微積分學 ABC

王士清 著

世界書局印行

微積分學ABC

王士湑著

1930

微積分學ABC

平裝五角 精裝六角

（外埠酌加郵費匯費）

著作者　王士滑

出版者　ABC叢書社

印刷者　世界書局

發行者　世界書局

發行所 上海暨各省 世界書局

中華民國十九年十一月初版
中華民國二十年十一月再版

例　言

本書以英人 G. W. Brewster 所著之 Common sense of the Calculus 爲根據，並參以己意，以求完善。

本書祇須初級中學二三年級程度已可卒讀，原係通俗者，故不足以語大雅；但國內正缺少是種書籍，故敢以之問世。

本書或以編者學淺，錯誤之處，定所不免，幸讀者是正之。

目　次

頁數

微積分學ABC

引　　言

微積分學是近世算學的一大分科，占據科學上很重要的位置，差不多大部份的純粹科學以及應用科學都要需用到他。科學是近世文明之母，所以微積分對於近世文明也有很大的關係。這是誰都知道，無煩細說的了。

微積分在算學的本身上，尤占很重要的位置，他是初高等算學的分水嶺，他在初等部份中是最高深者，同時是高等部份最基本的一部；而他本身又是很好玩很有興味的一種科學，所以一般稍學過些算學的青年們都知道他，而且都要想嘗他的滋味。可是他矜貴的很，不很睬人，人們非有相當的算學程度，簡直沒法窺他的門徑。本書的目的便想使這久膾人口的奇珍

，設法讓智識貧窮的人們也嘗嘗他的滋味。所以在可能範圍內總是設法愈簡而且愈短。不過因此要請大衆注意的，便是這是請大家嘗嘗的並非供人家充饑細嚼的；所以本書所述不過是些大意罷了。至於理論上艱深的部份，初學的人遇着了他，反而要弄得頭暈眼花，連粗淺的部份也弄不清楚，所以本書不去述他。

讀者須知「明瞭大意」和「完全瞭解」有難易的不同。完全瞭解必須具有相當的根基方始可以做到，而明瞭大意便無須這樣的嚴格了。要明瞭這微積分的大意也不見得特別困難，祇要你讀過初等代數便與了，懂得那邊一張表便足够了。

函 數 (Function)

我們在初等部份的算學裏面，時常可以碰到許多「一量隨他量而變」的問題，最簡單的例要算是比例了。隨便舉一個通普的例子；譬如問火車的耗費，同他所走路程的長短，有何關係？略有些常識的人便要

回答是正比例的關係，並且還可以把算式來表明他們的關係。設C是耗費的銀圓數，D是路程長短的哩數，假定說每哩的耗費是大洋一分；那末他們的關係便可用下式來代表

$$C=\frac{1}{100}\times D,$$

不但如此，其他同類的例眞是多得很呢。隨便說來，譬如火車行全路的時間同他速度的關係，人數和工作時間的關係等等，都含着「一量隨他量而變」的情形。更可舉一圓面積的例來研究研究：設A是面積，D是直徑，那末大衆都知圓面積是

$$A=\frac{\pi D^2}{4}=0.785D^2$$

從上面式子，我們可以知道圓面積的大小同他的直徑是有關係的，但是決非直接正比例的關係。像這一類的公式實在不勝枚舉，只要你翻開隨便那一類應用科學書，都可以很便捷的看到。

現在吾們不妨再隨便舉一個例來做吾們討論的資料。就把吾們天天看見天天聽得到他聲音的鐘擺來做

一個例罷。

設擺長Ｌ吋，每擺動的時間是Ｔ秒；那末，Ｌ和Ｔ的關係是

$$L=39T^2$$

現在便把這個公式來討論一下；從上面公式，不論Ｔ的值是多少，總可以得到一個Ｌ的值，譬如$T=1$，便可得 $L=39$；$T=2$，$L=39\times2^2=156$ 等等。因此可以得到使鐘擺快慢的一個方法，便是加減這鐘擺的長度。譬如說要快，便是要使Ｔ的值小，要Ｔ小，便須Ｌ也小，Ｌ小便是減少擺的長度；要他慢呢，反是，加他的長度好了。更從上式令 $T=0$ ，便得$L=0$，意即擺動無論如何的快，都可以做到，祇要減短擺的長度好了。

下列一表，便從上式計算而得，由此可見鐘擺每擺動所需的時間和長度的關係了。

T	0	0.2	0.5	0.8	1.0	1.5	2	時間以秒爲單位
L	0	1.56	9.7	25	39	88	156	長　以吋爲單位

細察上表中T和L的值，可見T漸漸增大時L加增得很快，T加增了一倍，L值不祇加增一倍。再看原式，不是也很明明白白的載明L正比於T^2嗎？所以吾們立刻可以知道T加增一倍，L便要加增四倍。

上面所述的例，都是用算式來表明二個變量的關係，但是讀者要曉得不僅算式可以知道，更可以有其他的方法來代表二個變量的關係。其中最普通的方法要算是圖表法（Graphs）了。圖表法在近年來應用甚廣，無論是理論的或是記述的科學——如物理學，社會學，教育學，等等——無不應用到他。甚而至於天天看的報紙，也常有他的形跡發見。下列「圖一」便是公式$L=39T^2$的"圖表"了。他是應用上列的一張表製成的，一望便知他是一枝很平滑的曲線。得到他的方法；是將T的數值點列在橫軸上，和他相當的L值點列在縱軸上，經過橫軸上各點的縱線和經過縱軸上各點的橫線，必有許多交點，把這許多交點連結起來，便得下圖的曲線。我們便可以說這徒手作成的曲

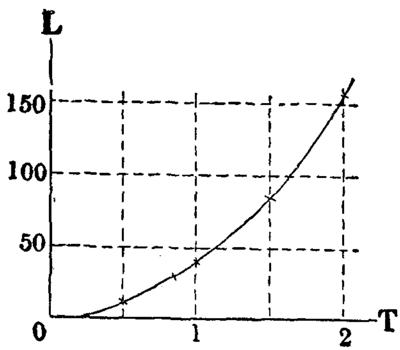


圖　　一

線完全可以代表上表各值。因這圖是從上表作成的，所以這句話是無論如何不訛的。從這圖上吾們可以看出許多事情來，例如T值增加時，L值也隨之而增加得很快等等。又此圖也可以當表用，因爲已知了T，便可在這圖上尋得相當的L值；已知L了值，也可求得T值。

上面討論這變量（Variable）和因變量（Dependent Variable），說了許多話，終覺得說起來麻煩得很，爲什麼呢？實在因爲沒有具體的名詞來代表他，所以現在不得不注意到這一層了。

算學家常把上面所述的公式$L=39T^2$，叫做"L是T的函數"，便是說"L是可以用含有T的各項來

代表的”，並且還可以看做L是僅因T變而變的。設T為任何數，L也必定有和他相當的一值；設T有變更，L便也要變更。又上面的公式更可寫成下形

$$T=\sqrt{\left(\frac{L}{39}\right)}$$

這樣吾們又可說“T是L的函數”了，同上面說的“L是T的函數”恰巧相反，但是於事實上是並沒有變化，還不是“二而一”“一而二嗎”？

函數的意義，在算學上占很重要的位置，尤其是在吾們現在所講的微積分上。現今把這名詞來解說一下。

> “有相互關係的二數量，設一數量變他的數值時，他一數量也隨之而變，吾們便名他一量為這一量的函數”

例如，當 $y=2x^2+3x+1$ 時，吾們可以說“y是x的函數’；又如 $y=4x+3$ 時，也可以說“y是x的函數”；其他便可類推。

函數的定義既然明白，我們便可以進而研究他所

以重要的原因了。細究宇宙間無論那一種現象，總是有他的原因，而且這種原因有變更時，現象便也隨之而變更。吾們總是時常有一種求知的慾望的，要明悉這變更的原因和情形，我們就要時常問"因某量的變更而影響到他一量的効果是怎樣"？這實在很有被人注意的價值。他最淺顯而最重要的例子，如稅關的稅率，食物的消費等都需細細的研究他變更的原因和影響，否則事出意外，便彌補不及，爲害很大了。因爲如此所以覺得函數的重要，所以研究函數的微積分也是重要。微積分自身雖不見得一定可以解答上列的問題，但是他能幫助吾們去解決這一類的問題，用算學方法去解答這一類的問題。

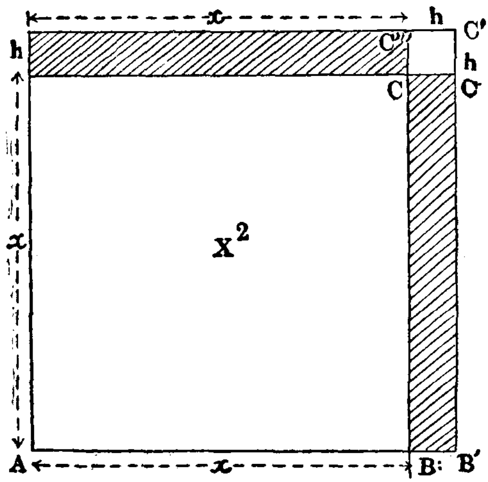
註　我們常用記號"$y=f(x)$"來代表"y是x的函數"這一句話。又f是函數Function的第一字母。

微差(Difference)

本節所討論的微差，可以把下列的命題，去概括他：

“設甲爲乙的函數，今乙有一微小的變更，求甲同時因之而得的變更是若干？”

今先假設一簡單的例來說明他：



註　英文 Difference 一字，是差的意義，但是在本節裏，還是譯他做“微差”比較適當些。

“有一塊每邊長 x 寸的正方金屬片，加熱澎漲後，得每邊長 $(x+h)$ 寸，試求面積增加了多大？”

他原來的面積是 $x\cdot x=x^2$ 方寸，卽圖中所示沒有斜線的那塊方形。經熱後每邊，增加 h 寸，所以所加的面積便是圖中有斜線的二長條和一塊小方。二長條的面積是 $2xh$ 方寸，小方的面積是 $h\times h=h^2$ 方寸，所以加增的面積是

$$2xh+h^2\text{方寸}$$

今把數字來代入，設 $x=3$, $h=0.005$. 則得

$$2xh=2\times3\times0.005=0.03$$

$$h^2=0.000025.$$

從此可以看出 h^2 一數，比較其餘一項的數小得多，簡直沒有什麼影響，吾們可以捨去他，因爲捨去之後，決沒有什麼可以覺察的錯誤發見。吾們常名這含有 h 一次的項叫做第一級小量，含二次的量叫做第二級小量，餘可類推。假使 h 和 x 比較小得很遠，那末，可以覺得第二級和第二級以上的小量，可以放心的

捨去，而决沒有什麼可以覺察的錯誤。

上述的問題當然也可以把算術的方法來解答他，祇須計算出 $(3.005)^2-3^2$ 的結果便是了；但是所得的結果終是不普遍的。（因不能表明一切正方形面積的增加和邊的關係）算術雖不能像圖的一般可以表示普遍的結果，但是可以用代數來表明他。今述他在下；

$$舊有的面積=x^2$$

$$新加增後的面積=x^2+2xh+h^2$$

$$新舊面積之差=新的-舊的$$

$$=2xh+h^2$$

若是捨去他的第二級小量，便得

$$新舊面積之差=2xh=2x\times(x之差)。$$

所謂“x之差”實即新舊二x值的相差，換句話說，便是x所增加的量。或者竟是可以說x的增量。

讀者既明上述之理，今可進而討論一更有用的例；

“試求鐘擺擺長增加和一往復時間（卽週期）的

關係。"

自上節知擺長和一往復時間的關係，可用下列一式來代表他，即

$$L=39T^2.$$

式中L是擺長，他的單位是寸。T是一往復所需的時間，以秒為單位。今設T加增至 T+h,那末，新得L值可以從上式中的T換（T+h）而得，便是

$$\begin{aligned} \text{新 } L &= 39(T+h)^2 = 39T^2+78Th+39h^2 \\ \text{舊 } L &= 39T^2 \\ \therefore\ \text{新舊 } L \text{ 的差} &= 78Th+(\text{第二級小量}) \\ \therefore\ L\text{的差} &= 78T\times(T\text{的差}) \end{aligned}$$

今更以實例來表明上式的用途：

某鐘內一擺所需的時間原為0.5秒。今誤為0.499秒。（約每日快三分鐘）求擺必須增長若干，方始可以恢復他原來的情狀？

由題意得 $T=0.499$, T的差$=0.5-0.499=0.001$

應用上式，得

$$L\text{的差}=78\times0.499\times0.001$$
$$=0.039\text{吋或}\frac{1}{25}\text{吋}.$$

由是可知欲使此鐘保持準確的時間，須將擺錘低下$\frac{1}{25}$吋。

上述的結果在理論上仍有錯誤可尋，因沒有將第二級小量算進去。但是我們要研究由此而生的錯誤到底有多少？這種錯誤是否可以不問？更進一步的說；是否在任何情形之下第二級小量都是極小的數量？都可捨去？這許多問題實在有被注意的價值。現今在下面幾節中略爲討論一下：

茲先就上例而論，將第一級小量和第二級小量的比例來研究一下。上例中第一級小量是 78Th，第二級小量是$39h^2$，所以他們的比是

$$\frac{\text{第二級小量}}{\text{第一級小量}}=\frac{39h^2}{78Th}=\frac{h}{2T}.$$

由是知第二級和第一級的比有如第一級和普通量的比。設上式之值甚小，那末，第二級小量對於第一

級的影響甚微，可以放心的捨去，而沒有什麼可以覺察的錯誤發現。而事實上這個比值常為極小的數量，所以第二級小量常可捨去。

又從吾們上式中可以看出，h不必為極小的數量。祇要比T小得多便是了。因之第二級小量不必定為甚小的數量，不過遠比第一級小便是了。為明瞭計，不妨再將各種情形略述一下：

我們普通說的大小，實在是一個比較的名詞。譬如說這個大，那個小。便是這個比那個大，或那個比這個小。若是單單說這個大，或那個小，嚴格的說起來實在沒有意義。所以說大小是比較的名詞。小量的意義，當然也是如此。例如，吾們單說這只桌子每邊的長三尺。我們不能稱他大，當然也不能稱他是小。但是吾們把他和地球的直徑8000英里比較，那就覺得很小了。而同時覺得地球的直徑非常之大了。若是把地球的直徑和最近太陽系的一個恆星距離25兆兆英里比較，又覺得地球的直徑是很小了。所以說大小是完

全比較的名詞。假使吾們視25兆英里是一個普通數量；那末相形之下吾們便可視地球的直徑8000英里是一個小量，可以稱他為第一級小量，那三尺簡直小之又小，可稱他為第二級小量。25兆兆英里中加了三尺或是減去三尺簡直沒有絲毫影響。有如在大海中傾入一杯的水或是取去一杯的水，試問有什麼影響可以覺得嗎？他的水面為他增高或減低多少嗎？第二級小量的意義猶如此三尺之長，一杯之水，所以可以安心的捨去。但是吾們拿這三尺來和組織成物質的一種小點叫做原子的直徑3.55×10^{-8}糎（此係鈉原子的直徑）比較，便覺得三尺也是很大的數量了。若是和電子的直徑3.76×10^{-13}糎來比較，更覺得三尺又大得很了。假使吾們視三尺是尋常的數量，那末可以稱3.55×10^{-8}是第一級小量，而3.76×10^{-13}是第二級小量。由是吾們可以知道大小是一個比較上的名詞，第一級和第二級也是比較上的名詞。所以說第二級小量不必定是很小的數量，但是比較上很小而已。上面舉例闡明了小

量，第一級和第二級小量的意義和第二級可以放心捨去的道理。現在吾們更借用名儒曾國藩先生一段話來說明這段的理由和捨去第二級小量的便利。曾氏說「今夫三家市，利析錙銖，或百錢逋負，怨及子孫。若通闤貿易瓌貨山積，動逾千金，則百錢之有無，有不暇計較者矣(猶不暇計算第二級小量)。富商大賈，黃金百萬，公私流衍，則數十百緡之費，有不暇計較者矣……所操者大不暇計其小者…。」大小，第一級，第二級的意義，因此可以更加明瞭。第二級小數之所以捨去和捨去的便利，由此可見一般。尋常吾們第一級第二級的分別是依他所含小量的冪次而定。設$\frac{1}{a}$是一第一級小量，那末，$\frac{1}{a^2}$便是第二級。設b是一第一級小量，那末，b^2是第二級。一切第一級和第二級的分別都是如此。

現在舉一個機械方面的例來表明捨去第二級小量，在實用方面的利便。假使諸位看不懂呢，可以不去看他，也沒有什麼關係：

有一單筒式的氣體機關 (Gas Engine) 引動一發電機(Dynamo)，因是種機關(Engine)每兩轉中僅有一次的爆發，所以他的速度有快慢。爲免除這速度的劇烈變更，所以另備飛輪 (Flywheel) 來調節他，并且使爆發擊動(Explosion Strock) 所生的能力，一部份儲蓄起來供其他三擊動 (Idle Strock) 的用。今設必須預儲的能力是 2.4 呎噸(Foot-Tons)，所以飛輪在爆發擊動末所有的能力應較爆發前大 2.4 呎噸，又因飛輪的能力和他每分鐘轉動次數的平方成正比例。今飛輪之大適能使每分鐘轉動 n 次，所以他的能力是$\frac{n^2}{200}$呎噸。且設在未爆發時的速度爲每分鐘 240 轉，試求爆發後的速度是若干？

設爆發前的速度是每分鐘轉 n 次，爆發後的速度是每分鐘轉 (n+h) 次，所以爆發前的能力是$\frac{1}{200}n^2$呎噸；爆發後的能力是

$\frac{1}{200}(n+h)^2=\frac{1}{200}(n^2+2nh+h^2)$。因h是比較上的小量，所以可以把含有$h^2$的一項捨去

因得　　　$\frac{1}{200}n^2+\frac{1}{100}nh.$

上式中$\frac{1}{200}n^2$即是轉動n時的能力，所以爆發前後能力的差是$\frac{1}{100}nh$，即是 2.4 呎噸，由是得

$$\frac{1}{100}nh=2.4.$$

令 $n=240$, 則得

$$\frac{1}{100}\times 240\times h=2.4,$$

$$\therefore \qquad h=1.$$

由是得爆發末的速度是每分鐘 241 轉。

這類問題普通常如下形：

設某機關的馬力是 20 h. p. 他的常速度 (Normal Speed) 是每分轉 220 次。試求飛輪適當的大小，足使他轉動的速度距常速度在每分鐘一轉以內。

設飛輪的重量是M磅，有効半徑是r.，每所以每分鐘轉n次時的能力是

$$\frac{Mr^2}{5870}n^2\text{呎磅}.$$

每分鐘轉(n+h)時能力是

$$\frac{Mr^2}{5870}(n+h)^2\text{呎磅}.$$

二式相減得(n+h)次時的能力和n次時能力的差是

$$\frac{2Mr^2}{5870}nh\text{呎磅}.$$

今發電機每分須 33000×20 呎磅（因1hp.=33000 呎磅）的能力，而每分鐘有生力擊動（Working Strccks）110次，所以每一擊動須能力

$$\frac{33000}{110}\times 20=6000\text{呎磅}.$$

他的四分之一即用於生力擊動上，四分

之三儲蓄來供其他三擊動之用。這個儲蓄的能力即是上述的$\frac{2Mr^2}{5780}nh$，故得

$$\frac{2Mr^2}{5870}\times nh=\frac{3}{4}\times 6000.$$

令 $n=220$，$h=1$，便得

$$Mr^2=\frac{3}{4}\times 6000\times\frac{5870}{2}\times\frac{1}{220}$$

$$=60000(\text{近似}).$$

設令半徑等於2呎，那末，得

$$M\times 4=60000,$$

$$\therefore\qquad M=15000\text{磅}.$$

由是知必須的重量爲15000磅。

再舉一例：

"試求圓徑微微加增時，圓面積的加增是怎樣？"

設A爲面積，r爲半徑，便得

$$A=\pi r^2.$$

故知半徑r的圓面積$=\pi r^2$,

半徑$r+h$的圓面積$=\pi(r+h)^2$

$$=\pi r^2+2\pi rh+\pi h^2.$$

二式相減得

面積之差$=2\pi rh+\pi h^2$

$=2\pi r\times$(半徑之差)+第二級小量.

欲明上式之理和應用，可細察一求圓筒內徑的實驗法，法先求能充滿此圓筒一定長的水重，由此計算他的橫切面積和半徑。設求得的半徑是 0.5 糎。又因實驗難免沒有差誤，但是錯誤的量可以設法估計。今估計他是 0.1 平方糎，吾們從此面積"錯誤量"來計算半徑的錯誤有多少。自上式可令；

面積之差$=0.1$,　$r=0.50$.

$\therefore$　　$0.1=2\pi\times0.50\times$(半徑之差).

由是得　半徑之差$=\dfrac{0.1}{\pi}=0.032$(近似).

故知半徑的錯誤可有0.032糎。

各種實驗，都因測度不能眞確，多少總有些錯誤。不過從這測度上生出來的錯誤，

皆能設法估出。所以從此法可以算出他結果上的差誤。這也是微積分應用的一種。

吾們為便利計，可以引出一個記號來。便是把dx來代表"x 的差"，dA代表"A 的差"，其他仿此類推。必須注意的是dx不過是個記號，並不是d×x的意思。他根本的意義是"同一變數x中，接連二值的差"，即'新x－舊x"的意思。在代數的意義上，dx是一個記號，視同一個字母一樣的。

這種"差"或者說"錯誤"的公式，曾經見過的有；

(1) 設 $A=x^2$,(正方面積)　便得 $dA=2xdx$.

(2) 設 $E=\frac{1}{200}n^2$,(飛輪能力)便得 $dE=\frac{1}{100}ndn$.

(3) 設 $L=39T^2$, (擺)　便得 $dL=78TdT$.

(4) 設 $A=\pi r^2$,(圓面積)　便得 $dA=2\pi rdr$.

註　　把dx來代h的理由，是因dx一看便知為x的微差,(或增量) 而h是不能有這樣的明瞭。

更舉一實例來討論一下；

直徑 x 的球體積是 $V=\frac{1}{6}\pi x^3$ ，設此球加熱膨漲後的直徑是$(x+h)$，所以新體積是

$$\frac{1}{6}\pi(x+h)^3=\frac{\pi}{6}(x^3+3hx^2+\text{第二級以上小量})$$

$$=\frac{\pi}{6}x^3+\frac{\pi}{2}x^2h.$$

故得

$$dv=\text{新}V-\text{舊}v=\frac{1}{2}\pi x^2h.$$

因 h 是 x 的增量，所以能把dx去代他。便得

$$dV=\frac{1}{2}\pi x^2dx.$$

設此球直徑自 $x=2''$,增加至 $x=2.01''$，便得

$$x=2,\quad dx=0.01.$$

由是得

$$dr=\frac{1}{2}\pi\times 2^2\times 0.01=0.063\ (\text{約}).$$

即體積加增0.063立方吋.

這個 dV 或 "v 的差"，吾們稱他是V的微分 (Differential)，其餘如 dA, dx, dE, dL 等，仿此。

下列五式可供讀者自己驗證的用。

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$, 則 $dy=xdx$

(2) $y=4x$, 則 $dy=4dx$

(3) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, 則 $dV=4\pi R^2dR$

(4) $S=16t^2+5$, 則 $ds=32tdt$

(5) $V=x^3$, 則 $dV=3x^2dx$

第二級以上小量均已捨去

讀者試用末一式來證明 $(2.007)^3=8.084$, (近似)

(以 x 代 2, $dx=0.007$)

速度 (Speed)

速度這觀念，一般人總以為很容易了解的，但是你問他確切的定義時，也簡直可以回答不出來。在今日之下，速度這名詞，確乎是很粗淺的了，因為他的應用是很廣大，很普遍的。我們常常有把速度來簡接的表明極長的距離，有如速度這個記號比較距離還簡

單的一般。譬如吾們前章說最近地球的一個恆星（除太陽在外）有25兆兆英里的距離，這個數目實在太大了，所以吾們對於他很模糊似的。不如吾們說他的距離是四光年，意思之間便是說光線從這個恆星上射到吾們地球上須歷四年纔到。(光的速度是每秒 186,000 英里）這便是把光的速度和四年的時間來表明這很遠的距離。這種的表明法，實在使人的觀念清楚了不少，并且也簡省得多了。可是這速度必須是一定的，否則反而要麻煩了。這種方法吾們在天文學上常常可以遇着。由是可見速度這個記號是何等的重要，可以不清清楚楚的弄明白他嗎？現在可以使諸位知道微積分這個學科，能够給吾們以速度精密的意義。

速度大概可分爲二種，一是等速的，即速度始終不變的；一是不等速的，即速度隨時間而變的。等速運動的速度即是把時間除這時間內所行路程的結果，所以是很容易求的。譬如三小時內走了十二哩路，他的速度便是$\frac{12}{3}=4$哩/時(哩/時是每時幾哩的意思，便

是速度的單位），不過這是等速的；若是不等速的，那所得的結果便有差誤了。普遍的說一句，在等速運動中，即有下式

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{時間}},$$

或　　　路程＝速度×時間。

這是等速的，現在吾們再講不等速的，但是他決不能像這樣的簡單了。吾們還是用實例來說說罷。譬如你們坐在汽車中看見速度表上所指的速度是每時30哩，（即每秒44呎。）那末，他的精確意義是什麼？他明示你這輛汽車是怎樣的運動？你們當然可以說；假使這指針不動，那末，這輛汽車在這最近的十秒中當走440呎，五秒中走220呎，一秒中走44呎等等的話。假使這指針動呢，上列的話可是一句都不能成立了。若是指針動得很緩呢，上列的話，也許還相差不遠，你們想想看，究竟那一句話最相近？吾知道你們必定回答說時間最短的那一個差得最少。因爲時間經

過不多，那指針距他原來的位置也一定不遠，由此便使吾們想到從最短的時間中來求速度。

設這輛汽車在 t 秒中走了路 x 呎。此後 dt 秒中所走的路是 dx，假使 dt 是極短的時間足够在實際上看做在這瞬間的速度不變。由是得

$$dx = V \times dt,$$

或
$$V = \frac{dx}{dt}.\ \text{(極近似)}$$

由是可得速度的定義如下：

在 dt 秒中所走的路程是 dx，若使達到充分的微小，那末，$\frac{dx}{dt}$ 卽爲極準確的速度。

玆更舉實例來說明他："有一塊石子從高處落下，在 t 秒中所走的路程若是 x，那末 t, x 的關係是 $x = 16t^2$. 試求落下二秒後的速度是多少？"

$t = 2$ 時，則得　$x = 16 \times 2^2 = 64$ 呎.

設　$t = 2.5$,　則得　$x = 16 \times (2.05)^2 = 67.24$ 呎.

由是知這塊石子在0.05秒中所走的路是：

$$67.24-64=3.24\text{呎。}$$

所以在二秒後的速度是

$$3.24\div0.05=64.8\text{呎/秒.（近似）}$$

不過上面所求的速度僅爲此0.05秒中的平均速度。所以是不十分眞確的，是近似的。現今更把一個較短的時間0.01秒來代表0.05秒，得

舊 $t=2$ 秒，　舊 $x=64$ 呎.

新 $t=2.01$ 秒，新 $x=16\times(2.01)^2=64.6416$呎

$\therefore\quad dt=0.01,\qquad dx=0.6416.$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{0.6416}{0.01}=64.16\text{ 呎/秒.}$$

這已是"比較上眞確的" x 秒末的速度了。但是吾還可以設法求到更好的結果，那個求法如下：

令 h 爲 t 秒後微小的時間，那末得

舊 $t=2,\qquad$ 舊 $x=64.$

新 $t=2+h,$ 新 $x=16\times(2+h)^2$

$$=16\times(4+4h+h^2)$$

$$=64+64h+16h^2.$$

$$\therefore \qquad dt=h, \quad dx=64h+16h^2,$$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt}=64+16h.$$

從上式可知h的值愈小，所得的結果愈佳。設h是充分的微小，那末，16h一項便可捨去；由是可以得到理想上的答數，即得64呎／秒是2秒末的準確速度。

仿此可以求一個任何時求速度的公式。

設原有的　$t=t,$

新的　$t=t+h,$

舊　$x=16t^2,$

新　$x=16(t+h)^2$

$$\therefore \qquad dx=32th+16h^2; \quad 但\ dt=h,$$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt}=32t+16h.$$

若h漸趨漸小，那$\frac{dx}{dt}$漸漸的近他理想的值32t。

所以得 $v=32t$ 是任何時刻t秒時的速度，他的單位是呎／秒。

距離與時間的圖表

(Distance-Time Graphs,)

設吾們已知某火車經過各里標 (Mileposts) 的時刻，而欲求他的速度。像這一類的問題最簡的解法要算是用圖表了。取縱橫二軸，各等分爲若干部份，縱的表里標上所示的里數，橫的表時刻，從已知的條件，

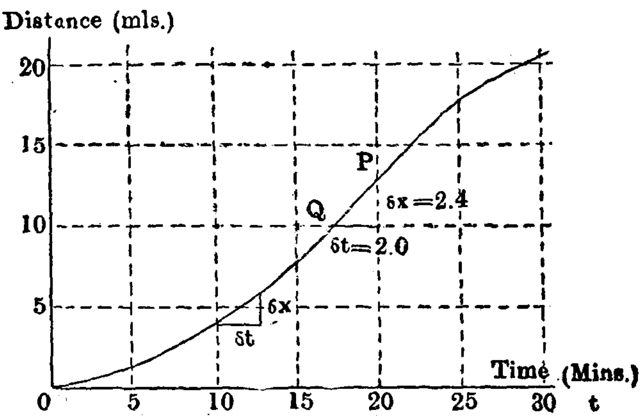


圖 三

作成曲線。再從曲線而加以研究，即可得到他的解答，及其他種種的智識。上列的圖三，即從已知的時刻和他相當的里數而作成的。讀者試細察一下，從此可以得到許多智識。

從上圖吾們顯然可以知道這輛火車的速度是不定的。因爲若是速度一定，那末，時間均勻的增加，距離也應均勻的增加，而上圖應當是一直線。現今不是直線，所以知道他是不等速度運動。既然是不等速度運動，那末速度便有大小，那一點是最大呢？那自然是圖中最陡的地方了，（P點）因爲在這塊地方，距離的加增是最速。這些大概讀者都可以明白的了。現在吾們要證明曲線的陡度(Steepness)是和速成比例的。

欲量P點附近的陡度，必須取一極短的時間，（設爲2分。）察他在這個時間中的曲線升高了多少。今把x表距離，t表時間，可得

$$dx=2.4, \qquad dt=2.0.$$

可知曲線在dt的横距離中，升高了dx，所以他的

陡度是$\frac{dx}{dt}$。但此式便是速度的公式，所以知速度便是他曲線上的陡度，可自圖上取 dx dt 之值，且把後者除前者而得。

上圖最大的速度要算是 PQ 一段了。他的$\frac{dx}{dt}$值可以求得是$2.4\div2.0=1.2$哩/分，（因 x 的單位是里，t 的單位是分）或72哩/時。

註　上面所得的速度是近似值，因爲事實上dt吾們不能取得有適當的微小，太小了，這圖便不易看得清楚。最好吾們把所求得的結果，看做這段時間中途時的速度。在上情形中，所求得的結果可以看做他是第19分時的速度。在上面圖裏，另有一處地方，有記號的，吾們可以求到經過第五里標時的速度是$\frac{2}{3}$哩/分或40哩/時。

斜度（Gradiant）

測量陡度的意義，除上節所述的以外，尙有其他

的應用，現略述一二在下。

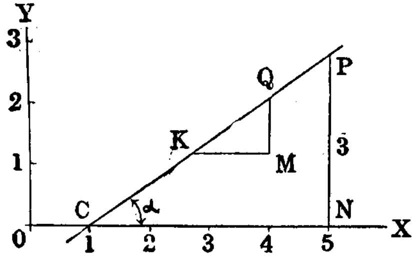


圖　　四

如圖四，OX 是橫軸，OY 爲縱軸，CP 是一直線。動點自C點沿此直線向上移動至P點，縱共升高了"3"個單位距離，橫共越過了4個單位距離。這樣吾們便叫做他在四中升三。或者說"1"中升"$\frac{3}{4}$"。在本情形之下，無論那一部份都是這樣的。（因CP爲一直線）任取那一部份，如KQ，他是在KM中升高了的QM，$\frac{QM}{KM}$的值必定也是$\frac{3}{4}$，這是可以用實驗來證明的。這個比例吾們叫做他"線的斜度"，這實在和α角的正切（Tangent）無異。

如圖五，是從方程式 $y=x^2$ 所作的曲線，假使P,Q是在曲線上極近的二點，那末PQ一段吾們可以看做他是直線，所以$\frac{NQ}{PN}$或$\frac{dy}{dx}$可以看做他是在P點曲線斜度的近似值。

設吾們把0.6和0.61是P,Q的x值（在圖上决不能表出此P,Q二點有如是的接近），那末和他相當的

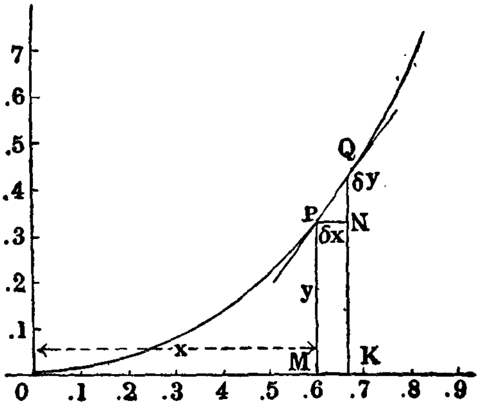


圖　　五

y值是$(0.6)^2$及$(0.61)^2$,(因$y=x^2$)他們的相差dy是

0.0121，

但　　　　　$dx=0.01,$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=1.21.$$

這是P點曲線斜度的近似值。設所取的dx漸漸的微小，$\frac{dy}{dx}$便漸近於1.2。這個$\frac{dy}{dx}$可以漸漸的趨近於意想中的值。吾們叫他是在P點曲線的斜度；這是和在P點的切線——僅僅和曲線接觸於一點的直線——的斜度完全無異。

設點沿曲線向P移動，PQ直線的方向勢必也漸漸的變小，他最後達到（即Q到P時）的位置便是P點的切線；那時的斜度便也達到1.2了。

微分（Differentiation）

現在吾們可以開始研究求斜度的普遍方法（General Methcd）了。

設 $y=3x^2+2x+1$ 是所求曲線的方程式。

吾們第一件要研究的便是x加增的時候，y所受

的影響是怎樣？（x的加增，猶如上圖自P點移動到Q點的情形）

設x加增到$x+h$，便得

$$新\quad y=3(x+h)^2+2(x+h)+1$$

$$=3x^2+6xh+3h^2+2x+2h+1,$$

$$但\qquad 舊\quad y=3x^2\qquad\qquad +2x\qquad +1,$$

$\therefore$ 相減得 $dy=6xh+3h^2+2h.$

把dx（便是h）除上式的兩邊，便得

$$\frac{dy}{dx}=6x+2+3h.$$

這是斜度的近似值。可使h的值漸漸微小來增加他的眞確度，因之可使上式隨願的近於$6x+2$。

$$\therefore\qquad 斜度=6x+2.$$

由此吾們可以得到一個經驗，便是當求斜度時，dy中所含的第二級小量（在上述情形中是$3h^2$）無須算入，因爲他對於結果實在沒有影響。下述一例，便取這個巧的了。

試求曲線$y=2x^2+5$的斜度。

仿上法，可得

$$dy = 4xh + \text{第二級小量}。$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = 4x + \text{（可使他隨所欲的小到絕無影響的小量）}$$

$$\therefore \qquad \text{斜度} = 4x.$$

讀者假使對於這種方法要有充分的了解，試證明下列諸式：

（1）設 $y = 4x + 2$,　$\delta y = 4\delta x$;　斜度 $= 4$.

（2）設 $y = 5x^2 + x$,

$\delta y = 10x\delta x + \delta x +$ 第二級小量，

斜度 $= 10x + 1$.

（3）設 $y = 5x^2 + x + 7$;

斜度 $= 10x + 1$.

（4）設 $y = x^2 - 4x + 2$,

$dy = 3x^2\delta x - 4\delta x +$ 第二級小量，

斜度 $= 3x^2 - 4$.

由此可得求斜度的捷法，你們試比較上述各式的

結果，憑自已的智慧，猜測他究竟是怎樣的？試看(2)和(3)的結果是完全相同，但是在原式中，(3)比(2)多一常數項"7"。然而他對於δy沒有什麼關係，在求δy時，(即求 y 的增量)(3)式中的 $5x^2$ 一項分擔了 $10x\delta x$，x 一項分擔了δx，但是 7 一項，却沒有分擔什麼。由是得求微分的方法如下：

"欲求各項的微分，法將原有的指數減一做新指數，再把原有的指數和 δx 來乘他便得。常數的微分是零"

試看下述一例，便能了解：

設 $y=x^4-5x^3+2x^2-7x+5$,

則因x^4的指數是"4"，$5x^3$ 的指數是"3"，$2x^2$的指數是"2"，$7x$是"1"，5 是常數，所以得

$$\delta y=(4x^3-15x^2+4x-7)\delta x+\text{第二級小量},$$

$\therefore$ 斜度$=4x^3-15x^2+4x-7.$

這種手續，常叫做微分法，(Differentiation)，通常用$\frac{dy}{dx}$來代表他的結果（即斜度）。

用$\frac{dy}{dx}$專來代表斜度是很便利的，因他是眞確的等於曲線切線的斜度。$\frac{\delta y}{\delta x}$是從一小段曲線所求得的近似值。$\frac{dy}{dx}$是將$\frac{\delta y}{\delta x}$中的錯誤完全去掉後的結果，他們的分別便在這點。

微分的應用

(Applications)

一個克立克球(Cricket ball) 以每秒80呎的速度向上飛擲，t 秒後的高度是 x 呎，而

$$x=80t-16t^2,$$

試求這個球上擲 2 秒，$2\frac{1}{2}$秒，3 秒末的速度各若干?

應用上節的法則，得

$$\delta x=80\delta t-32t\delta t+\text{第二級小量},$$

或 $$\frac{dx}{dt}=80-32t.$$

這便是 t 秒末時的速度。

令　$t=2$,　　得速度$=80-64=16$呎/秒;

令　$t=2\frac{1}{2}$,　　得速度$=0$;

令　$t=3$,　　得速度$=-16$呎/秒.

從此可知這球上擲後二秒末的速度是每秒16呎；$2\frac{1}{2}$秒末的速度是達到他的最高點靜止；三秒末每秒下落16呎。

設有某火車 t 小時後距南京的距離是 x ，而 t, x 有下式的關係：

$$x=40+50t-300t^2$$

試求(1)$t=0$時，火車在什麼地方？速度是怎樣？(2)到什麼時候和什麼地方這輛火車便停止？

〔你們可求得(1)那輛火車距南京40哩，速度每小時50哩；又(2) $t=\frac{1}{12}$，距南京$42\frac{1}{12}$哩時，這輛火車便停止〕

極大和極小

(Maxima and Minima)

郵局規定郵包的長和周圍的和不得超過 6 呎，試求可以郵遞的最大長方箱的形狀。

設箱的兩端每邊長 x 呎，所以周圍長 4x，由是得長是 6 - 4x 呎，他的體積是

$$V = x^2(6-4x) = 6x^2 - 4x^3 \text{ 立方呎。}$$

自此可見 x 太大了，他的長度 (6 - 4x) 便要減小，不能得到極大的容量；x 太小了，(6 - 4x) 雖大，但 x^2 又太小，所以也不能得到極大的容量。吾們現在要求周圍和長究竟在怎樣關係之下，方始可以得到最大容積？吾們從上式作成曲線，(圖七) 從圖上看起來，大概 x = 1 時，體積最大。但是這個數值也許不甚精確，有些靠不住。

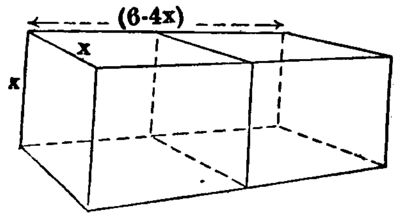


圖　六

但自微分法，我們可以知道$\frac{dv}{dx}$是P點的斜度，又自 $v=6x^2-4x^3$, 得

$$\frac{dv}{dx}=12x\quad 12x^2.$$

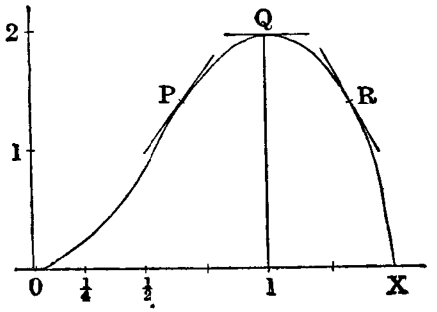


圖　七

曲線頂點 Q 的斜度是 0, 所以體積最大時$\frac{dv}{dx}$應為 0。所以我們現在只要問 x 在怎樣情形之下，可以使 $12x-12x^2$ 等於 0, 此則顯然須 $x=0$ 或 $x=1$ 時，可使上式為 0。但 $x=0$ 時，從上圖可以看得是曲線的谷底， $x=1$ 時是曲線的山頂。所以 $x=1$, 是所求的答案。

由是得這個郵包的大小是 $1'\times 1'\times 2'$.

凡曲線上任何點的斜度，當 x 加增時 y 反減小，（即 δx 爲正時，δy 爲負）爲負。（如圖七上的 R）若是 x 加增，則 y 也加增（如 P 點），他的斜度必爲正。所以 P, Q, R 三點的斜度是正，零，負。假使 Q 是谷底（即極小），那末那斜度的值應先負而後正了。這也是辨別極大極小的一種方法。

上面已經把特例講過，現在吾們可以講一個普遍的法則如下。

"若"v"是x的已知函數，那末求"v"的極大或極小值的方法是將$\frac{dv}{dx}$等於 0,再解這所得的方程式而求得 x 值，以此 x 值代入原式便得"。

自不甚精確的圖裏面，我們便可以求出那一個 x 值可使 v 極大，那一個 x 值可使 v 極小。（這也是辨出極大極小的一法）和他相當的 v 值，可以把他代入原式而得。

設 $$v=3x^2-x^3,$$

便得 $$\frac{dv}{dx}=6x-3x^2.$$

令 $6x-3x^2=0$, 或 $x(6-3x)=0$.

由是得 $x=0$, 或 2.

若將原式作成曲線，很容易看出 $x=0$ 是極小，（在本情形中 $v=0$） $x=2$ 是極大。（在本情形中 $v=4$）

曲線 $y=x^3-2x^2+x$ 的斜度是

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1).$$

若 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=1$，則上式等於0。再將原式作成曲線，自此吾們可以知道 $x=\frac{1}{3}$ 是曲線的山頂，$x=1$ 是曲線的谷底。所以 $x=\frac{1}{3}$ 時，y是極大；$x=1$ 時，y是極小。

（注意）極大並非他的最大值，不過是在鄰近諸值中是最大罷了。同一個方程式中或同一根曲線上可以有二個或二個以上的極大值。極小值也是如此。

習　題

(1) 試求 $2x^2-6x+10$ 的極小值。

(2) 試求 $8+10x \quad x^2$ 的極大值。

(3) 試證 $6x^2-x^3$ 有一個極大值，和一個極小值。

(4) 試證 $y=8x^2-x^4$, 在 $x=2, 0, =2$ 時，y 的值是極大及極小，并且其中有二個是極大。

果罐問題

糖果餅乾等公司常需用多量的果罐來裝他的出品，所以罐的形狀至須考究，怎樣可以使原料節省而容積極大。現在所討論的便是這個問題。

現今先假定這個最經濟的果罐的形狀是圓柱形。令 y 代他的高度，x 代他的半徑。所以所需的鉛皮面積是 $2\pi(xy+x^2)$, 他的體積是 πx^2y. 現在吾們假定面積是已知的定值，可配合 x y 適宜的值使他的體積最大。

因 $2\pi(xy+x^2)$ 是已知的，2π 是一定不變的常

數。所以 $xy+x^2$ 也是一定的數量。又因π是定值，所以 πx^2y 最大時，便是 x^2y 最大時。所以吾們現在的問題是：

設　$xy+x^2=C$,　求　x^2y 的極大值。

欲解決上題，須先將 x^2y 項中僅含一個變量，爲便利計，吾們將 y 代去。

因　$$xy+x^2=C,$$

移項得　$$xy=C-x^2,$$

兩邊乘以 x,得

$$x^2y=Cx-x^3.$$

由是吾們可以把 $Cx-x^2$ 來代 x^2y; 叫他做 v, (即 $v=Cx-x^2$)。於是得

$$\frac{dv}{dx}=C-3x^2.$$

令　$\frac{dv}{dx}=0$,　即得，

$$3x^2=C;$$

但　$$C=xy+x^2,$$

$$\therefore\ 3x^2=xy+x^2.$$

即 $$2x^2=xy,$$

$$\therefore\quad 2x=y.$$

由是知最經濟的圓罐，須使他的直徑等於高。

若是沒有罐蓋，那末所需的面積是 $\pi(2xy+x^2)$，因此他最大容量的形狀是他的半徑等於高。

下面幾個很容易解答的問題，讀者可以自己去解答他：

(1) 一尺長的線圍成一個四邊形，問怎樣的形狀，他的面積最大？

(2) 將一球直向上擲，t 秒後的高度 h 呎，但 $h=48t-16t^2$ 求他最高可達何點。

(3) 有一塊定量的木板，做一長方形的明水槽。怎樣的形狀最經濟？

設木板共闊八呎，槽深 x 呎，所以槽闊是 $(8-2x)$ 呎，橫斷面積是 $x(8-2x)$，怎樣可使這個面積達到極大？

(4) 怎樣可使正方形底的無蓋水池的容積最大？

假使這水池的原料面積是已知的，求他最大的容積。〔設四邊及上下二底的面積一共是300平方呎，令x代方底每邊的長而求之。將求得的底邊值代入原式求他的容積來檢驗你們的答案〕

(5) 將每邊長一呎的正方鉛皮，四角截去四小正方形。做成一正方形的水槽。試求這只水槽最大的容積是多少？

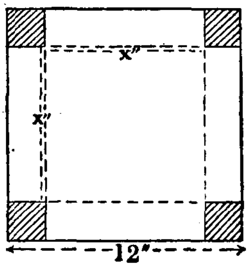


圖 八

〔令x吋是他底邊的長，所以他的深是 $\frac{1}{2}(12-x)$, ，他的容積是 $v=\frac{1}{4}x^2(12-x)$ 立方吋。

答 128 立方吋 (在$x=8$時)〕.

變動率

(Rate of Change)

變動可分二種；一種叫做匀齊變動 (Change Uniformly)，一種叫做不匀齊變動 (Change Non-Uniformly).

變量 v 當他的$\frac{\text{v 的變動}}{\text{變動的時間}}$是一定不變時，叫他做匀齊變動。

譬如有人說某市集人數匀齊的增加每年50人，那末二年應共增加 100 人，三年加增 150 人等等……，這個$\frac{50}{1}$, $\frac{100}{2}$, $\frac{150}{3}$……等的值都是相等的，叫他做"每年的增加率" (Rate of Annual Increase).

假使 v 是不匀齊變動，$\frac{\text{v 的變動}}{\text{變動的時間}}$便不是一定的了。於是取$\frac{\delta v}{\delta t}$且使 δt (加增 δv 所需的時間) 漸漸的微小，由是引起吾們用$\frac{dv}{dt}$來代表 v 的變動率。這是完全和圖表 v, t 的曲線的斜度沒有分別。

習 題

(1) 每邊 3 吋的立方形，每分鐘每邊加長 0.002 吋，求他的體積加增率是若干？

設　t秒時的邊長是x,他的體積是v立方吋，由是得

$$v=x^3,\quad \delta v=3x^2\delta x+（第二級小量），$$

兩邊以δt（變動 δv 所需的時間）來除便得

$$\therefore\quad \frac{\delta v}{\delta t}=3x^2\frac{\delta x}{\delta t}.$$

由是得

$$\begin{aligned}體積的加增率&=3x^2\times邊的加增率\\&=3\times3^2\times0.002\\&=0.054\ 立方吋/分。\end{aligned}$$

即每分鐘加增體積 0.054 立方吋。

(2) 直徑 2 吋長的氣泡，每秒鐘加增直徑 0.05吋，試求空氣吹入的速度。

$$\left[\ v=\frac{1}{6}\pi D^2,\quad 答=\frac{1}{10}\pi=0.314立方吋/秒\right]$$

(3) 速度的加增率在動力學 (Dynamics) 上占很重要的位置。任何重物自靜止點下落，t秒後的距離x呎，而 $x=16t^2$（設空氣的阻力不算）。由是得

$$v=速度=\frac{dx}{dt}=32t;$$

而速度的加增率$=\frac{dv}{dt}=32$. 這個叫做"加速率"(Acc.leration).

積　分

(Integration or addition)

以上各章已略述了些微分的性質，現在可以開始講積分了。積分的意義便是將許多微小的部份總和起來集合成一個整塊，以下所講的，便是闡名這積分的方法。

圓面積

(Area of a Circle)

如圖九把一任便的圓分成許多三角形的條。再把直線連結 AB, BC, CD, ……，於是得到一 ABCD……的多角形內接在這個圓內。

自 O 點作諸垂線直到 AB, BC, CD, ……等直線。

由是知三角形 ABO 的面積是

$$\tfrac{1}{2}\text{底}\times\text{高}=\tfrac{1}{2}AB\times p.$$

同樣求其他各三角形的面積。又各三角形中的 p 都相等。

這 ABCD…… 多角形的面積是這許多三角形面積的總和，便是

$$(\tfrac{1}{2}AB\times p)+(\tfrac{1}{2}BC\times p)+(\tfrac{1}{2}CD\times p)+\cdots\cdots$$

即 $$\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+\cdots\cdots)\times p$$

$$=\tfrac{1}{2}\text{多角形的周}\times p.$$

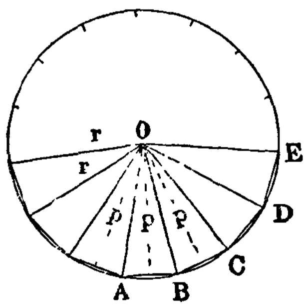


圖　九

這樣得到的面積顯然較實際上的圓面積略小，但是假使這三角的數目漸漸增多（這三角形條當然也同時狹起來），於是他倆的相差也一定漸漸的小下去，終至於使吾們看不出來。同時他的周界和圓周也差不多

完全相等，p 和圓的半徑也相等起來，於是得

圓面積＝$\frac{1}{2}$ 圓周×半徑。

吾知讀者對於上列的結果必定發生疑問。因爲上面顯然三個都是近似值；一將多角形的面積替代了圓面積，二將 p 代了半徑，三將多角形的周界代了圓周。但是請放心，沒有事的。因爲圓面積確實是等於$\frac{1}{2}$圓周×半徑，這個原理在積分學上是數見不鮮的。不過詳細講來，對於初學的人們實在太費解了，所以不多嘵舌。下面不過拿他來略略的講一下，也許講到以後幾節時，可以得到些兒幫助。

第一步，吾們也可以說這三個錯誤恰巧互相消去，所以結果沒有差誤。但是吾們並不想直接去證明他。現在吾們想着手去考察他的不精密度。吾想你們一定承認這三個錯誤都可以把三角形條子的加多來減小他，三

角形條的數可以隨吾們所欲的加多，所以這錯誤也可以隨所欲的減小。譬如吾們可以使p同r的相差不到r的百分之$\frac{1}{10}$，同時其他的差誤也一定可以同樣的減小。那末他的總共的錯誤决不致超過百分之$\frac{3}{10}$了。同樣也可以使他的結果的差誤小於$\frac{1}{100}$%，或$\frac{1}{1000}$%，或者竟是可以比這些更小的任何數都可以做到，因這三角形條的數目可以任便的加多，即三角形條可以任便的減小到極細的緣故。事實上，AB具有充分的微小，這錯誤便可算消滅。照現在而論，無論怎樣，吾們可以充分信任吾們的結果沒有錯誤可言。

速度與時間的圖表

(Speed-Time Graph)

設輪船的速度是每時v浬。假使v的值一定，那末他三小時走3v浬，六小時走6v浬，其他可以依此類

推。假使v不是一定，那末這距離應當怎樣計算呢？今設某輪船首先的三小時每時行10浬。其次的四小時，每時行15里，末了來的二小時每時8里。現今吾們先把他製成圖表再來計算。

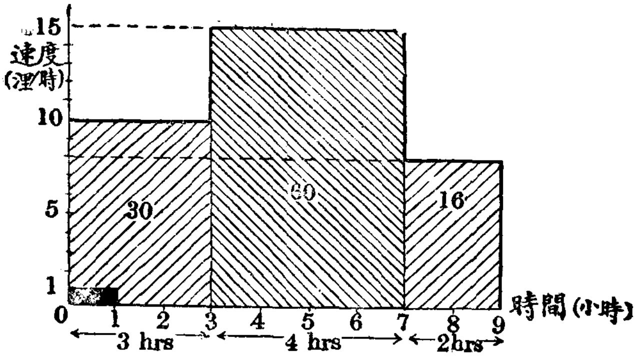


圖　　十

他的總路程當然是

$$(10\times3)+(15\times4)+(8\times2)=106\text{浬}。$$

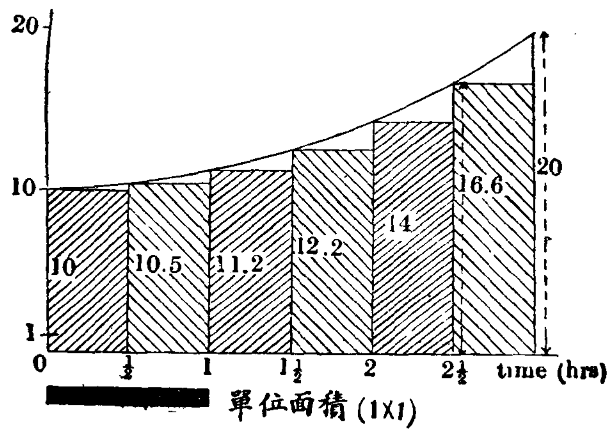
但是這個數目也是上圖有斜線部分的面積數。圖中全黑的一小塊便是他的單位面積（1×1）。自是吾們得知全路程和圖表的面積有數量上的相應。假使這

個原理眞確，那末吾們求速度連續變化時的路程，祇須將v,t 的關係作成圖表，求他的面積好了。

連續變化的速度

(Speed Varying Continuously)

吾們要從變速度運動中求他所歷的路程。設有某汽船在三小時內自每一時10浬的速度加增至每小時20浬。他加增的情形如下圖的曲線，現在要求他的全路程。



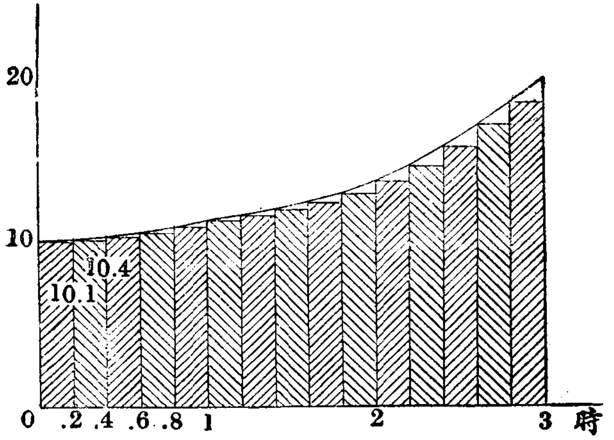
圖十一

將這時間分成6個半小時，幷記出每半小時起初的速度。假使這速度在這每個半小時內是不變的，而到了每半小時末時他便忽然的增加起來。這樣吾們便可以得到

第一'半小時'所走的距離$=10\times\frac{1}{2}$浬，

第二'半小時'所走的距離$=10.5\times\frac{1}{2}$浬。

其他的仿此類推，他的全路程便是這許多的總和。但是又很顯然的這許多數便是圖中有斜線各長方面積的數量（他的單位是每邊'1'的長方形面積）所以知全面積的數量便是等於他所行的路程（單位是浬）。由是所得的結果當然不甚真確的，不過是很不精細的近似值罷了，因爲任何時間的速度决沒有像上面所說的一定不變及驟變的緣故。但是我們將時間分得愈短，所得的結果應當愈加精確。下圖便是將這時間分成每段$\frac{1}{5}$小時。假定這速度每12分（$\frac{1}{5}$的一小時）鐘驟變一切，那末那有斜線的面積便是所行的路程了。由此所得的結果當然要比上一個精確得多了。同法可將時



圖十二

間分成每段十秒，那樣所得結果應當更爲精確，幾和曲線下的面積完全相同了。這時間可以分到隨吾們所欲的微小，所以同時也可以得到隨吾們所欲的精確度。事實上，吾們可以無需這樣的分法。吾們現在的目的，便要想用最簡單的方法來求出這曲線下的面積，由此得到他所行的全路程。

現在將吾們的結論說來普通些。

設動點在 $\delta t_1, \delta t_2, \cdots\cdots$ 等時間中的速度是 $v_1, v_2, \cdots\cdots$ 等。

那末，他的全路程約爲

$$v_1\,\delta t_1 + v_2\,\delta t_2 + \cdots\cdots\cdots$$

吾們可以使 $\delta t_1, \delta t_2 \cdots\cdots$ 等具有充分的微小來增加這近似值的精確度。他的結果可以量曲線下的面積而得到。

這許多 $v\delta t$ 的總和常用下述記號來代表他，即

$$全路程 = \int v\delta t.$$

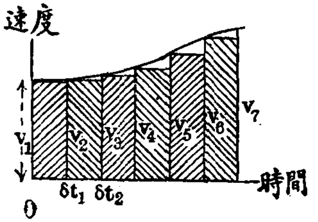


圖 十 三

這 $\int$ 叫做積分符號，他是英文 Sum 的第一字母 S 的特別寫法。意即各已知形的小量的總和。

英文 Integral 的字義是'整個,''完全';所以積分法便是從許多微小部分(或元素)造成一整個的手續。由上知δt愈小,便愈好,所以吾們可以懸想他無限的微小以至於沒有大小可言(當然他的個數也加增到極多)。這樣理想上的結果,吾們把$\int vdt$ 來代表他,使和$\int v\delta t$ 有些分別。雖然說不能達到如上所說的精確,但是你當可以覺得於dt極小時以$\int vdt$ 來代表vdt 的總和的便利。

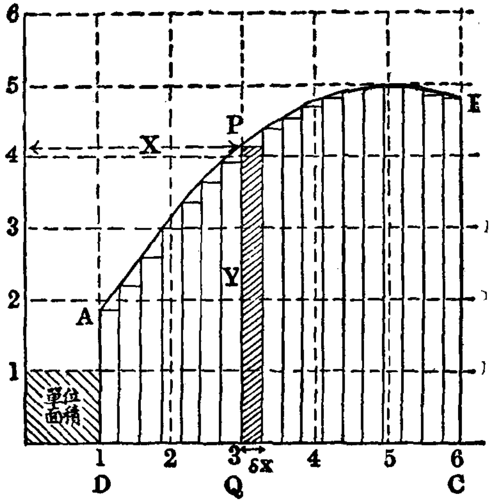
積分的意義應用非常的廣大,任何種科學祇須有測量變量的情形,便都用着他。以下吾們便要表明這面積可以用積分式來代表,或面積去代積分。以後再舉其他可以積分來表明的例。

積分表面積

(Area Expressed as an Integral)

假定圖十四是從下表所列各値所作成的：

x	1	2	4	5	6
y	1.8	3.2	4.8	5	4.8



圖十四

這曲線下的面積 ABCD，可以分成許多的細條（如圖）每條有他的高度 y,闊度 δx, 所以他全體的面積是

$$\int y\,dx \text{ 自 } x=1 \text{ 到 } x=6.$$

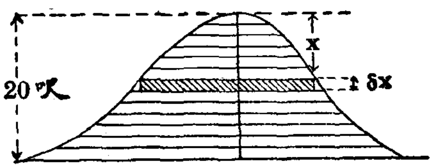
自實點方格數的結果，知道這個面積是$20\frac{1}{5}$倍的單位面積。由是知自上表所得的結果是

$$\int y\,dx \text{ (自} x=1 \text{ 到 } x=6) = 20\tfrac{1}{5}.$$

下列各題便先將積分式來表所求的量，然後再自作成的圖表上實點他所占的方格數，求得他的相當的面積。

'有一泥堆，他的高是20呎，自頂點到各平面的深度x.各平面的面積如下表。今要把堆平去，試求這堆的體積有若干？'

	x	0	5	8	10	15	20	呎
平切面之面積	S	400	750	1000	1200	2100	4000	方呎



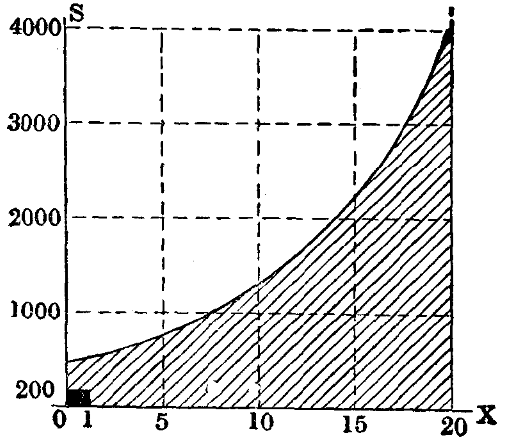
圖十五

設這泥堆分成許多的水平薄片，每片的厚是 δx, 所以自頂到底 x 的值便從 0 起每層加 δx, 直到深20呎爲止。設 s 代表任何層的面積，那末 $s\delta x$ 便代表他的體積的近似值。所以全部體積可以用下式去代表他：

$$\int s dx \text{ 自 } x=0 \text{ 到 } x=20.$$

(這便是將各層總加起來的意義)

欲求這積分式的值，可先把 s, x，用圖表示出來



圖十六

。圖表普通常用$\frac{1}{10}$吋見方的方格紙，不過十六圖用的是$\frac{1}{2}$吋見方的。

圖中小黑方塊的面積表體積 200×1 立方呎，而有斜線的面積含有 155 個這小黑方塊，

$$\therefore\quad 全體積=155\times 200=31000 立方呎。$$

又這積分式

$$\int sdx \text{ 自 } x=0 \text{ 到 } x=20,$$

普通常寫成

$$\int_0^{20} sdx.$$

'某汽車的速度每十秒鐘記下一次，如下表所載的，問他在一分鐘內可以走多少路程？'

時間	0	10	20	30	40	50	60	秒
速度	20	30	38	44	48	47	41	哩/時

假使他 t 秒時的速度是 v 呎/秒，那末其次 δt 秒中所行的路是 $v\delta t$ 呎。

於是 $\int xdt$ 是全部所行的路程。吾們現在為免除變換單位的麻煩起見，即用上表的單位作成下圖（圖

十七），不再加以化的手續了。作成後吾們把全體的面積和有斜線的方格比較。這有斜線的方格是代表速度每小時10哩行10秒鐘的路程，即

$$\frac{10}{60}\times\frac{1}{60}\times10\text{哩或}\frac{1}{36}\text{哩。}$$

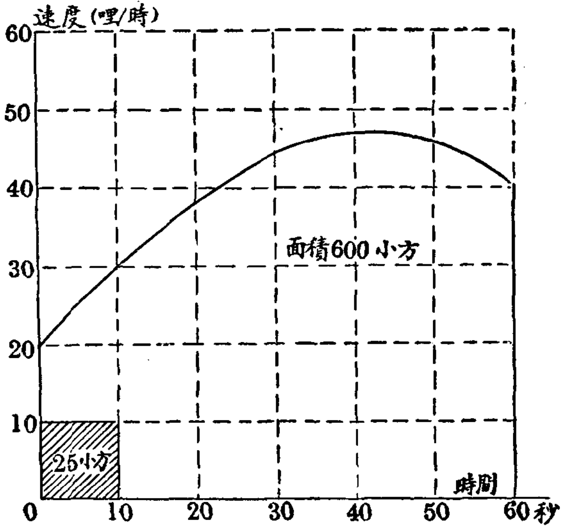


圖　十　七

自比較得結果，知全體含 600 塊這小方格，共計這小方格25塊和一塊有斜線的方格相等即$\frac{1}{36}$哩。所以

得

$$全路程=\frac{600}{25\times36}=\frac{2}{3}哩。$$

'某泉水每小時的流出量是x加侖（Gallons），問24小時可出水量若干'？

假使x是常數，他的答案便是24x加侖。假使x是變數，這答案便是

$$\int xdt\ 自\ t=0\ 到\ 24\ (或\int_0^{24}xdt),$$

若是各時刻的x值已知，那末他的結果便可以仿上法求得。

習　題

(1)某火車的速度在200秒中，自每秒40呎均勻的增加到每秒60呎，問他走了多少路程？

〔這個速度與時間的圖表是一直線，所以他的面積可以做長方形和三角形。答10,000呎〕

(2)在4分鐘內，每時20哩的速度均勻的加增到每時40哩，求他在這個時間中所行的路程。

〔假使速度單位仍用每時哩，那末單位面積便是$\frac{1}{60}$哩，即每時一哩的速度走了一分鐘的路程〕

(3)墮石在第一秒末的速度是每秒32呎，第二秒末，每秒64呎，餘仿此類推。求他落下三秒內所走的路程。〔144〕

(4)有一圓錐形的器具，距頂點x吋時的平切面積是S方吋，x, S相當的數值如下表。求他的體積有若干？

x=	0	5	10	15	20	吋
S=	0	20	80	180	320	方吋

〔答2.133立方吋〕

(5)水從水管中流出的速度是每分x加倫。試求他在5分鐘內的流出量。x的條件如下：

(i) x永為500

(ii) x連續的變化，他各分間的值依次是500, 400, 330, 275, 240, 220.

(6)某樹現今高10呎，此後的15年中每年增高x呎，問這樹十五年後高若干尺？

（假使 x 是常數，高＝10＋15x; 不是常數，

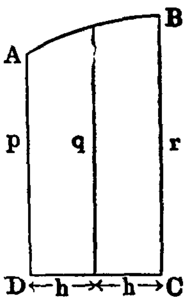
高＝$10+\int_0^{15} x dt$.）

求面積的法則

(Rules for Finding an Area.)

上節講過用實點方格數求面積的方法，未免太費時了。實際上有幾個方法都比他簡易。現在把他介紹在下面：

設 ABCD 是所需求的面積， AB 是一段曲線，但 AD 和 BC 是直線，垂直於底線 CD. 設 q 是他的中間高度，p 和 r 是他兩端的高度。



圖十八

他的面積在理當然是平均高度與闊的相乘積。但是這平均高度是什麼呢？據各專家的研究，有幾種求他近似值的法則：

(1)即以 q 當做平均高度。

這樣所得的面積是 2qh

(2)有的把$\frac{1}{2}(p+r)$當做平均高度

這樣所得的面積是$(p+r)h$，這法無異將 AB 的曲線換做直線。

這(1)和(2)的法則，當然免不掉錯誤。無論 AB 是怎樣（除非直線），必定是有一種方法所得的比原來的值大，他一種所得的比原來的小。

(3)辛氏法則（Simpson's Rule）是將

$$\frac{1}{6}(p+4q+r)$$

當做平均高度，自是所得的面積是

$$\frac{1}{3}(p+4q+r)h_{\circ}$$

記憶這個法則可以用下法：

平均高度＝p,q,q,q q,r 的平均數（Mean).

$$=\frac{p+q+q+q+q+r}{6};$$

或記憶他的要點，即p, p, r 有 1:4:1 的關係。

假使 AB 不十分長，并且是很平滑(Smooth)的，那末從辛氏法則所得的結果，是很精確可靠的了。否則可以把他分成數段（如下圖的方法）之後，每段應

用辛氏法則去求他的面積。

辛氏法則的例。"有一'平切面積不一定'的容器拿來盛水，各平切面的面積 (S) 如下表。假使每秒鐘水的流入量是 5 立方吋。問需若干時間始能盛滿？"

x	0	4	8	12	16	吋(自底向上)
S	15	18	24	16	12	方吋

因 S 是器中水平切面的面積，所以當水灌入時他深度加增 δx 時，所需的水量是 $S\delta x$, 於是得

容器的體積 $= \int s\,dx$ 自 $x=0$ 到 $x=16$.

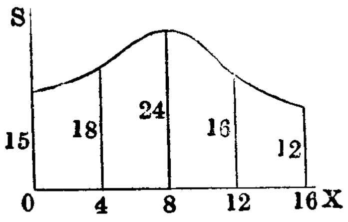


圖 十 九

將 x, s 的圖表分成二部（如圖十九），一部從 $x=0$ 到 $x=8$, 一部從 $x=8$ 到 $x=16$. 於是自辛氏法則得第一部的平均高度是

$$\frac{1}{6}(15+4\times18+24)=18\frac{1}{2}$$

$$他的面積是18\frac{1}{2}\times 8=148.$$

第二部的平均高度是$\frac{1}{6}(24+4\times 16+12)=16\frac{2}{3}$,

$$面積=16\frac{2}{3}\times 8=133\frac{1}{3}.$$

所以得 $$\int s\,dx=148+133\frac{1}{3}=281\frac{1}{3}.$$

即他的體積是 $281\frac{1}{3}$立方吋，所以充滿水所需的時間是 $281\frac{1}{3}\div 5$, 約56秒。

代數式的積分

(Algebraic Integration)

37頁上有幾個表示求 x 的各種函數微分法的例。現在再加以擴充，多寫幾個在下面：

(1) 設 $A=6x^2+x$, 便得 $\delta A=12x\delta x+\delta x$;

(2) 設 $A=6x^2+x+5$, 便得 $\delta A=12x\delta x+\delta x$;

(3) 設 $A=2x^3-\frac{1}{2}x^2+7x$, 便得 $\delta A=6x^2-x\delta x+7\delta x$;

(4) 設 $A=\frac{1}{2}x^4 \quad 4$, 便得 $\delta A=2x^3\delta x$;

(5) 設 $A=\frac{1}{2}x^4+10$, 便得 $\delta A=2x^3\delta x$;

（各式中的第二級小量已捨去）。

我們現要將這個手續倒過來，例如，已知A是x的函數及

$$\delta A=3x^2\delta x-x\delta x+\text{第二級小量}$$

來求A是什麼？

我們從求微分的方法，所以想到現在的方法是把原有的指數加一做新指數，再把這新指數來除這項。如是所得的結果便是所求的積分。但是最好的方法似乎還是用猜測手段，把猜測的結果再加以微分的手續來檢驗他。這樣的法子實在是萬無一失的。

例如 x^3 是微分時為 $3x^2\delta x$ 的函數，$\frac{1}{2}x^2$ 是微分時為 $x\delta x$ 的函數；

所以A的值可以是

$$x^3 \quad \frac{1}{2}x^2$$

但是也許還有其他可能的答案，所以不得不討論

一下。

例(1)與(2)，(3)與(4)有不同的A,而有相同的δA, 因微分時這常數 5, -4, 10 等都是無形的消滅，因之吾們現在想到積分是應有常數的加入。所以知假使

$$\delta A = 3x^2\delta x - x\delta x$$

A 必為　　$x^3 - \frac{1}{2}x^2 +$ 常數(C).

吾們必須要加一任意常數 (Arbitrary Constant) 的理由是；δA 僅僅對吾們說A是怎樣積成的，沒明言從何積起。因之吾們不能決定A的值，除非同時知道他的起點方始可以。假使除已知 δA 外更知x等於某值，譬如說0時的A值，那便可以求出這常數了。

例　題

(先把下列各題的答案蓋沒了，用自己的心力去解答各題。)

(1) $\delta A = x^2\delta x$,　　〔$A = \frac{1}{3}x^3 + C$〕

(2) $\delta A = x^3\delta x \quad 5\delta x$,　　〔$A = \frac{1}{4}x^4 \quad 5\delta + C$〕

(3) $\delta A=\frac{1}{2}x\delta x+3\delta x,$ $\quad$ $\left[A=\frac{1}{4}x^2+3x+C\right]$

(4) $dA=2\delta x-3x\delta x,$ $\quad$ $\left[A=2x-\frac{3}{2}x^2+C\right]$

(5) $\delta A=x^2\delta x-x\delta x$, $x=0$ 時 $A=1$.

$\left[A=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1\right]$

(6) $\delta A=2x\delta x$, $x=1$ 時 $A=4$. $\quad$ $\left[A=x^2+3\right]$

(7) $\delta A=6x^2\delta x-\delta x$, $x=2$ 時 $A=4$.

$\left[A=2x^3-x-10\right]$

自是可以應用這種方法去求一個已知方程式的曲線下所含的面積。

試圖表方程式 $y=x+x^2$, 且求自 $x=0$ 到 $x=2$ 間曲線下的面積。

自上式給 x 以任意數值，而求他相當的 y 值，得值如下表：

$x=$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
$y=$	$\frac{3}{4}$	2	$3\frac{3}{4}$	6

懸想 P 點是從 O 點沿曲線向上移動到 H 點，又視

PN 是這個面積的動界 (Moving Boundary).

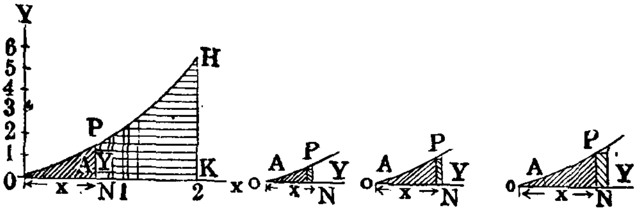


圖 二 十

設A是自O到NP間的面積，上面的小圖便是表明P移動時面積的加增。

由是顯然可知任何時面積A的值全視動界NP所到的地位而異，換句話說，便是A全視乎x所達到的值而定。($x=ON$) 所以我們可以說A的值必定可以用含有x的算式來表明他。現在的目的便在求這面積的公式。

假使這面積的值繼續不斷的增加。當動界NP移動的時候，x和A也都是加增，假使x增加 δx, 面積便也加增一狹條，他的面積是 $NP\delta x$. (近似值) 即

$$\delta A=NP\delta x=y\delta x.$$

但任何點P的 x,y 值有下式的關係：

$$y=x+x^2$$

所以　$\delta A=(x+x^2)\delta x=x\delta x+x^2\delta x.$

自此吾們可以試用吾們的猜測法來猜這A的值；得

$$A=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\text{常數}。$$

〔讀者可求這式的微分，來驗他有無錯誤〕。

因常數對於 δA 沒有影響，所以不能自 δA 求得。這是和他的起點有關係的，在本問題的情形，P在O時，(即$x=0$時)面積是等於'0',所以吾們可以同時令 $A=0$, $x=0$, 來求出這常數，得知這常數也是'0'.

所以面積的公式是

$$A=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3.$$

又因P到H時，x 的值等於2,所以得

$$A=\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{3}\times 2^2=4\frac{2}{3}.$$

這便是所求的 OHK 的面積。

上面所用的方法，並不是自以爲完全合於論理的證法，但是於緊要處似乎較其他的講得清楚些。將你所得的結果，加以詳細的考查，也是很有價值的舉動。譬如，我們得到了 δA 之後去猜測A 的值，這是很一定的，并且我們所需求的都很簡單。你們不要以爲這猜測是一種不正式或不合理的手續，祇要你把這猜測的結果加以檢驗便好了，當你們尋常做除法時不是也如此的嗎？

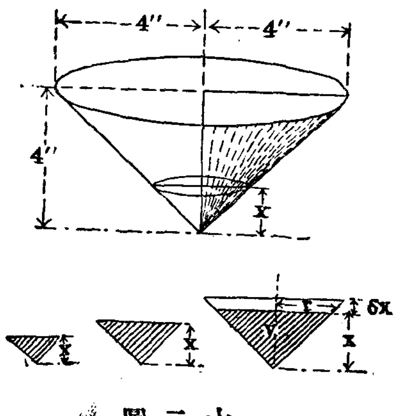
再有一點，我們得到了 $A=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C$ 之後，試驗他有沒有錯誤時，便要求出 δA的值，在本情形中 δA 的值是$x\delta x+x^2\delta x$, 不過式中第二級以上的小量已捨去。我們現在要問這第二級以上的小量，到底是那裏去了？試看上面第二十圖裏，$x\delta x$ 的頂上不是有一只小小的三角形嗎？這個三角形是不是我們沒有把他算入？這第二級以下的小量完

全包含在這三角形中了。這個吾們可以不去理他，因爲第一級小量實在比他重要不知多少倍呢！第十一和十二圖很能顯明這小三角形漸漸的微小，終至於沒有。

現在再舉一個求體積的例如下。

有一圓錐形的漏斗，他的深是4吋，他上面的直徑是8吋，問他能夠容多少水量？

設水緩緩的加入到漏斗裏去。令v是水深x時的體積。若深度自x加增到x＋δx時，體積的增加是δv. 這δv是像鋼圓形的一個圓片，他的體積約爲面積和δx的相乘積，又自這漏斗的形狀，可以



圖二十一

知道這δv一片的半徑也是x，所以得

$$\delta v=\frac{22}{7}x^2\delta x \quad \text{（第二級小量已捨去）}$$

$$\therefore \quad v=\frac{22}{21}x^3+\text{常數}。$$

因 $x=0$ 時，漏斗完全空着，即 v 為0，所以知常數亦為0，因得 $x=4$ 時之體積如下：

$$v=\frac{22}{21}\times 4^3=67\text{立方吋}.$$

〔在本情形中，第二級小量那裏去了？〕

習　　題

(1)試描寫 $y=4x-x^2$ 的曲線自 $x=0$ 到 $x=4$，自曲線上的任何點 P 作 OX 的垂線 PN，將曲線 PN，ON 間的面積劃許多斜線，設此面積是 A，試證明 $A=2x^2-\frac{1}{3}x^3$，并且證明這曲線和軸間的全面積等於 $10\frac{2}{3}$單位面積。（此自 $x=0$ 至 $x=4$ 之間）

(2)試求下面曲線 $y=x^3$ 的面積：

(i) 自 $x=0$ 到 $x=3$;

(ii) 自 $x=0$ 到 $x=1$;

(iii) 自 $x=1$ 到 $x=3$

(3)曲線 $y=1+3x^2$ 的面積公式是 $A=x+x^3+C$, 試求適當的C值使面積不從 $x=0$ 起而從 $x=1$ 起。

先作這曲線，將面積起點的定界 (Fixed Lower Boundary) 放在 $x=1$ 處，動界也從 $x=1$ 起，因之得 $x=1$ 時的面積等於零。故在上式中， $x=1$ 時，A是零。

$$\therefore \quad 0=1+1^3+C,$$

$$\therefore \quad C=-2.$$

所以自 $x=1$ 起的面積公式是

$$A=x+x^3-2.$$

(4)火車施用制動器 (Brakes), t 秒後的速度是每秒v呎。 v, t 的關係是 $v=90-3t$, 試求 t 秒內所行路程的公式，及全車停止時所行的路程。

〔描寫 v, t 的曲線，求這曲線下的面積（參觀56頁）。可得 $90t-\frac{3}{2}t^2$. 又 $t=30$ 時， $v=0$; 全路程 $=1,350$ 呎。〕

定 積 分

(The Definite Integral)

現在吾更引一個更簡便的記法出來。

取曲線 $y=x^2+x+1$，求他在 $x=1$ 到 $x=3$ 間的面積。

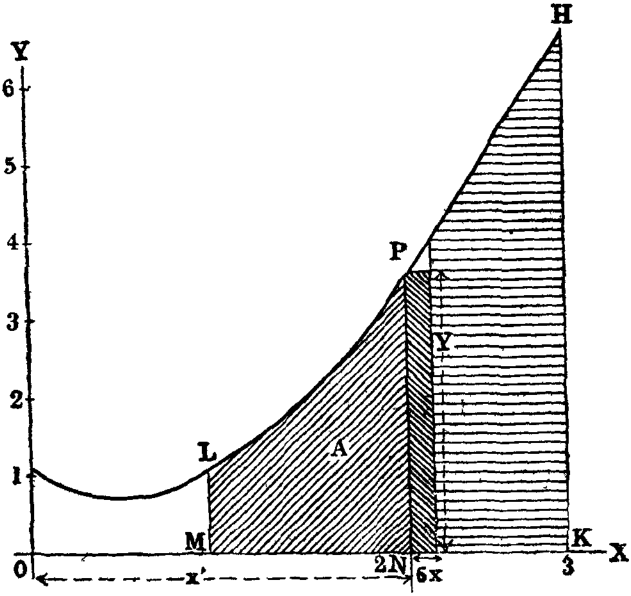


圖 二 十 二

設P是坐標爲x, y的一點，NP是面積A的動界。當動界向右移動δx時，A便增加$y\delta x$; 即

$$\delta A=(x^2\quad x+1)\delta x$$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{3}x^3\quad\frac{1}{2}x^2+x+C.$$

假使NP仍回到ML（即使$x=1$），面積完全消滅無形。

$$\therefore\quad(\frac{1}{3}\times1^3)-(\frac{1}{2}\times1^2)+1+C=0,$$

由是得C的值爲

$$\left[(\frac{1}{3}\times1^3)\quad(\frac{1}{2}\times1^2)+1\right].$$

所以A的公式是

$$\left[\frac{1}{3}x^3\quad\frac{1}{2}x^2+x\right]-\left[(\frac{1}{3}\times1^3)\quad(\frac{1}{2}\times1^2)+1\right].$$

今設NP移動到KH（即使$x=3$）。便得

LMKH的面積$=\left[(\frac{1}{3}\times3^3)\quad(\frac{1}{2}\times3^2)+3\right]-\left[(\frac{1}{3}\times1^3)-(\frac{1}{2}\times1^2)+1\right]$. 但是$\int ydx$自$x=1$到$x=3$,（或寫作$\int_1^3 ydx$）也是指LMKH的面積（參觀61頁），自是可得求定積分的簡單法則。

欲求 $\int_a^b y\mathrm{d}x$ 的值，可先求一'微分爲 ydx 的' x 之函數。依次令 $x=b$，$x=a$ 代入此函數中，然後以前者減去後者便得。(a，b 叫做'限')

例如 $(x^2-x+1)\delta x$ 是 $(\frac{1}{3}x^3 \quad \frac{1}{2}x^2+x)$ 的微分。

故得

$$\int_1^3 (x^2-x+1)\mathrm{d}x$$
$$=\left[(\frac{1}{3}\times 3^3)-(\frac{1}{2}\times 3^2)+3\right] \quad \left[(\frac{1}{3}\times 1^3)-(\frac{1}{2}\times 1^3)+1\right]$$

這並不是新方法，實在不過是將手續重排了一下罷了。

例　題

(1)求解 $\int_1^4 x\mathrm{d}x$.

因 $x\delta x$ 是 $\frac{1}{2}x^2$ 的微分，所以得這積分的值

是　$$(\frac{1}{2}\times 4^2)-(\frac{1}{2}\times 1^2)=7\frac{1}{2}.$$

(2)求解 $\int_0^3 (1+2x^2)dx$.

因 $\delta x+2x^2\delta x$ 是 $x+\frac{2}{3}x^3$ 的微分，所以所求的積分是

$$\left[3+(\frac{2}{3}\times 3^3)\right]-\left[0+(\frac{2}{3}\times 0^3)\right]=21.$$

(3)曲線 $y=6x-x^2$, 切 OX 於 $x=0$ 及 $x=6$ 二處。試求這部份曲線和 OX 間的面積。

這顯然是

$$\int_a^b ydx=\int_0^6 (6x-x^2)dx$$

$$=\left[(3\times 6^2)-(\frac{1}{3}\times 6^3)\right]-0=36.$$

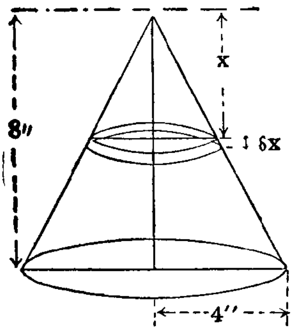
(4) $\int_0^1 (x+x^2)dx=\frac{5}{6}$.

(5) $\int_2^3 2x^3dx=32\frac{1}{2}$.

(6)曲線 $y=9-x^2$ 下，自 $x=0$ 到 $x=3$ 的面積是 18.

(7)有一直立的圓錐體，他底的半徑是 4 吋，高18吋，求他的體積（圖二十三）

距頂點的一圓片，他的半徑是$\frac{1}{2}x$,（因他的底半



圖二十三

徑是高的一半）所以這一片的體積是

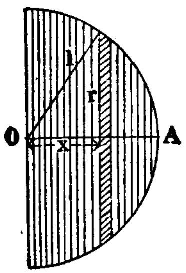
$$\frac{22}{7}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\delta x.$$

自是可知求出下式之值便得。

$$\int_0^8\frac{11}{14}x^2dx$$

〔答數約爲 134 立方吋〕

⑻試求'徑爲 1'的球體積。



圖二十四

設將此平行的切成細片，（圖二十四）他任一片距球心 0 的距離是 x,這圓片的半徑是 r,厚是 δx.

所以他的體積是 $\pi r^2\delta x$（第一級小量爲止）〔實際這圓片並是圓柱形，因爲他的邊是斜的。但是和圓柱形相差僅第二級小量。所以上式成立無疑

。)

這全部半球形的體積是各圓片體積的總和。假使視 x 自 0 逐步的加增 δx, 以至於 $x=1$ 爲止。那末，$\pi r^2\delta x$ 便是代表自 0 到 A 各圓片的面積。

由是得這半球體的體積是

$$\int_0^1 \pi r^2 dx.$$

但 r 的值各片不同，所以吾們必須將 r^2 用 x 代去。自辟氏定理 (Pythagoras' Theorem) 得

$$r^2=1-x^2,$$

於是得 $$\int_0^1 \pi(1-x^2)dx$$

因 π(約爲$\frac{22}{7}$)是定值，所以可自積分號下括出。

$\therefore$ 半球體積 $=\pi\int_0^1(1-x^2)dx=\pi(x-\frac{1}{3}x^3)$

(在 '0' 與 '1' 二限之間)

$$=\pi\{(1-\frac{1}{3}\times1^3)-0\}=\frac{2}{3}\pi,$$

$\therefore$ 球體積 $=\frac{4}{3}\pi$.

同法可證半徑爲 a 的球體積是 $\frac{4}{3}\pi a^3$

(9)仿上題(8)法，試證半徑 7 吋的球體積約爲1437

吋。

(10) 有直立的圓錐，高 9 吋，底的半徑 3 吋，仿(7)題的方法，證明他的體積約為85立方吋。

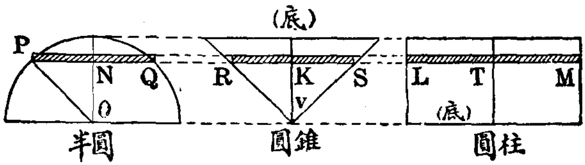
(11) 描寫曲線 $y=3x-x^2$, 自 $x=0$ 到 $x=3$. 假使這曲線把 0X 做軸而旋轉，那末他所經的路是一種立體。證明這立體的體積是 8.1π. 〔先求 $\int_0^3 \pi y^2 dx$〕

(12) 某火車施用制動器，t 秒後的速度是 v,已知 $v=80-4t$. 試證這火車再行20秒或 800 呎便停止。

〔$v\delta t$ 是什麼？試解 $\int vdt$〕

在微積分成立的以前，許多問題都用特別的幾何方法來解答。吾們去研究怎樣積分的問題可以化成一種幾何的問題，也許是很有趣味的。特舉一例如下：

取高，底都相同的一半圓形，圓錐形，圓柱形如



圖二十五

二十五圖的樣放在同一平面上。

設 PQ, RS, 和 LM 是這三個立體上相當的一件，他的體積是

$$\pi\,\overline{PN}^2\times h,\quad \pi RK^2\times h,\quad \pi LT^2\times h.$$

式中 h 是每片的厚。

但自幾何學理得

$$RK=KV=ON,$$

所以得 $\overline{PN}^2+\overline{RK}^2=\overline{PN}^2+\overline{ON}^2=\overline{OP}^2=\overline{LT}^2.$

由是知半球上圓片及圓錐上圓片體積的和，等於圓柱上圓片的體積。

將各片總加起來，得

（半球體積）+（圓錐體積）=（圓柱體積）。

但已知　圓錐體積$=\frac{1}{3}$（圓柱體積）。

因得　半球體積$=\frac{2}{3}$（圓柱體積）。

其他積分
(Other Integrals)

我們在上面已經說過的積分意義有二種：起初吾們說積分式 $\int ydx$ 的意義是 ydx 的總和。後來解答他的時候，吾們又說他是微分爲 ydx 的 'x 的函數'，當我們沒有給他限時，常視 $\int ydx$ 爲 x 的函數。

例如 $$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C,$$

$$\int(2x^2-1)\,dx=\frac{1}{2}x^4-x+C,$$

之類。所以

$y=x^3+C$, $\frac{dy}{dx}=3x^2$, $\delta y=3x^2\delta x$, $y=\int 3x^2dx$ 四個式子，實在是同値的，不過看上去形式上似乎不同罷了。實際上 $\int$ 實在是消除微分的一種符號。（除加以常數之外）

除去上面已經討論過的幾種簡單 x 的函數外，尙有他種函數，他的積分大都是很難求的。（也有非另行發明新函數求不出來的）。下面附着幾個式子，可以備做以後的應用、不過證明姑且從略：

(A) $$\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3)}+C,$$

(B) $\int \frac{1}{x^2}dx = C \quad \frac{1}{x}$,

(C) $\int \frac{1}{x}dx = 2.303 \log x + C$,

(D) $\int \sqrt{(1+x)}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + C$.

習　題

(1)求曲線 $y=\sqrt{x}$ 下自 $x=0$ 到 $x=4$ 間的面積。

自(A)式得

$$\int ydx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3)} + C$$

令 $x=4$ 及 $x=0$, 相減即得（常數C因相減消去）

(2)求曲線 $y=\frac{1}{x}$ 下自 $x=1$ 到 $x=10$ 間的面積。

自(C)式，可得

$$2.303 \log 10 - 2.303 \log 1 = 2.303(1-0) = 2.303$$

(3)上題所論的面積，當他以OX作軸旋轉時可生體積若干？

當爲 $\pi(C-\frac{1}{10})-\pi(C-\frac{1}{1})=\frac{7}{10}\pi.$

(4)$\int_1^8\sqrt{(1+x)}dx$ 的値是多少？

自(D)式得；$\frac{2}{3}\sqrt{64}+\frac{2}{3}\sqrt{1}=4\frac{2}{3}.$

(5)當我們求壓縮氣體所需的功（Work）時，便要碰到 $\int p\,dv$ 的積分公式，p 表壓力，v 表體積，假使溫度不變，pv 也不變。假定他是定數 10, 試求他所需的功有多少？

這個解答是

$$-10\int\frac{1}{v}dv=C-23.03\log v.$$

這不過表示些兒微積分於理化上的應用，讀者有機會讀到物理學時便可認識他了。

微分方程式

(Differential Equations)

吾們常常可以遇着，一個方程式中除含有 x, y 外，還含着$\frac{dy}{dx}$的情形。要在這類方程式中把$\frac{dy}{dx}$化掉，有

時是很容易的。

例如　　設$\frac{dy}{dx}=3x^2+1$，可得

$$y=\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C.$$

又如　　設　$\frac{dv}{dt}=t^2+1$，當 $t=0$ 時，$v=1$，求 v 的公式

可得　　$v=\int(t^2+1)dt=\frac{1}{3}t^3+t+C.$

自已知的值 $t=0$ 時，$v=1$，可求得常數 C 的值。

將 $t=0$，$v=1$ 代入上式，得

$$1=0+0+C$$

由是得　　$v=\frac{1}{3}t^3+t+1.$

這便是所求的公式。

習　　題

(1)已知$\frac{dy}{dx}=x$，$x=1$ 時 $y=2$，試以含有 x 的各項來表 y 的值。　　$\left[y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right]$.

(2)已知$\frac{dx}{dt}=50\quad 32t$, 及 $t=0$ 時, $x=0$. 試求 $t=2$ 時 x 的值。

(3)已知$\frac{dv}{dt}-32-4^{t}$, 及 $t=0$ 時 $v=0$, 求 $t=4$ 時，v 是多少？ 〔96〕

微分方程式是算學的一大分科，在一切的科學上都是占很重要的位置，不過以上我們所講的，眞是最簡單的形式，但是也足夠表示他在力學上所占的地位了。

力學上的應用

(Dynamical Applications)

墮體的速度 (v) 隨他的時間而增加，他的增加率 $(\frac{dv}{dt})$ 叫做加速度 (Acceleration)

假使空氣的阻力很小，可以捨去不問，加速度便是一個常數，約每秒秒32呎，便是說每秒鐘內速度加增每秒32呎，由是得 (以呎，秒做單位)

$$\frac{dv}{dt}=32.$$

從此式積分所求得的速度公式是

$$V=32t+C.$$

又因 $t=0$ 時速度是0,所以常數 C 必定是0.

設下落 t 秒後所行的路程是 x,那末 $\frac{dx}{dt}$ 便是速度 v,所以得

$$\frac{dx}{dt}=32t,$$

把上式求積分，得

$$x=16t^2.$$

(因 $t=0$ 時 $x=0$, 所以常數也是0.)

所以4秒內所行的路是

$$x=16\times 4^2=256\ \text{呎}。$$

但是事實上因爲有空氣的阻力，所以這加速度決不是常數。而每 1, 2, 3, ……秒末的速度，並不是32, 64, 96……'呎/秒'等數，却是 30, 50, ……60呎秒等一類的數，他漸漸的趨近，然而決不超越過一個極大限度。這個限度是隨着他的大小形狀及重量等而定，

必須是已知的或是從實驗的方法去求他出來。現在我們假定是64呎/秒，來求任何時後墮體所行的路程。

我們現在近似的假定 t 時的加速度是 $32-kt$, k 是能使最大速度達到64呎/秒的常數（假定加速度隨秒數的增加而一定的減少。）

自 $$\frac{dv}{dt}=32-kt,$$

得 $$v=32t-\frac{1}{2}kt^2$$

當 v 達到他的極限值64時，加速度便為 0.

所以得當 $$64=32t-\frac{1}{2}kt^2 \text{ 時},$$

$$kt=32.$$

由是得 $$64=32t-\frac{1}{2}\times 32t=16t,$$

$$\therefore\quad t=4$$

$$\therefore\quad k=8.$$

這個意思便是說墮體在4秒中達到他的極大速度，他速度的公式是

$$V=32t-4t^2$$

把$\frac{dx}{dt}$代 v 再行積分，便得

$$x=16t^2-\frac{4}{3}t^3.$$

由是可求 4 秒中所走的路程到底有多少。

令 t=4, 得

$$x=16\times4^2\quad\frac{4}{3}\times4^3=171\text{ 呎（近似）}。$$

由是知墮體於最初的四秒中下落了 171 呎。

但是所假定的這個加速度公式 32　kt 也不是精確無誤的，還有更精確的公式如下；

$$\frac{dv}{dt}=32-\frac{1}{128}V^2$$

（這個式子是表明空氣的阻力同速度的平方 (v^2) 成比例，並且在 v=64 時，加速度是 0.）但是這個方程式的解答稍難，非本書所能從事的。不過可以把他的結果說出來，他是在 4 秒中下落了 170 呎。

〔因 t=2 時，自近似方程式得 $x=53\frac{1}{3}$, 精確的得$55\frac{1}{2}$. 自是可知近似方程式第 4 秒以上所得的值是很美滿的了。〕

習　題

(1)將一個 Cricket 球上擲，可以達到48呎的高度，假使空氣的阻力不算，他任何時刻的高度是怎樣？

此地須用 $\frac{dv}{dt}=-32$,

（因加速度和向上運動的方向相反，所以須負）

自是可求得

$v=48-32t$，及高度$=48t-16t^2$.

(2)某輛火車，以每秒30呎的速度通過某車站，幷且有每秒秒二尺的加速度。試求過站20秒後距站的距離。〔1000呎〕

(3)設最初的八秒鐘內，墮石的加速度是

$(32-4t)$呎/秒^2,

試證在這個時間內落下約683呎，速度達到128呎/秒。

上面所舉的微分方程式的例都是很簡單的，僅僅直接用積分法已足够了。若是碰到了變數和微分混合的發現在一個方程式中，那末便困難了，往往須用特別方法化成他可以直接積分的形式。

例如已知 $x\frac{dy}{dx}=3y$, 求 x,y 的方程式。

設 $y=cx^3$（c是常數 便可覺得合於上式的條件，又如

已知 $\frac{dy}{dx}+y=x^2$, 試求y是什麼？這是很易證明，下式是可能的解答

$$y=x^2-2x+2$$

物理學上，有許多問題常常化成一個微分方程式，在這種方程式中便常有上述的難點發現。要免去這難點，須施用種種的方法，因此他成功了一種很大和很有趣的科學。不過這不是這種小册子所能包容的了，所以不再詳述。

微積分史畧

微積分的大意以上已略略的述過，現在吾們要講他的起源了。凡百學科，決非一人的精力所能獨創，在沒有發明以前，總有他相當的踪跡，發明以後，必須經過相當的改良，纔能卓然成科，微積分學當然也

不在例外。便是在古代希臘時期，已有他的踪跡可尋，不過當時僅有微積分的意義，沒有他特別的符號，并且所講的都是特別問題，沒有普遍的定理。因爲古代解答各種問題，都好像不相關的逐一逐一的解答，現在呢，對於一類的問題，便有一定的解答手續。這是古代和近世研究科學根本不同的地方。

古代大算學家亞奇默德（Archimedes, 287－212 B. C.）發現許多現今我們所求得的結果，例如球體積，拋物線，平方等。

亞氏求球體積的方法，是先將球體分成無數極小的部份，然後再把他總加起來，得到全體的體積，恰如積分的一般。

亞氏同時又用幾何的方法求球面面積，以及其他各種曲線所圍成的面積。由是實可逆料 1800 年後有微積分的發明。他不待到十七世紀已有相當的進步可言。又有代數學進而代幾何學及各種無系統的方法，做有系統微積分的基礎。這種觀念好似已經同時感在

人心。但最先當然是方法的普遍化沒有完全。到了笛卡兒(Descartes 1596 1650)解析幾何學的發明實在是微分學的先導。意大利人賈法利(Cavalieri, 1598－1647)在 1635 年所出版的'不定分法'(Indivisible)可以說是積分學的基礎。他以爲線是無數點所合成的，面是無數線合成的，幷且可以用級數求出他的數值來。他所用的級數是

$$1+2^m+3^m+\cdots\cdots+n^m.$$

他已知道他的求和的方法，幷且利用他來求各種面積。換句話說，他已直接得到$\int x^m dx$, 不似吾們習常用反微分方法得到的。

英牛津(Oxford)大學幾何學教授華里士(Wallis, 1616－1703)也有相似的工作，氏是首先用普通指數中的一人，這也是對於微積分的完成有極大的功績的。氏的工作也許是最有影響於發明者。他發明的智慧可以從他所發明的π計算法——即有名的圓化方問題——來代表他，

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\cdots$$

這個方法雖則不是求 π 最好的方法，但是他是最早純算學性質的 π 求法。首先表明 π 並不是和圓必須相關連的，那是確乎有被紀念的價值。

現在吾們要講到許多紛爭點了。1664 年白洛（Issac Barrow）氏已將微積分的重要點演得很完全了，不過他的結果都是幾何的形式，所以根本的新奇終沒有表現出來。白洛是英國劍橋大學（Cambridge University）的教授，便是有名大算學家奈端（Issac Newton 1642－1727）的教師，所以奈端一定是熟悉白洛氏的結果（參觀 Mr. T. M. Child's Geometrial Lectures of Issac Barrow）。奈端曾從白洛氏於劍橋之三一學院（Trinity College），氏是全世界所承認有算學天才的人。氏掃淨當時所謂的難題，創立許多新分科為近世算學的基礎。氏對於微積分上的成就便在料到這新分科發展成熟，而他無匹的能力竟使他達到完成的地步。氏的流數術（Method of Fluxions）除符號和現在的不

同外，便是微積分學。在 1669 年白洛氏替他宣布成功，但到四十年後方始把這著作刊行。同時德人來本之 (Leibniz 1644－1716) 亦創微積術於 1684 年刊行問世。有人說，來氏已在 1673 年後得到白洛氏的著作，也許先得見奈端的注解，或附注等。但是來氏聲言完全沒有得到奈端的幫助，并且公言微積分是他首創的。最重要的微積分符號是由氏所發明，那是絕無疑的了。氏所創的符號便是現今盛行的 dx, $\int dx$, 所以氏至少是微積分形式的創造者。究竟得了奈端或白洛氏的暗助有多少，實在沒有估計的價值。

奈端的符號是 xo 及 $\dot{x}$, $\dot{x}$ 猶現今的$\frac{dx}{dt}$, xo 猶 dx；$\dot{x}$ 現在力學方面還用他。奈端最大的功績是在他始用他的新法，而不在符號。氏是重建動力學的人。他很容易的，清清楚楚的，解決當時所認做最難的引力 (Gravitation) 問題。氏不滿意他自己用微積分來解釋的太陽系運行的學說，悉改幾何學的定理來證明，使沒有知道微積分的人們，也能了解。這是法人拉

克令 (Lagrange 1736 1813) 所視爲最有功於人類的事業。本節所述的眞是非常簡單，不過是科學思想史中最有趣味一段的不完全智識，據說來氏第一次刊行的微積分僅有六頁的小册，現今竟成一算學的大分科，長篇巨帙，尙不能盡他的巨觀，這是何等的可喜！我希望讀者由此引出研究的興味來，對於算學深深的研究一下。幷且希望讀者有機會讀奈端的小史和其他微積分的參考書。