於此式中將 $(n-r)!$ 乘其分子及分母，則可得較對稱之 768
公式

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \qquad (2)$$

從公式 (2) 可得 n 字母中取 r 個之組合法與取 $(n-r)$ 個 769
之組合法相同。

$$\text{因}\quad C_{n-r}^n = \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = C_r^n.$$

此亦可由事實證明，因每取 r 個，則 $n-r$ 個必為遺留之個數。

例如，$C_{12}^{14} = C_2^{14} = 14\cdot 13/1\cdot 2 = 91$. 注意直接用 (1) 式而求 C_{12}^{14} 較為便捷多矣。

例 1.　一平面上有十五點，其中無三點在一直線者，求聯絡諸點所成三角形共有幾法?

三角形之數，顯然爲諸點中每取三點之組合法，故三角形之數爲 C_3^{15} 即 $15\cdot14\cdot13/1\cdot2\cdot3$ 亦即 455.

例 2.　從十人中選出三人委員會.(1) 若某人必須入選，共有選法若干? (2) 若某人必須除出，共有選法若干?

(1) 其他二人必須選入之法爲 C_2^9 即 $9\cdot8/1\cdot2$ 即 36 法.

(2) 全體委員可由二人中選出爲 C_3^9 即 $9\cdot8\cdot7/1\cdot2\cdot3$ 即 84 法.

例 3.　由 a, e, i, o 諸母音及 b, c, d, f, g 諸子音，每次取母音二個，子音三個之排列法有若干?

取母音之法有 C_2^4，取子音之法有 C_3^5. 每組選出之母音皆可與每組選出之子音相配合，而有 5! 之排列法.故總計 $C_2^4\cdot C_3^5\cdot5!$ 即 7200.

例 4.　有書十八本等分給 A, B, C 三人，各得六本，共有分法若干?

取 A 可得之書籍有 C_6^{18} 法，B 有 C_6^{12} 法，而 C 有 C_6^6 即1法.故由 §762，分給法爲 $C_6^{18}\cdot C_6^{12}\cdot C_6^6$ 即 $18!/(6!)^3$.

將十八本書分爲相等之三組必須將剛才所得之結果以 3! 除之，蓋排列之次序不問也.

例 5.　*mathematical* 中之字母，每次取四個，共有選取法若干? 又排列法若干?

因諸字母不盡相異，祇用 C_r^n 及 P_r^n 之公式不能求出.

其中字母 $a, a, a;\ m, m;\ t, t;\ h, e, i, c, l$.

故將可能之選取法及排列法分列於下:

1. 有三字母相同者：

將三個 a 依次與其他七個字母配合，卽得 7 種選取法；$7\cdot4!/3!$ 卽 28 排列法。

2. 有四字母兩對相同者：

有三種選取法；$3\cdot4!/2!\cdot2!$ 卽 18 排列法。

3 有四字母，兩者相同，兩者不相同者：

有 $3\cdot C_2^7$ 種卽 63 個選取法；$63\cdot4!/2!$ 卽 756 個排列法。

4. 有四字盡屬不同者：

有 C_4^8 種卽 70 個選取法；$70\cdot4!$ 卽 1680 個排列法。

故選取法共有 $7+3+63+70$ 卽 143；排列法爲 $28+18+756+1680$ 卽 2482.

例 6. 求 C_{15}^{17}, C_5^{10} 及 C_{19}^{28} 之値.

例 7. 設 $C_8^n=C_7^n$, 求 n.

例 8. 設 $2C_4^n=5\cdot C_2^n$, 求 n.

例 9. 有十二點，無四點在一平面者，可求得平面若干?

例 10. 從十二人中選出五人成一會，有幾個選法? 某 A 選入之會有幾? 某甲被擯之會有幾?

例 11. 在上例所述之各會中，有 A, B 二人在內者有幾會? A, B 二人祇有一人在內者有幾會? A, B 二人皆被擯棄之會有幾?

例 12. 由共和黨員 20 名，民主黨員 18 名內，選出共和黨員 4 名，民主黨員 3 名組織委員會，選法有幾種?

例 13. 有母音五個，子音十四個，組成含三母音及四子音之字，共有幾法?

例 14. 有 52 張撲克牌，平均分給於賭客 A, B, C, D 有若干分法? 又分成相等之四堆有若干分法?

例 15. 用數字 2, 3, 4, 2, 5, 2, 3, 6, 7 可作若干五位數?

770 **組合之總數.** 設在公式 $(a+b)^n$ 內,§ 561,令 $a=b=1$,然後由兩邊各減 1,得

$$C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n-1.$$

故由 n 個不同之物,每次取一個,二個,…,n 個之組合總數爲 2^n-1.換言之,由 n 物選取一物或以上之方法,總計爲 2^n-1.

此理又可證之如次:無論何物或取或捨,皆可以二法之一處理之.故處理 n 物之總數爲 $2\cdot2\cdots$ 至 n 個因式,即 2^n, § 762.由此除去各物皆被遺留之一種,即得 2^n-1,如上所述者.

例 1. 有一角,二角五分,半元及一元之銀幣各一枚,以之任意付款,有幾種不同法?

例 2. 由上述理由,證明 $p+q+\cdots$ 事件中,每次取一個或一個以上之方法爲 $(p+1)(q+1)\cdots-1$,此處 p 爲一類事件,q 爲他一類事件,餘類推.

例 3. 有一角二枚,二角五分五枚及半元四枚之銀幣,以之任意付款,有幾種方法?

771 **C_r^n 之最大值.** 在 C_r^n 之展開式內,即 $n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$,分子中 r 個因式減少,而分母中增多.故 n 之值已知,則 C_r^n 之值,當次於 r 之較大值能成立下式時爲最大.

$$(n-r+1)/r<1.$$

若 n 爲偶數則 $r=n/2$ 時,C_r^n 之值爲最大;若 n 爲奇數則 $r=(n-1)/2$ 或 $r=(n+1)/2$ 時,C_r^n 之值爲最大.由 § 769,此二式求得之 C_r^n 之值相同.

例. C_r^{12} 及 C_r^{15} 之最大值爲何?

許重複時之組合數. 試問由 1, 2, 3, 4 四數字中選出三個,許重複時,組合數若干? 772

此種選法可以 111, 112, 124 爲例,一則三數字皆同,二則二數字相同,三則三數字皆異.

設就 0, 1, 2 各加於 111, 112, 124 諸數字得 123, 124 及 136, 此三數乃基數 1, 2, 3, 4, 5, 6 中每次取三個之組合而無重複者.稍加考慮,即可知悉如列出一種選取法如 111,112,124 之全表,使後一基數,其數值不小於前者,然後在各基數上加 0, 1, 2, 則得 $4+(3-1)$ 即 6 個基數 1, 2, 3, 4, 5, 6 中每三個組合之各種一次而僅一次.後者組合數爲 C_3^6. 故 C_3^6 爲所求之數.

n 數字之取 r 個組合,許可重複時之普通情形爲 $1,2,\cdots,n$. 又因此等數字與 n 個不同物相當,故得定理:

n 個不同物每次取 r 個許可重複時,與 $n+r-1$ 個不同物每次取 r 個不許重複時之組合法相同,爲 C_r^{n+r-1} 即 $n(n+1)\cdots(n+r-1)/r!$

例 1. 擲四骰子,問可得若干種結果?

因骰子之各面爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 擲後之結果,可有四顆相同,三顆相同,二顆相同,或四顆相異.故擲法之數爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 許重複時每 4 個之組合數即 C_4^{6+3} 或 126.

例 2. x, y, z 三變數作成 r 次方之齊次多項式,共有若干項?

有 x, y, z 之項爲因式之 r 次乘積有若干種,則多項式顯然亦有若干種,故其數爲

$$C_r^{3+r-1}=C_r^{r+2}=C_2^{r+2}=(r+1)(r+2)/2.$$

773　**聯結組合數之公式．相當之代數恆等式．**下式有特殊之興味及重要性．

$$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}. \qquad (1)$$

因 n 字母之 r 組合可分為二類，一類為含某特別字母如 a 者，又一類為不含此字母者．欲盡得第一類組合，祇須盡作其餘 $n-1$ 字母之 $r-1$ 組合，然後再以 a 加入各組合卽可；故第一類組合之數為 C_{r-1}^{n-1}．第二類組合卽其餘 $n-1$ 字母之 r 組合，故其數為 C_r^{n-1}．

$$C_r^{m+n} = C_r^m + C_{r-1}^m \cdot C_1^n + C_{r-2}^m \cdot C_2^n + \cdots + C_1^m \cdot C_{r-1}^n + C_r^n. \qquad (2)$$

因任取 $m+n$ 個字母而分為二組．一組為 m 個，一組為 n 個．欲盡得 $m+n$ 個字母之一切 r 個組合，祇須分列之如下．計包括：

(a)　第一組 m 個字母之 r 個組合，其組合數為 C_r^m．

(b)　包含第一組 m 個中 $r-1$ 字母及第二組 n 個中一字母之組合．因選取 $r-1$ 字母之法有 C_{r-1}^m，選取一字母之法有 C_1^n，故組合數為 $C_{r-1}^m \cdot C_1^n$．

(c)　包含第一組 m 個中 $r-2$ 字母及第二組 n 個中二字母之組合．選取 $r-2$ 字母之法有 C_{r-2}^m，選取二字母之法有 C_2^n，故此組合有 $C_{r-2}^m \cdot C_2^n$．仿此，最後得第二組 n 個字母中之 r 組合，其數為 C_r^n．

例如，$C_3^9 = 84$ 又 $C_3^5 + C_2^5 \cdot C_1^4 + C_1^5 \cdot C_2^4 + C_3^4 = 10+40+30+4 = 84$．

774　設在 (1) 與 (2)，將各符號 C 代以 m, n, r，§ 767, (1)，卽得聯結 m, n, r 之公式．從上述證明，此等公式，當 m, n, r 為正整數

時,能夠適合.實則單就 m 與 n 而論,此諸公式爲代數恆等式,m 及 n 之值無論若何,常能適合.用代數方法化簡之可以證明.

例如,在 (1) 時,得

$$C_r^{n-1}+C_{r-1}^{n-1}=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{1\cdot 2\cdots r}+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots(r-1)}\cdot\left[1+\frac{n-r}{r}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}=C_r^n.$$

但簡化以證此等公式爲恆等式,非屬必需.蓋若以 m, n, r 表之,(2) 之兩邊各爲 m 與 n 之整函數,其對於各字母之次數均爲 r. 此兩函數必須恆等,否則隨意指定 m 一整數之值,使 (2) 祇爲 n 之函數,則在 n 值多於 r 個時不能相等,§ 421,而實際上已證明兩邊對於 n 之一切整數值皆相等.

習 題 LXV

1. 由甲至乙有三路,由乙至丙有二路,由丙至丁有四路.今有人由甲至丁,共有行法若干?

2. 五人坐編號之六隻椅子,有坐法若干?

3. 八人作半英里競走,第一名,第二名,第三名之獲得方法若干?

4. 由水手十人選四人划槳,共有幾法?又諸人列坐舟上有幾法?

5. 由兵士一百名中選哨兵三名,有選法若干?

6. 棒球隊五組,共商一比賽表,欲令每組與其他各組各比賽三次.則此表中應共有比賽幾次?

7. 1, 2, 1, 3, 2, 1, 5 諸數字,每次全取,共有幾種排法?

8 '*factoring*' 一字中諸字母每次全取之排列,其中 (1) 以母音始以子音終者幾何? (2) 不以 f 爲首者幾何? (3) 母音在最先三個位置上者幾何?

9. 前題 a, o, i 次序不變之排列法若干?子音 f, c, t, r, n, g 次序不變者若干?母音子音次序均不變者若干?

10. '*resident*' 中每次取五字母,但第一,第三及第五字母,須爲母音,排列法若干?

11. 由十五人選棒球隊員九人,其中六人必須在外球場,九人在內球場選出,選出法若干?

12. 1, 2, 3, 8, 9, 10 數字中選出二數相加之和爲偶數者,問有選出法若干?

13. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中組成一位數,二位數,三位數有幾法,設 (1) 數字能重複者, (2) 不能重複者?

14. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 作五位不同數字之奇數,作法若干?

15. 3000 至 8000 間不許重複數字之數目有若干奇數?可以爲 5 除盡者若干?

16. 一人設宴,問請五人中之一人或數人之方法共若干?

17. 有蘋果十五枚分給童子三人,一得六枚,一得五枚,一得四枚,共有分配法若干?

18. 六正號五負號書一列,問有書法若干?

19. 從數字 1, 2, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 6, 7 可作若干四位數?

20. 十五本法文書,十二本德文書內,選八本法文書及七本德文書排列於書架上.問排法若干?

21. 由全套十三張牌內,選取五張,其中必須包括王 (king) 或后 (queen) 或此兩張全取。問有取法若干?

22. 由五美人,六英人中選取四人,(1) 僅一英人,(2) 最少一英人,問各有選法若干?

23. 有十平行線與他十二平行線相交,作成平行四邊形,問可得若干?

24. 一平面內有 n 點,除 m 點在一直線外,其他無三點在一直線者.求證連繫各點,作成之線數為 $C_2^n - C_2^m + 1$.

25. 以同樣五顆珠,同樣六顆紅寶石及同樣五顆金鋼鑽穿成手鐲,問可成式樣若干?

26. 十人圍坐二圓桌,每桌五人,問共有幾法?

27. 五男六女打網球,每邊需為男一人女一人,問有分配法若干?

28. 十五人中選出候補員五人,問有選舉法若干?若此十五票平分於五候補員有若干法?

29. 八人划船,祇有二人划尾槳,一人划頭槳.問其坐法有若干?

30. 由十八人中選九人為一棒球隊,十八人中十人善於內場,五人善於外場,餘三人內外場皆可,共有分配法若干?

31. 證明六個不同字母,每次全取而作排列,其中二字母不許排在某一位置上,則共有排法 $6!-2\cdot5!+4!$.

32. 有字母 p, q, r, s, t, v,每次取四個,若允許重複,可有組合法若干?

33. 骰子五枚,有不同擲法若干?

34. 對稱函數 $\Sigma x^4y^3z^2u$, $\Sigma x^2y^2z^2u$, $\Sigma x^3y^3z^2u^2v$,若此等變數有十個,則各函數有若干項?

35. 證明一 n 次之完全齊次函數,含四變數者,其項數為 $(n+1)(n+2)(n+3)/3!$

XXVI. 多項式定理

775 **多項式定理.** 設 $a+b+\cdots+k$ 示任一多項式，n 爲正整數.則

$$(a+b+\cdots+k)^n=\Sigma\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots k^\kappa,$$

其中右方之和，對於 $\alpha,\beta,\cdots,\kappa$ 之各組值凡由 $0,1,2,\cdots,n$ 選出而能使 $\alpha+\beta+\cdots+\kappa=n$ 者，皆有一項.而須認明 $\alpha=0$ 時，$\alpha!$ 須以 1 取代，於 $\beta,\cdots,\kappa$ 皆然.

因 $(a+b+\cdots+k)^n$ 指示下列之連乘積：

$(a+b+\cdots+k)(a+b+\cdots+k)\cdots$ 達 n 個因式，

由實際相乘，若不集合同類項，每項之積，必爲下述之形式：第一括弧內之一項，乘第二括弧內之一項，再乘第三括弧內之一項等等.

但因由各括弧內所選之字母必爲 $a,b,\cdots,k$ 中之任一字母，其乘積之項數必爲 $a,b,\cdots,k$ 內取 n 個之重複排列法.設 $\alpha,\beta,\cdots,\kappa$ 表 $0,1,\cdots,n$ 之特殊值其和爲 n，則所有之乘積有 α 個因式爲 a，β 個因式爲 $b,\cdots,\kappa$ 個因式爲 k 者，其數與 n 字母中 α 個相同，β 個相同，$\cdots$ 之重複 n 個排列法相同，故爲 $n!/\alpha!\cdot\beta!\cdots\kappa!$，§766. 又因諸積皆等於 $a^\alpha b^\beta\cdots k^\kappa$，其和爲 $\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots k^\kappa$

二項式定理爲本定理之特例.

例如，$(a+b+c+d+e)^4$ 之展開式包含五種不同之項，$abcd,a^2bc,a^2b^2,a^3b,a^4$ 其係數各爲 $4!/1!1!1!1!$ 卽 24；$4!/2!1!1!$ 卽 12；$4!/2!2!$ 卽 6；$4!/3!1!$ 卽 4；$4!/4!$ 卽 1. 故簡化以後，得

$$(a+b+c+d+e)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd.$$

例. 求 $(2+3x+4x^2)^8$ 展開式中 x^5 之係數.此式展開之普遍形式爲 $\frac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^\alpha 3^\beta 4^\gamma x^{\beta+2\gamma}$, 此中 $\alpha+\beta+\gamma=8(1)$, 而所求之項須能使 $\beta+2\gamma=5(2)$. (1), (2) 二方程之解,凡爲正整數或 0 者乃 $\alpha, \beta, \gamma=3, 5, 0; 4, 3, 1; 5, 1, 2$. 故所求之係數爲

$$\frac{8!}{3!5!}2^3\cdot3^5+\frac{8!}{4!3!}2^4\cdot3^3\cdot4+\frac{8!}{5!2!}2^5\cdot3\cdot4^2 \text{ 卽 } 850,752.$$

習　題　LXVI

1. 展開 $(a+b+c+d)^3$, 并合併其同類項.
2. 展開 $(a+b+c+d)^5$.
3. 求 $(a+b+c+d)^{12}$ 之展開式中, $a^5b^4c^2d$, $a^4b^4c^4$ 與 $a^5b^5c^2$ 之係數.
4. 求 $(a-b+c-d)^{10}$ 展開式中 $ab^2c^3d^4$ 之係數.
5. 求 $(a+3b+2c)^8$ 展開式中 a^4b^3c 之係數.
6. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展開式中 x^6 之係數.
7. 求 $(1-x+3x^2)^9$ 展開式中 x^7 之係數.

XXVII. 可能率

簡單事件

可能率. 任何未來事件,若吾人給以一次試驗,卽發生之 776
機會,無論發生與否必在有限數之方法中佔其一,而此等方法皆有相等之機會,蓋吾人在事前不能測斷此等方法之孰優孰劣也.如骰子之擲么卽其一例.因骰子擲下必有一面向上,苟預斷其爲某面初無理由也.

仿此，其得或失之情形，謂之可能情形，卽有若干情形在此中爲有利情形，有若干爲不利情形，吾人謂：

可能率或機會者乃有利情形與可能情形（卽無論得或失之情形）之比也.

故設 m 代表可能情形，a 爲有利情形，p 爲可能率，由其定義，得

$$p=a/m.$$

例如，擲骰子爲么之可能率爲 $\frac{1}{6}$；因 $m=6$, $a=1$ 故也.

又從含有三白二黑一共五球之袋中，抽出白球之可能率爲 3/5.

777 系 1. 若某事件之發生爲必然，則可能率爲 1；若必然失敗，則可能率爲 0；其他可能率爲一正分數，介於 1, 0 之間.

因設某事件必成功，則必不失敗；故 $a=m$ 且 $a/m=1$. 設此事必失敗，則必不發生；故 $a=0$ 且 $a/m=0$. 其他 a 大於 0 而小於 m，是以 a/m 爲一正分數.

778 系 2. 若某事件發生之可能率爲 p，則不發生者爲 $1-p$.

因一事件其 m 可能情形中之 a 爲有利，則其餘 $m-a$ 個爲不利情形. 故其不發生之可能率爲 $(m-a)/m=1-a/m=1-p$.

779 **優勝比.** 設某事件之有利情形爲 a，不利情形爲 b，當 $a>b$ 時，則優勝比爲 a 比 b 有利於此事；當 $b>a$ 時，優勝比爲 b

比 a 不利於此事件．當 $a=b$ 時，則優勝比相等．在第一狀況下，此事件之可能率，$a/(a+b)$ 大於 1/2；第二狀況下小於 1/2；第三狀況下等於 1/2.

例如，從有三白二黑共爲五球之袋中抽出一球，則優勝比爲 3 比 2 利於白而 3 比 2 不利於黑.

希望值． 設 p 指示某人得款 M 之可能率，則 Mp 名曰 780
關於 M 款此人希望之值．

例如，一賭客擲一骰子贏得 12 元之希望值，爲 12 元 $\times 1/6$ 卽 2 元．

可能率之例題． 應用 § 776 可能率之定義時，吾人必須 781
留意相等可能性之判定．由下例說明之．

例 1. 設兩銅元擲出，其結果成二正面之機會爲何？成二反面之機會爲何？一正一反之機會爲何？

吾人或以爲共有三個可能情形，一爲第一種情形，二爲第二種情形，三爲第三種情形；故每種機會爲 1/3.

但如此結論則誤矣，因相等可能情形非三而爲四．因設二幣各名之謂 A 及 B，此相等可能情形爲 A 正 B 正，A 背 B 背，A 正 B 背，A 背 B 正．又因利於二幣皆正或二幣皆背之情形各爲一，利於一正一背之情形爲二；故其答數應各爲 1/4, 1/4 及 2/4 也．

例 2. 用二骰子投成其和爲八點之機會若干？

相等可能性之情形爲 $6\cdot6$ 卽 36，因一顆骰子之任一面與他顆骰子之任一面相加爲八點者爲 2, 6 或 3, 5 或 4, 4. 但 2, 6 有二個配法卽 A 之 2 與 B 之 6

相配或 B 之 2 與 A 之 6. 仿此 3, 5 亦有二法. 而 4, 4, 僅有一法. 故有五個有利情形. 而其機會為 5/36.

例 3. 擲三顆骰子中至少須一顆為么,而須相加為八點,則機會若干?

相等可能性之情形為 $6\cdot6\cdot6$ 即 216.

其和為八點而又至少須有一骰現么,則其所現為 1, 1, 6 或 1, 2, 5 或 1, 3, 4. 但 1, 1, 6 之順序,可以變換,故其擲法為 $3!/2!$ 即 3 種(§766). 仿此, 1, 2, 5 與 1, 3, 4 之擲法各有 $3!$ 即 6 種情形. 由此共有 $3+6+6$ 即 15 法為有利情形. 故其機會為 15/216 即 5/72.

例 4. 一器中盛六白球,四紅球及二黑球.

(1) 若抽出四球,則盡為白球之機會若干?

器中有白球六枚,故取出四枚盡為白球之法為六球之四球組合,即 C_4^6. 又因此器盛十二球,抽出法共為 C_4^{12}. 故其機會為 C_4^6/C_4^{12} 即 1/33.

(2) 若抽出六球,則其為三白,二紅,一黑之機會若干?

取三枚白球有 C_3^6 法;取二紅球有 C_2^4 法;取一黑球有 C_1^2 法. 抽此六球之法則為 C_6^{12}. 故所求機會為 $C_3^6\cdot C_2^4\cdot C_1^2/C_6^{12}$ 即 20/77.

例 5. 由十三張同套撲克牌中取出三張,問:

(1) king (王)與 queen (后)皆無之機會若干?

除出王與后,此套撲克牌尚有十一張. 若取三張無王與后為一組之撲克牌,則共有 C_3^{11}. 故所須之可能率為 C_3^{11}/C_3^{13} 即 15/26.

(2) 若王與后必須皆抽出或抽出其中之一者,其機會若干?

上節 (1) 所不需者,即此所求者. 故其機會為 $1-15/26$ 即 11/26, § 778.

(3) 若王與后必須皆抽出,其機會若干?

三張牌中王與后二張已定,故祇須於其餘十一張中任取一張與之相配即可. 故其機會為 $11/C_3^{13}$ 即 1/26.

可能率之種種意義. 1. §776 中,吾人稱分數 a/m 爲 782
某種事件之可能率.若將試驗一次,或試驗次數甚少之結果而討論之,則毫無意義.必將試驗無限次繼續行之,則能指示其發生率矣.

例如,卽以擲骰子之試驗,若能繼續行之千次,則所得么點之次數與投擲數之比,可發覺其漸漸接近 1/6. 擲數愈多,則爲愈近.

2 對於多種重要之事——壽數卽屬其一——§766 之定義不能應用,因其不能列舉相等可能之方法,其中能發生或失敗者.但在過去極多之考驗中,此種事件之發生率亦可規定之.設如可能,吾人亦謂此分數爲可能率.如在擲骰子中1/6卽指屢次擲之,則某類點數可在將來試驗中有希望發生之次數.

例如,調查戶口所得之報告,在 1880 年,六十歲老人每 100,000 人中有三分之二仍能活至 1890, 吾人卽謂六十歲人再活十年之可能性爲 2/3.

3. 但又有用分數 a/m 表事件在一次試驗中發生之希望.有利情形與可能情形之比愈大,卽在已往經驗中同樣事件發生之次數愈多,則此特殊事件,在所討論之一次試驗中發生之希望愈大.

由此觀之,吾人可推測未來事件之一切可能率.例如 A,B 兩足球隊未賽之時,吾人聞其優勝比爲 3 比 2 利於 A,即 A 勝之機會爲 3/5. 此即 A 隊勝利之希望等於從某器中,其中共有五球而有三白球,抽出一白球之可能率相等也.

習題 LXVII

1. 某事之可能率爲 3/8, 試問其優勝比偏於成功抑偏於失敗?其不發生之可能率爲何?

2. 優勝比 10 比 9 利於 A, A 之勝利可能率爲何?又失敗之可能率爲何?

3. 優勝比 5 比 3 利於 A 之打賭 60 元.其希望值若干?

4. 法國哲學家達來貝脫言"對於任何未來事件僅有二種可能之結果,一爲成,一爲敗.故每事機會均爲 1/2 而可能率無意義".問其答案究應如何?

5. 某器盛十六球,其中七白,六黑,三紅.

(1) 若抽出一球,其爲白球,黑球,紅球之機會各若干?

(2) 若抽出二球,其爲二者皆黑,一白一紅之機會各若干?

(3) 若抽出三球,其爲全屬紅色,無紅色與一白,一黑,一紅之機會各若干?

(4) 若抽出四球,其爲一者白色,三者他色及二者白色,二者他色之機會各若干?

(5) 若抽出十球,其爲五白,三黑,二紅之機會若何?

6. 擲二骰而相同及擲三骰而皆相同之機會若何?

7. 擲二骰而相加成七點之機會若何?并證明此機會最大.

8. 擲二骰子至少爲一枚么之機會若何?爲一么之機會若何?

9. 從 *factor* 與 *banter* 中各任意取一字母.取出同字母之機會若何?

10. 一匣有九票,一號,二號,…,九號.設任意抽出二張其相乘積爲偶數之機會若何?爲奇數之機會若何?

11. 上題,從匣中抽出五票,求下列各機會:(1) 1, 2, 3 號均被抽出;(2) 1, 2, 3 號中祇有一張被抽出;(3) 1, 2, 3 號均未抽出.

12. 從 52 張撲克牌中抽取四張,抽得 ace, king, queen 及 knave 之機會若何?同花之 ace, king, queen 及 knave 之機會若何?

13. 以關 whist 爲戲,某人手有 trump 四張,其餘三張各屬別花,其機會若何?

14. 三骰同擲,其和爲五點之機會若何?其和少於五點之機會又若何?

15. 八人圍圓桌而坐,問某某二人相鄰之機會若何?

複雜事件 互斥事件

獨立事件. 兩件或兩件以上之事件,若其一件之成功與否不爲他一事所影響者,則謂之獨立事件.反之則謂之相互依賴. 783

例如,從袋中抽球,設抽出後仍返原袋,則第一次與第二次爲獨立;若第一次抽出後不返還則謂之相互依賴.

定理 1. 一組獨立事件發生之可能率爲其各單獨事件可能率之積. 784

設二獨立事件之可能率各爲 a_1/m_1 及 a_2/m_2.

則第一事件之相等可能情形爲 m_1，而第二事件爲 m_2，又因二事獨立，m_1 情形之一發生時，或可與 m_2 情形之一同時發生．故二事發生之情形當爲 m_1m_2．仿此，二事得以成功之情形爲 a_1a_2．故二者皆成功之可能率爲 $\frac{a_1a_2}{m_1m_2}$ 即可以 $\frac{a_1}{m_1}\cdot\frac{a_2}{m_2}$ 表明之．

二件以上之事得以同理證之．

上述者僅適用於 §776 所述之事件，而依 §782 所述，吾人可應用此定理於將來各種事件，如下面之例 2．

例如，以一骰子連擲二么之機會爲 1/6·1/6 即 1/36．

又如從一袋中抽球，此袋有五白球及四黑球，第一次抽出之球仍回袋中，則連抽白球二次之機會爲 5/9 × 5/9 即 25/81．

785　**定理 2．** 設第一事件之可能率爲 p_1，此後第二事件之可能率爲 p_2，則此二事依次發生之可能率爲 p_1p_2．二事以上之事件準此類推．

此定理可如定理 1 之證法，蓋顯然包括定理 2 也．

例如，從含有五白球四黑球之袋中抽球而不返原袋時，則抽第二球時其機會爲 4/8．故不返原袋時，連抽二白球之機會爲 5/9 × 4/8 即 5/18．

例 1．用一骰擲三次，其至少有一么之機會若何？

除出每次擲之均爲失敗外，至少必有一么．一次失敗之機會爲 5/6，三次均失敗之機會爲 5/6 × 5/6 × 5/6 即 125/216．故至少有一么之機會爲 1 − 125/216 即 91/216．

例 2. A 能解某題之機會爲 $3/4$. B 能解某題之機會爲 $2/3$. 設 A 與 B 皆獨自解之,此題能解之機會若干?

除 A 與 B 皆失敗外,則此題均能解答. A 失敗之機會爲 $1/4$, B 失敗之機會爲 $1/3$. 故二人皆不能解之機會爲 $1/12$. 故此題能解之機會爲 $11/12$.

例 3. 有二袋,第一袋有五銀幣一金幣,他袋有三銀幣. 設從第一袋抽出四幣,置於第二袋,然後從第二袋抽出五幣而置於第一袋. 金幣在第二袋之機會若何 在第一袋之機會若何?

金幣從第一袋取出,置入第二袋之機會爲 C_4^5/C_4^6 即 $2/3$, § 781, 例 5. 第二次抽取時,其遺留於第二袋之機會爲 $6/C_5^7$ 即 $2/7$. 故二次抽取後,在第二袋之機會爲 $2/3\times 2/7$ 即 $4/21$. 故在第一袋之機會爲 $1-4/21$ 即 $17/21$.

例 4. 設同時擲八幣,其至少有一幣爲正面之機會若干?

例 5. A, B, C, D 同獵鷓鴣. 若 A 每獵二隻而中一隻, B 每獵三隻而中二隻, C 每獵五隻而中四隻, D 每獵七隻而中五隻. 若同時向一鳥發槍,打中之機會若何?

例 6. A 器有五白球,四紅球. B 器有六白球,二黑球,則從 A 器抽出白球而復置 B 器後又重從 B 器抽出之機會若何?

例 7. A 能再活五年之機會爲 $3/4$; B 爲 $5/6$. 則五年後 A 與 B 俱在之機會若何? A 存 B 歿? A 歿 B 存? A, B 皆歿?

互斥事件. 若二事或二件以上之事,僅有一事得發生,則稱爲互斥事件. 736

例如擲骰子,在同一骰子上么點與兩點之出現爲互斥事件.

787 **定理 3.** 一組互斥事件，其中成就一事件之可能率，等於各個單獨事件可能率之和。

設有互斥事件 A 與 B.

對於互斥事件之可能情形可分三類：(1) A 成 B 敗；(2) A 敗 B 成；(3) A 敗 B 敗。

設此類可能情形之種數各爲 l, m, n. 則

(a) A 或 B 之任一，得以成就之機會爲 $\dfrac{l+m}{l+m+n}$.

因 $l+m+n$ 爲可能情形而 $l+m$ 爲有利情形。

(b) A 單獨成就之機會爲 $\dfrac{l}{l+(m+n)}$.

蓋非 B 失敗則 A 不能成功，故 A 成 B 敗之 l 種情形，即 A 之能成就之各個情形。A 敗 B 成及 A 敗 B 敗之情形爲 $m+n$ 種即 A 敗之各個情形。

(c) 仿此 B 成就之機會爲 $\dfrac{m}{m+(l+n)}$.

但
$$\frac{l+m}{l+m+n}=\frac{l}{l+(m+n)}+\frac{m}{m+(l+n)}.$$

故 A 或 B 之任一得成之機會爲單獨事件 A 與 B 得成之機會之和。

二件以上之事件，可準此類推。

例如，從袋中抽球，此袋有四白，五黑及七紅球，因其爲白球之機會爲 $1/4$，其爲黑球爲 $5/16$，爲黑或白任何之一之機會爲 $1/4+5/16$ 卽 $9/16$. 此法可直接從 §776 求得. 實際上此定義可認爲定理 3 之特殊情形.

注意不可應用此定理於不互斥事件。

例如，§785，例 2 所問 A 與 B 同時各自解答某題之機會，A 得成功之機

會爲 $3/4$, B 爲 $2/3$, 吾人不能將其 $3/4$ 及 $2/3$ 相加, 因 A 成 B 成之二事不相互斥.互斥時之情形: A 成 B 敗, A 敗 B 成, A 成 B 成.此等情形之機會, § 784, $3/4\times 1/3$ 卽 $3/12$, $1/4\times 2/3$ 卽 $2/12$, $3/4\times 2/3$ 卽 $6/12$; 而三種機會之和爲 $11/12$ 卽此題能解答之可能率.

例 1. A 器內有十球,其中三球白色, B 器內有十二球,其中四球爲白色.設 A, B 二器隨取任何之一而從此抽出一球,其爲白球之機會若何?

吾人必須求下列各互斥事件之機會: (1) 取 A 器而抽出一白球; (2) 取 B 器而抽出一白球.

取 A 器之機會爲 $1/2$ 而從 A 器抽取白球之機會爲 $3/10$. 故 (1) 之機會爲 $1/2\times 3/10$ 卽 $3/20$. 仿此, (2) 之機會爲 $1/2\times 4/12$ 卽 $1/6$.

故白球抽取之機會爲 $3/20+1/6$ 卽 $19/60$.

例 2. 一人可隨便從袋中抽取二幣,此袋有一元幣五枚,半元幣七枚,其希望值若干?

抽取二枚一元幣之希望值爲 2 元 $\times C_2^5/C_2^{12}=2\times 5/33=0.30$ 元; 抽取二枚半元幣之希望値爲 1 元 $\times C_2^7/C_2^{12}=1\times 7/22=0.32$ 元;抽取一枚一元幣,一枚半元幣之希望值爲 1.50 元 $\times 5.7/C_2^{12}=1.50\times 35/66=0.80$ 元.

故希望值總值爲 $\$0.30+\$0.32+\$0.80$ 卽 1.42 元.

例 3. A, B 二人輪流從含有三白球,二黑球之袋中抽取一球,抽出後不再置入.設 A 開始,則每人先得白球之機會若何?

A 第一次抽得之機會爲 $3/5$.

A 敗後, B 抽得之機會爲 $2/5\times 3/4$ 卽 $3/10$, 因當 B 抽時,此袋有四球而三球爲白色.

A 敗後, B 復敗,然後 A 抽得爲 $2/5\times 1/4\times 3/3$ 卽 $1/10$, 因此時,袋中之三球盡屬白球.

故 A 之總共機會爲 $3/5+1/10$ 卽 $7/10$, 而 B 爲 $3/10$.

例 4. 上題若抽取後，重復置入，則 A 與 B 之機會各爲若何?

第一次輪流 A 之機會爲 $3/5$, B 爲 $2/5\times 3/5$ 即 $6/25$; 而以後每次輪流之機會均與此相等.

故彼等總機會之比爲 $3/5:6/25$, 或 $5:2$; 即 A 之總機會爲 $5/7$, B 爲 $2/7$.

例 5. 一室中有三桌，其上各置九，十，十一册書. 今欲得某某六册中之任何一册，而此六册則散置於三桌之上，第一桌上有其二，第二桌上有其三，第三桌上有其一. 設有友人任取室中之一册給我，則此書爲我所欲者之機會若何?

例 6. 某畜馬主人以其二馬加入某次賽馬會，而此二馬得勝之機會各爲 $1/2$ 及 $1/3$. 求馬主得勝之機會.

例 7. A, B 二人以二骰子爲賭，以最先能擲出二點者爲勝，若 A 先擲，則二人得勝之機會各若何?

788 **單獨事件之重複試驗.** 下列定理論及某事件在連續試驗中成就特定次數之機會，設已知單獨試驗成就之可能率.

789 **定理 4.** 設單獨試驗成就之可能率爲 p, 則 n 次試驗中 r 次成就之可能率爲 $C^n_r p^r q^{n-r}$; 此處 $q=1-p$.

因在任何某組 r 次試驗中皆成就而其餘 $n-r$ 次試驗皆失敗之可能率爲 $p^r(1-p)^{n-r}$, 即 $p^r q^{n-r}$, 設 $q=1-p$, § 784.

又因共 n 次試驗，而可選 r 次者有 C^n_r 法皆爲互斥.

故其可能率爲 $C^n_r p^r q^{n-r}$, § 787.

例如，以一骰子擲五次而得二次爲幺或五骰子同時擲得二骰子爲幺者，爲 $C^5_2\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^3$ 即 $625/3888$.

注意 $C_r^n p^r q^{n-r}$ 爲 $(p+q)^n$ 二項定理展開式之 p^r 項，因 $C_r^n = C_{n-r}^n$.

定理 5. 在 n 次試驗中，某事件至少成就 r 次之可能率 780
等於 $(p+q)^n$ 之展開式中開首 $n-r+1$ 項之和，即

$$p^n + C_1^n p^{n-1}q + C_2^n p^{n-2}q^2 + \cdots + C_{n-r}^n p^r q^{n-r}.$$

蓋每事確成就 r 次，或確多於 r 次謂之至少成就 r 次，而 $p^n, C_1^n p^{n-1}q, \cdots, C_{n-r}^n p^r q^{n-r}$ 各代表 $n, n-1, \cdots, r$ 次成就之可能率也，§ 789.

例如，以一骰子擲五次，至少二次爲么之機會爲

$$(\tfrac{1}{6})^5 + 5(\tfrac{1}{6})^4(\tfrac{5}{6}) + 10(\tfrac{1}{6})^3(\tfrac{5}{6})^2 + 10(\tfrac{1}{6})^2(\tfrac{5}{6})^3 \text{ 即 } \tfrac{763}{3888}.$$

例 1. A, B 二人爲某遊戲，不得爲和局，而 A 之技能倍於 B. 則 A 於五次中勝利三次之機會爲何?

每次遊戲 A 贏之機會爲 $2/3$，負之機會 $1/3$. 故五次中 A 能贏三次之機會爲 $(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})^5$ 之開始三項之和，即 $(\frac{2}{3})^5 + 5(\frac{2}{3})^4\frac{1}{3} + 10(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2$ 即 $64/81$.

例 2　前題，B 贏二次前，A 贏三次之機會若何?

此乃開始四次中 A 贏至少三次之機會爲 $(\frac{2}{3})^4 + 4(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})$ 即 $\frac{16}{27}$.

故 B 贏 n 次前，A 贏 m 次之機會與在 $m+n-1$ 次中 A 贏至少 m 次之機會相同.

例 3. 同時擲十幣，六幣爲正面者之機會若何? 至少六幣爲正面者若何?

例 4. 同時擲四骰子，三骰現么之機會若何? 至少三骰現么之機會若何?

例 5. 如例 1 所述，五次遊戲中 A 至少勝四次之機會若何?

例 6. 上題，B 勝一次之前，A 勝四次之機會若何?

習 題 LXVIII

1. 一袋有白球三，黑球五及紅球七枚，每次從中抽出一球而卽放入，試求下列各種抽出之機會：(1) 先爲一白球，後爲一紅球而終爲一黑球；(2) 白，紅，黑各一球而次序不論。

2. 上題，設取出後不復放入，則連續抽出三次中，僅第一次得一白球之機會若何？

3. 一袋中有五個半元幣，四個一元幣及三個五元幣，則隨意抽取二幣之希望值若干？

4. 一門鎖上之機會爲 1/2. 從一束八個鑰匙上，僅有一個能開此鎖，今隨意選出三個而往開之，其能開門之機會若何？

5. 有獨立事件三項，其機會各爲 1/2, 2/3 及 3/4. 三事無一成就之機會若何？僅有一事成就之機會若何？僅有二事成就之機會若何？三事皆成之機會若何？

6. 擲二骰子，求其不利於其和爲七點或其和爲十一點之優勝比。

7. 用三骰子同擲之，其不利於總和十點之優勝比若何？利於總和大於五點之優勝比又若何？

8. 箱子中有券十一張，各以 1, 2,…11 標明. 從中抽取三券使其和爲十二之機會若何？其和爲奇數之機會若何？

9. A, B 二賭徒以二骰爲賭具，議定擲得七點時則 A 爲勝，十點則爲 B 勝。其餘點數，則賭注 A, B 均分之. 比較二人之機會。

10. 上題，二賭客議定 A 先擲得六點而後 B 得七點則 A 爲勝。如 B 先得七點而 A 爲六點則 B 爲勝，以 A 開始而輪流擲之。試比較二人之機會。

11. 一袋盛有白球四枚，黑球八枚，A, B, C 三人議定先抽得白球者爲勝。

依 A,B,C 次序而抽之，若抽後不復置入，則各人之機會若何？若重置入又若何？

12. 一百張獎劵中有 100 元之獎五枚，50 元之獎十枚，5 元獎廿枚，則一劵之希望值若干？

13. A 袋內有五球其中之一爲白色，B 袋內有六球無有白球．若從 A 袋抽取三枚而置入 B 袋內，然後從 B 袋抽三枚，置 A 袋內．則白球在 A 袋內之機會若干？

14. A 袋內有 m 球其中 a 個爲白球，B 袋內有 n 球其中 b 個爲白球．則從任何一袋抽取一球其爲白球之機會與各球均置一袋中而抽取一白球之機會相等否？

15. 某城中十日內死去五人，但此十日中包含一月一日．問在一月一日不發生死亡之機會若何？

16. 三個六十歲人中普通活至七十歲者爲二人．則五人中至少三人再活十年之機會若何？

17. 某童給予五題，普通能解答三題．若試驗時給予八題做出五題乃爲及格，則彼及格之機會若何？

18. 設一人擲二顆骰子，第一次得七點，可獲一元；第二次擲得七點，亦可獲得一元，其餘類推，直至擲得七點爲止．其希望之總值若干？

19. A 與 B 打網球，A 普通在四次中勝三次．則 A 勝 B 一局，其比數爲 6 比 3 之機會若干？若和局 (deuce sets) 不論，則 A 勝 B 一局 (set) 之總機會若何？

20. 上題，若 A 以四比二之不利情形後勝一局之機會爲何？

21. 兩賭客，各人以 32 元打賭，得三點爲勝，但當 A 得二點及 B 得一點時，卽爲完場．問二人如何分此 64 元之款？

XXVIII. 算學歸納法

791 **算學歸納法.** 此章內所包括之公式可用算學歸納法證明而使之成立.用下例說明之.

例. 求證起始 n 個奇數之和爲 n^2.

今所證明者爲:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{1}$$

從觀察所得 n 爲 1 或 2 時 (1) 式爲眞.設 n 爲 k 時此式仍爲眞,於是

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2. \tag{2}$$

(2)之各端加一奇數項,即 $2(k+1)-1$ 即 $2k+1$,再以 $(k+1)^2$ 代 k^2+2k+1,則

$$1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2. \tag{3}$$

但以 $k+1$ 代 n 於 (1) 內亦得 (3),故知 n 爲特殊值 k 時若爲眞,則 n 爲 $k+1$ 時,此公式仍爲眞也.

但已知 k 爲特殊值 1 時爲眞.故 $n=1+1$ 即 2 時亦爲眞,而 $n=2+1$ 即 3 時,而至所有各正整數時,亦皆爲眞.

普遍言之,若一公式內使所含之 n 等於 1 時,試而爲眞,然後假設 $n=k$ 時其公式爲眞.若能證明 $n=k+1$ 時亦爲眞,則此式內 n 爲任何正整數時皆爲眞.蓋可以此理申述之:因 $n=1$,其式爲眞,$n=1+1$ 即 2 時亦爲眞,故 $n=2+1$ 即 3 時,以至 n 爲任何正整數時皆爲眞.

此法復用二項定理之證明以說明之.

n 爲較小數目時,可用乘法得

$$(a+b)^n=a^n+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\cdots+C_r^n a^{n-r}b^r+\cdots. \tag{1}$$

以 $a+b$ 乘 (1) 之兩端,由 § 773, 1, 得

$$\begin{array}{l} (a+b)^{n+1}=a^{n+1}+C_1^n \\ \qquad\qquad\qquad\quad +1 \end{array}\left|\begin{array}{l} a^nb+C_2^n \\ \quad\;\; +C_1^n \end{array}\right|\begin{array}{l} a^{n-1}b^2+\cdots+C_r^n \\ \qquad\qquad\quad +C_{r-1}^n \end{array}\left|\begin{array}{l} a^{n-r+1}b^r+\cdots \\ \end{array}\right.$$

$$=a^{n+1}+C_1^{n+1}a^nb+C_2^{n+1}a^{n-1}b^2+\cdots$$

$$+C_r^{n+1}a^{(n+1)-r}b^r+\cdots. \tag{2}$$

但 (2) 與 (1) 中以 $n+1$ 代 n 所得之結果相同.

故設 $n=k$ 時, (1) 爲眞,則 $n=k+1$ 時亦爲眞.但已知 (1) $n=1$ 時爲眞,故當 $n=1+1$ 卽 2 時亦爲眞,當 $n=2+1$ 卽 3 時亦爲眞,以下類推.

因公式 $C_r^n+C_{r-1}^n=C_r^{n+1}$ 能單獨用組合原理以證明之, § 774, 而此處二項定理之證明與此原理無關.

習 題 LXIX

試以算學歸納法,證明下列公式 §§ 701, 702:

1. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a(1-r^n)/(1-r)$.
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4$.
4. $1+3+6+\cdots+n(n+1)/2!=n(n+1)(n+2)/3!$.

XXIX. 方 程 論

基本定理 有理根

一元 n 次普遍方程之二標準式. 任何有理整數方程,含 792
有一未知數如 x 且爲 n 次,必可化成下列之標準式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{1}$$

當係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 爲已知數時, (1) 謂之數字方程,但係數未定時,謂之 n 次之普遍方程.

末項係數 a_n 常謂之絕對項。

方程 (1) 之完全或不完全者，按 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 無一個或數個為 0 而定。注意一完全方程內其項數為 $n+1$.

當係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 為實數時，則可假定首項 a_0 為正，若為有理數時，可假定其為無公因數之諸整數。

以 a_0 除 (1) 之兩邊，則可化為第二標準式

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n = 0, \tag{2}$$

在此式內第一項之係數為 1，而 $b_1 = a_1/a_0$ 等等。而用 (2) 往往較為便利。

此章內須認明 $f(x)=0$ 表方程 (1) 或 (2).

793 **方程之根.** 方程 $f(x)=0$ 之根，為以 x 之值代入多項式 $f(x)$ 內為零者，§§ 332, 333. 有時為便利計，名此方程之根為多項式之根。

794 從根之定義，則 a_n 為 0 時，$f(x)=0$ 中之一個根為 0；又方程 $f(x)=0$ 所有之係數為正，則此方程無正根。且當 $f(x)=0$ 為完全方程時，若其各項係數正負相間，則無負根。

例如，$2x^3+x^2+1=0$ 無正根，因當 x 為正時，此多項式 $2x^3+x^2+1$ 不能為 0，而 $2x^3-x^2+3x-1=0$ 不能有負根，蓋 $2x^3-x^2+3x-1$ 當 x 為負時不能為零。

795 **定理 1.** 設 b 為 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 可為 $x-b$ 所除盡；反之設 $f(x)$ 能為 $x-b$ 所除盡，則 b 為 $f(x)=0$ 之一根。

從§413, $f(x)$ 爲 $x-b$ 除後之餘式爲 $f(b)$. 但當 b 爲 $f(x)=0$ 之根時, $f(b)$ 爲 0, §793, 故 $f(x)$ 能爲 $x-b$ 除盡. 反之 $f(x)$ 爲 $x-b$ 除盡時, 其餘式 $f(b)$ 必爲 0, 故 b 爲 $f(x)=0$ 之根.

例. 求證 3 爲 $f(x)=x^3-2x^2-9=0$ 之根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & +0 & -9 & 3 \\ & 3 & 3 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 3, & 0 & =f(3) \end{array}$$

以 $x-3$ 除 x^3-2x^2-9, 用綜合除法, §411, 得餘式 $f(3)$ 爲 0, 故 3 爲 $f(x)=0$ 之根.

設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根, $f(x)$ 必可爲 $x-b$ 除盡, 稱商爲 $\phi(x)$, 得 796

$$f(x)=(x-b)\phi(x).$$

故 $f(x)=0$ 之其他各根, 仍爲以 x 值代入多項式 $\phi(x)$ 內爲零者; 卽爲降次方程 $\phi(x)=0$ 之根, §341.

例. 解方程 $x^3-3x^2+5x-3=0$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +5 & -3 & 1 \\ & 1 & -2 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & +3, & 0 & \end{array}$$

用觀察法 1 爲其一根, 故以 $x-1$ 除 x^3-3x^2+5x-3, 吾人得降次方程 $x^2-2x+3=0$. 此二次方程用 §631, 求其根爲 $1\pm i\sqrt{2}$. 故此方程之根爲 $1,\ 1+i\sqrt{2},\ 1-i\sqrt{2}$.

現先假定有理整數方程 $f(x)=0$, 至少有一根, 而此理將以後證明之. 797

從此假定及 §795, 吾人導出下列定理, 謂之代數基本定理.

定理 2. 每個 n 次方程, 例如 798

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

有 n 根且僅有 n 根.

由 §797 必有一 x 值代入 $f(x)$ 爲零, 設此值爲 β_1, 則 $f(x)$ 可爲 $x-\beta_1$ 除盡, §795, 則商之第一項必爲 a_0x^{n-1}. 故

$$f(x)=(x-\beta_1)(a_0x^{n-1}+\cdots). \tag{1}$$

仿此,設 x 又有一値 β_2,代入以後能使此多項式 $a_0x^{n-1}+\cdots$ 爲 0,得 $a_0x^{n-1}+\cdots=(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots)$. 故由 (1),

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots). \tag{2}$$

如此繼續 n 次以後,得

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n). \tag{3}$$

由此證明,則有 n 個一次之因式,卽 $x-\beta_1, x-\beta_2,\cdots,x-\beta_n$, 而 $f(x)$ 爲其乘積;又從 § 419, $f(x)$ 除此以外不能有他之因式。

但在乘積內,有一因式爲零時,乘積爲零,故由 (3) 可知 $x=\beta_1$, β_2, $\cdots$ 或 β_n 且祇有 x 等於此各數時,乘積爲零.故由 §793, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, n 個數目爲 $f(x)=0$ 之根,而此外別無他根。

799　由此定理,則知解方程 $f(x)=0$ 與多項式 $f(x)$ 之分析因式,當屬相同. 又若已知方程之根時,求此方程時祇須以 x 減各數使成諸二項因式之積並設等於 0, 卽得.

例. 2, 1/2, −1, 0 爲各根,求此方程.

則爲　$(x-2)(x-1/2)(x+1)(x-0)=0$ 卽 $2x^4-3x^3-3x^2+2x=0$.

800　**重根.** 注意,若方程之根 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 有時二個或多個可相等.若有二個或二個以上之根等於 β, 吾人稱 β 爲重根. 又依其 β 爲二個,三個,$\cdots$,r 個,吾人稱 β 爲二重根,三重根,通稱爲 r 重根.單根者可以謂重數 r 爲 1 之一根.顯然由 § 798, 得

β 爲 $f(x)=0$ 之 r 重根之條件爲 $f(x)$ 可爲 $(x-\beta)^r$ 除盡,而不能爲 $(x-\beta)^{r+1}$ 除盡.

故凡 n 次之方程必有 n 根,其所謂 r 重根者 乃其相同根有 r 個.故凡 n 次之方程有 n 個不同之根當爲不眞矣.

例如, $x^3-3x^2+3x-1=0$ 爲一三次方程;因 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, 其各根爲 1.

數字方程之求根法. 設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 表示整係數之方程,且設 b 表一整數而 b/c 爲約簡之分數.故 §§ 451, 795, 設 $f(x)=0$ 中 b 爲其一根,則 b 爲 a_n 之一因式;又從 §§ 452, 792 設 b/c 爲其一根, b 及 c 各爲 a_n 及 a_0 之一因式.故在特殊狀況,設 $a_0=1$, b/c 不爲其一根,除非 $c=\pm1$, 卽除非 b/c 表 $\pm b$. 故其下列定理 § 454: **801**

凡方程之形式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$, 其中係數 $a_1,\cdots a_n$ 爲整數,不能有有理分數根.

802 由上述,可知有理係數方程之有理根,可由試驗得之.此試驗可以簡單除法作之.

例. 求下列方程之有理根,

$$3x^5-8x^4+x^2+12x+4=0.$$

其僅能有之有理根爲 ±1, ±2, ±4, $\pm1/3$, $\pm2/3$, $\pm4/3$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & -8 & +0 & +1 & +12 & +4 & 2 \\
 & 6 & -4 & -8 & -14 & -4 & \\
\hline
3 & -2 & -4 & -7 & -2, & 0 & 2 \\
 & 6 & 8 & 8 & 2 & & \\
\hline
3 & 4 & 4 & 1, & 0 & & -1/3 \\
 & -1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
3 & 3 & 3, & 0 & & &
\end{array}$$

由觀察則知 1 非其一根.試驗 2, 則知爲一根而得其降次方程爲

$$3x^4-2x^3-4x^2-7x-2=0.$$

又知 2 亦爲此方程之根,因此而得第二降次方程 $3x^3+4x^2+4x+1=0$. 此方程無正根,因各項皆爲正, § 794. 以

-1 試之知其非根.以 $-1/3$ 試之知其爲一根,且得第三降次方程 $x^2+x+1=0$.

故所設方程之有理根爲 $2,\ 2,\ -1/3$. 解 $x^2+x+1=0$, 所得其餘之根爲 $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

803 欲使試驗之計算較簡,當牢記以下三事:第一,§453 所載之注意;第二,若已知一數非爲原方程之根,則此數不能再爲降次方程之根;第三,以下之定理:

若 b 爲正,且用綜合除法,以 $x-b$ 除 $f(x)$ 所得之結果中,各係數之符號,皆爲正,則 $f(x)=0$ 不能有大於 b 之根;若 b 爲負,且仿前所得符號,正負相間,則 $f(x)=0$ 不能有代數上小於 b 之根.

因依綜合除法之性質,若在上述之二情形中,若增加 b 之絕對值,則結果中後於第一係數之各係數皆將增大其絕對值,而不變其符號,最後之係數亦然,即餘式不爲 0 也.

例 1. 求證 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 無大於 1 之根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +3 & -4 & +5 & 1 \\ & +2 & +5 & +1 & \\ \hline 2 & +5 & +1, & 6 & \end{array}$$

以 $x-1$ 除之,吾人僅得正係數.故無根大於 1.設以 $x-2$ 除之,則可得更大之正係數.即 $2+7+10,\ 25$ 是也.

例 2. 求證 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 無小於 -2 之根.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & +4 & -3 & +1 & -2 \\ & -6 & +4 & -2 & \\ \hline 3 & -2 & +1, & -1 & \end{array}$$

以 $x+2$ 除之,其係數爲正負相間,故無小於 -2 之根.

若除以 $x+3$, 則其係數之絕對值更大,爲 $3-5+12,\ -35$ 是也.

804 由此可知,無論何數,若已知其代數上大於 $f(x)=0$ 之一

切實根，則可謂此諸根之上限；若已知其代數上小於 $f(x)=0$ 之一切實根，則可謂此諸根之下限。

例如，由以上之證明，1 爲 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 諸根之上限，而 -2 爲 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 諸根之下限。

習　題　LXX

1. 作方程，其根爲：

(1) $a,\ -b,\ a+b.$　　(2) $3,\ 4,\ 1/2,\ -1/3,\ 0.$

2. 求證 -3 爲下列方程之三重根．

$$x^4+8x^3+18x^2-27=0.$$

3. 求證 1 及 1/2 爲下列方程之二重根．

$$4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=0.$$

4. 用 § 803 求 $x^5-5x^4-5x^3+4x^2-7x-250=0$ 爲其實根之上限及下限．

5. 求證 $2x^4-3x^3+4x^2-10x-3=0$ 無有理根．

下列各式有一個或以上之有理根，試解之：

6. $x^3-x^2-14x+24=0.$　　7. $x^3-2x^2-25x+50=0.$

8. $3x^3-2x^2+2x+1=0.$　　9. $2x^4+7x^3-2x^2-x=0.$

10. $x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0.$

11. $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0.$

12. $3x^4+11x^3+9x^2+11x+6=0.$

13. $x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0.$

14. $2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0.$

15. $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0.$

16. $12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0.$

17. $x^5-7x^4+10x^3+18x^2-27x-27=0.$

18. $2x^4-17x^3+25x^2+74x-120=0.$

19. $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0.$

20. $x^5+8x^4+3x^3-80x^2-52x+240=0.$

21. $2x^5+11x^4+23x^3+25x^2+16x+4=0.$

22. $6x^4-89x^3+359x^2-254x+48=0.$

23. $10x^4+41x^3+46x^2+20x+3=0.$

24. $36x^4-108x^3+107x^2-43x+6=0$

25. $12x^5+20x^4+29x^3+77x^2+69x+18=0.$

26. $2x^6+7x^5+8x^4+7x^3+2x^2-14x-12=0.$

27. $2x^6+11x^5+24x^4+22x^3-8x^2-33x-18=0.$

28. $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4=0.$

根與係數之關係

805 **根與係數之關係.** 以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 爲方程之根，若化成第二標準式，§ 792, (2)；則 § 798 之恆等式，(3)，變爲

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-3}+\cdots+b_n$$
$$=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdots(x-\beta_n).$$

上式右邊相乘，將其結果排列爲 x 之多項式，§ 559. 然後將兩邊同次冪之係數以等號等之，§ 284. 則可得係數 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 與根 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 之關係如下：

$$-b_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_n, \tag{1}$$

$$b_2=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\cdots+\beta_2\beta_3+\cdots+\beta_{n-1}\beta_n, \tag{2}$$

$$-b_3=\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\cdots+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n, \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^n b_n=\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n, \tag{n}$$

其中 (2), (3), … 之右邊代表每二或三個根相乘積之和，餘類推，

其左邊之符號須視右邊各項中根之個數而定爲偶數則正，奇數則負。故其定理：

定理. 任何方程化成 806

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n=0,$$

形式之方程中，第二項之係數 b_1 與各根之和之絕對值相等，符號相反；絕對項 b_n 與各根之積之絕對值相等，符號之同異，視 n 偶或奇數而定，又中間各項之係數 b_r 與每 r 個根相乘積之和之絕對值相等，符號之同異，視 r 爲偶或奇數而定。

在應用本定理之前，若方程之第一係數不爲 1，則須以此係數除全方程。若方程不完全，則須認明其缺項之係數爲 0.

例如，吾人可不用解方程 $3x^3-6x+2=0$ 而知其根之關係如下。以此方程化爲適當之形式，以便應用定理，則得 $x^3+0x^2-2x+2/3=0$. 故

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0,\quad \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=-2,\quad \beta_1\beta_2\beta_3=-2/3.$$

設此方程之各根僅一根爲未知，則欲求此根，可由 $-b_1$ 減 807
各巳知根之和；或以各巳知根之乘積除 b_n 卽得，但 n 若爲奇數，則當先行變號。

例. $2x^3+3x^2-23x-12=0$ 中 3 與 -4 爲其二根。他根若何？

他根爲 $-3/2-[3+(-4)]=-1/2$；亦爲 $6\div3(-4)=-1/2$.

當各根間之某種關係已知，係數間之相當關係亦必存在。808
欲求此關係，應用 § 806 之定理。

例 1. $x^3+px^2+qx+r=0$, 若其根爲等比級數其條件若何?

命諸根爲 α/β, α, $\alpha\beta$, 則

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=-p,\quad \frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha^2+\alpha^2\beta=q,\quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\cdot\alpha\beta=-r.$$

將第三方程化爲 $\alpha^3=-r$, 則 $\alpha=\sqrt[3]{-r}$.

將第一方程除第二方程,以 $\alpha=\sqrt[3]{-r}$ 代入結果,化簡之卽得 $q^3-p^3r=0$.

例 2. $x^3+8x^2+5x-50=0$, 若有二重根,試解之.

以 α, α, β 表諸根,則

$$2\alpha+\beta=-8,\quad \alpha^2+2\alpha\beta=5,\quad \alpha^2\beta=50.$$

解第一,第二兩方程以得 及 β, 則 $\alpha=-5$, $\beta=2$ 及 $\alpha=-1/3$, $\beta=-22/3$.

$\alpha=-5$, $\beta=2$ 適合此方程 $\alpha^2\beta=50$, 但其他二值 $\alpha=-1/3$, $\beta=-22/3$ 不適合此方程.

故所求之根爲 -5, -5, 2.

809 **根之對稱函數.** §805 中根與項相等之諸式,皆爲根之對稱函數, §540. §868 中將證明根之一切其他有理對稱函數,因此又可以方程之係數表示之,成爲有理函數.

例 1. 求方程 $2x^3-3x^2-4x-5=0$ 之根之平方和.

命諸根爲 α, β, γ, 得

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(3/2)^2+4=6\tfrac{1}{4}.$$

例 2. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 α, β, γ, 則根爲 $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ 之方程若何?

若 p', q', r' 爲所求方程之係數,則

$$\begin{aligned}-p'&=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=q,\\ q'&=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta+\alpha\beta\cdot\beta\gamma\\ &=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=(-r)(-p)=rp,\\ -r'&=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=(\alpha\beta\gamma)^2=r^2.\end{aligned}$$

故所求之方程爲 $x^3-qx^2+prx-r^2=0$.

習　題　LXXI

1. $2x^3-7x^2+10x-6=0$ 之二根爲 $1\pm i$；求其第三根。

2. 設以下各方程之根皆成等比級數；試求之：

(1) $8x^3-14x^2-21x+27=0$.　(2) $x^3+x^2+3x+27=0$.

3. 設以下各方程之根皆成等差級數；試求之：

(1) $x^3+6x^2+7x-2=0$.　(2) $x^3-9x^2+23x-15=0$.

4. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$, 其中有一根爲他一根之負數，求證 $pq=r$.

5. 欲使 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根爲他根之倒數，其條件若何？

6. 設方程 $x^4+4x^3+10x^2+12x+9=0$ 有二重根，試解之。

7. 設方程 $14x^3-13x^2-18x+9=0$ 之根成調和級數，試解之。

8. 設方程 $x^4-x^3-56x^2+36x+720=0$ 之二根爲 $2:3$, 他二根之差爲 1, 試解之。

9. 設 α, β, γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根，試作方程使其根爲：

(1) $-\alpha, -\beta, -\gamma$.　(2) $k\alpha, k\beta, k\gamma$.

(3) $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$.　(4) $\alpha+k, \beta+k, \gamma+k$.

(5) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.　(6) $-1/\alpha^2, -1/\beta^2, -1/\gamma^2$.

10. 設 α, β, γ 爲 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之根，求下式各值：

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

(3) $1/\beta\gamma+1/\gamma\alpha+1/\alpha\beta$.　(4) $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+\beta\gamma^2+\gamma\beta^2+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma$.

11. 設 α, β, γ 爲 $x^3-2x^2+x-3=0$ 之根，求下式各值：

(1) $\alpha/\beta\gamma+\beta/\gamma\alpha+\gamma/\alpha\beta$.　(2) $\alpha\beta/\gamma+\beta\gamma/\alpha+\gamma\alpha/\beta$.

(3) $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$.　(4) $(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)$.

(5) $\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$.

方程之變形

810 **數種重要變形.** 有時爲便利計,將已知方程 $f(x)=0$ 變形爲其他方程,使其根與原方程式 $f(x)=0$ 之根有一定關係.變形之常用者如下:

811 將已知方程 $f(x)=0$ 變爲他方程,其根之絕對値與原方程等而其符號相異.

所求之方程爲 $f(-y)=0$, 因代 x 以任一數,如 β 於 $f(x)$ 內所得之結果與代 y 以 $-\beta$ 於 $f(-y)$ 內之結果相同,故當 $x=\beta$ 時, $f(x)$ 爲零,當 $y=-\beta$ 時, $f(-y)$ 亦將爲零;即設 β 爲 $f(x)$ 之根,則 $-\beta$ 即爲 $f(-y)=0$ 之根.

故 $f(x)=0$ 之每個根,符號變後,爲 $f(-y)=0$ 之根;又 $f(-y)=0$ 除此等外無有他根,蓋 $f(x)=0$ 及 $f(-y)=0$ 次數相同.

設原方程爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

則所求之方程爲

$$a_0(-y)^n+a_1(-y)^{n-1}+a_2(-y)^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

化簡即得

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-\cdots+(-1)^na_n=0.$$

故所求之方程可由原方程得之,若 n 爲偶數時,變其奇次項之符號即得,若 n 爲奇數時,則變其偶次項(絕對項亦包含在內).

變形方程內之未知數字 y 可用 x 代之, $f(-y)=0$ 以 $f(-x)=0$ 代之.

例. 變化 $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$ 之各根之符號.

改變偶次項之符號,即得

$$4x^5-9x^3-6x^2-13x-6=0,$$

其實,原方程之根爲 $1/2, 3/2, -2, \pm i$; 變化後之根爲 $-1/2, -3/2, 2, \mp i$.

試變方程 $f(x)=0$ 爲他一方程,而其根爲 $f(x)=0$ 諸根之 812
k 倍.

所求之方程爲 $f(y/k)=0$. 因當 $x=\beta$ 時, $f(x)$ 爲零,當 $y/k=\beta$ 時, $f(y/k)$ 亦將爲零,即當 $y=k\beta$ 時, $f(y/k)$ 亦爲零(比較 § 811).

設已知方程爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

所求之方程將爲

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

化簡分數變成

$$a_0y^n+ka_1y^{n-1}+k^2a_2y^{n-2}+\cdots+k^na_n=0.$$

故所求之方程爲將 k 乘入已知方程之第二項,將 k^2 乘入已知方程之第三項,準此類推,惟須注意計入其缺項.

當 $k=-1$, 則變形化爲 § 811 者.

例. 將 $x^4+2x^3-x+3=0$ 之根乘 2, 又以 2 除之.

所求第一方程爲 $x^4+4x^3-8x+48=0$, 又因乘 $1/2$ 與爲 2 所除相同,第二方程爲

$$x^4+x^3-x/8+3/16=0, \text{ 即 } 16x^4+16x^3-2x+3=0.$$

下例將說明方程變形之一重要應用. 813

例. 試將 $36x^3+18x^2+2x+9=0$ 變形,使其首項係數爲 1, 其他係數皆爲整數.

以 36 除之,得

$$x^3+x^2/2+x/18+1/4=0. \tag{1}$$

以 k 乘各根,

$$x^3+kx^2/2+k^2x/18+k^3/4=0. \tag{2}$$

由觀察得 k 能消去分母之最小值爲 6, 故以 6 代入 (2), 得

$$x^3+3x^2+2x+54=0, \tag{3}$$

此爲所求之方程。方程 (3) 之根各以 6 除之,即爲 (1) 方程之各根。

814 將已知方程 $f(x)=0$ 變形,使其根爲 $f(x)=0$ 各根之倒數。

所求之方程爲 $f(1/y)=0$. 因當 $x=\beta$ 時, $f(x)$ 爲零,當 $1/y=\beta$ 時,即 $y=1/\beta$ 時, $f(1/y)$ 亦將爲零。

設已知方程爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

所求之方程

$$a_0/y^n+a_1/y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}/y+a_n=0,$$

當分數化簡變爲

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1y+a_0=0.$$

故所求之方程可僅將已知方程中係數之順序倒轉即得。

例. 試作 $2x^4-x^2-3x+4=0$ 之倒數根之方程。

倒轉其係數程序,得 $4x^4-3x^3-x^2+2=0$.

815 如 $2x^3+3x^2-3x-2=0$ 一類之方程雖經此次變形,即其係數程序雖屬倒轉,而其形不變時,名之曰倒數方程, §645. 設 β 爲其一根,則 $1/\beta$ 亦爲其一根。故若此方程爲偶次方程,則其所有根之半部爲其他部之倒數。其方程次數爲奇次時,則除一根外,其他諸根亦然。但此時必有一根爲其本身之倒數,即

必有一根爲 1 或 -1. 例如, $2x^3+3x^2-3x-2=0$ 之一根爲 1, 而其他之根爲 -2 及 $-1/2$.

由此變形之性質,即當一方程之係數爲變數時,而首項係 816
數爲零,則其中一根變爲無窮大;當前二項係數爲零,則其二根必變爲無窮大;準此類推.

例 1. 求證當 m 漸變爲零時, $mx^3+3x^2-2x+1=0$ 之根變爲無窮大.

應用 § 814 於
$$mx^3+3x^2-2x+1=0, \tag{1}$$
得
$$x^3-2x^2+3x+m=0. \tag{2}$$

設 (2) 之各根爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 則 (1) 爲 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

由 § 806, $\beta_1\beta_2\beta_3=-m$, 故設 m 漸近於 0 爲極限, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 三根中之一根亦將以 0 爲極限,又設此根爲 β_1, 則 (1) 之相當根,即 $1/\beta$, 必漸近於 ∞, § 512.

例 2. 求證設 $mx^3+m^2x^2+x+1=0$ 中 m 漸近於零爲極限,則其中二根變爲無窮大.

應用 § 814 於
$$mx^3+m^2x^2+x+1=0, \tag{1}$$
得
$$x^3+x^2+m^2x+m=0. \tag{2}$$

設 (2) 之根爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 則 (1) 之根爲 $1/\beta_1, 1/\beta_2, 1/\beta_3$.

又
$$\beta_1\beta_2\beta_3=-m, \quad \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=m^2. \tag{3}$$

從 (3) 若 m 漸近於 0, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 三根中之二亦將漸近於 0, 又若其根爲 β_1, β_2, 則 (1) 之相當諸根,即 $1/\beta_1, 1/\beta_2$ 定將漸近於 ∞.

求變一已知方程 $f(x)=0$ 爲他方程,而其各根爲 $f(x)=0$, 817
中各根減一常數 k.

所求之方程爲 $f(y+k)=0$, 因設當 $x=\beta$ 時, $f(x)$ 等於零, 將 $y+k=\beta$ 時,即當 $y=\beta-k$ 時, $f(y+k)$ 將等於零.

設已知方程爲
$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$
所求方程爲
$$f(y+k)=a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

各項用二項定理展開之，且合併其同類各項，則爲

$$\phi(y)=c_0y^n+c_1y^{n-1}+\cdots+c_{n-1}y+c_n=0,$$

其中 $c_0=a_0$, $c_1=nka_0+a_1$, 等等.

由 $f(x)$ 求 $\phi(y)$ 之法，頗感麻繁. 下法較爲便捷，至少當 $f(x)$ 之係數爲已知有理數時.

設 $x=y+k$, 則 $y=x-k$, 得

$$f(x)=f(y+k)=\phi(y)=\phi(x-k),$$

即

$$c_0(x-k)^n+\cdots+c_{n-1}(x-k)+c_n\equiv a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

設此恆等式之兩邊各以 $x-k$ 除之，設其商又以 $x-k$ 除之，準此類推，則左端連續所得之餘式，即 c_n, c_{n-1}, $\cdots$, 將與右端所得之餘式相同. 故由 $f(x)$ 得 $\phi(y)$ 如下：以 $x-k$ 除 $f(x)$, 再以 $x-k$ 除其商，如此類推. 其連續餘數爲 c_n, c_{n-1}, $\cdots c_1$, 而最後商將爲 c_0 (比較 § 423). 除法可用綜合除法.

例 1. 將 $2x^3-7x^2-3x+1=0$ 之根各減 4.

第一法. 以 $y+4$ 代入 x, 得

$$\begin{aligned}2x^3-7x^2-3x+1&=2(y+4)^3-7(y+4)^2-3(y+4)+1\\&=2y^3+17y^2+37y+5.\end{aligned}$$

第二法. 如 § 423 排列之，得

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -7 & -3 & +1 & \underline{4} \\
 & 8 & 4 & 4 & \\ \hline
2 & +1 & +1, & 5 & \therefore\ c_3=5. \\
 & 8 & 36 & & \\ \hline
2 & +9, & +37 & & \therefore\ c_2=37. \\
 & 8 & & & \\ \hline
2, & +17 & & & \therefore\ c_1=17\ 而\ c_0=2.
\end{array}$$

故所求之方程爲

$$2y^3+17y^2+37y+5=0.$$

例 2. 將 $x^3+4x^2+x+3=0$ 之根各增 4.

增各根以 4 卽減各根以 -4. 故所求之方程可以 $y-4$ 代 x 而得，或以 -4 用綜合法除之，則得 $y^3-8y^2+17y-1=0$.

用 § 817, 可將一巳知方程變爲他方程，使其消去未知項之指定冪。 818

例 1. 將 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 變爲他方程，使其消去未知之二次項。

使 $x=y+k$, 得 $y^3+(3k-3)y^2+\cdots$.則得 $3k-3=0$, 卽 $k=1$. 又將 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 之根減去 1, 得 $x^3+2x+9=0$.

例 2. 將 $x^3-5x^2+8x-1=0$ 變爲他方程，使其消去未知之一次項。

使 $x=y+k$, 得

$$y^3+(3k-5)y^2+(3k^2-10k+8)y+\cdots=0.$$

則 $3k^2-10k+8=0$, 卽 $k=2$ 或 $4/3$.

將 $x^3-5x^2+8x-1=0$ 之各根減 2, 得

$$x^3+x^2+3=0.$$

設由 $f(x)=0$ 各根中減 k,得方程 $\phi(x)=0$, 其中各項皆正，則 k 爲 $f(x)=0$ 之諸正根之上限，§ 804. 因當此情形，$\phi(x)=0$ 無正根，§ 794. 故 $f(x)=0$ 之任何正根，減 k 後，均變負根. 故小於 k. 819

由觀察，試驗，用綜合除法，可得 k 之最小整數值，而使 $\phi(x)=0$ 之各項皆爲正號。如此作法，恆屬便易。

求 $f(x)=0$ 負根之下限，可用求 $f(-x)=0$ 諸根之上限以得之。因設 k 爲 $f(-x)=0$ 諸根之上限，則 $-k$ 必爲 $f(x)=0$ 諸根之下限，§ 811.

例。 求 $f(x)=x^4-6x^3+14x^2+48x-121=0$ 諸根之上限及下限。

吾人從觀察及試驗知 $k=1$ 與 $k=2$ 皆不能作一各項皆正之 $\phi(x)=0$, 而 $k=3$ 時,則可得之. 其實設使 $f(x)=0$ 之各根減小 3, 則得 $\phi(x)=x^4+6x^3+14x^2+78x+68=0$. 故 3 爲 $f(x)=0$ 之上限.

方程 $f(-x)=0$ 爲 $x^4+6x^3+14x^2-48x-121=0$. 用觀察試驗, 則知 3 爲諸正根之上限。故 -3 爲 $f(x)=0$ 諸負根之下限。

820　**普通有理變形。** 設由 $f(x)=0$ 及 $y=-x$ 消去 x, 則得 $f(-y)=0$. 在 § 811 已證明 $f(-y)=0$ 之 y 與 $f(x)=0$ 之 x 之關係爲 $y=-x$. 此爲普通定理之一種說明,即設由 $f(x)=0$ 及任一方程 $y=\phi(x)$ 中消去 x, 其中 $\phi(x)$ 爲有理式,則得一方程 $F(y)=0$, 其根與 $f(x)=0$ 之根之關係爲 $y=\phi(x)$, 故若 $f(x)=0$ 之根爲 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, 則 $F(y)=0$ 之諸根將爲 $\phi(\beta_1), \phi(\beta_2), \cdots, \phi(\beta_n)$. §§ 812, 814, 817 之變形又更爲此定理之其他說明. 在第一變形中方程 $y=\phi(x)$ 爲 $y=kx$, 在第二變形中 $y=1/x$, 第三爲 $y=x-k$. 設 $y=\phi(x)$ 能解出 x 時,則 x 之消去甚便。

例 1. 求一方程爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 諸根之平方。

此題之關係 $y=\phi(x)$ 爲 $y=x^2$.

解 $y=x^2$ 之 x, 得 $x=\pm\sqrt{y}$. 又將 $\pm\sqrt{y}$ 代入 x, 化爲有理,則得

$$y^3+(2q-p^2)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0.$$

例 2. 若 α, β, γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,求根爲 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 之方程。

第一先將 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 之每一根,變成已知根 α, β, γ 之一根及 p, q, r 之

一係數.此題甚易,因 $-r=\alpha\beta\gamma$, 故得 $\beta\gamma=\alpha\beta\gamma/\alpha=-r/\alpha$, $\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma/\beta=-r/\beta$, $\alpha\beta=\alpha\beta\gamma/\gamma=-r/\gamma$.

故所求方程每一根 y,與原方程之相當根 x 之關係為 $y=-r/x$.

解 $y=-r/x$ 求 x, 則得 $x=-r/y$.

將 $-r/y$ 代 x 於 $x^3+px^2+qx+r=0$ 而化簡之, 則得 $y^3-qy^2+pry-r^2=0$, 此即所求之方程.

習　題　LXXII

1. 變 $x^7+3x^4-2x^2+6x+7=0$ 各根之符號.

2. 將 $2x^4+x^3-4x^2-6x+8=0$ 各根乘 -2. 又以 3 除其各根.

3. 求 $5x^6-x^4+3x^3+9x-10=0$ 諸根之倒數之方程.

4. 將 $2x^5+x^4-3x^2+6=0$ 各根減 2. 又各根加 1.

5. 將 $x^4-x^3/3+x^2/4+x/25-1/48=0$ 變為他方程,其係數盡為整數,首項係數為 1.

6. 將 $3x^4-36x^3+x-7=0$ 變為他方程,缺其 x^3 之一項.

7. 將下列方程變形,缺其 x 項:

(1) $x^3+6x^2+9x+10=0$.　　(2) $x^3-x^2-x-3=0$.

8. 設 $x^4+x^3-x+2=0$ 之根為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 求根為 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ 之方程.

9. 設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為 $x^4+3x^3+2x^2-1=0$ 之根,求根為 $\beta+\gamma+\delta, \alpha+\gamma+\delta, \alpha+\beta+\delta, \alpha+\beta+\gamma$ 之方程.

10. 若 α, β, γ 為 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,求下列各方程,其根為:

(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}, \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}, \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$.　　(2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

11. 若 α, β, γ 為 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之根,求下列各方程,其根為:

(1) $\beta^2+\gamma^2, \gamma^2+\alpha^2, \alpha^2+\beta^2$.　　(2) $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$.

(3) $\beta\gamma+\dfrac{1}{\alpha}, \gamma\alpha+\dfrac{1}{\beta}, \alpha\beta+\dfrac{1}{\gamma}$.　　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}, \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}, \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.

(5) $\alpha\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right), \beta\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right), \gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$.

12. 求下列各方程諸實根之上限及下限:

(1) $x^4+3x^3-13x^2-6x+28=0$. (2) $2x^5-120x^2-38x+27=0$.

(3) $x^4-29x^2+50x+12=0$. (4) $2x^5-26x^3+60x^2-92=0$.

(5) $x^4-14x^3+44x^2+28x-92=0$.

(6) $3x^6-35x^3+77x^2-50x-110=0$.

虛根 笛卡兒氏符號規則

821 **定理.** 使 $f(x)=0$ 表實係數之方程.設有虛根,則其發現必成對;即若 $a+ib$ 爲其一根,則 $a-ib$ 亦爲其一根.

因設 $a+ib$ 爲 $f(x)=0$ 之一根,則 $f(x)$ 必可 $x-(a+ib)$ 除盡,§795;且將證明 $f(x)$ 又爲 $x-(a-ib)$ 除盡,即 $a-ib$ 亦爲其一根.換言之,設吾人能證明 $f(x)$ 能爲 $[x-(a+ib)][x-(a-ib)]$ 所除盡即可.

此乘積爲有理係數,因 $i^2=-1$,

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)]=(x-a)^2+b^2$$
$$=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

因多項式 $f(x)$ 與 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 有一公因式 $x-(a+ib)$,則必有一最高公因式.此最高公因式非 $x-(a+ib)$,即 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$.但不能爲 $x-(a+ib)$,因此式有虛係數,而有實係數之兩多項式,其最高公因式須有實係數故也,§469.故 $f(x)$ 及 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 之最高公因式爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$;換言之,$f(x)$ 得爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 所除盡.

例. 設 $2x^3+5x^2+46x-87=0$ 之一根爲 $-2+5i$.試解之.

因 $-2+5i$ 爲其一根,則 $-2-5i$ 亦爲其一根.但所有之根之和爲 $-5/2$, §806.故第三根爲

$$-5/2-(-2+5i-2-5i)=3/2.$$

系 1. 有實係數之各多項式 $f(x)$ 皆爲一次或二次實因式之積. 822

因 $f(x)=0$ 有一實根 c, $f(x)$ 卽有一實因式 $x-c$ 與之對應, § 795; 且 $f(x)=0$ 有一對虛根 $a+ib$, $a-ib$, $f(x)$ 卽有一實因式 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 與之對應, § 821.

系 2. $f(x)$ 之諸因式中，凡對應於 $f(x)=0$ 之虛根之積，爲 x 之函數，此函數於 x 爲任何實值時爲正. 823

因此函數得表示爲 $(x-a)^2+b^2$ 形之因式之積，§ 821, 而如是各因式爲平方和，因此 x 爲任何實值時皆爲正.

系 3. 有實係數之奇次方程，至少有一實根. 824

因若有虛根，其個數必成偶數，§ 821, 而奇次方程所有虛實根之總數爲奇數，§ 798. 故至少一根爲實數.

例如，一實係數之三次方程，其三根皆爲實數或一根爲實數，二根爲虛數.

由 § 821 可證明設 $a+\sqrt{b}$ 爲一實係數方程之根，$a-\sqrt{b}$ 825 亦必爲其一根；應注意，a 與 b 皆爲有理數，但 $\sqrt{b}$ 爲無理數.

不能約方程　設 $\phi(x)=0$ 爲有理實係數方程. 如 $\phi(x)$ 不 826 含有理實係數之因式，則 $\phi(x)=0$ 名之謂不能約方程 (比較 § 486).

例如，$x^2-2=0$ 及 $x^2+x+1=0$ 爲不能約方程，但 $x^2-4=0$ 則否。

定理. 設 $f(x)=0$ 表任一有理實係數方程，又設 $\phi(x)=0$ 827 表同次或低次之不能約方程.

設 $\phi(x)=0$ 中有一根為 $f(x)=0$ 之根，則 $\phi(x)=0$ 之諸根，皆為 $f(x)=0$ 之根。

可由 § 821 之理證明之。因設 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根 c, $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 有公因式 $x-c$, § 795, 故其最高公因式為 $x-c$, $\phi(x)$ 之一因式而含 $x-c$ 者，或為 $\phi(x)$ 本身。

但按假定 $\phi(x)=0$ 為一不能約方程，$\phi(x)$ 必為 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之有理實係數之最高公因式，§ 469.

故 $\phi(x)$ 之本身為 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之最高公因式；換言之，$f(x)$ 能為 $\phi(x)$ 所除盡。

由是 $f(x)$ 可寫為 $f(x)=Q\phi(x)$, 此處 Q 為整數，而從此恆等式則知當 $\phi(x)$ 為零時，$f(x)$ 亦為零；換言之，凡 $\phi(x)=0$ 之根必為 $f(x)=0$ 之根。

828　**連號及變號.**　在任何實係數之多項式 $f(x)$, 或方程 $f(x)=0$ 中，設某項與其前一項同號，則謂之連號，又設某項與其前項異號，則謂之變號.

例如，$x^6-x^4-x^3+2x^2+3x-1=0$ 中，連號見於 $-x^3$ 及 $3x$ 二項，其變號見於 $-x^4$, $2x^2$ 及 -1 三項。

829　**定理.**　設 $f(x)$ 得為 $x-b$ 所除盡，b 為正，且 $f(x)$ 之係數為實數，則商 $\phi(x)$ 所有之變號至少較 $f(x)$ 所有者少一.

因 b 為正，故由綜合除法之規則，§ 411, 可知以 $x-b$ 除 $f(x)$, 於到達 $f(x)$ 之一負係數之前，商之各係數常為正數. 設其時或其後，商之一係數變為負或 0, 則於到達 $f(x)$ 之次一正係數以前，商之係數常為負,準此類推.故 $\phi(x)$ 之變號，或見於 $f(x)$ 中之同數項或見於其前數項，此外無其他之變號。但由假

設，可由此除盡，故 $\phi(x)$ 中之最後符號，與 $f(x)$ 中之最後符號相異，因此 $\phi(x)$ 無 $f(x)$ 中之最後變號。

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & +1 & -2 & -10 & -1 & +12 & -4 & \underline{2} \\
 & +2 & +6 & +8 & -4 & -10 & +4 & \\ \hline
1 & +3 & +4 & -2 & -5 & +2, & 0 &
\end{array}$$

如 $f(x)=x^6+x^5-2x^4-10x^3-x^2+12x-4$ 能爲 $x-2$ 除盡，而其商爲 $\phi(x)=x^5+3x^4+4x^3-2x^2-5x+2$. 注意 $f(x)$ 之首二變號，皆重見於 $\phi(x)$，但第三變號則否。

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -1 & +1 & -7 & +2 & \underline{2} \\
 & +2 & +2 & +6 & -2 & \\ \hline
1 & +1 & +3 & -1, & 0 &
\end{array}$$

又，$f(x)=x^4-x^3+x^2-7x+2$ 能以 $x-2$ 除盡，其商 $\phi(x)=x^3+x^2+3x-1$. 此例 $f(x)$ 之四變號中，僅一變號重見於 $\phi(x)$ 中。又吾人由此可知若 $f(x)$ 之中間變號，不見於 $\phi(x)$ 中，其消失必成對。

定理(笛卡兒符號規則)。 方程 $f(x)=0$ 所有正根之數，不能大於其變號之數，又其負根之數不能大於 $f(-x)=0$ 變號之數。 830

1. 使 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 表 $f(x)=0$ 之正根。

設以 $x-\beta_1$ 除 $f(x)$，再以 $x-\beta_2$ 除所得之商，準此類推，則最後所得商 $\phi(x)$ 至少比 $f(x)$ 少 r 個變號，§ 829. 故因 $\phi(x)$ 不能有少於零個變號，故 $f(x)$ 至少必有 r 個變號，即 $f(x)$ 所有變號之數，至少與 $f(x)=0$ 所有正根之數相等。

2. $f(x)=0$ 之負根爲 $f(-x)=0$ 之正根，§ 811. 如以上所述，$f(-x)=0$ 正根之數不能大於變號數。故 $f(x)=0$ 之負根之數不能大於 $f(-x)=0$ 之變號數。

例如，$f(x)=x^6-x^5-x^3+x-1=0$ 不能有三個以上之正根，或一個以上之負根。蓋 $f(x)=0$ 有三個變號，又 $f(-x)=0$，即 $x^6+x^5+x^3-x-1=0$，有一個變號。

831 **系.** 一完全方程所有負根之個數不能大於其所有連號之個數.

因設 $f(x)=0$ 爲一完全方程,則其連號一一與 $f(-x)=0$ 之變號對應,蓋 $f(x)=0$ 中每有兩個相鄰項符號相同,其在 $f(x)=0$ 中必變, § 811.

例如, $f(x)=0$ 爲 $x^5+x^4-6x^3-8x^2-7x+1=0$, (1)

則 $f(-x)=0$ 爲 $x^5-x^4-6x^3+8x^2-7x-1=0$. (2)

(1) 式 x^4, $-8x^2$, $-7x$ 各項有連號者而 (2) 之對應項卽 $-x^4$, $8x^2$, $-7x$ 有變號.

因 (1) 有二變號及三連號, $f(x)=0$ 之正根不能多於二,負根不能多於三.

832 **虛根之檢查.** 在一不完全方程內,吾人常可應用笛卡兒氏符號規則以證明虛根之存在.

設 $f(x)=0$ 爲 n 次方程,且其中無零根,又設 v 及 v' 各表 $f(x)=0$ 及 $f(-x)=0$ 之變號數.則方程 $f(x)=0$ 至少必有 $n-(v+v')$ 個虛根.

因 $f(x)=0$ 不能有 v 個以上之正根,亦不能有 v' 個以上之負根, § 830, 故其不能有 $v+v'$ 以上之實根.則 n 個根中其餘之根必爲虛根.

此定理不能指示完全方程之虛根,因在此類方程內 $v+v'$ 之和等於 n.

例. 證明 $x^5+x^2+1=0$ 有四個虛根.

在本題內 $f(x)=0$ 爲 $x^5+x^2+1=0$, 而 $f(-x)=0$ 爲 $x^5-x^2-1=0$.

因此 $n-(v+v')=5-(0+1)=4$, 故虛根之數不能少於四.但因共有五根,其一根爲實根,因 $x^5+x^2+1=0$ 之次數爲奇數, § 824, 故不能有四個以上之虛根.故 $x^5+x^2+1=0$ 恰有四個虛根.

習　題　LXXIII

1. 已知 $2x^4-x^3+5x^2+13x+5=0$ 之一根爲 $1-2i$. 求解此方程。

2. 已知 $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0$ 之一根爲 $2+\sqrt{2}$. 求解此方程。

3. 有理係數之某方程，其中二根爲 $-5+2i$ 及 $-1+\sqrt{5}$, 作此方程之最低次數者。

4. 求一不能約方程，其一根爲 $\sqrt{2}+i$.

5. 試用笛卡兒規則及 § 832, 討論下列各方程之根：

(1) $x^4+1=0$.　　(2) $x^4-x^2-1=0$.

(3) $x^4+2x^3+x^2+x+1=0$.　　(4) $x^4-2x^3+x^2-x+1=0$.

(5) $x^7+x^5+x^3-x+1=0$.　　(6) $x^7+x^4-x^2-1=0$.

(7) $x^5-4x^2+3=0$.　　(8) $x^{3n}-x^{2n}+x^n+x+1=0$.

6. 求證一全爲實根之完全方程，其變號數與正根數同，又其連號數與負根數同。

7. 已知 $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$ 之諸根皆爲實數，試述幾個正根，幾個負根。

8. 用笛卡兒符號規則證明 $x^{2n}+1=0$ 無實根。又討論下列方程之根：$x^{2n+1}+1=0$, $x^{2n}-1=0$, $x^{2n+1}-1=0$.

9. 求證若一方程僅含 x 之偶次項及正係數，則不能有一正根或一負根。

10. 求證一方程僅含 x 之奇次項及正係數，則除零外不能有實根。

11. 設 p 與 q 爲正，證明 $x^3+px+q=0$, 祇有一負數之實根.

12. 設一不完全方程無零根，求證此方程必有兩個或兩個以上之虛根，但若在異號之二項間有一缺項如 $x^4-3x^2+1=0$ 者則否。

13. 有實係數之方程 $f(x)=0$ 中在二個不連續相異符號之間，必有奇數個變號，而在二個不連續相同符號之間，有偶數個或無變號。

14. 由有實係數之方程，取其對應於負根及虛根之因式之乘積，則積之最後項常爲正，試證明之；又若此積若有變號，則其個數必爲偶數.

15. 求證若變號之個數超過正根之個數，則超過之個數必爲偶數。

16. 求證 $x^4+x^3-x^2+x-1=0$ 之正根數，非一卽三，而負根數爲一。

17. 求證凡絕對項爲負之各偶次方程至少有一正根及一負根.

無理根之檢定

833 **定理 1.** 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有異號，則 $f(x)=0$ 有一根介乎 a 與 b 之間.

此可證於下例，其普遍之證明則將來申述之.

例. 證明 $f(x)=x^3-3x+1=0$ 有一根介乎 1 與 2 之間.

$f(1)=-1$ 之符號爲負，$f(2)=3$ 之符號爲正。

使 $x=1.1, 1.2, 1.3, \cdots$ 而依次計算 $f(x)$ 之值，則可知 1 與 2 之間兩相鄰之小數，卽 1.5 及 1.6，使 $f(x)$ 所生之符號，各與 $x=1$ 及 $x=2$ 時符號相同；因 $f(1.5)=-0.125$ 爲負，而 $f(1.6)=0.296$ 爲正也。

仿此，可知介乎 1.5 及 1.6 之間兩相鄰數之小數卽 1.53 及 1.54，使 $f(x)$ 所生之符號，各與 $x=1$ 及 $x=2$ 時之符號相同；蓋 $f(1.53)=-0.008423$ 爲負，而 $f(1.54)=0\ 032264$ 爲正也。

如此推進，而決定下列不盡數列：

(a) 1, 1.5, 1.53, 1.532, $\cdots$,　　(b) 2, 1.6, 1.54, 1.533, $\cdots$,

其中各項，漸近於同一之極限，§§ 192, 193. 稱此極限爲 c. 此爲 $f(x)=0$ 之一根，卽 $f(c)=0$.

因由 § 509，若令 x 通過任一數列 (a) 或 (b)，$f(x)$ 漸近於 $f(c)$ 爲極限。但因 x 通過 (a) 數列時 $f(x)$ 常爲負，故 $f(c)$ 不能爲正，又因 x 通過 (b) 數列時，$f(x)$ 常爲正，故其極限 $f(c)$ 不能爲負。故 $f(c)$ 爲零.

定理 2. 設 a 與 b 皆非 $f(x)=0$ 之根，且 $f(x)=0$ 有奇數個根介乎 a 與 b 之間，則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號；然若無根或有偶數個根介乎 a 與 b 之間，則 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號相同。 834

反之，若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號，則 $f(x)=0$ 有奇數個根介乎 a 與 b 之間；然若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號，則 $f(x)=0$ 無根或有偶數個根介乎 a 與 b 之間。

設 $a<b$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_r$ 為 $f(x)=0$ 在 a 與 b 間所有之諸根；則 $f(x)$ 必可為 $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_r)$ 所整除，§ 418，且設所得之商為 $\phi(x)$，則得

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_r)\phi(x). \tag{1}$$

先以 a，復以 b 代入之，以其第二結果除第一結果，則得

$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{a-\beta_1}{b-\beta_1}\cdot\frac{a-\beta_2}{b-\beta_2}\cdots\frac{a-\beta_r}{b-\beta_r}\cdot\frac{\phi(a)}{\phi(b)}. \tag{2}$$

乘積 (2) 中之因式 $\phi(a)/\phi(b)$ 為正。因 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 之符號相同，因否則按 § 833，在 a 及 b 之間，必有 $\phi(x)=0$ 之一根，因此由 (1)，$f(x)=0$，除 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 之外尚須有一根。

他方面，$(a-\beta_1)/(b-\beta_1)$ 以及其他 r 個因式皆為負，蓋 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 之 r 個根為大於 a 而小於 b.

故當 r 為奇數時，則 $f(a)/f(b)$ 為負，即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號；但 r 為偶數或 0 時，則 $f(a)/f(b)$ 為正，即 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相同之符號。

反之，若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 符號相反，於是 $f(a)/f(b)$ 為負，因此從 (2) 可知 r 為奇數；又設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 符號相同，則可知 r 為偶數或 0.

835 注意在證明上面定理，§§ 833, 834 時，對於每一方程 $f(x)=0$ 必有一根之假設並未引用。又用此定理時，其一個 r 次重根，應計如 r 個單根。

由 § 834 則知 x 由 a 變爲 b 時，x 經 $f(x)=0$ 之每一單根或奇數重根之介於 a 與 b 之間者，$f(x)$ 即變其符號；且除此類變更符號外，$f(x)$ 不經其他變號。

例如，設 $f(x)=(x-2)(x-3)^2(x-4)^3$，使 x 由 1 變至 5，則 $f(x)$ 之符號在 $x=1$ 及 $x=2$ 之間時爲正，在 $x=2$ 及 $x=4$ 之間時爲負，在 $x=4$ 及 $x=5$ 之間時爲正。

836 **無理根之位置.** 由 § 833 之定理，常能決定數字方程在二連續整數之間，其分數根及無理根之所在。

例. 試定 $f(x)=x^4-6x^3+x^2+12x-6=0$ 之根之位置。

由笛卡兒氏符號規則，§ 830，此方程之正根不能多於三，負根不能多於一。

若求正根之位置，可依次計算 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, …，至三根用 § 833 說明爲止，或至 x 之值爲其根之上限爲止，§ 803.

故仿 § 414，用綜合除法，得 $f(0)=-6$, $f(1)=2$, $f(2)=-10$, $f(3)=-42$, $f(4)=-70$, $f(5)=-46$, $f(6)=102$.

故由 § 833，一根在 0 與 1 之間，他一根在 1 與 2 之間，第三根在 5 與 6 之間．在以上各界限間，不能有多於一個根者，蓋總共祇有三個正根．

依同法求負根，有 $f(0)=-6$, $f(-1)=-10$, $f(-2)=38$. 故負根在 -1 與 -2 之間。

若有二個或二個以上之根介乎相鄰二整數之間，則僅以整數代 x 於 $f(x)$ 中時，當然不能將 $f(x)$ 之實根完全檢得。此類情形將於 § 844 及 § 864 中討論，並可確定在已知二鄰數間究有幾根也。

習　題　LXXIV

求下列各方程實根之位置：

1. $2x^3-3x^2-9x+8=0.$

2. $x^3+x^2-4x-2=0.$

3. $x^3-3x^2-2x+5=0.$

4. $2x^3+3x^2-10x-15=0.$

5. $x^3-4x^2-4x+12=0.$

6. $x^3+13x^2+54x+71=0.$

7. $x^3+5x+19=0.$

8. $x^4-95=0.$

9. $x^4-8x^3+14x^2+4x-8=0.$

10. $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0.$

11. $x^4-11x^3+32x^2-4x-46=0.$

12. $x^5+2x^4-16x^3-24x^2+48x+32=0.$

13. 設 x 之絕對值甚大時，$f(x)$ 之符號爲其最高次項之符號，求證：

(1) 設 n 爲偶數，b_n 爲負，凡實係數之方程 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ 至少有一正根及一負根.

(2) 方程

$$k^2(x-b)(x-c)+l^2(x-c)(x-a)$$
$$+m^2(x-a)(x-b)-x(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

之四根各介乎 $-\infty$ 與 a, a 與 b, b 與 c, c 與 ∞ 之間，設 a, b, c, k, l, m 爲實數，又 $a<b<c$.

14. 求證凡 $x^3+(x-1)(ax-1)=0$ 之形式，設 $a\geqq 3$，則有二根在 0 與 1 之間，卽一根在 $1/a$ 與 $1-1/a$ 間，他根在 $1-1/a$ 與 1 之間.

15 求證 $x^4+(x-1)(2x-1)(ax-1)=0$，設 $a\geqq 5$，則其根在 0 與 $1/a$, $1/a$ 與 $1-2/a$, $1-2/a$ 與 1 之間.

無理根之計算

郝納氏法．　正根．　數字方程之無理根近似值計算法有 837
數種．其最簡捷者爲英數學家郝納氏所創．最好以例題說明之．

例．求 $f(x)=2x^3+x^2-15x-59=0$ 之正根．

1. 用 § 836，所求根在 3 與 4 之間．若以小數表之，則有 $3.\beta\gamma\delta\cdots$ 之形式，其中 $\beta, \gamma, \delta,\cdots$ 表其小數位之數字．

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & +1 & -15 & -59 & 3 \\
 & 6 & 21 & 18 & \\
\hline
 & 7 & 6 & -41 & \\
 & 6 & 39 & & \\
\hline
 & 13 & 45 & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
 & 19 & & &
\end{array}$$

2. $f(x)=0$ (1) 諸根各減去 3．則得變形之方程

$$\phi(x)=2x^3+19x^2+45x-41=0, \tag{2}$$

其根爲 $0.\beta\gamma\delta\cdots$，而介乎 0 與 1 之間．

試驗 $\phi(x)$，以 $x=0.1, 0.2, 0.3,\cdots$，則 $\phi(0.6)$ 爲負，而 $\phi(0.7)$ 爲正．故 (2) 之根介乎 0.6 與 0.7 間，即 β 爲 6，而 (1) 之根祇含首位小數者爲 3.6.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & +19 & +45 & -41 & 0.6 \\
 & 1.2 & 12.12 & 34.272 & \\
\hline
 & 20.2 & 57.12 & -6.728 & \\
 & 1.2 & 12.84 & & \\
\hline
 & 21.4 & 69.96 & & \\
 & 1.2 & & & \\
\hline
 & 22.6 & & &
\end{array}$$

3. (2) 之各根減去 0.6．則得

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0, \tag{3}$$

其根爲 $0.0\gamma\delta\cdots$ 在 0 與 0.1 之間．

試驗 $x=0.01, 0.02,\cdots$ 於 $\psi(x)$ 中，得 $\psi(0.09)$ 爲負，$\psi(0.1)$ 爲正．故其根在 0.09 與 0.1 之間，即 γ 爲 9，故 (1) 式之二位小數根爲 3.69.

4. (3) 式各根減去 0.09，準此類推．

838　以上演算，更可如下節所示簡捷行之．但由上例入下節之前，當注意第一，第二變形方程，(2) 及 (3) 之絕對項 -41 及 -6.728 符號相同．此固屬是，因 $-41=\phi(0)$ 而 $-6.728=\phi(0.6)$．設 $\phi(0)$ 及 $\phi(0.6)$ 符號相異，$\phi(x)=0$ 之根介乎 0 與 0.6 之間，§ 833，故 0.6 不爲第一數字．以下之變形方程亦皆如此，故一般言之：

試已知方程僅有一根具整數部分 a，而求此根之演算無誤，則用以求根之各變形方程，其絕對項將有相同符號．

在上例中，吾人皆用代入法以求各變形方程之根之第一數字，即已知方程之各小數位之數字。但自第二以下變形方程之根之第一數字，通常僅須先將絕對項變號，再以 x 之係數除之。此謂之試除法。 839

例如，討論第二變形方程

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \quad (3)$$

此方程有一小於 0.1 之根 c. 而 c 之二次及更高次冪小於 c 本身遠甚. 即 $(0.09)^2$ 僅為 0.0081. 故 c 若已知而代入 (3) 中，所得數字恆等式

$$2c^3+22.6c^2+69.96c-6.728=0,$$

其第一，二兩項較之末兩項小甚。

故 c 之第一位數字與方程

$$69.96x-6.728=0 \quad (3')$$

相同，但 (3′) 係由 (3) 略去 x^3 及 x^2 二項而得。

解 (3′)，得 $x=6.728/69.96=0.09+$，即如上 (3) 之根之第一數字為 9.

此法不能正確求得第一變形方程之第一位數字。但此法至少可以指出數字之所在而減少其代入法之手續。有時即使第二變形方程之根之第一位數字亦能正確求得。但在此情形下其錯誤在下次變形中極易查出；因設其數字太大，在其次之變形方程內，其絕對項將變其符號，§ 838；設其太小，則此方程之根之第一數字顯然太大。

欲避免在第一變形後所發生之煩雜小數，可先以十乘各變形方程之根，§ 812，而後再行變形。此可以一個 0 附於該方 840

程之第二係數後，以二個 0 附於第三係數後，其餘準此。然後可視作根之數字在次一變形方程內爲整數。

例如，在 § 837 例題內，其第一變形方程

$$2x^3+19x^2+45x-41=0, \tag{2}$$

且知其根呈 0.6+ 之形式。

以 10 乘 (2) 之根，得

$$2x^3+190x^2+4500x-41000=0, \tag{2'}$$

其一根呈 6+ 之形式。

使 (2′) 之根減小 6，此計算同上所已知之演算僅無小數點而已，得

$$2x^3+226x^2+6996x-6728=0, \tag{3'}$$

其根大於下方程之根十倍

$$2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0. \tag{3}$$

用試除法知 0.9+ 爲 (3′) 之根，故 0.09+ 爲 (3) 之根。

841 吾人可計算 $2x^3+x^2-15x-59=0$ 之根，算至小數三位如下：

2	+ 1	−15	−59	3.693	
	6	21	18		
	7	6	−41		
	6	39			
	13	45			
	6				
2	+ 190	+4500	−41000	6	
	12	1212	34272		
	202	5712	− 6728		
	12	1284			
	214	6996			$\frac{6728}{6996}=0.9+$
	12				
2	+2260	+699600	−6728000	9	
	18	20502	6480918		
	2278	720102	− 247082		
	18	20664			
	2296	740766			
	18				$\frac{247082}{740766}=0.3+$
	2314				

注意,此處用試除法所得各數字,皆爲小數第一位之數字,如 0.9, 0.3. 然第二變形方程之最後係數若非 -6728, 而爲 -672, 則得 $672/6996=0.09$ 爲次二數字. 如此計算則所得之根必須以 3.609 代替 3.69; 故作次變形方程之前必須以 100 乘第二變形方程之根, 卽當附二個 0 於第二係數, 四個 0 於第三係數, 六個 0 於第四係數.

如此演算可推至無窮. 但吾人卽遇甚大之數, 又自根之少許小數位得到後, 可依下述之簡省方法用極簡之演算求至所需之位數. 842

上例計算時, 最末變形方程爲

$$2x^3+2314x^2+740766x-247082=0. \tag{4}$$

今不附 0 於係數而以 $x/10$ 代 (4) 中之 x, 使 (4) 之根增大十倍, § 812, 則得

$$0.002x^3+23.14x^2+74076.6x-247082=0. \tag{4'}$$

係數之小數部分甚小, 删去之亦不影響根之其次諸數字, 删去之法可依四捨五入, 得二次方程

$$23x^2+74077x-247082=0. \tag{4''}$$

故演算可連續如下:

23	+74077	−247082	0.003332
	69	222438	
	74146	− 24644	
	69		
~~23~~	+7422~~5~~	− 24644	
		22266	
	742~~2~~	− 2378	
		2226	
	74~~2~~	− 152	
		148	
		− 4	

卽, 先以 3 減二次方程 (4″) 之根, 得變形方程 $23x^2+74215x-24644=0$ (5). 用試除法, 根之下一數字亦爲 3.

在下一變形之前，先當如前刪簡其數字，於是 (5) 式卽變爲一次方程 $7422x-24644=0$. 欲求根之下二數字，3，2. 僅須用簡省法卽不附 0 於被除數後，刪去除數末之數字，以 7422 除 24644 卽是。

843 **負根.** 欲求 $f(x)=0$ 之負無理根，可求 $f(-x)=0$ 之對應正根而變其符號卽得。

例。 求 $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 之負根。

此處 $f(-x)=0$ 爲 $x^3-x^2-10x-9=0$. 其正根用鄭納氏法求得約爲 4.03293. 故 $f(x)=0$ 之負根約爲 -4.03293.

844 **幾乎相等之根.** 設已知方程有二根介乎相鄰二整數間，則可如下例求得之。

例. $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 如有正根，試求之。

用代入法，$f(0)=9$, $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=15$, 3 爲諸根之上限，§ 803. 故 § 834 在 0 與 1，或 1 與 2，或 2 與 3 間，或無正根，或有二正根。但 $f(1)$ 與 $f(2)$ 較 $f(0)$ 與 $f(3)$ 近於 0. 故設有二根，大約不在 0 與 1，或 2 與 3 而在 1 與 2 之間。

因此 $f(x)=0$ 之根減 1，得

$$\phi(x)=x^3+4x^2-5x+1=0,$$

設 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間有二根，則此方程有二根在 0 與 1 之間。

予 x 0.1, 0.2, 0.3,…計算 $\phi(x)$ 之值，得 $\phi(0.2)$ 爲正而 $\phi(0.3)$ 爲負，又 $\phi(0.7)$ 爲負而 $\phi(0.8)$ 爲正。故 $\phi(x)=0$，在 0.2 與 0.3 間有一根，又 0.7 與 0.8 間亦有一根。用鄭納氏法，得此根各約爲 0.25560 及 0.77733.

故 $f(x)=0$ 有 1.2556 與 1.77733 二個正根.

845 **定大根之位置.** 已知方程 $f(x)=0$ 內有一根大於十，可用下法以求整數部分之數字。

求第一數字時，可用 § 833 將 $x=10, 20, \cdots$ 代入 $f(x)$ 中而計算其值；必要時，或使 $x=100, 200, \cdots$ 其餘準此。例如，若知 $f(400)$ 及 $f(500)$ 有異號，則根介乎 400 與 500 之間而其第一數字爲 4. 求其餘數字，可如求小數位數字時，依次作方程之變形。例如，適所述之情形中，吾人應將 $f(x)=0$ 之根減去 400，則得一方程 $\phi(x)=0$，其根在 0 與 100 之間。若知此根在 70 與 80 之間，則根之第二數字爲 7. 然後將 $\phi(x)=0$ 之根減去 70，而得方程 $\psi(x)=0$，其根介乎 0 與 10 之間。若知此根在 8 與 9 之間，可知 $f(x)=0$ 之根，其整數部分爲 478.

解數字方程。 設欲求已知數字方程 $f(x)=0$ 之實根，則依 § 802 之方法先求有理根爲最佳，至少於係數爲有理數時爲然。此法將產生一降次方程 $\phi(x)=0$，其中若有實根，則爲無理數。用 §§ 833, 844, 845 法檢定諸根，然後用郝納氏法求其約值。 **846**

又分數根亦可用郝納氏法求得之，當分母若僅含因數 2 及 5，則所得爲眞值，此外爲約值。

習　題　LXXV

求下列所示範圍內之根，計算至六位小數：

1. $x^3+x-3=0$；根在 1 與 2 之間。
2. $x^3+2x-20=0$；根在 2 與 3 之間。
3. $x^3+6x^2+10x-2=0$；根在 0 與 1 之間。
4. $3x^3+5x-40=0$；根在 2 與 3 之間。
5. $x^3+10x^2+8x-120=0$；根在 2 與 3 之間。

6. $2x^3-x^2-9x+1=0$；根在 -1 與 -2 之間。

7. $x^3+x^2-5x-1=0$；根在 1 與 2 之間。

8. $x^3-2x^2-23x+70=0$；根在 -5 與 -6 之間。

9. $x^4-10x^2-4x+8=0$；根在 3 與 4 之間。

10. $x^4+6x^3+12x^2-11x-41=0$；根在 -2 與 -3 之間。

11. $x^3-3x^2-4x+13=0$；二根在 2 與 3 之間。

求下列方程各根至小數三位：

12. $x^3-3x^2-4x+10=0$.　　13. $x^3+x^2-2x-1=0$.

14. $x^3-3x+1=0$.　　15. $x^4+5x^3+x^2-13x-7=0$.

16. 用郝納氏法於方程 $x^3-17=0$,以計算 $\sqrt[3]{17}$ 至第四位小數。

17. 用同法計算 $2\sqrt[3]{3}$ 及 $\sqrt[4]{87}$, 各至第三位小數。

18. 用 § 845 及郝納氏法,求 $x^3+x^2-2500=0$ 之實根至第二位小數。

19. 用 § 844 定 $x^3+5x^2-6x+1=0$ 之各根之位置。

20. 求 $3x^5+x^4-14x^3-x^2+9x-2=0$ 之諸根。

戴勒氏定理　重根

847　**導來式.**　獨項式，如 ax^n 以 x 之指數 n 乘之，再將指數減 1. 則得 nax^{n-1}, 此謂 ax^n 之導來式.或更詳細言之,關於 x 之導來式特例常數 a, 卽 ax^0 之導來式爲 0.

多項式 $f(x)$ 各項之導來式之和，謂之多項式之導來式，或第一導來式而以 $f'(x)$ 代表之.

$f'(x)$ 之導來式謂之第二導來式，而以 $f''(x)$ 代表之，準此類推。

凡 n 次多項式必有一串 n 個導來式,其最末導來式 $f^{(n)}(x)$ 爲一常數,甚爲顯然.

例如，設
$$f(x)=3x^4-8x^3+4x^2-x+4,$$
得
$$f'(x)=12x^3-24x^2+8x-1,$$
$$f''(x)=36x^2-48x+8,$$
$$f'''(x)=72x-48,$$
$$f''''(x)=72.$$
以下導來式均爲 0.

注意，$f(x)$ 之第二，第三，… 導來式爲 $f'(x)$ 之第一，第二導來式。

戴勒氏定理. 若以 $x+h$ 代 x 於 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}$ 848
$+\cdots+a_n$ 中，則得

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots+a^n.$$

用二項定理展開 $(x+h)^n$, $(x+h)^{n-1}$，等等，集項後可化成一 h 之多項式．其結果爲

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^n(x)\frac{h^n}{n!}, \qquad \text{(I)}$$

其中 $f'(x), f''(x), \cdots$ 爲 $f(x)$ 之連續導來式．此恆等式名爲戴勒氏定理。

因以二項定理，§ 561，展開 $(x+h)^m$ 而以常數 a 乘之，且寫成

$$a(x+h)^m=ax^m+max^{m-1}h+m(m-1)ax^{m-2}\frac{h^2}{2!}$$
$$+m(m-1)(m-2)ax^{m-3}\frac{h^3}{3!}+\cdots,$$

則各係數

$$max^{m-1},\ m(m-1)ax^{m-2},\ m(m-1)(m-2)ax^{m-3}, \cdots,$$

後者爲前者之導來式。

故設展開

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots+a_n,$$

此式內，各展開式首項之和爲 $f(x)$；第二項之和爲 h 乘首項

導來式之和卽 $f'(x)h$；第三項之和爲 $h^2/2!$ 乘第二項之導來式之和或 $f''(x)h^2/2!$；以下類推。

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

例如，設 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$,

得 $f(x+h)=a_0(x+h)^3+a_1(x+h)^2+a_2(x+h)+a_3$

$$\begin{array}{l|l|l|l} =a_0x^3 & +3a_0x^2 & h+6a_0x & \frac{h^2}{2!}+6a_0\frac{h^3}{3!} \\ \quad +a_1x^2 & +2a_1x & \quad +2a_1 & \\ \quad +a_2x & +a_2 & & \\ \quad +a_3 & & & \end{array}$$

$$=f(x)+f'(x)h+f''(x)h^2/2!+f'''(x)h^3/3!.$$

849 因 $x=a+(x-a)$，則 $f(x)=f[a+(x-a)]$. 故祇用 a 代 x, $x-a$ 代 h 於恆等式 (I) 內，得以 $x-a$ 之羃表 $f(x)$，§423. 其結果爲

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$
$$+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}. \qquad \text{(II)}$$

例. 以 $x-1$ 之羃表 x^3-1 之式.

因 $f(x)=x^3-1$, $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6$.

故 $f(1)=0$, $f'(1)=3$, $f''(1)/2=3$, $f'''(1)/3!=1$.

故 $x^3-1=3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$.

850 **重根.** $f(x)$ 之第一，第二…導來式爲 $f(x)$ 之第二，第三，…導來式. 故 §849，以 $x-a$ 表多項式 $f(x)$ 及其第一導來式 $f'(x)$ 爲

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots, \qquad (1)$$
$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+f'''(a)(x-a)^2/2!+\cdots. \qquad (2)$$

設 $f(x)$ 不能爲 $(x-a)^2$ 所除盡而能爲 $x-a$ 所除盡，由 (1) 則得 $f(a)=0$，但 $f'(a)\neq 0$，故由 (2) 可知 $f'(x)$ 不能被 $x-a$

所除盡．又設 $(x-a)^2$ 能除盡 $f(x)$ 而 $(x-a)^3$ 不能除盡 $f(x)$，則由 (1) 可知 $f(a)=f'(a)=0$ 而 $f''(a)\neq 0$，又由 (2) 可知 $f'(x)$ 可爲 $x-a$ 除盡，而不能爲 $(x-a)^2$ 除盡．就一般而言，設 $f(x)$ 爲 $(x-a)^r$ 所除盡，而不爲 $(x-a)^{r+1}$ 所除盡，則由 (1) 可知 $f(a)=f'(a)=\cdots f^{(r-1)}(a)=0$ 而 $f^{(r)}(a)\neq 0$，故由 (2) 可知 $f'(x)$ 爲 $(x-a)^{r-1}$ 所除盡，但不能爲 $(x-a)^r$ 除盡．

故由 § 800，有下列之定理．

定理． $f(x)=0$ 之一次根，不爲 $f'(x)=0$ 之一根；但 $f(x)$ 851
$=0$ 之二次根爲 $f'(x)=0$ 之一次根，概言之，$f(x)=0$ 之 r 次重根爲 $f'(x)=0$ 之 $r-1$ 次重根．

例如，$f(x)=x^3-x^2-8x+12=0$ 之根爲 2, 2, -3 而 $f'(x)=3x^2-2x-8=0$ 之根爲 2, $-4/3$.

故設 $f(x)=0$ 有重根，可用下法求得之．以 § 465 之方法，852
先求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因式．設 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 爲互質，則 $f(x)=0$ 僅有單根．但設若由是發見 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有最高公因式 $\phi(x)$，則 $\phi(x)=0$ 之各單根皆爲 $f(x)=0$ 之二重根，$\phi(x)=0$ 之各二重根，皆爲 $f(x)$ 之三重根，準此類推．蓋由 § 850，若 $\phi(x)$ 可爲 $(x-a)^r$ 所除盡，則 $f'(x)$ 可爲 $(x-a)^r$ 所除盡，而 $f(x)$ 可爲 $(x-a)^{r+1}$ 所除盡也．

注意，設商 $f(x)/\phi(x)$ 爲 $F(x)$，則 $F(x)=0$ 之根即 $f(x)=0$ 之根，但各根各見一次．

例． 求方程 $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$ 之重根．

此處 $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8$，由 §465，求得 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因式爲 $\phi(x)=x^3-3x-2$.

$\phi(x)=0$ 之根可由 § 802 求得之而爲 $-1, -1, 2$. 故 $f(x)=0$ 有三重根 -1，二重根 2，即其根爲 $-1, -1, -1, 2, 2$.

注意　　$f(x)=(x+1)^3(x-2)^2,$

則　　$f'(x)=(x+1)^2(x-2)(5x-4),$

故　　$F(x)=f(x)/\phi(x)=(x+1)(x-2).$

853　又若任意二方程 $f(x)=0$ 及 $\psi(x)=0$ 有一公根，則可由求 $f(x)$ 及 $\psi(x)$ 之最高公因式以得之。

例．設 $f(x)=x^4-x^3-3x^2+4x-4=0$ 之一根爲他根之負數，求解此方程．

上述之二根顯然爲 $f(x)=0$ 及 $f(-x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4=0$ 之公根，故可由求 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 之最高公因式以得之．

由 § 465 求得此最高公因式爲 x^2-4．故所述二根爲 2，-2．將 x^2-4 除 $f(x)$，則得降次方程 $x^2-x+1=0$，由此得其他二根爲 $(1\pm i\sqrt{3})/2$.

習　題　LXXVI

1　求 $2x^5-4x^4+x^2-20x$ 之第一，第二，……導來式．

2．設 $f(x)=x^4-2x^3+1$，由戴勒氏定理求 $f(x+h)$.

3．用公式 § 849，(II)，(1) 以因式 $x+1$ 表 x^4+x^2+1；(2) 以因式 $x-2$ 表 x^5-32；(3) 以因式 $x+1$ 表 $(x^3+1)/(x^2+1)$.

4．求下列各方程之重根．解之．

(1)　$x^3-3x-2=0.$　　(2)　$9x^3+12x^2-11x+2=0.$

(3)　$4x^4+12x^2+9=0.$　　(4)　$x^4-4x^3+8x+4=0.$

(5)　$2x^4-12x^3+19x^2-6x+9=0.$

(6)　$x^5-x^3-4x^2-3x-2=0.$

(7)　$x^4-2x^3-x^2-4x+12=0.$

(8)　$x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0.$

(9)　$3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0.$

5　求證 $x^n-a^n=0$ 不能有一重根．

6．設 $x^3-12x+a=0$ 有一重根，求 a.

7．設 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三重根定 a 與 b 之值，并求此根．

8. 求證 $x^4+qx^2+s=0$ 不能有一三重根.

9. 試求 $x^5-px^2+r=0$ 有一二次重根之條件.

10. 設 $f(x)$ 適可為 $f'(x)$ 所除盡;問 $f(x)$ 之形式為何?

11. 設方程 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 及 $x^4+x^3-x-1=0$ 有公共之根,解此二方程.

12. 設方程 $x^3-20x-16=0$ 有一根為 $x^3-x^2-3x-1=0$ 中一根之二倍.試解此方程.

13. 求證設一有理係數之三次方程有一重根,則此根必為有理數.

14. 求證設一有理係數之四次方程 $f(x)=0$ 有一重根,除 $f(x)$ 為完全平方外,此根必為有理數.

15. 求證設 a 為一 r 次方程 $f(x)=0$ 之一根,則其亦為 $f'(x)=0$, $f''(x)=0, \cdots f^{(r-1)}(x)=0$ 諸方程之一根.

有理函數之變形

定理. 設 $f(x)$ 表一多項式依 x 升冪序排列,又設 b 表首項係數之絕對值又 g 為最大係數之絕對值.則當 x 之絕對值小於 $b/(b+g)$ 時,$f(x)$ 之首項絕對值上,必大於其他各項之和. 854

第一,設 $f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$,故而 $b=|b_0|$,且設 x' 表 x 之絕對值.

於是 $b_1x+b_2x^2+\cdots$ 在絕對值上小於(或等於) $gx'+gx'^2+\cdots$ 或 $g(x'+x'^2+\cdots)$, § 235, 故當 $x'<1$, 此式小於 $gx'/(1-x')$, § 704.

但 $gx'/(1-x')$, 當 $x'<b/(b+g)$ 時,小於 b.

第二,設 $f(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$, 則 $b=|b_1|$. 當 $|b_2x+b_3x^2+\cdots|<|b_1|$ 時,即當 $x'<b/(b+g)$ 時,則 $|b_2x^2+b_3x^3+\cdots|<|b_1x|$, 餘類推.

例如,設 $f(x)=5x+3x^2-9x^4$, 當 $x'<5/(5+9)$ 即 $x'<5/14$ 時,得 $|3x^2-9x^4|<|5x|$.

855　**定理．** 設 $f(x)$ 表依 x 之降冪序排列之多項式，命 a 爲其首項係數之絕對值，g 爲最大係數之絕對值．當 x 之絕對值大於 $(a+g)/a$ 時，對絕對值言，$f(x)$ 之首項大於其他各項之和．

使 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，則 $a=|a_0|$，並使 x' 表 x 之絕對值．

得 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=x^n(a_0+a_1/x+\cdots a_n/x^n)$．故 $|a_0|>|a_1/x+\cdots+a_n/x^n|$ 時，則 $|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+\cdots+a^n|$．但 § 854，$|a_0|>|a_1/x+\cdots+a_n/x|$ 當 $1/x'<a/(a+g)$ 時，卽當 $x'>(a+g)/a$ 時．

例如，設 $f(x)=3x^3+x^2-7x+2$，當 $x'>(3+7)/3$ 卽 $x'>10/3$ 時，得 $|3x^3|>|x^2-7x+2|$．

從此定理，$f(x)=0$ 之根無論爲實根或虛根，$(a+g)/a$ 一數顯較任何根之絕對值爲大．

856　**定理．** 設 a 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之值在 x 略小於 a 時有相異符號，略大於 a 時有相同符號．

因以因式 $x-a$ 表 $f(x)$ 及 $f'(x)$，§ 849，然後以第二式除第一式．當 a 爲單根，故而 $f(a)=0$，但 $f'(a)\neq 0$，其結果可化爲

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{f'(a)+f''(a)(x-a)/2!+\cdots}{f'(a)+f''(a)(x-a)+\cdots}.$$

右端分式之分子分母，皆爲 $x-a$ 之多項式．故對於任何 $x-a$ 之值小至能適應需要時，§854，分子分母之符號，與其公有第一項 $f'(a)$ 之符號相同，而分式自身爲正．$f(x)/f'(x)$ 之符號與 $x-a$ 者相同，故視 $x<a$ 或 $x>a$ 而爲負或正．但 $f(x)/f'(x)$ 之符號爲負時，$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號相反，又當

$f(x)/f'(x)$ 之符號爲正時，$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號相同。

當 a 爲 r 次重根得，§850，

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-a)\frac{f^{(r)}(a)/r!+\text{含 }(x-a)\text{ 之各項}}{f^{(r)}(a)/(r-1)!+\text{含 }(x-a)\text{ 之各項}},$$

由是仿 a 爲單根時之同一理由，得上列定理。

洛勒氏定理. 在 $f(x)=0$ 之相鄰兩根間，常有 $f'(x)=0$ 之一根。 857

因命 β_1 及 β_2 爲方程之根，命 c 表略大於 β_1 之數，d 爲略小於 β_2 之數，故而 $\beta_1<c<d<\beta_2$.

則 $f'(c)$ 與 $f(c)$ 有相同符號，§856，又 $f(c)$ 與 $f(d)$ 有相同符號，§834；但 $f(d)$ 與 $f'(d)$ 符號相反，§856. 故 $f'(c)$ 與 $f'(d)$ 有異號．因此 $f'(x)=0$ 之一根介於 c 與 d 之間，卽 β_1 與 β_2 之間，§833.

例如，設 $f(x)=x^2-3x+2=0$，則 $f'(x)=0$ 爲 $2x-3=0$．則 $f(x)=0$ 之根爲 1 與 2，$f'(x)=0$ 之根爲 3/2 在 1 與 2 之間．

例． 求證 $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 在 1 與 2 之間有二根（比較 §844，例）．

因 $f(1)=1$ 而 $f(2)=1$，1 與 2 之間有二根或無根．設有二根，則 $f'(x)=0$ 必有一根在 1，2 之間，而此根必在 $f(x)=0$ 之二根間．

但 $f'(x)=3x^2+2x-10=0$ 在 1，2 之間有一根，蓋 $f'(1)=-5$ 及 $f'(2)=6$．解方程，得此根約爲 1.5．又因 $f(1.5)=-0.375$ 爲負．故因 $f(1)$ 與 $f(2)$ 爲正，故 $f(x)=0$ 有二根介乎 1 與 2 之間，卽一在 1 與 1.5 之間，一在 1.5 與 2 之間．

定理. 設變數 x 增大，則當其經歷 a 値時，$f(x)$ 之值，視 $f'(a)>0$ 或 $f'(a)<0$ 而增加或減小。 858

設 $f'(a)=0$，但 $f''(a)\neq0$，當 $f''(a)<0$ 時，$f(a)$ 爲 $f(x)$ 之一極大值，當 $f''(a)>0$，$f(a)$ 爲極小值。

由 § 849 得

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots.$$

右邊係 $x-a$ 之多項式，一切 x 之值，能使 $x-a$ 之絕對值小至合於 § 854 之需要者，能使第一項之符號，代表全式之符號；故亦即代表 $f(x)-f(a)$ 之符號。x 之值如此限定後。則

1. 設 $f'(a)>0$，則 $f'(a)(x-a)$ 與 $(x-a)$ 有同號，從而 $f(x)-f(a)$ 與 $(x-a)$ 符號相同．故當 x 經過 a 時，$x-a$ 由負變到正，$f(x)-f(a)$ 亦同，即 $f(x)$ 由小於 $f(a)$ 之值，增加至大於 $f(a)$ 之值。

2. 設 $f'(a)<0$，$f'(a)(x-a)$ 及 $(x-a)$ 之符號相反．故如 1 之理由，得證 x 經歷 a 時，$f(x)$ 減小。

3. 設 $f'(a)=0$ 而 $f''(a)\neq 0$，$f(x)-f(a)$ 與 $f''(a)(x-a)^2/2$ 有相同之符號，因而又與 $f''(a)$ 之符號相同；因無論 $x<a$，或 $x>a$，$(x-a)^2$ 恆爲正也．故 $f''(a)<0$ 時，則在 x 到達 a 前，或在 x 經過 a 後，$f(x)<f(a)$，即 $f(a)$ 爲 $f(x)$ 之極大值，§ 639.

仿此可證當 $f''(a)>0$ 時，$f(a)$ 爲 $f(x)$ 之極小值。

又若 $f''(a)=0$ 而 $f'''(a)\neq 0$，$f(a)$ 不爲 $f(x)$ 之極大或極小值 (見 § 859 例 2)．故一般言之，$x=a$ 時，設由第一至第 r 之諸導來式皆爲零，但 $r+1$ 次導來式非爲零，$f(a)$ 於 r 爲奇數時，爲極大或極小值，但 r 爲偶數時則否。

例． 當 x 漸增經過 2 時，$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ 增乎減乎？又求 $f(x)$ 之極大與極小值。

吾人知 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$．故 $f'(2)=-3$ 爲負．故當 x 經過 2 時，$f(x)$ 正減小也。

又 $x=1$ 及 $x=3$ 時，$f'(x)=0$．而 $f''(x)=6x-12$，故 $f''(1)=-6$ 爲負而 $f''(3)=6$ 爲正．故 $f(1)=3$ 爲 $f(x)$ 之極大值，而 $f(3)=-1$ 爲極小值．

$f(x)$ 之變化． 茲討論 x 由 $-\infty$ 繼續變化至 $+\infty$ 時， 859

§214, 含實係數之多項式 $f(x)$ 之值如何變化．

例 1． 討論 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$.

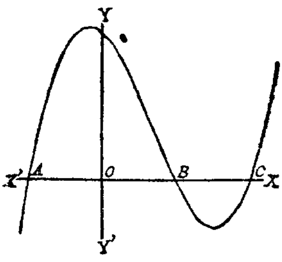
$f(x)=0$ 之根爲 $-1, 1, 2$, 而 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

故當 $x=-\infty$, $f(x)=-\infty$；當 x 在 $-\infty$ 與 -1 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=-1$, $f(x)=0$；當 x 在 -1 與 1 之間，$f(x)$ 爲正，當 $x=1$, $f(x)=0$；當 x 在 1 與 2 之間，$f(x)$ 爲負；當 $x=2$, $f(x)=0$； 當 x 在 2 與 ∞ 之間，$f(x)$ 爲正；當 $x=\infty$, $f(x)=\infty$.

$f'(x)=3x^2-4x-1=0$, 其根爲 $(2\pm\sqrt{7})/3$, 即大約爲 -0.2 與 1.5. 當 $x<(2-\sqrt{7})/3$ 及 $x>(2+\sqrt{7})/3$ 時，$f'(x)$ 爲正，而當 x 在 $(2-\sqrt{7})/3$ 及 $(2+\sqrt{7})/3$ 之間，$f'(x)$ 爲負．

故從 §858, $f(x)$ 視 x 由 $-\infty$ 至 $(2-\sqrt{7})/3$ 之變化而遞增，又當 x 由 $(2-\sqrt{7})/3$ 至 $(2+\sqrt{7})/3$ 之變化，$f(x)$ 遞減，而於 x 從 $(2+\sqrt{7})/3$ 變化至 ∞ 時又重復遞增．

由此 §639, 則知當 $x=(2-\sqrt{7})/3$ 時，$f(x)$ 爲極大值，當 $x=(2+\sqrt{7})/3$ 時，$f(x)$ 爲極小值．此與 §858 相同，因當 $x=(2-\sqrt{7})/3$, $f''(x)=6x-4$ 爲負，當 $x=(2+\sqrt{7})/3$ 時爲正．



設 $y=f(x)$, 由 §389 之方法作此方程之圖象，則 $f(x)$ 之變化，即可一覽無遺．此曲線如圖所示．曲線截 x- 軸於 A, B, C 點爲 $f(x)=0$ 之根 $-1, 1, 2$. 曲線於 x- 軸上者 $f(x)$ 爲正，在 x- 軸下者爲負．在 A 與 B 間曲線最高點對應於 $f(x)$ 之極大值，B 與 C 間最低點爲極小值．

當 x 由 $-\infty$ 變至 ∞，曲線之對應點在 x- 軸下無窮遠處，向右上方經過 A 至極大點，然後向下經過 B 至極小點，然後再向上經過 C 而至 x- 軸上無窮遠處.

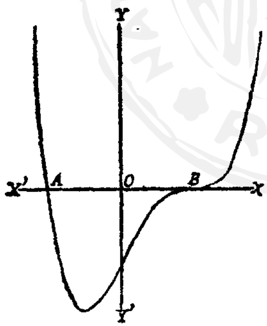
設 $f(x)$ 之絕對項逐漸增大，$y=f(x)$ 之圖形，必鉛直向上移動，B 點及 C 點首先漸近而合於切點，最後則消失. $f(x)=0$ 對應之根先爲等根，而終爲虛根.

例 2. 討論 $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$ 之變化.

$f(x)=0$ 之根爲 $-1, 1, 1, 1$, 而 $f(x)=(x+1)(x-1)^3$.

故當 $x=\pm\infty$, $f(x)=\infty$; 當 $x=\pm 1$, $f(x)=0$; 當 $x<-1$ 又當 $x>1$, $f(x)$ 爲正; 當 x 在 -1 與 1 之間, $f(x)$ 爲負.

此處, $f'(x)=4x^3-6x^2+2=2(2x+1)(x-1)^2$, 而 $f'(x)=0$ 之根爲 $-1/2$, $1, 1$. 當 $x<-1/2$, $f'(x)$ 爲負; 當 x 在 $-1/2$ 與 1 之間又當 $x>1$, $f'(x)$ 爲正. 故 § 858, 於 x 之變化由 $-\infty$ 至 $-1/2$ 時, $f(x)$ 逐漸減小, 而於 x 變化由 $-1/2$ 至 1, 及由 1 至 ∞ 時逐漸增大.



故當 $x=-1/2$ 時, $f(x)$ 爲極小值, 但當 $x=1$ 時, $f(x)$ 既非極大亦非極小值.

此與 § 858 符合. 因 $f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$ 而 $f'''(x)=24x-12$. 故當 $x=-1/2$, $f''(x)$ 爲正; 但當 $x=1$, $f''(x)=0$ 而 $f'''(x)\neq 0$.

$y=f(x)$ 之圖形如圖所示. 其曲線割 x- 軸之 A 點對應於 $f(x)=0$ 之根 -1, 其曲線切 x- 軸且過 x- 軸之 B 點對應於三重根 1. 曲線之最低點對應於 $f(x)$ 之極小值. 其座標爲 $-1/2, -27/16$.

860 如以上各例情形，若 $f(x)$ 之次數爲奇數，其首項係數爲正，則當 x 從 $-\infty$ 變至 $+\infty$，$f(x)$ 由 $-\infty$ 增大至其第一極大值，然後減小至第一極小值等等，而最後從末一極小值增至

$+\infty$. 雖然函數有時亦可無極大或極小值,蓋方程 $f'(x)=0$ 之次數爲偶數,有時可無實根也. 又 $y=f(x)$ 之圖形,由 $x-$ 軸下方之無窮遠,引至 $x-$ 軸上方之無窮遠.其截 $x-$ 軸之回數爲奇數,——至少爲一次.

反之,若 $f(x)$ 之次數爲偶數,則 $f(x)$ 最初由 $+\infty$ 減小至第一極小值,最後由極小值增大至 $+\infty$. 此種情形, $y=f(x)$ 之圖形不必截 $x-$ 軸.若截 $x-$ 軸,則所截之次數必爲偶數.

通常可用 §389 之方法,求得 $y=f(x)$ 之充分精確之圖形,卽給與 x 一列數值,計算 y 之對應值,定所得各組 x, y 值之對應點,經此數點作一光滑之曲線.此線能約略表出眞圖形截 $x-$ 軸之點,及極大與極小值諸點之所在.惟欲得眞確之截點,則必須解方程 $f(x)=0$; 欲得極大極小諸點,則須解 $f'(x)=0$. $f(x)=0$ 之重根皆與圖形切橫軸之點相對應.若重根之重複次數爲奇數,則圖形更截 $x-$ 軸於此點.

習 題 LXXVII

1. 討論 $f(x)=(x+1)(x-2)^2=x^3-3x^2+4$ 之變化,求其極大與極小值.且畫 $y=f(x)$ 之圖形.

2. 同上題處理下列各函數:

(1) $2x^2-x+1$. (2) $(x+1)(x-2)(2x-1)$.

(3) $x^3-12x+14$. (4) x^3-5x^2+3x+9.

(5) x^3-3x^2+5. (6) $(x+1)^2(x-2)^2$.

(7) $(x^2+x+1)(x+2)$. (8) $x(x-1)(x+2)(x+3)$.

3. $x=-1, -1/2, 0, 1/2, 1, \cdots 4$ 時定其各對應點，而求各分式方程之圖形.

(1) $y=\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$.　　(2) $y=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$.

史篤姆氏定理

861　**史篤姆函數.** 設 $f(x)=0$ 爲無重根之任何方程，而 $f_1(x)$ 爲 $f(x)$ 之第一導來式.

以 $f_1(x)$ 除 $f(x)$，稱其商爲 q_1，變其餘式之號而稱爲 $f_2(x)$.

又以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$，稱其商爲 q_2，變其餘式之符號而稱爲 $f_3(x)$.

如此類推，此法與 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 間最高公因式之通常求法不同之點，僅爲：每一餘式皆變號，又留意此外不得再變號.

因 $f(x)=0$ 無重根，故 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 間無公因式，§ 851；因此吾人最後所得餘式應爲一異於 0 之常數，§465. 變此餘式之符號而名之 f_m.

函數之數列

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \cdots, f_m,$$

包括此已知之多項式，其第一導來式，及歷次所得變號之各餘式謂之史篤姆數列或史篤姆函數之數列.

862　**史篤姆函數之關係.** 此函數，由定義，而有下列各組之關係，

$$f(x) \equiv q_1 f_1(x) - f_2(x), \qquad (1)$$

$$f_1(x) \equiv q_2 f_2(x) - f_3(x), \qquad (2)$$

$$f_2(x) \equiv q_3 f_3(x) - f_4(x), \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{m-2}(x) \equiv q_{m-1} f_{m-1}(x) - f_m. \qquad (m-1)$$

由此等方程,可得結論:

1. x 之同一值,不能使二相鄰函數爲 0.

例如,設 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 當 $x=c$ 時,爲零,故由 (2) 可知 $f_3(x)$ 亦爲零;由是從 (3) 可知 $f_4(x)$ 爲零;從而,最後,可知 f_m 爲 0. 但此與假定相違.

2. 設 x 之某值使中間函數 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{m-1}(x)$ 之一爲零,則其緊接於此函數前與後之二函數有相異符號.

故,設
$$f_2(c)=0,$$
則由 (2) 得
$$f_1(c)=-f_3(c).$$

史篤姆定理. 設 a 與 b 爲二任意實數,但皆非 $f(x)=0$ 之根. 863

則
$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a), \cdots, f_m$$
數列中符號之變化數與
$$f(b),\ f_1(b),\ f_2(b), \cdots, f_m$$
數列中符號變化數之差等於 $f(x)=0$ 所有介乎 a 與 b 間之根之個數.

爲便於表明起見,設 $a<b$, 又設 x 從 a 連續變化至 b, § 214.

當 x 由 a 變化至 b, 常數 f_m 之符號始終不變,其他函數符號之可能變化,亦卽數列
$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \cdots, f_m$$
中符號變化數之或有變化,僅在 x 經過方程 $f(x)=0$, $f_1(x)=0$ 等等之根時, § 835. 但

1. 除第一函數 $f(x)$ 外,任意函數改號時,全列中符號之變化數不因之而增減.

例如，設 c 爲 $f_2(x)=0$ 之一根，而 $f_2(x)$ 於 x 經歷 c 時，由正變負。

因 c 爲 $f_2(x)=0$ 之根，故 c 不能又爲 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根，§ 862. 設取一適當小之正數 h，使 $c-h$ 與 c 間，或 c 與 $c+h$ 間無 $f_1(x)=0$ 或 $f_3(x)=0$ 之根，則 x 由 $c-h$ 變化至 $c+h$ 時，$f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 皆不變其符號，§ 835.

但當 $x=c$，$f_1(x)$ 及 $f_3(x)$ 有相反之符號，§ 862. 設 $f_1(c)$ 爲正；則 $f_3(c)$ 爲負，而對於 x 在 $c-h$ 及 $c+h$ 數值之間，得 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 之符號如下表：

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x=c-h$	+	+	−
$x=c$	+	0	−
$x=c+h$	+	−	−

故對於 x 之各值，三函數之符號

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x)$$

有一變化。故 $f_2(x)$ 之符號變化，至少在此部份僅改變變化之位置。

又 x 經歷 c 時，數列在 $f_3(x)$ 以後之部份，其變化之數不變。因當 x 經過 c 時，$f_3(x)$ 以後之函數無變其符號者，若有之，亦祇將 $f_2(x)$ 之情形重複一次，其惟一影響，僅爲改變另一變化之位置而已。

2. x 由 a 變至 b，每經過 $f(x)=0$ 之一根，則此數列失去一個變化。

設 c 爲 $f(x)=0$ 之一根。

x 之值較 c 略小時函數 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 有相反之符號，x 之值較 c 略大時有相同之符號，§ 856.

換言之，$f(x)$ 與 $f_1(x)$ 間在 x 將達 c 之前，有一變化，而當 x 經過 c 後，此變化即行消失。

故 x 由 a 變至 b 時，史篤姆函數列不能增多一變化。反之，x 每經 $f(x)=0$ 之一根，此函數列即消失一變化且僅消失一個。

故變化個數之差在

$$f(a),\quad f_1(a),\quad f_2(a),\cdots, f_m$$

與

$$f(b),\quad f_1(b),\quad f_2(b),\cdots, f_m$$

即 x 經歷 $f(x)=0$ 所有介乎 a 與 b 之間之諸根時，所失去之各變化。換言之，即所求證諸根之數.

設將 §861 之法，應用於有重根之方程 $f(x)=0$，則函數列 $f(x), f_1(x),\cdots, f_m(x)$，(1) 其最後項爲其他各項之最高公因式，§465. 以 $f_m(x)$ 除 (1) 之各項。則得 $\phi(x), \phi_1(x),\cdots, 1$，(2) 如前所證，仍有史篤姆氏定理所有之性質.故 $\phi(x)=0$ 在 a 與 b 間諸根之數即 §852，$f(x)=0$ 之異根之數等於在 $\phi(a), \phi_1(a),\cdots, 1$ 及 $\phi(b), \phi_1(b),\cdots 1$ 中符號變化數之差.此差與 $f(a), f_1(a),\cdots, f_m(a)$ 及 $f(b), f_1(b),\cdots, f_m(b)$ 之變化數之差相同；因以 $f_m(a)$ 及 $f_m(b)$ 各乘 $\phi(a),\cdots, 1$ 及 $\phi(b),\cdots, 1$ 並不影響其變化也。

史篤姆定理之應用. 史篤姆定理能求已知數字方程內有若干個相異之實根. 又能在任意二連續整數間求出有若干根，故能在任何情形之下檢定根數.惟此法頗繁，故僅於 §836 簡法無效時方使用之也。 864

例 1. 檢定 $x^3+3x^2-4x+1=0$ 各根之位置.

此間 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$ 又 $f_1(x)=3x^2+6x-4$.

排列所計算之其餘函數,如 § 468, 3, 得

$$
\begin{array}{r|r|l}
3+\ 6-\ 4 & 1+3-\ 4+1 & 1+1 \\
6+12-\ 8 & 3+9-12+3 & \\
6-\ 3 & 3+6-\ 4 & \\
\hline
15-\ 8 & 3-\ 8+3 & \\
30-16 & 3+\ 6-4 & \\
30-15 & -14+7 & \\
\hline
-\ 1 & \therefore\ f_2=2-1 & 3+15 \\
\therefore\ f_3=1 & &
\end{array}
$$

故

$$f(x)=x^3+3x^2-4x+1,$$

$$f_1(x)=3x^2+6x-4,$$

$$f_2(x)=2x-1,$$

$$f_3=1$$

注意,式中所得之 $f_2(x)$ 及 f_3 非 § 861 之 $f_2(x)$ 及 f_3, 乃皆以正常數乘後而得者.

設以 $f_2(x)=2(x-0.5)$, 依綜合除法除 $f_1(x)$, 則計算較簡.在最後除法內最好用綜合除法.

1. 當 x 之絕對值甚大,多項式之符號與其最高次數項之符號同, § 855. 故得下表.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$,	三個變化
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$,	二個變化
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$,	無變化

故 $f(x)=0$ 有一負根與二正根.

2. 定正根之位置,代 $x=0, 1,\cdots$ 得

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$,	二個變化
$x=1$	$+$	$+$	$+$	$+$,	無變化

故二個正根在 0 與 1 之間.

因僅有一負根,可用 § 836 之法定其位置.因此得其根在 -4 與 -5 之間.

例 2. $f(x)=2x^3-x^2-2x+2=0$ 有若干實根?

如例 1, 得 $f_1(x)=3x^2-x+1$ 又 $f_2(x)=13x-17$.

$f_3(x)$ 所需者祇其符號,不必以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$.

因 $f_2(x)=13(x-17/13)$, 以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 之餘式爲 $f_1(17/13)$. 但 $17/13>1$, 故當 $x>1$, $f_1(x)$ 爲正,故 $f_1(17/13)$ 爲正,而 f_3 爲負.

因 $x=-\infty$ 時 $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ $f_3(x)$ 之符號爲 $-, +, -, -$; $x=\infty$ 時爲 $+, +, +, -$. 故 $f(x)=0$ 僅有一實根.

最後函數 f_m 之惟一性質，在 §863 中之證所引用者，爲符號之不變．故計算 $f(x)=0$ 之史篤姆函數，以求 a 與 b 間根之個數時，若計算至一函數 $f_p(x)$，對於一切 a 與 b 間之 x 值，其符號不變者，吾人卽不必計算以後之函數．蓋由 §863 之證明可知根之個數爲 $f(a),\cdots f_p(a)$ 及 $f(b),\cdots f_p(b)$ 間變化數之差也．

例 3. $f(x)=x^3+x^2+x+1=0$ 有若干實根？

$f_1(x)=3x^2+2x+1$，又因 $2^2<4.3$ 卽 x 爲任何實數時皆爲正，§§ 635, 823. 故不必計算 $f_2(x)$ 及 f_3.

$f(x)$, $f_1(x)$ 之符號在 $x=-\infty$ 時爲 $-$, $+$；在 $x=\infty$ 時爲 $+$, $+$. 故 $f(x)=0$ 有一實根．

習　題　LXXVIII

用史篤姆定理，求下列各方程實根之位置：

1. $x^3-6x^2+5x+13=0$.
2. $x^3-4x^2-10x+41=0$.
3. $x^3+5x+2=0$.
4. $x^3+3x^2+8x+8=0$.
5. $x^3-x^2-15x+28=0$.
6. $x^4-4x^3-5x^2+18x+20=0$.
7. $2x^4-3x^2+3x-1=0$.
8. $x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0$.
9. $x^4-12x^2+12x-3=0$.
10. $x^4+2x^3-6x^2-8x+9=0$.

用史篤姆定理，求下列各方程實根之個數：

11. $4x^3-2x-5=0$.
12. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.
13. $x^n+1=0$.
14. $x^4-6x^3+x^2+14x-14=0$.

15. 設 $f(x)=0$ 爲無重根之 n 次方程．求證 $f(x)=0$ 所有之根爲實根之條件乃在史篤姆函數數列 $f(x)$, $f_1(x),\cdots$, f_m 內有 $n+1$ 項，而此等函數之第一項有相同之符號．

16. 用例 15 之定理，證明三次方程 $x^3+px+q=0$ 之根爲不同之實根之條件爲 $4p^3+27q^2$ 爲負．

諸根之對稱函數

865 **定理 1.** 設 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0$ 諸根爲 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 因而 $f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$, 則

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\cdots+\frac{f(x)}{x-\beta_n}.$$

例如,設 $n=3$, 則

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3). \tag{1}$$

以 $x+h$ 代 x 於 (1), 則得

$$f(x+h)=[(x-\beta_1)+h][(x-\beta_2)+h][(x-\beta_3)+h]. \tag{2}$$

吾人可化 (2) 之每邊爲 h 之多項式,第一邊以戴勒氏定理, § 848, 第二邊用連續乘法,如 § 558.

因 (2) 爲一恆等式,在所得之兩多項式內, h 之同次項係數必須相等, § 284.

但因 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$, § 848, 在第一多項式內 h 之係數爲 $f'(x)$. 在第二多項式內爲 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)$. 故

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)\\ &=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\frac{f(x)}{x-\beta_3}, \end{aligned} \tag{3}$$

蓋 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)=f(x)/(x-\beta_1)$, 等等.

此理可應用於任何 n 次方程.在普通狀況之下, (2) 之右邊有 n 個因式,且當此邊化爲 h 之多項式時, h 之係數爲諸二項式 $x-\beta_1, x-\beta_2,\cdots, x-\beta_n$ 中,每次取 $n-1$ 個相乘積之和, § 558. 乘積中有一缺因式 $x-\beta_1$ 者可寫爲 $f(x)/(x-\beta_1)$ 等等.

例如,設 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,

得 $f'(x)=3x^2-12x+11$,

而 $(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2)=3x^2-12x+11$.

定理 2. 方程 $f(x)=0$ 所有諸根之同次冪之和,可以其係數之有理式表之。 866

例如,設方程爲

$$f(x)=x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0. \tag{1}$$

設 (1) 式之根爲 α, β, γ,而 $s_1, s_2, \cdots, s_r$ 之意義爲

$$s_1=\alpha+\beta+\gamma,\ s_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\cdots,\ s_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r.$$

今欲證明 $s_1, s_2, \cdots$ 能以係數 b_1, b_2, b_3 之有理式表之。

1. 用上述定理,§865,得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha}+\frac{f(x)}{x-\beta}+\frac{f(x)}{x-\gamma}. \tag{2}$$

因 $f(x)$ 能爲 $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma$ 所除盡,(2) 之各分式項代表 x 之多項式可以 §410 規則求得之.用此規則並加其結果,得

$$\begin{aligned}
f(x)/(x-\alpha)&=x^2+(\alpha+b_1)x+(\alpha^2+b_1\alpha+b_2)\\
f(x)/(x-\beta)&=x^2+(\beta+b_1)x+(\beta^2+b_1\beta+b_2)\\
f(x)/(x-\gamma)&=x^2+(\gamma+b_1)x+(\gamma^2+b_1\gamma+b_2)\\
\hline
f'(x)&=3x^2+(s_1+3b_1)x+(s_2+b_1s_1+3b_2)
\end{aligned} \tag{3}$$

但由定義,§847,又得

$$f'(x)=3x^2+2b_1x+b_2. \tag{4}$$

將 (3), (4) 中 x 同冪諸係數相等,而解 s_1, s_2,得

$$s_1+3b_1=2b_1, \qquad \therefore\quad s_1=-b_1, \tag{5}$$

$$s_2+b_1s_1+3b_2=b_2, \qquad \therefore\quad s_2=b_1^2-2b_2. \tag{6}$$

2. 由前所得 s_1 及 s_2 之數值,能順次求得 $s_3, s_4, \cdots$ 如下:因 α, β, γ 爲 (1) 之根,得

$$\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha+b_3=0, \tag{7}$$

$$\beta^3+b_1\beta^2+b_2\beta+b_3=0, \tag{8}$$

$$\gamma^3+b_1\gamma^2+b_2\gamma+b_3=0. \tag{9}$$

加此等恆等式,得

$$s_3+b_1s_2+b_2s_1+3b_3=0, \tag{10}$$

可得 s_3 用 b_1, b_2, b_3, s_1, s_2 之有理式表之,故由 (5), (6) 可以 b_1, b_2, b_3 之有理式表之。

次以 α, β, γ 各乘恆等式 (7), (8), (9) 而加其結果,則得

$$s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1=0, \tag{11}$$

引用 (5), (6), (10) 可得 s_4 以 b_1, b_2, b_3 之有理式表明之。

仿此,設以 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 及 $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ 等乘 (7), (8), (9) 而加其結果,則得恆等式:

$$s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2=0, \quad s_6+b_1s_5+b_2s_4+b_3s_3=0, \cdots,$$

亦可以 b_1, b_2, b_3 之有理式表 $s_5, s_6, \cdots$ 諸式。

同理,此定理可證明任何 n 次方程 $f(x)=0$.

例 1. 設 α, β, γ 表 $x^3-2x^2+4x+2=0$ 之根,求

$$\Sigma 1/\alpha=1/\alpha+1/\beta+1/\gamma, \quad \Sigma 1/\alpha^2=1/\alpha^2+1/\beta^2+1/\gamma^2,$$

$$\Sigma 1/\alpha^3=1/\alpha^3+1/\beta^3+1/\gamma^3.$$

應用 $x=1/y$ 之變形,而以 y^3 之係數除變形後之方程,得

$$y^3+2y^2-y+1/2=0.$$

從此方程將 $b_1=2,\ b_2=-1,\ b_3=1/2$ 代入公式 (5), (6), (10),得

$$s_1=-2, \quad s_2=6, \quad s_3=-31/2.$$

故 §.814, $\Sigma 1/\alpha=-2$, $\Sigma 1/\alpha^2=6$, $\Sigma 1/\alpha^3=-31/2$.

例 2. 從 $f(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0$, 證明

$$s_1+4b_1=3b_1,\ s_2+b_1s_1+4b_2=2b_2,\ s_3+b_1s_2+b_2s_1+4b_3=b_3,$$

$$s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1+4b_4=0,\qquad s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2+b_4s_1=0,$$

計算 s_1, s_2, s_3, s_4 時以 b_1, b_2, b_3, b_4 表之.

如 (1) 所示,當首項係數爲 1 時,前公式證明 $s_1, s_2, s_3, \cdots$ 爲方程中各係數之整函數. 867

定理 3. $f(x)=0$ 諸根之每一有理對稱函數,能以其有理係數表出之. 868

設 $f(x)=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \nu$.

凡 $\alpha, \beta, \cdots, \nu$ 之有理對稱函數,可以此種形式 $\Sigma\alpha^p, \Sigma\alpha^p\beta^q, \Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$ 等等之有理函數式表之, §544. 故本定理之必須證明者爲此種形式之函數. $\Sigma\alpha^p=s_p$ 形式之函數已在 §866 中證明,現將證 $\Sigma\alpha^p\beta^q$ 等等亦能以 s_p 等形式之有理函數表之.

1. $\Sigma\alpha^p\beta^q=\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots$ 之形式.

乘積
$$(\alpha^p+\beta^p+\cdots)(\alpha^q+\beta^q+\cdots) \qquad (1)$$
爲
$$\alpha^{p+q}+\beta^{p+q}+\cdots, \qquad (2)$$
$$\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots \qquad (3)$$
之兩對稱式之和.

但 (1) 及 (2) 爲係數之有理係數式, §866. 故 (3), 卽 $\Sigma\alpha^p\beta^q$ 可由 (1) 減 (2) 得之,亦爲此類函數.

因 (1) 爲 s_ps_q 而 (2) 爲 s_{p+q}, 則得公式

$$\Sigma\alpha^p\beta^q=s_ps_q-s_{p+q}. \qquad (4)$$

當 $p=q$ 時, (3) 之各項爲每對相等,而 (3) 變成 $2\Sigma\alpha^p\beta^p$. 故得 $2\Sigma\alpha^p\beta^p=s_p^2-s_{2p}$.

2. $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r=\alpha^p\beta^q\gamma^r+\beta^p\alpha^q\gamma^r+\cdots$之形式。

乘積 $$(\alpha^p\beta^q+\beta^p\alpha^q+\cdots)(\alpha^r+\beta^r+\gamma^r+\cdots) \quad (5)$$

爲 $$\alpha^{p+r}\beta^q+\beta^{p+r}\alpha^q+\cdots, \quad (6)$$

$$\alpha^p\beta^{q+r}+\beta^p\alpha^{q+r}+\cdots, \quad (7)$$

$$\alpha^p\beta^q\gamma^r+\beta^p\alpha^q\gamma^r+\cdots \quad (8)$$

三對稱式之和。

但已知(5),(6)及(7)爲係數之有理函數.故(8),即$\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$可由(5)減去(6)及(7)之和而得之,亦爲此類之函數.

當 $p=q$ 時,(8)變爲 $2\,\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$;當 $p=q=r$ 時,則變爲 $6\,\Sigma\alpha^p\beta^p\gamma^p$.

3. $\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^u$等等之形式。

吾人頗易證明重複引用1及2之方法,可作出此等係數之有理函數.首先可用$\alpha^u+\beta^u+\gamma^u+\cdots$乘$\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r$.

例. 求證

$$\Sigma\alpha^p\beta^q\gamma^r=s_ps_qs_r+2s_{p+q+r}-s_{p+q}s_r-s_{q+r}s_p-s_{r+p}s_q.$$

習題 LXXIX

1. 求在方程 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 中以 a_0, a_1, a_2, a_3 表 s_3 及 s_4 之值.

2. 設 α, β, γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之諸根,求以 p, q, r 表 $\Sigma1/\alpha^3$, $\Sigma\alpha\beta^2$ 之值.

3. 求一方程其根爲 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 諸根之立方.

4. 設 α, β, γ 爲 $x^3-x^2+3x+4=0$ 之諸根,試用§§ 866, 867 之方法,求諸根之下列對稱函數之值:

(1) s_1, s_2, s_3, s_4. (2) $\Sigma\alpha^3\beta^2$. (3) $\Sigma\alpha^3\beta\gamma$.

(4) $\Sigma\alpha^3\beta^2\gamma$. (5) $\Sigma1/\alpha^4$. (6) $\Sigma\alpha^2\beta^2/\gamma$.

XXX. 普通三次及四次方程

代數解答. 前章內,已示凡數字方程之實根常能求出其約值或確值,且能擴其方法以至應用於複根.但對文字方程不能應用.欲解此方程必須求以係數表根之式. 869

所謂方程之根可用代數法解之者,卽應用有限次數之加,減,乘,除,乘方,開方諸代數法而以係數表之也.

在 § 631 已證明普通二次方程,有此種代數解答,今將證明者,卽普通三次,四次方程亦有此解答.但四次以上之高次方程不能有代數解答.

一之立方根. 在 § 646 中已知 $x^3=1$ 有三根 $1, (-1+i\sqrt{3})/2, (-1-i\sqrt{3})/2$. 故此三數皆爲一之立方根.其第三根爲第二根之平方.故設以 ω 表第二根,則第三根可以 ω^2 表之.因 $x^3-1=0$ 缺 x^2 一項, § 805, 是以 $1+\omega+\omega^2=0$. 870

仿此,凡數 a 皆有三次根,卽 $x^3=a$ 之三根,設一根爲 $\sqrt[3]{a}$,則他二根爲 $\omega\sqrt[3]{a}, \omega^2\sqrt[3]{a}$.

普通三次方程. 卡籐氏公式. 用 § 818 之法,每個三次方程可以化爲下列形式 871

$$x^3+px+q=0, \tag{1}$$

式中缺 x^2 項.

在 (1) 內使 $$x=y+z. \tag{2}$$

得 $$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0,$$

卽 $$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0. \tag{3}$$

因變數 y 及 z 有一簡單之關係 (3), 在其間可加入一第二種關係。

設 $$3yz+p=0, \tag{4}$$

則由 (3), $$y^3+z^3+q=0. \tag{5}$$

從 (5), $$y^3+z^3=-q, \tag{6}$$

又由 (4), $$y^3z^3=-p^3/27. \tag{7}$$

故 § 636, y^3 與 z^3 爲以下二次方程之根

$$u^2+qu-p^3/27=0. \tag{8}$$

解 (8) 而以 A 及 B 各表所得二次方程之二根，得

$$y^3=A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ z^3=B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{9}$$

方程 (9) 表 y 之三值及 z 之三值，卽 § 870,

$$y=\sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{A}, \tag{10}$$

$$z=\sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{B}. \tag{11}$$

但由 (4), $yz=-p/3$, 且在 (10), (11) 內 y, z 之各對值適合於此條件者爲：

$$y,\ z=\sqrt[3]{A},\ \sqrt[3]{B};\ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{B};\ \omega^2\sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{B}.$$

以此各對值代入 (2) 內，則得 (1) 之三根，卽

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ \ x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ \ x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B},$$

其中 $$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{12}$$

例 1. 解 $x^3-6x^2+6x-2=0$.

由 § 818 則知用式 $x=y+2$ 代入原方程內，則變原方程為 $y^3+py+q=0$ 之形式.故得

$$y^3-6y-6=0.$$

此方程之根，用 $p=-6$, $q=-6$ 代於上公式，得

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\quad \sqrt[3]{4}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2,\quad \sqrt[3]{4}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega.$$

故原方程之根為

$$2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ 2+\sqrt[3]{4}\,\omega+\sqrt[3]{2}\,\omega^2,\ 2+\sqrt[3]{4}\,\omega^2+\sqrt[3]{2}\,\omega.$$

例 2. 解 $x^3+3x^2+6x+5=0$.

解答之討論. 當 p 及 q 為實數時，根之性質依 $q^2/4+p^3/27$ 之值而定，今討論如下： 872

1 設 $q^2/4+p^3/27>0$, 則一根為實數，兩根為虛數.

因在此情形中 A 與 B 皆為實數.故 x_1 為實數，x_2 及 x_3 為共軛虛數，§ 870.

2. 設 $q^2/4+p^3/27=0$, 三根皆為實數且二根相等.

因在此情形中 $A=B=-q/2$. 故 $x_1=-2\sqrt[3]{q/2}$, 又 $x_2=x_3=-(\omega+\omega^2)\sqrt[3]{q/2}=\sqrt[3]{q/2}$, 因 $\omega+\omega^2=-1$, 由 § 870.

3 設 $q^2/4+p^3/27<0$, 各根皆為不同之實數.

此可以史篤姆氏定理證明之(見 477 頁，例 16). 但當 $q^2/4+p^3/27<0$, A 及 B 皆為複素數，且雖 x_1, x_2, x_3 之諸式表實數，但不能用代數變形法化為實數式.此所謂三次方程之不可約情形(參閱 § 885).

此式 $q^2/4+p^3/27$ 謂之三次方程 $x^3+px+q=0$ 之判別式，因此式等於零，為二根相等之條件(比較 § 635). 873

874 **普通四次方程. 范拉利解法.** 用 §818 之方法,則知凡四次方程可化爲下列形式:

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

加減 $x^2u+u^2/4$, 因而 (1) 之第一邊可變成二平方之差,其中 u 爲可求得之常數.如此可得

$$x^4+x^2u+u^2/4-x^2u-u^2/4+ax^2+bx+c=0,$$

即 $$(x^2+u/2)^2-[(u-a)x^2-bx+(u^2/4-c)]=0. \tag{2}$$

欲將第二項成完全平方,則得

$$b^2=4(u-a)(u^2/4-c),$$

即 $$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0. \tag{3}$$

使 u_1 表 u 之三次方程之一根.當 (2) 中之 u 爲 u_1 所代時,則第二項爲 $\sqrt{u-a}x-b/2\sqrt{u_1-a}$ 之平方而 (2) 與下列二個二次方程相等.

$$x^2+\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0. \tag{4}$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0. \tag{5}$$

故由解 (4) 及 (5) 可得 (1) 之根.

例 1. 解 $x^4+x^2+4x-3=0$.

其中 $a=1$, $b=4$, $c=-3$, 故三次方程 (3) 爲

$$u^3-u^2+12u-28=0.$$

此三次方程之一根爲 2, 又使 $u_1=2$ 代入 (4), (5), 得

$$x^2+x-1=0 \text{ 及 } x^2-x+3=0.$$

解此兩二次方程,得 $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$, $(1\pm i\sqrt{11})/2$.

例 2. 解 $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$

因三次方程 (3) 有三根,其中任何之一可取作 (4) 與 (5) 中之 u_1, 而上述之法可得 x 爲 $3\cdot4$ 或 12, 但已知方程 (1) 內能

有四根。且不難證明 u_1 之選擇不能影響 (4), (5) 共有之四個根，不過僅在 (4) 與 (5) 內四根分配之方法不同而已。

倒數方程． 由觀察法可知一已知倒數方程內，§ 815, 是 875
否含有一根為 1 或 -1, 設有之，可由原方程得一降次方程 $\phi(x)=0$, 其根無為 1 或 -1 者．從 § 815, 可知此降次方程 $\phi(x)=0$, 必為下列之形式．

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0=0. \qquad (1)$$

即其次數必為偶數，凡與 $\phi(x)$ 之首末等距之二係數皆相等．

今將證明方程 $\phi(x)=0$, 若以 $z=x+1/x$ 代之，則可變形為 z 之方程，其次數為 $\phi(x)=0$ 之次數之半．故若 $\phi(x)=0$ 之次數不大於八，可用 §§ 631, 871, 874 以求其根．

以 x^m 除 (1), 併其各項，得

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\cdots+a_m=0. \qquad (2)$$

由演算上式，得

$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right); \qquad (3)$$

又設 $z=x+1/x$, 又在 (3) 內依次使 $p=1, 2, 3\cdots$, 得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2, \ \cdots, \qquad (4)$$

卽,得 z 之 p 次式以表 x^p+1/x^p. 以此種方程代入 (2), 則得 z 之 m 次方程,如前所欲證明者(比較 § 645).

例 1. 解 $2x^8-x^7-12x^6+14x^5-14x^3+12x^2+x-2=0$.

此爲一倒數方程,有根 1 及 -1.

去因式 x^2-1,

$$2x^6-x^5-10x^4+13x^3-10x^2-x+2=0.$$

以 x^3 除之,

$$2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

故由 (4), $$2(z^3-3z)-(z^2-2)-10z+13=0,$$

卽 $$2z^3-z^2-16z+15=0.$$

解, $$z=1,\ -3,\ 或\ 5/2$$

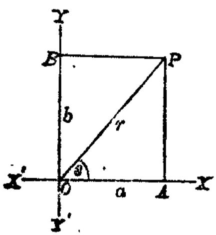
故 $$x+1/x=1,\ -3,\ 或\ 5/2,$$

故 $$x=(1\pm i\sqrt{3})/2,\ (-3\pm\sqrt{5})/2,\ 2,\ 或\ 1/2.$$

例 2. 解 $x^6-x^5+x^4+x^2-x+1=0$.

876 凡二項方程 $x^n+a=0$ 可將 $x=\sqrt[n]{a}y$ 代入,而化爲倒數方程之形式,代入之結果爲 $y^n+1=0$ (比較 § 646, 例 2).

877 **以絕對值及幅角表複素數之式.** 在附圖中,P 爲複素數 $a+bi$ 之圖形,作法與 § 238 同.



OP 之長爲 $\sqrt{a^2+b^2}$, 爲 $a+bi$ 之絕對值, § 239. 以 r 表明之.

設 θ 表角 XOP 之弧度,卽此角在以 O 爲中心所作單位半徑之圓周上,所對之弧長. 吾人稱 θ 爲 $a+bi$ 之幅角.

稱比 b/r 爲 θ 之正弦,而寫 $b/r=\sin\theta$.

稱比 a/r 爲 θ 之餘弦，寫 $a/r=\cos\theta$.

故得 $$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta,$$

所以 $$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

當 $\theta=0$ 時，則 $b=0$ 及 $a=r$ 故 $\sin 0=0$ 及 $\cos 0=1$.

360° 之弧度爲 2π，此爲單位圓圓周之長。故由 r,θ 所定 878
之一點 P 亦可用 $r,\theta+2\pi$；$r,\theta-2\pi$ 表示之；故普通以 $r,\theta+2m\pi$ 表之；但此處 m 表任意整數。故 $a+bi$ 之普通幅角爲 $\theta+2m\pi$.

定理. 兩複素數之積之絕對值，等於其絕對值之積；而 879
而其幅角爲各幅角之和.

因 $$r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')$$
$$+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')]$$
$$=rr'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')],$$

因在三角學中已證明

$$\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta',$$
$$\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'.$$

在 § 240 之作圖法，基於此定理也.

系 1. 以 § 879 重複應用，得 880

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\cdot r''(\cos\theta''+i\sin\theta'')\cdots$$
$$=rr'r''\cdots[\cos(\theta+\theta'+\theta''+\cdots)$$
$$+i\sin(\theta+\theta'+\theta''+\cdots)].$$

系 2. 使 $r=r'=r''=\cdots$，及 $\theta=\theta'=\theta''=\cdots$ 於 § 880 中， 881
得下列公式，謂之台毛佛定理：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

882 **系 3.** 對於商式，有下列公式

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i\sin\theta')}=\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')].$$

蓋 $\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')]\cdot r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad \S\ 879$$

883 **系 4.** 設 k 爲 $0, 1, 2, \cdots (n-1)$ 等 n 個值，則複素數之 n 個 n 次根爲

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

蓋 $\left[r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n$

$$=r[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)]=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

§§ 881, 878

884 **二項方程.** $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 之 n 個 n 次根爲方程 $x^n-r(\cos\theta+i\sin\theta)=0$ 之 n 個根. 故在特殊情形下，r 爲實數，因而 θ 爲 0 時，方程 $x^n-r=0$ 之根爲

$$\sqrt[n]{r}(\cos 2k\pi/n+i\sin 2k\pi/n),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1.$$

例如，$x^3-1=0$ 之根爲

$$\cos 0+i\sin 0,\ \cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3,\ \cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3,$$

此等可證其等於

$$1,\ (-1+i\sqrt{3})/2,\ (-1-i\sqrt{3})/2.$$

885 **三次方程不能約情形之三角解法.** 在三次方程 $x^3+px+q=0$ 之不可約情形中，§ 872, 3, A 與 B 二式爲共軛虛數. 因在此情形 $q^2/4+p^3/27$ 爲負，得

$$A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)},\ B=-\frac{q}{2}-i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}.$$

故 A 與 B 二式如以絕對值及幅角表之，§ 877, 將爲下之形式：

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ B=r(\cos\theta-i\sin\theta), \qquad (1)$$

其中 $$r=\left(\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

又 $$\cos\theta=\frac{-q/2}{r}=-\frac{q}{2}\left(-\frac{27}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

當 p 與 q 爲已知可由 $\cos\theta$ 之值,由表中求 θ 之值。

在 $x^3+px+q=0$ 之根之公式,§871,(12) 中以 (1) 式代 A 及 B,並以 §884 中所得之式表 ω 及 ω^2. 此種結果化簡後爲

$$x_1=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\ x_2=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\ x_3=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

且其中 r 及 θ 可由 (2) 知之,此公式可得餘弦表之助,以計算根之數值。

例. 解 $x^3-x+1/3=0$.

此間 $q^2/4+p^3/27=-1/108$, 故爲不可約情形。

代入公式 (2) 而簡化之,得

$$r=1/\sqrt{27},\ \cos\theta=-\sqrt{3}/2,\ 故\ \theta=150°.$$

故用餘弦表及對數表,得

$$x_1=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 50°=0.7422;\ x_2=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 170°=-1.1371;$$

$$x_3=\frac{2}{\sqrt[6]{27}}\cos 290°=0\ 3949.$$

習 題 LXXX

用 §§ 871 及 874 之方法解下列 1—10 方程:

1. $x^3-9x-28=0$.
2. $x^3-9x^2+9x-8=0$.
3. $x^3-3x-4=0$.
4. $4x^3-7x-6=0$.
5. $x^3+3x^2+9x-1=0$.
6. $3x^3-9x^2+14x+7=0$.
7. $x^4+x^2+6x+1=0$.
8. $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$.
9. $x^4+12x-5=0$.
10. $x^4+8x^3+12x^2-11x+2=0$.
11. 解 $3x^6-2x^5+6x^4-2x^3+6x^2-2x+3=0$.

12. 解 $2x^8-9x^7+18x^6-30x^5+32x^4-30x^3+18x^2-9x+2=0$.

13. 解 $6x^7-x^6+2x^5-7x^4-7x^3+2x^2-x+6=0$.

14. 解 $x^7-1=0$ 時,依照 § 875, 所當用之 z 之三次方程如何?

15. 欲使 $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ 之根皆爲實根,其條件如何?

16 試求 $x^5-1=0$ 及 $x^6+1=0$ 諸根之三角函數式.

17. 解下列不可約三次方程:

(1) $x^3-3x-1=0$. (2) $x^3-6x-4=0$.

18. 在直徑 $3\sqrt{3}$ 圓球形內接一方底之直角柱. 若其體積爲 27, 求角柱之高.

19. 設一直圓柱之體積爲 50π, 而其完全之表面積爲 $105\pi/2$. 求其底之半徑及其高.

20. 一直圓錐之高爲 6, 其底之半徑爲 4. 在此圓錐內接一直圓柱其體積爲圓錐之九分之四. 求此圓錐之高.

XXXI. 行列式及消去法

行列式之定義

886 **僭逆. 奇數及偶數之排列.** 當討論一組物件,如字母或數字時,吾人可定某特殊排列爲其標準次序. 在任何排列中,若甲物件在乙物件之後,而在標準次序中則在乙物件之前,則此排列謂有幾次之僭逆. 而此排列稱爲奇或偶,以僭逆之數爲奇或偶(或 0) 而定.

例如,如物件在標準次序內爲 1, 2, 3, 4, 5, 則 45312 有八次僭逆 43, 41, 42, 53, 51, 52, 31, 32. 故 45312 爲偶次排列.

定理． 在一排列內設二物互相交換，其僭逆次數之增加或減少皆爲奇數． 887

因設相鄰之二物相交換，其僭逆數之增或減爲 1. 故比較 $ApqB$ (1) 及 $AqpB$ (2)，其中 A 與 B 表物羣在互相交換物件 p 及 q 之前與後．A 及 B 中所得發生之任何僭逆，及因 A, p 與 q 在 B 前而發生之任何僭逆，皆爲 (1) 與 (2) 所公有．故於 (1) 及 (2) 中，關於僭逆之唯一相異處，僅爲下列：若 pq 爲一僭逆，則 qp 非僭逆，故 (2) 較 (1) 少一個僭逆；但若 pq 非僭逆，則 qp 爲一僭逆．故 (2) 較 (1) 多一個僭逆．

又互換任意二物時，可將相鄰二物，互換奇數回以實現之．例如，由 $pabq$ 可將相鄰字母，互換五次而得 $qabp$. 吾人先依次將 p 與其下每個字母互換，於是每次 $apbq$, $abpq$, $abqp$, 然後將 q 與在其前之字母互換，得 $aqbp$, $qabp$. 此手續之第二部較第一部少一步，因第二部開始時，q 已依所須方向移過一位．設 p, q 間有 μ 個字母，則第一部爲 $\mu+1$ 步及第二部爲 μ 步，又 $(\mu+1)+\mu$ 卽 $2\mu+1$ 常爲奇數．

故相鄰二物每一次交換，其僭逆之次數變 1 或 -1，而奇數個 1 及 -1 之和爲奇數，故本定理已獲證明．

例如，設在 21457368 (1)，將 4 與 6 互相交換得 21657348 (2). 可知 (1) 有五次僭逆，(2) 有八次而 $8-5$ 爲奇數．

n 個物件每次盡取而排列之有 $n!$ 排列法，§763，半爲奇數而半爲偶數．蓋由其中任一排列，每次將其二物互換，能得其 888

餘之排列.如此所得之排列輪流爲奇偶數排列,反之亦然.§887.

故 $n!$ 爲偶數所有排列,半數爲奇而半數爲偶.

889　茲將討論附有足數之各種字母,如 $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$, 餘類推.由選擇其字母及足數皆不同者成一組,依某種次序排列之,而後求其字母及足數僭逆數之和.設此和爲偶數,則此類記號排成任何他種次序,仍爲偶數,若爲奇數,則仍爲奇數.因若將其中任二符號交換,則字母及足數二者之僭逆數,各有奇數個變化,§ 887, 故共有偶數變化.

在特殊情形下,當字母排成標準次序時,其足數之僭逆次數及當足數在標準次序時,其字母之僭逆次序,皆爲奇數或皆爲偶數.

例如,在 $a_2b_3c_1$ 內,其足數之僭逆次數爲 2; 在 $c_1a_2b_3$ 字母之僭逆數爲 2; 而在 $b_3a_2c_1$ 字母及足數之僭逆數之和爲 4.

890　**行列式之定義.** 吾人可將 $2^2, 3^2$, 即普通言之, n^2 個數字排成正方陣如:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}$$

等等,其中字母表列,足數表行.

其各數名爲此陣之元.

由此類方陣之每行每列取一元，且僅取一元，以爲因式作一切所能作之積．

排列各積之因式時，令其列號（字母）成標準次序而計算行號（足數）之僭逆．設其個數爲偶數或（0），則加正號於乘積；設爲奇數，加負號．

此種種正積負積之代數和謂之方陣之行列式而以方陣自身代表之，而其兩旁須添二直線．

例如，
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

又
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

從 §889 可定上述各積之符號，吾人可排列其因式使其行 891
號成標準次序，而後依列號僭逆數之爲偶爲奇，而予其積以正號或負號．

或可將因式排成任何次序，而後依其列號或行號僭逆數之和爲偶爲奇，而予其積以正號或負號．

例如，乘積 $a_3b_2c_1$ 按第一法，應予以負號．按足數之標準次序書之，則得 $c_1b_2a_3$，且因字母 cba 有三次僭逆，故按第二法，應爲負號．設其乘積寫爲 $b_2c_1a_3$，其字母有二次僭逆，足數有一次僭逆，其和 $2+1$ 爲奇數，故按第三法，其乘積亦爲負號．

方陣之行列式，其行數或列數謂之行列式之次數． 892

893 前述之積，與其應有之符號，名爲行列式之項。

894 展開一行列式者，即將各項寫出之謂。

895 各元 $a_1, b_2, c_3, \cdots$ 所成之對角線，謂之首對角線，而其乘積 $a_1b_2c_3, \cdots$ 謂之行列式之首項。

夾以縱線之首項，如 $|a_1\ b_2\ c_3 \cdots|$，常用作表示行列式本身之記號。

896 n 次行列式之項數爲 $n!$，此諸項之半有正號而半有負號。

因以 n 個足數可排成 $n!$ 個排列法 § 763，而仍保存其字母之標準次序，而 $n!$ 排列法中每一排列得一行列式之項，§890.

又 $n!$ 個排列之半數爲偶數，半數爲奇數，§ 888.

例如，$n=3$，則有 $3!$ 即 6 項；$n=4$，則有 $4!$ 即 24 項.

897 **其他記號**。 須知字母及足數僅爲行列次序之記號而已。其他記號足能代之者可代替之。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例如，行列式之各元常以一字母及二足數表之，如 a_{23} 其第一足數指行，第二足數指列。其記號 a_{23} 讀爲"a 二三"等等.

898 **三次行列式之展開式**. 欲得三正項，輪流取第一列之每個元，而在可能情形內，依照首對角線之方向，例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2c_3, \quad a_2b_3c_1, \quad a_3b_1c_2$$

欲得三負項，照同法行之，惟取另一對角線之方向，例如：

$$-a_1b_3c_2,\quad -a_2b_1c_3,\quad -a_3b_2c_1.$$

故 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)(-1)+3(-3)2+2(-1)4 -5(-3)4-3(-1)(-1)-2(-1)2=40.$

此規則不能應用高於三次之行列式．故四次行列式如用此法則僅得二十四項中之八項．

習　題　LXXXI

展開下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}$.　　2. $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & p & -s \\ -r & s & p \end{vmatrix}$.　　4. $\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}$

求下列行列式之值：

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$　　7. $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

以展開下列行列式而證明其關係：

8. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

10. 展開行列式 $|a_1\ b_2\ c_3\ d_4|$ 且集合其含因式 (1) c_3d_4, (2) a_1d_4, (3) $a_2b_3c_1$, (4) a_1, (5) c_3 之諸項．

11. 在行列式 $|a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5|$ 之展開式中，求下列各項之符號：

$a_2b_4c_3d_1e_5$.　　$a_4b_2c_1d_5e_3$.　　$a_5b_4c_3d_2e_1$.

$c_1d_2a_3e_4b_5$.　　$c_1b_2e_3a_4d_5$.　　$d_3a_2e_4b_1c_5$.

行列式之性質

899　**定理 1.**　設在行列式內，行變爲列，列變爲行而不變其相互次序時，則此行列式之值不變.

例如，
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (2)$$

在行列式 (1) 之展開式內每項，如 $a_2b_3c_1$ 含有 (1) 內不同行列之一元且僅含一元.故其必含有(2)內不同行列之一元且僅含一元，故又爲(2)之項，其不同者或僅符號上之不同耳.又 (1) 各項之符號與 (2) 各項之符號相同.蓋設各項因式依照 a, b, c, 而排列其足數之僭逆數卽可決定 (1) 及 (2) 之符號，又 § 890 定 (1) 中者，§ 891 定 (2) 中者.

反之，展開式 (2) 之每項爲展開式 (1) 之每項.

900　故對於行列式中行之定理亦卽有一列之對應定理.

901　**定理 2.**　設行列式中之一列或一行皆爲0，則行列式之值爲 0.

蓋行列式之每一項將包含該行或該列之一元，§ 890，故行列式之值爲零.

902　**定理 3.**　設行列式中二列 (或行) 互換，則行列式僅變其符號.

故
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (1) = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} (2)$$

蓋 (1) 中之各項，其因式依照 (1) 中列之次序排列時，若將其第一及最後一因式互換，即成 (2) 中之項，而其因式依照 (2) 中列之次序排列；反之亦為眞．但互換之後項中足數之僭逆即增加或減少奇數個，§ 887, 又因 (1), (2) 之中足數之次序為 123, 故變更項之符號．

例如，$a_2b_3c_1$ 為 (1) 之一項，而 $-c_1b_3a_2$ 為 (2) 中之對應項．因在 $a_2b_3c_1$ 足數有二僭逆，而 $c_1b_3a_2$ 有一僭逆．

例． 展開 (1), (2) 兩行列式，證明前述定理．

系． 設一行列式二行(或列)全等，此行列式為 0. **903**

設 D 為行列式之値．二全等行互換以後而 D 之値不變；但從 § 902, D 變為 $-D$.

故 $D=-D$, 即 $2D=0$, 或 $D=0$.

例如，$\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix}=abf+aec+dbc-aec-abf-dbc=0.$

定理 4. 設一行(或列)之每元皆以同數乘之，如 k, 則即為行列式之値乘以 k. **904**

因以 k 乘任一列之各元，則行列式之每一項皆含 k 一次而僅一次，§ 890.

行列式之計算可應用此定理以簡便之．

例如，

$$\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot5\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot5\cdot3\cdot4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=480.$$

905 系. 設二行(或列)之對應元成比例,則行列式為零.

例如, $\begin{vmatrix} ra & a & d \\ rb & b & e \\ rc & c & f \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = r\cdot 0 = 0.$ §§ 903, 904

906 定理 5. 設其中一行(或列)有二項式之元,則該行列式可仿下式之方法分成二行列式之和.

$$\underset{(1)}{\begin{vmatrix} a_1+a' & a_2 & a_3 \\ b_1+b' & b_2 & b_3 \\ c_1+c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \underset{(2)}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \underset{(3)}{\begin{vmatrix} a' & a_2 & a_3 \\ b' & b_2 & b_3 \\ c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

因 (1) 之每項為 (2) 及 (3) 對應項之和.

例如, $(a_1+a')b_2c_3 = a_1b_2c_3 + a'b_2c_3$.

注意, a', b', c' 任一數可為零.

任何行列式若其各元為多項式時,可重複應用此理,化為含單元之諸行列式之和.

例. 試將行列式 $\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1+b_1' & b_2+b_2' & b_3+b_3' \\ c_1+c_1' & c_2+c_2' & c_3+c_3' \end{vmatrix}$ 化成八行列式之和.

907 定理 6. 設行列式中之任一行(或列)之各元加其他任一行(或列)之對應元之同倍數,如 k,則此行列式之值不變.

例如,用 §§ 905, 906 之定理,得

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_3 & a_2 & a_3 \\ kb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

他種情形仿此.

由此定理可知若行列之一列,可由其餘各列之倍數相加而成,則此行列式為零.

如 $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 5 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$ 因 $4, 7, 7=2(5, -4, 2)+3(-2, 5, 1)$.

定理 7. 設一行列式之諸元爲一變數,如 x 之有理整函數,且 $x=a$ 時,行列式之值爲零,則行列式能爲 $x-a$ 所除盡. 908

因展開此行列式,可化爲 x 之多項式. 又因當 $x=a$ 時,此多項式爲零,故能爲 $x-a$ 所除盡, § 415.

行列式之各因式,常應用此定理求得之.

例. 求證 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$.

從 § 903, 則知設 $a=b$, 或 $b=c$, 或 $c=a$, 此行列式爲零. 故可爲 $a-b$, $b-c$ 及 $c-a$ 所除盡, § 416, 從而可以爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之積所除盡. 但此積與此行列式對於 a, b, c 爲同次三. 故二式至多相差一常數也.

此行列式之一項爲 bc^2, 且 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 之對應項爲 bc^2. 故其常數爲 1, 而此行列式等於 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

習題 LXXXII

1. 計算下列之行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$. (3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

2. 證明 $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

3. 引用 § 907 之定理,證明下列各行列式之值爲 0:

(1) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

4. 證明 $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$.

5. 證明 $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$.

子式 行列式之乘法

909 **子式.** 在任一行列式Δ內，可刪除含特殊元 e 之一列及一行，其餘之各元不變其相對位置．此作成之新行列式，謂之元 e 之餘子式，而以 Δ_e 表之．

例如，在 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 內，c_1 之子式爲 $\Delta c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

910 **定理.** 展開任一行列式 Δ_1 其含 a_1 諸項之和爲 $a_1\Delta_{a_1}$.

例如，在 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{(1)}$ 內，含 a_1 之各項之和爲 $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$. (2)

因除符號以外，Δ 中含 a_1 之各項，乃 a_1 與 Δ 中其他列及行內各取一元所得諸元之積，換言之，乃 a_1 與 Δ_{a_1} 中各項之積．又 Δ 項之附號，即其對應之 Δ_{a_1} 項之符號，因附 a_1 於後者之前，於足數之僭逆無關．例如，(1) 之項 $-a_1b_4c_3d_2$ 可由 a_1 與 (2) 之 $-b_4c_3d_2$ 項相乘得之．反之，a_1 與 Δ_{a_1} 之各項之積爲 Δ 之項也．

系. 設 e 表 Δ 之第 i 行第 k 列之一元，則 Δ 內含 e 之各項相加之和爲 $(-1)^{i+k}e\Delta_e$. 911

因吾人可移 e 至首元之位置時，能不紊亂 e 所在行及列以外諸元之相互位置，即可先將 e 所在之行，依次與其前一行互換，然後將 e 所在之列與其前一列互換．在逐次互換行及列時，行列式僅變其附號 $(i-1)+(k-1)$ 或 $i+k-2$ 次，§902. 故設 Δ' 表最後化成之行列式，則得

$$\Delta'=(-1)^{i+k-2}\Delta=(-1)^{i+k}\Delta.$$

從 §910, Δ' 中含 e 之諸項之和爲 $e\Delta'_e$. 故在 Δ 中，其和爲 $(-1)^{i+k}e\Delta_e$. 因 Δ 中 e 之子式與 Δ' 中 e' 之子式相等也．

例如，在 $\Delta=|a_1\ b_2\ c_3\ d_4|$ 中，其元 d_3 之 $i=4$, $k=3$, 可移爲首元位置如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}(1) = -\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}(2) = -\begin{vmatrix} d_3 & d_1 & d_2 & d_4 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ c_3 & c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}(3).$$

將 (1) 之第四列依次與第三，第二及第一列互換，則得 (2)，其前置有負號者，因列互換三次，即 $i-1$ 次故也．

然後將 (2) 之第三行依次與第一，第二互換，則得 (3)，其前所置符號與 (2) 前所置符號相同者，因互換二次，即 $k-1$ 次，故也．

(1) 中 d_3 之子式與 (3) 中 d_3 之子式相同．故 (1) 中含 d_3 之諸項之和爲 $-d_3\cdot|a_1\ b_2\ c_4|$.

定理. 一行列式可化爲一列或一行之各元各乘其餘子 912

式之和,其各項之附號爲正負輪流,或負正輪流.

例如,有一四次行列式 $\Delta=|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$,則得

$$\Delta=a_1\Delta_{a_1}-a_2\Delta_{a_2}+a_3\Delta_{a_3}-a_4\Delta_{a_4}.$$

因在 Δ 之展開式內,每項必含諸元 a_1, a_2, a_3, a_4 之一元且僅含一元.又由 §§ 910,911 所含 a_1 之諸項之和爲 $a_1\Delta_{a_1}$,所含 a_2 諸項之和爲 $-a_2\Delta_{a_2}$,等等.

仿此,

$$\Delta=-b_1\Delta_{b_1}+b_2\Delta_{b_2}-b_3\Delta_{b_3}+b_4\Delta_{b_4}$$
$$=a_1\Delta_{a_1}-b_1\Delta_{b_1}+c_1\Delta_{c_1}-d_1\Delta_{d_1},\text{等等.}$$

913 **餘因式.** 有時將前述 Δ 之展開式表成下式較爲便利.

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4$$
$$=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4,$$

等等.式中 $A_1=\Delta_{a_1}$, $A_2=-\Delta_{a_2}$,餘類推.吾人謂 $A_1, A_2,\cdots$ 爲 $a_1, a_2,\cdots$ 之餘因式.

例如,在

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 內, a_1, a_2, a_3 之餘因式爲 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

914 任何 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$ 之和,得自一列之元乘他一列中對應元之餘因式等於零.

因 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$ 表一行列式其末三行與 $\Delta=|a_1\,b_2\,c_3\,d_4|$ 之末三行相同,而其第一行爲 b_1, b_2, b_3, b_4.又因此行列式之第一,第二行皆爲 b_1, b_2, b_3, b_4,故爲零,§ 903.對於一般行列式亦然.

行列式之增大. 任何行列式皆可化為一較高次數之行 915
列式.因由 § 912, 得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{等等.}$$

行列式之計算. 凡數字行列式其値皆可由 § 912 之引用, 916
及 § 898 之規則以求之.

例如,
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -18 + 87 = 69.$$

但通常數字行列式之計算,可用下法較為便利. 917

由 §§ 904, 907, 910, 則知

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (1) = \frac{1}{a_1^{n-1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots \\ b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ c_1 & a_1c_2 & a_1c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (2)$$

$$= \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & \cdots \\ a_1c_2 - a_2c_1 & a_1c_3 - a_3c_1 & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix}. (3)$$

此間 (1) 表一 n 次行列式. (1) 之每行,除第一行外以乘 a_1, 則得 (2). 從 (2) 之第二行減去 a_2 乘第一行;從第三行減去第一行乘 a_3; 等等.所得行列式之第一列為 a, 0, 0, $\cdots$. 故此行

列式等於 a_1 乘其子式而成 $(n-1)$ 次之行列式 (3).

注意, (3) 之每一元, 爲以 a_1 乘 (1) 內 a_1 之子式之各對應元, 再由此值減去 (1) 內第一行及第一列之對應元之積而得。

例如, 用前述方法之二次化簡, 得

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -6 & 6 & -4 \\ -10 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 10 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -15 & 3 \\ -17 & 11 \end{vmatrix} = -38,$$

因 $2\cdot1-2(-2)=6$, $2\cdot3-(-1)(-2)=4$, 等等.

當首元爲 0 時, 可先將他元置於首位如 § 911 之法.

例. 用前述之法, 計算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

918 **行列式之乘法.** 兩同次行列式 Δ 及 Δ' 之乘積, 可以第三行列式 Δ'' 代表之, 其求法如下:

以 Δ' 中第 k 列之各元, 乘 Δ 中第 i 行之各對應元所得諸積之和爲 Δ'' 中第 i 行及第 k 列之元。

例如, $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2 & a_1q_1+a_2q_2 \\ b_1p_1+b_2p_2 & b_1q_1+b_2q_2 \end{vmatrix}.$$

因由 § 906, 此第三行列式爲下列各行列式之和也。

$$\begin{vmatrix} a_1p_1 & a_1q_1 \\ b_1p_1 & b_1q_1 \end{vmatrix}, (1) \quad \begin{vmatrix} a_1p_1 & a_2q_2 \\ b_1p_1 & b_2q_2 \end{vmatrix}, (2) \quad \begin{vmatrix} a_2p_2 & a_1q_1 \\ b_2p_2 & b_1q_1 \end{vmatrix}, (3) \quad \begin{vmatrix} a_2p_2 & a_2q_2 \\ b_2p_2 & b_2q_2 \end{vmatrix}. (4)$$

但(1)與(4)等於零，因其列成比例也，§905. 又引用§§902, 904, 簡化(2)及(3)而相加之，得

$$p_1q_2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+p_2q_1\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}=(p_1q_2-p_2q_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

又 $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 & a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3 & a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3 \\ b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3 & b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3 & b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3 \\ c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3 & c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3 & c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3 \end{vmatrix},$$

此可仿前述將第三行列式，分解爲數個含單行之行列式之和。如是能得二十七個此種行列式，但其中二十一個有二或三列成比例者，故等於 0. 其他六個行列式各等於行列式 $|a_1\,b_2\,c_3|$ 乘 $|p_1\,q_2\,r_3|$ 之一項，故其和等於 $|a_1\,b_2\,c_3|\cdot|p_1\,q_2\,r_3|$.

此證明甚易普遍之。

上述之規則甚易推廣至不同次之行列式。吾人祇須將低次行列式增大，§915, 而使其二者成同次可矣。

習題 LXXXIII

計算下列各行列式:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 10 \\ 6 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 30 \\ 12 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}$　　4. $\begin{vmatrix} 6 & -4 & 10 & 28 \\ 18 & 6 & -30 & 21 \\ 12 & 24 & 40 & 28 \\ 9 & -2 & 20 & 14 \end{vmatrix}$

將下列之積示成行列式:

5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & -a \end{vmatrix}$　　6. $\begin{vmatrix} p & 0 & r \\ p & q & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　　8. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}^2$.

9. 證明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3$.

10. 當行列式首對角線任一側之元皆爲零,證明此行列式之值等於其首項.

消去法　一次方程

919　**聯立一次方程之解答.** 今將下列聯立方程解其 x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3&=k \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3&=l \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3&=m \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

使 Δ 表 $|a_1\, b_2\, c_3|$, 將 x_1, x_2, x_3 之係數排成行列式如 (1), 又仿 § 913 使 $A_1, A_2, \cdots$ 表 Δ 中 $a_1, a_2, \cdots$ 之餘因式.

若欲消去 x_2 及 x_3, 可將 A_1 乘第一方程, 以 B_1 乘第二方程, 以 C_1 乘第三方程而加之; 得

$$\begin{array}{c|c|c|c|} a_1A_1 & x_1+a_2A_1 & x_2+a_3A_1 & x_3=kA_1 \\ b_1B_1 & +b_2B_1 & +b_3B_1 & +lB_1 \\ c_1C_1 & +c_2C_1 & +c_3C_1 & +mC_1 \end{array}.$$

但在方程中 x_2 及 x_3 之係數爲 0, § 914; x_1 之係數爲 Δ,

§913；而其右邊表一行列式；此行列式以 k, l, m 代 Δ 中之第一列而得．故此方程可寫為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} k & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

仿此，以 A_2, B_2, C_2 各乘原方程而加之，則可得單含 x_2 之方程；及以 A_3, B_3, C_3 依次乘原方程而加之，則可得單含 x_3 之方程．此種方程為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k & a_3 \\ b_1 & l & b_3 \\ c_1 & m & c_3 \end{vmatrix}, \quad (3) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & l \\ c_1 & c_2 & m \end{vmatrix}. \quad (4)$$

故若 $\Delta \neq 0$，其解法為

$$x_1 = \frac{|k \ \ b_2 \ \ c_3|}{|a_1 \ \ b_2 \ \ c_3|}, \quad x_2 = \frac{|a_1 \ \ l \ \ c_3|}{|a_1 \ \ b_2 \ \ c_3|}, \quad x_3 = \frac{|a_1 \ \ b_2 \ \ m|}{|a_1 \ \ b_2 \ \ c_3|},$$

即 x_1, x_2, x_3 諸未知字母之値可以分式表出之，其分母為 Δ，而分子為一行列式，此行列式異於 Δ 者僅為問題中未知數之係數，代以對應之已知項而已．

同法，可證 n 元 n 個一次方程系亦然．

例．解

$$2x - 3y + z = 4,$$
$$x + y - z = 2,$$
$$4x - y + 3z = 1.$$

得
$$x = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{26}{20} = \frac{13}{10}.$$

同法，得 $y = -21/20$, $z = -35/20 = -7/4$.

設 Δ 為 0，而諸行列式 $|k \ \ b_2 \ \ c_3|$, $|a_1 \ \ l \ \ c_3|$, $|a_1 \ \ b_2 \ \ m|$ 中 926
之任一行列式不為 0，則從 (2), (3), (4) 推定原方程 (1) 無定解（比較 §394）．

設 Δ 及各行列式 $|k\ \ b_2\ \ c_3|$, $|a_1\ \ l\ \ c_3|$, $|a_1\ \ b_2\ \ m|$ 皆爲 0, 則方程 (2), (3), (4) 並不限制 x_1, x_2, x_3 之值. 在此情形時, 原方程 (1) 爲不獨立. 除非諸子式 $A_1, A_2, \cdots$ 皆等於 0, 則由 § 394, 此結果乃因 (2), (3), (4) 從 (1) 導出來者. 若諸子式皆爲零, 則三方程 (1) 僅常數因式相異, 極屬顯然, 故其中一個方程之各解答, 卽其他二方程之解.

以上之結果極易擴諸 n 個含 n 未知數之方程系.

921 **齊次一次方程.** 當 $k=l=m=0$, 則 § 919 之方程 (1) 化爲含 x_1, x_2, x_3 之齊次方程系, 如

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

而 § 919 之方程 (2), (3), (4) 變爲

$$\Delta x_1=0, \quad \Delta x_2=0, \quad \Delta x_3=0. \tag{2}$$

顯然方程 (1) 有 $x_1=x_2=x_3=0$ 之解, 從而由 (2) 可知除非 $\Delta=0$, 此爲惟一之解答.

但若 $\Delta=0$, 方程 (1) 能爲

$$x_1=r_1A_1, \quad x_2=r_2A_2, \quad x_3=r_3A_3, \tag{3}$$

所適合, 其中 r 爲任何常數.

因代此數值於 (1) 而化簡之, 得

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=0, \quad b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0,$$
$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0,$$

而此種方程爲恆等式, 蓋第一方程因 $\Delta=0$, 其他二者由 § 914 可知之. 此事又可證之如下: 設解(1)之第二, 第三方程以 x_3 表 x_1 及 x_2, 得 $x_1/A_1=x_2/A_2=x_3/A_3$, 或設 r 表此等等比之值,

$x_1 = rA_1, x_2 = rA_2, x_3 = rA_3$. 又如適所證明，設 $\Delta = 0$，則此諸值亦能適合 (1) 之第一方程。

從第二證明，當 $\Delta = 0$ 時，則

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_1 : A_2 : A_3 = B_1 : B_2 : B_3 = C_1 : C_2 : C_3,$$

卽 Δ 之列中其對應元之子式成比例。此間假定此諸子式不爲 0.

在 x, y 之三個非齊次方程： 922

$$\left.\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3 = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3 = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1')$$

將 $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$ 代入，去分母，則可導出 §921 之齊次方程系 (1).

故方程 (1′) 有公共解之條件爲 $\Delta = 0$.

習　題　LXXXIV

用行列式解下列方程系：

1. $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 3, \\ x - 2y + z = 0, \\ 3x + y + 3z = 7. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 3, \\ 3x - 8y + 6z = 1, \\ 8x - 2y - 9z = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z + 4t = -3, \\ 3x - 2y + 6z + 5t = -1, \\ 5x + 8y + 9z + 3t = 9, \\ x - 10y - 3z - 7t = 2. \end{cases}$

證明下列方程系相因，且求其比 $x : y : z$:

5. $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + 4z = 0, \\ 4x + y + 3z = 0. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} a_1x + b_1y + (ka_1 + lb_1)z = 0, \\ a_2x + b_2y + (ka_2 + lb_2)z = 0, \\ a_3x + b_3y + (ka_3 + lb_3)z = 0. \end{cases}$

7. λ 爲何値時，下列方程系爲相因？

$$4x + 3y + z = \lambda x,$$
$$3x - 4y + 7z = \lambda y,$$
$$x + 7y - 6z = \lambda z.$$

結 式

923 **結式.** 二方程 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，其意示 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 中係數之整函數，當此函數爲零時，乃爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根之必要而充分之條件.

例如，$a_0x^2+a_1x+a_2=0$ (1) 及 $x-b=0$ (2) 之結式爲 $a_0b^2+a_1b+a_2$；因在 $a_0b^2+a_1b+a_2=0$ 時，(1)，(2) 兩方程有公根 b 故也.

924 任意二方程 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 之結式可用雪兒惟士脫氏 (Sylvester) 之法由二方程中消去 x 以求之.

爲明確起見，使

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \tag{1}$$
$$\phi(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0. \tag{2}$$

依次以 x 及 1 乘 (1)，以 x^2, x 及 1 乘 (2)，即得

$$\begin{aligned}
a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x \qquad &=0,\\
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3&=0,\\
b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2 \qquad\qquad &=0\\
b_0x^3+b_1x^2+b_2x \qquad &=0,\\
b_0x^2+b_1x+b_2&=0.
\end{aligned}$$

以上可視爲五個數量 $x^4, x^3, x^2, x, 1$ 之五個齊次一次方程所聯立而成. 故由 § 921，此諸式，除非

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

不能有公根.

故 (1) 及 (2) 之有公根，(3) 爲必要條件. 又爲充分條件也. 蓋對於 D 之第五行各以 x^4, x^3, x^2, x 乘第一至第四行而加

之．則將 D 變形成等值行列式，§ 907，其末行之各元爲 $xf(x)$，$f(x)$，$x^2\phi(x)$，$x\phi(x)$，$\phi(x)$ 故也．是以 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 若指示 D 之末列各元之餘因式，則由 § 913，得

$$D=(\mu_1 x+\mu_2)f(x)+(\mu_3 x^2+\mu_4 x+\mu_5)\phi(x)\equiv 0.$$

由此恆等式，可知 $f(x)$ 之各因式 $x-\beta$ 必爲 $(\mu_3 x^2+\mu_4 x+\mu_5)\phi(x)$ 之因式，且因 $f(x)$ 爲三次式，而 $\mu_3 x^2+\mu_4 x+\mu_5$ 僅爲二次式，卽 $f(x)$ 至少有一因式 $x-\beta$ 爲 $\phi(x)$ 之因式，亦卽 $f(x)=0$ 中之諸根，其一必爲 $\phi(x)=0$ 之一根，§ 795.

此間假定子式 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 皆不爲零．設 D 之各元之子式皆爲零，則可證明 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一個以上之公根．

設 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ 表 D 內任一行各元之因式，由 § 921 可知 **925**
當 $D=0$ 時，

$$x^4 : x^3 : x^2 : x : 1=\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5.$$

因此 $x=\lambda_1/\lambda_2=\lambda_2/\lambda_3=\cdots=\lambda_4/\lambda_5$. 故當 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 有一公根時，此根之值爲 λ_1/λ_2.

在普通情形之下，當 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之次數各爲 m **926**
及 n 時，則結式 D 將爲第 $(m+n)$ 次之行列式，其首 n 列爲 $f(x)$ 之係數及零，而其他 m 列爲 $\phi(x)$ 之係數及零，其排列次序如 § 924 (3)．故在 D 之各項中，$f(x)$ 之諸係數依 $\phi(x)$ 之冪次而排列；反之，$\phi(x)$ 之係數依 $f(x)$ 之冪次而排列．

例． 試用前述方法證方程 $x^2+3x+2=0$ 及 $x+1=0$ 有一公根叉解此公根．

此間 $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+2-3=0$, 故有一公根．

在 D 之第一列內 1 及 3 之餘因式之值，爲 1 及 -1, 故其公根爲 $1 : -1$ 卽 -1.

927 用前法未知數 x, y 二者之一，可從 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 之一對代數方程中消去之。

例。 解
$$x^2-2y^2-x=0, \tag{1}$$
$$2x^2-5y^2+3y=0. \tag{2}$$

可將 (1) 及 (2) 視為 x 之二次方程，(1) 用 $1,\ -1,\ -2y^2$ 作係數，而 (2) 用 $2,\ 0,\ -5y^2+3y$ 作係數。

故消去 x 之結果為
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2y^2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2y^2 \\ 2 & 0 & -5y^2+3y & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5y^2+3y \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

將此式展開而簡化之，得
$$y^4-6y^3-y^2+6y=0. \tag{4}$$

解 (4)，得 $y=0,\ 1,\ -1,\ 6$.

由 §924，當 y 有以上任何值時，(1) 及 (2) 得為 x 之同值所適用。實際上 $y=0$ 時，(1) 與 (2) 各成為 $x^2-x=0$, $2x^2=0$，而有公根 $x=0$；$y=1$ 時，(1) 與 (2) 各成為 $x^2-x-2=0$, $x^2-1=0$，而有公根 $x=-1$，因 x^2-x-2 及 x^2-1 有公因式 $x+1$, §851，等等。故吾人得 (1) 及 (2) 之解為 $x, y=0, 0;\ -1, 1;\ 2, -1;\ 9, 6$. x 之值亦可從 y 值應用 §925 而求得之（參閱 §926 例）。

此例足以說明 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 消去 x 之結果為 $R(y)=0$，而 $R(y)=0$ 之一根為 β，則 x 之對應值可由求 $f(x,\beta)$ 及 $\phi(x,\beta)$ 之最高公因式而得之。當 x 祇有一個值與 $y=\beta$ 對應時，通常此最高公因式為一次式。但在 x 有多值對應於 $y=\beta$ 時，則可為較高次者。

928 **結式之性質.** 設有一對方程如下式者
$$f(x)=x^m+\cdots+a_m=0,\ \ \phi(x)=x^n+\cdots+b_n=0.$$

使 α_i 表 $f(x)=0$ 之任一根而 β_k 表 $\phi(x)=0$ 之任一根。則如 $\alpha_i-\beta_k$ 之形式之差共有 mn 個；使 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 表其乘積。

顯然 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)=0$ 爲諸根 α_i 之一與諸根 β_k 之一相等之必要且充分條件。又因 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 爲諸根 α_i 及諸根 β_k 之對稱整函數，故其爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之有理整函數，§§ 867, 868. 由是，設 $R(f,\phi)$ 爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，§ 923, 得

$$R(f,\phi)=\Pi(\alpha_i-\beta_k).$$

$\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 可寫爲

$$\begin{array}{c}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_n),\\(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots(\alpha_2-\beta_n),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_m-\beta_1)(\alpha_m-\beta_2)\cdots(\alpha_m-\beta_n).\end{array}$$

但因 $\phi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$，故首行諸因式之乘積爲 $\phi(\alpha_1)$，次行諸因式之乘積爲 $\phi(\alpha_2)$，準此類推。故

$$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=\phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m).$$

又因 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$，故首列諸因式之乘積爲 $(-1)^m f(\beta_1)$，次列諸因式之乘積爲 $(-1)^m f(\beta_2)$，準此類推。

$$\Pi(\alpha_i-\beta_k)=(-1)^{mn}f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n).$$

當原方程爲下列之形式

$$f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m=0,\ \phi(x)=b_0x^n+\cdots+b_n=0,$$

卽當首係數不爲1，則第一行之因式之積爲 $\phi(\alpha_1)/b_0$，其他準此；又第一列因式之積爲 $(-1)^m f(\beta_1)/a_0$，等等。故在此情形，

欲使 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之整函數必須以 $a_0^n b_0^m$ 乘之。則得

$$R(f,\phi)=a_0^n b_0^m \Pi(\alpha_i-\beta_k)$$
$$=a_0^n\phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m)$$
$$=(-1)^{mn}b_0^m f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n).$$

929 二方程 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 之結式中，$f(x)=0$ 之係數，依 $\phi(x)=0$ 之冪數而列入。用 $\phi(x)$ 之係數依 $f(x)=0$ 之冪數而列入。

蓋乘積 $\phi(\alpha_1)\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_m)$ 包括 m 個因式，各含 $\phi(x)=0$ 之係數至一次冪；而乘積 $f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_n)$ 包括 n 個因式，各含 $f(x)=0$ 之係數至一次冪。

吾人由是得另一證明，卽 §§ 924, 926 所述行列式 D 爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之結式，卽 $D=R(f,\phi)$.

930 在 $R(f,\phi)$ 之各項中，$f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之係數之足數之和爲 mn.

因依照 § 812, 若將 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之各係數乘以用足數表示之 r 次冪，卽得下列二方程

$$f_1(x)=a_0x^m+ra_1x^{m-1}+r^2a_2x^{m-2}+\cdots+r^m a_m=0,$$
$$\phi_1(x)=b_0x^n+rb_1x^{n-1}+r^2b_2x^{n-2}+\cdots+r^n b_n=0,$$

其根爲 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 中諸根之 r 倍。

$R(f_1,\phi)$ 各項，等於 $R(f,\phi)$ 之對應項乘以 r 之冪，而 r 之指數爲該項所含 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之係數之足數和。故在各項內若能表示此指數爲 mn, 本定理已得證明。但因乘積 $\Pi(\alpha_i-\beta_k)$ 中有 mn 個因式，故得

$$R(f_1,\phi_1)=a_0^n b_0^m \Pi(r\alpha_i-r\beta_k)=r^{mn}\cdot R(f,\phi).$$

判別式. $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n=0$ 之判別式爲 $f(x)$ 係數之整函數，其等於零時爲 $f(x)=0$ 有重根之必要及充分之條件(比較 §§635, 873). 931

設 D 表 $f(x)=0$ 之判別式，則

$$D=R(f,f')/a_0.$$

因由 §851，僅當 $f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$，有一有限之公根時，$f(x)=0$ 有一有限之重根。但由 §928，$f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 有一公根之條件爲 $R(f,f')=0$. 但 a_0 爲 $R(f,f')$ 之一因式，因可以 $R(f,f')$ 表 §924 之行列式形式而表明之。故當 $a_0=0$ 時，$R(f,f')=0$. 但在此情形，$f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 之公根爲 ∞，§816. 又因 ∞ 非爲 $f(x)=0$ 之重根，除非 a_0 及 a_1 爲零，故得 $D=R(f,f')/a_0$.

例如，對於 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$, $D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix}\div a_0=-(a_1^2-4a_0a_2)$.

$f(x)=0$ 之判別式，等於 $f(x)=0$ 中每二根之差之平方乘以首項係數 a_0 之某次冪. 932

例如，設 $$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3), \tag{1}$$

則 §865, $$f'(x)=a_0[(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)]. \tag{2}$$

用 §928, $$R(f,f')=a_0^3f'(\beta_1)f'(\beta_2)f'(\beta_3). \tag{3}$$

但從 (2), $$f'(\beta_1)=a_0(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3),\ 等等. \tag{4}$$

將 (4) 代入 (3)，化簡後，得

$$R(f,f')=-a_0^5(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2,$$

而 $$D=-a_0^4(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_2-\beta_3)^2(\beta_3-\beta_1)^2. \tag{5}$$

關於一對二元方程之解答數. 注意，設在方程 $f(x,y)=0$ 內，以 $x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$ 代入，化去其分式，吾人可將 933

$f(x, y)=0$ 變形爲一含 x_1, x_2, x_3 之齊次方程. 如 $x^3+xy+y+1=0$ 變爲 $x_1^3+x_1x_2x_3+x_2x_3^2+x_3^3=0$.

注意,以含 x_2, x_3 之 n 次齊次方程,若不能爲 x_3 除盡,則可決定其比 x_2/x_3 之 n 個有限值. 例如,由 $x_2^2-3x_2x_3+2x_3^2=0$ 可得 $x_2/x_3=1$ 或 2 也.

934 設 $f(x, y)=0$ 及 $\phi(x, y)=0$.

各表 m 次及 n 次之二方程. 設此二方程包含 x^m 及 x^n 項,則以 $x=x_1/x_3, y=x_2/x_3$ 代入,除去分式而集項,可化爲下式:

$$F(x_1, x_2, x_3)=a_0x_1^m+a_1x_1^{m-1}+\cdots+a_m=0, \tag{1}$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=b_0x_1^n+b_1x_1^{n-1}+\cdots+b_n=0, \tag{2}$$

其中各係數 $a_0, a_1, \cdots, b_0, b_1, \cdots$ 表 x_2, x_3 之齊次函數,其次數由其足數表明之. 故 (1) 及 (2) 關於 x_1 之結式 R 爲 x_2, x_3 之一個 mn 次齊次函數, § 930.

由 § 928, (1) 及 (2) 爲 x_1 之同數值適合之必須條件及充分條件爲

$$R=0. \tag{3}$$

設 R 不能爲 x_3 所除盡,則 x_2/x_3, 卽 y_1 有 mn 個值適合 $R=0$, § 933. 設 β 表此等值中之一值,則方程 $f(x, \beta)=0$ 及 $\phi(x, \beta)=0$ 有一公根, 且設此根爲 α, 則 $x=\alpha$, $y=\beta$ 爲 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 之一解答(比較 § 927). 又此可證明對於 $R=0$ 之單根,必有對應於 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 之一單解答; 且對於 $R=0$ 之 r 次重根,必對應於 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 之 r 組解答,其中或全屬相異或有數個相同. 故 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 有 mn 個解答.

設 R 能爲 x_3^μ 所除盡,則 x_2/x_3, 卽 y 祇有 $mn-\mu$ 個有限值能適合 $R=0$, 因此 $f(x, y)=0$, $\phi(x, y)=0$ 僅有 $mn-\mu$ 組有限

解答.但因當 $x_3=0$ 時,$x=x_1/x_3$ 及 $y=x_2/x_3$ 其中 x 或 y,或 x 與 y 爲無窮大.由是,在此情形,吾人謂 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 μ 組無窮解答.

設原方程 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 缺少 x^m 項及 x^n 項,可將其變形,其法爲取 $y=y'+cx$ 代入有此等項而同次之方程中.據以上之證明,x, y' 之變形方程有 mn 組解答.但若 $x=\alpha$, $y'=\beta$ 爲此諸解中之任一解,則 $x=\alpha$, $y=\beta+c\alpha$ 爲 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 之一解.故 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 亦有 mn 組解答.

前述討論中,假設 R 不恆等於 0.若 R 恆等於 0,則 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 有一公因式,而 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有無窮個解.

故得下列定理:

若 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 各爲 m 次及 n 次,且無公因式,則方程系 $f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$ 有 mn 組解答.

習題 LXXXV

1. 用 §§ 924, 925 證明二方程 $6x^2+5x-6=0$ 及 $2x^3+x^2-9x-9=0$ 有一公根並求此根.

2. 作 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 及 $b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 之結式.

3. 求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $x^3=1$ 之結式.

4. 用 § 931 之法求方程之結式:

 (1) $x^3+px+q=0$. (2) $ax^3+bx^2+c=0$.

5. 引用 § 931 證明 $x^3+x^2-8x-12=0$ 有一重根並求此根.

6. 用 § 927 之法解下列方程系:

$$x^2-3xy+2y^2-16x-28y=0,$$
$$x^2-xy-2y^2-5x-5y=0.$$

XXXII. 無窮級數之收斂

收斂之定義

935 **無窮級數.** 設 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 爲任一已知無盡數列，§ 187，則此式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

稱爲無窮級數(比較 § 704)。

吾人可以 Σu_n 代表 $u_1+u_2+\cdots$，讀法"u_n 達無窮項之和"。

級數 Σu_n 之各項 $u_1, u_2, \cdots$ 皆爲實數時，稱實級數，各項皆爲正數時，稱正級數。下述均以實級數爲限。

凡級數常以公式表其第 n 項 u_n。例如，設 $u_n=\sqrt{n}/(n+1)$，則此級數爲 $\sqrt{1}/2+\sqrt{2}/3+\sqrt{3}/4+\cdots$。

有時一公式常寫其爲首三項或四項以代表之。例如，在 $1/2+1\cdot3/2\cdot4+1\cdot3\cdot5/2\cdot4\cdot6+\cdots$，則得 $u_n=1\cdot3\cdots(2n-1)/2\cdot4\cdots2n$。

936 **收斂及發散.** 使 S_n 代表 $u_1+u_2+\cdots$ 之爲首 n 項之和，則 $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, 普遍言之，則 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$。

S_n 隨 n 之增大，而陸續取 $u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3\cdots$ 以爲值，其性質必屬於下列情形之一，即：

　　S_n 漸近於一有限數而以此數爲極限，

或　S_n 漸近於無窮大，

或　S_n 爲不定數。

在第一條件之下，此級數 $u_1+u_2+\cdots$ 名爲收斂，而 $\lim S_n$ 稱爲其和。在第二及第三條件之下，此級數名爲發散。

當 $u_1+u_2+\cdots$ 收斂時，可將此和 $\lim S_n$ 以 S 代表之，而

寫作 $S=u_1+u_2+\cdots$，即視此級數爲定數 S 之另一表示方法。

例如，幾何級數 $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots$ 爲收斂級數，而其和爲 1. 因 S_n 隨 n 之增大陸續以 $1/2,\ 3/4,\ 7/8,\ 15/16,\ \cdots$ 爲其值，故漸近於 1 爲其極限，§ 704. 注意，如其他收斂級數，$\lim u_n=0$.

級數 $1+1+1+\cdots$ 爲發散級數。因 S_n 陸續以 $1, 2, 3, \cdots$ 爲其值，而漸近於 ∞ 也。

級數 $1-1+1-1+\cdots$ 爲發散級數。因 S_n 陸續以 $1, 0, 1, 0, \cdots$ 爲其值。故爲不定數。

於是得下列定義: 937

無窮級數，其首 n 項之和，隨 n 之無限增大而漸近於一有限值者，名爲收斂。否則爲發散。

收斂級數其首 n 項之和之極限，稱爲該級數之和。

此爲和字之新意義。以前所謂和者乃爲有限數之連續相加之結果；此間爲此結果之極限。故不必假定此有限和之特殊性質，即交換律及結合律亦能應用於此無窮項和之內 (見 §§ 941, 961).

於決定一已知級數究爲收斂抑發散時，可將其諸項中之有限個數略去不論。 938

蓋所略去諸項之和爲有限之定值。

設 $u_1+u_2+\cdots(1)$ 爲收斂級數，其和 S，而 c 爲任一有限數，則 $cu_1+cu_2+\cdots(2)$ 亦爲收斂級數，而其和爲 cS. 但若 (1) 爲發散，(2) 亦爲發散。 939

蓋若 (1) 之首 n 項之和爲 S_n，則 (2) 之首 n 項之和爲 cS_n；而 $\lim cS_n=c\lim S_n=cS$.

收斂級數，若祇將其項結合爲數羣而不變其次序，則此級數之和不變。 940

故若已知級數爲 $u_1+u_2+\cdots$，而 $g_1, g_2, \cdots$ 爲原級數開首二項之和，其次四項之和，…等，則級數 $g_1+g_2+\cdots$ 與原級數有同一之和。

設 u_n 若指羣 g_m 中之末項，則等式

$$g_1+g_2+\cdots+g_m=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

之二邊，隨 m 及 n 之無限增大而漸近於相同之極限。

倣此，可證明一發散正級數當其項數結羣後，仍爲發散級數。

941 故吾人可於收斂級數隨意加添括號。而亦可除去括號，除非如下例，所得結果爲發散級數。

收斂級數 $1/2+1/4+1/8+\cdots$，§ 936，可以寫作 $(1\frac{1}{2}-1)+(1\frac{1}{4}-1)+(1\frac{1}{8}-1)+\cdots$。但此間之括號不能除去，因 $1\frac{1}{2}-1+1\frac{1}{4}-1+1\frac{1}{8}-1+\cdots$ 爲發散級數。

942 有時級數之和可以用除括號法而得之。

例如，$1/1\cdot2+1/2\cdot3+1/3\cdot4+\cdots$ 之和爲 1.

因 $$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

故 $$S=\lim S_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

例。設第 n 項 u_n 爲 $1/n(n+2)$，求此級數之和。

943 **n 項後之剩餘.** 設級數 $u_1+u_2+\cdots(1)$ 爲收斂級數，則其第 n 項以後之部份，爲 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots(2)$ 亦爲收斂，§ 938. 使 R_n 爲 (2) 之和。則稱爲 (1) 之 n 項後之剩餘。

顯然 $$\lim R_n=0.$$

正級數

定理 1. 正級數 $u_1+u_2+\cdots$ 若 S_n 隨 n 之增大而仍常小於一有限值 c, 則此級數爲收斂. 944

因此級數爲正，S_n 則隨 n 之增大而繼續增加. 但其常較 c 爲小. 故由 § 192, 則知其漸近於一極限. 故由 § 937, 可知此爲收斂級數.

定理 2. 使 $u_1+u_2+\cdots$ (1) 爲一巳知正級數，又使 $a_1+a_2+\cdots$ (2) 爲一正級數，巳經確定其收斂者. 則 (1) 於下列情形中之一時，斷定其爲收斂: 945

1. 當 (1) 之每項較 (2) 之對應項爲小.
2. 當 (1) 之各項與 (2) 之各對應項之比小於一有限數 c.
3. 當在 (1) 內其後項與其前一項之比，小於 (2) 中之對應比.

1. 因使 S_n 爲 $u_1+u_2+\cdots$ 之首 n 項之和，又使 A 爲 $a_1+a_2+\cdots$ 級數之和. 若 $u_1<a_1$, $u_2<a_2,\cdots$, 則 S_n 常小於 A. 故 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂級數，§ 944.

2. 因設 $\dfrac{u_1}{a_1}<c$, $\dfrac{u_2}{a_2}<c,\cdots$, 則 $u_1<ca_1$, $u_2<ca_2$, $\cdots$.

則因 $ca_1+ca_2+\cdots$ 爲收斂級數，§ 939, 故從 1 款，$u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂級數.

3. 因設
$$\frac{u_2}{u_1}<\frac{a_2}{a_1},\quad \frac{u_3}{u_2}<\frac{a_3}{a_2},\quad \frac{u_4}{u_3}<\frac{a_4}{a_3},\cdots,$$
則
$$\frac{u_2}{a_2}<\frac{u_1}{a_1},\quad \frac{u_3}{a_3}<\frac{u_2}{a_2},\quad \frac{u_4}{a_4}<\frac{u_3}{a_3},\cdots.$$

由上面不等式 u_2/a_2, $u_3/a_3,\cdots$ 各比小於有限數 u_1/a_1. 故 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂級數，從 2 款可知.

由 § 938, 可知若 1, 2, 3 各款之一，對於級數 (1) 與 (2) 除有限數項外，其餘所有各項，皆能成立，則可得同一結論.

例. 證明

$$1+1/2+1/2\cdot3+1/2\cdot3\cdot4+\cdots \tag{1}$$

與收斂等比級數

$$1+1/2+1/2\cdot2+1/2\cdot2\cdot2+\cdots \tag{2}$$

比較，用 1, 2, 3 各法，證明其爲收斂級數.

第一. (1) 之第二項後，各項皆小於 (2) 之對應項. 故從 1 款，可知其爲收斂者.

第二. (1) 之各項，對於 (2) 之對應項之比爲 1, 1, 2/3, 2·2/3·4, …爲有限數. 故從 2 款，斷定其爲收斂者.

第三. (1) 中各項與緊接其前一項之比，卽 1/2, 1/3, 1/4,…小於 (2) 中之對應比，卽 1/2, 1/2, 1/2,…. 故依 3 款，斷定其爲收斂者.

946 **定理 3.** 使 $u_1+u_2+\cdots$ (1) 爲一已知正級數，又使 $b_1+b_2+\cdots$ (2) 爲已知之發散正級數. 在下列之任一情形中，級數 (1) 爲發散級數：

1. (1) 之各項大於 (2) 之對應項時.
2. (1) 之各項與 (2) 之對應項之比，大於一正數 c 時.
3. (1) 中各項與緊接其前之一項之比，大於 (2) 中之對應比時.

本定理與 § 945 之證明相彷，學者可自爲之.

947 **試驗級數.** 上述試驗 §§ 945, 946 之實際應用，顯然基於吾人所選定之試驗級數已知其爲收斂或發散者. 其中最重要之試驗級數爲等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots$，在 § 704 已證明其當 $r<1$ 時爲收斂，又當 $r\geqq1$ 時顯然爲發散. 其他有用之試驗級數如下.

948 $1+1/2^p+1/3^p+\cdots+1/n^p+\cdots$ 當 $p>1$ 時爲收斂，當 $p\leqq1$ 時爲發散.

1. $p>1$. 合併從 $1/2^p$ 起之二項，從 $1/4^p$ 起之四項，從 $1/8^p$ 起之八項，等等，得其相等級數，§ 940，爲

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots. \tag{1}$$

(1) 之第一項以後，顯然小於級數

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots \tag{2}$$

之對應項，卽小於級數

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\cdots,\ \text{或}\ 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots \tag{3}$$

之對應項.

但因 $p>1$，故 $1/2^{p-1}<1$，此等比級數 (3) 爲收斂者. 故 (1) 爲收斂級數，§ 945, 1.

2. $p=1$. 合併以 $1/4$ 爲止之二項，以 $1/8$ 爲止之四項，以 $1/16$ 爲止之八項，等等，得

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots. \tag{4}$$

(4) 之第二項後，每項顯然大於級數

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \tag{5}$$

之對應項，卽大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots,\ \text{或}\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \tag{6}$$

之對應項.

但 (6) 爲發散，故 (4) 亦爲發散級數，§ 946, 1.

3. $p<1$. 在此情形中，級數 $1+1/2^p+1/3^p+\cdots$ 爲發散者，因各項大於 $1+1/2+1/3+\cdots$ 之對應項，而此級數已證明爲發散者，§ 946, 1.

949 **前述諸定理之應用.** 以下各例說明如何應用 §§ 945, 946 各定理.

例 1. 證明 $1/1\cdot2+1/2\cdot3+1/3\cdot4+\cdots$ 爲收斂級數.

此級數因自第一項以後均小於收斂級數 $1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots$ 之對應項, 故爲收斂級數, § 945, 1.

例 2. 證明 $1+1/3+1/5+1/7+\cdots$ 爲發散級數.

此級數之各項與發散級數 $1+1/2+1/3+1/4+\cdots$ 之對應項之比, 卽 $1, 2/3, 3/5, 4/7, \cdots, n/(2n-1)$, 皆大於 $1/2$. 故 $1+1/3+1/5+\cdots$ 爲發散級數, § 946, 2.

例 3. $u_n=(2n+1)/(n^3+n)$ 之級數爲收斂抑發散?

此處　$$u_n=\frac{2n+1}{n^3+n}=\frac{n}{n^3}\cdot\frac{2+1/n}{1+1/n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2+1/n}{1+1/n^2}.$$

故 u_n 與 $1/n^2$ 之比爲 $(2+1/n)/(1+1/n^2)$, 不論 n 爲任何值, 此式常爲有限, 而當 n 增大時, 此式接近於 2. 但 $1/n^2$ 爲收斂級數 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 之第 n 項. 故此級數爲收斂者, § 945, 2.

950 用例 3 之法可證明若 u_n 之形式爲 $u_n=f(n)/\phi(n)$, 其中 $f(n)$ 及 $\phi(n)$ 皆指示 n 之整函數, 則 $\phi(n)$ 之次數較 $f(n)$ 之次數大過於 1 時, 此級數爲收斂; 否則爲發散.

例 1. 證明下列各級數爲收斂級數:

(1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots.$　　(2) $\dfrac{2}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{4}{3\cdot4\cdot5}+\dfrac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots.$

(3) $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{(a+b)(a+2b)}+\dfrac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots.$

例 2. 證明下列各級數爲發散級數:

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\cdots.$　　(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a+b}+\dfrac{1}{3a+b}+\cdots.$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots.$　　(4) $\dfrac{2}{1+2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+3\sqrt{3}}+\dfrac{4}{1+4\sqrt{4}}+\cdots$

例 3. 寫各級數開首之四項，其 u_n 項之值如下列者，并定其爲收斂抑發散：

(1) $u_n=\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}$. (2) $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. (3) $u_n=\frac{n^2-(n-1)^2}{n^3+(n+1)^3}$.

定理 4. 正級數 $u_1+u_2+\cdots$ 各項與緊接其前之一項之比若小於一數 r，而 r 自身則小於 1 者，則此級數爲收斂者。 951

因在 $u_1+u_2+u_3+\cdots(1)$ 中，各項與其前一項之比小於等比級數 $u_1+u_1r+u_1r^2+\cdots(2)$ 中之對應比，因所究之比在 (1) 中常小於 r，而在 (2) 中則等於 r 也。但因 $r<1$，(2) 爲收斂者。故依 § 945, 3, 知 (1) 亦爲收斂級數。

上述之比若等於 1，或大於 1，則級數爲發散；因在此情形時 $\lim u\neq 0$.

系. 比 u_{n+1}/u_n 若隨 n 之增大而趨近於某定極限 λ，則 $\lambda<1$ 時，級數爲收斂者，$\lambda>1$ 時爲發散者。 952

1. 因若 $\lambda<1$，可任取一數 r 使 $\lambda<r<1$.

因 $\lim(u_{n+1}/u_n)=\lambda$，隨 n 之某值，常得 $u_{n+1}/u_n-\lambda<r-\lambda$，§ 189，因而 $u_{n+1}/u_n<r$. 故此級數爲收斂，§§ 938, 951.

2. 若 $\lambda>1$，則隨 n 之某值而常得 $u_{n+1}/u_n>1$. 故此級數爲發散，§ 951.

$u_{n+1}/u_n>1$ 而 $\lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 時，此級數爲發散；但 $u_{n+1}/u_n<1$ 而 $\lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 時，則不能從 § 951 之定理而得其結論。

例 1. 證明 $\frac{3}{5}+\frac{3\cdot5}{5\cdot10}+\frac{3\cdot5\cdot7}{5\cdot10\cdot15}+\cdots$ 爲收斂。

此級數之第 n 項爲 $3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)/5\cdot10\cdot15\cdots5n$，而此項及其前一項之比爲 $(2n+1)/5n$.

但 $(2n+1)/5n=2/5+1/5n$，$\lim(2n+1)/5n=2/5$，因小於 1. 故此級數爲收斂。

例 2.　設 x 爲正值，$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots$何時收斂？

此間　　$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+nx^n}{1+(n+1)x^{n+1}}=\frac{x^n+1/n}{x^{n+1}(1+1/n)+1/n},$$

故　　$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{x}.$$

故上列級數當 $1/x<1$，卽 $x>1$ 時爲收斂級數。

例 3.　證明 $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\cdots$爲收斂級數。

例 4.　證明 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\cdots$爲收斂級數。

例 5.　$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$，$x$ 爲正值時，此級數何時收斂？

例 6.　$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots$，$x$ 爲正值時，此級數何時收斂？

953　**$\lim(u_{n+1}/u_n)=1$ 之級數.**　此類級數中，u_{n+1}/u_n 之比可化爲

$$u_{n+1}/u_n=1/(1+a_n/n),$$

其中 $\lim(a_n/n)=0$. 今將證明，若 n 增加，a_n 因之變爲大於一某數其本身大於 1 者，則此級數爲收斂；但 a_n 因之變爲且仍爲小於 1 之數，則此級數爲發散。

1.　因假定在 n 之某值(可命爲 k) 後，而得 $a_n>1+a$，且 a 爲正數。

則　$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+a_n/n}<\frac{1}{1+(1+a)/n}$，當 $n\geqq k$ 時。

但可將此不等式化作

$$u_{n+1}<\frac{1}{a}[nu_n-(n+1)u_{n+1}]，當\ n\geqq k\ 時。\tag{1}$$

(1) 式中，順次使 $n=k,\ k+1,\cdots k+l-1$，又加各所得不等式。得

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots u_{k+l}<\frac{1}{a}[ku_k-(k+l)u_{k+l}].\tag{2}$$

由 (2)，可知 l 增大時，則正級數 $u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots$之首 l 項之和常小於有限

數 ku_k/a，此卽證明其爲收斂，§ 944. 故此完全級數 $u_1+u_2+\cdots$ 爲收斂級數，938.

2. 假定 $n>k$ 得 $a_n<1$.

則 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{1+a_n/n}>\dfrac{1}{1+1/n}$，當 $n>k$ 時。

然 $1/(1+1/n)$ 爲發散級數 $1+1/2+1/3+\cdots$ 中對應項之比；因 $1/(n+1)\div 1/n=1/(1+1/n)$.

故原級數 $u_1+u_2+\cdots$ 爲發散級數，§ 946, 3.

設 a_n 常大於 1 而趨近於 1 爲極限，則上述試驗法不能決定此級數爲收斂抑爲發散。然在此情形中，a_n 可化爲 $a_n=1+\beta_n/n$ 之形式，其中 $\lim \beta_n/n=0$；若 β_n 常小於一定數 b，則此級數爲發散。

因 $\beta_n<b$，得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+a_n/n}=\frac{1}{1+1/n+\beta_n/n^2}>\frac{1}{1+1/n+b/n^2}.$$

但 $1/(1+1/n+b/n^2)$ 又大於發散級數 $1/(1-b)+1/(2-b)+1/(3-b)+\cdots$ 之諸對應項之比。

因 $$\frac{1}{(n+1)-b}\div\frac{1}{n-b}=\frac{n-b}{(n-b)+1}=\frac{1}{1+1/(n-b)}<\frac{1}{1+1/n+b/n^2},$$

而 $$\frac{1}{n-b}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-b/n}=\frac{1}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{b^2}{n^3}+\cdots.$$

故原級數 $u_1+u_2+\cdots$ 爲發散，§ 946, 3.

從上述討論，可知某級數，其 u_{n+1}/u_n 可化爲 954

$$u_{n+1}/u_n=(n^p+an^{p-1}+\cdots)/(n^p+a'n^{p-1}+\cdots)$$

之形式者，在 $a'-a>1$ 時，此級數爲收斂，$a'-a\leqq 1$ 時，則爲發散級數。

以分式之分子除其分母，得

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots}{n^p+a'n^{p-1}+\cdots}=\frac{1}{1+(a'-a)/n+\beta_n/n^2},$$

其中 β_n 爲有限値.

例. 證明"超比級數"

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots,$$

當 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 時爲收斂，$\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ 時爲發散。

習 題 LXXXVI

斷定下列各級數爲收斂抑發散：

1. $\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{2^3+1}+\cdots.$

2. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1\cdot2}{1\cdot3}+\dfrac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots.$

3. $\dfrac{2}{2\cdot3}+\dfrac{4}{3\cdot4}+\dfrac{6}{4\cdot5}+\cdots.$

4. $\dfrac{2}{3}+2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\cdots.$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots.$

6. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{a^2+2}+\cdots.$

7. $\dfrac{2}{4}+\dfrac{2\cdot4}{4\cdot7}+\dfrac{2\cdot4\cdot6}{4\cdot7\cdot10}+\cdots+\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}+\cdots.$

8. $\dfrac{2}{4}+\dfrac{2\cdot3}{4\cdot5}+\dfrac{2\cdot3\cdot4}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdots(n+1)}{4\cdot5\cdot6\cdots(n+3)}+\cdots.$

9. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}+\cdots.$

寫各級數開首之四項，其 u_n 之值如下，並決定其爲收斂抑發散：

10. $u_n=\dfrac{n+1}{n(n+2)}.$

11. $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^3+1}}.$

12. $u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$

u_{n+1}/u_n 如下值時，決定各級數爲收斂抑發散：

13. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2n}{2n+3}.$

14. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3n^3-2n^2}{3n^3+n^2+1}.$

x 須有若何之正値，則下列各級數爲收斂？

15. $1+\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3\cdot6}{5\cdot8}x^2+\dfrac{3\cdot6\cdot9}{5\cdot8\cdot11}x^3+\cdots.$

16. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^3}+\dfrac{x^3}{1+x^4}+\cdots.$

17. 當 a 爲正時，證明 $\dfrac{a}{1}+\dfrac{a(a+1)}{1\cdot2}+\dfrac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$ 爲發散級數。

18. 設對於 n 之一切値皆爲 $\sqrt[n]{u_n}<r$，其中 r 爲正數且小於 1，使與收斂級數 $r+r^2+r^3+\cdots$. 比較而證明 $u_1+u_2+\cdots$ 其爲收斂級數。

含正負項之級數

收斂之普遍試驗法. 從 § 937 之定義，無論何種無限級數 $u_1+u_2+\cdots$，設當 n 無限增大時，S_n 接近於某極限，則此級數爲收斂。 955

但 §§ 195, 197，設當 n 增大而 S_n 所歷之數列，即 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 有下述之特性，即對於每一不論小至如何之正已知數 δ，可求得一對應項 S_k，與其以後任一項 S_{k+p} 之差小於 δ，則 S_n 將漸近於一極限．設此條件不能滿足，S_n 將不能漸近於一極限，§ 198.

因 $$S_k=u_1+\cdots+u_k,$$
而 $$S_{k+p}=u_1+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+p},$$
則 $$S_{k+p}-S_k=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}.$$

故收斂之普通試驗法爲：

任何無限級數 $u_1+u_2+\cdots$ 若對於一不論小至如何之已知正數 δ，能求得一項 u_k，使 u_k 後任何若干項之和小於 δ；換言之，即對於 p 之一切値能使

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}|<\delta,$$

則該級數必爲收斂．設此級數無此性質，則爲發散級數．

故在特別情形之下，除非 $\lim u_n=0$，$u_1+u_2+\cdots$ 不能爲收斂級數．但單有此條件不足爲收斂之確證．尙須有 $\lim(u_n+u_{n+1})=0$，$\lim(u_n+u_{n+1}+u_{n+2})=0$，等等。

故 $1+1/2+1/3+\cdots$ 雖 $\lim u_n=\lim 1/n=0$，但仍爲發散者。

因在此級數內，$1/k$ 一項後，k 項之和常大於 $1/2$. 故

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+k}>\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\cdots \text{至 } k \text{ 項，即 } >\frac{1}{2k}\cdot k \text{ 亦即 } \frac{1}{2}.$$

蓋吾人不能選擇一個 k 使 $u_{k+1}+\cdots+u_{k+k}$ 小於每一預設之數；故此級數爲發散(比較 § 948, 2).

956 系 1. 含正負項之級數,若其對應之正級數爲收斂,則此級數亦爲收斂.

因使 $u_1+u_2+\cdots(1)$ 爲原級數,而 $u'_1+u'_2+\cdots(2)$ 爲同級數而其中負號均已變過者.則

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}|\leqq u'_{k+1}+u'_{k+2}+\cdots+u'_{k+p}.$$

故若取 k,其大足使

$$u'_{k+1}+\cdots+u'_{k+p}<\delta,$$

則 $|u_{k+1}+\cdots+u_{k+p}|<\delta$ 亦爲眞.故若 (2) 爲收斂,則 (1) 亦爲收斂,§ 955.

957 含虛數項之級數 $u_1+u_2+\cdots$,若 $u_1, u_2,\cdots$ 之絕對值,§ 232,所成之級數即 $|u_1|+|u_2|+\cdots$,爲收斂者,則此級數亦爲收斂.其證明如上.

例如,$i/1+i^2/2^2+i^3/3^2+\cdots$ 因 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 爲收斂者,故亦爲收斂級數.

958 系 2. 含正負項輪流之級數,若各項之絕對值皆小於緊接其前之一項,且第 n 項之極限爲 0,則此級數爲收斂.

因使級數爲 $a_1-a_2+a_3-\cdots$,其中 $a_1, a_2,\cdots$ 爲正數.用 § 955 之記法,得

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+p}|=|a_{k+1}-a_{k+2}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{k+p}|.$$

可將 $$a_{k+1}-a_{k+2}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{k+p} \tag{1}$$

寫作 $$(a_{k+1}-a_{k+2})+(a_{k+3}-a_{k+4})+\cdots \tag{2}$$

或 $$a_{k+1}-(a_{k+2}-a_{k+3})-\cdots. \tag{3}$$

因 $a_{k+1}>a_{k+2}>a_{k+3}>\cdots$,(2) 與 (3) 中各個括號內之式皆爲正.故由 (2) 可知 (1) 之值爲正,由 (3) 可知 (1) 之代數值小於 a_{k+1},而 (2) 與 (3) 合而言之,可知 (1) 之絕對值小於 a_{k+1}.

但因 $\lim a_n=0$,吾人可選取 k 使 $a_{k+1}<\delta$.故 $a_1-a_2+a_3-\cdots$ 爲收斂,§ 955.

對絕收斂及條件收斂． 一收斂之實級數設有負號，則當 959
其負號完全變號後，仍為收斂者，稱之為絕對收斂；設變號後為發散者，則稱之為條件收斂．

例如，$1-1/2+1/4-1/8+\cdots$ 為絕對收斂，因 $1+1/2+1/4+1/8+\cdots$ 為收斂．

但收斂級數 $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$，§ 958，僅為條件收斂，因 $1+1/2+1/3+1/4+\cdots$ 為發散．

定理． 在絕對收斂級數中，諸正項自成一收斂級數，諸 960
負項亦然．設此二級數之和各為 P 與 $-N$，則全級數之和為 $P-N$．

但在條件收斂級數中，諸正項及諸負項所成之級數皆為發散者．

因使 $u_1+u_2+\cdots$ 為一收斂級數有無限數之正負項者．

設此級數開首 n 項中，p 項為正，q 項為負．則 S_n 若為 n 項之和，P_p 為 p 正項之和而 $-N_q$ 為 q 負項之和，則得 $S_n=P_p-N_q$.

當 n 無限增大時，p 與 q 皆將為無限之增大，又因 S_n 接近於有限極限 S，則必在下列情形之一中，即 (1) P_p 及 N_q 皆接近於有限極限 P 與 N 或 (2) P_p 與 N_q 皆以無窮大為極限．

第一情形時，$\lim S_n=\lim(P_p-N_q)=\lim P_p-\lim N_q$，§ 203，即 $S=P-N$. 此級數為絕對收斂．實際上各負項變號後，此級數之和為 $P+N$.

第二情形時，此級數為條件收斂．因設 S_n' 為變各負項後開首 n 項之和，得 $\lim S_n'=\lim(P_p+N_q)=\infty$.

961 系. 條件收斂級數之各項得排列之,而使此級數之和取任何預設之實數值.

因適已證明條件收斂級數中,諸正項與諸負項各自成一發散級數,其第 n 項之極限爲 0.

故若預設一正數 c,而不變諸正項及諸負項之次序,先加其正項,至於其和大於 c,後加其負項,至於其和小於 c,準此類推,S_n 之極限,如 n 無限增大,則爲 c.

故加法之交換律不能適用於條件收斂級數.

習 題 LXXXVII

1. 決定下列級數爲收斂抑發散:

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots$. (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\cdots$,

(3) $\frac{3}{3}-\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots$.

2. x 之實值若干時,下列級數爲收斂,又當 x 之實值若干時,爲發散?

(1) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{1+(-1)^n nx}+\cdots$.

(2) $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+2x^4}+\frac{x^5}{1+3x^6}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1+nx^{2n}}+\cdots$.

3. 設 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 爲絕對收斂,而 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 爲一列之數,各數之絕對值皆小於 c,以 § 956 之法證明 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots$ 亦爲收斂.

4. 設 S 爲 § 958 中一類級數之和,證明 $a_1, a_1-a_2, a_1-a_2+a_3, \cdots$ 輪流大或小於 S.

冪級數之收斂

冪級數. 此名稱指具下式之任何級數，$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$(1), 其中 x 爲變數而 $a_0, a_1, \cdots$ 爲常數. x 及 $a_0, a_1, \cdots$ 可爲實數或爲虛數. 962

從 § 957, 級數 (1) 爲收斂者，設正級數 $|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots$(2) 爲收斂者. 當 (2) 爲收斂時，則 (1) 稱爲絕對收斂 (比較 § 959). (1) 爲收斂或發散，全賴於 x 之值. 故下列定理頗爲重要.

定理 1. 設 $x=b$ 時，$a_0+a_1x+\cdots$ 之每一項其絕對值小於一有限正值 c, 則當 $|x|<|b|$ 時，此級數爲絕對收斂. 963

因對於各 n, $\quad |a_nb^n|<c,$

對於各 n, 得 $\quad |a_nx^n|=|a_nb^n|\cdot\left|\frac{x}{b}\right|^n<c\left|\frac{x}{b}\right|^n.$

故 $\quad |a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots$(1) 之每項小於

$c+c\left|\frac{x}{b}\right|+c\left|\frac{x}{b}\right|^2+\cdots$(2) 之各對應項.

但 (2) 爲等比級數，當 $|x/b|<1$, 卽當 $|x|<|b|$ 時爲收斂級數. 又當 (2) 收斂時，(1) 亦收斂，§ 945, 1.

例如，$1+2x+x^2+2x^3+\cdots$ 當 $|x|<1$ 時，爲收斂.

系 1. 設當 $x=b$ 時，$a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂，則當 $|x|<|b|$ 時，此級數爲絕對收斂. 964

從 § 963, 因 $x=b$ 時，$a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂，則當 $x=b$ 時，各項均爲有限值.

系 2. 設當 $x=b$ 時，$a_0+a_1x+\cdots$ 爲發散，則當 $|x|>|b|$ 時，此級數亦爲發散. 965

因 $a_0+a_1x+\cdots$ 當 x 之絕對值大於 b 值時,若爲收斂,則此級數對於 $x=b$ 時,亦將爲收斂,§ 964.

966 **收斂之極限** 從 §§ 964, 965 可知若以 x 之一切正值在 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂者歸入 A_1 類,而以其發散者歸入 A_2 類,則 A_1 中每一數將小於 A_2 中之每一數。故從 § 159, 知 A_1 中有一最大之數,或 A_2 中有一最小之數。稱此數爲 λ. 則此數代表 $a_0+a_1x+\cdots$ 之收斂之極限,當 $|x|<\lambda$ 時,此級數爲絕對收斂,$|x|>\lambda$ 時則爲發散。

例如,在 $x+x^2/2+x^3/3+\cdots$ (1) 及 $x+x^2/2^2+x^3/3^2+\cdots$ (2) 中,收斂之極限 λ 爲 1. 注意,當 $x=\lambda=1$ 時,(1) 爲發散,(2) 爲收斂。創一 $\lambda=0$ 之級數亦屬可能;例如,$x+2!x^2+3!x^3+\cdots$.

吾人所稱收斂之極限,通常多稱爲收斂圓之半徑。因若將複素數依 § 238 所示在平面中畫成一圓形,圓心在原點,半徑爲 λ, 則 x 在圓內之一切值,使 $a_0+a_1x+\cdots$ 常爲收斂,而 x 之值在圓外時,此級數爲發散,§ 239.

967 **定理 2.** 設在 $a_0+a_1x+\cdots$ 內,其比 $|a_n/a_{n+1}|$ 漸近於一有限極限 μ, 則 μ 爲收斂之極限。

因從 § 952, 當 $\lim\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|<1$, 卽在 $|x|<\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 時,級數 $|a_0|+|a_1x|+\cdots$ 爲收斂。

仿此,當 $|x|>\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 時,$|a_0|+|a_1x|+\cdots$ 爲發散。

例 1. 求此級數之收斂極限

$$1+\frac{3}{5}x+\frac{3\cdot5}{5\cdot10}x^2+\cdots+\frac{3\cdot5\cdots(2n+1)}{5\cdot10\cdots5n}x^n+\cdots.$$

因 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{5(n+1)}{2n+3}=\dfrac{5+5/n}{2+3/n}$, 得 $\mu=\lim\dfrac{5+5/n}{2+3/n}=\dfrac{5}{2}$.

例 2. 求此級數之收斂極限

$$\cdots+2^3x^{-3}+2^2x^{-2}+2x^{-1}+1+x/3+x^2/3^2+x^3/3^3+\cdots.$$

此間 $1+x/3+x^2/3^2+\cdots$ 爲 x 之等比級數，因在 $|x|<3$ 時，則 $a_n/a_{n+1}=3$ 而此級數爲收斂。

又 $2x^{-1}+2^2x^{-2}+2^3x^{-3}+\cdots$ 爲 x^{-1} 即 $1/x$ 之等比級數，在 $|x^{-1}|<1/2$ 時即 $|x|>2$ 時，此級數爲收斂。

故當 $2<|x|<3$ 時，此級數爲收斂。

例 3. x 之實值爲何，則

$$x/(1+x)+2x^2/(1+x)^2+3x^3/(1+x)^3+\cdots \text{爲收斂?}$$

此爲 $x/(1+x)$ 之冪級數，當 $|x/(1+x)|<1$ 時此級數收斂，因 $\lim a_n/a_{n+1}=\lim n/(n+1)=1$.

但 $|x/(1+x)|<1$，x 爲任何正數或 x 爲大於 $-1/2$ 之負數時皆能成立．故此級數於 $x>-1/2$ 時爲收斂。

二項級數，指數級數及對數級數． 今將應用上列各定理 **968** 於此三種重要冪級數。

1. 指數級數，§ 990，即

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

於 x 爲任何有限值時，此級數爲收斂。

因此處 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{n!}\div\frac{1}{(n+1)!}=n+1.$$

故 $$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim(n+1)=\infty\text{，即 }\mu=\infty.$$

2. 對數級數，§ 992，即

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

當 $|x|<1$ 時爲收斂，當 $|x|>1$ 時爲發散。

因此處 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}\div\frac{1}{n+1}=-\frac{n+1}{n}.$$

故 $$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\lim\frac{n+1}{n}=-\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=-1\text{，即 }\mu=1.$$

當 $x=1$ 時爲收斂，§ 958，當 $x=-1$ 時，爲發散，§ 948.

3. 二項級數,即

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots,$$

其中 m 不爲正整數,則於 $|x|<1$ 時,此級數爲收斂,當 $|x|>1$ 時,爲發散。

因此處

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\div\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}=\frac{n+1}{m-n}.$$

故 $\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\frac{n+1}{m-n}=-\lim\frac{1+1/n}{1-m/n}=-1$, 卽 $\mu=1$.

當 $x=1$ 時, 設 $m>-1$, 此級數爲收斂; 設 $m\leqq -1$, 爲發散 (見 § 1001, 例 2).

當 $x=-1$ 時,設 $m>0$, 此級數爲收斂;設 $m<0$ 爲發散。

因當 $x=-1$, 使 $m=-a$, 可化此級數爲

$$1+a+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots.$$

顯然從某項以後,各項皆屬同號,故 § 954 之試驗法可以適用, § 956.

但 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a+n-1}{n}=\frac{n+(a-1)}{n}.$$

故從 § 954, 若 $-(a-1)>1$, 卽若 $-a>0$, 此級數爲收斂; 然 $-a=m$, 故若 $m>0$, 此級數收斂.但若 $-(a-1)<1$, 卽若 $m<0$, 此級數爲發散。

習 題 LXXXVIII

決定下列各級數收斂之極限:

1. $1+mx+m^2x^2/2!+m^3x^3/3!+\cdots$.

2. $2(2x)^2+3(2x)^3+2(2x)^4+3(2x)^5+\cdots$.

3. $mx+\frac{m(m-2)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m-4)}{3!}x^3+\cdots$.

x 須爲若何之實數值,下列各級數爲收斂?

4 $\frac{3x}{x+4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^3+\cdots$.

5. $\frac{x}{x^2+1}+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\cdots$.

6. $\cdots(3x)^{-3}+(3x)^{-2}+(3x)^{-1}+1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots$.

XXXIII. 無窮級數之演算

初步定理

已知一冪級數 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲收斂時,其和爲 x 之一定函數,此函數可以 $f(x)$ 表之,寫 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$. 當寫 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$ 時,乃假定 $a_0+a_1x+\cdots$ 有一收斂之極限 λ 大於 0,又假定 $|x|<\lambda$. **969**

定理 1. 已知級數 $\phi(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots$, 且 x 有正値 b 時, $\phi(x)$ 之每一項皆小於一有限正數 c. **970**

設舉一不論小至如何之正數 δ, 則每當 $|x|<b\delta/(c+\delta)$ 時, $|\phi(x)|<\delta$.

因如 § 963 之證明中所示, $|x|<b$ 時,

$$|\phi(x)|<c\left|\frac{x}{b}\right|+c\left|\frac{x}{b}\right|^2+\cdots,$$

故 $$<c\left|\frac{x}{b}\right|\frac{1}{1-|x/b|}, \text{ 即 } <\frac{c|x|}{b-|x|}. \qquad \S\,704$$

故當 $\dfrac{c|x|}{b-|x|}<\delta$ 時,即於當 $|x|<\dfrac{b\delta}{c+\delta}$ 時, $|\phi(x)|<\delta$.

系. 設 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$, 則 $\lim\limits_{x\doteq 0} f(x)=a_0=f(0)$. **971**

因如上述, $\lim\limits_{x\doteq 0}(a_1x+a_2x^2+\cdots)=0$, § 200.

定理 2. 設在級數 $a_0+a_1x+\cdots$ 中將一切能使其爲收斂之 x 値代入其中能使此級數爲 0, 則 $a_0=0$, $a_1=0$,$\cdots$. **972**

因使 $x=0$, 則立得 $a_0=0$.

對於 x 之一切値能使此級數爲收斂者,故

$$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=0. \qquad (1)$$

若 $x \neq 0$, 以 x 除 (1) 之各項。

故　　　　$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots = 0, \tag{2}$$

除 $x=0$ 以外, (2) 對於 x 之任何值使此級數爲收斂者均眞。但由此得 $a_1=0$; 因 $a_1 \neq 0$ 則可選 x 如此之小 (但不爲 0) 而使 $|a_2x+a_3x^2+\cdots|<|a_1|$, § 970, 而 x 如此之值不能適合於 (2), 如適所證者。

故 $a_1=0$. 同理可以證明 $a_2=0$, $a_3=0$, 等等。

對於 $a+bx^{\frac{1}{2}}+cx+dx^{\frac{3}{2}}+\cdots$, 此定理亦爲眞, 即對於任何級數, 其 x 之指數爲正, 且彼此互不相同, 此定理皆爲眞; 因適所證明之理由, 可應用於此等級數。

$a_0+a_1x+\cdots$ 中對於 x 能使其收斂之一切值代入後, 此級數等於零, 此假設中所包含者, 較 $a_0=0$, $a_1=0$, $\cdots$ 之證明所需者爲多. 因由上述推理, 若 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 指示任何已知之無盡數列, 而 $\lim \beta_n=0$, 且當 $x=\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n \cdots$ 時, 設 $a_0+a_1x+\cdots$ 爲 0, 則 $a_0=0$, $a_1=0$, $\cdots$. 在特殊情形下, $\beta_1, \beta_2, \cdots$ 可全爲有理數.

973　**定理 3.**　設 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$, 而 x 之值能使此等級數爲收斂級數, 則 x 之同次冪之係數必屬相等, 即 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ 等等。

因由已知方程之兩端, 減去第二級數, 則由 § 974, 得

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots=0,$$

乃爲能使此級數爲收斂者之一切 x 值。

故, § 972,　　$a_0-b_0=0,\ a_1-b_1=0,\ a_2-b_2=0, \cdots,$

即　　　　$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2, \cdots.$$

此定理名爲不定係數定理, 故此定理說明爲以 x 之冪級數表一已知 x 之函數, 其法僅一(比較 § 421).

冪級數之演算

因多數 x 之方程，僅可用冪級數表之，故此種級數之測定法則，頗爲重要。此種法則基於下述二定理，§§ 974, 976, 今就一般之無窮級數證明之。

定理 1. 設級數 $u_1+u_2+\cdots$ 及 $v_1+v_2+\cdots$ 爲收斂級數，且其和各爲 S 及 T，則級數 $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots$ 亦爲收斂級數，而其和爲 $S+T$. **974**

因 § 203,
$$\lim[(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)]$$
$$=\lim(u_1+u_2+\cdots+u_n)+\lim(v_1+v_2+\cdots v_n)$$
$$=S+T.$$

若加無窮級數之相當有限項，應用上述定理，亦爲眞確。故在任何有限個以 x 之冪級數表示之函數相加，其規則爲乃以此種級數之對應項相加，卽以其所含 x 之同次項相加。 **975**

例如，設 $f(x)=1+x+x^2+\cdots$ 及 $\phi(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$,
當此二原級數收斂時，卽 $|x|<1$ 時，則
$$f(x)+\phi(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots.$$

設有無限個級數，其和各爲 $S, T, \cdots$，若加此等級數之對應項，則卽使當級數 $S+T+\cdots$ 爲收斂時，其結果亦常得一發散級數。惟在下述定理之情形中時，則得一收斂級數，而其和爲 $S+T+\cdots$.

定理 2. 設 $U_1+U_2+\cdots$ 爲一收斂級數，其每項爲一絕對收斂級數之和，卽 **976**

$$U_1=u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots(1), \quad U_2=u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots(2), \cdots.$$

又設 $U'_1, U'_2\cdots$ 表此等級數之和,此等級數乃將其絕對值代入 (1) 及 (2) 之各項中而得,於是

$$U'_1=|u_1^{(1)}|+|u_2^{(1)}|+\cdots,\quad U'_2=|u_1^{(2)}|+|u_2^{(2)}|+\cdots,$$

等等.

設 $U'_1+U'_2+\cdots$ 爲收斂者,則以 (1), (2),$\cdots$ 之對應項相加而得之各個級數,即級數 $u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+\cdots$, $u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+\cdots$ 等等亦皆爲收斂,又設諸級數之和爲 $V_1, V_2,\cdots$, 則得

$$U_1+U_2+U_3+\cdots=V_1+V_2+V_3+\cdots.$$

因級數 (1), (2),$\cdots$ 中之 n 項後之餘式,表之以 $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}$, $\cdots$, § 943, 則

$$U_1=u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots+u_n^{(1)}+R_n^{(1)},$$
$$U_2=u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots+u_n^{(2)}+R_n^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$U_k=u_1^{(k)}+u_2^{(k)}+\cdots+u_n^{(k)}+R_n^{(k)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

每一列級數 $u_1^{(1)}+u_1^{(2)}+\cdots$, $u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+\cdots$ 等等,爲收斂級數,因其各項較收斂級數 $U'_1+U'_2+\cdots$, § 945 1 之對應項爲小.使此等級數之和爲 $V_1, V_2,\cdots V_n, R_n$.

設將 $n+1$ 列級數相加,得原級數 $U_1+U_2+\cdots$. 故因 n 爲無窮,得 § 975,

$$U_1+U_2+\cdots U_k+\cdots=V_1+V_2+\cdots V_n+R_n.$$

欲證明此定理,祇需證明當 n 無窮增大時, $\lim R_n=0$.

但設在 $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots$ 中, k 項以後之餘式以 $S_n^{(k)}$ 表之,得 $R_n=R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots+R_n^{(k)}+S_n^{(k)}$.

設 δ 爲任何正數,無論如何之小均不妨.因 $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots(a)$ 之每項其絕對值比 $U'_1+U'_2+\cdots(b)$ 中對應項之絕對

值爲小，(a) 內 k 項以後之餘式其絕對值小於 (b) 之對應餘式。但因 (b) 爲收斂,吾人可選一 k 使其餘式小於 $\delta/2$. 故無論 n 之值爲何,可取 k, 使數值上爲 $S_n^{(k)}<\delta/2$.

但又因每一列級數 $u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+\cdots$, $u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+\cdots$ 爲收斂者,當 n 增加時,則 k 個餘式 $R_n^{(1)}, R_n^{(2)},\cdots R_n^{(k)}$ 數值上終變爲小於 $\delta/2k$ 而永滯於此,故此等餘式之和,即 $R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots+R_n^{(k)}$ 其絕對值終變爲小於 $(\delta/2k)k$, 即 $\delta/2$ 爲止。

故隨 n 之增大，$R_n=R_n^{(1)}+R_n^{(2)}+\cdots+R_n^{(k)}+S_n^{(k)}$ 絕對值上終變爲小於 $\delta/2+\delta/2$, 卽 δ 爲止。

故 $\lim R_n=0$, § 200; 是以

$$U_1+U_2+U_3+\cdots=V_1+V_2+V_3+\cdots,$$

如所欲證者。

級數 $U_1+U_2+\cdots$ 其每項亦自成一無窮級數，名爲二重無窮級數。

例如,取對於大於 $-1/2$ 一切 x 實數值(或 x 之虛數值其實數部份須大於 $-1/2$) 級數爲收斂者

$$x/(1+x)-x^2/(1+x)^2+x^3/(1+x)^3-\cdots \tag{1}$$

可變 (1) 之形式爲 x 之冪級數否?卽可變 (1) 之形爲對於非 0 之任何 x 值能爲收斂之級數否?

當 $|x|<1$ 時, (1) 之各項皆爲冪級數之和,可以二項定理求之, §988. 例如,

$$\left.\begin{aligned}x/(1+x)&=\quad x(1+x)^{-1}=x-x^2+\ x^3-\ x^4+\cdots,\\-x^2/(1+x)^2&=-x^2(1+x)^{-2}=\ \ -x^2+2x^3-3x^4+\cdots,\\x^3/(1+x)^3&=\quad x^3(1+x)^{-3}=\qquad\qquad x^3-3x^4+\cdots,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

以第一級數之各項代以絕對值，得 $|x|+|x^2|+|x^3|+\cdots$, 其和爲 $|x|/(1-|x|)$.

用同法處理其餘諸級數,得級數之和爲 $|x^2|/(1-|x|)^2$, $|x^3|/(1-|x|)^3$, 等等.

故本定理之級數 $U'_1+U'_2+U'_3+\cdots$ 爲

$$|x|/(1-|x|)+|x^2|/(1-|x|)^2+|x^3|/(1-|x|)^3+\cdots,$$

此式當 $|x|<1/2$ 時爲收斂.

故於 $|x|<1/2$ 時,冪級數之用 (2) 中之對應項相加者,卽 $x-2x^2+4x^3-8x^4+\cdots$, 在 $|x|<1/2$ 時爲收斂,且等於原級數 (1); 卽 $|x|<1/2$ 時,得

$$x/(1+x)-x^2/(1+x)^2+x^3/(1+x)^3-\cdots=x-2x^2+4x^3-8x^4+\cdots.$$

977 **交換律對於絕對收斂級數有效.** 今可說明絕對收斂級數之諸項得隨意改排而不變該級數之和.

1. 吾人可改排各項而變成另一單純無窮級數.

因設 $u_1+u_2+\cdots(1)$ 表任一絕對收斂級數,且設 $u'_1+u'_2+\cdots(2)$ 表新排列之同一級數.又使 S_n 表 (1) 內首 n 項之和, S'_m 表 (2) 內首 m 項之和.

先爲 n 取定一值,後選 m 之值使 (1) 之首 n 項包含在 (2) 之首 m 項內,最後取定 p 使 (2) 之首 m 項,包含在 (1) 之首 $n+p$ 項內.

則 S'_m-S_n 之各項全在 $S_{n+p}-S_n$ 內,卽在 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$ 之和內.

故 $$|S'_m-S_n|\leqq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|.$$

但因 (1) 爲絕對收斂級數, $\lim(|u_{n+1}|+\cdots|u_{n+p}|)=0$.

故 $$\lim|S'_m-S_n|=0,\text{ 卽 }\lim S'_m=\lim S_n.$$

2. 可將此級數分成任何 (有限或無限) 個級數,其每一級數各項次序與原級數同.因吾人可應用 §§ 974, 976 中諸定理之一,從此類級數中回復原來之級數.

例如,設取級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 足數爲奇數之各項作一級數,又足數爲偶數之各項作一級數,由 § 974, 得

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots=(u_1+u_3+u_5+\cdots)+(u_2+u_4+u_6+\cdots).$$

或再排列 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 各項如下：

u_1

u_2+n_3

$u_4+u_5+u_6$

$u_7+u_8+u_9+u_{10}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

在此排法內有無限數之列，每列成一無限級數．$u_1+u_2+u_3+\cdots$ 之和等於表中之項按行相加所得之和，§940. 而按行相加所得之和等於按列相加所得之和，§976. 故 $u_1+u_2+u_3+=\cdots(u_1+u_2+u_4+\cdots)+(u_3+u_5+\cdots)+\cdots$. 其他仿此。

3. $$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

各種可能之重行排列法，可由 1 與 2 合併而得。

冪級數之積． 當 $|x|<\lambda$ 時，函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 可用冪 978
級數 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots(1)$ 及 $\phi(x)=b_0+b_1x+\cdots(2)$ 表示之，其乘積 $f(x)\cdot\phi(x)$ 可用一冪級數表示之，當 $|x|<\lambda$ 時，可由 (1) 及 (2) 用普通乘法規則求之(比較 §314).

例如，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \qquad (1)$$

$$\phi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots \qquad (2)$$

$$f(x)\cdot\phi(x)=\begin{array}{l|l|l|l} a_0b_0+a_1b_0 & x+a_2b_0 & x^2+a_3b_0 & x^3+\cdots. \\ \quad\;\; +a_0b_1 & \;\; +a_1b_1 & \;\; +a_2b_1 & \\ & \;\; +a_0b_2 & \;\; +a_1b_2 & \\ & & \;\; +a_0b_3 & \end{array} \qquad (3)$$

因當 $|x|<\lambda$ 而 (1) 及 (2) 爲收斂之時，從 §939, 得

$$f(x)\phi(x)=f(x)b_0+f(x)b_1x+f(x)b_2x^2+\cdots.$$

此爲 §976 所述之一類級數，因若以 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之諸項盡以其絕對值代之，仍爲收斂也．因此可將 $f(x)b_0=a_0b_0+a_1b_0x+\cdots$, $f(x)b_1x=0+a_0b_1x+\cdots$, 等等之對應項相加．結果卽爲級數 (3)。

例． 將 $(1+x+x^2+\cdots)(1+2x+3x^2+\cdots)$ 以冪級數表之。

冪級數之變形． 假使，當 $|y|<\lambda$ 時，冪級數 a_0+a_1y 979
$+a_2y^2+\cdots(1)$ 爲收斂者。

又假使，當 $|b_0|<\lambda$ 時，y 可由冪級數 $y=b_0+b_1x+\cdots$ (2) 而以 x 表之。

將 (2) 屢次自乘，即得表 $y, y^2, y^3, \cdots$ 之諸式，而其形式爲以 x 表之冪級數，當 (2) 收斂時亦爲收斂者。設將此諸式代入 (1) 之諸項 $a_1y,\ a_2y^2, \cdots$ 中，得級數 $a_0+a_1(b_0+b_1x+\cdots)+a_2(b_0^2+2b_0b_1x+\cdots)+\cdots$(3)，此級數在合 x 之同次冪之項收集後，即變爲 $(a_0+a_1b_0+\cdots)+(a_1b_1+2a_2b_0b_1+\cdots)x+\cdots$(4) 形式之 x 之冪級數。

此最後之級數對於使 $|b_0|+|b_1x|+\cdots<\lambda$ 之一切 x 值能收斂，與 (1) 有相同之和。因在此情形時 § 976 爲二重無窮級數 (3) 所適合，級數 $U_1'+U_2'+\cdots$ 爲 $|a_0|+|a_1|(|b_0|+|b_1x|+\cdots)+\cdots$，依據假設當 $|b_0|+|b_1x|+\cdots<\lambda$ 時，此級數爲收斂。

980　**冪級數之商.**　分子分母皆爲冪級數之分式，如

$$(a_0+a_1x+\cdots)/(b_0+b_1x+\cdots),$$

此間 $b_0 \neq 0$，可變形爲一冪級數，而此冪級數，對於使 $a_0+a_1x+\cdots$ 收斂及 $|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$ 之一切 x 值能爲收斂者。

因使　　$$y=b_1x+b_2x^2+\cdots. \qquad (1)$$

則　　$$\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}=\frac{1}{b_0+y}=\frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{1+y/b_0}$$

$$=\frac{1}{b_0}\left(1-\frac{y}{b_0}+\frac{y^2}{b_0^2}-\cdots\right), \qquad (2)$$

因依據假定及 § 232，$|y| \leqq |b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$.

用 (1) 之值代入 (2) 又應用 § 979. 因此可將 (2) 變形爲一 x 之冪級數當

$$|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$$

時爲收斂。以 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 乘冪級數，§ 978.

其結果爲一 x 之冪級數，乃對於使 $a_0+a_1x+\cdots$ 收斂及 $|b_1x|+|b_2x^2|+\cdots<|b_0|$ 之一切 x 值能爲收斂而等於此所給之分式。

用消去首項法，§ 406，或用未定係數法，§ 408，商級數得求至無論若干項。

例． 展開 $(1+2x+2^2x^2+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)$ 至四項。

用分離係數，得

$$\begin{array}{r|l}
1+2+4+8+\cdots & \underline{1+1+1+1+\cdots} \\
\underline{1+1+1+1+\cdots} & 1+1+2+4+\cdots \\
1+3+7+\cdots & \\
\underline{1+1+1+\cdots} & \\
2+6+\cdots & \\
\underline{2+2+\cdots} & \\
4+\cdots &
\end{array}$$

故商級數為

$$1+x+2x^2+4x^3+\cdots,$$

當 $|x|<1/2$ 時，級數收斂。

設分子分母非無窮級數而為 x 之多項式，而分式為 $(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)/(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$ 之形式，此商級數對於 x 之一切值其絕對值小於 $b_0+b_1x+\cdots b_nx^n=0$ 之最小根之絕對值時為收斂者．從下列第一例卽可顯然得之．第二例說明當 $b_0=0$ 時，商級數之形式，第三例說明以 $1/x$ 冪級數表分式之法。 931

例 1． 求 $(3x+8)/(x^2+5x+6)$ 展開後之級數，其收斂之極限，以分項分式法，§ 537 得

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}=\frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}.$$

但當 $|x|<2$ 時， $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{1}{1+x/2}=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-1}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^2}-\cdots.$

又 $|x|<3$ 時， $\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+x/3}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{3^2}+\dfrac{x^2}{3^3}-\cdots.$

故 $|x|<2$ 時， $\dfrac{3x+8}{x^2+5x+6}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{11x}{18}+\dfrac{31x^2}{108}-\cdots.$

例 2. 展開 $(1-x)/(x^2+4x^3)$ 爲 x 之升冪式.

得 $$\frac{1-x}{x^2+4x^3}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1-x}{1+4x}=\frac{1}{x^2}(1-5x+20x^2-80x^3+\cdots)$$
$$=x^{-2}-5x^{-1}+20-80x+\cdots.$$

例 3. 展開 $(2x^2+x-3)/(x^3+2x+4)$ 爲 $1/x$ 之冪式.

$$\frac{2x^2+x-3}{x^3+2x+4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2+1/x-3/x^2}{1+2/x+4/x^3}=\frac{1}{x}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\cdots\right)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\cdots.$$

982 **反級數.** 從 y 以 x 表出之方程式 $y=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 可以化出 x 以 y 表出之另一方程式 $x=b_1y+b_2y^2+\cdots$. 此手續謂之原級數 $a_1x+a_2x^2+\cdots$ 之反級數. 應注意此級數常少去常數項 a_0, 而又須 $a_1\neq 0$. 吾人可證明若 $a_1x+a_2x^2+\cdots$ 有一收斂之極限大於 0, 反級數 $b_1y+b_2y^2+\cdots$ 亦屬眞也.

例. 求 $y=x+2x^2+3x^3+\cdots$ 之反級數.

假定 $$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots. \tag{1}$$

從原方程式用 § 978, 求 $y^2, y^3,\cdots$ 而代其結果於 (1), 得

$$x=b_1x+\left.\begin{matrix}2b_1\\+\ b_2\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}3b_1\\+4b_2\\+\ b_3\end{matrix}\right|x^3+\cdots. \tag{2}$$

將係數立成方程式, $1=b_1$, $0=2b_1+b_2$, $0=3b_1+4b_2+b_3,\cdots$ 而 $b_1=1$, $b_2=-2$, $b_3=5,\cdots$.

故 $$x=y-2y^2+5y^3+\cdots. \tag{3}$$

由同法, 從方程式 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$, 或 $y-a_0=a_1x+a_2x^2+\cdots$ 可化出他式 $x=b_1(y-a_0)+b_2(y-a_0)^2+\cdots$. 又從方程式 $y=a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 可化出其他二式 $x=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2y+b_3y^{\frac{3}{2}}+\cdots$.

983 **代數函數之展開式.** 一代數方程式呈 $f(x,y)=0$ 之形式, 而缺常數項者, 適合於 $x=0$, $y=0$. 故若假定 $f(x,y)=0$,

用 x 以表示 y 之解答，則其一解或多解必爲含 x 之式，且 x 爲 0 時亦爲 0 者。此諸式可證其能以升冪級數展開之而其收斂之極限大於 0. 通常此諸級數得用下列各例所舉之方法求至任何項。

例 1. 方程式 $y^2+y-2x=0$ 少去一常數項. 試求對於 $x=0$ 時 y 亦爲 0 時之展開式.

當 $x=0$, 方程式

$$y^2+y-2x=0 \tag{1}$$

變爲 $y^2+y=0$. 因此方程式中有一根爲 0；且祇有一根爲 0；故 (1) 之解答對於 x 爲 0 時 y 亦爲 0 者有一解，且祇限於一解.

設此解答展開爲 x 升冪式之級數，其首項爲 ax^μ，因而

$$y=ax^\mu+\cdots. \tag{2}$$

以 (2) 代入 (1) 中，即得

$$a^2x^{2\mu}+\cdots+ax^\mu+\cdots-2x=0. \tag{3}$$

因據假定 (3) 爲恆等式，同次各項之係數之和須爲 0. 故至少有二項爲最低次項，又因 μ 爲正數，此二項須爲 ax^μ 及 $-2x$. 故 $\mu=1$ 且 $a-2=0$，即 $a=2$.

故假定

$$y=2x+bx^2+cx^3+\cdots. \tag{2'}$$

以 (2′) 代入 (1) 中，即得 $(4+b)x^2+(4b+c)x^3+\cdots=0$.

故 $4+b=0$, $4b+c=0$, $\cdots$ 而 $b=-4$, $c=16\cdots$.

故所求之解爲 $y=2x-4x^2+16x^3+\cdots$.

例 2. 求以 x 表示 y 之値，有適合於方程式 $y^3-xy+x^2=0$ 且 $x=0$ 時 y 亦爲 0 者，試求其展開式.

當 $x=0$, 方程式

$$y^3-xy+x^2=0 \tag{1}$$

變爲 $y^3=0$, 其三根皆爲 0. 故預期所求之此種展開式有三.

使 ax^μ 指示此等展開式之一之首項，因而

$$y=ax^\mu+\cdots. \tag{2}$$

以 (2) 代入 (1) 中，得

$$a^3x^{3\mu}+\cdots-ax^{\mu+1}+\cdots+x^2=0. \tag{3}$$

從例 1 之理由，3μ，$\mu+1$ 及 2 三指數中至少有二指數相等，且須小於 (3) 中 x 之其他任何指數.

使 $3\mu=\mu+1$，得 $\mu=1/2$. 因 $\mu=1/2$ 時，3μ 及 $\mu+1$ 皆小於 2，故可適用.

使 $\mu+1=2$，得 $\mu=1$. 因 $\mu=1$ 時，$\mu+1$ 及 2 皆小於 3μ，故亦可適用.

使 $3\mu=2$，得 $\mu=2/3$. 因 $\mu=2/3$ 時，3μ 及 2 皆大於 $\mu+1$，故不適用.

故 μ 須取 1 與 1/2 二者之一以爲值.

當 $\mu=1$ 時，(3) 變爲 $a^3x^3+\cdots-ax^2+\cdots+x^2=0$，故可知 $-a+1=0$，即 $a=1$.

當 $\mu=1/2$ 時，(3) 變爲 $a^3x^{\frac{3}{2}}+\cdots-ax^{\frac{3}{2}}+\cdots+x^2=0$，從此可知 $a^3-a=0$，因 $a\neq 0$，而 $a=\pm 1$.

故可假定其解答之形式爲 $y=x+bx^2+cx^3+\cdots$，$y=x^{\frac{1}{2}}+bx+cx^{\frac{3}{2}}+\cdots$，$y=-x^{\frac{1}{2}}+bx+cx^2+\cdots$.

且代此 y 式於 (1) 內，及定其係數如例 1，得

$$y=x+x^2+3x^3+\cdots,\quad y=x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}+\cdots,\quad y=-x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}+\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}+\cdots.$$

在此法內假定設所求之展開式其項爲 $ax^{\frac{p}{q}}$，此展開式將爲 $x^{\frac{1}{q}}$ 之羃次.例外情形時則不眞確而此方法亦失敗.惟下法爲普遍適用者.既如前例求出展開式之首項 ax^{μ} 以 $y=x^{\mu}(a+v)$ 代入原方程內，使變成含 v 及 x 之方程式.從此方程式求出以 x 爲羃 v 之展開式首項，餘仿此.*

例如，在例 2 中，使 $y=x^{\frac{1}{2}}(1+v)$ 代入

$$y^3-xy+x^2=0 \tag{1}$$

中而化簡後，得

$$v^3+3v^2+2v+x^{\frac{1}{2}}=0; \tag{2}$$

其中 $v=-x^{\frac{1}{2}}/2+\cdots$，故 $y=x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}}/2+\cdots)=x^{\frac{1}{2}}-x/2+\cdots$.

欲求其次項，以 $v=x^{\frac{1}{2}}(-1/2+v')$ 代入 (2) 中，餘仿此.

---

* 本節諸法之較詳討論，及其與牛頓氏平行四邊形之聯合應用，可參考 Chrystal's *Algebra*, II, pp. 349—371；又 Frost's *Curve Tracing* 與 Johnson's *Curve Tracing*.

戴勒氏定理. 當 $|x|<\lambda$ 時，若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 984
$+\cdots$，將 $x+h$ 代 x，得

$$f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots.$$

由 § 976 可知 $|x|+|h|<\lambda$ 時，可變此級數之形式爲 h 之冪級數，以應用二項定理展開 $(a+h)^2$, $(a+h)^3$,…然後合併 h 同次數之各項。用 § 848 可以說明其結果爲

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\cdot\frac{h^n}{n!}+\cdots,$$

其中 $f'(x)$, $f''(x)$,…爲若干級數之和，此諸級數乃以原級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 各項之第一，第二，…諸導來函數爲項者，即

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots,\ \text{等等}.$$

若在前述恆等式中，以 a 代 x 而以 $x-a$ 代 h，其中 $|a|$ 985
$+|x-a|<\lambda$，得 $f(x)$ 之展開式以 $x-a$ 冪表之，即

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots.$$

由此最後展開式及 § 971，可知若在 $|x|<\lambda$ 時，$f(x)=a_0$ 986
$+a_1x+\cdots$，又若 $|a|<\lambda$ 時，則

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

習 題 LXXXIX

1. 證明 $(1+x+x^2+\cdots)^2=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$.
2. 證明 $(1+x+x^2+\cdots)^3=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$.
3. 證明 $(1+x^2+x^4+\cdots)/(1+x+x^2+\cdots)=1-x+x^2-\cdots$.
4. 假定 $(1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots$，以原方程自乘且應用 § 973，求 a_1, a_2, a_3, a_4.

5. 用上法求下列展開式之首四項：

(1) $(8-3x)^{\frac{1}{3}}$.　　(2) $(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

6. 以 §980 例中之法，展開下列各分式爲 x 升冪序至第四項：

(1) $\dfrac{2+x-3x^2+5x^3}{1+2x+3x^2}$.　　(2) $\dfrac{x+5x^2-x^3}{1-x+x^2-x^3}$.

7. 以未定係數法，展開下列各分式爲 x 升冪序至第四項：

(1) $\dfrac{3x^2+x^3}{1+x+x^2}$.　　(2) $\dfrac{x+5x^4}{x^3+2x^4+3x^5}$.

8. 以 §981 例一之法，展開下列各分式至第五項又求其收歛之極限：

(1) $\dfrac{9x-22}{(x^2-4)(x-3)}$.　　(2) $\dfrac{5x+6}{(2x+3)(x+1)^2}$.

9. 展開下列各分式爲 x 之降冪序至第四項．x 須爲何值，則第一展開式始爲收歛？

(1) $\dfrac{2x+3}{2x^2+x-15}$.　　(2) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

10. 反轉下列各級數至第四項：

(1) $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots$.　　(2) $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$.

11. 從 $y=1+x+x^2/2+x^3/3+\cdots$ 化出以 $y-1$ 爲冪表 x 之級數之爲首四項.

12. 從 $y=x^2+3x^3$ 化出以 $y^{\frac{1}{2}}$ 爲冪表 x 之級數之爲首四項.

13. 以 §983 之法求適合於下列方程式之 y 之值而以 x 表之，且 $x=0$ 時爲 0 者，其展開式之爲首三項：

(1) $x^2+y^2-y-3x=0$.　　(2) $x^3+y^3-xy=0$.

14. 以 §976 之定理證明

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\cdots.$$

XXXIV 二項級數,指數級數及對數級數

二項級數. m 爲正整數時, 987

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots, \tag{1}$$

爲有限級數,卽有盡級數,其和爲 $(1+x)^m$.

m 非正整數時, (1) 爲無窮級數,但此級數在 $|x|<1$ 時收斂,卽此級數有一和, § 968. 今將說明若 m 爲任何有理値,其和爲 $(1+x)^m$.

級數 (1) 爲 x 及 m 二者之函數,但今因側重 (1) 與 m 之關係,故將以 $\phi(m)$ 以代表之.

爲便利起見,使 m_r 表 x^r 在 (1) 中之係數,於是 $m_r=m(m-1)\cdots(m-r+1)/r!$

則若 m 及 n 爲任何二數,得

$$\phi(m)=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots, \tag{2}$$

$$\phi(n)=1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots, \tag{3}$$

$$\phi(m+n)=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+\cdots. \tag{4}$$

此可證明 $\phi(m)\cdot\phi(n)=\phi(m+n)$.

因當 $|x|<1$, 而 (2) 及 (3) 收斂,得

$$\phi(m)\cdot\phi(n)=1+\left.\begin{matrix}m_1\\+n_1\\ \\ \\ \end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}m_2\\+m_1n_1\\+n_2\\ \\ \end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}m_3\\+m_2n_1\\+m_1n_2\\+n_3\end{matrix}\right|x_3+\cdots. \tag{5}$$

但在 §§ 773, 774 已證明

$$m_1+n_1=(m+n)_1,\quad m_2+m_1n_1+n_2=(m+n)_2,\cdots,$$
$$m_r+m_{r-1}n_1+\cdots+m_1n_{r-1}+n_r=(m+n)_r.$$

故 $\phi(m)\cdot\phi(n)$

$$=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots$$
$$=\phi(m+n). \tag{6}$$

屢次應用 (6), 得

$$\phi(m)\cdot\phi(n)\cdot\phi(p)=\phi(m+n)\cdot\phi(p)=\phi(m+n+p),$$

等等，對於 $\phi(m)$, $\phi(n)$, $\phi(p)$, $\phi(q)$, …有限數之因式皆可應用.

今將證明對於指數 m 為任何有理值之二項定理，卽：

988 定理. 設 m 為任何有理數，此級數

$$\phi(m)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots,$$

當 $|x|<1$, 其和為 $(1+x)^m$.

第一當注意於 $m=0$ 時，此級數化為 1, 又當 $m=1$ 時，其級數化為 $1+x$.

故 $$\phi(0)=1 \text{ 及 } \phi(1)=1+x. \quad (1)$$

1. 設 m 為正整數.

則
$$\begin{aligned}\phi(m)&=\phi(1+1+\cdots\text{加至 } m \text{ 項})\\&=\phi(1)\cdot\phi(1)\cdots\text{至 } m \text{ 因式}\\&=[\phi(1)]^m=(1+x)^m,\ \text{由 (1)},\end{aligned} \quad (2)$$

此為證明正整指數之定理.

2. 設 m 為任何有理正分式 p/q.

則
$$\begin{aligned}[\phi(p/q)]^q&=\phi(p/q)\cdot\phi(p/q)\cdots\text{至 } q \text{ 因式}\\&=\phi(p/q+p/q+\cdots\text{至 } q \text{ 項})\\&=\phi(p)=(1+x)^p,\ \text{由 (2)}.\end{aligned}$$

故 $$\phi(p/q)=(1+x)^{\frac{p}{q}}. \quad (3)$$

因由方程 $[\phi(p/q)]^q=(1+x)^p$ 及 § 986, 可知對於 $|x|<1$ 所有之 x 值, $\phi(p/q)$ 之所有值必為 $(1+x)^p$ 之相同之 q 次根之一對應值.

又此根必爲主要 q 次根，即 $(1+x)^{\frac{p}{q}}$；因於 $x=0$ 時此爲 $(1+x)^p$ 之唯一 q 次根與 $\phi(p/q)$ 同値者。

3. 設 m 爲任何有理負數 $-s$.

因 $$\phi(-s)\cdot\phi(s)=\phi(-s+s)=\phi(0)=1, \qquad \text{由 (1)}$$

得 $$\phi(-s)=1/\phi(s)=1/(1+x)^s \qquad \text{由 (3)}$$
$$=(1+x)^{-s}, \tag{4}$$

此證明任何有理指數定理者也。

以上定理不難擴至無理指數値。

例. 展開 $(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}$ 爲 x 之升冪序.

得 $$(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}=[1+(2x+3x^2)]^{\frac{1}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{3}(2x+3x^2)+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{}(2x+3x^2)^2$$
$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{2\cdot 3}(2x+3x^2)^3+\cdots$$
$$=1+\frac{2x}{3}+\frac{5x^2}{9}-\frac{68x^3}{81}\cdots.$$

此展開式當 $2|x|+3|x^2|<1$ 時收斂；

故當 $9|x^2|+6|x|+1<4$ 時；

故當 $3|x|+1<2$ 時；

故當 $|x|<1/3$ 時皆然.

系. 設 m 爲有理數及 $|x|<|a|$, 得 989

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}x^2+\cdots.$$

因 $$(a+x)^m=a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$$
$$=a^m\left[1+m\frac{x}{a}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\cdots\right] \tag{1}$$
$$=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}x^2+\cdots, \tag{2}$$

其中設 $|x/a|<1$, 或 $|x|<|a|$, 則 (1) 與 (2) 皆爲收斂。

990 **指數級數**· 吾人已示級數

$$1+x/1+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots \qquad (1)$$

對於一切 x 之有限值皆收斂者，§ 968.

當 $x=1$ 時，使 e 表其和，則

$$e=1+1+1/2!+1/3!+\cdots=2.71828\cdots.$$

今欲證明者 (1) 對於任何 x 之實值之和爲 e^x.

因使 $f(x)$ 表 (1) 之和，則

$$f(x)=1+x/1+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots,$$

$$f(y)=1+y/1+y^2/2!+y^3/3!+\cdots+y^n/n!+\cdots.$$

則由無窮級數相乘之規則，§ 978,

$$f(x)\cdot f(y)=1+(x+y)+\left(\frac{x^2}{2!}+xy+\frac{y^2}{2!}\right)$$

$$+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots$$

$$=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots$$

$$=f(x+y).$$

由此結果，又得

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=f(x+y)\cdot f(z)=f(x+y+z), \text{ 等等.}$$

故注意 $f(0)=1$ 及 $f(1)=e$ 可如在 § 988 內，依次證明之:

1. 當 x 爲一正整數 m 時，

$$f(m)=[f(1)]^m=e^m$$

2. 當 x 爲正分式 p/q 時，

$$f(p/q)=\sqrt[q]{[f(1)]^p}=\sqrt[q]{e^p}=e^{\frac{p}{q}}.$$

3. 當 x 爲有理負數 $-s$ 時，

$$f(-s)=1/f(s)=1/e^s=e^{-s}.$$

故當 x 爲有理數時，則得 $f(x)=e^x$，即

$$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots. \qquad (2)$$

又對於指數 x 之無理值(2)仍爲眞確.因若 b 表任何之無理數，使 x 經一列之有理值以漸近於 b 爲極限，則對於 x 之諸有理值，得 $f(x)=e^x$，故 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\lim\limits_{x\to b} e^x$.

但 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=f(b)$, § 986, 且 $\lim\limits_{x\to b} e^x=e^b$, § 728. 故 $f(b)=e^b$，即 $1+b+b^2/2!+\cdots=e^b$.

當 x 爲虛數時，(2) 之右邊仍爲收斂級數，即仍有一和.故對於指數 x 之虛數值可用 (2) 以確定 e^x. 例如，依定義，

$$e^i=1+i+i^2/2!+i^3/3!+\cdots+i^n/n!+\cdots.$$

對於 a^x 之級數. 使 a 表任一正數，而 x 爲任何實數. **991**

因 $a=e^{\log_e a}$, § 732, 得 $a^x=e^{x\log_e a}$, § 730.

故以 $x\log_e a$ 代 x 在此級數中，§ 990, (2)，得

$$a^x=1+x\log_e a+x^2(\log_e a)^2/2!+\cdots+x^n(\log_e a)^n/n!+\cdots.$$

此級數對於一切 x 之有限值爲收斂，如在 § 968, 1 中所證明者.

對數級數. 設於以上所得對於 a^x 之級數中以 $1+x$ 代 a，以 y 代 x，得 **992**

$$(1+x)^y=1+\log_e(1+x)\cdot y+[\log_e(1+x)]^2 y^2/2!+\cdots. \qquad (1)$$

但從二項定理，§ 988，當 $|x|<1$ 時，

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots. \qquad (2)$$

實行所示之乘法並集合各項後，(2)即變形爲 y 之冪級數.

y 之係數在此級數中將爲

$$x+\frac{(-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{(-1)(-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots，或\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

以此等於 (1) 中 y 之係數.若 $|x|<1$, 卽得

$$\log_e(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots. \tag{3}$$

此級數謂之對數級數.在 § 968 已證明若 $|x|<1$, 則爲收斂.

上述證明中假定級數 (2) 變形爲 y 之冪級數後,仍與 $(1+x)^y$ 相等者.然 $|x|<1$ 時,則可由 § 976 得此結果.因若 x' 及 y' 分別爲 $|x|$ 及 $|y|$, § 976 之級數 $U_1'+U_2'+\cdots$, 對應於 (2) 者爲

$$1+y'x'+\frac{y'(y'+1)}{1\cdot 2}x'^2+\frac{y'(y'+1)(y'+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x'^3+\cdots,$$

當 $x'<1$, 則其和爲 $(1-x')^{-y'}$ 而級數爲收斂者, § 988.

因巳證明二項定理僅爲有理指數時爲眞,其應注意者,當 y 限值爲有理數值時,由 (1) 及 (2) 可得 (3) (參考 § 972 附註).

例. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e.$

得

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots\right)=1-\frac{1}{2n}+\cdots.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_e\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e^1=e.$

因 $\lim u=\lim e^{\log_e u}=e^{\lim(\log_e u)}$, §§ 726—729, 731.

993 **自然對數之計算法.** 數之對數以 e 爲底者,稱爲數之自然對數.自然對數表可如下法求得之:

已知 $\log_e(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots,$ (1)

又因 $\log_e(1-x)=-x-x^2/2-x^3/3-x^4/4-\cdots.$ (2)

從 (1) 減 (2). 因

$$\log_e(1+x)-\log_e(1-x)=\log_e\frac{1+x}{1-x},$$

得

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right). \tag{3}$$

在 (3) 中使 $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{n+1}{n}$ 又因 $x=\dfrac{1}{2n+1}$.

得

$$\log_e\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right),$$

即 $\log_e(n+1)$

$$=\log_e n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right). \qquad (4)$$

使 $n=1$ 代入 (4),

$$\log_e 2=2(1/3+1/3^4+1/5\cdot3^5+\cdots)=0.6931\cdots.$$

使 $n=2$ 代入 (4),

$$\log_e 3=\log_e 2+2(1/5+1/3\cdot5^3+\cdots)=1.0986\cdots,$$

對於 n 之其他任何整數值亦準此.

模數. 從 §755, $\log_a n=\log_e n/\log_e a$. 故數之以任何數 a 994
爲底者之對數,可以 $1/\log_e a$ 乘自然對數以得之.吾人稱 $1/\log_e a$ 或其相當數, $\log_a e$, §756 爲以 a 爲底之對數系之模數.質言之,常用對數之模數爲 $\log_e 10=0.43429\cdots$.

習 題 XC

1. 計算 $\log_e 4$ 及 $\log_e 5$ 各至第四位小數.
2. 證明 $e^{-1}=2/3!+4/5!+6/7!+\cdots$.
3. 用乘法證明

$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=1.$$

4. 證明 $(e^{ix}+e^{-ix})/2=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots$.
5. 證明 $(e^{ix}-e^{-ix})/2i=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\cdots$.
6. 用二項定理展開 $(1-x)^{-n}$ 證明其第 $(r+1)$ 項爲 $\dfrac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r$.
7. 求 $(8+x)^{\frac{2}{3}}$ 展開式中所含 x^4 之項.
8. 求 $(1-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ 展開式中所含 x^3 之項.

9. x 須爲若何之值,則 $(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}$ 及 $(12+x+x^2)^{\frac{2}{3}}$ 按 x 之升冪展開式爲收斂?

10. 展開 $(1-x+2x^2)^{\frac{3}{4}}$ 以 x 爲冪至含 x^4 之項止.

11. $(8+3x)^{\frac{2}{3}}(9-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 以 x 爲冪之展開式中,求其爲首三項. x 須有若何之值,此展開式爲收斂?

12 求下列各式之極限值:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{3x}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$.

13. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{nx}=e^x$.

14. 證明 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

15. 以 x 爲冪展開 $\log_e(1+x+x^2)$ 至含 x^4 之項爲止. x 須爲何值,此展開式爲收斂?

16 證明 $\log_e\dfrac{m}{n}=\dfrac{m-n}{n}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-n}{n}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{m-n}{n}\right)^3-\cdots$.

17. 證明 $\log_e\dfrac{n^2}{n^2-1}=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{2n^4}+\dfrac{1}{3n^6}+\cdots$.

18. 證明

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots.$$

XXXV 循環級數

995 **循環級數.** 級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 中,每 $r+1$ 個連續係數,得以

$$a_n+p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+\cdots+p_ra_{n-r}=0,$$

形式之恆等式結合之,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 對於 n 之一切值爲常數者,稱爲 r 次之循環級數,而其恆等式謂其關係式.

例如,在 $$1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n+1)x^n+\cdots, \tag{1}$$

每三個連續係數用公式相連

$$a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0; \tag{2}$$

因 $5-2\cdot 3+1=0,\quad 7-2\cdot 5+3=0,\quad 2n+1-2(2n-1)+2n-3=0.$

故 (1) 爲一二次循環級數，其關係式爲 (2).

一等比級數爲一次循環級數。

凡冪級數爲眞分式之展開式者，若此眞分式之分母爲 r 次式，則此冪級數卽 996
爲 r 次循環級數.

例如，若 $\dfrac{2+x}{1+2x+3x^2}=a_0+\quad a_1x+\quad a_2x^2+\cdots+\qquad a_nx^n+\cdots,$ (1)

得
$$\begin{array}{rl|l|l|l}
2+x=a_0+ & a_1 & x+\ a_2 & x^2+\cdots+\ a_n & x^n+\cdots. \\
 & +2a_0 & +2a_1 & +2a_{n-1} & \\
 & & +3a_0 & +3a_{n-2} &
\end{array}$$

故 $$a_0=2,\quad a_1+2a_0=1,\quad a_2+2a_1+3a_0=0,$$

而普通言之， $$a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0. \tag{2}$$

故 (1) 爲一二次循環級數，其關係式爲 (2).

設已知一冪級數之首若干項，則可以求其適合之關係式.用此關係式，此級 997
數可繼續至任何項，如一循環級數。

例。 已知 $1+4x+7x^2+10x^3+13x^4+\cdots$. 求適合於此諸項之關係式，而更求其次二項.

因 $1+4x+7x^2+\cdots$ 非爲等比級數，先試驗二次關係式，
$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0.$$

設各項欲適合於此關係式，必須
$$7+4p+q=0,\quad 10+7p+4q=0,\quad 13+10p+7q=0.$$

解第一第二兩方程，$p=-2,\ q=1$.

又此諸值適合於第三方程，因 $13-10\cdot2+7=0$.

故此關係式爲 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$.

因此可得係數 $a_5,\ a_6$ 如下：
$$a_5-2\cdot13+10=0,\quad\therefore\quad a_5=16;\quad a_6-2\cdot16+13=0,\quad\therefore\quad a_6=19.$$

設原有項爲 $1+4x+7x^2+10x^3+14x^4$，不能適合於關係式 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$. 然此時可暫定一第六項 ax^5，解 $p,\ q,\ r$.
$$10+7p+4q+r=0,\quad 14+10p+7q+4r=0,\quad a+14p+10q+7r=0.$$
以求得此六項所適合之三次關係式 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$.

從此例中通常可知，當 $2r$ 項爲已知時，此級數續成 r 次循環級數其法有一，而在已知 $2r+1$ 項時，則將級數續成 $(r+1)$ 次循環級數之法爲無限個.

998 **循環冪級數之母函數.** 一切 r 次循環冪之級數，爲一以 r 次式爲分母之眞分式之展開式（比較 § 996）. 此分式稱爲級數之母函數. 此常爲級數收斂時之和.

例如，使
$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$
爲一二次循環級數，其關係式爲
$$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0. \tag{2}$$
使
$$\begin{aligned}
S_n &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\\
\therefore\ pxS_n &= pa_0x+pa_1x^2+\cdots+pa_{n-2}x^{n-1}+pa_{n-1}x^n\\
\therefore\ qx^2S_n &= qa_0x^2+\cdots+qa_{n-3}x^{n-1}+qa_{n-2}x^n+qa_{n-1}x^{n+1}
\end{aligned}$$
$$\therefore (1+px+qx^2)S_n=a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}$$
右邊其餘各項因 (2) 消去.

當 (1) 爲收斂，因 n 增大 S_n 將漸近於 (1) 之和之極限 S，又 x^n 將漸近於 0.

故
$$(1+px+qx^2)S=a_0+(a_1+pa_0)x,$$
即
$$S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}. \tag{3}$$

999 **循環級數之普通項.** 如下例所示，當母函數爲已知時可求出之.

例. 循環級數其關係式爲 $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}=0$ 又第一二兩項爲 $5+4x$. 求其母函數及其普通項.

此間
$$p=-1,\ q=-2,\ a_0=5,\ a_1=4.$$
故從 § 998, (3)，
$$S=\frac{5-x}{1-x-2x^2}=\frac{5-x}{(1+x)(1-2x)}. \tag{1}$$

將 (1) 解爲部份分式，§ 537,

$$\frac{5-x}{(1+x)(1-2x)}=\frac{2}{1+x}+\frac{3}{1-2x}=2(1+x)^{-1}+3(1-2x)^{-1}.$$

但設 $|x|<1$, $\quad 2(1+x)^{-1}=2[1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots]$.

又設 $|x|<1/2$, $3(1-2x)^{-1}=3[1+2x+4x^2+\cdots+2^n x^n+\cdots]$.

故普通項爲 $[(-1)^n 2+3\cdot 2^n]x^n$.

習　題　XCI

1. 設三次循環級數之首三項爲$2-3x+5x^2$,而關係式爲$a_n+2a_{n-1}-a_{n-2}+3a_{n-3}=0$, 求其第四項與第五項。

2. 求下列各級數之關係式並續增二項：

(1) $1+3x+2x^2-x^3-3x^4+\cdots$.

(2) $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\cdots$.

(3) $1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-21x^5+\cdots$.

3. 求下列之母函數及其普通項：

(1) $2+x+5x^2+7x^3+17x^4+\cdots$.

(2) $3+7x+17x^2+43x^3+113x^4+\cdots$.

4. 證明三次循環級數 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 若其關係式爲 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}=0$, 其母函數爲 $\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}$.

5. 引用前公式求

$$1+2x+11x^2+24x^3+85x^4+238x^5+\cdots$$

之母函數及普通項。

6. 證明 $a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots$ 爲一二次循環級數，并求其母函數。

7. 證明 $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$ 爲一三次循環級數，其母函數爲 $(1+x)/(1-x)^3$.

8. 證明 $1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+4\cdot5x^3+\cdots$ 爲一三次循環級數，又當其收斂時求其和。

XXXVI. 無窮連乘積

1000 **無窮連乘積.** 此名稱乃用以表下式

$$\Pi(1+a_r)=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_r)\cdots,$$

其中因式之數假定爲無窮個.

此乘積視 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 當 n 無限增加時,是否漸近於一有限之極限,而定其爲收斂抑發散.

1001 **定理.** 設諸數 a_r 皆爲正,則無窮連乘積 $\Pi(1+a_r)$ 爲收斂抑發散,須視無窮級數 Σa_r 爲收斂抑發散而定.

第一,假定 Σa_r 爲收斂者,且其和爲 S.

則因 x 取正値時, $1+x<e^x$, § 990,

得 $$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)<e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdots e^{a_n},$$

即 $$<e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}<e^s.$$

故當 n 增加時, $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 增加但仍小於有限數 e^s. 故必漸近於一極限, § 192, 即 $\Pi(1+a_r)$ 爲收斂.

第二,假定 Σa_r 爲發散者.

在此情形 $\lim(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\infty$.

但 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

故 $\lim(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=\infty$, 即 $\Pi(1+a_r)$ 爲發散.

例如,當 $p>1$, $\Pi(1+1/n^p)$ 爲收斂者,當 $p\leqq1$, 爲發散者.

例 1. 設 Σa_r 爲一發散正級數,其中各項皆小於 1, 求證 $\Pi(1-a_r)=0$.

因 $a_r<1$ 及 $1-a_r^2<1$, 得絕對値上 $1-a_r<1/(1+a_r)$.

故 $$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)<1/(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

但 $$\lim(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=\infty.$$

故 $$\Pi(1-a_r)=\lim(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)=0.$$

例 2. 求證當 $x=1$, 若 $m+1>0$, 則二項定理, §987, 爲收斂,若 $m+1<0$ 則爲發散.

當 $x=1$, 二項定理變成

$$1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots. \qquad (1)$$

在此級數內,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n+1}{n}=-1+\frac{m+1}{n}. \qquad (2)$$

故若 $m+1<0$, 得 $|u_{n+1}+1/u_n|>1$, 而 (1) 發散, §951.

但若 $m+1>0$, 在某項以後此級數爲與 §958 所述者相同,故爲收斂。

因若 r 爲大於 $m+1$ 之第一個整數,則由 (2) 可知 $n>r$ 時, u_{n+1}/u_n 爲負, 且絕對值小於 1. 故 (1) 之各項從 u_r 以後輪流爲正負,且其絕對值常減小。故若 $\lim u_n=0$, 則 (1) 收斂.

然
$$u_{n+1}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}$$
$$=(-1)^n\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right),$$

又從例 1 可知右邊之積隨 n 之增大而漸近於 0 之極限。

習　題　XCII

1. 證明 $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{17}{16}\cdots$ 及 $\frac{5}{4}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{26}{25}$ 爲收斂。

2. x 須爲何正值,則下列無窮乘積爲收斂:

(1) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)=\left(1+\frac{x}{1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^3}{3^2}\right)\cdots.$

(2) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)=\left(1+\frac{x}{1!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x^3}{3!}\right)\cdots.$

(3) $\Pi\left(1+\frac{x^n}{3^n}\right)=\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\left(1+\frac{x^3}{27}\right)\cdots.$

3. 證明 $\lim\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}=\infty$ 或 0 視 $a>b$ 或 $a<b$ 而定。

XXXVII. 連分式

1002　**連分式.** 此名稱乃表下式 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots}}$，即普通書作 $a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e+}\cdots$ 者.

此章所述僅爲簡單連分式.其形式爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$，其中 a_1 爲正整數或 0，而 $a_2, a_3, \cdots$ 皆爲正整數.

$a_1, a_2, \cdots$ 諸數稱爲連分式之第一，第二，…部份商數.

連分式之有盡或無盡視此等部份商數有限或無窮而定.

1003　**有盡分式.** 凡有盡之簡單連分式,顯然皆有一正有理値,因可以化爲簡單分式也.

例如，　$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13}$； $\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=\frac{13}{30}$.

反之，凡有理數皆可化爲有盡之簡單連分式.此可在下例說明之.

例. 化 67/29 爲連分式.

應用求二整數之最大公約數之法於 67 及 29，得

$$
\begin{array}{l}
29)\,67\,(2=a_1\\
\quad\ \ 58\\
\quad\ \ \overline{\ 9)}\,29\,(3=a_2\\
\qquad\quad 27\\
\qquad\quad \overline{\ 2)}\,9\,(4=a_3\\
\qquad\qquad\ 8\\
\qquad\qquad\ \overline{1)}\,2\,(2=a_4\\
\qquad\qquad\quad\ 2\\
\qquad\qquad\quad\ \overline{0}
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\frac{1}{29/9}. \tag{1}$$

$$\therefore\quad \frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}=3+\frac{1}{9/2}. \tag{2}$$

$$\therefore\quad \frac{9}{2}=4+\frac{1}{2}. \tag{3}$$

以 (2) 代入 (1), 其結果再以 (3) 代入, 卽得所求之連分式爲

$$\frac{67}{29}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=2+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2}.$$

因 $29/67=1\div 67/29$, 又得

$$\frac{29}{67}=\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2}.$$

近值. $\frac{a_1}{1}$, $a_1+\frac{1}{a_2}$, $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3}$,…諸分式稱爲 $a_1+\frac{1}{a_2}$ 1004
$+\frac{1}{a_3}+\cdots$ 之第一, 第二, 第三近值.

當 a_1 爲 0, 第一近值寫作 $\frac{0}{1}$.

定理 1. 凡次序爲奇之近值皆較以後各近值爲小, 而次 1005
序爲偶之近值皆較以後各近值爲大.

此可由分母增大, 則分式必減小而推定.

例如,

1. $a_1<a_1+\cdots$.

2. $a_1+\frac{1}{a_2}>a_1+\frac{1}{a_2+\cdots}$, 因 $\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2+\cdots}$.

3. $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}<a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$, 因 $a_2+\frac{1}{a_3}>a_2+\frac{1}{a_3+\cdots}$,

由 2 款, 其他準此.

近值之簡化. 將 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$ 之第一, 第二, 第三近 1006
值化爲簡單分式之形式, 得

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2},\ \frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1},\ \cdots. \tag{1}$$

設 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 表諸近値之分子，又 $q_1, q_2, q_3, \cdots$ 表其分母如前述之化簡，得

$$p_1 = a_1,\ p_2 = a_1a_2 + 1,\ p_3 = a_1a_2a_3 + a_1 + a_3,\ \cdots, \tag{2}$$

$$q_1 = 1,\quad q_2 = a_2,\qquad q_3 = a_2a_3 + 1,\ \cdots. \tag{3}$$

因 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 爲正整數，則從 (2), (3) 當 n 增加時，p_n 及 q_n 繼續增加，設已知分式爲無盡，則二者漸近於 ∞.

由審察 (2) 及 (3)，得

$$p_3 = a_3p_2 + p_1 \quad 及 \quad q_3 = a_3q_2 + q_1. \tag{4}$$

此爲下定理之說明.

1007 **定理 2.** 任何近値之分子及分母，與前二近値之分子分母之關係，爲公式

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2},\quad q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

因假定若上述諸公式適用於第 k 個近値，則

$$p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2},\quad q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}, \tag{1}$$

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_kp_{k-1} + p_{k-2}}{a_kq_{k-1} + q_{k-2}}. \tag{2}$$

第 $(k+1)$ 個近値祇須從第 k 個用 $a_k + 1/a_{k+1}$ 代 a_k 即可求得 § 1004. 故，因 $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$ 不包含 a_k，則從 (2)，

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(a_k + 1/a_{k+1})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + 1/a_{k+1})q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}, \qquad 由 (1)$$

即 $$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1},\quad q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}.$$

吾人前已證明若公式 $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$ 對於任何確定近値適合者，其對於次一近値亦爲眞．但現已證

明對於第三近值亦適合。故對於第四適合，又第五亦然，按此類推對於第三以後各近值均屬適合(比較 § 791)。

例. 計算 $3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5}$ 之近值.

因 $3=3/1$ 及 $3+1/2=7/2$，則得 $p_1=3$, $p_2=7$, $q_1=1$, $q_2=2$.

故　$p_3=3\cdot7+3=24$,　$p_4=4\cdot24+7=103$,　$p_5=5\cdot103+24=539$,

又　$q_3=3\cdot2+1=7$,　$q_4=4\cdot7+2=30$,　$q_5=5\cdot30+7=157$.

故諸近值爲 $\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{24}{7}, \frac{103}{30}, \frac{539}{157}$.

定理 3. 任何二連續近值之分子及分母，其關係爲公式 1008

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

當 $n=2$ 時，此公式爲眞。因由 § 1006，得

$$p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-1)^2.$$

又設當 $n=k$ 時，可證明此公式爲眞，當 $n=k+1$ 時亦能適合。

因　$$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})$$
$$=-(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k). \qquad \S\,1007$$

故設　$$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k,$$

則　$$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(-1)^{k+1}.$$

故，因 $n=2$ 時適合於此公式，$n=2+1$ 卽 3 時亦適合，因而 $n=3+1$ 卽 4，等等，以至任何正整數 n.

系 1. 任何近值 p_n/q_n 爲不能約之分式。 1009

因設 p_n 及 q_n 有一公因式，由此關係 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$，此因式爲 $(-1)^n$ 之除數，乃爲不可能也。

1010 系 2. 對於二近值之差得公式如下：

1. $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$.　　2. $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_np_{n-2}}$.

第一公式爲 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-)^n$ 之關係之直接結果。

第二公式從 §§ 1007, 1008 之事實，即

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$
$$=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=(-1)^{n-1}a_n.$$

§ 1005 之定理可從此等公式化出。

1011 定理 4. 無盡之簡單連分式其第 n 個近值，視 n 之無窮增大而漸近於一有限之極限。

因依 § 1005, 次序爲奇之近值 p_1/q_1, p_3/q_3,⋯成一無窮之遞增數列，其中各項皆小於有限數 p_2/q_2. 故從 § 192, 經此數列，一變數常增大而以 λ 爲極限。

仿此，一變數經次序爲偶之近值數列 p_2/q_2, p_4/q_4,⋯常變小而以 μ 爲極限。

但 $\mu=\lambda$, 因 $\mu-\lambda=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{p_{2m}}{q_{2m}}-\frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}\right]=\lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^{2m}}{q_{2m}q_{2m-1}}=0.$

故一變數之經近值之全數列 p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3,⋯者將以 λ 爲極限。

1012 無盡之簡單連分式之值者即 $\lim_{n\to\infty}(p_n/q_n)$. 故從 § 1003 可知此數常爲無理數。

有盡連分式之值，即其末個近值也，§ 1004.

在下列定理中，§§ 1013, 1014, 應了解連分式有盡時，"近值"之意義作爲除去末一個近值之任何近值解。

系 1. 簡單連分式之值，常在二個連續近值之值間。 **1013**

系 2. 連分式之值，與其第 n 個近值之值差，在數值上小於 $1/q_nq_{n+1}$ 而大於 a_{n+2}/q_nq_{n+2}. **1014**

因設 λ 爲分式之值，爲明確起見，並設 n 爲奇數。

則 $$\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}<\lambda<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.\qquad §§ 1005, 1013$$

故 $$\lambda-\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n},\quad\therefore\quad<\frac{1}{q_nq_{n+1}},\qquad § 1010, 1$$

又 $$\lambda-\frac{p_n}{q_n}>\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}-\frac{p_n}{q_n},\quad\therefore\quad>\frac{a_{n+2}}{q_nq_{n+2}}.\qquad § 1010, 2$$

$1/q_nq_{n+1}<1/q_n^2$, 頗爲顯明，又引用 $q_{n+2}=a_{n+2}q_{n+1}+q_n$, § 1007 之關係，可說明 $a_{n+2}/q_nq_{n+2}\geqq 1/q_n(q_n+q_{n+1})$. 故 λ 與 p_n/q_n 之差小於 $1/q_n^2$ 而大於 $1/q_n(q_n+q_{n+1})$.

系 3. 各近值較其前之近值爲一更接近於連分式之值. **1015**

因從 § 1014, 設 λ 爲連分式之值，λ 與 p_n/q_n 之差在數值上小於 $1/q_nq_{n+1}$, 而 λ 與 p_{n-1}/q_{n-1} 之差在數值上大於 $a_{n+1}/q_{n-1}q_{n+1}$; 又 $1/q_nq_{n+1}<a_{n+1}/q_{n-1}q_{n+1}$, 蓋 $q_{n-1}<a_{n+1}q_n$ 也, § 1006.

系 4. 近值 p_n/q_n 較任何有理分式，其分母不超過 q_n 者更接近於連分式之值. **1016**

因若 a/b 較 p_n/q_n 更接近連分式之值，則 a/b 亦必較 p_{n-1}/q_{n-1} 更接近連分式之值, §1015, 故必在 p_n/q_n 與 p_{n-1}/q_{n-1}

之間，§1013.

為明確起見，假定為 n 偶數。

則 $$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{p_n}{q_n}.$$

故 $$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}>\frac{a}{b}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}};$$

即 $$\frac{1}{q_nq_{n-1}}>\frac{aq_{n-1}-bp_{n-1}}{bq_{n-1}},$$

或 $$b>q_n(aq_{n-1}-bp_{n-1}).$$

但 $aq_{n-1}-bp_{n-1}$ 為正數，蓋 $a/b>p_{n-1}/q_{n-1}$. 故 $b>q_n$；即 a/b 若較 p_n/q_n 為更接近於連分式之值，其分母 b 必大於 q_n.

1017 **循環連分式.** 一無盡之連分式，其中一部份之商或一羣連續部份之商循環不已者，稱為循環連分式. 而此等循環連分式視其開始，即為此等循環部份與否而稱為純粹或混合.

循環連分式之值可由下法求之.

例 1. 求 $\dot{2}+\frac{\dot{1}}{3+}\cdots=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots$ 之值.

此為純粹循環連分式以 $2+\frac{1}{3}$ 為循環週. 故若 x 為其值，得

$$x=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{x},\ \therefore\ x=\frac{7x+2}{3x+1},\ \therefore\ 3x^2-6x-2=0,\ \therefore\ x=\frac{3+\sqrt{15}}{3}.$$

例 2. 求 $4+\frac{1}{5+}\frac{\dot{1}}{2+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$ 之值.

此為混合循環連分式以 $2+\frac{1}{3}$ 為循環週. 故若 x 為循環部份 $\dot{2}+\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$，而 y 為全分式之值，得，從例 1，

$$y=4+\frac{1}{5+}\frac{1}{x}=\frac{21x+4}{5x+1}=\frac{21(3+\sqrt{15})/3+4}{5(3+\sqrt{15})/3+1}=\frac{75+21\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}}.$$

通常,設 x 爲純粹循環連分式之值其週爲 $a_1+\cdots\frac{1}{+a_k}$,從§1007,得

$$x=a_1+\cdots\frac{1}{+a_k}+\frac{1}{x}=\frac{p_kx+p_{k-1}}{q_kx+q_{k-1}},$$

故 $$q_kx^2+(q_{k-1}-p_k)x-p_{k-1}=0.$$

因此二次方程之絕對項 $-p_{k-1}$ 爲負,故此方程有一正根,且僅限於一,而此根爲連分式之值.

又若 y 爲混合循環連分式之值

$$a_1+\cdots\frac{1}{+a_r}+\frac{1}{a_{r+1}}+\cdots\frac{1}{+a_{r+k}}+\cdots,$$

先求出循環部份 x 之值如上,後係得§1007,

$$y=a_1+\cdots\frac{1}{+a_r}+\frac{1}{x}=\frac{p_rx+p_{r-1}}{q_rx+q_{r-1}}.$$

化無理數爲連分式. 凡無理正數,皆爲一定之無盡簡單 1018
連分式之值,此連分式可用下法求至無論若干部份之商.

設 b 指示所究之數,可先求 a_1,即小於 b 之最大整數.於是 $b=a_1+1/b_1$,其中 b_1 爲大於 1 之無理數.其次求 a_2,小於 b_1 之最大整數.則 $b_1=a_2+1/b_2$,其中 b_2 爲大於 1 之無理數.如此繼續,得

$$b=a_1+\frac{1}{b_1}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\cdots=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots.$$

當 b 爲二次不盡根時,如此求出之連分式,可證明其爲循環連分式.

例. 化 $\sqrt{11}$ 爲連分式.

小於 $\sqrt{11}$ 之最大整數爲 3, 而 §603,

$$\sqrt{11}=3+(\sqrt{11}-3)=3+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=3+\frac{1}{(\sqrt{11}+3)/2}. \qquad (1)$$

小於 $(\sqrt{11}+3)/2$ 之最大整數爲 3, 而

$$\frac{\sqrt{11}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{11}-3}{2}=3+\frac{2}{2(\sqrt{11}+3)}=3+\frac{1}{\sqrt{11}+3}. \qquad (2)$$

小於 $\sqrt{11}+3$ 之最大整數爲 6, 而

$$\sqrt{11}+3=6+(\sqrt{11}-3)=6+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=6+\frac{1}{(\sqrt{11}+3)/2}. \qquad (3)$$

(3) 之末個分式與 (1) 之末個分式相同.故從 (3) 以後將以 (2), (3) 無窮重複;即部份商數 3 及 6 循環也.故將 (2) 代入 (1) 中又以 (3) 代入其結果中,準此類推,得 $\sqrt{11}=3+\frac{\dot{1}}{3}+\frac{\dot{1}}{6}+\cdots$.

1019 **一已知無理數欲其成一簡單連分式,僅有一法表示之.此因二無盡之簡單連分式,非其對應部份商數均屬相等,決不能相等也.**

因設 $a+\alpha=c+\gamma$, 其中 a 及 c 爲正整數而 α 及 γ 爲小於 1 之正數,則 $a=c$, 因否則由 $a-c=\gamma-\alpha$, 將有不爲 0 之整數其數值上小於 1 也.

故,設 $a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots=c_1+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots$, 其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, c_1, c_2, c_3, \cdots$ 爲正整數,得 $a_1=c_1$, $\therefore \frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots=\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}+\cdots$, $\therefore a_2+\frac{1}{a_3}+\cdots=c_2+\frac{1}{a_3}+\cdots$, $\therefore a_2=c_2$, 等等.

1020 **設計算等於已知無理數 b 之連分式,直至第 n 個部份商數,則即能求其第 n 個近值 p_n/q_n, 而此有理分式 p_n/q_n, 爲 b 之約值其誤差小於 $1/q_n^2$;§1014. 又 p_n/q_n 較諸其他有理分式,分母不大於 q_n 者,更接近於 b, § 1016.**

例如，$\sqrt{11}=3+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\cdots$ 之爲首四近值爲 $\frac{3}{1}$，$\frac{10}{3}$，$\frac{63}{19}$，$\frac{199}{60}$，而 $\frac{199}{60}$ 以小於 $\frac{1}{60^2}$ 之誤差代表 $\sqrt{11}$.

一次不定方程之解法. 已知方程 $ax+by=c$ 之任何形 1021
式，其中 a, b, c 指示整數，且 a 與 b 無公因式，§ 672. 設將 a/b 化爲連分式，其末個近值將爲 a/b 本身，又若末第二近值爲 p/q，則得 $aq-bp=\pm 1$，§ 1008. 由此結果，吾人常能求得 x 及 y 之一組整數值適合於 $ax+by=c$ 者.其法可以下例說明之.

例. 求 $205x+93y=7$ 之一組整數解.

如 § 1003 之例，得 $$\frac{205}{93}=2+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{8+}\frac{1}{2}.$$

如 § 1007 之例，近值爲 $\frac{2}{1}$，$\frac{9}{4}$，$\frac{11}{5}$，$\frac{97}{44}$，$\frac{205}{93}$.

故 $$205\cdot 44-93\cdot 97=-1,$$

或以 -7 乘之，$$205(-44\cdot 7)+93(97\cdot 7)=7.$$

故 $x=-308$，$y=679$ 爲 $205x+93y=7$ 之一解.

其普通解爲 $$x=-308+93t,\ y=679-205t,\ \S\ 674.$$

仿此，可說明 $205x-93y=7$ 有 $x=-308$，$y=-679$ 之解答.

習　　題　　XCIII

計算下列連分式之近值：

1. $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.　　**2** $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{12}$.

化下列各數爲連分式.對於末後三數各計算其第四個近值，并估計以此爲分式之值時之誤差：

3. $\frac{10}{12}$.　　**4** $\frac{457}{56}$.　　**5.** $\frac{142}{513}$.　　**6.** 3.54.

7. 0.1457.　　**8.** $\frac{233}{177}$.　　**9.** $\frac{421}{972}$.　　**10.** $\frac{23456}{31827}$.

化下列各數爲循環連分式，對於首四近值幷須計算其第五個近值及其對應之誤差：

11. $\sqrt{17}$. 12. $\sqrt{26}$. 13. $\sqrt{6}$. 14. $\sqrt{38}$.

15 $\sqrt{105}$. 16. $1/\sqrt{23}$. 17. $\sqrt{19}$. 18. $\sqrt{71}$.

19. $3\sqrt{3}$. 20. $(\sqrt{10}-2)/2$. 21. $(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{2}-1)$.

求下列各循環連分式之值：

22. $\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$. 23. $\frac{\dot{1}}{2+}\frac{1}{1+}\frac{\dot{1}}{3+}\cdots$. 24. $3+\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\frac{\dot{1}}{2+}\cdots$.

25. $\dot{2}+\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{\dot{1}}{5+}\cdots$. 26. $\frac{1}{2+}\frac{1}{7+}\frac{\dot{1}}{1+}\frac{1}{2+}\frac{\dot{1}}{1+}\cdots$.

27. 證明 $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2a+}\frac{1}{2a+}\cdots$.

28. 證明 $\sqrt{a^2+2}=a+\frac{1}{a+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{2a+}\cdots$.

29. 證明

$$\frac{\dot{1}}{a+}\frac{1}{b+}\frac{\dot{1}}{c+}\cdots=\frac{-(abc+a-b+c)+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

30 化 $x^2+x-1=0$ 之正根爲連分式.

31. 證明 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$.

32. 證明 $\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots=\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots$.

33. 以分母小於 1000 之有理分數表正方形之對角線與一邊之比，則與此最接近之有理分數若何？估定以此分數爲比值時之誤差.

34. 求誤差小於 0.000001 之最簡單分數以表 $\pi=3.14159265\cdots$.

35. 計算 $e=2.71828\cdots$ 之第六個近值，又估計以此爲 e 值之誤差。

36. 求 $127x-214y=6$ 之一組整數解。

37. 求 $235x+412y=10$ 之一組整數解。

38. 求 $517x-323y=31$ 之一組普遍整數解.

XXXVIII. 連續函數之性質

一變數之函數

函數. 設變數 y 隨變數 x 而定, x 每取一值, y 即有一定 1022
值或一組值,則吾人稱 y 爲 x 之函數.

吾人謂 y 爲 x 之函數時,寫 $y=f(x)$, 其意義爲 y 爲單值函數;換言之,對於 x 各值, y 僅有對應之一值.又 $f(a)$ 表示 x 爲 a 值時, y 所得之值.

設 y 等於 x 之代數式,例如 $y=x^2+1$, 則顯然 y 爲 x 之函數.但 y 爲 x 之函數,其關係有時非方程所能表示者.如 y 爲 x 之函數,設對於 x 之一切有理值時 y 爲 1, 對於 x 其他之一切值時 y 爲 -1. 則 y 即爲 x 之函數,而不能將 x 與 y 之關係用方程以表示之者.

有時對於 x 之特殊例外之值,由所舉 y 與 x 間之關係,決定 y 之值雖爲失敗,而吾人仍稱之爲 x 之函數, § 1024.

有時 y 爲 x 之函數,僅限於 x 之一組值,或僅限於 x 在一定極限間之諸值.例如,就方程 $y=x+2x^2+3x^3+\cdots$ 考之, y 之決定僅對於 x 數值上小於 1 者.

函數之連續性. 設 $f(x)$ 爲一 x 之已知函數.當 $x=a$ 時, 1023
若 $f(x)$ 有一定值,又若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, 則稱 $f(x)$ 連續於 a.

在相反之情形時,吾人謂 $f(x)$ 非連續於 a.

由此以後,記號 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ 即指 x 漸近於 a 而以 a 爲極限時, $f(x)$ 將漸近於 $f(a)$ 而以 $f(a)$ 爲極限,至於 x 變化經何種數列,而漸近於 a 爲其極限則可不論.

由已知方程 $y=f(x)$ 所確定之函數 y, 有時當 $x=a$ 時, $f(x)$ 1024

爲不定形式者，§§ 513—518. 就方程 $y=f(x)$ 本身而論，$x=a$ 時 y 不能爲此式所確定. 但設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 有一定之有限值，則此值即爲 $f(a)$ 之值，§ 519, 使 $f(x)$ 連續於 a. 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，則 $f(a)$ 之值爲 ∞，§ 515; $f(x)$ 則於 a 爲非連續者. 最後，設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 爲不定式，無理由可舉 $f(a)$ 爲一簡單之值. 顯然 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ 不能規定一值. 當此情形之下 $f(x)$ 爲非連續於 a.

1. 例如，各有理函數 $f(x)$ 爲連續者，但其中分式之分母或爲 0 時，則爲例外.

例如，取函數 $f(x)=(x-1)/(x^2-1)$ 考之.

除 $x^2-1=0$, 即 $x=1$ 或 $x=-1$ 之外，此函數爲連續者. 因 a 若非 1 亦非 -1, 則 $f(a)=(a-1)/(a^2-1)$ 有一定之值，而 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, § 509.

當 $x=1$, $(x-1)/(x^2-1)$ 爲不定形式 $0/0$. 但 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)/(x^2-1)]$ $=\lim\limits_{x\to 1}[1/(x+1)]=1/2$, 以 $1/2$ 爲 $f(1)$ 之值，則當 $x=1$ 時，可使 $f(x)$ 爲連續。

當 $x=-1$, 則因 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$, $f(x)$ 爲非連續者.

2. 將下列函數討論之：

$$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}+3}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1+3/2^{\frac{1}{x}}}{1+1/2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1/2^{-\frac{1}{x}}+3}{1/2^{-\frac{1}{x}}+1}.$$

此間 $f(0)$ 爲不定形 ∞/∞, § 517.

但若以 $f(x)$ 書作第二形式，然後使 x 經正值漸近於 0, 得 $\lim 2^{\frac{1}{x}}=\infty$，故 $\lim f(x)=1$.

設以 $f(x)$ 書作第三形式，然後使 x 經負值漸近於 0, 得 $\lim 2^{-\frac{1}{x}}=\infty$，故 $\lim f(x)=3$.

最後，若使 x 經正負相間之值，使漸近於 0, 則 $f(x)$ 不能漸近於任何極限.

故 $f(x)$ 於 0 爲不連續者. 不能舉任何值表 $f(0)$ 使 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

1025 從 § 1023 連續性之定義，直接可知，§ 189.

$f(x)$ 於 a 爲連續者，其充分而必要之條件，爲 $f(a)$ 有一定之有限值，及對於每一可指定之正數 δ，必能求得一對應正數 ϵ 使

$$|x-a|<\epsilon \text{ 時}, \quad |f(x)-f(a)|<\delta.$$

故在 x 値之附近，如 a，$f(x)$ 爲連續函數，若 x 之値變化甚小，則 $f(x)$ 之値之變化亦甚小，而 x 値之變化，可使其小至足使 $f(x)$ 之對應變化値小至隨吾人之意。但有時 x 之値能使 $f(x)$ 不連續者，則在含此 x 値之區間內，$f(x)$ 不能有上述之性質。參看 § 1024 之例。

定理 1. 設函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 在 a 時皆爲連續函數，$f(x)$ **1026**
$\pm\phi(x)$ 及 $f(x)\cdot\phi(x)$ 亦皆爲連續函數，則除 $\phi(a)=0$ 外，$f(x)/\phi(x)$ 亦爲連續函數。

設 $f(x)$ 於 a 時爲連續函數，則 $\sqrt[n]{f(x)}$ 亦然。

此由在 a 之連續定義，§ 1023 及 §§ 203—205 之定理得之，依此 $\lim[f(x)+\phi(x)]=\lim f(x)+\lim\phi(x)$，準此類推。

實函數. 在此函數內 x 表一實變數，卽 x 僅取實數値，而 **1027**
$f(x)$ 將表一 x 之實函數，卽 x 爲實數時，$f(x)$ 亦有一實數。

數之區間. 以直線上之點表實數，§§ 134, 209，爲便利起 **1028**
見，有下列之命名法。

在 a 及 b 中間所有之實數羣，而 a 及 b 亦包括在內，名之曰數之區間 a, b 而以符號 (a, b) 表之。

又應知者，$a<b$ 而稱 a 及 b 爲區間 (a, b) 之左端及右端。

又設 $c=(a+b)/2$, 則稱 (a, b) 被 c 分爲二相等區間 (a, c) 及 (c, b); 其餘類推.

例如, $(1, 7)$ 被 4 分爲二相等區間 $(1, 4)$, $(4, 7)$; 且被 3 及 5 分爲三相等區間 $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$.

1029 設在區間 (a, b) 內, x 爲任何值, 函數 $f(x)$ 皆爲連續函數時, 則此函數稱爲經區間 (a, b) 內之連續函數.

1030 **定理 2.** 設 $f(x)$ 爲經區間 (a, b) 內之連續函數, 且 $f(a)$ 及 $f(b)$ 有相反之符號, 則在 (a, b) 之間必有一數 x_0 能使 $f(x_0)=0$.

爲明確起見, 假定 $f(a)$ 爲 $+$, 而 $f(b)$ 爲 $-$. 以 (a, b) 分爲任意等分之區間, 例如分成二相等區間 (a, c) 及 (c, b).

設 $f(c)=0$, 則定理已證明 c 爲 x_0. 但若 $f(c)\neq 0$, 則在區間 (a, c) 或 (c, b) 二者之中必有一其左端確爲 $+$, 其右端確爲 $-$. 例如, 設 $f(c)$ 爲 $-$, 則在 (a, c) 內爲眞確, 又設 $f(c)$ 爲 $+$, 則在 (c, b) 爲眞確. 爲便利計, 稱此區間爲 (a_1, b_1). 則 $f(a_1)$ 爲 $+$, $f(b_1)$ 爲 $-$.

依處理 (a, b) 之法以處理 (a_1, b_1) 而至無窮. 或最後得一區間其一端爲 $f(x)=0$, 則此數卽爲 x_0 或得一無窮之數列, 爲區間中之區間所組成者, 如

$$(a, b),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \cdots,\ (a_n, b_n), \cdots,$$

而 $\qquad f(a),\ f(a_1),\ f(a_2), \cdots,\ f(a_n)$, 爲 $+$

及 $\qquad f(b),\ f(b_1),\ f(b_2), \cdots,\ f(b_n)$ 爲 $-$.

由 §§ 192, 193, 可知 a_n 及 b_n 隨 n 之增大, 而漸近於一同數之極限. 因 a_n 常小於 b 但永不減小, 而 b_n 常大於 a 但永不增大, 且 $\lim(b_n-a_n)=\lim(b-a)/2^n=0$.

稱此極限爲 x_0. 則 $f(x_0)=0$.

因 $f(x)$ 在 x_0 為連續函數，$\lim f(a_n)=\lim f(b_n)=f(x_0)$.

但因 $f(a_n)$ 常爲正，其極限 $f(x_0)$ 不能爲負，又因 $f(b_n)$ 常爲負，其極限 $f(x_0)$ 不能爲正。故 $f(x_0)$ 爲 0.

例如，設 $f(x)=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots$，卽可證明 $f(1)$ 爲正而 $f(2)$ 爲負. 故 $f(x)$ 對於 x 在 1 與 2 間之值必爲零.

此定理之較簡單說明在 §§ 833, 836 中得之.

極大値與極小值．優限及劣限． 今思考下列之無限數羣： 1031

$$2,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{8},\cdots(A),\qquad 2,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ 2\frac{7}{8},\cdots(B).$$

在 (A) 內有一最大數，卽 2，但無最小數；而在 (B) 內有一最小數，卽 2，但無最大數.

而且，(A) 中雖無最小之數，但小於 (A) 中諸數之數，其中有最大者，卽 1. 仿此，大於 (B) 中諸數之數，其中有最小者，卽 3.

對於其他所有有限數之無限數羣，卽在二已知有限數 a 及 b 之間之數，皆爲眞確．換言之，

定理 3. 設 $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots(A)$ 表任一有限數之無限數羣，則 1032

1. 或在 (A) 內之諸不同數中，必有一最大者，或在大於 (A) 中諸數之數中必有一最小者.

2. 或在 (A) 內之諸不同數中，必有一最小者，或在大於 (A) 中諸數之數中必有一最大者.

欲證明 1 款，可將一切大於 (A) 中諸數之數，歸屬於 R_2 類，而其他諸實數 (A) 內之數亦包括之稱爲 R_1 類．因在 R_1 內之每一數，比在 R_2 內之每一數爲小，則在 R_1 內必有一最

大數，或在 R_2 內有一最小數，§159，——即爲在 (A) 內不同數中之最大數，或爲大於 (A) 內諸數之數中之最小數。

用同理可以證明 2 款.

1033 設諸數羣中相異各數，其中有最大者，則稱其數爲數羣之極大數；若有最小者，爲其極小數。

數羣之優限者，若數羣中有極大數，即爲此極大數，否則爲大於數羣中各數之最小數。

數羣之劣限者，若數羣中有極小數，即爲此極小數，否則爲小於數羣中各數之最大數。

一數羣如 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 且其含有大於能舉出之數，則謂此數羣有優限 ∞. 仿此，一數羣如 $-1, -2, -3, -4, \cdots$ 則謂其有劣限 $-\infty$.

顯然，設一數羣中有一有限之優限 λ，則 λ 或爲其極大數，或可在此數羣中，求得與 λ 之差爲隨意之小。

1034 所謂"$f(x)$ 在 (a, b) 內之值"，意爲 $f(x)$ 之值對應於 x 在 (a, b) 內之值者。且設此數羣有一極大值，或一極小值，則將稱其爲在 (a, b)，內 $f(x)$ 之絕對極大值，或絕對極小值。在 § 639 中所說明之極大值與極小值不一定爲絕對極大值或絕對極小值。

1035 **定理 4.** 設 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內爲連續函數，則其在 (a, b) 內，必有一絕對極大值及一絕對極小值。

因 $f(x)$ 在 (a, b) 之值爲有限數，§ 1023，必有有限之優限及劣限。稱此二限各爲 λ 及 μ.

今欲證明在 (a, b) 內必有一數 x_0，使 $f(x_0)=\lambda$，且有一數 x_1，使 $f(x_1)=\mu$.

此二定理之證明大致相同，故祇述其前者如下。

分 (a, b) 爲任意個相等區間，假定分爲二相等區間。顯然至少在此二半區間之一中，λ 將爲 $f(x)$ 之優限。爲便利計，稱此半區間爲 (a_1, b_1).

以處理 (a, b) 之法以處理新區間 (a_1, b_1)，如此繼續進行以至無窮。

則諸區間中可得一無窮之區間數列，

$$(a, b)\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n), \cdots$$

在每一區間中，λ 爲 $f(x)$ 之優限。

當 n 漸次增大，a_n 及 b_n 漸近於一同數，而以此數爲極限(參看 § 1030).

設稱此極限爲 x_0，則 $f(x_0)=\lambda$.

因若不然，$f(x_0)$ 及 λ 表二常數，其差必爲一常數如 α，而不爲 0，則

$$\lambda - f(x_0) = \alpha. \tag{1}$$

因 $f(x)$ 在 x_0 爲連續函數者，故得令區間 (a_n, b_n) 對於在 (a_n, b_n) 內 x 之各值，§ 1025，小至能得

$$|f(x) - f(x_0)| < \alpha/2. \tag{2}$$

又因 λ 爲在 (a_n, b_n) 內，$f(x)$ 諸值之優限，則在 (a_n, b_n) 及 (2) 內，§ 1033，選 x 使

$$\lambda - f(x) < \alpha/2. \tag{3}$$

然由 (2) 及 (3) 可知

$$\lambda - f(x_0) < \alpha. \tag{4}$$

故因 (4) 與 (1) 相違反，(1) 不能成立；即 $\lambda - f(x_0) = 0$，或 $\lambda = f(x_0)$，如所欲證明者。

1036　**系**　設 $f(x)$ 經區間 (a, b) 爲連續者，則 $f(x)$ 之各值介乎此區間內之極大值及極小值者，必在 (a, b) 之內。

因設 c 爲所究之值，且函數 $f(x)-c$ 爲在 (a, b) 間之連續函數，§ 1026.

設 $f(x_0)$ 及 $f(x_1)$ 爲 $f(x)$ 在 (a, b) 間之極大值及極小值，則 $f(x_0)-c$ 爲 $+$，而 $f(x_1)-c$ 爲 $-$。故由 § 1030，在 x_0 與 x_1 之間必有一數，稱之爲 x_2，能使 $f(x_2)-c=0$，卽 $f(x_2)=c$，卽所欲證者。

1037　**函數之振動**。 $f(x)$ 在 $f(a, b)$ 間之振動者卽指 $f(x)$ 在 (a, b) 間之優限與劣限而言.

1038　**定理 5.**　設 $f(x)$ 經 (a, b) 爲連續者.若隨意指定一正數 α，不論小至如何，必能分 (a, b) 爲有限個數之相等區間，而其各區間內 $f(x)$ 之振動皆小於 α

因將 (a, b) 分爲任意若干相等區間，設分爲二相等區間，復以此二區間各分爲二相等區間，循此進行.區間漸小，最後必能得 $f(x)$ 在其中之振動皆小於 α 者.

因設不然，至少在 (a, b) 之半區間內 $f(x)$ 之振動，不較 α 爲小；如此可連續求得每半區間之半，準此類推，以至無限。

設此區間內之無窮數列爲

$$(a, b),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n), \cdots,$$

又如在 § 1030，使 $\lim a_n = \lim b_n = x_0$.

因 $f(x)$ 經 (a, b) 爲連續函數，必有一絕對極大值及一絕對極小值在各區間 $(a, b), (a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n), \cdots$, § 1035.

設 $f(\alpha_n)$ 表示 $f(x)$ 在 (a_n, b_n) 之絕對極大值又 $f(\beta_n)$ 表示其極小值。

則，從假定，　　$f(\alpha_n)-f(\beta_n)\geqq\alpha$，

又因此　　$\lim f(\alpha_n)-\lim f(\beta_n)\geqq\alpha$.

但此係不可能者.蓋因 α_n 及 β_n 在 (a_n, b_n) 內，而 $\lim a_n=\lim b_n=x_0$，故得 $\lim\alpha_n=\lim\beta_n=x_0$.

故，因 $f(x)$ 爲在 x_0 連續者，$\lim f(\alpha_n)=\lim f(\beta_n)$；即，$\lim f(\alpha_n)-\lim f(\beta_n)=0$，$\therefore$ 不 $\geqq\alpha$.

二自變數之函數

二變數之函數. 若二變數 x 與 y 每取一組值，變數 u **1039**
即有一定值或一組定值與之對應，吾人稱 u 爲 x 及 y 之函數。

此間所討論者，爲與 x 及 y 之一對值，僅得 u 之一個對應值。

記號 $u=f(x, y)$ 指 u 爲 x 與 y 之函數，而 $f(a, b)$ 爲當 $x=a$ 及 $y=b$ 時，u 之值。

例如，若 $u=f(x, y)=x^2-2y+1$，則 u 爲 x 與 y 之函數. 其中當 $x=1$，$y=2$，得 $u=f(1, 2)=1-4+1=-2$.

§ 1022 末之附註，在此仍可變通應用.

二變數函數之連續性. 設 $f(x, y)$ 爲 x 及 y 之已知函 **1040**
數.若 $f(a, b)$ 有一定之有限值，且 x 及 y 若各漸近於 a 及 b 爲極限時，$f(x, y)$ 將漸近於 $f(a, b)$ 爲極限，則稱 $f(x, y)$ 爲在 a, b，即 $x=a$, $y=b$ 時，爲連續者。

反之，則稱 $f(x, y)$ 在 a, b，即當 $x=a$, $y=b$ 時，爲非連續函數。

由此定義及 § 189，即可知

$f(x, y)$ 在 a, b 爲連續者，其充分且必要條件，爲 $f(a, b)$ **1041**
有一定之有限值，且對於各指定之一正數 δ，必能求得一對應之正數 ϵ，使

當 $|x-a|<\epsilon$ 與 $|y-b|<\epsilon$ 時 $|f(x, y)-f(a, b)|<\delta$.

1042 **定理 1.** 設二函數 $f(x,y)$ 及 $\phi(x,y)$ 在 a,b 皆爲連續函數，則 $f(x,y)\pm\phi(x,y)$ 及 $f(x,y)\cdot\phi(x,y)$ 亦然，又除 $\phi(a,b)=0$ 之外，$f(x,y)/\phi(x,y)$ 亦然.

設 $f(x,y)$ 於 a,b 爲連續函數，則 $\sqrt[n]{f(x,y)}$ 亦然。

本定理可直接從 § 1040 及 §§ 203—205 得之。

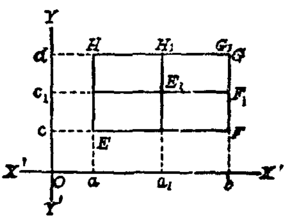
1043 **數域.** 此間須認明 x,y 表實變數，而 $f(x,y)$ 則表此二變數之實函數(比較 § 1027).

如在 § 382 之證明，x 及 y 各組之值可以在平面上繪出。顯然用此方法作方程 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, § 384, 此諸直線作成之長方形包含 x,y 之各對數值使 $a\leqq x\leqq b$, $c\leqq y\leqq d$ 者.記着此長方形，凡此 x,y 之各對數值所成之數羣可稱之爲數域 $(a,b;\ c,d)$.

1044 設 $f(x,y)$ 在數域 $(a,b;\ c,d)$ 內，對於 x,y 之每對數值爲連續者，則吾人稱 $f(x,y)$ 爲經此數域之連續函數.

1045 **定理 2.** 設 $f(x,y)$ 經數域 $(a,b;\ c,d)$ 爲連續者，則在此數域內有一極大及一極小值.

因 $f(x,y)$ 在此已知數域內爲連續函數，則在此數域內有一有限之優限及劣限，§§ 1032, 1040. 稱此二限爲 λ 及 μ.



今欲證明者，爲在 $(a,b;\ c,d)$ 內有一組值 x_0, y_0 使 $f(x_0,y_0)=\lambda$；同理將證明有一組值 x_1, y_1 使 $f(x_1,y_1)=\mu$.

因作此長方形 $EFGH$ 而成數域 $(a,b;\ c,d)$, § 1043. 而以 "$f(x,y)$ 在 $EFGH$ 內之值" 表示 $f(x,y)$ 在 $(a,b;\ c,d)$ 內，

對 x, y 所有各組值之諸對應值。

分 $EFGH$ 爲四個相等之長方形如圖.四個之中至少其中之一顯然仍以 λ 爲其優限.稱此小長方形爲 $E_1F_1G_1H_1$.

用處理 $EFGH$ 之法處理 $E_1F_1G_1H_1$, 準此類推以至無窮.吾人則可得一無盡列之長方形,

$$EFGH,\ E_1F_1G_1H_1 \cdots,\ E_nF_nG_nH_n, \cdots \tag{1}$$

在以上各長方形中 λ 爲 $f(x, y)$ 諸值之優限.

設 E_n 之橫坐標爲 a_n, 其縱坐標爲 c_n. 則如 § 1030 所證者,當 n 爲無窮增大時, a_n 及 c_n 漸近於一定極限.

設 $\lim a_n = x_0$ 又 $\lim c_n = y_0$, 則 $f(x_0, y_0) = \lambda$.

因否則,使 $$\lambda - f(x_0, y_0) = \alpha. \tag{2}$$

因 $f(x, y)$ 於 x_0, y_0 爲連續者,可選擇 $E_nF_nG_nH_n$ 令對於在此長方形內 x, y 之各組值有, § 1041,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \alpha/2. \tag{3}$$

又因 λ 爲 $f(x, y)$ 在 $E_nF_nG_nH_n$ 中之優限,故可在 $E_nF_nG_nH_n$ 及 (3) 內選取 x, y 之值爲

$$\lambda - f(x, y) < \alpha/2. \tag{4}$$

由 (3) 及 (4), 可知

$$\lambda - f(x_0, y_0) < \alpha. \tag{5}$$

然 (5) 與 (2) 相違反.故 (2) 不能成立,由是 $f(x_0, y_0) = \lambda$, 如所欲證明者.

代數之基本定理

今可證明凡有理整數方程，必有一根，§ 797. 證法如下：

1046 **定理**. 已知 $\phi(z)=1+bz^m+cz^{m+1}+\cdots+kz^n$, 其中 b, c, …, k 表諸常數，或爲有理數或爲複數，而 z 爲一複變數；則常可選擇 z 之值，使 $|\phi(z)|<1$.

設令以絕對值及幅角表 z 及 b 之式，§ 877, 爲

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad b=|b|\cdot(\cos\beta+i\sin\beta).$$

則 $bz^m=\rho^m|b|\cdot[\cos(m\theta+\beta)+i\sin(m\theta+\beta)]$. §§ 879, 881

第一先選擇 θ 使 $\quad m\theta+\beta=\pi. \qquad (1)$

則 $\quad bz^m=\rho^m|b|\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-\rho^m|b|,$

因 $\qquad \cos\pi=-1$ 又 $\sin\pi=0.$ §§ 877, 878

次選 ρ 使，§ 854,

$$|c|\rho^{m+1}+\cdots+|k|\rho^n<|b|\rho^m<1. \qquad (2)$$

設 z_0 表 z 之值對應於所選 θ 及 ρ 之值，則 $|\phi(z_0)|<1$.

但因 $\quad \phi(z_0)=(1-\rho^m|b|)+cz_0^{m+1}+\cdots+kz_0^n,$

得，§235, 由 (2)

$$|\phi(z_0)|\leqq 1-\rho^m|b|+|c|\rho^{m+1}+\cdots+|k|\rho^n,\ \therefore <1.$$

1047 **系**. 已知函數爲 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$; 設於 $z=b$ 時，$f(x)$ 不爲零，則常可選得 z 之值，使 $|f(z)|<|f(b)|$.

因於 $f(z)$ 中使 $z=b+h$ 而用戴勒氏定理展開之，§ 848. 當 $z=b$ 時，$f'(z)$, $f''(z)$, 等導來函數，其中容或有 0 者；然不

能盡爲 0，因 $f^{(n)}(z)=n!\,a_0$. 使 $f^{m}(z)$ 指不爲 0 之第一導來函數。

則 $$f(b+h)=f(b)+f^{m}(b)\frac{h^{m}}{m!}+\cdots+f^{(n)}(b)\frac{h^{n}}{n!},$$

故 $$\frac{f(b+h)}{f(b)}=1+\frac{f^{m}(b)}{f(b)}\cdot\frac{h^{m}}{m!}+\cdots+\frac{f^{(n)}b}{f(b)}\cdot\frac{h^{n}}{n!}.$$

最末方程之右端，爲 h 之多項式，呈 §1046 中所述之形式者. 故能選擇 h 使 $|f(b+h)/f(b)|<1$，故 $|f(b+h)|<|f(b)|$.

定理. 設 $f(z)=a_0z^{n}+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$；則必有一 z 值，使 $f(z)$ 爲零。 **1048**

因在 $f(z)$ 中，使 $z=x+iy$，其中 x 及 y 爲實數，用二項式定理展開之 $a_0(x+iy)^{n}$, $a_1(x+iy)^{n-1}$,… 合併其結果中各實數項及各虛數項. 則化 $f(z)$ 爲 $f(z)=\phi(x,y)+i\,\psi(x,y)$ 之形式；其中 $\phi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 表示 x,y 之實數多項式，故，§232,

$$|f(z)|=[\phi(x,y)^2+\psi(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

從 §855，則可求得一正數如 c，使設 $f(z)=0$ 有根，則其諸根數值上皆比 c 爲小；又若 $c'=c/\sqrt{2}$，顯然 $|z|$，或 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，對於適合於 $-c'<x<c'$，$-c'<y<c'$ 之 x,y 各組値，較 c 爲小。

但在數域 $(-c', c'; -c', c')$ 內，$[\phi(x,y)^2+\psi(x,y)^2]^{\frac{1}{2}}$ 爲 x 與 y 之連續函數，§1042. 故此式在此數域內有一極小値，§1045，譬如當 $x=x_0$, $y=y_0$ 時。

設 $z_0=x_0+iy_0$，則 $|f(z_0)|=[\phi(x_0,y_0)^2+\psi(x_0,y_0)^2]^{\frac{1}{2}}=0$.

因 $|f(z_0)|$ 爲 $|f(z)|$ 之極小値，不能使 $|f(z)|<|f(z_0)|$. 故 $|f(z_0)|=0$，因否則，由 §1047，不能選 z 之値而使 $|f(z)|<|f(z_0)|$ 也。

故當 $z=z_0$ 時，$|f(z)|$ 爲零，因而 $f(z)$ 亦爲零，即 z_0 爲方程 $f(z)=0$ 之一根。

INDEX
索　引

Page 頁

答　　案

I. 第 89 頁

1. 七, 四, 八, 十, 十七.　　　　2. 七.

3. $n=7,\ a_0=3,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-4,\ a_4=1,\ a_5=a_6=0,\ a_7=-12.$

4. $f(0)=3,\ f(-1)=0,\ f(3)=48,\ f(8)=963.$

5. $f(0)=2/5,\ f(-2)=12,\ f(6)=20/17.$

6. $f(1)=5,\ f(4)=9,\ f(5)=8+\sqrt{5}.$

7. $f(x-2)=2x-1,\ f(x^2+1)=2x^2+5.$

8. $f(0,0)=8,\ f(1,0)=10,\ f(0,1)=7,\ f(1,1)=9,\ f(-2,-3)=1.$

II. 第 97 頁

1. $2x^2y(b-a)$.　2. a^2+a+b^2.　3. -9.　4. $-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3$.

5. $-a+3b-7c$.　6. x^3+4x^2+5x-2.　7. b^3-5a^2b.

8. y^3+3y-1　9. $-10a+24b$.　10. $8x+11$.

11. $-5a+5b+9c$.　12. $2y-4x-2z$.　13. $x^3-x^2-8x-12$

14. $-x^4+9x^2+y^2+x-3y-7$.

§ 316. 第 105 頁

1. $a^2+b^2+4c^2+9d^2-2ab+4ac-6ad-4bc+6bd-12cd$.

2. $1+4x+10x^2+12x^3+9y^4$.

3. $x^6-2x^5y+3x^4y^2-4x^3y^3+3x^2y^4-2xy^5+y^6$.

III. 第 106 頁

1. $6x^7-13x^6+7x^5+15x^4-34x^3+35x^2-21x+5$.

2. $15x^5-14x^4a-x^3a^2+7x^2a^3-5xa^4-2a^5$.

3. x^6-y^6.　4. $6x^6-4x^5-9x^4+35x^3-10x^2-21x+35$.

5. $28x^2-43xy+10y^2$.　6. $a^2b+(a^2-ab+b^2)x-ax^2-x^3$.

7. $x^6-2x^5+9x^4-10x^3+17x^2-6x$.

8. $2x^{2n-2}-2x^{2n-3}-3x^{2n-4}+8x^{2n-5}-5x^{2n-6}$.

9. $a^4-a^2b^2+6ab^3-9b^4$.　10. $x^2-9y^2-4z^2+12yz$.

11. $x^3-y^3-3xy-1$.　12 $a^3+b^3-c^3+3abc$.

13. $3x^2-14xy+8y^2+23x-32y+30$.

14. $2x^2+7y^2+24z^2+15xy-59yz-14zx$. 15. b^4-x^4.

16. x^8+x^4+1. 17. $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$.

18. $1+1+1,\ 1+2+3+2+1,\ 1+3+6+7+6+3+1,$
$1+4+10+16+19+16+10+4+1$.

19. $1+5+10+10+5+1$
$1+6+15+20+15+6+1$
$1+7+21+35+35+21+7+1$
$1+8+28+56+70+56+28+8+1$
$1+9+36+84+126+126+84+36+9+1$
$1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1$

20. $16x^2-24xy+9y^2,\ 64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.

21. $x^2+4y^2+9z^2+16u^2+4xy+6xz-8xu+12yz-16yu-24zu$.

22. $x^3+8y^3+27z^3+6x^2y+12xy^2+9x^2z+27xz^2+36y^2z+54yz^2+36xyz,$
$x^3+8y^3-27z^3+6x^2y+12xy^2-9x^2z+27xz^2-36y^2z+54yz^2-36xyz$.

23. $a^4-8a^2b^2+16b^4$.

24. $a_0b_{17}+a_1b_{16}+\cdots+a_{17}b_0,\ a_{12}b_{19}+a_{13}b_{18}+\cdots+a_{27}b_4$.

25. $-4,\ -14,\ -55$.

27. $32a^{10}x^{15}y^{35},\ -x^{35}y^{56}z^{63},\ a^{4n}b^{2mn}c^{6n},\ a^{mn}b^{n^2}c^{2n^2}$.

28. $a^{12}b^4c^{18},\ -8a^8x^{16}y^{34}$.

IV. 第110頁

1. $3a^2/2b$. 2. $-3y^4z/4ax^5$. 3. $-5x^m/4y^m$.

4. $3a^7b^8/c$. 5. $xy/(x+y)$. 6. $(x^2+xy+y^2)(x+y)$.

7. $(a-b)(b-c)(c-a)$. 8. $-6abc+5a^2c^2-4a^3b^2c^4$.

9. $3(x-y)^2-2(x-y)+5$. 10. $6a^7b^3c$.

11. a^3. 12. $-2ax^2/y^2$.

V. 第119頁

1. $-1/2$. 2. -2. 3. $-5/2$. 4. 16.

5. 6. 6. 1. 7. 5. 8. $-13/4$.

9. $-39/5$. 10. $779/1439$. 11. $(4a+5b)/3(b+c)$.

12. 1. 13. a. 14. $(a+b)/a$.

15. $(m-n)/(m+n)$. 16. $1/2,\ 1/3,\ -1/4,\ -2/5$. 17. $0,\ 1,\ 14$. ?

18. $0,\ 8/3$. 19. $c/b,\ 0$. 20. $1,\ 1,\ 2$.

VI. 第124頁

1. 68. 2. 14. 3. 26 及 324.

4. 84. 5. 5. 6. 40 及 10; 5 年後.

7. 2 小時又 24 分. 8. A, 25 日, B, $16\frac{2}{3}$ 日.

9. 同方向在 8 點 $43\frac{7}{11}$ 分時;異方向在 8 點 $10\frac{10}{11}$ 分時.

10. $5\frac{5}{11}$ 分內.

11. 每小時 30 秒.

12. A, \$540; B, \$360; C, \$240; D, \$160.

13. \$42,000.

14. 576 平方呎.

15. 80 呎.

16. 一元幣 5 枚,半元幣 10 枚,一角幣 15 枚.

17. \$3750 爲 6%, \$1250 爲 4%.

18. 2 : 3 之比.

19. $\frac{1}{3}$ 磅.

20. 第一次一加侖,第二次二加侖.原液含酒精 60%.

21. 二車於 11 : $12\frac{12}{19}$ 時相遇,離 Jersey 城 $35\frac{10}{19}$ 哩.

22. 速度一爲每小時 60 哩,一爲 36 哩.在上午 11 : 15 相遇.

23. 250.

24. 金 57 兩,銀 330 兩.

25. \$28.

26. 75 平方吋.

27. 個位數字爲 $(9a+b)/18$, 十位數字爲 $(9a-b)/18$.

28. 離今 $(bc-a)/(1-c)$ 年.

VII. 第 134 頁

1. $x=37,\ y=25.$
2. $x=10,\ y=7.$
3. $x=3,\ y=-2.$
4. $x=5,\ y=-7.$
5. $x=1/3,\ y=1/2.$
6. $x=4,\ y=6.$
7. $x=-3/20,\ y=4/5.$
8. $x=5/2,\ y=1.$
9. $x=-2,\ y=1.$
10. $x=(a^2+b^2)/(a+b)+2,\ y=(a^2+b^2)/(a+b).$
11. $x=cq/(aq+bp),\ y=cp/(aq+bp).$
12. $x=a+b,\ y=a-b.$
13. $x=10,\ y=8.$
14. $x=-1,\ y=1/2.$
15. $x=(bc'+b'c)aa'/(ab'+a'b)cc',\ y=(ac'-a'c)bb'/(ab'+a'b)cc'.$
16. $x=y=ab/(a+b-ab).$

VIII. 第 136 頁

1. $x=48,\ y=-32/7.$
2. $x=1/5,\ y=2.$
3. $x=2,\ y=3.$
4. $x,\ y=0,\ 1/2;\ 0,\ 2;\ 1,\ 0;\ -2/3,\ 0.$
5. $x,\ y=1,\ 1;\ -5/3,\ 0.$
6. $x,\ y=0,\ 5/2;\ 5/3,\ 5/3;\ -5,\ 5.$
7. $x,\ y=1,\ 3;\ 2,\ 2.$
8. $x,\ y=2,\ 1;\ -4,\ 5.$
9. $x,\ y=-1/3,\ 4/3;\ -3,\ 2;\ -3/5,\ 8/5;\ -7/5,\ 2/5.$
10. $x,\ y=-3,\ 1;\ 2,\ 2;\ -2,\ -1;\ 4,\ -3.$

X. 第 147 頁

1. $x=5,\ y=6,\ z=7.$
2. $x=1,\ y=-3,\ z=3.$
3. $x=5,\ y=2,\ z=2.$
4. $x=-7,\ y=-1,\ z=-3.$
5. $x=33/5,\ y=22/5,\ z=11/10.$
6. $x=1,\ y=-1,\ z=7.$
7. $x=1/8,\ y=1/7,\ z=1.$
8. $x=2,\ y=3,\ z=5,\ u=-4.$
9. $x=0,\ y=4,\ z=-3,\ u=0.$
10. $x=\dfrac{l-m+n}{2c},\ y=\dfrac{l+m-n}{2b},\ z=\dfrac{-l+m+n}{2a}.$

11 $x=\dfrac{mnd}{amn+bnl+clm}$, $y=\dfrac{nld}{amn+bnl+clm}$, $z=\dfrac{lmd}{amn+bnl+clm}$.

不完全 12? $x=-12$, $y=-8$, $z=-4$.

13. $(x-y-3)+(y-z+5)+(z-x-2)=0$.

14. $2(3x-8y+7z-10)+5(2x+5y-3z-12)-(16x+9y-z-80)=0$.

XI. 第 150 頁

1. 5, 6 與 9. 2. 33, 14 與 4. 3. 87. 4. A, \$4600; B, \$600.

5. A, $(p-q+r)/2$; B, $(p+q-r)/2$; C, $(-p+q+r)/2$.

6. \$2345, $4\frac{1}{2}$%. 7. \$15,500. 8. 12 平方吋.

9. A, \$27; B, \$13. 10. A, 12 日; B, 9 日; C, 8 日.

11. 每秒 18 及 12 呎. 12. 每小時 20 及 16 哩.

13. A, 每小時 15 哩; B, 每小時 10 哩. 14. $10\frac{16}{43}$ 碼.

15. A, 每秒 $7\frac{17}{29}$ 碼; B, 每秒 7 碼. 16. 100 磅.

17. A, 1/3; B, 11/3; C, 5. 18. A 中, 64%; B 中, 32%.

19. 音速每秒 1100 呎;鎗彈之速每秒 $1447\frac{7}{19}$ 呎.

20. 水槽容量 18,000 審. 每秒 A 300 審通過, B 200 審通過, C 600 審通過.

XII. 第 154 頁

1. $3(x-2)^3+17(x-2)^2+34(x-2)+19$.

2. $(2x+3)^2-2(2x+3)+4$. 3. $f(x)=43x^2/24-8x+29/24$.

4. $f(x)=3x^3+x+5$. 5. $f(x, y)=2x-3y+4$.

6. $2x+y-7=0$. 7. 否. 8. $x+3y-11=0$.

9. $c=3$. 10. $2x-5y+11=0$ 及 $4x-y-5=0$.

11. $x^3-2x^2-5x+6=0$. 12 $x^2+xy-x-4y=0$.

13. $3x+2y-3=-(x+y-1)+(2x-y+2)+2(x+2y-3)$.

§ 401. 第 158 頁

2. $Q=x^2+3$, $R=-4x+4$.

§ 404. 第 161 頁

2. $Q=3x^3+5x^2-11x/2+9/4$, $R=-9x/4+5/2$.

§ 405. 第 161 頁

2. $l=-11$, $m=-6$.

§ 408 第 164 頁

2. $2-x+6x^2-7x^3+13x^4$.

§ 409. 第 164 頁

2. $2x+3y-1$.

XIII. 第 165 頁

1. $Q=2x^2-3x+4,\ R=2x+4$.
2. $Q=3x^2-8x+5,\ R=0$.
3. $Q=2x^3-x^2+3x-5,\ R=20$.
4. $Q=4x^4+x^2-x+3,\ R=-2x^2+4x-8$.
5. $Q=2x+3,\ R=6x-11$.
6. $Q=2x^2-3x+6,\ R=-12x^2+24x-17$.
7. $3x^3-5x^2-7x+12\equiv(x-2)(3x^2+x-5)+2$.
8. $a=-3/2,\ b=-3/2$.
9. $a=-2,\ b=5$.
10. $Q=x^4+x^2+1,\ R=0$.
11. $Q=2x-y+3,\ R=0$.
12. $Q=a-b+2c,\ R=0$.
13. $Q=a+b-c,\ R=0$.
14. $Q=x^2+ax+2a,\ R=0$.
15. $Q=4x^2+6xy+9y^2,\ R=0$.
16. $Q=x^3+x^2y+xy^2-3y^3,\ R=0$.
17. $Q=3a^3+2a^2b-ab^2+4b^3,\ R=0$.
18. $Q=x^2-yx/2+3y^2/4,\ R=y^3/4$; $Q'=y^2-xy+2x^2,\ R'=-2x^3$.
19. $Q=1-4x+6x^2,\ R=6x^3-18x^4$.
20. $Q=1+4x+10x^2,\ R=10x^3-50x^4$.
21. $1+2x+4x^2+8x^3$.
22. $2+5x+5x^2-5x^3$.

§ 412. 第 169 頁

3. $Q=5x^4+15x^3+44x^2+132x+397,\ R=1193$.
4. $Q=x^2+3x+2,\ R=0$.
5. $Q=x^2+4,\ R=0$.

§ 414. 第 170 頁

2. $f(2)=48,\ f(-2)=96,\ f(4)=756,\ f(-2/3)=112/9$.

XIV. 第 173 頁

1. $Q=x^3+x^2+3x+1,\ R=0$.
2. $Q=5x^4+9x^3+19x^2+64x+198,\ R=597$.
3. $Q=3x^3-6x^2+13x-26,\ R=51$.
4. $Q=x^2+5x-6,\ R=0$.
5. $Q=x^2-5x/3-2/9,\ R=16/9$.
6. $Q=x^2-(b+c)x+bc,\ R=0$.
7. $Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3,\ R=0$.
8. $f(1)=0,\ f(2)=9,\ f(5)=228,\ f(-1)=6,\ f(-3)=-36,\ f(-6)=-399$.
9. $m=3$.
10. $l=-22,\ m=-24$.
13. $2x^3-6x^2-12x+16$.
14. $5x^3-24x^2+25x+6$.

XV. 第176頁

1. $(x^2+1)^2+(x-2)(x^2+1)-x.$
2. $(2x^2+1)^2+x(2x^2+1)+5.$
3. $(2x+1)(x^3-x^2+x+3)^2-(2x^2+8x)(x^3-x^2+x+3)+(6x^2-3).$
4. $(x-2y)(x^2+xy+y^2)^2+(2x+3y)y^2(x^2+xy+y^2)-2xy^4.$
5. $2(x-3)^3+10(x-3)^2+7(x-3)-9.$
6. $(x+2)^5-7(x+2)^4+10(x+2)^3+30(x+2)^2-99(x+2)+85.$
7. $(x+3)^3-27.$
8. $(x+1)^3-2(x+1).$

XVI. 第180頁

1. $2x^2y^3(3x^2z^2-6yz+4).$
2. $3n(n-1).$
3. $(a+1)(b-1).$
4. $(m-n)(x-n).$
5. $(3y-2)(x-4).$
6. $(2x+y)(5y+3).$
7. $xy(x-y)(xy+2).$
8. $x(x+1)(x^2+1)$
9. $(a-b)(c-d).$
10. $a(c+d)(a-b).$
11. $(d+e)(a+b+c).$
12. $(a+d)(a-b+c).$

§ 435. 第181頁. 例3

1. $(x+7)^2.$
2. $(3-a)^2.$
3. $(3xy+5)^2.$
4. $(x-2y+3)^2.$
5. $(8a^4-3)^2.$
6. $(a-b+c)^2.$

§ 436. 第181頁

1. $(x^2+y^3)(x^2-y^3).$
2. $6a(a+b)(a-b).$
3. $3ax(2ax+5y)(2ax-5y).$
4. $(5x^n+7x^m)(5x^n-7x^m).$
5. $(6x^2+1)(\sqrt{6}x+1)(\sqrt{6}x-1).$
6. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2).$

§ 438. 第182頁

1. $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2).$
2. $(3x+1)(9x^2-3x+1).$
3. $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y).$

§ 439. 第184頁

1. $(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)(x^2-\sqrt{2}xy+y^2).$
2. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$
3. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6).$

XVII. 第184頁

1. $xy(2x-5y)^2.$
2. $7t(2x+3y)(2x-3y).$
3. $(x-2y+3z)^2.$
4. $45(a+b)(a-b)(a^2+b^2).$
5. $48x(x+1)^2(x-1).$
6. $(2+a+2b)(2-a-2b).$
7. $(x^2+x+1)(x^2-x+1).$
8. $(a^2+2ab-b^2)(a^2-2ab-b^2).$
9. $(a^2+2a+4)(a^2-2a+4).$
10. $(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy+4y^2).$

11. $(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$.

12. $9y^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$.

13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$.

14. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

15. $(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)$.

16. $(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$.

17. $(x+y^2)(x^6-x^5y^2+x^4y^4-x^3y^6+x^2y^8-xy^{10}+y^{12})$.

XVIII. 第 185 頁

1. $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)$.　　2. $(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

3. $(x+1)(x-1)^3$.　　4. $(x+2)(x-2)(x-7)$.

5. $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)$.　　6. $(x+1)(x^2+x+2)$.

7. $(x+1)(x^4+x^3+2x^2+x+1)$.　　8. $(x^2+2x+3)^2$.

§ 442. 第 186 頁. 例 4

1. $(x+1)(x+2)$.　　2. $(x-1)(x-15)$.　　3. $(x+2)(x-6)$.

4. $(x+6)(x-5)$.　　5. $(x+8)(x+12)$.　　6. $(x-5)(x-16)$.

§ 443. 第 187 頁. 例 4

1. $(3x-2)(2x-3)$.　　2. $(x+3)(5x-1)$.　　3. $(2x+1)(7x-3)$.

4. $(3x+1)(6x+5)$.　　5. $(7x+4)(7x+11)$.

6. $abx^2-(ac-b^2)x-bc=(ax+b)(bx-c)$.

§ 444. 第 188 頁. 例 4

1. $(x+5+\sqrt{2})(x+5-\sqrt{2})$.　　2. $(x-4)(x-6)$.

3. $(x-6+3i)(x-6-3i)$.　　4. $[x+(1+\sqrt{3}i)/2][x+(1-\sqrt{3}i)/2]$.

5. $2[x+(3+\sqrt{7}i)/4][x+(3-\sqrt{7}i)/4]$.　　6. $(x-2b)(x-4a+2b)$.

§ 445. 第 189 頁. 例 2

1. $(x+y)(x+4y)$.

2. $\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$.

§ 446 第 190 頁

2. $(2x-y+z)(x-3y+2z)$.

XIX. 第 190 頁

1. $(x-6)(x-8)$.
2. $[x-(21+\sqrt{921})/2][x-(21-\sqrt{921})/2]$.
3. $(x+11)(5x+2)$.
4. $(4x+7)(4x+9)$.
5. $(6x-1)(9x-2)$.
6. $4(x+2y)(3x-y)$.
7. $(x+2)(x+3)(x-2)(x-3)$.
8. $xy(x+3y)(x-6y)$.
9. $[x-(3+\sqrt{3}i)/2][x-(3-\sqrt{3}i)/2]$.
10. $3[x+(1+\sqrt{10})/3][x+(1-\sqrt{10})/3]$.
11. $[x-(2+\sqrt{6})y][x-(2-\sqrt{6})y]$.
12. $(x+3b)(x-6a-3b)$.
13. $(ax+a-b)(bx-a-b)$.
14. $[(1+c)x+b][x+d]$.
15. $(x-3y-1)(x-5y+3)$.
16. $(x+y+2z)(x+2y+z)$.

XX. 第 194 頁

1. $(x-1)(x-2)(x+3)$.
2. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
4. $(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$.
5. $(x-3)(2x+1)(3x+1)$.
6. $[x-(1+\sqrt{3})y][x-(1-\sqrt{3})y](2x-y)$.
7. $(x-1)^3(2x+5)$.
8. $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1)$.
9. $(x+2)(2x+1)(3x+2)(x^2+1)$.
10. $(x+1)(x-1)(x-2)(5x-2)(x^2+x+1)$.
11. $x=-2,\ 6$.
12. $x=1/2,\ 2/3$.
13. $x=7,\ -2$.
14. $x=-3\pm\sqrt{11}$.
15. $x=2,\ 3,\ 4$.
16. $x=1,\ 1,\ -1,\ -3$.
17. $x=1,\ (-1\pm\sqrt{3}i)/2$.
18. $x=1,\ 2/5,\ -1/2$.

XXI. 第 195 頁

1. $(3x-2)(2y+5)$.
2. $(ac-bd)(ab-cd)$.
3. $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$.
4. $a(a+3b)(a-3b)(a^2+9b^2)$.
5. $ab(a-b)(a+b)^2$.
6. $(3ax+y)(bx-2y)$.
7. $3(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$.
8. $(x-1)(x+2)(x^4+2x^3+3x^2+2x+4)$.
9. $y^3(2x+y^2)(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)(4x^2-2xy^2+y^4)$.
10. $(x-a)(x+b)$.
11. $(x^n+3)(x^n-6)$.
12. $-(x+6)(x-7)$.
13. $3(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
14. $(x+2)(x+3)(x-3)(x^2+2x+4)$.
15. $(x+a+b+c)(x-a-b+c)$.
16. $(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$.
17. $(a-b-2)(a-b-3)$.
18. $(x+y)(x+3y)(x-y)(x-3y)$.
19. $(2x+y)(3x-5y-2)$.
20. $(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$.
21. $(-x+y+z+u)(x-y+z+u)(x+y-z+u)(x+y+z-u)$.
22. $(2x+3)(7x-1)$.
23. $(1+22y)(1-3y)$.
24. $xy(y+4x)(y+51x)$.
25. $(a+3bc)^2(a-3bc)^2$.

26.	$x(x-1)(x-6)(x-7).$	27.	$(5y-x)(7y^2-10xy+19x^2).$
28.	$(x+y)(x-y)^3.$	29.	$(x+a)(x+a-b).$
30.	$5xy(x-y)(x^2-xy+y^2).$	31.	$(x+1)^2(x-1)^3.$
32.	$(b^2+b+1)(b^2-b+1).$	33.	$(2x+y-1)(x+3y+5).$
34.	$(a^2+2a+2)(a^2-2a+2).$	35.	$(x+y+3z)(x-2y+z).$
36.	$(2a^2+3ab+3b^2)(2a^2-3ab+3b^2).$	37.	$(x+5b)(x-8a-5b).$
38.	$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$	39.	$4x^2(2x-1).$
40	$(a+b)(a-b)(x+y)(x-y).$	41.	$(x-a)(x+b)(x-b).$
42.	$(x-a)(x+b)(x^2+ax+a^2).$	43.	$(a+3b-2c)(a-3b+2c).$
44.	$(2a+1)^3.$	45.	$(x^2-x+1)^2.$

46. $(a^2+b^2)(x^2+y^2).$

47. $(x+1)(x+3)(x-3)(2x+1)(2x-1).$

48.	$(x-1)^2(x^2+2x+3).$	49.	$(x+3a+b)(x+2a-b).$
50.	$(x+2)(3x-2)(5x+3).$	51.	$(cx+ab)(abx+c).$
52.	$(x+a)(x-2a)(2x+a).$	53.	$(x+1)[(a-b)x+(a+b)].$

54. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$(x^8-x^7y+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8).$

55.	$(x+1)(x-1)(x-2)(x-4).$	56.	$(x-1)(2x+1)^2.$
57.	$(x-1)(x-4)(3x+2)(x^2+x+1).$	58.	$(x-2)(x+3)(x+4)(5x-1).$

59. $(ab+c+d)(ac-d).$

60. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z).$

§ 459. 第 197 頁. 例 2

1. $x^3y^2.$　　2. $x+y.$　　3. $x+2.$　　4. $(x-2)(x-3).$

§ 460. 第 198 頁. 例 3

1. $x+3.$　　2. $(x+2)(x+3).$　　3. $(x-1)(x-3)^2.$

§ 462. 第 199 頁. 例 3

1. $x-2.$　　2. $x+4.$

§ 468. 第 203 頁

2. $2x^2+x+1.$

XXII. 第 204 頁

1.	$x^3yz^3.$	2.	$(a+b)(a-b).$	3.	$y^2-y+1.$
4.	$a+1.$	5.	$x-1.$	6.	$x^2+y^2.$
7.	$x+2.$	8.	$(x-1)(x-2).$	9.	$x^2+x+1.$

10. $(x+1)^3$.
11. $(x-1)(x-2)^2$.
12. $x+2$.
13. x^2+x+1.
14. x^2+x-6.
15. x^3+x^2-x-1.
16. $3x-7$.
17. $3x+5$.
18 $x(6x^2+7x-3)$.
19. $2x^2-x+3$.
20. $2x^3-4x^2+x-1$.
21. x^2+x+1.
22. $x+2$.
23. x^2-3.
24. $y(x-3y)$.
25. $(x-1)(x+3)$.
26. $(2x-3)^2(x+1)$.

XXIII. 第 207 頁

1. $(9x^2+1)(9x^2-1)$.
2. $(a^5+b^5)(a^5-b^5)$.
3. $a^3(a+1)(a^3-1)$.
4. $(x-y)^4(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)$.
5. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
6. $(x+y+z)(x-y-z)(-x+y-z)(-x-y+z)$.
7. $(2x-3y)(x+3y)(3x-y)$.
8. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.
9. $(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y)$.
10. $x(2x+3y)(2x-3y)(2x-y)(4x+5y)$.
11. $(x^3+y^3)(x^3-y^3)$.
12. $(x^2-1)(x^4+x^2+1)(3x-5)(x^2+1)$.
13. $(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(3x-2)$.
14. $(x^2+4a^2)(x+2a)(x-2a)$.
15. $x(x+2)(x+b)(x-b)(x+a)$.
16. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(2x-5)$.
17. $(x-2)(x^2+2x+4)(3x+1)(9x^2-3x+1)(2x+1)(x^2+x+1)$.
18. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+3)(2x-1)$.
19. $(2x^4-x^3+10x^2+4x+5)(x^2+x+1)(x^2+3)$.
20. $(2x^4+8x^3-4x^2+13x-6)(x+1)^2$.

§ 491. 第 212 頁

例題. $m=5$, $n=-14$.

XXIV. 第 215 頁

1. $xy(x+2y)$.
2. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.
3. $\dfrac{x+3}{x+9}$.
4. $\dfrac{x-3}{x+2}$.
5. $\dfrac{3(x-3b)}{2(x+3b)}$.
6. $\dfrac{5x+a}{5x-3a}$.
7. $\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x+3)(x-2)}$.
8. $\dfrac{3x-5}{2x-3}$.
9. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$.
10. $\dfrac{x-y+z}{x+y-z}$.
11. $1-y^2$.
12 $\dfrac{m-6n}{3m-n}$.
13. $\dfrac{2x^2+5x-12}{2x^2+x-15}$.
14. $\dfrac{x-1}{2x+1}$.
15. $\dfrac{x^2+4}{2(x^2+6)}$.
16. $\dfrac{x-3}{x^2+2x+4}$.
17. $\dfrac{x^2-2bx+c^2}{x^2+2bx-c^2}$.
18. 3.

XXV. 第222頁

1. $\dfrac{2}{2a+3b}$.　　2. $\dfrac{x^3-x^2+2x-1}{(x^3+1)(x-1)}$.　　3. $\dfrac{3}{(x-1)(x-3)}$.

4. $\dfrac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.　　5. $\dfrac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$.　　6. 0.

7. a.　　8. $-\dfrac{8x^2+6x-9}{8x^3-27}$.　　9. 4.

10. $3a^2+3b^2+3c^2+4ab+4ac+4bc$.　　11. $\dfrac{7}{x^2-x-3}$.

12. $\dfrac{2}{x^4-4x^2-x+2}$.　　13. $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3}$.　　14. a^3+1.

15. $\dfrac{x+1}{x-1}$.　　16. $\dfrac{2x-3}{x(x+1)}$.　　17. $\dfrac{x^3}{x+a}$.

18. $x^2-y^2+z^2-2xz$.　　19. $\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$.　　20. $\dfrac{-x+y+z}{x-y+z}$.

21. $-\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^2}$.　　22. $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$.　　23. $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}$.

XXVI. 第230頁

1. 1/2.　　2. -3.　　3. ∞.　　4. 0.

5. $-5/4$.　　6. ∞.　　7. $3/2, \infty, 0, 2$.　　8. $-1/9$.

9. ∞.　　10. 3.　　11. 2/3.

XXVII. 第235頁

1. $x=1$.　　2. $x=15/31$.　　3. $x=6$.

4. $x=4$.　　5. $x=5/6$.　　6. $x=-5/3$.

7. $x=0$.　　8. $x=-(a+b)$.　　9. $x=-10$.

10. $x=-2$.　　11. $x=-2/3$.　　12. $x=-7$.

13. $x=3/4$.　　14. $x=3$.　　15. $x=-4$.

16. $x=\dfrac{cq+dp+(a+b)pq}{c+d+ap+bq}$.　　17. $x=-71/33$.

18. $x=2bc/(b+c)$.　　19. $x=(a+b+c)/3$.　　20. $x=-5$.

21. 無根.　　22. $x=3,\ y=-2$.　　23. $x=1,\ y=3$.

24. $x=\dfrac{2abc}{ab+bc-ca},\ y=\dfrac{2abc}{-ab+bc+ca},\ z=\dfrac{2abc}{ab-bc+ca}$.

25. $x=2,\ y=-2,\ z=4$.

§ 534. 第239頁

2. $-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4x^2+4x+9}{x^3+x^2+x-1}$.

XXVIII. 第244頁

1. $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+3}$.　　2. $\frac{8}{5(2x+1)}+\frac{3}{5(3x-1)}$.

3. $-\frac{2}{x+1}+\frac{8}{x+2}-\frac{6}{x+3}$.　　4. $-\frac{1}{x-1}+\frac{11}{2(x-2)}-\frac{9}{x-3}+\frac{9}{2(x-4)}$.

5. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}$.　　6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{1+x}+\frac{5}{1-x}$.

7. $x+2+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}$.　　8. $\frac{2}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2}+\frac{20}{(x-2)^3}+\frac{13}{(x-2)^4}$.

9. $\frac{1}{12x}+\frac{3}{44(x-4)}-\frac{10}{33(2x+3)}$.

10. $-\frac{4}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$.　　11. $\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{21}{(x+3)^3}+\frac{76}{(x+3)^4}-\frac{98}{(x+3)^5}$.

12. $\frac{x}{x^2+1}-\frac{x-1}{x^2+2}$.　　13. $\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{13}{(x-3)^2}$.

14. $\frac{1}{x-2}-\frac{x-1}{x^2+1}$.　　15. $\frac{2x-4}{x^2+x+1}+\frac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}$.

16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.　　17. $\frac{1}{x^2+2}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+1)}$.

18. $\frac{a^2+pa+q}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x-a}+\frac{b^2+pb+q}{(b-a)(b-c)}\cdot\frac{1}{x-b}+\frac{c^2+pc+q}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{x-c}$.

19. $-\frac{2}{27x}+\frac{25}{256(x-1)}-\frac{3}{64(x-1)^2}-\frac{163}{6912(x+3)}-\frac{35}{288(x+3)^2}-\frac{25}{48(x+3)^3}$.

20. $\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x-3}{2(x^2-x+1)}$.

XXIX. 第249頁

1. x 及 z.

2. $\Sigma a^2b^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

$\Sigma a^3b^4=a^3b^4+b^3a^4+b^3c^4+c^3b^4+c^3a^4+a^3c^4$.

$\Sigma a^2/b=a^2/b+b^2/a+b^2/c+c^2/b+c^2/a+a^2/c$.

$\Sigma a^2b^3c^5=a^2b^3c^5+a^2c^3b^5+b^2c^3a^5+b^2a^3c^5+c^2a^3b^5+c^2b^3a^5$.

$\Sigma a^2b^2c^4=a^2b^2c^4+a^2c^2b^4+b^2c^2a^4$.

$\Sigma(a+b)c=(a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$.

$\Sigma(a+b^2)c^3=(a+b^2)c^3+(b+a^2)c^3+(b+c^2)a^3+(c+b^2)a^3$
$\quad+(c+a^2)b^3+(a+c^2)b^3$.

$\Sigma(a+2b+3c)=(a+2b+3c)+(a+2c+3b)+(b+2c+3a)$
$\quad+(b+2a+3c)+(c+2a+3b)+(c+2b+3a)$.

4. 否.

5. $y^2-x^2,\ x^2-z^2,\ z^2-y^2$; $a^2bc,\ b^2cd,\ c^2da,\ d^2ab$; $(a-c)(b-a)$, $(b-a)(c-b)$, $(c-b)(a-c)$.

6. $ab^3c^2+bc^3d^2+cd^3a^2+da^3b^2$, $a(b-c)+b(c-d)+c(d-a)+d(a-b)$,

$(b+2c)(a+d)+(c+2d)(b+a)+(d+2a)(c+b)+(a+2b)(d+c)$,

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2}{(c-d)(c-a)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)}.$$

XXX. 第251頁

1. $-(x-y)(y-z)(z-x)$.　　2. $-(x-y)(y-z)(z-x)$.
3. $3(x-y)(y-z)(z-x)$.　　4. $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.
5. $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yx+zx)$.
6. $-(x+y)(y+z)(z+x)(x-y)(y-x)(z-x)$.
7. $3(x+y)(y+z)(z+x)$.
8. $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
9. $80xyz(x^2+y^2+z^2)$.
10. $-2(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.　　11. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
12. $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y+xyz)$.
13. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$.　14. 0.　15. 0.　16. 1.　17. $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

XXXI. 第259頁

1. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$.
2. $a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$.
3. $1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}+128x^{14}$.
4. $16+\dfrac{32}{x}+\dfrac{24}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}$.
5. $x^6-18x^4+135x^2-540+\dfrac{1215}{x^2}-\dfrac{1458}{x^4}+\dfrac{729}{x^6}$.
6. $\dfrac{x^5}{y^5}-5\dfrac{x^3}{y^3}+10\dfrac{x}{y}-10\dfrac{y}{x}+5\dfrac{y^3}{x^3}-\dfrac{y^5}{x^5}$.
7. $1-4x+14x^2-28x^3+49x^4-56x^5+56x^6-32x^7+16x^8$.
8. $a^6+3a^5x-5a^3x^3+3ax^5-x^6$.　　9. $231x^6/16$.
10. $-3153199104a^5b^7$.　　11. $-8064a^{10}b^5c^5$.　　12. $126x^4$, $-126x^5$.
13. 56.　　14. 15120.　　15. 15.
16. -648.　　17. 924.　　18. 2, 795, 520.
19. $x^3-6x^2y-xy^2+30y^3$.　　20. $x^4-4x^3-19x^2+46x+120$.
21. 96.　　22. 64, 400.　　23. 16, 16, 24.

§ 568. 第260頁

1. $\dfrac{8a^2b^3}{5c^4d^6}$.　　2. $3xy^2z^3$.　　3. $\dfrac{2x^2y^6}{az^5}$.

§ 569. 第262頁

3. $2x^2-x+1$.

§ 570. 第 264 頁

$5x^2-4x+3.$

§ 572. 第 264 頁

2. $2-\frac{x}{4}+\frac{15x^2}{64}.$

XXXII. 第 269 頁

1. $-\frac{3x^2y^5}{5a^3z^4}.$ 2. $\frac{23a^2b^3}{25cd^4}.$ 3. $xy(x-y).$
4. $x^2-x+1.$ 5. $x^3-x+3.$ 6. $2x^3+3x^2y-y^3.$
7. $2x-5-3/x.$ 8. $7-6x-5x^2.$ 9. $x^4+x^3-x^2+x-2.$
10. $x^2-2x-1.$ 11. $2x^2-3xy+4.$ 12. $\frac{x}{y}+xy+\frac{y}{x}.$
13. $1-x-x^2/2-x^3/2.$ 14. $2-x/4+47x^2/64+47x^3/512.$
15. $x^2+x+1.$ 16 $3x^4+x^2-1.$ 17. $2x^2-3ax+3a^2.$
18. $\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}.$ 19. $1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2.$ 20. $x^2-x+1.$
21. $x^2+x+1.$ 22. $a=6,\ b=1.$ 23. 167.
24. 48.1.
25. 24.15. 26. 2037. 27. 0.0566. 28 3.004. 29. 1.414.
30. 7.449. 31. 15.315. 32. 123. 33. 55.1. 34. 10.13.

XXXIII. 第 274 頁

1. $3\sqrt{2}.$ 2. $14\sqrt{3}.$ 3. $-9.$ 4. $-\sqrt[3]{10}.$
5. $\sqrt{6}/2.$ 6 $\sqrt[3]{12}/2.$ 7. $\sqrt[3]{6}/2.$ 8. $\sqrt[5]{6}/2.$
9. $ab^2c^3d\sqrt[5]{25d}.$ 10. $2c\sqrt[6]{2a^2b^4c^2}.$ 11 $z\sqrt[4]{2x^2y^3z}.$ 12. $\sqrt[n]{5ab^2c^3}.$
13. $\sqrt[3]{ab^2c^3}.$ 14. $a^2b^3c^4\sqrt[n]{ab^2}.$ 15. $x\sqrt{y^2-z^2}.$ 16. $(x+y)\sqrt{(x-y)}.$
17. $x\sqrt[3]{x^3-y^3}.$ 18. $b\sqrt{a(a-b)}.$ 19. $\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2a^2b(a^3+b^3)}.$
20. $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}.$ 21. $\frac{1}{3(x+1)}\sqrt[3]{3(x^3+1)}.$ 22. $\sqrt[3]{b^3-a^3}/b.$
23. $\frac{c}{a^nb^{n+1}}\sqrt[3]{bc^n}.$ 24. $\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}.$ 25. $\sqrt{27a^3}.$ 26. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$
27. $\sqrt[4]{3ax}.$ 28. $3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ \sqrt{2}/4.$
29. $2\sqrt[3]{3},\ 4\sqrt[3]{3},\ 2\sqrt[3]{3}/3.$
30. $(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2},\ xy\sqrt{x^2+xy+y^2}.$

XXXIV. 第 277 頁

1. $\sqrt[30]{243}$, $\sqrt[30]{27}$, $\sqrt[30]{9}$.　　2. $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{8a^9b^6}$, $\sqrt[12]{49b^{10}}$.

3. $3\sqrt{2}=\sqrt[6]{5832}$, $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{576}$. $\therefore 3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}$.

4. $\sqrt{3}=\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{125}$. $\therefore \sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}$.

5. 5.　　6. $2\sqrt{5}$.　　7. $2\sqrt[3]{4}$.　　8. 30.

9. $30\sqrt[3]{3}$.　　10. $\sqrt{6}/3$.　　11. $2\sqrt[12]{2}$.　　12. $\sqrt[12]{17578125}/5$.

13. 10.　　14. $a^2b^3c^6\sqrt[6]{ab^5c}$.　　15. $\sqrt[6n]{a^5}$.　　16. $\sqrt[3]{a^3b^2}$.

17. abc^2.　　18. $\sqrt[6n]{a^{2n+1}}$.　　19. $\sqrt[18]{ab^{17}}/b$.　　20. $\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}$.

21. $24\sqrt{3}$.　　22. a^4.　　23. $64xy^3z^4\sqrt{xz}$.　　24. $\sqrt[6]{a}$.

25. $\sqrt{2}$.　　26. $\sqrt[10]{ab^2c^7}/c$.　　27. $\sqrt[3]{4}$.　　28. $\sqrt[4]{8}$.

29. $\sqrt[3]{4}$.　　30. $\sqrt[12]{32}$.　　31. $\sqrt[2n]{a}$.　　32. $\sqrt[4]{a^p}$.

33. $10\sqrt{3}$.　　34. $\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}$.　　35. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$.　　36. $\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}$.

37. $\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.　　38. 0.　　39. $(3+2a)\sqrt{ax}$.　　40. $\frac{1}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}$.

41. $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+6$.　　42. $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.　　43. $7\sqrt{3}+4\sqrt{10}$.

44. $\sqrt{17}$.　　45. $10+6\sqrt{3}$.　　46. $a+\sqrt{a}+1$.

XXXV. 第 282 頁

1. $a^{\frac{2}{3}}$.　　2 $c^{\frac{2}{3}}$.　　3 $a^{\frac{6}{5}}$.　　4. $b^{\frac{19}{6}}$.

5. $\sqrt[3]{a^2}$.　　6. $\frac{1}{c^2}\sqrt{c}$.　　7 $\frac{1}{d^4}$.　　8. $\sqrt{e}$.

9. $\frac{b^3c^2}{a}$.　　10. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}}$.　　11. $\frac{1}{x^{10}}$.　　12. $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$.

13. $bc-c^2b^{-1}$.　　14. $125.2^{\frac{1}{2}}/32$.　　15. 27.　　16. 9.

17. $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{256}$.　　18. $a^{\frac{9}{4}}$.　　19. 1.　　20. $(ab)^{\frac{5}{4}}$.

21. a^4b^{-3}.　　22. $a^{\frac{1}{8}}$.　　23. $a^2b^4c^{-6}$.　　24. $-8a^6$.

25. b^6a^{-4}.　　26. $b^{\frac{3}{4}}$.　　27. $a^{-1}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}$.　　28. $5a^{11}/4$.

29. $a^{\frac{1}{3}}b^{-1}c$.　　30. $a^{-\frac{1}{12}}$.　　31. a^2.　　32. x^{x^3}.

33. $x^{x^2}y^{xy^2}$.　　34. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.　　35. $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$.

36. $a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$.

37. $x^2-4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}+6xy^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}+yz$.

38 e^x-e^{-x}.　　39. $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$　　40. $x+1+x^{-1}$.

XXXVI. 第284頁

1. $1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}$.　　2. $a^{-\frac{1}{2}}-\frac{a^{-1}x^{-\frac{2}{3}}}{2}+\frac{3a^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}}{8}-\frac{5a^{-\frac{1}{3}}x^{-2}}{16}$.

3. $9-\frac{4x}{3^2}-\frac{4x^2}{3^6}-\frac{32x^3}{3^{11}}$.

4. $a+\frac{1}{m}a^{1-m}x+\frac{1-m}{m^2 2!}a^{1-2m}x^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{m^3 3!}a^{1-3m}x^3$.

5. $a^4+4a^5b^{-\frac{1}{2}}+10a^6b^{-1}+20a^7b^{-\frac{3}{2}}$.

6. $x^{-3}-6x^{-\frac{7}{2}}y^{\frac{1}{3}}+21x^{-4}y^{\frac{2}{3}}-56x^{-\frac{9}{2}}y$.

7. $\frac{1}{2}-\frac{3x}{4}+\frac{9x^2}{8}-\frac{27x^3}{16}$.　　8. $1-\frac{2x}{5}+\frac{7x^2}{25}-\frac{28x^3}{125}$.

9. $1-\frac{9x^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{135x}{8}-\frac{945x^{\frac{3}{2}}}{16}$.　　10. $-55x^9$.

11. $\frac{-663}{2^{10}}x^{\frac{21}{2}}y^3$.　　12. $-\frac{19\cdot 23\cdot 31\cdot 33}{2^{25}}x^{\frac{3}{2}}$.

13. $-\frac{5}{2^5}x^{-2}$.　　14. 1. 9.9498. 2. 3.9578. 3. 1.9873.

XXXVII. 第287頁

1. $a^{\frac{3}{7}}$.　　2. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$.　　3. $x^{\frac{1}{2}}$.　　4. $\sqrt{a}-\sqrt{bc}$.

5. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(x+y-z-2\sqrt{xy})$.

6. $(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}-\sqrt{zx})(xy+yz-zx-2y\sqrt{xz})$.

7. $[\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{u}][x+y-u-z-2(\sqrt{xy}-\sqrt{uz})]$

$[x^2+y^2+z^2+u^2-2xy-2xz-2xu-2yz-2yu-2zu-8\sqrt{xyzu}]$.

8. $(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$.　　9. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

10. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$.　　11. $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

12. $(x^9)^{\frac{11}{12}}-(x^9)^{\frac{10}{12}}(y^8)^{\frac{1}{12}}+(x^9)^{\frac{9}{12}}(y^8)^{\frac{2}{12}}-\cdots+(y^8)^{\frac{11}{12}}$.

13. $(1-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})(1+xy^{\frac{2}{3}}+x^2y^{\frac{4}{3}})$.　　14. $(x^{\frac{1}{3}}-1)$.

15. $3+\sqrt{5}$.　　16. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$.　　17. $(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$.

18. $(1-\sqrt[3]{3})$.　　19. $\sqrt[3]{3^2}(1-\sqrt[3]{2})$.　　20. $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{b^4}}{ab}$.

21. $\frac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$.　　22. $\frac{3-\sqrt{6}}{15}$.　　23. $\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}$.

24. $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$.　　25 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.　　26. $\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$.

27. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})}{2}$.　　28. $\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3^2}+1)}{4}$.

29. 0.447.　　30. 2.756.　　31. 1.732.

XXXVIII. 第 290 頁

1. 256.　**2.** 1/9.　**3.** $\pm 16\sqrt{2}$.　14.　**5.** 1.

6. $\left(\dfrac{d}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2$.　**7.** 3.　**8.** 5.　**9.** -1.

10. 34/15.　**11.** 2.　**12.** 2.　**13.** 6.　**14.** 5/4.

15. $\begin{cases} x=-1,\ y=3, \\ x=3,\ y=(73-10\sqrt{10})/9. \end{cases}$　**16.** $x=10,\ y=3$.

XXXIX. 第 293 頁

1. $\sqrt{7}+\sqrt{2}$.　**2.** $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.　**3.** $5-\sqrt{7}$.　**4.** $(\sqrt{10}+\sqrt{15})/5$.

5. $(3\sqrt{2}-\sqrt{10})/2$.　**6.** $\sqrt[4]{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.　**7.** $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$.

8. $\sqrt{a}-\sqrt{b-a}$.　**9.** $1+\sqrt{2}$.　**10.** $1+2\sqrt{3}$.

XL. 第 297 頁

1. $7i$.　**2.** $3\sqrt{2}i$.　**3.** $-4\sqrt{6}$.　**4.** $2i$.　**5.** -2.

6. 1.　**7.** i.　**8.** $-i$.　**9.** $(x-y)i$.

10. $2-\sqrt{6}+(2\sqrt{2}+\sqrt{3})i$.　**11.** $648\sqrt{6}$.　**12.** -22.　**13.** 0.

14. 10.　**15.** 16.　**16.** $-i$.　**17.** $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$.

18. $1-\sqrt{2}i$.　**19.** $1-\sqrt{3}i$.　**20.** $\sqrt{2}(1+i)$.　**23.** $x=5/3,\ y=-4/3$.

24. $3+2i$.　**25.** $1+i$.　**26.** $(a+b)+(a-b)i$.

§ 630. 第 299 頁. 例 1, 2

1. $2,\ -4$.　**2.** $3,\ 1/2$.　**3.** $0,\ 5$.　**4.** $\pm\sqrt{6}/3$.

1. $6x^2+13x+6=0$.　**2.** $x^2-a^2=0$.　**3.** $4x^2-x=0$.

XLI. 第 301 頁

1. $5,\ -7$.　**2.** $3/2,\ -1/2$.　**3.** $5\pm\sqrt{7}$.

4. $(-1\pm 2i)/3$.　**5.** $(-3\pm\sqrt{41})/4$.　**6.** $9/2,\ 1/2$.

7. $12,\ -21$.　**8.** $17/6,\ -15/2$.　**9.** $23/4,\ 9/2$.

10. $32/5,\ -2/3$.　**11** $1+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$.　**12.** $2,\ 4+i$.

13. $4,\ 4$.　**14.** $2,\ 2$.　**15.** $(1\pm\sqrt{5})/2$.

16. $3,\ -5$.　**17.** $3/2$.　**18.** $5,\ 16/7$.

19. $1/2$.　**20.** $5,\ 5/2$.　**21.** $1,\ -58/91$.

22. $-2,\ 1/4$.　**23.** $1/3,\ -3a$.　**24.** $a+b,\ a-b$.

25. $b/c,\ -a/c$.　**26.** $2a+b,\ 2a-b$.　**27.** $a(3c\pm 2b)$.

28. $\dfrac{a+b}{a-b},\ \dfrac{a-b}{a+b}$.　**29.** $\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$.

30. $\dfrac{a^2+b^2}{2a},\ \dfrac{a^2+b^2}{2b}$.

XLII. 第302頁

1. 22, 23. 2. 15, 16. 3. 5, 6.
4. 13, 14, 15. 5. 86. 6. 7/5.
7. 42. 8. \$40. 9. 5%.
10. 4%. 11. 100. 12. 6, $6\frac{2}{3}$ 呎。
13. 144, 112 平方吋。 14. $2(\sqrt{2}-1)$. 15. 21 響.
16. 每小時 40, 45 哩。 17. $1\frac{1}{2}$ 小時, 每小時 4 哩。 18. 4 小時20分。
19. 6. 20. 2 小時。
21. (1) 1/4 秒; 1 秒; 否。 (2) 在 1/2 秒中。 (3) 在 3/2 秒中。

XLIII. 第308頁

1. 2 及 -1. 2. ∞, $-2/3$; ∞, ∞. 3. $(x+2y-2)(3x-y+1)$. 4. ± 1.
5. p^2-4q, $p^4-4p^2q+2q^2$, $(p^2-2q)/q$. 6. $-45/32$, $-7/2$.
7. $x^2-x+2=0$, $2x^2+x+1=0$, $x^2+2x+8=0$, $x^2-x+2=0$.
8. 1. 極小 $=-13$. 2. 極小 $=31/8$. 3. 極大 $=5$.
 4. 極小 $=-1/2$, 極大 $=1/2$. 5. 極小 $=4$.
 6. 極大 $=-(2+\sqrt{2})/4$, 極小 $=-(2-\sqrt{2})/4$.
9. 一正方形。
10. 向距最近點 $2\frac{2}{3}$ 哩之點。
11. 36 呎, 3/2 秒。

§ 643. 第310頁.例3

1. $1/2$, $(2\pm i\sqrt{2})/3$. 2. -1, 4, $1\pm\sqrt{2}$.

§ 644. 第311頁.例7

1. ± 3, $\pm\sqrt{6}/3$. 2. $(3\pm\sqrt{5})/2$, $(3\pm\sqrt{17})/2$.
3. 0, $-a$, $-a(1\pm\sqrt{57})/2$. 4. -3, 2, $-(1\pm\sqrt{19})/3$.

§ 645. 第313頁.例4

1. 1, $(1\pm i\sqrt{3})/2$. 2. $(3\pm\sqrt{5})/2$, $(1\pm i\sqrt{3})/2$.
3. -1, $(1\pm i\sqrt{3})/2$, $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

§ 646. 第313頁.例3

1. -2, $1\pm i\sqrt{3}$. 2. $\sqrt{2}(1\pm i)/2$, $-\sqrt{2}(1\pm i)/2$.
3. $\pm i$, $(\sqrt{3}\pm i)/2$, $(-\sqrt{3}\pm i)/2$.

§ 648.　第 314, 315 頁

2. $1/4,\ -3/4.$　　4. $1,\ 6.$　　7. $3,\ 7.$　　9. $(6+\sqrt{6})/3.$

XLIV.　第 316 頁

1. $\pm 3/2,\ \pm\sqrt{2}.$
2. $7\sqrt[3]{63}/9.$
3. $\pm 2,\ \pm 3\sqrt{2}.$
4. $-1,\ -1,\ -1,\ 2/3,\ 2/3,\ 3/2.$
5. $1,\ -2,\ \pm\sqrt{3}i.$
6. $1,\ -1,\ 1\pm i.$
7. $1,\ -1,\ 5/3,\ -1/3.$
8. $7,\ -1,\ 3\pm\sqrt{5}.$
9. $(-1\pm\sqrt{17})/4,\ (-1\pm\sqrt{7}i)/4.$
10. $1,\ 1,\ \pm i.$
11. $\pm i,\ (-1\pm i\sqrt{3})/2.$
12. $1,\ 2\pm\sqrt{3},\ 3\pm 2\sqrt{2}.$
13. $3,\ 3(-1\pm\sqrt{5}+i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}})/4,\ 3(-1\pm\sqrt{5}-i\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}})/4.$
14. $1,\ (1\pm i\sqrt{3})/4.$
15. $0,\ \pm\sqrt{3}i.$
16. $5,\ -1,\ 2\pm 3i.$
17. $-a,\ -b,\ -(a+b)/2.$
18. $(a+b)/2,\ [a+b\pm\sqrt{2-(a-b)^2}]/2.$
19. $0,\ -9/5,\ -(15\pm\sqrt{401})/22.$
20. $\pm a,\ \pm 1/a.$
21. $1,\ -1/3,\ (1\pm\sqrt{19})/3.$
22. $1,\ -1/2.$
23. $2,\ 3.$
24. $3,\ -2.$
25. $3/2.$
26. $16/25.$
27. $1,\ -3.$
28. $0,\ 16,\ 81.$
29. $3.$
30. $(6+\sqrt{6})/3.$
31. $1/5.$
32. $4/5.$
33. $1.$
34. $\dfrac{27abc-(a+b+c)^3}{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}.$
35. $6,\ -3,\ (3\pm i\sqrt{71})/2.$
36. $0,\ -2a.$
37. $\pm\sqrt{182}/14,\ \pm 3\sqrt{7}/7.$

XLV.　第 320 頁

1. $2/3,\ -11/9;\ -4,\ -13/3.$
2. $-1,\ -1;\ 5/3,\ 3/5.$
3. $1/15,\ 2/15;$ 一無窮解.
4. $3,\ 1;\ -1/15,\ -41/5.$
5. $0,\ 0;\ 51/14,\ -17/14.$
6. $1,\ 1/2;\ 12/5,\ 32/15.$
7. 無有限解答.
8. $5,\ 9;\ 333/28,\ 185/42.$
9. $1,\ 1/4;\ -12/13,\ -4/9.$
10. $1,\ -3;\ -1,\ 3;\ 2,\ -3.$
11. $2,\ -2;\ -2,\ 2;\ -1\pm\sqrt{3},\ 1\pm\sqrt{3}.$
12. $0,\ 0;\ 15/8,\ 9/8;$ 二無窮解.
13. $m=1$ 或 $-1.$
14. $m=1,\ c=1/3;\ m=-1/2,\ c=-1/3.$
15. $(2x-y+4)(x+y+3).$

§ 655.　第 321 頁. 例 2

1. $1,\ 0;\ -1,\ 0.$
2. $3,\ 1/5;\ 3,\ -1/5;\ -3,\ 1/5;\ -3,\ -1/5.$

§ 656　第 321 頁. 例 3

1. $2,\ 1;\ 3,\ -1;$ 二無窮解.
2. $3i\sqrt{14}/14,\ i\sqrt{14}/7;\ 3i\sqrt{14}/14,\ -i\sqrt{14}/7;$
$-3i\sqrt{14}/14,\ i\sqrt{14}/7;\ -3i\sqrt{14}/14,\ -i\sqrt{14}/7.$

§ 657. 第 323 頁. 例 5

1. $0, 0; 0, 0; 5, -5; -3, -9$.
2. $-2, 3; -3, 2; (3\pm\sqrt{17})/2, (-3\pm\sqrt{17})/2$.

§ 658. 第 323 頁. 例 2

$1, 2; -1, 1; (1\pm i\sqrt{23})/4, (1\pm i\sqrt{23})/4$.

XLVI. 第 324 頁

1. $2, 3; 2, -3; -2, 3; -2, -3$.
2. $2, 1/3; 2, -1/3; -2, 1/3; -2, -1/3$.
3. $7, -1; -5, 2$; 二無窮解。
4. $-5, -1, 15/2, 3/2; 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$.
5. $2, -3; -2/3\ 7/3; (-6\pm2\sqrt{6})/3, (3\mp4\sqrt{6})/3$.
6. $1, 0; -1, 2$; 二無窮解。
7. $5, -1; 5, -21\ -7, 19\pm2\sqrt{85}$.
8. $5, 5; -5, -5; \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i, \sqrt{5}i$.
9. $3, 1; -3, -1; 3\sqrt{5}i, -7\sqrt{5}i/5; -3\sqrt{5}i, 7\sqrt{5}i/5$.
10. $1, 1/2; -1, -1/2; \sqrt{91}/5, \sqrt{91}/16; -\sqrt{91}/5, -\sqrt{91}/16; 0, 0; 0, 0;$
    $0, 0; 0, 0$; 八無窮解。
11. $3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}; -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}; -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$.
12. $5, 4; -4, -5; 10\pm2\sqrt{30}, -10\pm2\sqrt{30}$.
13. $2, 4; 3, -1; (-5\pm\sqrt{13})/2, (-3\pm5\sqrt{13})/2$.

XLVII. 第 325 頁

1. $4, 1; -1, -4$; 一無窮解。
2. $125, -27; -27, 125$; 一無窮解。
3. $5, 3; -5, -3; 3, 5; -3, -5$; 四無窮解。
4. $2, 3; -1+\sqrt{3}i, 3(-1+\sqrt{3}i)/2; -1-\sqrt{3}i, -3(1+\sqrt{3}i)/2$; 六無窮解。
5. $-2, 2; -2, -2; (2\pm2\sqrt{7})/3, (1\pm\sqrt{7})/3$; 二無窮解。
6. $0, 0; 6, 9; 50/21, -20/21$; 一無窮解。

XLVIII. 第 328 頁

1. $9, -4; -4, 9$.
2. $14, -2; -2, 14$.
3. $17, 2; -17, -2; 2, 17; -2, -17$.
4. $9, 2; -2, -9$.
5. $8, 1; 1, 8$; 一無窮解。
6. $7, 5; 5, 7; 7\omega, 5\omega; 5\omega, 7\omega; 7\omega^2, 5\omega^2; 5\omega^2, 7\omega^2$,
   其中 $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$; 三無窮解。

7. $4/3,\ 1/4;\ 1/3,\ 1;$ 一為無窮解.
8. $3,\ 1;\ -1,\ -3;\ 1\pm i\sqrt{10},\ -1\pm i\sqrt{10}.$
9. $2,\ 0;\ 0,\ 2;\ 1\pm i\sqrt{3},\ 1\mp i\sqrt{3};$ 一為無窮解.
10. $4,\ -7/2;\ -7/2,\ 4.$
11. $5,\ -4;\ -4,\ 5;\ -10+3\sqrt{11},\ -10-3\sqrt{11};\ -10-3\sqrt{11},$
 $-10+3\sqrt{11};$ 二為無窮解.
12. $3,\ 1;\ 1,\ 3;\ -3,\ -1;\ -1,\ -3;\ \pm\sqrt{5}i,\ \pm\sqrt{6}i;\ \pm\sqrt{6}i,\ \pm\sqrt{5}i.$
13. $2,\ -5;\ -5,\ 2;\ (3\pm\sqrt{31}i)/2,\ (3\mp\sqrt{31}i)/2.$
14. $0,\ 2;\ 2,\ 0;\ (-23\pm\sqrt{389})/12,\ (-23\mp\sqrt{389})/12.$
15. $0,\ 0;\ \pm\sqrt{5},\ \pm\sqrt{5};\ \pm\sqrt{5}i,\ \mp\sqrt{5}i;\ \pm\sqrt{10}(1+i)/2,\ \mp\sqrt{10}(1-i)/2;$
 $\pm\sqrt{10}(1-i)/2,\ \mp\sqrt{10}(1+i)/2.$

XLIX. 第 329 頁

1. $4,\ -1,\ 3;\ -2,\ 5,\ -3.$
2. $4,\ 1,\ 2;\ -4,\ -1,\ -2.$
3. $-(a^2\pm bc)/a,\ -(b^2\pm ca)/b,\ -(c^2\pm ab)/c.$

L. 第 330 頁

1. $2/3,\ -11/9;\ -4,\ -13/3.$
2. $4,\ 3;\ -3,\ -4.$
3. $(b+a)/2,\ (b-a)/2;\ (a-b)/2,\ -(a+b)/2.$
4. $\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}},\ \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}};\ -\sqrt{\dfrac{a-b}{a^2+b^2}},\ \pm\sqrt{\dfrac{b-a}{a^2+b^2}}.$
5. $1,\ 1/4;\ -12/13,\ -4/9.$　　6. $a,\ b;\ 2a-b,\ 2b-a.$
7. $5,\ 1/2;\ 1/2,\ 5.$　　8. $a,\ b/2;\ -a,\ -b/2;\ a/2,\ b;\ -a/2,\ -b.$
9. $4,\ 1;\ -1,\ -4;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0.$　　10. $\dfrac{2ab}{b-a},\ \dfrac{2ab}{b+a};\ 0,\ 0.$
11. $3,\ -7;\ 35/2,\ 15/2;\ 0,\ 0;\ 0,\ 0.$
12. $5,\ 2;\ -5,\ 2;\ 2,\ -4/5;\ -2,\ -4/5.$
13. $3,\ 1;\ -3,\ -1;\ 6,\ 3;\ -6,\ -3.$
14. $6,\ 1;\ -27,\ -10;\ (7\pm3\sqrt{65})/2,\ (3\pm\sqrt{65})/2.$
15. $7/2,\ 2;\ -2,\ -7/2;\ 136/65,\ 238/65;\ -238/65,\ -136/65.$
16. $\alpha,\ \beta;\ \alpha\omega,\ \beta\omega;\ \alpha\omega^2,\ \beta\omega^2;$ 其中 $\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b},\ \beta=\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{a},$
 又 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2;$ 六無窮解.
17. $\alpha,\ \beta;\ \alpha\omega,\ \beta\omega;\ \alpha\omega^2,\ \beta\omega^2;$ 其中 $\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a-b)},\ \beta=\dfrac{\sqrt[3]{4(a^2-b^2)^2}}{2(a+b)},$
 又 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2;$ 六無窮解.

18. $a/(a^2+b^2)$, $b/(a^2+b^2)$; 0, 0; 二無窮解。
19. $4a$, a; $-4a$, $-a$.
20. 3/2, 1/2; −1/2, −3/2; 其一爲無窮解。
21. a, 0; 0, a; $a(1\pm\sqrt{7}i)/2$, $a(1\mp\sqrt{7}i)/2$.
22. 7, 3; 3, 7; $(-17\pm\sqrt{646})/5$, $(-17\mp\sqrt{646})/5$.
23. $(3\pm\sqrt{3}i)/2$, $(3\mp\sqrt{3}i)/2$; 0, 0; 0, 0.
24. $\pm a\sqrt{3}$, 0; $2a$, a; $-2a$, $-a$.
25. 1, 4; 4, 1; 其一爲無窮解。
26. 3, 0; 0, 4; 0, 0; 0, 0.
27. 5, 0; 0, 5; $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$.
28. 2, 4; −9, 15; −1, −1; 0, 0.
29. 3/2, 1/2; 1/2, 3/2; $1\pm i\sqrt{1155}/35$, $1\mp i\sqrt{1155}/35$.
30. $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$, $\sqrt{a^2+1}$; $\dfrac{-\sqrt{a^2+1}}{a}$, $-\sqrt{a^2+1}$.
31. 2, 0; −3, 5; 其一爲無窮解。
32. 1, 5/3; 2, −4/3; $(-9\pm\sqrt{21})/6$, $(-1\pm3\sqrt{21})/6$.
33. 1, 3, 1; 149/5, −1/5, −15.
34. 1, 2, −3, 0; −1, −2, 3, 0.
35. 3, 1, 1; −3, −1, −1.
36. 1, −1, 2; −14/13, 23/13, 17/13; $(-29\pm3\sqrt{105})/26$,
$(-11\mp2\sqrt{105})/13$, $(-1\pm\sqrt{105})/26$.

LI. 第 331 頁

1. 7 及 5.　　2. 6 及 3.　　3. 5/6.
4. 8, 9 及 20.　　5. 12 及 5 呎。　　6. 15, 9 及 12 吋。
7. 39, 36 及 15 吋。　　8. 16, 14, 9 呎。　　9. 14 及 12 吋。
10. A, \$4.50; B, \$5.　　11. \$1200, 4%.
12. 子二人,各得 \$10,000; 孫五人,各得 \$8,000.
13. 每小時 4 哩及 2 哩。　　14. A, 3 小時; B, 4 小時; C, 6 小時。
15. A, 每秒 24 吋; B, 每秒 20 吋。
16. A, 每秒 8 吋; B, 每秒 2 吋.　　17. 18 哩。　　18. 96 哩。

LII. 第 339 頁

17. 交 x 軸於兩點 $3\pm\sqrt{8}$, 0; 切 y 軸於 0, 1.
20. $m=\pm1$.　　21. $c=1$ 或 4/3.　　23. $y=2x+1$ 及 $x+2y=0$.
24 當 $|\lambda|=2$, 拋物線; 當 $|\lambda|<2$, 橢圓形; 當 $|\lambda|>2$, 雙曲線.

LIII. 第 341 頁

6. $x<30$.　　7. $x<-2$ 或 >4.　　8. $-1<x<3$, 或 $x>6$.

LIV. 第 346 頁

1. $x=20-17t$, $y=6-6t$. 對應於 $t=0, -1, -2, \cdots$ 之解答爲正。
2. $x=2-12t$, $y=-6-43t$. 對應於 $t=-1, -2, \cdots$ 之解答爲正。
3. $x=-17+39t$, $y=7-16t$. 無正解。
4. $x=-2+23t$, $y=43-72t$. 無正解。
5. $x=16-27t$, $y=28-49t$. 對應於 $t=0, -1, -2, \cdots$ 之解答爲正。
6. $x=54-97t$, $y=21-47t$. 對應於 $t=0, -1, -2, -3, \cdots$ 之解答爲正。
7. $x=2+21t$, $y=3-26t$, $z=-1-11t$. 無正解。
8. $x=10-14t$, $y=-4+35t$, $z=-2+15t$. 無正解。
9. $x=u$, $y=2v+1$, $z=2u+3v$. 解答之對應於 u 及 v 之正值者爲正。
10. $x=7-3u-2v$, $y=1+2u$, $z=v$. 正解答爲 7, 1, 0; 5, 1, 1; 3, 1, 2; 1, 1, 3; 4, 3, 0; 2, 3, 1; 0, 3, 2; 1, 5, 0.
11. 五十種正解答。　　12. $\frac{41}{35}=\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$.
13. 2 犢, 16 羊; 或 8 犢, 9 羊; 或 14 犢, 2 羊.
14. 15, 2, 6; 12, 4, 7; 9, 6, 8; 3, 10, 10.　　15. 314.
16. 距任一端之第 167 與第 169 分段。

LV. 第 350 頁

1. 32; 192/5; $10a^2b^2$; $\sqrt{30}$.　　2. $-3:2$; $1:5$.
3. $x:y=-1:2$ 或 $3:1$, $y:x=-2:1$ 或 $1:3$.
13. (1) 0, 0, 3/2. (2) 0, 0, 5, 8/7.
14 104, 156, 260.　　15. 從 A 取 8 響, 從 B 取 10 響.

LVI. 第 353 頁

1. $-14/5$.　　2. $\pm 2\sqrt{3}/3$.　　3. $x^2+3y-4=0$.　　4. -72.
7. 3.　　8. 15/8.　　9. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$.

LVII. 第356頁

1. 60, 630; $25\frac{1}{2}$, 225. **2.** $n(n+1)/2$; n^2; $n(n+1)$.
3. $n(3n-2)$. **4.** $-1/3, 0, 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3$.
5. $-1/2, 0, 1/2, 1, 3/2$. **6.** $l=20$, $S=160$. **7.** $a=3$, $S=-14$.
8. $d=3$, $S=178$. **9.** $n=52$, $d=-1/2$. **10** $d=2$, $l=12\frac{6}{7}$.
11. $n=28$, $S=187\frac{3}{5}$. **12.** $a=31$, $l=-1$. **13.** $a=25$, $d=-3$.
14. $n=6$, $a=-72$. **15.** $n=5$, $l=18$. **18.** $1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{5}{6}, 2, \cdots$.
19. 3, 5, 7. **20** 55, 350. **21.** \$1716.
22. 在9小時內.兩出發點間之中途。

LVIII. 第360頁

1. 162, 122. **2.** $13\frac{1}{2}$, $32\frac{1}{2}$. **3.** 8; 2/3; 25/12.
4. $\frac{341}{999}$, $\frac{78}{1375}$, $8\frac{4516}{9999}$. **5** $l=-3000$, $S=-3333.33$. **6.** $r=1/2$, $S=95\frac{1}{4}$.
7. $n=8$, $S=255/16$. **8.** $a=1$, $S=61$. **9.** $n=5$, $l=2/3$.
10. $r=5$, $l=-375$. **11.** $n=5$, $r=4/3$. **12.** $a=45/8$, $l=-20/27$.
13. $n=6$, $a=4$. **14.** $a=10$, $r=3.5$.
15. $a=3$, $r=2$. **16.** ab. **17.** 15, 45, 135.
18. 3/16. **19.** 8, 20, 50, 125. **20** 1, -3, 9.
21. 3, 12, 21 或 63, 12, -39. **22** -2, 2, 6, 18 **23** 75 呎。

LIX. 第363頁

1. 3/11, 3/13. **2.** 30/23. **3.** 75/7, 150/13, 75/6, 150/11.
4. 2. **5** 3 及 5. **6.** 2 及 8.

LX. 第369頁

1. 191 及 1350. **2.** 6560 及 180, 360.
3. (1) 第二次;第十八項爲 224.
(2) 第三次;第二十項爲 10, 118.
(3) 第三次;第十二項爲 -1.
(4) 第四次;第十項爲 10, 100.
4. 第三次;第 n 項爲 $n(n+1)(n+2)$. 首 n 項之和爲 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
第四次;第 n 項爲 $2n(n+1)^3$.
5. 560, 105. **6.** 1149. **7.** 962.
8. 2024. **9.** 220, 335. **10.** 1274.
13. 第二次;首 n 項之和爲 $n(n^2+2)/3$.
第三次;首 n 項之和爲 $n(n+1)(n+2)(n+3)/4!$.

LXI. 第 374 頁

1. $y=4+23x+26x^2+7x^3$; 當 $x=-5/2$ 時, 則 $y=-3/8$;
   當 $x=-1/2$ 時, 則 $y=-15/8$.
2. $f(x)=-90+73x-16x^2+x^3$; $f(12)=210$.
3. 704.3716. 4. 110.592. 5. 0.04237. 6. 20.8734.
7. $(2520-806x-9x^2-13x^3)/840$.

LXII. 第 378 頁

1. 2, 1/2, 6, 4, 6, −3, −6, −3, −2/3, 7/3, 3/2.
2. 1.0791, 0.6532, 0.1505, 0.2594. 3. $(3\log_a 2+\log_a 3+2\log_a 5)6$.
4. (1) $\frac{2}{3}\log_a b-\frac{1}{2}\log_a c-\frac{4}{5}\log_a d$. (2) $\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\log_a b$.

LXIII. 第 389 頁

下列答數皆用四位表求得之, pp. 384, 385; 並皆依 §751 末之法則.

1. 36,460.	2. 82.28.	3. 1.210×10^{13}.	4. -1.744×10^{-5}.
5. 22.13.	6 0.1151.	7. -4.558×10^{7}.	8. 16.38.
9. −0 4255.	10. 77.	11. 9.472.	12. 137.
13. 1.413.	14. 8.218.	15. −0.676.	16. 13.46.
17. 0.01.	18. 5.461.	19. 1.101.	20. 5.34.
21. 9108.	22. 632.8.	23. −50.22.	24. 2.453×10^{-6}.
25. −73.6.	26. 2.647×10^{13}.	27. 0.5381.	28. 96.56.
29. 15.77.	30. 2.652×10^{5}.		

LXIV. 第 392 頁

第 391 頁頂上之公式, 其對於每半年, 每三個月等, 須爲 $A=P(1+r/2)^{2n}$, $A=P(1+r/4)^{4n}$ 等.

1. 3.925, −1.578, 0.8361.
2. (1) $x=6$. (2) $x=1$ 或 2. (3) $x=2.152$.
3. (1) $x=2$, −5. (2) $x=4.642$. (3) $x=3.051$. (4) $x=3.537$.
4. $41,410. 5. $10,010. 7. $694.80. 8. $8,030.
9. $20,730, $30,000. 10. $b=496.4$, 面積 $=77,500$. 11. 5179.
12. 表面積, 6998; 體積, 55050.

§ 763. 第 396 頁

4. 65. 5. 380 6. 144.
7. 1800. 9. 325. 10. 3600.

§ 764.　第 397 頁

3.　144.

§ 765.　第 397 頁

1.　5, 25, 125.　　2.　343.

§ 766.　第 398 頁

4.　630,630.　　5.　715.

§ 769.　第 401 頁

6.　136, 252, 8855.　　7.　15.　　8.　8.　　9.　220.

10.　792, 330, 462.　　11.　120, 420, 252.　　12.　3,953,520.

13.　10010·7!　　14.　$52!/(13!)^4$, $52!/(13!)^4 \cdot 4!$.　　15.　2250.

§ 770.　第 402 頁

1.　15.　　3.　41.

§ 771.　第 402 頁

$C_6^{12}=924$, $C_7^{15}=6435$.

LXV.　第 405 頁

1.　24.　　2.　720.　　3.　336.　　4.　210, 5040.　　5.　161,700.

6.　30.　　7.　420.　　8.　(1) 90,720.　(2) 322,560,　(3) 4320.

9.　60,480, 504, 84.　　10.　60.　　11.　1680.

12.　6.　　13　(1) 399.　(2) 259.　　14　360.

15.　1232, 224.　　16.　31.　　17.　3,783,780.

18.　462.　　19.　1446.　　20.　5096520·15!.

21.　825.　　22.　(1) 60.　(2) 325.　　23.　2970.

25.　63,063.　　26.　145,152.　　27.　300.

28.　5^{15}, $15!/(3!)^5$.　　29　5760.　　30　37,740.

32.　126.　　33.　252　　34.　5040, 840, 7560.

LXVI.　第 409 頁

1.　$\Sigma a^3 + 3\,\Sigma a^2b + 6\,\Sigma abc$.

2.　$\Sigma a^5 + 5\,\Sigma a^4b + 10\,\Sigma a^3b^2 + 20\,\Sigma a^3bc + 30\,\Sigma a^2b^2c + 60\,\Sigma a^2bcd$.

3.　83,160, 34,650, 16,632.　　4.　1[illegible],600.　　5.　15,120.　　6.　4,455.　　7.　26,396.

LXVII. 第414頁

1. 5比3偏於失敗; 5/8. 2. 10/19, 9/19. 3. $37.50.
5. (1) 7/16, 3/8, 3/16. (2) 1/8 7/40. (3) 1/560, 143/280, 9/40.
(4) 21/65, 27/65. (5) 45/286.
6. 1/6, 4/9. 7. 1/6. 8 11/36, 5/18. 9. 1/12.
10. 13/18, 5/18. 11. 5/42, 5/14, 1/21. 12. 256/270725, 4/270725.
13. $10(143)^4 13!39!/52!$. 14. 1/36, 1/54. 15. 2/7.

§785. 第417頁

4. 255/256. 5. 104/105. 6. 35/81. 7. 5/8, 1/8, 5/24, 1/24.

§787. 第420頁

5. 607/2970. 6. 5/6. 7. 6/11, 5/11.

§790. 第421頁

3. 105/512, 193/512. 4. 5/324, 7/432 5. 112/243. 6. 16/81.

LXVIII. 第422頁

1. (1) 7/225. (2) 14/75. 2. 66/455. 3. $3.58.
4. 11/16. 5. 1/24, 1/4, 11/24, 1/4. 6. 7比2.
7. 7比1, 103比5. 8. 7/165, 16/33. 9 13比11.
10. 30比31. 11. 7/15, 53/165, 7/33; 9/19, 6/19, 4/19.
12. $11. 13. 3/5. 14. 否.
15. 59049/100000. 16. 64/81. 17. $191\cdot 3^5/5^7$.
18. $1. 19 5103/32768, 1012581/1048576.
20. 81/128. 21. $48, $16.

LXX. 第431頁

1. (1) $x^3-2ax^2+(a^2-ab-b^2)x+a^2b+ab^2=0$.
(2) $6x^5-43x^4+78x^3-5x^2-12x=0$.
4. 6及 -2. 6. $2, 3, -4$.
7. $2, 5, -5$. 8. $-1/3, (1\pm\sqrt{3}i)/2$.
9. $0, 1/2, -2\pm\sqrt{3}$. 10 $-1, -1, -1\pm\sqrt{2}i$.
11. $1, -1, -2, -3/2$. 12. $-3, -2/3. \pm i$.
13. $-2, 5, 7, (-1\pm\sqrt{3}i)/2$. 14. $-1, 2, 2, (1\pm i)/2$.
15. $-1, 2, 3, -3, -4$. 16. $2, 1/2, -1/2, 2/3$.

17. $-1, -1, 3, 3, 3.$
18 $-2, 4, 5, 3/2.$
19. $-2, 1/2, 3/2, \pm i.$
20 $2, 2, -3, -4, -5.$
21. $-2, -2, -1/2, (-1\pm\sqrt{3}i)/2.$
22. $6, 8, 1/2, 1/3.$
23. $-1/2, -3/5, (-3\pm\sqrt{5})/2.$
24. $1/2, 1/3, 2/3, 3/2.$
25. $-1/2, -2/3, -3/2, (1\pm\sqrt{11}i)/2.$
26. $1, -1, -2, -3/2, \pm\sqrt{2}i.$
27. $1, -1, -2, -3/2, -1\pm\sqrt{2}i.$
28. $1, -1, 2, 2/5, (-1\pm\sqrt{3}i)/2.$

LXXI. 第435頁

1. $3/2.$
2. (1) $1, -3/2, 9/4.$ (2) $1+2\sqrt{2}i, -3, 1-2\sqrt{2}i.$
3 (1) $-2-\sqrt{5}, -2, -2+\sqrt{5}.$ (2) $1, 3, 5.$
5. $r^2-rp+q-1=0.$
6. $-1\pm\sqrt{2}i, -1\pm\sqrt{2}i.$
7. $-1, 3/2, 3/7.$
8. $-4, -6, 6, 5.$
9. (1) $x^3-px^2+qx-r=0.$
(2) $x^3+kpx^2+k^2qx+k^3r=0.$
(3) $rx^3+qx^2+px+1=0.$
(4) $x^3+(p-3k)x^2+(q-2kp+3k^2)x+(r-kq+pk^2-k^3)=0.$
(5) $x^3+(2q-p^2)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0$
(6) $r^2x^3+(q^2-2pr)x^2-(2q-p^2)x+1=0.$
10. (1) $17/4.$ (2) $-37/8.$ (3) $1.$ (4) $5/2.$
11. (1) $2/3.$ (2) $-11/3.$ (3) $-1.$ (4) $-31.$ (5) $-7/3.$

LXXII. 第443頁

1. $x^7-3x^4+2x^2+6x-7=0.$
2. (1) $x^4-x^3-8x^2+24x+64=0.$
(2) $162x^4+27x^3-36x^2-18x+8=0.$
3. $10x^6+9x^5+3x^3-x^2+5=0.$
4. (1) $2x^5+21x^4+88x^3+181x^2+180x+74=0.$
(2) $2x^5-9x^4+16x^3-17x^2+12x+2=0.$
5 $x^4-10x^3+225x^2+1080x-16,875=0.$
6. $3x^4-162x^2-647x-733=0.$
7. (1) $x^3-3x^2+10=0$, 或 $x^3+3x^2+6=0.$
(2) $x^2+2x^2-4=0$, 或 $27x^3-54x^2-76=0.$
8 $x^4-x^3+6x^2-x+4=0.$
9. $x^4+9x^3+29x^2+39x+17=0.$
10. (1) $rx^3+(q^2-2pr)x^2+r(p^2-2q)x+r^2=0.$
(2) $(r-pq)x^3+(p^3-2pq+3r)x^2+(3r-pq)x+r=0.$
11. (1) $x^3+4x^2-3x+2=0.$ (2) $x^3-6x^2+17x-8=0.$
(3) $4x^3-9x^2+18x-27=0.$ (4) $8x^3+16x^2+9x+2=0.$
(5) $16x^3+24x^2+27x-8=0.$
12. (1) 2 及 $-6.$ (2) 4 及 $-1.$ (3) 4 及 $-7.$
(4) 2 及 $-5.$ (5) 9 及 $-2.$ (6) 2 及 $-1.$

LXXIII. 第449頁

1. $-1\quad -1/2,\ 1\pm 2i$.
2. $1,\ 1/2,\ 2\pm\sqrt{2}$.
3. $x^4+12x^3+44x^2+18x-116=0$.
4. $x^4-2x^2+9=0$.
5. (1) 四個虛根。

   (2) 至少有二虛根。實根中，正根或負根均不能多於一。

   (3) 無正根。

   (4) 無負根。

   (5) 至少有四虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於一。

   (6) 至少有四虛根。實根中，正根不能多於一，負根不能多於二。

   (7) 至少有二虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於一。

   (8) 當 n 爲奇數時，至少有 $3n-3$ 個虛根。實根中，正根不能多於二，負根不能多於一。當 n 爲偶數時，至少有 $3n-6$ 虛根。實數中，正根不能多於二，負根不能多於四。
7. 二正，三負。
8. $x^{2n+1}+1=0$ 有一負根，$2n$ 虛根；$x^{2n}-1=0$ 至少有 $2n-2$ 虛根，正根不能多於一，負根不能多於一；$x^{2n+1}-1=0$ 有一正根，$2n$ 虛根。

LXXIV. 第453頁

1. 在 0 與 1, 2 與 3, -1 與 -2 之間.
2. 在 1 與 2, 0 與 -1, -2 與 -3 之間。
3. 在 1 與 2, 3 與 4, -1 與 -2 之間。
4. 在 2 與 3, -1 與 -2, -2 與 -3 之間。
5. 在 1 與 2, 4 與 5, -1 與 -2 之間.
6. 在 -2 與 -3, -4 與 -5, -6 與 -7 之間。
7. 在 -2 與 -3 之間。
8. 在 3 與 4, -3 與 -4 之間。
9. 在 0 與 1, 2 與 3, 5 與 6, 0 與 -1 之間。
10. 在 1 與 2, 0 與 -1, -1 與 -2, -4 與 -5 之間。
11. 在 1 與 2, 4 與 5, 5 與 6, 0 與 -1 之間.
12. 在 1 與 2, 3 與 4, 0 與 -1, -2 與 -3, -3 與 -4 之間。

LXXV. 第 459 頁

1. 1.213411. **2.** 2.469545. **3.** 0.179989. **4.** 2.137811.
5. 2.768345. **6.** −1.945341. **7.** 1.903211. **8.** −5.134578.
9. 3.236067. **10.** −2.157451. **11.** 2.356895 及 2.692021.
12. 1.602, 3.292 及 −1.895. **13.** 1.246, −0.445 及 −1.802.
14. 0.347, 1.532 及 −1.879. **15.** 1.558, −0.578, −1.904, −4.075.
16. 2.5712. **17.** 2.884 及 3.054. **18.** 13.24.
19. 二根在 0 與 1 間，一根在 0 與 −1 間。
20. 2/3, −1, 0.254, 1.860, −2.114.

LXXVI. 第 464 頁

1. $10x^4-16x^3+2x-20,\ 40x^3-48x^2+2,\ 120x^2-96x,\ 240x-96,\ 240.$
2. $(x^4-2x^3+1)+2(2x^3-3x^2)h+6(x^2-x)h^2+2(2x-1)h^3+h^4.$
3. (1) $3-6(x+1)+7(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4.$
(2) $80(x-2)+80(x-2)^2+40(x-2)^3+10(x-2)^4+(x-2)^5.$
(3) $\dfrac{2+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3}{2+2(x-1)+(x-1)^2}.$
4. (1) $-1,\ -1,\ 2.$ (2) $1/3,\ 1/3,\ -2.$
(3) $\pm\sqrt{6}i/2,\ \pm\sqrt{6}i/2.$ (4) $1\pm\sqrt{3},\ 1\pm\sqrt{3}.$
(5) $3,\ 3,\ \pm\sqrt{2}i/2.$ (6) $(-1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (-1\pm\sqrt{3}i)/2,\ 2.$
(7) $2,\ 2,\ -1\pm\sqrt{2}i.$ (8) $1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1.$
(9) $\pm i,\ \pm i,\ 2/3.$
6. $a=\pm16.$
7. $a=3\ \ b=1/9,\ x=-1/3$；或 $a=-3,\ b=-1/9,\ x=1/3.$
9. $108p^5=3125r^3.$ **10.** $(ax+b)^n.$
11. $(-1\pm\sqrt{3}i)/2,\ \pm i$；$(-1\pm\sqrt{3}i)/2,\ \pm1.$
12. $2\pm2\sqrt{2},\ -4$；$1\pm\sqrt{2},\ -1.$

LXXVII. 第 471 頁

1. 極大值對應於 $x=0$ 而為 4；極小值對應於 $x=2$ 而為 0.
2. (1) $x=1/4$ 時為極小。
(2) $x=(1-\sqrt{3})/2$ 時極大，$x=(1+\sqrt{3})/2$ 時極小。
(3) $x=-2$ 時極大，$x=2$ 時極小。
(4) $x=1/3$ 時極大，$x=3$ 時極小。
(5) $x=0$ 時極大，$x=2$ 時極小.
(6) $x=1/2$ 時極大，$x=-1$ 或 2 時極小。
(7) 無一極大或極小值。
(8) $x=-1$ 時極大，$x=-(2\pm\sqrt{10})/2$ 時極小。

LXXVIII. 第 477 頁

1. 二根在 3 與 4 間,一根在 -1 與 -2 間.
2. 二根在 3 與 4 間,一根在 -3 與 -4 間.
3. 一根在 0 與 -1 間,二根爲虛根.
4. 一根在 -1 與 -2 間,二根爲虛根.
5. 二根在 2 與 3 間,一根在 -4 與 -5 間.
6. 二根在 3 與 4 間,二根在 -1 與 -2 間.
7. 一根在 0 與 1 間,一根在 -1 與 -2 間,二根爲虛根.
8. 一根在 0 與 1 間,二根在 3 與 4 間.
9. 二根在 0 與 1 間,一根在 2 與 3 間,一根在 -3 與 -4 間.
10. 0 與 1 間一根, 1 與 2 間一根, -2 與 -3 間二根.
11. 有一實根.
12. 無實根.
13. n 爲偶數時,無實根; n 爲奇數時,有一實根.
14. 兩實根.

LXXIX. 第 482 頁

1. $s_3 = -(a_1^3 - 3a_0a_1a_2 - 3a_0^2a_3)/a_0^3$.
   $s_4 = -(a_1^4 - 4a_0a_1^2a_2 + 4a_0^2a_1a_3 + 2a_0^2a_2^2)/a_0^4$.
2. $\Sigma 1/a^2 = (p^2 - 2q)/r^2$. $\Sigma 1/a^3 = (p^3 - 3pq + 3r)/r^3$. $\Sigma a\beta^2 = 3r - pq$.
3. $x^3 + 7x^2 + 12x - 1 = 0$.
4. (1) $s_1 = 1$, $s_2 = -5$, $s_3 = 20$, $s_4 = -9$.
   (2) 29. (3) 20. (4) -60. (5) $-9/256$. (6) $-111/4$.

§ 871. 第 485 頁

2. $-1 + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, $-1 + \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B}$, $-1 + \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B}$,
   其中 $A = (-1 + \sqrt{5})/2$ 與 $B = (-1 - \sqrt{5})/2$.

§ 874. 第 486 頁

2. $(1 \pm \sqrt{5})/2$, $(3 \pm \sqrt{13})/2$.

§ 875. 第 488 頁

2. $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$, $\sqrt{2}(1 \pm i)/2$, $\sqrt{2}(-1 \pm i)/2$.

LXXX. 第 491 頁

1. $4,\ -2\pm i\sqrt{3}$.　　2. $8,\ (1\pm i\sqrt{3})/2$.

3. $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{A}$,
其中 $A=2+\sqrt{3},\ B=2-\sqrt{3}$.

4. $A=3/4+\sqrt{1887}/72,\ B=3/4-\sqrt{1887}/72$.

5. $-1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ -1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ -1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,
其中 $A=4+2\sqrt{6},\ B=4-2\sqrt{6}$.

6. $1+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ 1+\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ 1+\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}$,
其中 $A=-5/2+5\sqrt{749}/54,\ B=-5/2-5\sqrt{749}/54$.

7. $(-\sqrt{3}\pm\sqrt{4\sqrt{3}-5})/2,\ (\sqrt{3}\pm\sqrt{5+4\sqrt{3}})/2$.

8. $(1\pm\sqrt{5})/2,\ (3\pm\sqrt{13})/2$.　　9. $-1\pm\sqrt{2},\ 1\pm 2i$.

10. $(-5\pm\sqrt{33})/2,\ (-3\pm\sqrt{13})/2$.

11. $(1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (-1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (1\pm 2\sqrt{2}i)/3$.

12. $\pm i,\ (1\pm\sqrt{3}i)/2,\ (3\pm\sqrt{5})/2,\ (1\pm\sqrt{15}i)/4$.

13. $1,\ 1,\ -1,\ (-1\pm\sqrt{15}i)/4,\ (-1\pm\sqrt{35}i)/6$.

14. $z^3+z^2-2z-1=0$.

15. $(2a^2-3ab+c)^2/4+(b-a^2)^3\gtreqless 0$.

16. $\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,\cdots,4;\ \cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2h+1)\pi}{6}$,
$k=0,\cdots,5$.

17. (1) $2\cos 20^\circ,\ 2\cos 140^\circ,\ 2\cos 260^\circ$.
(2) $2\sqrt{2}\cos 15^\circ,\ 2\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ 2\sqrt{2}\cos 255^\circ$.

18. 3.

19. 底之半徑爲 $2\frac{1}{2}$，高爲 8.

20. 本題原意無解。就事而論，若能設法求其高，可得一負結果。可證明內接於圓錐中之最大圓柱，其體積爲圓錐之 4/9. 例中所述之圓錐，其內接之最大圓柱當爲 2.

LXXXI. 第 497 頁

1. $p^3-p(q^2+r^2+s^2)+2qrs$.　　2. $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$.

3. $p(p^2+q^2+r^2+s^2)$.　　4. 0.　　5. 18　　6. 74.　　7. -30.

10 (1) $a_1b_2c_3d_4-a_2b_1c_3d_4$.　(2) $a_1b_2c_3d_4-a_1b_3c_2d_4$.　(3) $-a_2b_3c_4d_1$.
(4) $a_1b_2c_3d_4+a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2-a_1b_3c_2d_4-a_1b_2c_4d_3$.
(5) $a_1b_2c_3d_4+a_2b_4c_3d_1+a_4b_1c_3d_2-a_4b_2c_3d_1-a_2b_1c_3d_4-a_1b_4c_3d_2$

11. $a_2b_4c_3d_1e_5,\ -a_4b_2c_1d_5e_3,\ a_5b_4c_3d_2e_1,\ -c_1d_2a_3e_4b_5,\ -c_1b_2e_3a_4d_5,\ -d_3d_2e_4b_1c_5$.

LXXXII. 第 501 頁

1. (1) $-22,680$. (2) 0. (3) $4abcdef$.

LXXXIII. 第 507 頁

1. 0. 2. -4. 3. 0. 4. $-357,840$.

5. $\begin{vmatrix} 0 & bc-a^2 & b^2-ac \\ b^2-ac & 0 & bc-a^2 \\ bc-a^2 & b^2-ac & 0 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} ap+cr & ap & cr \\ ap & ap+bq & bq \\ cr & bq & bq+cr \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & -a & a^2+ab & ac+ad \\ -b & b & ab+b^2 & bc+bd \\ c & c & -ac+bc & -c^2+cd \\ d & d & ad-bd & cd-d^2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2 & lm+mn+nl & ln+ml+nm \\ ml+nm+ln & m^2+n^2+l^2 & mn+nl+lm \\ nl+lm+mn & nm+ln+ml & n^2+l^2+m^2 \end{vmatrix}$.

10. 此題應讀作:"證明當一行列式之首對角線任一側之諸元爲 0 時,此行列式可化成其首項."

LXXXIV. 第 511 頁

1. $x=10/7,\ y=1,\ z=4/7$. 2. $x=1,\ y=1/2,\ z=1/3$.

3. $x=\dfrac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)},\quad y=\dfrac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)},\quad z=\dfrac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}$.

4. $x=1,\ y=1/2,\ z=1/3,\ t=-1$. 5. $x:y:z=-1:1:1$.

6. $x:y:z=k:l:-1$, 若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

7. $\lambda=0$ 或 $-3\pm2\sqrt{21}$.

LXXXV. 第 519 頁

1. 公根爲 $-3/2$.

2. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. $(a+d)^3+b^3+c^3-3bc(a+d)$.

4. (1) $4p^3+27q^2$. (2) $c(4b^3+27a^2c)$. 5. 二重根爲 -2.

6. $x,\ y=0,\ 0;\ 3,\ -1;\ -2,\ 2$; 及一無窮解.

§ 950. 第 527 頁.例 3

(1) $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\frac{5}{4\cdot5}+\frac{7}{5\cdot6}+\cdots$; 發散.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{2}{17}+\cdots$; 收斂.

(3) $\frac{1}{9}+\frac{3}{35}+\frac{5}{91}+\frac{7}{189}+\cdots$; 收斂.

§ 952. 第 528 頁

5. $x<1$ 時. 6. $x>1$ 時.

LXXXVI. 第 530 頁

1. 收斂. 2. 收斂. 3. 發散.
4. 收斂. 5. 發散. 6. 發散.
7. 收斂. 8. 收斂. 9. 發散.
10. $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{3}{2\cdot4}+\frac{4}{3\cdot5}+\frac{5}{4\cdot6}$; 發散.
11. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{28}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{65}}$; 發散.
12. $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{10}-3)+(\sqrt{17}-4)$; 發散.
13. 收斂. 14. 發散.
15. $x<1$ 時. 16. $x<1$ 時.

LXXXVII. 第 534 頁

1. (1) 收斂. (2) 發散. (3) 收斂.
2. (1) 除 $x=0, 1, -1/2, 1/3, \cdots, (-1)^{n-1}1/n, \cdots$ 外,其餘 x 之一切實數值皆收斂.

   (2) 當 x 小於 1 時爲收斂,否則爲發散.
3. 應讀作:"若級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 絕對收斂等等."

LXXXVIII. 第 538 頁

1. ∞. 2. $1/2$. 3. $1/2$.
4. 對於 $x=-1$ 又對於 x 介於 -1 及 2 之間之一切值.
5. 對於 x 之一切實數值.
6. 對於 x 大於 $1/3$ 及小於 $1/2$ 之值.

LXXXIX. 第551頁

4. $a_1=-1/2,\ a_2=7/8,\ a_3=7/16,\ a_4=-21/64.$

5. (1) $2-x/4-x^2/32-5x^3/768.$　(2) $1+3x/2-9x^2/8-13x^3/16.$

6. (1) $2-3x-3x^2+20x^3+\cdots.$　(2) $x+6x^2+4x^3-x^4+\cdots.$

7. (1) $3x^2-2x^3-x^4+3x^5+\cdots.$　(2) $x^{-2}-2x^{-1}+1+9x+\cdots.$

8. (1) $-11/6+5x/36-89x^2/216+65x^3/1296-761x^4/7776+\cdots$; $|x|<2$ 時收斂。

(2) $2-11x/3+46x^2/9-173x^3/27+616x^4/81+\cdots$; $|x|<1$ 時收斂。

9. (1) $x^{-1}+x^{-2}+7x^{-3}+4x^{-4}+\cdots$; $|x|>3$ 時收斂.

(2) $1-x^{-1}+x^{-4}-x^{-6}+\cdots.$

10. (1) $x=y-y^2+y^3-y^4+\cdots.$　(2) $x=y+y^2/2+y^3/6+y^4/24+\cdots.$

11. $x=(y-1)-(y-1)^2/2+(y-1)^3/6-(y-1)^4/24+\cdots.$

12. $x=y^{\frac{1}{2}}-3y/2+45y^{\frac{3}{2}}/8-27y^2+\cdots.$

13. (1) $y=3x-10x^2+60x^3+\cdots.$

(2) $y=x^2+x^5+3x^8+\cdots.$　$y=x^{\frac{1}{2}}-x^2/2-3x^{\frac{7}{2}}/8+\cdots.$

$y=-x^{\frac{1}{2}}-x^2/2+3x^{\frac{7}{2}}/8+\cdots.$

XC. 第559頁

1. $\log_e 4=1.3862.$　$\log_e 5=1.6093.$　7. $-7x^4/3^5\cdot 2^{10}.$　8. $231x^3/2^{10}.$

9. 第一級數當 $|x|<3/2$, 第二級數 $|x|<3$ 時收斂。

10. $1-3x/4+45x^2/32+43x^3/128-333x^4/2048.$

11. $4/3+13x/27+53x^2/1296$; $|x|<8/3$ 時收斂。

12. (1) $4/3.$　(2) $\infty.$

15. $x+x^2/2-2x^3/3+x^4/4\cdots$; $|x|<(\sqrt{5}-1)/2$ 時收斂.

XCI. 第563頁

1. $-19x^3+52x^4.$

2. (1) 標尺爲 $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=0$; 項爲 $-2x^5+x^6.$

(2) 標尺爲 $a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}=0$; 項爲 $31x^5+16x^6.$

(3) 標尺爲 $a_n+3a_{n-1}+3a_{n-2}+a_{n-3}=0$; 項爲 $28x^6-36x^7.$

3. (1) 母函數爲 $(2-x)/(1-x-2x^2)$; 普遍項爲 $[2^n+(-1)^n]x^n.$

(2) 母函數爲 $(3-8x)/(1-5x+6x^2)$; 普遍項爲 $(2^{n+1}+3^n)x^n.$

5. 母函數爲 $(1+x+4x^2)/(1-x-5x^2-3x^3)$; 普遍項爲 $[3^n+(-1)^n n]x^n.$

6. 母函數爲 $[a-(a-d)x]/(1-2x+x^2).$

8. 和爲 $2/(1-3x+3x^2-x^3).$

XCII. 第565頁

2. (1) $x<1.$　(2) $x<\infty.$　(3) $x<3.$

XCIII. 第575頁

1. $\frac{3}{1}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{93}{29}.$

2. $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{41}{72}, \frac{496}{871}.$

3. $\frac{1}{1+}\frac{1}{5}.$

4. $8+\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$

5. $\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}.$

6. $3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}.$

7. $\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3+}\frac{1}{9+}\frac{1}{7}.$

8. $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}$; 第四近值爲 $\frac{104}{79}$; 誤差$<\frac{1}{79^2}$.

(真確誤差爲 1/79. 177.)

9. $\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{6}$; 第四近值爲 $\frac{13}{30}$; 誤差$<\frac{1}{30^2}$.

10. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{19+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$; 第五近值爲 $\frac{3}{4}$; 誤差$<1/4\cdot19$.

11. $4+\frac{1}{8+}\frac{1}{8+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{17684}{4289}$; 誤差$<\frac{1}{4289^2}$.

12. $5+\frac{1}{10+}\frac{1}{10+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{52525}{10301}$; 誤差$<\frac{1}{10301^2}$.

13. $2+\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{\dot{4}+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{218}{89}$; 誤差$<\frac{1}{89^2}$.

14. $6+\frac{1}{\dot{6}+}\frac{1}{\dot{12}+}\cdots$; 第五近值爲 $\frac{33294}{5401}$; 誤差$<\frac{1}{5401^2}$.

15. $10+\frac{1}{\dot{4}+}\frac{1}{\dot{20}+}\cdots.$

16. $\frac{1}{\dot{4}+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{\dot{8}+}\cdots.$

17. $4+\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{\dot{8}+}\cdots.$

18. $8+\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{\dot{16}+}\cdots.$

19. $5+\frac{1}{\dot{5}+}\frac{1}{\dot{10}+}\cdots.$

20. $\frac{1}{1+}\frac{1}{\dot{1}+}\frac{1}{2+}\frac{1}{\dot{1}+}\cdots.$

21. $5+\frac{1}{\dot{1}+}\frac{1}{\dot{4}+}\cdots.$

22. $(\sqrt{37}-4)/3.$

23. $(\sqrt{37}-5)/3.$

24. $\frac{3\sqrt{35}+50}{\sqrt{35}+15}.$

25. $\frac{\sqrt{1806}+36}{34}.$

26. $\frac{20+\sqrt{10}}{43+2\sqrt{10}}.$

30. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots.$

33. 577/408; 誤差$<1/408^2$.

34. 355/113.

35. 87/32; 誤差$<1/32^2$.

36. $x=546,\ y=324.$

37. $x=1350,\ y=-770.$

38. $x=155+323t,\ y=248+517t.$