第五章　线性系统理论引论

第六章　最佳泸波茋理

§5—7 观察器原理

5—7—1 引言

上节我们比较详细地介绍了状态反馈的有关问题。我们知道，用状态反馈的方法可以任意配置极点，以致使系统稳定以及满足一定的品质指标。但是，当一个系统的状态变量不能被全部测得时，这个方法就遇到困难，而必需采取别的途径进行反馈，并尽量希望能得到与状态反馈具有相同的效果。一般有三种办法：

(1) 用输出反馈代替状态反馈。这种方法只有在输出反馈能使系统达到稳定的情况下才能使用，而要检验这点是很不方便的，并且它不能任意配置极点，因此在设计系统时，会遇到一些不可克服的矛盾，这点已在上节叙述过；

(2) 在被调对象前串接一个补偿器或在反馈回路中串接一个校正装置，使闭路系统具有希望的品质；

(3) 因为一般系统的输入输出是可以测量的，并且系统的输入是直接影响系统的状态变量的，而系统的输出又是直接受其状态变量的变化所支配的。因此，我们可以设法另外构造一个系统，它以原系统的输入输出作为它的输入量，而它的输出等于或接近原系统的状态变量或者状态变量的线性组合。然后将此构成系统的输出作为状态反馈信号进行反馈构成闭环系统，使它达到设计要求。这就是观察器方法。

5—7—2 观察器和“可检测系统”

一、观察器构成的基本思想

我们先来分析一下常系数单输入单输出系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+bu(t) \\ y(t)=CX(t) \end{cases} \qquad (5-7-1)$$

因为 $\dot{y}(t)=C\dot{X}(t)=CAX(t)+Cbu(t)$

所以

$$\dot{y}(t)-Cbu(t)=CAX(t)$$

同样有

$$\ddot{y}(t)-Cb\dot{u}(t)-CAbu(t)=CA^2X(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y^{(n-1)}(t)-Cbu^{(n-2)}(t)-\cdots-CA^{n-2}bu(t)=CA^{n-1}X(t)$$

设

$$Z_1(t)=y(t)\ ;$$

$$Z_2(t)=\dot{y}(t)-Cbu(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$Z_n(t)=y^{(n-1)}(t)-Cbu^{(n-2)}(t)-\cdots-CA^{n-2}bu(t)$$

并且设

$$Z(t)=\begin{bmatrix} Z_1(t) \\ \vdots \\ Z_n(t) \end{bmatrix}$$

则有

$$Z(t)=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} X(t)=Q_0X(t)$$

式中

$$Q_0=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\text{—— } n\times n \text{ 矩阵（可观实矩阵）}$$

当 $rankQ_0=n$ 时，即系统为可观实时，得

$$X(t)=Q_0^{-1}Z(t)$$

这就相当于构造了一个系统 Z，它以 $u(t)$，$y(t)$ 和它们的高阶导数为轨入，$Z(t)$ 为轨出，并且由 $Z(t)$ 变换 Q_0^{-1} 可得到 $X(t)$。见图 5－7－1。由于系统 Z 中包含了一直到 $n-1$ 次的微分口，因此与 $u(t)$ 和 $y(t)$ 混在一起的干扰，经过微分后，就会严重地形响轨 $Z(t)$，因此，这不是我们所希望的观实口。

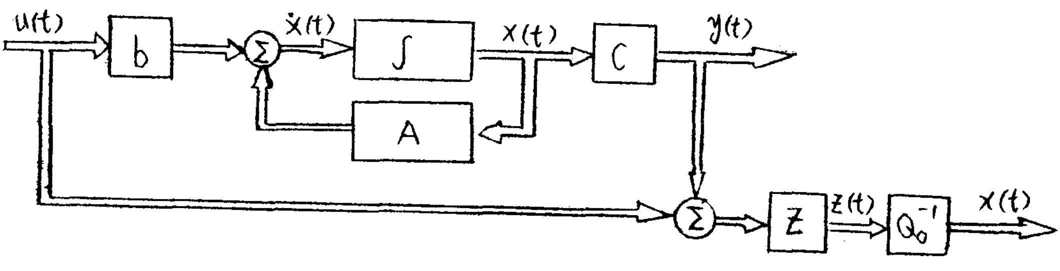

图 5—7—1 由 $u(t)$、$y(t)$ 得到 $X(t)$ 的结构图

另一个很自然的想法是，根据原系统 S：〔A、b、c〕设计一个结构上与它相同的系统

$$\dot{\tilde{X}}(t)=A\tilde{X}(t)+bu(t)$$

则有

$$\dot{X}(t)-\dot{\tilde{X}}(t)=A[X(t)-\tilde{X}(t)]$$

因此当初始条件相同，和有相同的控制 $u(t)$ 时，就有 $\tilde{X}(t)=X(t)$ 若初始值不相同，控制 $u(t)$ 相同，那么，由于

$X(t)-\tilde{X}(t)=e^{A(t-t_0)}(X(t_0)-\tilde{X}(t_0))$，因此，当原系统 S：〔A、$b$、$c$〕是渐近稳定时，就有 $\lim\limits_{t\to\infty}[X(t)-\tilde{X}(t)]=0$，若原系统不稳定，那 $\tilde{X}(t)$ 与 $X(t)$ 的差别就会很大。但是由于 $X(t)$ 是无法测量的，也就无法直接知道两者之差，但是由于输出 $y(t)$ 是可以知道的，因此，我们可将 $\tilde{X}(t)$ 变成 $C\tilde{X}(t)$，这样 $\tilde{X}(t)$ 与 $X(t)$ 之差就变成了 $y(t)-C\tilde{X}(t)$，因此，这时就可用 $y(t)-C\tilde{X}(t)$ 作为反馈，使 $\tilde{X}(t)\to X(t)$ 得到实现，这就是构成观测器的基本思想。见图 5－7－2。

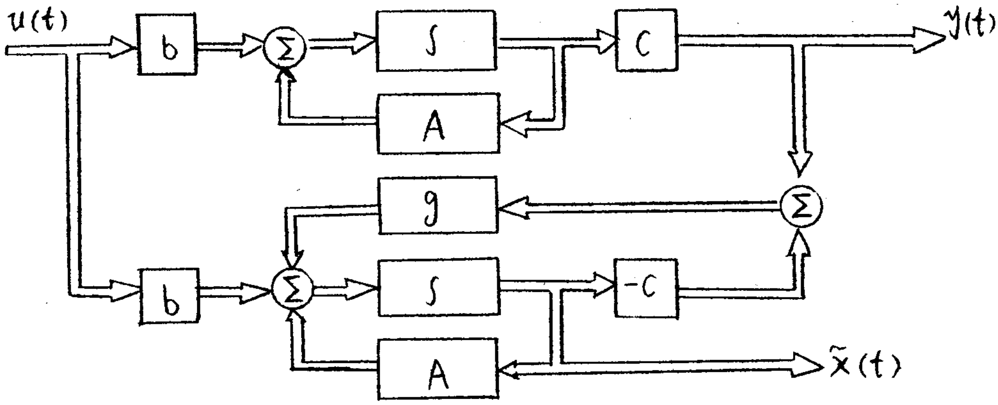

图 5—7—2 由 $u(t)$，$y(t)$ 得到 $X(t)$ 的结构图

二 观安口和"可检测系统"

当一个系统 S：〔A，B，C〕的状态矢易 $X(t)$ 不可直接测易时，如果有另一个系统 S_0：〔A_0，B_0，C_0〕，它以系统 S：〔A，B，C〕的轨入 $u(t)$ 和轨出 $Y(t)$ 作为轨入，而它的轨出 $w(t)$ 满足：

$$\lim_{t\to\infty}\{KX(t)-w(t)\}=0 \qquad (5-7-2)$$

式中 K 是予先给定的矩阵，则称系统 S_0：〔A_0，B_0，C_0〕是系统 S：〔A，B，C〕的一个 $K\cdot X(t)$ 观安口。特别地，当 $K=I$ 时，称系统 S_0：〔A_0，B_0，C_0〕为系统 S：〔A，B，C〕的状态观安口。

对于图 5－7－2 所示的单轨入单轨出系统，经反馈 g 后得

$$\dot{\tilde{X}}(t)=A\tilde{X}(t)+bu(t)+gC[X(t)-\tilde{X}(t)]$$

因此得：$\dot{X}(t)-\dot{\tilde{X}}(t)=[A-gC][X(t)-\tilde{X}(t)]$

假如选择了适当的g，使$A-gC$的特征值都具负实卩，那么，

$$\lim_{t\to\infty}[X(t)-\tilde{X}(t)]=0$$

因此系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=(A-gC)\tilde{X}(t)+bu(t)+gy(t)\\ \tilde{y}(t)=\tilde{X}(t)\end{cases}\qquad(5-7-3$$

就是系统S：[A，b，c]的一个状态观安凹。

如前所述，当系统的[A，b]为可控对时，总可以选择K，使（$A+bK$）具有任忌指定的特征值，用同样的方法可以证明，当系统的[A，C]为可观安对时，也总可以选择g，使（$A-gC$）具有任忌指定的特征值。由此可知，对一个可观安的单轨入单轨出系统，状态观安凹一定存在。

实际上当系统S：[A，b，c]为可观安时，由线性系统的规范形式可知，当$det(SI-A)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0$时，则通过坐标变换

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}a_1, & a_2, & \cdots, & a_{n-1}, & 1\\ a_2, & a_3, & \cdots, & 1, & 0\\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n-1}, & 1, & \cdots, & 0, & 0\\ 1, & 0, & \cdots, & 0, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$$

使系统S：（A，b，c）化为可观规范形式$S_{o\mathrm{II}}$：（$A_{o\mathrm{II}}$，$b_{o\mathrm{II}}$，$C_{o\mathrm{II}}$）

并且有

$$\begin{cases} A_{o\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ b_{o\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \\ C_{o\mathrm{II}}=(0, \cdots, 0, 1)=e_n^T \end{cases}$$

如果取

$$g_0=\begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{01} \\ \vdots \\ g_{0n-1} \end{bmatrix}$$

则得

$$A_{o\mathrm{II}}-g_0C_{o\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} 0, & \cdots, & 0, & -(a_0+g_{00}) \\ 1, & \cdots, & 0, & -(a_1+g_{01}) \\ \vdots & & & \\ 0, & \cdots, & 1, & -(a_{n-1}+g_{0(n-1)}) \end{bmatrix}$$

因此，当选择g_0使得（$A_{o\mathrm{II}}-g_0C_{o\mathrm{II}}$）的特征值具有负实下时，那末（A－$g$C）也具有负实下，并且这时有$g=Tg_0$，也就是说，这时系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t)=(A-gC)\tilde{X}(t)+bu(t)+gy(t) \\ \tilde{y}(t)=\tilde{X}(t) \end{cases} \qquad (5-7-4)$$

就成为系统 $S:(A, b, c)$ 的状态观安ш。

另外，如果注忌到系统

$$\dot{Z}(t)=(A_{0\mathrm{II}}-g_0C_{0\mathrm{II}})Z(t)+b_{0\mathrm{II}}u(t)+g_0y(t)$$

的 $Z(t)\to T^{-1}X(t)$，（当 $t\to\infty$ 时），而 T 是非奇异的，因此系统

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=(A_{0\mathrm{II}}-g_0C_{0\mathrm{II}})Z(t)+b_{0\mathrm{II}}u(t)+g_0y(t) \\ w(t)=TZ(t)\end{cases} \tag{5-7-4}$$

也是系统 $S:(A, b, c)$ 的一个状态观安ш。

关于 $\tilde{X}(t)$ 趋近 $X(t)$ 的速度，当然由 g 的选择来决定，这是在设计观安ш之前要确定的对观安ш的性能要求。但是，如果 g 选得使 $\tilde{X}(t)$ 很快地趋近 $X(t)$，则所设计的观安ш的通频带就会变宽，从而降低了对高频干扰的抗干扰性，因此在设计观安ш时，要结合各种指标要求，选择合适的 g。

〔例题 5－7－1〕 设有系统 $S:(A, b, c)$，并且

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\quad C=[1, 1, 0]$$

试设计一个观安ш，要求其极点为 $-3, -4, -5$。

〔解〕 根据分析，系统 $S:(A, b, c)$ 是可观的，并且有

$$\det(SI-A)=(S-1)(S-2)^2=S^3-5S^2+8S-4$$

$$\dot{\tilde{X}}(t)=\begin{bmatrix}-119 & -120 & 0\\ 103 & 105 & 1\\ -210 & -210 & 2\end{bmatrix}\tilde{X}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}120\\-103\\210\end{bmatrix}y(t)$$

$$\tilde{y}(t)=\tilde{X}(t)$$

或

$$\dot{Z}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -60\\ 1 & 0 & -47\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix}Z(t)+\begin{bmatrix}5\\-3\\1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}y(t)$$

$$w(t)=TZ(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}Z(t)$$

由上百的讨论和例题5－7－1可知，状态观实并不是唯一的，它可以用不同的结构来得到。

对于多轨入多轨出系统S：{A，B，C}，当它是可观实时，则可用同样的方法，也需选择G，使（A－GC）的特征值都具有负实下，则系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=(A-GC)\tilde{X}(t)+Bu(t)+GY(t)\\ \tilde{Y}(t)=\tilde{X}(t)\end{cases}\qquad(5-7-5)$$

为系统S：{A，B，C}的状态观实四。

原书缺页

$$\dot{\tilde{X}}(t)=\begin{bmatrix}-119 & -120 & 0\\ 103 & 105 & 1\\ -210 & -210 & 2\end{bmatrix}\tilde{X}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}120\\-103\\210\end{bmatrix}y(t)$$

$$\tilde{y}(t)=\tilde{X}(t)$$

或

$$\dot{Z}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -60\\ 1 & 0 & -47\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix}Z(t)+\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}64\\39\\17\end{bmatrix}y(t)$$

$$w(t)=TZ(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}Z(t)$$

由上百的讨论和例题 5－7－1 可知，状态观安并不是唯一的，它可以用不同的结构来得到。

对于多轨入多轨出系统 S:〔A，B，C〕，当它是可观安时，则可用同样的方法，也需选择 G，使（A－GC）的特征值都具有负实下，则系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=(A-GC)\tilde{X}(t)+Bu(t)+GY(t)\\ \tilde{Y}(t)=\tilde{X}(t)\end{cases}\qquad(5-7-5)$$

为系统 S:〔A，B，C〕的状态观安叫。

方程（5－7－5）可用图5－7－3表示

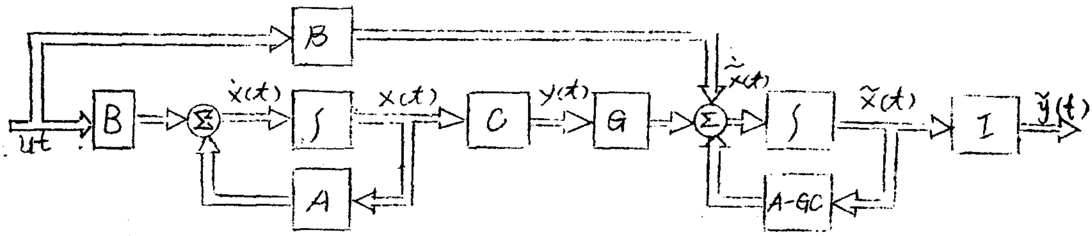

图5－7－3　多轨入多轨出系统状态观安皿

当系统 S:｛A，B，C｝为不可观安时，在代数等价的忌义下，可设系统具有如下形式

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix};\quad C=(C_1\ ,\ 0);$$

$$X(t)=\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

并且有

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t)=A_1X_1(t)+B_1u(t) \\ \dot{X}_2(t)=A_2X_1(t)+A_3X_2(t)+B_2u(t) \\ Y(t)=C_1X_1(t) \end{cases} \qquad (5\text{—}7\text{—}6)$$

这里系统 S_1:｛A_1，B_1，C_1｝是可观安的。这样，当给定一个 $X_1(t)$

的初始值及一个轨入$u(t)$，就可以解得$X_1(t)$，从而求得$y(t)$。但是$X_2(t)$却可以由不同的初始值得到不同的解，这种不同的$X_2(t)$在$u(t)$和$y(t)$中是一点也反映不出来的，也就是说，通过$u(t)$和$y(t)$无法推测出$X_2(t)$的值。但是，由（5－7－6）式可以看到，若A_3的特征值都具有负实下，那么，$X_2(t)$由初始值的不同而产生的过渡项，将随着$t\to\infty$而趋于另，这样，只要对$X_1(t)$能构造出观安四，也就可以得到对$X(t)$的易测。因而得到：对于系统$S:(A,B,C)$，能够构造出观安四的充分必要条件是，它的不可观安卩分是秋定的，并且如果一个系统，它的不可观安卩分是秋定的，那末就称它为“可检测系统”。

不过，当系统$S:(A,B,C)$为不可观安时，即使能构造出观安四，但是观安值$\tilde{X}(t)$与$X(t)$之间逼近速度却不能任忌设计，而要受到系统的不可观安卩分的极点分布的限制。为此，下百一般都假定系统$S:(A,B,C)$是可观安的。

5－7－3　观安四的基本关系

由上百的讨论，使我们知迈：只要系统是可观安的，则对任忌的K，它的$KX(t)$观安四是存在的，根据式（5－7－5）它为：

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{X}}(t)=(A-GC)\tilde{X}(t)+Bu(t)+GY(t) \\
\tilde{Y}(t)=K\tilde{X}(t)
\end{cases}
\qquad (5-7-7)
$$

为了便于观安叫设计，下百从一般形式，讨论观安叫的一些基本关系•

设有一个系统，它以$u(t)$和$Y(t)$作为轨入，即其系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t)=FZ(t)+Nu(t)+HY(t) \\ w(t)=EZ(t)+MY(t) \end{cases} \qquad (5-7-8)$$

式中

$Z(t)$—— P维列矢易;

$w(t)$—— L维列矢易;

F，N，H，E，M—— 分别为$p\times p$，$p\times r$，$p\times m$，$L\times p$，$L\times m$矩阵

一般$p<n$。则问：在什么条件下，系统(5－7－8)可以成为系统S:〔A，B，C〕的KX(t)观安叫。

为了回答上百的问题，我们首先讨论系统(5－7－8)的状态矢易$Z(t)$与系统S:〔A，B，C〕的状态矢易$X(t)$之间的相互关系与系统矩阵之间的联系•这种联系可叙述如下：

若系统S:〔A，B，C〕为可控，那末，对于任忢$U(t)$和初始值$X(t_0)$，$Z(t_0)$，存在某个矩阵P，使得

$$\lim_{t\to\infty}[PX(t)-Z(t)]=0 \qquad (5-7-9)$$

的充要条件是:

(1) $R_e S_i(F)<0$，$(i=1,\cdots,p)$；　　(5—7—10)

(2) $PA - FP = HC$; (5—7—11)

(3) $N = PB$ (5—7—12)

式中$S_i(F)$ ($i=1, \cdots p$) 是F的p个特征值，R_e表示复数的实下。

上述结果可以证明如下。

充分性：令$e(t)=PX(t)-Z(t)$则有

$$
\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= P\dot{X}(t)-\dot{Z}(t) \\
&= P[AX(t)+BU(t)]-[FZ(t)+NU(t)+HY(t)] \\
&= [PA-HC]X(t)+[PB-N]U(t)-FZ(t)
\end{aligned}
$$

由式(5—7—11)和(5—7—12)得：

$$
\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= [PA-HC]X(t)-FZ(t) \\
&= F[PX(t)-Z(t)]=Fe(t)
\end{aligned}
$$

因此由式(5—7—10)可知，对于任意的$U(t)$和初始值$X(t_0)$，$Z(t_0)$即$e(t_0)=PX(t_0)-Z(t_0)$，有$\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$，即$\lim\limits_{t\to\infty}[PX(t)-Z(t)]=0$。

必要性：既然对任意的$U(t)$以及$X(t_0)$和$Z(t_0)$要有式(5—7—9)成立，因此可设$X(t_0)=0$，$U(t)\equiv 0$ ($t\geq 0$)这时就有$X(t)\equiv 0$，$Y(t)\equiv 0$，从而$e(t)=-Z(t)$，并且这时$\dot{Z}(t)=FZ(t)$。由于对于任意$Z(t_0)$，要求$\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$，

即要求$\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=\lim\limits_{t\to\infty} -Z(t)=0$，所以必需要有

$R_e S_i(F)<0 \quad (i=1,\cdots,p)$，式(5—7—10)证得。

又由于

$$\dot{e}(t)=PAX(t)+PBU(t)-FZ(t)-NU(t)-HY(t)$$
$$=Fe(t)+(PA-HC-FP)X(t)+(PB-N)U(t)$$

令

$$\overline{W}=PA-HC-FP \qquad (5-7-13)$$

$$Q=PB-N \qquad (5-7-14)$$

则

$$\dot{e}(t)=Fe(t)+WX(t)+QU(t) \qquad (5-7-15)$$

这样所要证明的就是：$\overline{W}=0$，$Q=0$

对式(5—7—15)取拉氏变换得

$$SE(S)-e(0)=FE(S)+WX(S)+QU(S)$$

因此可得

$$(SI-F)E(S)=e(0)+WX(S)+QU(S)$$

要对于任意$e(0)$有$\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$，就要求$\lim\limits_{S\to 0} SE(S)=0$。

因为F满足式(5—7—10)，因此要使$\lim\limits_{S\to 0} SE(S)=0$，就是要使

$\lim\limits_{S\to 0} S(WX(S)+QU(S))=0$。又因为$X(S)=(SI-A)^{-1}BU(S)$，

所以$\lim\limits_{S\to 0} S(WX(S)+QU(S))=\lim\limits_{S\to 0} S(W(SI-A)^{-1}B+Q)U(S)=0$，

而因为$U(t)$是任意的，因此必需有

$$W(SI-A)^{-1}B+Q\equiv 0$$

这样

$$\begin{cases} W(SI-A)^{-1}B\equiv 0 \\ Q=0 \end{cases} \tag{5-7-16}$$

而式（5—7—16）第一式是相应系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \\ Y(t)=WX(t) \end{cases}$$

的传递矩阵为另阵，考虑到$X(t_0)=0$和$U(t)$的任意性，并且系统是可控的，这时总可控制$X(t)$到任意值，因此要使式（5—7—16）第一式成立，必需有

$$W=0 \tag{5-7-17}$$

这就证明了上述结果。

由此可知，当一个系统$S:(A,B,C)$为可观实可控时，根据式（5—7—9）、（5—7—10）、（5—7—11）和（5—7—12）我们取$P=I$，可得到系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t)=F\tilde{X}(t)+NU(t)+HY(t) \\ \tilde{Y}(t)=\tilde{X}(t) \end{cases} \tag{5-7-18}$$

是系统$S:(A,B,C)$的状态观实皿的充要条件为：

(1) $R_e S_i(F) < 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$;

(2) $F = A - HC$;

(3) $N = B$

显然，要使式（5—7—18）成为系统S:〔A，B，C〕的状态观察器，它必需具有式（5—7—5）的形式。

进一步还可得到如下重要结论：如果〔A，B〕是可控对，〔F，E〕为可观察时，则系统（5—7—8）要成为系统S:〔A，B，C〕的KX(t)观察器的充要条件是存在某个P，使对一切$u(t)$和初值$X(t_0)$，$Z(t_0)$有：

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}[PX(t)-Z(t)] = 0$; （5—7—19）

(2) $K = EP + MC$ （5—7—20）

此结论证明如下：

充分性：如果式（5—7—19）和（5—7—20）成立，则有

$$
\begin{aligned}
KX(t)-w(t) &= [EP+MC]X(t)-[EZ(t)+MY(t)]\\
&= E[PX(t)-Z(t)]
\end{aligned}
$$

并且

$$\lim_{t\to\infty}[KX(t)-w(t)] = \lim_{t\to\infty}E[PX(t)-Z(t)] = 0$$

必要性：如果对任意$u(t)$以及$X(t_0)$和$Z(t_0)$有

$$\lim_{t\to\infty}[KX(t)-w(t)] = 0 \qquad (5—7—21)$$

那么取 $u(t)$ 是具有各阶异数的时间函数，从而 $X(t)$，$w(t)$ 的各阶异数也存在，这样由等式（5—7—21）可以得到其拉氏变换形式：

$$\lim_{S\to 0} S\{KX(S)-w(S)\}=0$$

由此得

$$\lim_{S\to 0} S^2\{KX(S)-w(S)\}=\lim_{S\to 0} S\{KSX(S)-SW(S)\}=0$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}\{K\dot{X}(t)-\dot{w}(t)\}=0$$

同理得

$$\lim_{t\to\infty}\{KX^{(i)}(t)-w^{(i)}(t)\}=0 \quad (i=0,1,\cdots)$$

另外，由

$$\begin{aligned}K\dot{X}(t)-\dot{w}(t)&=KAX(t)+KBU(t)-E\dot{Z}(t)-M\dot{Y}(t)\\&=KAX(t)+KBu(t)-EFZ(t)-ENu(t)-EHY(t)\\&\quad-MCAX(t)-MCBu(t)\\&=-EFZ(t)+M_1X(t)+N_1u(t)\end{aligned} \tag{5—7—22}$$

式中

$$\begin{cases}M_1=KA-EHC-MCA;\\N_1=KB-EN-MCB\end{cases} \tag{5—7—23}$$

因此对任意 $U(t)$ 和 $X(t_0)$，$Z(t_0)$

$$\lim_{t\to\infty}\{K\dot{X}(t)-\dot{w}(t)\}=\lim_{t\to\infty}\{-EFZ(t)+M_1X(t)+N_1u(t)\}$$

$$=0$$

也就是

$$\lim_{S\to 0}S\{-EFZ(S)+M_1X(S)+N_1u(S)\}=0$$

因为当$X(t_0)=0$，$Z(t_0)=0$时有

$$X(S)=(SI-A)^{-1}BU(S)$$

$$Z(S)=(SI-F)^{-1}(NU(S)+HCX(S))$$

$$=(SI-F)^{-1}(N+HC(SI-A)^{-1}B)U(S)$$

所以得

$$\lim_{S\to 0}S\{-EF(SI-F)^{-1}\{N+HC(SI-A)^{-1}B\}$$

$$+M_1(SI-A)^{-1}B+N_1\}U(S)=0$$

由于U(S)是任急的，因此要使上式成立，一定就要有

$$-EF(SI-F)^{-1}\{N+HC(SI-A)^{-1}B+M_1(SI-A)^{-1}B\}+N_1\equiv 0$$

由此得$N_1=0$，和

$$K\dot{X}(t)-\dot{w}(t)=-EFZ(t)+M_1X(t) \qquad (5-7-24)$$

并且

$$\lim_{t\to\infty}\{K\dot{X}(t)-\dot{w}(t)\}=\lim_{t\to\infty}\{-EFZ(t)+M_1X(t)\}=0 \qquad (5-7-25)$$

同理有

$$\begin{aligned}K\ddot{X}(t)-\ddot{w}(t)&=-EF^2Z(t)+(M_1A-EFHC)X(t)\\&\quad+(M_1B-EFN)U(t)\\&=-EF^2Z(t)+M_2X(t)+N_2U(t)\end{aligned}$$

式中

$$\begin{cases}M_2=M_1A-EFHC\ ;\\N_2=M_1B-EFN\end{cases}$$

并且有

$$N_2=0$$

$$K\ddot{X}(t)-\ddot{w}(t)=-EF^2Z(t)+M_2X(t) \qquad (5-7-26)$$

和

$$\lim_{t\to\infty}\{KX(t)-w(t)\}=\lim_{t\to\infty}\{-EF^2Z(t)+M_2X(t)\}=0$$

$$(5-7-27)$$

对 i 阶导数有

$$\lim_{t\to\infty}\{KX^{(i)}(t)-w^{(i)}(t)\}=\lim_{t\to\infty}\{-EF^iZ(t)+M_iX(t)\}$$

$$=0 \qquad (5-7-28)$$

$$(i=1,\cdots,p-1)$$

取 $M_0=K-MC$ ，则有

$$\lim_{t\to\infty}\{KX(t)-w(t)\}=\lim_{t\to\infty}\{-EZ(t)+M_0X(t)\}=0 \quad (5-7-29)$$

令

$$R = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{p-1} \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} E \\ EF \\ \vdots \\ EF^{p-1} \end{bmatrix}$$

则综合式（5—7—29）和式（5—7—28）得

$$\lim_{t\to\infty}[RX(t)-QZ(t)]=0 \qquad (5-7-30)$$

因此当〔F，E〕是可观交对时，$rank Q = p$，Q^TQ 为非奇异，因此有：

$$\lim_{t\to\infty}[(Q^TQ)^{-1}Q^TRX(t)-Z(t)]=0$$

设

$$P=(Q^TQ)^{-1}Q^TR \qquad (5-7-31)$$

则得

$$\lim_{t\to\infty}[PX(t)-Z(t)]=0$$

这就是（5—7—19）式．

而

$$\lim_{t\to\infty}[W(t)-(MC+EP)X(t)]$$

$$=\lim_{t\to\infty}E[Z(t)-PX(t)]=0 \qquad (5-7-32)$$

由于系统应该是一个KX(t)观实叫，因此必定有

$$\lim_{t\to\infty}[KX(t)-w(t)]=0 \qquad (5-7-33)$$

这样，由式(5-7-32)和式(5-7-33)得

$$\lim_{t\to\infty}[K-MC-EP]X(t)=0$$

上式要求对一切$X(t_0)$及任忍的具有各阶导数的$U(t)$都成立，就必需有

$$K-MC-EP=0$$

即

$$K=MC+EP$$

这就是式(5-7-20)。结论得证。

综合上百两个结论，我得到在系统S:[A,B,C]是可控可观实的情况下，其KX(t)观实叫的基本关系式为：

(1) $R_e S_i(F)<0 \quad (i=1,\cdots,p)$；

(2) $PA-FP=HC$；

(3) $N=PB$；

(4) $K=EP+MC$

这些基本关系是设计系统S:[A,B,C]的KX(t)观实叫的主要依据。在上百这些关系式中，当系统S:[A,B,C]给定时。矩阵A，B，C是已知的，而K是由设计要求给出的，因此设计系统S:[A,B,C]的KX(t)的观实叫的问题，主要根据上百基本关系，在A，B，C，K已知的情况下，求观实系统矩阵F，M，H，E，N的问题，在求这些矩阵时，还要保证[F，E]是可观实对。显然

在观测器的设计过程中，要求解一个由基本关系(2)所表示的一个代数方程组，可以证明，由基本关系(2)可以唯一确定矩阵P的充要条件是矩阵F和A没有相同的特征值，也就是说：$S_i(A) \neq S_j(F)$，($i=1,\cdots,n$; $j=1,\cdots,p$)，这点在设计F时要考虑。并且由基本关系(4)可得

$$K = \left[\, E \;\vdots\; M \,\right] \begin{bmatrix} P \\ \\ C \end{bmatrix}$$

这就是说，K的行矢量是P和C的行矢量的线性组合，因此基本关系(4)可以定出M。而N可以由基本关系(3)定出。而矩阵H的选择就比较自由。

如果有两个系统

$$\begin{cases} \dot{Z}_1(t) = F_1 Z_1(t) + N_1 U(t) + H_1 Y(t) \\ \\ w_1(t) = E_1 Z_1(t) + M_1 Y(t) \end{cases} \qquad (5-7-34)$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_2(t) = F_2 Z_2(t) + N_2 U(t) + H_2 Y(t) \\ \\ w_2(t) = E_2 Z_2(t) + M_2 Y(t) \end{cases} \qquad (5-7-35)$$

并且$[F_1, E_1]$，$[F_2, E_2]$都是可观测对，那末，如果系统(5-7-34)是系统$S:[A, B, C]$的$KX(t)$观测器，并且它与系统

（5—7—35）是等价的，那末系统（5—7—35）也是一个系统

S：〔A，B，C〕的 KX（t）观安叫。

上述结果可证明如下：

由代数等价关系得

$$\begin{cases} F_2 = T^{-1} F_1 T \quad ; \\ N_2 = T^{-1} N_1 \quad ; \\ H_2 = T^{-1} H_1 \quad ; \\ E_2 = E_1 T \quad ; \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

而由观安叫的基本关系得：

$$\begin{cases} R_e S_i(F_1) < 0 \quad ; \\ P_1 A - F_1 P_1 = H_1 C \quad ; \\ N_1 = P_1 B \quad ; \\ K = E_1 P_1 + M_1 C \end{cases}$$

因此得

$$R_e S_i(F_2) < 0$$

若令

$$P_2 = T^{-1} P_1$$

则得

$$\begin{cases} P_2A-F_2P_2=T^{-1}(P_1A-F_1TT^{-1}P_1)=T^{-1}H_1C=H_2C \ ; \\ N_2=T^{-1}N_1=T^{-1}P_1B=P_2B \ ; \\ K=E_1P_1+M_1C=E_2T^{-1}TP_2+M_2C=E_2P_2+M_2C \end{cases}$$

因此，系统（5—7—35）也是系统 S：(A，B，C) 的 KX(t) 观察器。

这个结果，使我们在设计或分析观察器时可以进行代数等价变换。

5－7－4　基本观察器

如前所述，对于一个可观察的系统，任意一个 n 维 KX(t) 观察器是存在的，并且对于可控可观察的系统，满足基本系统(1)，(2)、(3)(4)的一般形式的 KX(t) 观察器为（5－7－8）式，为了分析与设计的方便，我们还可对观察器进行等价变换，由此可知，一个系统的观察器的形式并不是唯一的。但是在各种的观察器中，除一般形式外，有一种基本形式的观察器，就是：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t)=(A-GC)\tilde{X}(t)+BU(t)+GY(t) \\ \tilde{Y}(t)=K\tilde{X}(t) \end{cases} \qquad (5—7—36)$$

我们称它为“n 维基本 KX(t) 观察器”，特别地，当 K＝I 时，又称它为“n 维基本状态观察器”。而更一般形式的 n 维状态观察器的形式可由式（5－7－8）令 M＝0 得到（在讨论 n 维观察器时，可设 M＝0）

$$\begin{cases} \dot{Z}(t)=FZ(t)+NU(t)+HY(t) \\ w(t)=EZ(t) \end{cases} \qquad (5-7-37)$$

式中（F，E）是一个可观实对。

那末式（5－7－37）要成为系统S：〔A，B，C〕的n维状态观实口需具有什么条件呢？如果系统S：〔A，B，C〕是可控可观实的，那末系统（5—7—37）为它的n维状态观实口的充要条件是：系统（5—7—37）与某个n维基本状态观实口代数等价。

上述充要条件可以证明如下：充分性可以由观实口的等价变换直接得到。关于必要性的证明可这样进行，若（5—7—37）是系统S：〔A，B，C〕的状态观实口，那末由（5—7—19）式可知，必定有$n\times n$矩阵P，使得

$$\lim_{t\to\infty}\{PX(t)-Z(t)\}=0$$

并且由（5—7—20）可知，必定有

$$I=EP$$

因此P是非奇异的，而且$E=P^{-1}$，再由观实口的基本关系得

$$\begin{cases} R_eS_i(F)<0\,; \\ PA-FP=HC \\ N=PB \end{cases}$$

由此得

$$F=P(A-P^{-1}HC)P^{-1}$$

若令 $G=P^{-1}H$，则得系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=(A-GC)\tilde{X}(t)+BU(t)+GY(t)\\ \tilde{Y}(t)=\tilde{X}\end{cases}\qquad(5-7-38)$$

与系统（5—7—37）代数等价，变换关系为 $Z(t)=P\tilde{X}(t)$，因此系统（5—7—38）是系统 $S:(A,B,C)$ 的 n 维状态观安凹。并且是 n 维基本状态观安凹。

对于单轨入单轨出系统 $S:(A,b,c)$，它的 n 维基本 $KX(t)$ 观安凹的形式为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=(A-gC)\tilde{X}+bU(t)+gy(t)\\ \tilde{y}(t)=K\tilde{X}(t)\end{cases}\qquad(5-7-39)$$

而其一般形式为

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=FZ(t)+nu(t)+hy(t)\\ w(t)=EZ(t)\end{cases}\qquad(5-7-40)$$

那末系统（5—7—40）要成为系统 $S:(A,b,c)$ 的 n 维基本 $KX(t)$ 观安凹需具有什么条件呢？同样，如果系统 $S:(A,b,c)$ 为可控可观

安，(F, E)是可观安对，(F, h)是可控对，则系统（5—7—40）为系统S：(A, b, c)的n维$KX(t)$观安叫的充要条件是：它与某个n维基本$KX(t)$观安叫代数等价。

上述充要条件可以证明如下：充分性可以由观安叫的等价变换直接得到。关于必要性的证明可这样进行，如果（5—7—40）为系统S：(A, b, c)的$KX(t)$观安叫，则由一般形式的状态观安叫的基本关系得

$$\begin{cases} K = EP \quad ; \\ R_e S_i(F) < 0 \\ PA - FP = hC \\ n = Pb \end{cases}$$

可以证明，对于单轨入单轨出系统满足上述关系的矩阵P是非奇异的，因此可用坐标变换$\widetilde{X}=P^{-1}Z$使系统（5—7—40）与系统

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{X}}(t)=(A-P^{-1}hC)\widetilde{X}(t)+bu(t)+P^{-1}hy(t) \\ \widetilde{y}(t)=K\widetilde{X}(t) \end{cases} \qquad (5—7—41)$$

代数等价，设$P^{-1}h=g$，则（5—7—41）式为

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{X}}(t)=(A-gC)\widetilde{X}(t)+bu(t)+gy(t) \\ \widetilde{y}(t)=K\widetilde{X}(t) \end{cases} \qquad (5—7—42)$$

因此系统（5—7—42）是 n 维 KX（t）观安凹。并且 n 维基本 KX（t）观安凹。

但是对于多轨入多轨出系统上百结论是不成立的，这是因为，对于多轨入多轨出系，满足关系式 $PA-FP=HC$ 和 $K=EP$ 的矩阵 P 不一定是非奇异的。

上述 n 维基本状态观安凹与其一般形式的 n 维状态观安凹的关系和单轨入单轨出情况下 n 维基本 KX（t）观安凹与其一般形式的 n 维 KX（t）观安凹的关系，确定了 n 维状态观安凹和 n 维 KX（t）的结构形式，这对于观安凹的设计是有用的。

5－7－5　降维观安凹

由前百的讨论可以知辺，对于一个可观安的系统 S：〔A，B，C〕，其一般形式的 KX（t）观安凹如（5－7－8）式所示。所谓降维观安凹，就是指 Z（t）的维数 p 小于 X（t）的维数 n 时的一般形式的 KX（t）观安凹（5－7－8）。

由于降维观安凹的维数小于系统 S：〔A，B，C〕的维数，这样就会产生两个问题：首先是这样的降维观安凹是否存在的问题？其次观安凹的维数 p 可以小到什么程度？下百就讨论这些问题。

下百只讨论降维状态观安凹。降维状态观安凹的基本关系为：

(1)　$R_e S_i(F) < 0$；

(2)　$PA - FA = HC$；

(3)　$N = PB$；

(4)　$I = EP + MC$

式中A是$n\times n$矩阵，F是$p\times p$矩阵，并且$p<n$由上百基本关系(4)得

$$I=EP+MC=(E \vdots M)\begin{bmatrix}P\\ \cdots\\ C\end{bmatrix}=(E, M)W \qquad (5-7-42)$$

式中$W=\begin{bmatrix}P\\ C\end{bmatrix}$。由此可知，在根据基本关系设计降维状态观交口时，关键是要选择合适的F和H，使得由A，F，H和C所决定的P和C所组成的W是满秩的。

一、单轨入单轨出系统的降维观交口

设有单轨入单轨出系统S：$\{A, b, c\}$，现在考虑它的$(n-1)$维状态观交口的设计。单轨入单轨出系统$(n-1)$维状态观交口的一般形式为

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=FZ(t)+nu(t)+hy(t)\\ w(t)=EZ(t)+my(t)\end{cases} \qquad (5-7-43)$$

式中F是$(n-1)\times(n-1)$矩阵，h和n均是$(n-1)\times 1$矩阵，E是$n\times(n-1)$矩阵，m是$n\times 1$矩阵。由前所述，如果F和A没有相同的特征值，那末满足基本关系(2)：

$$PA-FP=hC \qquad (5-7-44)$$

的矩阵P是唯一存在的。并且这时有 $W=\begin{bmatrix} P \\ C \end{bmatrix}$。

进一步讨论，还可得到如下结论：如果矩阵A与F没有相同的特征值，那末矩阵W为满秩或非奇异的充要条件是：（A，C）是可观安对，（F，h）为可控对。（证明略）。

由此可知，只要选择F与A没有相同的特征值，并且保证所设计的 $(n-1)$ 维状态观安回有可控对（F，h），那末一个可观安的单轨入单轨出系统S：（A，b，c）其 $(n-1)$ 维状态观安回是存在的。

下百介绍一种单轨入单轨出系统的 $(n-1)$ 维状态观安回的设计方法。

如果假定系统S：（A，b，C）已经可观安规范形式

$$A_{o\text{II}}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$b_{o\text{II}}=\beta^T=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$C_{o\text{II}}=e_n^T=[0,0,\cdots,0,1]$$

并且认为所设计的观测器的F具有下面的形式

$$F_{0\text{II}}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-2} \end{bmatrix} \qquad (5-7-45)$$

和

$$\dot{\tilde{Z}}(t)=F_{0\text{II}}\tilde{Z}(t)+h_{0\text{II}}y(t)+n_{0\text{II}}u(t) \qquad (5-7-46)$$

在这些条件下，一个单输入单输出系统的$(n-1)$维状态观测器的结构参数可如下求得：

由于$PA_{0\text{II}}-F_{0\text{II}}P=h_{0\text{II}}C_{0\text{II}}$，因此若设

$$P=[p_0,\cdots,p_{n-1}] \qquad (5-7-46)$$

式中p_i是$(n-1)\times 1$列矢量。则得

$$\begin{cases} PA_{0\text{II}}=[p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},-\sum\limits_{i=0}^{n-1}p_i a_i]; \\ F_{0\text{II}}P=[F_{0\text{II}}p_0,\cdots,F_{0\text{II}}p_{n-1}]; \\ h_{0\text{II}}C_{0\text{II}}=[0,\cdots,0,h_{0\text{II}}]; \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} p_i - F_{0\mathrm{II}} p_{i-1} = 0 \quad (i = 1, \cdots, (n-1)) \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i a_i + F_{0\mathrm{II}} p_{n-1} = -h_{0\mathrm{II}} \end{cases} \tag{5-7-47}$$

取

$$p_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

则

$$p_1 = F_{0\mathrm{II}} p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{n-2} = F_{0\mathrm{II}} p_{n-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_{n-1} = F_{0\mathrm{II}} p_{n-2} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-2} \end{bmatrix}$$

因此得：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-2} \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}7\text{—}48)$$

和由式（5—7—47）得

$$h_{o\text{II}}=\begin{bmatrix} -a_0+\alpha_0(a_{n-1}-\alpha_{n-2}) \\ \alpha_0-a_1+\alpha_1(a_{n-1}-\alpha_{n-2}) \\ \alpha_1-a_2+\alpha_2(a_{n-1}-\alpha_{n-2}) \\ \vdots \\ \alpha_{n-3}-a_{n-2}+\alpha_{n-2}(a_{n-1}-\alpha_{n-2}) \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}7\text{—}49)$$

$$n_{o\text{II}}=Pb_{o\text{II}}=\begin{bmatrix} \beta_0-\alpha_0\beta_{n-1} \\ \beta_1-\alpha_1\beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_{n-2}-\alpha_{n-2}\beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (5\text{—}7\text{—}50)$$

因此，只要 $F_{o\text{II}}$ 与 $A_{o\text{II}}$ 没有相同的特征值，由（5—7—48）式可见，$W=\begin{bmatrix} P \\ C_{o\text{II}} \end{bmatrix}$ 是非奇异的，并可知，$(F_{o\text{II}}, h_{o\text{II}})$ 是可控对。

关系式（5—7—45），（5—7—48），（5—7—49）和（5—7—50）确定了（5—7—46）式的系数矩阵的结构，但是，在实际问题中，所需要设计的（$n-1$）维观安四的 F 矩阵往往不一定具有式（5—7—45）那样的形式，因此在求得了上述各系统矩阵 F_o，$h_{o\text{II}}$ 和 $n_{o\text{II}}$ 之后，还要找到其相应的 F，h 和 n 等矩阵和 P' 矩阵（以便与 C 结合求

W^{-1}，从而得到 E，m 矩阵）。为此就得找到一个变换 T，使得 $F=T^{-1}F_{oII}T$，这样取 $h=T^{-1}h_{oII}$，$n=T^{-1}n_{oII}$ 和

$$W=\begin{bmatrix} T^{-1}P \\ C \end{bmatrix}$$

就可以了。由 W^{-1} 可求得 E，m。

变换矩阵 T 可如下求得：若能找到 $(n-1)\times 1$ 矩阵 η，使得

$$Q=(\eta, F\eta, \cdots, F^{n-2}\eta) \qquad (5-7-51)$$

是非奇异的，就取 $T^{-1}=Q$。而能找到 η 使 (5-7-51) 式成立的充要条件是 F 的最小多项式与特征多项式一致。

因用上述方法设计单轨入单轨出系统 S:(A, b, c) 的降维状态观测器时，对观测器的矩阵 F 的选择应有如下要求：

(1) 要使 $w(t)$ 具有所需要的逼近 $x(t)$ 的速度，这就使 F 具有合理的特征值；

(2) F 与 A 没有相同的特征值；

(3) 其特征多项式与最小多项式一致。

下面举例说明上述方法的应用。

〔例题 5－7－2〕 设有单轨入单轨出系 S:(A, b, c)

其中

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad c=(0\ \ 0\ \ 1)$$

试求降维观测器，使得

$$F=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

〔解〕 由F可求得$det(SI-F)=S^2+7S+12$，因此得

$$F_0=\begin{bmatrix}0 & -12\\ 1 & -7\end{bmatrix}$$，因此$\alpha_0=12$，$\alpha_1=7$ 。将α_0，α_1代入

（5—7—48）式得：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & -12\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

另外由A的表示式得$a_0=-4$，$a_1=8$，$a_2=-5$，则将a_0，a_1，a_2和α_0，α_1代入$h_{0\text{II}}$的表示式（5—7—49）得

$$h_{0\text{II}}=\begin{bmatrix}4+12(-5-7)\\ 12-8+7(-5-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-140\\ -80\end{bmatrix}$$

再由b的表示式得$\beta_0=1$，$\beta_1=0$，$\beta_2=0$，将β_i（$i=0$，1，2）的值和α_i（$i=0$，1）的值代入$n_{0\text{II}}$的表示式又得：

$$n_{0\text{II}}=\begin{bmatrix}\beta_0-\alpha_0\beta_2\\ \beta_1-\alpha_1\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-12\cdot 0\\ 0-7\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

若取$\eta=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，则得$Q=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}$，它是非奇异的，因此可取$T^{-1}=Q$，这样便可得

$$h=T^{-1}h_{o\mathrm{II}}=Q\hat{h}_{o\mathrm{II}}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-140\\ -80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\ 180\end{pmatrix}$$

$$n=T^{-1}n_{o\mathrm{II}}=Qn_{o\mathrm{II}}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}QP\\ \\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 9\\ 1 & -4 & 16\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$W^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 12\\ 1 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(E \vdots m)$$

所以

$$E=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad m=\begin{pmatrix}12\\ 7\\ 1\end{pmatrix}$$

因此，最后得到降维状态观测器方程

$$\dot{Z}(t)=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}Z(t)+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}U(t)+\begin{pmatrix}100\\ 180\end{pmatrix}y(t)$$

$$w(t)=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}Z(t)+\begin{pmatrix}12\\ 7\\ 1\end{pmatrix}y(t)$$

可以用观测器的基本关系验证，它是降维状态观测器。本题虽然

给定的系统是可观安规范形式，但是，对于一般形式，只要系统是可观安的，那经过一次变换就可得到可观安规范形式。

最后要指出一点的，就是对于单轨入单轨出系统，它的状态观安叫的维数最低只能是（$n-1$），而不能再低了。实际上由观安所重迠的（$n-1$）个状态变易与原系统的轨出一起，仍旧是n个状态变易，从而构成了状态观安叫。

二　多轨入多轨出系统的降维观安叫

对于多轨入多轨出系统，其降维观状态安叫的设计可用类似于轨入单轨出系统的方法来处理。其具体做法是找一个由系统 S:〔A，B，C〕的矩阵 C 的行矢易的线性组合而成的矩阵$\tilde{C}$，使得〔A，$\tilde{C}$〕为一个可观安对。但是用这种方法只能迠立系统 S:〔A，B，C〕的（$n-1$）维状态观安叫。

对于一般情况，系统 S:〔A，B，C〕若为可控可观安的，并且 $rank\,C=m$ 那末，它的状态观安叫的最低维数为 $n-m$。这是因为 W 是一个（$p+m$）·n 矩阵，因此要使（5—7—42）式成立，那末要使 W 满秩，即 $p+m$ 不能小于 n，也就是 p 不能小于（$n-m$）。显然，这个结论，对于单轨入单轨出系统也是正确的。因为对于单轨入单轨出系统有 $rank\,C=1$，因此得到其降维观安叫的最小维数为（$n-1$）。

由此可知，对于一个多轨入多轨出系统，如果观安叫的一般形式（5—7—8）要成为一个（$n-m$）维状态观安叫，那末 $W=\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}$

必须是非奇异的。因此，如果由A，C和F，H所决定的P能保W为非奇异，并且F的特征皆具有负实下，那么，就可用F和H构成$n-m$维状态观安口。

实际上可以证明，当F与A没有相同的特征值时，并且满足

$$PA-FP=HC$$

的P，若能使$W=\begin{bmatrix}P\\C\end{bmatrix}$为非奇异，那么（A，C）为可观安对，（F，H）为可控对。因此，可以用F，H构成系统S:（A，B，C）的状态观安口，并且由W的非奇异特性，保证有一个$n-m$维状态观安口。但是反过来，若F与A没有相同的特征值，而且（F，H）为可控对，它并不能保证得到的W是非奇异的，因此就不一定能用F，H构成（$n-m$）维状态观安口。

〔例题5－7－3〕 设有系统矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

试设计一个降维观安口，使得

$$F=\begin{bmatrix}-3&0\\0&-4\end{bmatrix}$$

〔解〕 显然（A，C）是可观安对，并且$rank C=2$，可如

下求解H，设

$$H=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

则只要h_{11}，h_{12}不同时为0，g_{21}，g_{22}不同时为0，那末，（F，H）是可控对。由基本关系式(2)得

$$PA-FP=HC$$

只要A和F没有相同的特征值，P是唯一存在的，设

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \end{pmatrix}$$

则代入上百方程，根据给定的F，A，C和H的表示式得：

$$\begin{cases} p_{11}=\dfrac{1}{4}h_{11}\ ;\ p_{12}=\dfrac{1}{5}h_{12}\ ;\ p_{13}=-\dfrac{1}{25}h_{12}\ ;\ p_{14}=\dfrac{1}{5}h_{11}\ ; \\ p_{21}=\dfrac{1}{5}h_{21}\ ;\ p_{22}=\dfrac{1}{6}h_{22}\ ;\ p_{23}=-\dfrac{1}{36}h_{22}\ ;\ p_{24}=\dfrac{1}{6}h_{21}\ ; \end{cases}$$

所以

$$\det W=\det\begin{bmatrix} \frac{1}{4}h_{11} & \frac{1}{5}h_{12} & -\frac{1}{25}h_{12} & \frac{1}{5}h_{11} \\ \frac{1}{5}h_{21} & \frac{1}{6}h_{22} & -\frac{1}{36}h_{22} & \frac{1}{6}h_{21} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{750}h_{12}h_{21}-\frac{1}{720}h_{11}h_{22}$$

于是，当$h_{11}=0$，$h_{12}\neq 0$，$h_{21}\neq 0$，$h_{22}=0$时，W是非奇异的，这样的〔F，H〕能构成2维状态观察器；但是当$h_{11}=0$，$h_{12}\neq 0$，$h_{21}=0$，$h_{22}\neq 0$时，W是奇异的，因此，尽管〔F，H〕是可控对，仍不能构成降维状态观察器。

下面讨论系统S:〔A，B，C〕为可观察，并且$rank\,C=m$时，其降维$(n-m)$状态观察器的存在性问题。

由于$rank\,C=m$，因此存在$(n-m)\times n$矩阵C_2，使得

$T^{-1}=\begin{bmatrix} C \\ C_2 \end{bmatrix}$是非奇异的，因此对系统S:〔A，B，C〕作坐标变换

$T\tilde{X}(t)=X(t)$得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t)=\tilde{A}x(t)+\tilde{B}u(t) \\ Y(t)=\tilde{C}X(t) \end{cases} \tag{5-7-52}$$

式中

$$\begin{cases} \tilde{A}=T^{-1}AT \\ \tilde{B}=T^{-1}B \\ \tilde{C}=CT=[I \ , \ O] \end{cases}$$

因此，如果求得了系统（5—7—52）的（$n-m$）维状态观安口，也就可得到系统S：〔A，B，C〕的（$n-m$）维状态观安口。如果设

$$\tilde{X}(t)=\begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t) \\ \tilde{X}_2(t) \end{bmatrix}$$

式中$\tilde{X}_1(t)$是$m\times 1$矢昜，$\tilde{X}_2(t)$是（$n-m$）$\times 1$矢昜，则得

$$y(t)=\tilde{X}_1(t)$$

$y(t)$正好是系统（5—7—52）的状态矢昜前m个分昜，因此，如果我们能求得对$\tilde{X}_2(t)$的状态观安口，就相当于求得了对$\tilde{x}(t)$的（$n-m$）维状态观安口。为此，首先要推出，$\tilde{x}_2(t)$的状态方程。如果将矩阵$\tilde{A}$按第m行和第m列分成四块：

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

同样得

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\end{bmatrix}$$

因此得到状态方程：

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}_1(t)=\tilde{A}_{11}\tilde{X}_1(t)+\tilde{A}_{12}\tilde{X}_2(t)+\tilde{B}_1U(t)\\ \dot{\tilde{X}}_2(t)=\tilde{A}_{21}\tilde{X}_2(t)+\tilde{A}_{22}\tilde{X}_2(t)+\tilde{B}_2U(t)\\ Y(t)=\tilde{X}_1(t)\end{cases}$$

更进一步得：

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}_2(t)=\tilde{A}_{21}y(t)+\tilde{A}_{22}\tilde{X}_2(t)+\tilde{B}_2U(t)\\ \dot{Y}(t)-\tilde{A}_{11}Y(t)-\tilde{B}_1U(t)=\tilde{A}_{12}\tilde{X}_2(t)\end{cases}\qquad(5-7-53)$$

可将式（5—7—52）看成是$\tilde{X}_2(t)$的状态方程，这里轨入是$Y(t)$和$U(t)$，而轨出是$\dot{Y}(t)-\tilde{A}_{11}Y(t)-\tilde{B}_1U(t)$因此，只要$\{\tilde{A}_{22},\tilde{A}_{12}\}$是可观史的，就可按前述的基本状态观史叫的方法，选择$(n-m)\times m$矩阵$\tilde{G}$，使$\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12}$的特征值都具有负实下，从而系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{Z}}(t)=(\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12})\tilde{Z}(t)+\tilde{G}\{\dot{Y}(t)-\tilde{A}_{11}Y(t)-\tilde{B}_1U(t)\}\\ \qquad+\tilde{A}_{21}Y(t)+\tilde{B}_2U(t)\end{cases}$$

$$\left\{\tilde{w}(t)=\tilde{Z}(t)\right.$$

可以是系统（5—7—53）的一个状态观察器。但是它包含有$Y(t)$的导数项，因此可换一个变量。

设$Z(t)=\tilde{Z}(t)-\tilde{G}Y(t)$

则得

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=(\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12})Z(t)+\{(\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12})\tilde{G} \\ \qquad +\tilde{A}_{21}-\tilde{G}\tilde{A}_{11}\}Y(t)+(\tilde{B}_2-\tilde{G}\tilde{B}_1)U(t) \\ w(t)=Z(t)+\tilde{G}Y(t)\end{cases}$$

上式与$\tilde{X}_1(t)$结合，就构成$\tilde{X}(t)$的（$n-m$）维状态观察器：

$$\begin{cases}\dot{Z}(t)=(\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12})Z(t)+\{(\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12})\tilde{G}+\tilde{A}_{21}-\tilde{G}A_{11}\}Y(t) \\ \qquad +(\tilde{B}_2-\tilde{G}\tilde{B}_1)U(t) \\ w(t)=\begin{bmatrix}0\\ \cdots\\ I\end{bmatrix}Z(t)+\begin{bmatrix}I\\ \cdots\\ H\end{bmatrix}Y(t)\end{cases} \qquad (5\text{—}7\text{—}54)$$

可证明，对于可观察的系统$S:(A,B,C)$，上述形式$(\tilde{A}_{22},\tilde{A}_{12})$是可控对；并且如果选择$\tilde{G}$使得$(\tilde{A}_{22}-\tilde{G}\tilde{A}_{12})$的特

征值都具有负实部，以及取 $P=[-H, I]$ 时，有

$$\begin{cases} P\tilde{A}-(\tilde{A}_{22}-G\tilde{A}_{12})P=\{(\tilde{A}_{22}-G\tilde{A}_{12})G+\tilde{A}_{21}-G\tilde{A}_{11}\}\tilde{C} \\ \tilde{B}_2-G\tilde{B}_1=P\tilde{B} \\ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I & \vdots & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}=I \end{cases}$$

因此系统（5—7—54）是系统 $S:(\tilde{A}, \tilde{B}, C)$ $(n-m)$ 维状态观测器，再用变换 T 变回去，就可得到系统 $S:(A, B, C)$ 的 $(n-m)$ 维状态观测器。

由此可知，如果系统 $S:(A, B, C)$ 是可观测的，并 $rank\, C=m$ 那末它的最小维数 $(n-m)$ 维状态观测器是存在的。

这个观测器的逼近速度由 $(\tilde{A}_{22}-G\tilde{A}_{12})$ 的特征值所决定。

5—7—6　用观测器构成状态反馈

如果对一个系统 $S:(A, B, C)$，我们需要一个状态反馈 $KX(t)$，但是其状态变量又不能具体测得，那末，这时可用 $KX(t)$ 观测器来构成状态反馈，如图 5—7—4 所示。

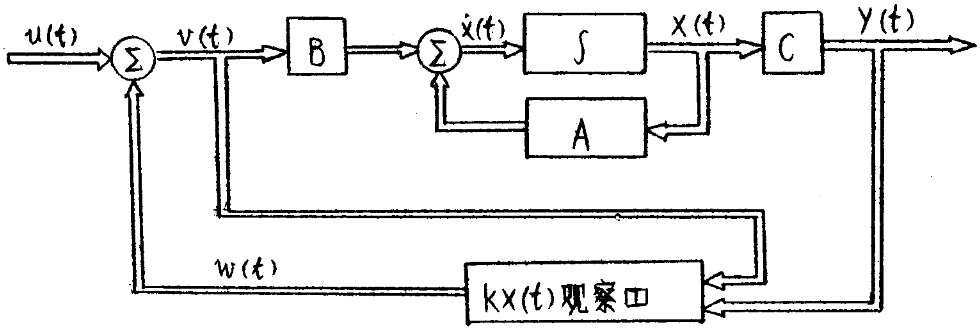

图 5－7－4　用 KX(t) 观安叩构成状态反馈

由图 5－7－4 可得到闭环系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+Bv(t)\ ; \\ Y(t)=CX(t)\ ; \\ \dot{Z}(t)=FZ(t)+HY(t)+Nv(t)\ ; \\ w(t)=EZ(t)+MY(t)\ ; \\ v(t)=u(t)+w(t) \end{cases}$$

上西方程可简化为

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=[A+BMC]X(t)+BEZ(t)+BU(t) \\ \dot{Z}(t)=[HC+NMC]X(t)+[F+NE]Z(t)+NU(t) \\ Y(t)=CX(t) \end{cases}$$

由此得:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BMC & BE \\ HC+NMC & F+NE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ N \end{bmatrix} U(t)$$

(5—7—55)

$$Y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$$

如果令

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & -I \end{bmatrix}; \quad \widetilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & -I \end{bmatrix} = \widetilde{P}$$

则作变换

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Z}(t) \end{bmatrix} = \widetilde{P} \begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

也就是

$$\begin{cases} \widetilde{X}(t) = X(t) \\ \widetilde{Z}(t) = PX(t) - Z(t) \end{cases}$$

就可得到

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{\tilde{X}}(t) \\ \dot{\tilde{Z}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A+BMC+BEP & BE \\ P[A+BMC]-HC+NMC \\ +[PBE-F-NE]P & -[PBE-F-NE] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ PB-N \end{pmatrix} u(t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5-7-56) \\
Y(t) = [C, 0] \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Z}(t) \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

因为观安四具有如下关系：

$$
\begin{cases}
PA-FP=HC\ ; \\
N=PB\ ; \\
K=EP+MC
\end{cases}
$$

所以式（5—7—56）变为

$$
\begin{pmatrix} \dot{\tilde{X}}(t) \\ \dot{\tilde{Z}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BK & -BE \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} U(t)\ ; \qquad (5-7-57)
$$

$$
Y(t) = [C, 0] \begin{bmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Z}(t) \end{bmatrix}
$$

或

$$
\begin{cases}
\dot{X}(t) = [A+BK]X(t) - BE\tilde{Z}(t) + Bu(t) \\
\dot{\tilde{Z}}(t) = F\tilde{E}(t)\ ; \qquad\qquad (5-7-58) \\
\dot{Y}(t) = CX(t)
\end{cases}
$$

由式（5—7—57）或（5—7—58）可知：

(1) 当系统S：〔A，B，C〕借助于KX（t）观安叩来实现状态反馈时，闭环系统的特征值，等于直接用状态反馈K后，A＋BK的特征值和观安叩的特征值之总和；

(2) $\tilde{Z}(t)=PX(t)-Z(t)$ 表示了状态变舁与观安舁之间的偏差，也就是观安误差，这完全由自由系统 $\dot{\tilde{Z}}(t)=F\tilde{Z}(t)$ 所决定，而F的特征值决定了 $\tilde{Z}(t)$ 消失的速度，特别地 $\tilde{Z}(0)=0$，则 $\tilde{Z}(t)=0$；

(3) 闭环系统的传递矩阵为 $W(s)=C[SI-A-BK]^{-1}B$，它与直接用状态反馈K之后的传递矩阵是一样的。由式（5—7—58）可见 $\tilde{Z}(t)$ 是闭环系统的不可观安不可控的卪分，这说明：由于用了观安叩，从而增加了状态变舁，也就增加了闭环系统的极点，但是这些增加的极点全被另点消去了。不过这些所对消的极点是可以人为地可安排的。

(4) 采用观安叩所构成的状态反馈闭环系统与不用观安叩的直接状态反馈系统相比，它增加了一个负的轨入项，这个负的轨入项是由观安误差所引起的，并且随着 $t\rightarrow\infty$ 时将趋于另。

下百举例说明。

〔例题5－7－4〕 重新讨论例题5－6－1的系统，它是单轨入单轨出系统，传递函数为 $W(s)=\dfrac{1}{S(S+6)}$ 试设计一个用KX(t)

观安叫的状态反馈系统。

〔解〕 由图5－6－6，得到系统的状态方程为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \quad , \quad 1) \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

如果先考虑一个二维观安叫，并且要求其具有重极点-10，这时它的特征多项式为

$$P(s)=S^2+20S+100$$

因此，当采用基本观安叫形式时，就是要找

$$g=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

使得

$$A-gC=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}(0 \quad 1)=\begin{pmatrix} 0 & -g_0 \\ 1 & -(6+g_1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}$$

所以得：$g_0=100$；$g_1=14$ 因此由式（5—7—4）得到$KX(t)$观安叫为

$$
\begin{cases}
\dot{Z}(t)=\begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} Z(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)+\begin{bmatrix} 100 \\ 14 \end{bmatrix} y(t) \\
w(t)=KZ(t)
\end{cases}
$$

因为在例题 5－6－1 中，求得 $K_0=[-64,-2066]$，代入上式后得：

$$
\begin{cases}
\dot{Z}(t)=\begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} Z(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)+\begin{bmatrix} 100 \\ 14 \end{bmatrix} y(t) \\
w(t)=[-64\ ,\ -2066]Z(t)
\end{cases}
$$

闭环系统结构图如图 5－7－5 所示。

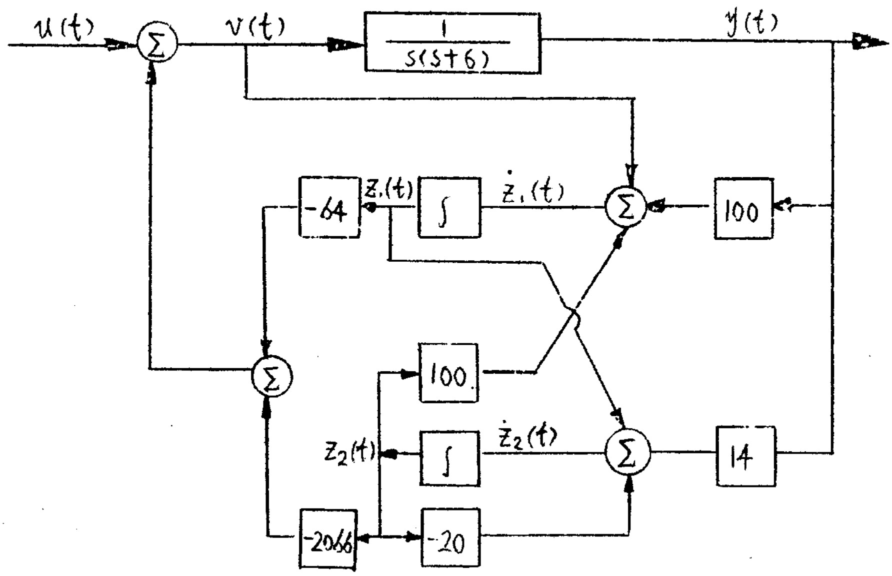

图 5－7－5　由二维 KX(t) 观安Ⅲ构成状态反馈

也可设计一个一维观安口构成状态反馈闭环系统，要求观安口的极点为-10。因此得$F=-10$

如果取$g=40$，并设$P=(p_1,\ p_2)$则解

$$PA-FP=gC$$

得

$$(p_2,\ -6p_2)-(-10p_1,\ -10p_2)=(0,\ 40)$$

即得$p_1=-1$，$p_2=10$。由此得

$$\begin{cases} W=\begin{pmatrix} P \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ W^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ n=Pb=(-1,\ 10)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=(-1); \\ K\cdot W^{-1}=(-64,\ -2066)\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(64,\ -2706) \\ E=64; \\ M=-2706 \end{cases}$$

由此得一维观安口方程，如图5－7－6。

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = -10Z(t) - v(t) + 40y(t) \quad ; \\ w(t) = 64Z(t) - 2706y(t) \end{cases}$$

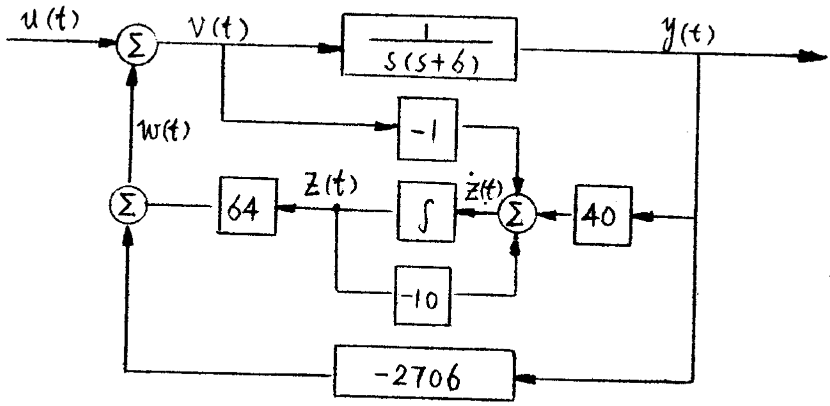

图5－7－6　由一维KX(t)观文口构成状态反馈