高次元世界に於ける引力の法則と空間の歪

福 澤 三 八

昭和十七年

高次元世界に於ける引力の法則と空間の歪

福澤三八

1. 緒言

此の論文は空間の次元と空間内一點よりrの距離にある領域の大さとの關係より考へを起して書かれたもので摘要は次の如くである。

「一點Aを中心として或作用Eが起り、それがAの周圍何れの方面にも途中他より影響を受けることなく、性質を變化することもなく均一に傳播するとすればAよりrの距離にある任意の位置に於けるEの強度は同距離にある領域の大さに反比例する。何となれば此領域に於てEは均一に分布される。此の領域の大さは、n次元空間の場合r^{n-1}に正比例し、Kr^{n-1}で表はし得る。Eを引力と看做し、此見地に基き高次元世界に於ける引力の法則を誘導する。又引力が距離の二乘に反比例するニュートンの引力の法則を最も簡單に證明する。

斯る考へより出發して負存在及び存在濃度変化の思想に基き、(一) 無限次元空間 (二) 有級又は或状態に

於て重複存在する空間、(三) 負次元空間、(四) 分數次元空間、(五) 此等空間の世界に於ける引力の法則、(六) 空間の歪と引力の關係 (七) 種々の引力の法則より誘導される種々の抽象空間、(八) 種々の複素次元空間、(九) 斯る空間の世界に於ける引力の法則等に論及する。

又、超時間及び複素時間より種々の超時空世界及び複素時空世界をつくり、此等の時間に關する各種の変動変化、例へば、速度、加速度を考へ複素時間に関する力學創造の動機たらしめんとする。」

此の論文の比較的簡単の部分を慶應義塾内久文會發行の雜誌久交五号に載せた。又、全体の概要を昭和十五年四月東京文理科大學で開催された日本數學物理學會の年會で講演した。

2. 引力が距離の2乗に反比例する最も簡單なる證明.

ユウクリッド平面上に於て一點 A を中心として或作用 E が起りそれが A の周圍何れの方面にも途中他より影響を受けることなく、性質を変更することもなく、平面的に均一に傳播し、A より 1 の距離の任意の位置で E の強度が μ であると假定する.

然るときは E が如何なる作用であっても、同平面上 A より r の距離にある位置に於て E の強度は $\frac{\mu}{r}$ に等しい。何となれば E は A より r の距離にある位置で中心 A 半径、r の円周 $2\pi r$ 上に均一に分布される。E が此円周の或部分に比較的多量に分布され、或部分に比較的少量に分布されると看做すべき理由がない。即ち、A より r の距離にある領域の大さは $2\pi r$ で r に正比例し、同領域に於て E は均一に分布されるが故に、E の強度は r に反比例する。從ってその強度即ち、A より E の距離にある位置に於ける E の強度は $\frac{\mu}{r}$ である。

ユウクリッド三次元空間内の一点 A を中心として或作用 E が起り、それが A の周圍何れの方面にも途中他より影響を受けることなく、性質を変更することもなく、立体的に即ち、三次元的に均一に傳播し、A より 1 の距離にある任意の位置で E の強度が μ であると假定する。然るときは E が如何なる作用であっても同三次元空間内 A より r の距離にある位置に於て E の強度は $\frac{\mu}{r^2}$ に等しい.

何となれば E は A より r の距離にある位置で中心 A 半徑 r の球面 $4\pi r^2$ 上に均一に分布される。E が此の球面の或部分に比較的多量に分布され、或部分に比較的少量に分布されると看做すべき理由がない.

即ち、Aよりrの距離にある領域の大さは$4\pi r^2$でr^2に正比例し、同領域に於てEは均一に分布されるが故にEの強度はr^2に反比例する。從つて、その強度即ち、Aよりrの距離にある位置に於けるEの強度は$\frac{\mu}{r^2}$である。

Eを引力とすれば上記の理に基き正統科學的に考へて、ユウクリツド三次元世界と見做される所の吾人の認識する世界に於て、引力は距離の2乗に反比例するといふニユートンの引力法則の成立つことが容易に知れる。斯くの如く考へるのが恐らく此法則の最も簡單なる證明法であらう。

3. ニユートン前後の引力に対する考へ

或物が或物を引くことの考へは非常に古くより(恐らく有史以前より)あつたであらう。即ち、それは迷信宗教哲學等に種々の形式で現はれてゐる。又、磁氣電氣などの作用で引力現象の起るのを實際見た太古人もゐたであらう。

地球が球形であると知れた後地球上何れの場所でも物が下に落つる事実より、總ての物が地球の中心に引かれるとの考へは當然起るべきことでニユートン以前に斯る考へをもつた人は可成ゐたやうだ。

その最初の人は誰であるか確実に知れぬがトレミー當りが最も古い所らしい。

シエクスピーアの戯曲中に

Is as the very centre of the earth
Drawing all things to it

Troi and Cres IV 2 110

なる句があるからにはシエクスピーアは勿論尚その當時已に英國で可成りの多くの人に總ての物が地球の中心に向つて引かれること、即ち、重力が知れてゐたと看做し得る。シエクスピーアは1564—1616の人でニユートンは1642—1727の人であるが故に此の一事を見てもニユートン以前に重力の考へがあつたことが分る。今假りにシエクスピーア、ベーコン說を正しいとしてもベーコンはニユートン以前の人である。

併し、正統科學の基礎をなす萬有引力の法則、即ち「宇宙に於ける物質の各質点は他の各質点を引力を以て引き、其の方向は質点を結ぶ直線の方向で其の大さは質量の相乘積に正比例し、距離の2乗に反比例する」はニユートンに依つて始めて發見されたのである。

ニユートンはケプラーの法則より此萬有引力の法則を發見した。ケプラーは諸遊星、特に火星に対する非常に多くの觀測をし、面倒なる計算の結果遊星運動に

關して次の法則あることを發見した。

1. 遊星は太陽に關して楕圓を畫き太陽は其の焦点の一つを占む.
2. 各遊星の動徑は等時間に等面積を畫き出す.
3. 任意の二遊星の週期の2乘の比は軌道の長軸の3乘の比に等しい.

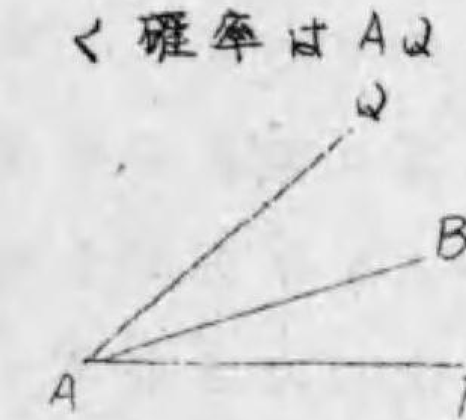
之はケプラーの法則として知られるものでケプラーは觀測の結果此の法則あることを發見し、それに関聯して太陽の引力に就いて或考へを持ってゐたが、明確な思想ではなかった。然るにニュートンは二質点間に或法則に從ふ力が働くとの假定の下に二質点の運動法則を表す微分方程式をつくり、それを解いてケプラーの法則が行はれる爲めには萬有引力の法則が示す如き引力の法則がなければならぬことを證明した。尚ニュートンは引力に關する若干の研究をし、遂に正統科學の基礎となる萬有引力說を創造した。

4. 普通に無證明の萬有引力法則

正統科學の見地よりすればニュートンの萬有引力說は水星に關する或疑問を殘す外、殆んど完全無缺と言ひ得るものであるが、ケプラーの法則より之を誘導するには微分方程式を要する。又ポテンシヤルの考へより、萬有引力の法則を解說するにも或程度の微積の知識を要する。從って、一般に中等學校或は其以下の學校に於ては無證明に萬有引力法則のあることを教へるのが普通である.

但し、萬有引力法則中の引力は質量の相乘積に正比例することは、引力の起る原因は物質にあるが故に、質点と看做し得る狀態にある2物体A.B間の引力はAの質量、即ち、Aの引力を起す原因がm倍になれば、m倍になり、それより更にBの質量、即ち、Bの引力を起す原因がn倍になればmn倍になると考へれば、簡單に證明される。此の場合物質間の引力を第三の物質の存在より何の影響を受けぬことを假定する。

又、二質点間の引力の方向は二質点を結ぶ直線の方向であることは二質点をABとし、引力を起す原因と看做される二つの物、即ち、A質点とB質点を結ぶ直線の方向以外特に或方向にその引力が働くと看做すべき理由が無い。精しく言へばAPなる特別の方向に働く確率はAQなる方向に働く確率に等しい。



(但し、角BAPは角BAQに等しいと假定する.) 故に直線ABの方向に働くと考へれば容易に證明される.

引力が質量の相乘積に正比例することゝ質点を結ぶ

方向に働くことは凡そ斯くの如き平易な證明法で證明し得る。尚常識的に考へても大体知れることであるが故に中等學校以下の學校でも證明附きで教へることがあるかも知れない。又、假令證明せずとも學生中に自ら斯る證明に氣附く者が有り得るほど簡單且つ常識的に分る事である。

併し、引力が距離の2乘に反比例することは2.に記した。距離と領域に基く證明法以外に簡單なる證明法なく、從來中等學校程度までの學校に於て之を證明附きで教へることは恐らく全然なかつたであらう。

萬有引力の法則の如き重要なる自然の法則は無證明に教へずに出來るだけ證明附きに教へるがよい。
距離と領域に基く證明法を用ひれば中學生には勿論、いひやうに依れば國民學校生にも之を分らす事が出來るであらう。

5. n次元世間に於ける引力の法則

n次元ユウクリッド空間内の一点Aを中心として或作用巨が起りそれがAの周圍何れの方面にも途中他より影響を受けることなく、性質を變更することもなくn次元的に均一に傳播しAより1の距離にある任意の位置で巨の強度がμであると假定する。

然るときは巨が如何なる作用であつてもn次元空間内Aよりrの距離にある位置に於て巨の強度は$\frac{\mu}{r^{n-1}}$に等しい。

何となればAよりrの距離にある領域はAを原点とするn次元球$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2 = r^2$の限界(球面に相當するもの)で其大さは$r^{n-1}$に正比例し、$Kr^{n-1}$で表し得る。そして巨は此の領域の何れの部分にも均一に分布される。巨が此の領域の或部分に比較的多量に分布され、或部分に比較的少量に分布されることのないのは已に記した$n=2$又は$n=3$なる特別の場合に於けると同様である。

Aよりrの距離にある領域の大さはr^{n-1}に正比例し巨は同領域に於て均一に分布されるが故に同領域に於ける巨の強度はr^{n-1}に反比例する。從つて同領域に於ける巨の強度即ち、Aよりrの距離にある位置に於ける巨の強度は$\frac{\mu}{r^{n-1}}$である。

巨を引力とすれば此の理に基き正統科學的に考へ、ユークリッドn次元空間の世界に引力ありと假定し其引力は距離の$(n-1)$乘に反比例することが知れる。又、同世界に於ける引力は質点を結ぶ直線の方向に働き、質量の相乘積に正比例することも5.に記した$n=3$の場合と同様に證明し得る。

6. 高次元球限界の計算

5.に記した如くn次元世界に於ける引力が距離の($n-1$)乗に反比例することは同世界の空間に於て一点Aよりrの距離にある領域、即ち、Aを中心としrを半径とするn次元球限界はr^{n-1}に正比例する大さを持つこと、即ち、Kr^{n-1}で表し得ることに基いて居る。此領域或は限界がKr^{n-1}で表はされることは一般にn次元形體の限界は($n-1$)次元形體で相似n次元形體の限界を成す相似($n-1$)次元形體の大さは相似n次元形體内の二相似定点を結ぶ線分の長さの($n-1$)乗に正比例することより知れる。

併し、n次元世界に於ける引力の法則を尚精しく知らんとするには先づ半径rのn次元球の限界の大さを計算することが必要である。之は種々の方法で計算し得るが左記の如き考へに基く計算が恐らく一番分り易いであらう。

圓$x^2+y^2 \leqq r^2$の面積はπr^2なることが知れてゐるとして、それより同円周S_1を次の如く計算し得る。

$$S_1 = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} (2\pi r + \pi \Delta r) = 2\pi r$$

又、球$x^2+y^2+z^2 \leqq r^2$の體積は$\frac{4}{3}\pi r^3$なることが知れて居るとして、それより同球面積S_2を次の如く計算し得る。

$$S_2 = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{4}{3}\pi(3r^2+\Delta r) = 4\pi r^2$$

此の考へを進めて次の如き事が知れる。

n次元球$x_1^2+x_2^2+ \cdots\cdots\cdots\cdots x_n^2 \leqq r^2$

の体積を$f_n(r)$とし限界をS_nとすれば

$$S_n = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f_n(r+\Delta r) - f_n(r)}{\Delta r} = \frac{d f_n(r)}{dr} \qquad (1)$$

即ち、n次元球の限界の大さはn次元球体積の半径に関する微係数である。

$$S_2 = 2\pi r \qquad S_3 = 4\pi r^2$$

は知れてゐるとして略し次に$n=4$，$n=5$ ----- 等の場合に於けるS_{n-1}を順次に計算して見よう。

四次元球限界

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = r^2 \qquad (2)$$

を四次元球限界の方程式とすればそれより

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = r^2 - x_4^2 \qquad (3)$$

x_4を一定なりと見做すとき(3)は半径$\sqrt{r^2-x_4^2}$中心原点の三次元球限界を表し其の球体積は

$$\frac{4}{3}\pi(r^2-x_4^2)^{\frac{3}{2}}$$

其故に

$$f_4(r) = \int_{-r}^{r} \frac{4}{3}\pi\,(r^2 - x_4^2)^{\frac{3}{2}}\,dx_4$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \int_{-r}^{r} \left(1 - \frac{x_4^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx_4 \qquad (4)$$

$\frac{x_4}{r} = \sin\theta$ とおけば

故 $dx_4 = r\cos\theta\, d\theta$

$x_4 = -r$ のとき $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$x_4 = r$ のとき $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-r}^{r} \left(1 - \frac{x_4^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$= r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 2r\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 1}{n(n-2)(n-4)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

より

$$2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 2r\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi r \qquad (5)$$

(4)と(5)とより

$$f_4(r) = \frac{\pi^2}{2} r^4 \qquad (6)$$

従って

$$S_4 = \frac{d}{dr} f_4(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{\pi^2}{2} r^4\right) = 2\pi^2 r^3$$

$$S_4 = 2\pi^2 r^3 \qquad (7)$$

五次元球限界

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = r^2 \qquad (8)$$

を五次元球限界の方程式とすれば

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2 - x_5^2 \qquad (9)$$

x_5を一定なりと見做すとき (9) は半径$\sqrt{r^2 - x_5^2}$中心元点の四次元球限界を表し、其の球の体積は(6)より

$$\frac{\pi^2}{2}(r^2 - x_5^2)^2$$

其故に

$$f_5(r) = \int_{-r}^{r} \frac{\pi^2}{2}(r^2 - x_5^2)^2\, dx_5$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\int_{-r}^{r} (r^4 - 2r^2x_5^2 + x_5^4)\, dx_5$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left[r^4 x_5 - \frac{2}{3}r^2 x_5^3 + \frac{x_5^5}{5}\right]_{-r}^{r}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left[2r^5 - \frac{4}{3}r^5 + \frac{2}{5}r^5\right]$$

$$= \frac{16}{15}\pi^2 r^5 \qquad (10)$$

従って

$$S_5=\frac{df_5(r)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{16}{15}\pi^2r^5\right)=\frac{16}{3}\pi^2r^4$$

$$S_5=\frac{16}{3}\pi^2r^4 \qquad (11)$$

六次元球限界

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=r^2 \qquad (12)$$

を六次元球限界の方程式とすれば

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=r^2-x_6^2 \qquad (13)$$

x_6を一定なりと見做すとき (13) は半径 $\sqrt{r^2-x_6^2}$ 中心原点の五次元球限界を表し、其の球体積は (10) より

$$\frac{16}{15}\pi^2(r^2-x_6^2)^{\frac{5}{2}}$$

其故に

$$f_6(r)=\int_{-r}^{r}\frac{16}{15}\pi^2(r^2-x_6^2)^{\frac{5}{2}}\,dx_6$$

$$=\frac{16}{15}\pi^2r^5\int_{-r}^{r}\left(1-\frac{x_6^2}{r^2}\right)dx_6 \qquad (14)$$

$\frac{x_6}{r}=\sin\theta$ とおけば

$$\int_{-r}^{r}\left(1-\frac{x_6^2}{r^2}\right)dx_6=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^{\frac{5}{2}}r\cos\theta\,d\theta$$

$$=r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta=2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta \qquad (15)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots\cdots1}{n(n-2)(n-4)\cdots\cdots2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

より

$$2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta=2r\frac{5\cdot3}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{16}\pi r \qquad (16)$$

(14) (15) (16) より

$$f_6(r)=\frac{\pi^3r^6}{3} \qquad (17)$$

従って

$$S_6=\frac{df_6(r)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{\pi^3r^6}{3}\right)=2\pi^3r^5$$

$$S_6=2\pi^3r^5 \qquad (18)$$

七次元球限界

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2=r^2 \qquad (19)$$

を七次元球限界の方程式とすれば

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=r^2-x_7^2 \qquad (20)$$

x_7を一定なりと見做すとき (20) は半径 $\sqrt{r^2-x_7^2}$ 中心原点の六次元球限界を表し、其の球体積は (17) より

$$\frac{\pi^3(r^2-x_7^2)^3}{3}$$

其故に、

$$f_7(r) = \int_{-r}^{r} \frac{\pi^3 (r^2 - x_7^2)^3}{3}\, dx_7$$

$$= \frac{\pi^3}{3} \int_{-r}^{r} (r^6 - 3r^4 x_7^2 + 3r^2 x_7^4 - x_7^6)\, dx_7$$

$$= \frac{\pi^3}{3} \left[r^6 x_7 - r^4 x_7^3 + \frac{3}{5} r^2 x_7^5 - \frac{x_7^7}{7} \right]_{-r}^{r}$$

$$= \frac{\pi^3}{3} \left[2\left(\frac{3}{5} r^7 - \frac{1}{7} r^7\right) \right]$$

$$= \frac{32}{105} \pi^3 r^7 \qquad (21)$$

従って

$$S_7 = \frac{df_7(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{32}{105} \pi^3 r^7\right) = \frac{32}{15} \pi^3 r^6$$

$$S_7 = \frac{32}{15} \pi^3 r^6 \qquad (22)$$

順次同様に S_8, S_9 ------- 等を計算し得る。

以上は分かり易き事を主とした計算法であるが一般的には次の方法で計算する方が簡単である。

半径 r の球 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2 \leqq r^2$ の体積を V_n とすれば n が偶数 $= 2m$ のとき

$$V_n = \frac{\pi^m r^{2m}}{m!}$$

なるが故に

$$S_n = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi^m r^{2m}}{m!}\right) = \frac{2\pi^m r^{2m-1}}{(m-1)!}$$

又、n が奇数 $= 2m+1$ のとき

$$V_n = \frac{2^{m+1} \pi^m r^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2m+1)}$$

なるが故に

$$S_n = \frac{d}{dx}\left(\frac{2^{m+1} \pi^m r^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}\right) = \frac{2^{m+1} \pi^m r^{2m}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$$

6. S_n の次元と引力の關係

空間内に於て一定点より r の距離にある領域はその空間が直線であるとき、点・平面であるとき、曲線・三次元空間であるとき、曲面・四次元空間であるとき、曲三次元形體、n 次元空間であるとき、曲 $(n-1)$ 次元形體であるが故に S_{n-1} の表す領域の大さの單位は S_n の表す領域の大さの單位に比較して次元の數一つ丈少い。即ち、此の二領域間の關係は面と三次元形体又は線と面との關係の如きもので S_n 領域に比較して S_{n-1} 領域は全く抽象的のもので○と看做し得る。

從って S_{n-1} 領域に或一定の密度に於て均一に分布される引力が S_n 領域に均一に分布されたと假定すれば

S_n 領域に於けるその強度は０である。又反對に S_n 領域に或一定の強度に於て均一に分布される引力が、S_{n-1} 領域に均一に分布されたと假定すれば S_{n-1} 領域に於けるその強度は無限大になる。

尚、r を整數なりとし $1 \leqq r \leqq n$ のとき、以上と同様に次の如きことを言ひ得る。

S_{n-r} 領域に或一定の強度に於て均一に分布される引力が S_n 領域に均一に分布されたと假定すれば S_n 領域に於けるその強度は０である。又、反對に S_n 領域に或一定の強度に於て均一に分布される引力が S_{n-r} 領域に均一に分布されたと假定すれば S_{n-r} 領域に於けるその強度は無限大である。

之より $(n-r)$ 次元世界の引力（或は巳）は n 次元世界のそれに比較すれば抽象的のものであることが知れる。由来、$(n-r)$ 次元世界なるものが n 次元世界に比較すれば抽象的のものなるが故に $(n-r)$ 次元世界に於ける引力或は如何なる作用でも n 次元世界に於けるそれと比較すれば抽象的のもの、即ち、無も同様であることは當然である。

7. 高次元球殻内外に於ける力場の強さ

I. 「密度一様の球殻外の一点に於ける力場の強さは其の球殻の全質量が球殻の中心に集中せるものと看做せるときの其の点に於ける力場の強さに等しい。」

II 「密度一様の球殻内に於ける力場の強さは何れの点に於ても零である」

此等二つの法則は萬有引力説に関聯して重要なる法則であるが其の從来の證明法には定積分法を要する。從って、中等學校程度までの者に対しては之を話さぬのが普通で假令何かの機會で話すことあるとしても證明はしない。

是等法則の證明は空間の次元に基く考へより或程度まで容易くする方法あるが其の事は略す。

8. 引力に對する二種の見解

引力に対しては種々の見解があるが、之を大別して正統科學的見解と相對性原理的見解とにし得る。
前者に從へば引力なる力があると看做して自然界の法則を解説するが、後者に從へば引力を否認し所謂引力作用を空間の歪に起因する空間の性質に依って解説する。

今n次元世界に人類がゐてそこに上記の如く距離の$(n-1)$乗に反比例する所謂引力作用があると假定する場合、その人類はこれを正統科學的に解說すべきか、或は相對性原理的に解說すべきかゞ問題である。

吾人の速度、時間、距離の概念中速度と時間が基本的のものであることは、空間が何次元であつても成立つと云ふ見地よりして此n次元世界に正統科學的法則が行はるとの考へには理論上の弱点があると思ふ。
故に今距離の$(n-1)$乗に反比例する所謂引力を相對性原理的に解說し、それを空間の性質に帰することにすると、其の性質の起因するn次元空間の歪は如何なる歪であらうかとの問題が起つて来る。
これは非常にむづかしい問題であるが、若し之を解說し得れば、其の結果よりアインシユタインの相対性原理を特別の場合に於けるものとして誘導し得べき筈である。

曩に記したるごとく引力を其の起点即ち、質点より周圍何れの方向にも均一に分布傳播する或作用なりと假定しても引力の法則が空間の歪と関係することが知れる。何となれば空間の歪の状態に従つて一点より等距離にある領域の大さは相違する。従つて引力の法則も相違する。例へば、平面上一点よりrの距離にある

領域の大さと、曲面上一点よりrの距離（曲面上最短線に沿ふて測りたる距離）にある領域の大さが相違する如く歪のない三次元空間、即ち、直三次元空間内一点よりrの距離にある領域の大さと歪のある三次元空間内一点よりrの距離にある領域の大さとは相違する。従つて、歪のない三次元空間の世界に於ける引力の法則と歪のある三次元空間の世界に於ける引力の法則とは相違する。尚歪のないn次元空間の世界に於ける引力の法則と歪のあるn次元空間の世界に於ける引力の法則とは相違する。

9. 歪空間又は有皺空間内の引力

上記の如く引力を質点を中心として周圍何れの方向にもその場合考へられる空間内に於て均一に傳播する作用と看做す見地に従ひ歪空間又は有皺空間の世界に於ける引力に關して尚少しく考へて見よう。
m, nは二つの正整数なりとする。然るときは恰も平面（二次元空間）上の曲線、三次元空間内の曲線又は曲面には種々の形に歪んだり振動したり皺をもつたりする曲線、曲面がある如く$(n+m)$次元空間に存在するn次元空間には種々の歪n次元空間或は有皺n次元空間がある。此等歪或は有皺n次元空間を可展のも

のと不可展のものとに分類し得る。但し何れも可撓で不伸縮なりと假定する。可展n次元空間内の一点より等距離（但し、同空間内最短線に測ふて測りたる距離）にある領域即ち、n次元球限界の大さを表す規則は直n次元空間、即ち、歪の全くないn次元空間に於けるそれと同一である。從つて可展n次元空間の世界に於ける引力の法則は直n次元空間の世界に於ける引力の法則と同一である。併し、不可展n次元空間内に於ける一点より等距離にある領域即ち、n次元球限界の大さを表はす規則は直n次元空間に於けるそれと同一でない。從つて、不可展n次元空間の世界に於ける引力の法則は直n次元空間の世界に於ける引力の法則とは同一でない.

P.Qは不可展n次元空間に於ける二質点でPQ間の距離（同空間内で測りたるPQ間最短距離）がrであるときPよりrの距離にある領域とQよりrの距離にある領域とは必ずしも相等しくない。何となれば、Pの位置（px_1，px_2，--------px_n）とし、Qの位置を（qx_1，qx_2，----------qx_n）とすれば、Pよりrの距離にある領域の大さはpx_1，px_2 -----px_nの函数でQよりrの距離にある領域の大さはqx_1，qx_2 ------qx_nの函數である。即ち、此等函数は夫々、

P.Qの位置によって種々変動する.
從つて、上記の考へのみではPがQを引く引力と、QがPを引く引力は必ずしも相等しくない結果に陷る。之をどう解決すべきかゞ問題であるがその事は省略する。

半徑rのn次元球を一点より最短距離に測つてrの距離にある点の軌跡なりと定義して不可展n次元空間に於ける半徑r中心Pのn次元球限界の大さがPの位置に無関係で一定値をとる場合、即ち、引力の法則が質点を何處にとりても同一である場合あり得るや否やは問題であるが、斯る不可展n次元空間を抽象的に考ふる事は可能である。即ち、圓周率がπに等しくない一定値をとる不可展n次元空間を抽象的に考へ得る.
尚種々異る法則に從ふ引力を想像し、それに對する種々の抽象空間を考へ得る。又、時間を延長視して次元と看做し、種々異なる法則に從ふ引力を想像し、それに對する種々の抽象時空世界を考へ得る。
斯る見地より種々の抽象空間又は抽象時空世界より種々の引力の法則を誘導し、又、逆に種々の引力の法則より種々の抽象空間又は抽象時空世界を定義することも可能である。

10. 時空世界の概念

時空世界は時間を延長視し、之を次元の一つと看做してつくられる世界で科學的、哲學的又は宗教的にも考へられてゐる。併し、その明確なる概念を得るには可成りの困難がある。その原因は次の如き事にあると余は觀測する。

(1) 吾人は先天常識又は正統科學的に時間を動的のものと考へ過去が先づ來、それより現在が來、それより未來が來ると信じ之が一般に先入主となれる様な状態になつてゐる。時間を延長視し過去、現在、未來を一体と看做した時空世界に於てはこの過程に逆の過程或は斜の過程を考へて差支へないが普通さうは考へない。
尚、空間に關する位置に對しては往復可能であるに反し、時間に關する位置に對しては斯ること不可能なるが故に時間は空間的延長と同一視得ずとの説あるが之は上記時間に關する先入主思想より起る説でこの囚れた考へが除去されゝば斯る説は自然消滅すべきものなるが故に茲で原因の一つにする必要はない。
(2) 空間的の延長は假令それが互に垂直である場合

例へば、直交軸に關する横座標、縦座標の如き場合に於てもそれ等各方面の長さを直接同種の單位(例へばメートル)にて測り得るがその中に時間の軸があると、その方向の長さを直接空間的延長の長さで測り得ない。之を測るには時間の單位と距離の單位とを對應させる必要がある。

少くともこの事に關して時間は空間的延長と相違する。

上記の原因(1)に關することは相対性原理その他で已に多く論ぜられてゐるが故に省略し、原因(2)に關して少しく卑見を述べてみよう。

時間の或單位と距離の或單位とを対應させる(例へば、一秒と一米、又は一時間と一粁)ことにより時空世界を幾何學的に解説し得るが之だけでは單に時空世界に対応するものがつくれるだけで時空世界の概念を明確にするためには不充分である。尚此の場合時間のどの單位と距離のどの單位とを対応させるのが最も適切であるかゞ問題で、その選び方により時空世界は種々の形の幾何學的形体で表はされることになる。
相対性原理に於て光速(以下簡略のため約度1秒30萬粁とする)が絶對基本的のものと看做されること及び時空世界に於て光が放射される場合何れの方向にも、

（即ち、時間の方向にも）1秒30萬粁の速度で進むと看做す見地より余は1秒を時間の方向に延長する30萬粁の長さとして時空世界をつくるのがその幾何學的解說上一番良い方法であると思ふ。何となれば、この方法に從へば時空世界自身が全く幾何學的構造になり又時間と距離の單位を如何様に選びてもその構造に變動を來たさない。（時間の方向に伸縮することがない。）斯くの如くして時空世界の不變不動の性質が良く認識される。例へば、アインシュタイン、ミンコウィスキー世界の如きも斯の如き構造の時空世界として觀測すると之に關する事が更に明瞭になる。　此の場合時間的延長と空間的延長は全く同一性質のものと看做されるが故に光は時間の方向にも1秒30萬粁で進むと看做さねばならない。今1秒の最初の時刻をαとし、最後の時刻をβとして時間を延長と看做せば時刻αより時刻βに到る距離は1秒である。そして光は時間の方向に30萬粁を進みて調度この距離を経過するが故に1秒は30萬粁である。

11. 無限時限空間

抽象空間論では種々の性質をもつ空間が考へられてゐるが、其内に無限次元の空間なるものがある。

上記 n 次元世界に於て n が限りなく大きくなりたる場合即ち、この世界が無限次元空間の世界である場合、A以外の任意の一点Pに於ける E の強度は無限小にな即ち、極限に於て E は傳播しない。今 E を引力作用なりとして、此事を相對性原理的に解釋して無限次元の世界に於て所謂引力の原因をなす空間の歪は如何なる状態のものであるべきかは問題である。

斯くの如き見地よりして無限次元世界に於ては前記 E の如く各方面に均一に傳播する各種の作用は傳播せず、此の世界の各部分は、他の部分より此の種の作用の何の影響をも受けることなく、少くともこれに關して互に無關係状態にあると看做し得る。
但し、此の考へは E が有限であるとの前提の上にある。若し、E が無限大たることを許せば、其無限大と n の無限大の位、如何に依つて傳播する場合もあり、傳播しない場合も有り得る。

無限次元の世界に於ても、有限次元的（例へば直線的、平面的、三次元的）に制限して傳播せしめ得る作用であれば、假令それが有限大の作用であつても傳播せしめ得る。但、無限次元世界に於てAよりPまで有限大の作用を斯くの如く制限して傳播せしめんとする場合、狙ひ、即ち、見當をつけることが非常に困難で

特別の場合を除き一般的には不可能である。何となれば狙ひをつけることは、空間の次元が多くなればなればなるほどむづかしくなる。例へば一平面上で狙ひをつけることよりも、三次元空間内で狙ひをつける方が更にむづかしい。一般に狙ひをつけることは、空間の次元の多くなるに従ひ、累進的にむづかしさを増す。遂に無限次元の世界に於て、其のむづかしさは無限大になる。即ち、不可能になると云ひ得る。

此事は次の如き例を考へると明瞭になる。玉突は平面状の玉突台ですることになつてゐるが、若し何か適宜の方法により、玉が三次元空間的に動く玉突をするとすれば普通の玉突に於けるより非常に當てる事が難しくなるであらう。若し、玉が四次元空間的に動く、（若しくはそれに対応する動き方をする）　玉突をするとすれば、更に當てることが難しくなるであらう。若しそれ以上高次元の空間で動く玉で玉突をするとすれば、更に一層當てにくくなるであらう。
吾人の世界よりも高次元の世界に於て、假りに戦争が起り砲撃、爆撃等があつたとすれば、その命中率に何か特別の良い装置あらざる限り非常に低いであらう。無限次元の世界に於ては命中率無限小になり、此の種の事は出来なくなる。

12. 負次元空間

$n=-m$ にして m を正整数なりとすれば n 次元空間即ち $(-m)$ 次元空間は次元を $(-m)$ 箇もつ空間即ち負次元を m 箇もつ空間なるが故に之を $(-m)$ 次元のマニフォルドと看做して次の如く解釈し得る。

「負存在状態にある m 箇の変数

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_m$$

がとり得る実数値の總ての集合を $(-m)$ 次元のマニフォルドと看做して X_{-m} で表す。然るときは X_{-m} に對應する空間は $(-m)$ 次元空間である。」

負存在状態は正存在状態（普通の存在状態）に反對の状態である。されば変数が負存在状態にあることは変数が負数値をとる意義ではない。種々の数値をとり得る変数それ自身が無くなる以下の或状態即ち、存在することの正反對の状態に置かれることである。
負数値をとる變数があるとすれば、その變数は負数をとつた状態で存在してゐる、即ち、正存在状態にある。

又、例へば、集合の要素が負存在状態にあること、即ち、負要素になることは負数値の要素若しくは零数値の要素になることではない。何となれば普通に考へられる斯る数値の要素は矢張り其の数値をとりつゝ存

在する。即ち、正存在状態にある。要素が負存在状態にあることは要素自身が全くなくなる状態以下の或状態即ち、存在することの正反對の状態におかれることである。從って要素が正數値をとりつゝ負存在状態にある場合もあり、負數値をとりつゝ正存在状態にある場合もあり得る。

負存在状態に對しては種々の見方があるが一般に負存在状態にある任意のモノαは之を正存在状態にあるαに加ふれば無になる性質をもつと云ひ得る。

尚負存在状態は次の様にも解釈し得る。次記のモノは何でも差支へない。即ち、佛教上の「法」と看做し得る。

存在には時間が必要である。時間の伴はぬ存在は考へられない。即ち、長時間存在するモノも短時間存在するモノもあるが零時間存在するモノは存在せぬものである。モノが時間的の延長を以て始めて存在する状態が出来るので時間は存在するモノの次元の一つであると看做し得る。そして、此の場合考へられる時間は過去、現在、未来の順序に流れる普通時間で何も断りなく正なりと看做されてゐる。從って存在も正存在になるのである。若し、此の場合に普通時間に反對に流れる負時間に関する存在を考へればそれは負存在で、

斯くして各種のモノの負存在状態の概念をつくり得る。此の見地に從へば出現より消失の方向へモノを見れば（即ち、普通の見方をすれば）其のモノは正存在状態にあるが、其の反對に消失より出現の方向にモノを見れば其のモノは負存在状態にある。之は線分 $\overrightarrow{AB}$ を正とすれば線分 $\overrightarrow{BA}$ は負であると同様である。

例へば、生れてより死ぬまでの過程を考へれば、其の過程は負の一生である。此の相反する過程を加ふれば最初より生れぬも同様である。

正次元と負次元をもつ空間もあり得る。例へば、正存在状態にある m 箇の変数

$$x_1,\ x_2,\ \text{-------------------},\ x_m$$

がとり得る実數値の總ての集合を $(m+n)$ 次元のマニフオルドと見做して それに對應する空間は m 箇の正次元と n 箇の負次元をもつ $(m+n)$ 次元空間である。

之より引力の法則に關聯して負次元空間を考察して見よう。

立體(三次元空間)の各点は尠くとも二次元境界の任意に小さい圍ひに包含され、曲面（二次元空間）各点は尠くとも一次元境界の任意に小さい圍ひに包含され曲線（一次元空間）の各点は離れ[illegible]の境界の任意に

小さい圍ひに包含される。此の離ればなれの空間を以上の考へに準じて零次元空間と名附くれば零次元空間の各点は無点の境界即ち、空虚の空間の任意に小さい圍ひに包含される。斯る見地よりカール、メンガーは(-1)次元空間を点の全くなき空虚の空間なりと看做してゐる。但し、此の空間を如何なる構造の空間とすべきか、例へば、如何なる次元の空間とすべきか、歪空間とすべきか、直空間とすべきかの如き問題には論及してゐない。

今nを負整数とし、n次元空間なる負次元空間を任意の一点よりrの距離にある領域の大さがr^{n-1}に正比例する空間なりと定義する。或は引力は周圍何れの方面にも均一に分布する作用なりとの假定の下に引力の法則が距離の$(n-1)$乘に反比例する空間なりと定義する。

注　意

此の定義は一寸突飛の様に感ぜられるかも知れぬが次記の事を参照すれば決して無理の定義ではないと思ふ。$(n-1)$次元空間が如何なる性質の空間であらうともそれに一次元だけ足してつくられるn次元空間は$(n-1)$次元空間を限りなく多く積重ねた様な構造をもつこと明らかである。從ってn次元空間

の断面或は限界は一般に$(n-1)$次元空間なりと看做し得る。又n次元空間の一点Aよりrの距離にある領域はAよりr以下の距離にある同空間の部分とr以上の距離にある同空間の部分との限界であるが故に$(n-1)$次元である。尚その各次元はrとリネアルの關係にあると看做し得るを以て此の領域の大さはrの$(n-1)$乘に正比例する。

(-1)次元空間は負存在狀態にある一箇の変數がとり得る實数値の總ての集合と對應するが故に負存在狀態にある線即ち、負線である。又、(-2)次元空間は負存在狀態にある二箇の変数がとり得る實数値の總ての集合と対應するが故に負存在狀態にある面即ち、負面である。此の結果より見ると面（負面）である所の(-2)次元空間が線（負線）である所の(-1)次元空間の限界となり、一寸不合理に感ぜられるが、併し、負線と負面の関係は正線と正面の関係の反對である。負面の限界が負線でなく負線の限界が負面である。即ち、負線は負面に圍まれるものである。一般に圍まれることは圍むことの反對の狀態なりとし、AがBを圍むことはBがAの圍みの中に正存在すること、AがBを圍まぬことはBがAの圍みの中に零存在すること、AがBに圍まれることはBがA

の圍みの中に負存在することであると解釈して以上の如き事が云へる。尚同様にn次元空間の断面或は限界は$(n-1)$次元空間なりと見做し得る。
然るときは種々の構造のn次元空間即ち、負次元空間があり得る。此種の空間を全く抽象空間として取扱ひそれを有形的にどう解説するかの問題に觸れずとも種々考ふべき事あるが以下主としてその有形的解説の問題に立入って見よう。

13. 負次元空間の有形的解説

普通に考へられる空間即ち、正次元空間に於ては一点Aに限りなく近迫する領域は無限小でAを遠ざかるに従ひ、領域は次第に擴大し、Aより無窮遠にある領域は無限大になる。然るに負次元空間に於ては一点Aに限り無く近迫する領域は無限大でAを遠ざかるに従ひ、領域は次第に縮小し、Aより無窮遠にある領域は無限小である。
上記正次元空間の場合の概念は殆んど直覚的につくり得るが負次元空間の場合の概念はさう容易につくり得ない。併し、次の如き事を考へると負次元空間の場合の概念を或程度までつくり得る。

nは負整数なりとする。

(1) Aは閉曲面Sの一点でSにはAよりrの距離にある領域の大さがr^{n-1}に正比例する如き構造の皺がある。即ち、Aに限りなく近迫する部分に限りなく多くの皺或は折畳されて重複した部分あって、領域は限りなく大きく、Aを遠ざかるに従ひ、皺或は重複部が次第に減少し、又はSの大さが減少して領域は次第に縮小し、遂にAより無窮遠にある領域は一点になる。

(2) Aは閉歪三次元立體（閉曲線又は閉曲面に相當する曲三次元體）G_3の一点でG_3にはAよりrの距離にある領域の大さがr^{n-1}に正比例する如き構造の皺或は重複部がある。但し、此の皺或は重複部は第四次元の概念に基いて構成される皺である。

(3) 尚、一般的の場合を云へばAは閉歪m次元立体G_mの一点でAよりrの距離にある領域の大さはr^{n-1}に正比例する如き構造の皺或は重複部がある。

(1)(2)又は(3)に於てAと同様の状態にある点が幾つもあるばあいを考へ更にそれが限りなく多くなり歪空間かく部分に分布された場合を想像すれば或程度まで負次元空間を有形的に解説することが出来る。
但し、ここでは斯る歪空間を抽象的に考へる[illegible]

と同様の状態にある点が多くある歪空間を幾何學的不合理なき様につくり得るや否やは疑問である。第四次方向に振動する徽、第五次元方向に振動する徽-----という様に夫々異る次元の方向に振動する徽を幾種も考へ、場合に依れば限りなく多種考へそれを適當に配合したならば或は斯る歪空間をつくり得るかも知れない。

14. 分數次元空間

点が移動して線を画く過程を一回の積分法と對應せしめ、その線が移動して面を画く過程を二重積分法と對應せしめ、その面が移動して三次元立体を画く過程を三重積分法と對應せしめ得る。此の考へに從へば、分數次元空間を分數回積分法と對応せしめ得る。
そして、ヘヴィーサイドオペレイターの應用により分數回積分法に意義を附することが可能である。此の見地よりして或程度まで分數次元空間の概念をつくり得るが之だけでは分數次元空間は實際如何なる構造のものであるかを幾何學的或は有形的に明瞭にし得ない。
以下これとは全く異る存在濃度の変化の考へより分數次元空間に幾何學的或は有形的意義を附することを試みる。

mは正整數にして $0<p<1$ のとき $(m+p)$次元空間なる正分數次元空間と$(-m-p)$ 次元空間なる負分數次元空間を次の如く解說し得る。

(I) $(m+p)$次元空間

正存在狀態にある $(m+1)$ 箇の変數

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{m+1}$$

の内の一箇の存在濃度pにして殘りの何れもの存在濃度1である條件の下に

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{m+1}$$

がとり得る、實數値の總ての集合を要素の存在濃度を考慮して $(m+p)$ 次元のマニフォルド X_{m+p} と看做す。然るときは X_{m+p} に對應する空間は $(m+p)$ 次元空間である。

(II) $(-m-p)$ 次元空間

負存在狀態にある $(m+p)$ 箇の変數 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ の内の一箇の存在濃度$-p$にして殘りの何れもの存在濃度-1である條件の下に是等變數がとり得る實數値の總ての集合を要素の存在濃度を考慮して $(-m-p)$ 次元のマニフォルドX_{-m-p} と看做す。然るときは X_{-m-p} に對應する空間は $(-m-p)$ 次元空間である。

尚分數次元空間に對して次の如き解說をし得る。
mは正整數、pは正の純分數なりとする。然るときは

$(m+p)$ 次元空間は分數次元空間で m 次元空間が連続変動して $(m+1)$ 次元空間なる過程の途中でとる或ものであると看做し得る。普通の考へ方では斯る過程に関して連続増減する概念は容易につくり得るが平面が三次元立體になる過程を連続ならしむる事に対して普通の考へ方には困難がある。

併し、存在濃度変化の考へに基き m 次元空間の存在濃度が 1 より連続減少して 0 になり、それと同時に、$(m+1)$ 次元空間の存在濃度が 0 より連続増加して 1 になり遂に m 次元空間が $(m+1)$ 次元空間になる過程を想像すれば、m 次元空間が連続変動して $(m+1)$ 次元空間になる過程の概念をつくり、それよりその過程中に於て $(m+p)$ 次元空間に対應する形或は状態を見出して $(m+p)$ 次元空間を幾何学的、若しくは有形的に解読し得る。此の考へに従へば $(m+p)$ 次元空間は或存在濃度 μ をもつ $(m+1)$ 次元空間と或存在濃度 ν をもつ n 次元空間より成立する。

此の場合 $(m+p)$ 次元空間と μ 存在濃度の $(m+1)$ 次元空間及び ν 存在濃度の n 次元空間の組とを 0 と 1 の間に於ける總ての p の数値に關して一對一の對應をさせるだけならば問題は簡単で μ, ν の選び方は幾つもある。例へば $\mu = p$, $\nu = 1-p$

とすれば簡単にすむ。併し、μ, ν は p, n の大さ、n 次元空間の大さ $(m+1)$ 次元空間の大さ等を考慮して定むべきで此等のものの函數であるとするとむづかしいことが起って来る。

上記は分數次元空間の有形的概念をつくる目的のもので、之と同様のことが負分數次元空間に對して出来るかどうかの問題があるがそれは省略する。

(12) の「注意」より負次元空間に對すると同様の考へに基いて分數次元空間を定義し得る。即ち、n を分數なりとし、n 次元空間なる分數次元空間を任意の一点より r の距離にある領域の大さが r^{n-1} に正比例する空間なりと定義し得る。或は之に準ずる引力の法則より定義することも出来る。

此の定義に基き分數次元空間の性質を負次元空間の場合に述べた歪空間に類似したる歪空間で或程度まで解読し得る。但し分數次元空間には純分數次元空間、帯分數次元空間、正分數次元空間、負分數次元空間等のあることに注意して一々解読する必要がある。

15. 複素次元空間に對する二様の解釈

複素次元空間を次の如く二様に解釈し得る。

解釈(一)複素次元空間は次元を複素數箇もつ空間である。

解釈(二)複素次元空間は原点Oと複素数に對應する点を通る直線の方向に延長する次元をもつ空間である。

解釋（一）

n次元空間は次元をn箇もつ空間であることがnのあらゆる数値に対して成立つとすれば負次元空間は次元を負数箇もつ空間分数次元空間は次元を分数箇もつ空間である。此の考へに從ひ複素次元空間は次元を複素数箇もつ空間なりと解釈する。

此の解釈に從へば空間が$(a+ib)$次元であることは其の空間の次元がa箇の実次元とb箇の虚次元（i次元）をとることである。

よって此の空間は$(a+b)$箇の複素次元をとる空間の特別の形で次に記す解釈(二)の複素次元空間の一種である。

解釋（二）

多元複素変数に關聯してn箇の実軸とn箇の虚軸より成る座標軸又はそれにより決定される空間が考へられる。今此等の座標軸が夫々種々に廻轉され、平行移動され、其の中の或軸が除去され、又は新規の軸が附加される場合などを想像する事により種々の方向に延長する複素座標軸又はそれによって決定される複素次

元空間即ち、複素数の絶對値を表すrの方向に延長する次元をもつ空間をつくり得る。

ガウス平面上原点Oと複素数$(a+ib)$に對應する点とを通る直線に平行なる方向の次元を$(a+ib)$複素次元といひ、其方向の軸を$(a+ib)$複数軸といふことにする。然るときは互に垂直に交る幾多のガウス平面をつくる事により互に垂直に交る幾多の$(a+ib)$複素軸又は$(a+ib)$複素次元をつくり得る。

$a=1$, $b=0$ の場合に於ける$(a+ib)$複素軸の特別の形が幾多互に垂直に交ってデカルト座標軸をつくる又$a=0$, $b=1$ の場合に於ける$(a+ib)$複素軸の特別の形が幾多互に垂直に交る状態は多元複素変数の研究上考へられる。さればn箇の異る$(a+ib)$複素軸を$(a+ib)x_1$, $(a+ib)x_2$ ……$(a+ib)x_n$を以て表し、此等の複素軸が互に垂直に交って直交複素座標軸をつくる事に何の不合理もない。

以下この直交複素座標軸を$n(a+ib)x$複素座標軸といひ、斯の如きn箇の複素座標軸によって決定される複素次元空間を$n(a+ib)$複素次元空間といふ。

注意

$n(a+ib)$複素座標軸に於ける$n(a+ib)$はnと$(a+ib)$の相乗積を表はすのではなく$(a+ib)$

複素軸が n 箇あることを表はす。従つて $a \neq 0,\ b=0$ のときの $n(a+ib)$ 複素座標軸は a の数値（実数値）如何に係らず実の n 次元直交座標軸を表す、又 $(a+ib)$ 複素次元空間に於ける $n(a+ib)$ は n と $(a+ib)$ の相乗積を表はすのではなく $(a+ib)$ 複素次元が n 箇あることを表す。従つて $a \neq 0,\ b=0$ のときの $n(a+ib)$ 複素次元空間は a の数値如何に係らず実の n 次元空間を表す。

16. 解釋(二)より見たる複素次元空間と複素座標軸

以下複素次元空間は解釈(二)の複素次元空間を意味す。

15. の注意より $n(a+ib)$ 複素次元空間に関して次の如きことが認められる。

(1) $n(a+ib)$ 複素次元空間と $n(ka+ikb)$ 複素次元空間は同一の複素次元空間を表す。何となれば原点 O と複素数 $(a+ib)$ に對應する点を通る直線と原点 O と複素数 $(ka+ikb)$ に對應する点を通る直線は合同する。

(2) $b=0$ 又は $a \longrightarrow \pm\infty$ のとき $n(a+ib)$ 複素次元空間は n 実次元空間である、

(3) $a=0$ 又は $b \longrightarrow \pm\infty$ のとき $n(a+ib)$ 複素次元空間は n 虚次元空間即ち、n 箇の i 次元

をもつ空間である。

(4) $n=1$ のとき $n(a+ib)$ 複素次元空間は原点 O と複素数 $(a+ib)$ に対應する点を通る一直線である。

又、$n(a+ib)$ 複素次元空間を n 複素次元のマニフォルドと看做し、次の如く解説し得る。

「n 箇の変数

$x_1,\ x_2,\ \text{-----------},\ x_n$

が とり得る実数値の總てに対して正存在状態にある n 箇の複素数

$(a+ib)x_1,\ (a+ib)x_2,\ \text{---------},\ (a+ib)x_n$

がとる値の總ての集合を n 複素次元のマニフォルド $X_{n(a+ib)}$ とする。然るときは之に對應する空間は $n(a+ib)$ 複素次元空間である」

又正の $(a+ib)$ 複素次元と負の $(a+ib)$ 複素次元をもつ複素次元空間を次の如く解説し得る。

「m 箇の変数

$x_1,\ x_2\ \text{-------------},\ x_n$

がとり得る実数値の總てに対して正存在状態にある m 箇の複素数

$(a+ib)x_1,\ (a+ib)x_2,\ \text{---------},\ (a+ib)x_m$

がとる値の總て及び n 箇の変数

$x_1', x_2' \text{-----------}, x_n'$

がとり得る実数値の總てに対して負存在状態にある.
n 箇の複素数

$(a+ib)x_1', \quad (a+ib)x_2', \text{----------} (a+ib)x_n'$

がとる値の總ての集合を $(m+n)$ 次元のマニフオルド
$X_{(m+n)(a+ib)}$ とすれば之に對應する空間は m 箇の正
$(a+ib)$ 複素次元と n 箇の負 $(a+ib)$ 複素次元を
もつ $(m+n)$ 複素次元空間である.

以上に記した複素次元空間よりもつと一般的の複素
次元空間がある。即ち、それは

$(a_1+ib_1)x_1$ 次元, $(a_2+ib_2)x_2$ 次元, --------
-----, $(a_n+ib_n)x_n$ 次元

を次元とする複素次元空間である。之を n 複素次元の
マニフオルドと看做して次の如く解説し得る.

「n 箇の変数

$x_1, x_2, \text{--------------}, x_n$

がとり得る実数値の總てに対して正存在状態にある n
箇の複素数.

$(a_1+ib_1)x_1, \quad (a_2+ib_2)x_2, \text{------}, (a_n+ib_n)x_n$ (1)

がとる値の總ての集合を n 次元のマニフオルド X_n と
する. 然るときは X_n に對應する空間は n 箇の複素次
元、$(a_1+ib_1)x_1$ 次元, $(a_2+ib_2)x_2$ 次元 ------, $(a_n+ib_n)x_n$ 次元

を次元とする複素次元空間である。

若し複素數 (1) 中に負存在状態にある複素數ありと
すれば、それに対して複素次元 (2) 中に負の複素次元
あり上記の複素次元空間は負複素次元と正複素次元を
もつことになる。

17. 體積的に實次元空間に等しき複素次元空間

n が正整数であるとき與へられた数の n 乗根は n 箇
あり其の中に複素値をとる根の存在する事より体積的
に觀測して普通に実次元空間と断定される空間を複素
次元空間なりと看做し得る。

例へば、三次元空間、四次元空間又はそれ以上高次元
の空間を總て複素次元空間若しくは非実次元空間なり
と看做すことが出来る。

例へば、1 の三乗根は

$$1, \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

なるが故に $3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 複素次元空間は単に空
間として考へる場合（例へばその体積を考へる場合）
普通の三次元ユウクリッド空間と全く同一であるけれ
ども其中の点の座標は一般に複素値をとる.
従って距離、面積、断面、二断面によって構成される

様などに對しくユークリッド三次元空間に於けるそれに對すると異なる見方をせねばならない。されば單に空間として（或は体積的に）ユークリッド三次元空間と全く同一の空間が與へられてゐるとき、それを、$3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 複素次元空間なりと看做すことも必ずしも間違ひでない。$3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 複素次元空間に就いても同様である。又、

$$x^{2n}=(-1)^{n}\overbrace{(ix)(ix)\cdots\cdots(ix)}^{2n\text{ 箇}}$$

$$x^{2n+1}=(-1)^{n}x\overbrace{(ix)(ix)\cdots\cdots(ix)}^{2n\text{ 箇}}$$

なるが故に

n が正偶數のとき

ユウクリッド $2n$ 次元空間と正存在状態にある純虚 $2n$ 次元空間、

ユウクリッド $2n+1$ 次元空間と負存在状態にある一箇の実次元と $2n$ 箇の純虚次元をもつ空間、

n が正奇數のとき

ユウクリッド $2n$ 次元空間と負存在状態にある純虚 $2n$ 次元空間、

ユウクリッド $2n+1$ 次元空間と正存在状態にある一箇の実次元と $2n$ 箇の純虚次元をもつ空間

に関して以上と同様のことが認められる。

18　1以上の存在濃度

$\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \rho_n$

は夫々 n 箇の複素数

$(a_1+ib_1)x_1,\ (a_2+ib_2)x_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ (a_n+ib_n)x_n$

の存在濃度にして

$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ x_n$

がとり得る実数値の總てに對して上記 n 箇の複素数がとる値の總ての集合をマニフオルドとし、それに対応する複素次元空間を $\mathfrak{G}$ とする。然るときは前記各種の空間は何れも $\mathfrak{G}$ の特別の形である。

正存在濃度の最高限を $+1$ とし、負存在濃度の最低限を -1 とすれば

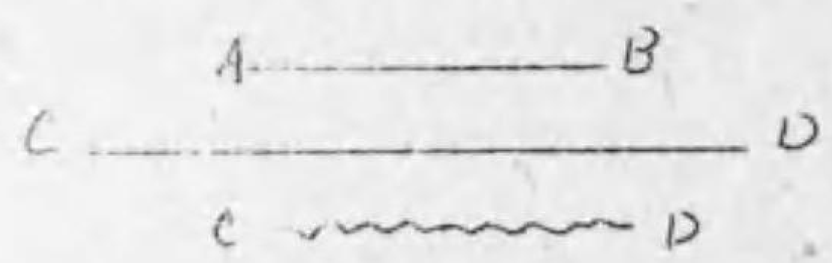
$$-1<\rho_1<1,\quad -1<\rho_2<1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ -1<\rho_n<1$$

の條件の下に $\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ \rho_n$ は任意の數値をとり得るが、若し普通認識される存在以上に限りなく高濃度の正存在あり、又それに対して限りなく低濃度の負存在ありとすれば、斯る條件を要く必要なくなり $\mathfrak{G}$ は更に一層一般的になる。

普通認識される存在の存在濃度は 1 でそれに反対なる負存在の存在濃度は -1 であるが此の兩限外にある

存在濃度をもつ存在の概念は次の如くしてつくり得る。

$1<n$ なりとし線分 AB の n 倍の長さの可撓線分 CD あり、其の各部分が一様に非常に多く非常に小さく振動した状態になり、其の結果 CD 間の距離が AB の長



さに等しくなったとする。其の振動が限りなく多く、限りなく小さくなった極限に於ける CD を無限振動線分 CD とよぶ。然るときは無限振動線分 CD と線分 AB とは外観全く相等しくして區別し得ない。併し前者は後者に比して長さ n 倍で線としての分量を n 倍もってゐる。それ故に線分 AB の存在濃度 1 のとき無限振動線分 CD の存在濃度は n にして線分 AB の存在濃度 -1 のとき無限振動線分 CD の存在濃度は $-n$ なりと看做し得る。

同様に面分 A の n 倍の面積をもつ面分 B の各部分に一様に限りなく多く限りなく小さき皺を生じて面分 A と面分 B を外観全く區別し得ざる様になったとすれば面分 A の存在濃度 1 のとき無限有皺面分 B の存在濃度 n にして面分 A の存在濃度 -1 のとき無限有皺面分 B の存在濃度 $-n$ なりと見做し得る。

n 次元立體 K の n 倍の体積をもつ立体 H の各部分に一様に限りなく多く限りなく小さき皺（$\overline{n+1}$ 次元に関する）を生じて立体 K と立体 H を外観全く區別し得ざる様になったとすれば、立体 K の存在濃度 1 のとき無限有皺立体 H の存在濃度 n にして立体 K の存在濃度 -1 のとき無限有皺立体 H の存在濃度 $-n$ なりと看做し得る。

斯る見地よりすれば存在濃度の絶對値が 1 以上なる次元をもつ空間を考へ得る。

19. 複素次元空間に於ける引力

$n(a+ib)$ 複素次元空間の世界あり、そこに引力ありと假定し、其の法則如何の問題を以下考究する。

$n(a+ib)$ 複素次元空間に $n(a+ib)$ 複素座標軸を設け、原点 O を中心として或作用 E が起りそれが O の周圍何れの方面にも途中他より影響を受けることなく性質を変更することもなく傳播すると假定する。
然るときは E は実の方向にのみに傳播する部分 E_1 と虚の方向にのみに傳播する部分 E_i より成り、

$$E = E_1 + E_i$$

で E_1 は O より何れの実の方向にも均一に分布傳播し、E_i は O より何れの虚の方向にも均一に分布傳播すると看做し得る。

何となれば E が複素次元空間に於て傳播する場合実の方向に傳播する部分は実作用で、虚の方向に傳播する部分は虚作用で其の相違は実数と虚数の相違する如くである。それ故に E_1 或は其の部分が変化して E_i と同性質の作用になり、又は E_i 或は其の部分が変化して E_1 と同性質の作用になる様なことはないと看做し得る。次に E_1 が 0 より或実の方向に多く分布傳播し、或実の方向に少く分布傳播すると看做すべき理由なく E_i が 0 より或虚の方向に多く分布傳播し、或虚の方向に少く分布傳播すると看做すべき理由なきが故に E_1 は何れの実の方向にも均一に分布傳播し、E_i は何れの虚の方向にも均一に分布傳播する。

P は $\{(a+ib)_1\rho_1,\ (a+ib)_2\rho_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ (a+ib)_n\rho_n\}$

なる点なりとすれば OP の実部の長さは

$$\sqrt{a^2\rho_1^2+a^2\rho_2^2+\cdots\cdots+a_2\rho_n^2} = a\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots+\rho_n^2}$$

OP の虚部の長さの絶対値は

$$\left|\sqrt{(ib)^2\rho_1^2+(ib)^2\rho_2^2+\cdots\cdots+(ib)^2\rho_n^2}\right|$$

$$=\left|\,b\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots+\rho_n^2}\,\right|$$

O を中心として実の方向にのみ延長する半径

$$a\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+\rho_n^2}$$

の実 n 次元球を画くと其の限界領域の大さは

$$a^{n-1}\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots\cdots+\rho_n^2\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

に正比例する。E_1 は此領域の何れの部分にも均一に分布されるが故に P に於ける E_1 の強度は

$$\frac{1}{a^{n-1}\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots\cdots+\rho_n^2\right)^{\frac{n}{2}-1}}$$

に正比例する。

$$a\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots+\rho_n^2} = 1$$

のときの P に於ける E_1 の強度を μ_1 なりとすれば一般に P に於ける E_1 の強度は

$$\frac{\mu_1}{a^{n-1}\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots+\rho_n^2\right)^{\frac{n}{2}-1}}$$

次に O を中心として虚の方向にのみの拡がりによってつくられる空間と同様に取扱ひ P に於ける E_i の強度

と実の方向にのみ拡がる空間

$$\frac{\mu_i}{b^{n-1}\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots\cdots+\rho_n^2\right)^{\frac{n}{2}-1}}$$

但し、μ_i は

$$b\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots\cdots+\rho_n^2}=1$$

のときのPに於けるE_iの強度

それ故にPに於けるEの強度をUとすれば

$$U=\frac{\mu_1}{a^{n-1}(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots+\rho_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}+\frac{\mu_i}{b^{n-1}(\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots+\rho_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

今EをO点にある質点によつて起される引力なりとすれば以上の等式はそのまゝ引力の法則を示すことになる、尚種々の複素次元空間より種々の引力の法則を誘導し、又逆に種々の引力の法則より種々の複素次元空間の概念をつくること可能である。

20. 複素時間、複素時空世界

時間を延長視して次元と看做す考へと複素次元の考へより複素時間の思想及びそれを延長視して次元と看做す思想の出ることは當然である。

複素数が実数と虚数より成る如く複素時間は実時間と虚時間より成ることはいふ迄もないが虚時間をどう解釋すべきやが問題である。

今Tを複素時間とし

$$T=t+i\tau$$

とおき、tはTの実部で普通の時間なりとし$i\tau$はTの虚部なりとする。tと$i\tau$を動的のもの即ち、流れるものと看做せばtの流れは$i\tau$の流れに垂直である、此の場合Tも動的である。

tと$i\tau$を延長視して幾何學的に觀測すればtと$i\tau$は不動である．從つてTも不動である、此の場合Tは複素数と同様の性質をもつ、

普通時間に垂直に流れる時間の概念は次の如き二つの考へ方のどちらの一つに依つてもつくることが出来る。

(1) 時空世界の変動即ち、過去現在、未来の綜合變動を想像すれば、其の變動に伴ふて時間の概念が出来る。此の變動は普通時間を次元の一つとしてもつ時空世界の綜合変動なるが故に之に依つて起る時間の概念は普通時間の概念ではなく、それとは独立の即ち普通時間に垂直に流れる或新時間の概念である。

(2) 時空世界に於て点の移動することを想像すれば其の移動に伴ふて時間の概念が出来る、此の移動は普通時間を次元の一つとしてもつ時空世界に於ける移動なるが故に之によつて起る時間の概念は普通時

間の概念ではなく (1) の場合と同様普通時間とは独立の即ち、普通時間に垂直に流れる或新時間の概念である。

上記の新時間は超時間とよぶべきもので之をそのまゝ虚時間即ち、$i\tau$ なりと見做すことは出来ぬとしても之を虚時間と対応せしむることは可能である。

此の事はガウス平面に於て幾何学的に見れば単に x 軸に垂直であるといふだけの軸を iy 軸即ち、虚軸と看做すと同様である。

吾人が各種の運動、変化、変動を考ふる場合引合ひに出す時間は実時間即ち、普通時間にきまつてゐるが斯る事象を複素時間に関して考へれば思想が一般化される。例へば

$$v = \frac{dS}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d^2S}{dt^2}$$

と書く代りに $T = t + i\tau$ として

$$v = \frac{dS}{dT}, \qquad \alpha = \frac{d^2S}{dT^2}$$

と書けば速度、加速度に関する概念を一般化する道が開かれる。

尚一般に t に関する導函数 t に関する積分 t を含む微分方程式等に於て T を t に代へて一般的の場合を考

へ得る。

複素変数の函数が研究されるからには複素時間に関する力学が研究される時が将来あるかも知れない。

複素数がガウス平面上の点で表される如く T は t と $i\tau$ を次元とする平面上の点で表はされる。

今この平面を時間面と名附く、時間面はガウス平面に等しい性質をもち、原点 O と T に対応する点を結ぶ線分を r とすれば一般に

$$r = \sqrt{t^2 + \tau^2}$$

で r を T の絶対値とし得る。

T を曲線状に流れるものなりとし、其の流れを時間平面上に画かれる曲線と対応せしめ得る。T は制限無き場合一定時刻 T_1 より他の一定時刻 T_2 に限り無き多くの異る道を経て到達し得る。之は複素変数が制限無き場合、一定値より他の一定値に限り無き多くの異る道を経て到達し得ると同様である。されば何か適当の規約を設けざる限り T の流れには過去現在未来の区別を附け難い。

T の全部を延長と看做せばそれは時間面で表はされる。T を時間とする世界ありとして T の全部を延長と看做せば複素時間を含む時空世界即ち、複素時空世界が出来る。

実時間（普通時間）を次元とする従来の時空世界に於ては時間が一次状態に含まれるが、此の複素時空世界に於ては時間が二次状態に含まれる。

時間を一次状態に含む複素時空世界は次の如くしてつくり得る。即ち、曲線状に流れるTを時間とする世界ありとし、其の流れを時間面上の曲線と対応せしめて曲線上の延長と看做せば時間を一次状態に含む複素時空世界が出来る。

21. 多複素時間、高次複素時空世界

多元複素函数に関聯してn箇の異る複素変数を考へるが如くn箇の異る複素時間を考へ得る。即ち、

$$T_1 = t_1 + i\tau_1, \quad T_2 = t_2 + i\tau_2, \quad \cdots\cdots \cdots\cdots T_n = t_n + i\tau_n$$

の如き場合がある、此の場合

$$t_1, \quad t_2, \cdots\cdots t_n, \quad i\tau_1, \ i\tau_2, \cdots\cdots i\tau_n$$

は夫々互に垂直に流れ或は延長すると看做される異る2n箇の時間である。斯る異る時間の概念は異る超時間を以てつくり得る。

已に述べたるが如く時空世界（普通時間に関する）の変動又は時空世界に於ける点の移動より超時間の概念がつくられる。此の時空世界を第一時空世界と云ひ

此の超時間を第一超時間と云ふ。第一超時間を延長視して次元と看做せば第一時空世界の第一超時間に関する各刻の状態が一体となりて新時空世界が出来る。之を第二時空世界と云ふ。第二時空世界は普通時間と第一超時間を次元中に含む。

第二時空世界の変動又は第二時空世界に於ける点の移動を想像することにより更に新時間の概念即ち、第二超時間の概念をつくり得る。此の考へ方で進み異る超時間を幾箇でもつくり得る。

又、複素時間 $T_1 = t_1 + i\tau_1$ に関してつくられる複素時空世界が複素時間 $T_2 = t_2 + i\tau_2$ に関して変動する場合 T_2 を延長と看做して複素時間二箇を次元としてもつ複素時空世界をつくり得る。此の考へ方で進み複素時間を幾箇でも次元としてもつ複素次空世界をつくり得る。此の場合最初に考へられる世界即ち、普通時間に関して変動する世界は実存在のものとしても複素存在のものとしてもよい。若し之を複素存在の世界とすればこゝにつくられる複素時空世界は時間的にも空間的にも複素構造になる。

第一超時間をヴエクトルと看做し、普通時間に過去現在、未来がある如く之を過去、現在、未来に区別し得る、斯の如くすれば、12.に解説した普通時間の場合に於け

ると同様第一超時間に正負が出来る。従ってそれに関する存在にも正存在と負存在があり得る。

集合の要素中に第一時空世界又は其の部分が含まれる場合その要素を負の第一超時間に関する存在と看做して負存在状態におき得る。

上述と同様の事を第n超時間及び第n時空世界に関してさび得る。

22. 體積的に相等しき異る複素次元空間

複素次元空間又は純虚次元空間にして其の體積に關してユウクリッド空間と同一の性質をもつものある事を 15. に述べたが尚之に関して一般の場合を考へてみよう。

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n \qquad b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots b_n$$

は実数にして

$$x_1 x_2 \cdots\cdots x_n = (a_1+ib_1)x_1 (a_2+ib_2)x_2 \cdots\cdots (a_n+ib_n)x_n$$

なりと假定する

$$x_1,\ x_2\ \cdots\cdots,\ x_n$$

を次元とする空間をα空間と名附け

$$(a_1+ib_1)x_1,\ (a_2+ib_2)x_2\ \cdots\cdots\ (a_n+ib_n)x_n$$

を次元とする空間をβ空間と名附く、然るときは、α空間とβ空間は双方を空間として考へる場合即ち

n次元の拡がり或は体積を考へる場合、全く同一であるけれども其の中の点の座標に関して双方相異るが故にn次元以下の次元の形體に関してα空間とβ空間は相異る性質をもつものと看做さねばならない。

以上の事を次の様にも解説し得る。即ち、n箇の実変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$

がとり得る値の總ての集合をX_nとし、此等n箇の実変数がとり得る値の總てに對してn箇の複素数

$$(a_1+ib_1)x_1,\ (a_2+ib_2)x_2,\ \cdots\cdots (a_n+ib_n)x_n$$

がとり得る値の總ての集合をX'_nとする　又

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$$

$$b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n$$

は$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の總ての値に對して

$$x_1 x_2 \cdots\cdots x_n = (a_1+ib_1)x_1 (a_2+ib_2)x_2 \cdots\cdots (a_n+ib_n)x_n$$

なる條件を満足せしむる実数なりとする。然るときはX_nとX'_nは集合体としての構造に関しては相違してゐても双方を空間的の拡がりとして体積を觀測するとき全く相等しく區別し難い状態にある。

吾人は点及び線に関して種々の知識をもってゐるけれども直接五感により或は如何なる機械器具の助けによりても点及び線を認識し得ない。点線に関しては完全なる定義を與へることもむづかしい。

全く抽象的のもので結局之に対してはヒルベルトの幾何學原理に於けるが如き考へ方をするのが一番妥當であらう。又吾人は立體を直接立體として認識し得ない。何となれば立體を直接立體として認識するためには立体の占むる空間を其の周圍の空間と異る性質のものにする必要がある。即ち、立体を同形の物体にする必要がある。然るに斯の如くして認識し得るものは立体の表面若しくは立体を一面より見た形で立体それ自身でない。例へば、物体を見ることは其面を見ること、物体に觸れることは其の面に觸れることであると考へれば以上の事は明瞭にわかる。

斯る見地より總て有形のものは根本に於て面的に認識され、それより遠近の概念を始め種々の考へが加はりて多くの複雑した思想が起るのであると看做し得る。嬰児の形に關して智慧づく過程は之と一致することが知れてゐる。されば吾人の認識する世界と總ての面に關する事象に於て全く相等しい複素次元世界ありと假定すれば、吾人は直接双方を區別し得ぬであらう。

各種の物理化學的性質を時間に垂直なる次元と看做し、其の強度をグラフで表はすことは廣く行はれてゐる。又、是等の性質を夫々互に垂直なる次元として其の關係をグラフで表すことも同様廣く行はれてゐる。

今時間(普通時間)及び各種の物理化學的性質を夫々互に垂直なる次元なりとする。然るときは總ての運動及び物理化學的変動或は変化が幾何學的に解説され、不動不変の時空世界が出来る。又外觀之と全く相等しい複素時空世界を考へ得る。但し此の複素時空世界の次元中には複素物理化學的性質なるものが次元として含まれてゐる。此等二つの世界を夫々集合体と看做せば X_1, X' の關係と同様の關係あることが知れる。

斯る複素構造の世界又は時空世界に於ける引力の法則を考へそれより種々異様の性質をもつ複素世界又は複素時空世界を誘導する可能性がある。

23. 終結

引力に對して以上述べたるが如き所見が絶對に正しいとは勿論速断出来ぬが之に從へば、空間の歪が引力と關係をもつことが比較的容易に知れる。但し、其の空間の歪と相對性原理で考へられる空間の歪とが如何なる關係にあるかは研究を要する問題である。

負存在及び存在濃度に關する事は日吉論叢第一輯に載せた拙著「存在濃度の変化」中に解説されるが故に之に關して別に説明を加へなかつた。

昭和十七年九月五日印刷
昭和十七年九月十日發行
〔非賣品〕

編輯兼
發行者　福澤三八

東京市世田ヶ谷區喜多見二一七五

印刷者　北上屋山住商店

東京市神田区神保町二ノ四

終