Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 28

> If it works, it's out of date
>
> David Bowie

Ein Zerlegungssatz

Satz 28.1. *Sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein trigonalisierbarer K*-Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen* K*-Vektorraum* V*. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$\varphi = \varphi_{\rm diag} + \varphi_{\rm nil},$$

wobei $\varphi_{\rm diag}$ *diagonalisierbar,* $\varphi_{\rm nil}$ *nilpotent und zusätzlich*

$$\varphi_{\rm diag} \circ \varphi_{\rm nil} = \varphi_{\rm nil} \circ \varphi_{\rm diag}$$

gilt.

Beweis. Nach Satz 26.12 ist

$$V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m,$$

wobei die H_i die Haupträume zu den Eigenwerten λ_i seien, und es ist

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_m$$

mit $\varphi_i = \varphi|_{H_i}$. Es sei

$$p_i\colon V \longrightarrow V$$

die Hintereinanderschaltung $V \to H_i \to V$. Wir setzen

$$\varphi_{\rm diag} := \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m.$$

Diese Abbildung ist offenbar diagonalisierbar. Sei

$$\varphi_{\rm nil} := \varphi - \varphi_{\rm diag}.$$

Die Nilpotenz dieser Abbildung kann man auf den H_i einzeln überprüfen, und dort ist

$$(\varphi - \varphi_{\rm diag})\,|_{H_i} = \varphi_i - (\varphi_{\rm diag})\,|_{H_i} = \varphi_i - \lambda_i \,{\rm Id}_{H_i},$$

also nilpotent. Ferner kommutieren φ_j und p_i, da p_i auf H_i die Identität ist und auf H_j, $j \neq i$, die Nullabbildung. Damit kommutieren auch die direkten (skalaren) Summen davon und damit kommutieren φ und $\varphi_{\rm diag}$, also auch $\varphi_{\rm diag}$ und $\varphi - \varphi_{\rm diag} = \varphi_{\rm nil}$. □

Unter den im Satz angegebenen Bedingungen ist diese Zerlegung sogar eindeutig.

Definition 28.2. Ein Endomorphismus

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem K-Vektorraum heißt *unipotent*, wenn

$$\varphi = \operatorname{Id}_V + \psi$$

mit einer nilpotenten Abbildung ψ ist.

Bei einer unipotenten Abbildung ist der diagonalisierbare Anteil im Sinne der oben beschriebenen kanonischen Zerlegung besonders einfach, es handelt sich um die Identität.

Jordansche Normalform

Definition 28.3. Es sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Unter einer *Jordanmatrix* (zum Eigenwert λ) versteht man eine quadratische Matrix der Form[1]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine solche Jordanmatrix als lineare Abbildung φ des Standardraumes K^n in sich interpretiert, so ist

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1 \text{ und } \varphi(e_k) = \lambda e_k + e_{k-1} \text{ für alle } k \geq 2\,.$$

Insbesondere ist e_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eine einfache Überlegung zeigt, dass es keine dazu linear unabhängigen Eigenvektoren geben kann (siehe Aufgabe 28.17). Die Eigenschaft rechts ist äquivalent zur Bedingung[2]

$$e_{k-1} = (\varphi - \lambda \cdot \operatorname{Id})(e_k)$$

für $k \geq 2$. Als Eigenvektor ist e_1 ein erzeugendes Element des Kerns der Abbildung $\psi := \varphi - \lambda \operatorname{Id}$, und die anderen Standardvektoren e_k ergeben sich sukzessive als Urbild von e_{k-1} unter ψ.

[1] Manche Autoren verstehen unter einer Jordanmatrix eine Matrix, in der die Einsen unterhalb der Diagonalen stehen.

[2] Im Kontext der trigonalisierbaren Abbildungen und zum Auffinden der jordanschen Normalform ist es sinnvoll, mit $\varphi - \lambda \cdot \operatorname{Id}$ statt mit $\lambda \cdot \operatorname{Id} - \varphi$ zu arbeiten.

Definition 28.4. Eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

wobei die J_i Jordanmatrizen sind, heißt Matrix in *jordanscher Normalform.*

Die dabei auftretenden Jordanmatrizen heißen *Jordanblöcke* der Matrix. Ihre Eigenwerte können verschieden oder gleich sein. In der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gibt es drei Jordanblöcke, nämlich

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten $2, 4$ und nochmal 2.

Wir kommen zum Satz über die jordansche Normalform für trigonalisierbare Endomorphismen.

Satz 28.5. *Zu jedem trigonalisierbaren Endomorphismus*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V gibt es eine Basis, bezüglich der die beschreibende Matrix jordansche Normalform besitzt.

Beweis. Da φ trigonalisierbar ist, können wir Satz 26.12 anwenden. Es gibt alse eine direkte Summenzerlegung

$$V = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda_m),$$

wobei die Haupträume φ-invariant sind. Indem wir die Situation auf den einzelnen Haupträumen analysieren, können wir davon ausgehen, dass φ nur einen Eigenwert λ besitzt und

$$V = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

ist. Es ist dann

$$\psi = \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$$

nilpotent. Daher gibt es nach Korollar 27.12 eine Basis, bezüglich der ψ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei u_i gleich 0 oder gleich 1 sind. Bezüglich dieser Basis hat

$$\varphi = \psi + \lambda \operatorname{Id}_V$$

die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & u_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

□

Jede obere Dreiecksmatrix ist also ähnlich zu einer Matrix in jordanscher Normalform. Über den komplexen Zahlen kann man jede Matrix auf jordansche Normalform bringen. Wenn eine Matrix in jordanscher Normalform vorliegt, so kann man direkt den diagonalisierbaren und den nilpotenten Anteil im Sinne von Satz 28.1 ablesen: Die Diagonale liefert den diagonalisierbaren Anteil und die Einträge, die echt oberhalb der Diagonalen liegen, liefern den nilpotenten Anteil (dies ist im Allgemeinen für obere Dreiecksmatrizen nicht richtig).

Verfahren 28.6. Wir beschreiben, wie man zu einer linearen trigonalisierbaren Abbildung eine Basis findet, bezüglich der die beschreibende Matrix in jordanscher Normalform ist. Dazu bestimmt man zu jedem Eigenwert $\lambda \in K$ den minimalen Exponenten s mit

$$\operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^s = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^{s+1}.$$

Dieser Kern ist der Hauptraum zu λ. Man setzt

$$V_i = \operatorname{kern}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^i \subseteq \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

für $i = 1, \ldots, s$. Dies ergibt eine Kette

$$V_1 = \operatorname{Eig}(\lambda) \subseteq V_2 \subset \cdots \subset V_{s-1} \subset V_s = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda).$$

Man wählt nun aus $V_s \setminus V_{s-1}$ einen Vektor u. Die Vektoren

$$u, (\varphi - \lambda \operatorname{Id})(u), (\varphi - \lambda \operatorname{Id})^2(u), \ldots, (\varphi - \lambda \operatorname{Id})^{s-1}(u)$$

bilden eine Basis für einen Jordan-Block. Wenn diese Basis schon den ganzen Hauptraum abdeckt, ist man fertig. Andernfalls sucht man in $V_s \setminus V_{s-1}$

einen weiteren, zu u und V_{s-1} linear unabhängigen Vektor und nimmt wieder sämtliche sukzessiven Bilder hinzu. Wenn $V_s \setminus V_{s-1}$ ausgeschöpft ist, schaut man, ob $V_{s-1} \setminus V_{s-2}$ bereits abgedeckt ist, u.s.w. Wenn der Hauptraum zu λ ausgeschöpft ist, macht man mit dem nächsten Eigenwert weiter.

Unter gewissen Umständen kann man auch mit einer Basis des Eigenraumes anfangen. Wenn beispielsweise der Eigenraum zu λ eindimensional ist, so kann man einen Eigenvektor v zu λ wählen und dazu sukzessive Urbilder unter $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ finden, also

$$v = (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(v')$$

lösen, dann

$$v' = (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(v'')$$

u.s.w.

Wenn beispielsweise der Eigenraum k-dimensional und der Hauptraum $(k+1)$-dimensional, so muss man nur für einen Eigenvektor ein Urbild unter $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ finden.

Beispiel 28.7. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Es ist $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass es keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor gibt. Wir interessieren uns für das lineare Gleichungssystem

$$e_1 = Av\,.$$

Daraus ergibt sich sofort (aus der zweiten Zeile) $v_3 = 0$ und somit $2v_2 = 1$ (v_1 können wir frei als 0 wählen). Also setzen wir $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Schließlich brauchen wir eine Lösung für

$$v = Aw\,.$$

Dies führt auf

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Für die durch die Matrix M beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u,\ Mv = 2v + u,\ Mw = 2w + v\,,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist eine Jordanmatrix und insbesondere in jordanscher Normalform.

Beispiel 28.8. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Es sind $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass u und v den Eigenraum aufspannen. Ein Eigenvektor muss das Bild eines Vektors unter der Matrix A sein. In der Tat besitzt das lineare Gleichungssystem

$$e_2 = Aw$$

die Lösung $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Für die durch die Matrix M beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u,\ Mv = 2v,\ Mw = 2w + v\,,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist in jordanscher Normalform mit den Jordanblöcken (2) und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Beispiel 28.9. Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordansche Normalform bringen. Hier gibt es zwei Eigenwerte und somit zwei zweidimensionale Haupträume, die getrennt behandelt werden können. Es ist

$$M - 3E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

somit gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Kern. Die Determinante der Untermatrix rechts oben ist nicht 0, daher ist der Rang der Matrix gleich 3 und der Kern ist eindimensional. Die zweite Potenz ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -16 & -4 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein neues Kernelement ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Es ist also

$$\operatorname{Haupt}(M, 3) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können die Vektoren $\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zum Aufstellen des ersten Jordanblockes verwendet werden.

Es ist

$$M + 1E_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

somit gehört $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Kern. Der Rang der Matrix ist wieder gleich 3 und der Kern ist eindimensional. Die zweite Potenz ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 4 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein neues Kernelement ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist also

$$\mathrm{Haupt}(M, -1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Aufstellen des zweiten Jordanblockes verwendet werden. Insgesamt besitzt also M bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Endomorphismen endlicher Ordnung

In Lemma 24.10 haben wir gesehen, dass Permutationsmatrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind. Dies gilt über $\mathbb{C}$ für alle Endomorphismen endlicher Ordnung.

Lemma 28.10. *Jede invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, die endliche Ordnung besitzt, ist diagonalisierbar.*

Beweis. Die Matrix ist trigonalisierbar und besitzt eine jordansche Normalform. Wir zeigen, dass die einzelnen Jordanblöcke

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

trivial sind. Wegen der endlichen Ordnung muss λ eine Einheitswurzel sein. Durch Multiplikation mit $\lambda^{-1}E_n$ können wir davon ausgehen, dass eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(mit $a \neq 0$) vorliegt. Wenn dies keine 1×1-Matrix ist, so gibt es zwei Vektoren u, v, wobei u ein Eigenvektor ist und v auf $v + au$ abgebildet wird. Die k-te Iteration der Matrix schickt dann v auf $v + kau$ und dies ist nicht v, im Widerspruch zur endlichen Ordnung. $\square$