Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Vorlesung 11

Nebenklassen

Definition 11.1. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir setzen $x \sim_H y$ (und sagen, dass x und y äquivalent sind) wenn $x^{-1}y \in H$.

Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation: Aus $x^{-1}x = e_G \in H$ folgt, dass diese Relation reflexiv ist. Aus $x^{-1}y \in H$ folgt sofort $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ und aus $x^{-1}y \in H$ und $y^{-1}z \in H$ folgt $x^{-1}z \in H$.

Definition 11.2. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann heißt zu jedem $x \in G$ die Teilmenge

$$xH = \{xh |\, h \in H\}$$

die *Linksnebenklasse von* x in G bezüglich H. Jede Teilmenge von dieser Form heißt *Linksnebenklasse*. Entsprechend heißt eine Menge der Form

$$Hy = \{hy |\, h \in H\}$$

Rechtsnebenklasse (zu y).

Die Äquivalenzklassen zu der oben definierten Äquivalenzrelation sind wegen

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in G |\, x \sim y\} \\ &= \left\{y \in G |\, x^{-1}y \in H\right\} \\ &= \left\{y \in G |\, \text{es gibt } h \in H \text{ mit } x^{-1}y = h\right\} \\ &= \{y \in G |\, \text{es gibt } h \in H \text{ mit } y = xh\} \\ &= xH \end{aligned}$$

genau die Linksnebenklassen. Die Linksnebenklassen bilden somit eine disjunkte Zerlegung (eine *Partition*) von G. Dies gilt ebenso für die Rechtsnebenklassen. Im kommutativen Fall muss man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen unterscheiden.

Lemma 11.3. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Es seien $x, y \in G$ zwei Elemente. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) $x \in yH$
(2) $y \in xH$
(3) $y^{-1}x \in H$
(4) $x^{-1}y \in H$
(5) $xH \cap yH \neq \emptyset$
(6) $x \sim_H y$.

(7) $xH = yH$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (3) (und die von (2) und (4)) folgt aus Multiplikation mit y^{-1} bzw. mit y. Die Äquivalenz von (3) und (4) folgt durch Übergang zum Inversen. Aus (1) folgt (5) wegen $1 \in H$. Wenn (5) erfüllt ist, so bedeutet das $xh_1 = yh_2$ mit $h_1, h_2 \in H$. Damit ist $x = yh_2h_1^{-1}$ und (1) ist erfüllt. (4) und (6) sind nach Definition 11.1 äquivalent. Da die Nebenklassen Äquivalenzklassen sind, ergibt sich die Äquivalenz von (5) und (7). □

Beispiel 11.4. Zu $d \in \mathbb{N}$ bzw. zur Untergruppe $\mathbb{Z}d \subseteq \mathbb{Z}$ gibt es die d Nebenklassen

$$\mathbb{Z}d, 1 + \mathbb{Z}d, 2 + \mathbb{Z}d, \ldots, d - 1 + \mathbb{Z}d\,.$$

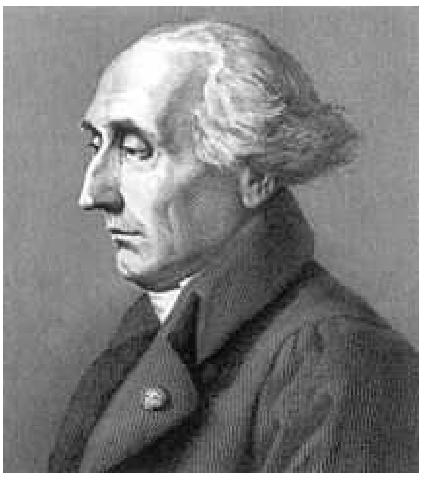
Die Nebenklasse $i + \mathbb{Z}d$ besteht aus allen ganzen Zahlen, die bei Division durch d den Rest i ergeben.

Beispiel 11.5. Wir betrachten die Einheitengruppe von $\mathbb{C}$, also $(\mathbb{C}^\times, 1, \cdot)$.

Zur Untergruppe $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{C}^\times$ sind zwei komplexe Zahlen äquivalent, wenn sie durch Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl auseinander hervorgehen. Die Nebenklassen sind also die Halbstrahlen, die vom Nullpunkt ausgehen.

Zur Untergruppe $S^1 = \{z \in \mathbb{C} | \; |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^\times$ sind zwei komplexe Zahlen äquivalent, wenn sie den gleichen Betrag besitzen, also durch eine Drehung ineinander überführbar sind. Die Nebenklassen sind also die Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt.

Der Satz von Lagrange



Joseph-Louis Lagrange (1736 Turin - 1813 Paris)

Satz 11.6. *Sei G eine endliche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Dann ist ihre Kardinalität $\#(H)$ ein Teiler von $\#(G)$.*

Beweis. Betrachte die Linksnebenklassen $gH := \{gh | h \in H\}$ für sämtliche $g \in G$. Es ist $h \mapsto gh$ eine Bijektion zwischen H und gH, so dass alle Nebenklassen gleich groß sind (und zwar $\#(H)$ Elemente haben). Die Nebenklassen bilden (als Äquivalenzklassen) zusammen eine Zerlegung von G, so dass $\#(G)$ ein Vielfaches von $\#(H)$ sein muss. □

KOROLLAR 11.7. *Sei G eine endliche Gruppe und sei $g \in G$ ein Element. Dann teilt die Ordnung von g die Gruppenordnung.*

Beweis. Sei H die von g erzeugte Untergruppe. Nach Lemma 1.9 ist $\operatorname{ord}(g) = \operatorname{ord}(H)$. Daher teilt diese Zahl nach Satz 11.6 die Gruppenordnung von G. □

DEFINITION 11.8. Zu einer Untergruppe $H \subseteq G$ heißt die Anzahl der (Links- oder Rechts)Nebenklassen der *Index* von H in G, geschrieben

$$\operatorname{ind}_G H .$$

In der vorstehenden Definition ist Anzahl im allgemeinen als die *Mächtigkeit* einer Menge zu verstehen. Der Index wird aber hauptsächlich dann verwendet, wenn er endlich ist, wenn es also nur endlich viele Nebenklassen gibt. Das ist bei endlichem G automatisch der Fall, kann aber auch bei unendlichem G der Fall sein, wie schon die Beispiele $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$, , zeigen. Wenn G eine endliche Gruppe ist und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so gilt aufgrund des Satzes von Lagrange die einfache *Indexformel*

$$\#(G) = \#(H) \cdot \operatorname{ind}_G H.$$

Normalteiler

DEFINITION 11.9. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Man nennt H einen *Normalteiler*, wenn

$$xH = Hx$$

für alle $x \in G$ ist, wenn also die Linksnebenklasse zu x mit der Rechtsnebenklasse zu x übereinstimmt.

Bei einem Normalteiler braucht man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen zu unterscheiden und spricht einfach von *Nebenklassen*. Statt xH oder Hx schreiben wir meistens $[x]$. Die Gleichheit $xH = Hx$ bedeutet *nicht*, dass $xh = hx$ für alle $h \in H$ ist, sondern lediglich, dass es zu jedem $h \in H$ ein $\tilde{h} \in H$ gibt mit $xh = \tilde{h}x$.

LEMMA 11.10. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *H ist ein Normalteiler*
(2) *Es ist $xhx^{-1} \in H$ für alle $x \in G$ und $h \in H$.*

(3) *H ist invariant unter jedem inneren Automorphismus von G.*

Beweis. (1) bedeutet bei gegebenem $h \in H$, dass man $xh = \tilde{h}x$ mit einem $\tilde{h} \in H$ schreiben kann. Durch Multiplikation mit x^{-1} von rechts ergibt sich $xhx^{-1} = \tilde{h} \in H$, also (2). Dieses Argument rückwärts ergibt die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1). Ferner ist (2) eine explizite Umformulierung von (3). ☐

BEISPIEL 11.11. Wir betrachten die Permutationsgruppe $G = S_3$ zu einer dreielementigen Menge, d.h. S_3 besteht aus den bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich. Die triviale Gruppe $\{\mathrm{id}\}$ und die ganze Gruppe sind Normalteiler. Die Teilmenge $H = \{\mathrm{id}\,, \varphi\}$, wobei φ die Elemente 1 und 2 vertauscht und 3 unverändert lässt, ist eine Untergruppe. Sie ist aber kein Normalteiler. Um dies zu zeigen, sei ψ die Bijektion, die 1 fest lässt und 2 und 3 vertauscht. Dieses ψ ist zu sich selbst invers. Die Konjugation $\psi\varphi\psi^{-1} = \psi\varphi\psi$ ist dann die Abbildung, die 1 auf 3, 2 auf 2 und 3 auf 1 schickt, und diese Bijektion gehört nicht zu H.

LEMMA 11.12. *Seien G und H Gruppen und sei*

$$\varphi \colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern $\ker \varphi$ *ein Normalteiler in G.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 11.10. Sei also $x \in G$ beliebig und $h \in \ker \varphi$. Dann ist

$$\varphi\left(xhx^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(h)\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi(x)e_H\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = e_H,$$

also gehört xhx^{-1} ebenfalls zum Kern. ☐

Abbildungsverzeichnis