始

トドハンツ微分學

理學士
松岡隆光述

24. 5. 20

年　月　日

260

閲覧済

11.15

413.3
MA82

カレッジ

微分學

理學士
松室隆光著

廣文館

國立圖書館
昭 24.3.29 和
購入

序

本書は次で發行せられる積分學の前編をなすものにして，始めて微分學を學習せんとする學生に對して，適當なる入門書たらしむると同時に，進んで純粹數學を研究せんとする學生に對して，微分學の更に高等なる部分に入るの豫備たらしめんことを欲するものである．

本書の内容は十編よりなる．而して其の最も全力を注ぎたるは，第一編に於ける函數の連續並に極限値，第二編に於ける微分法，第六編に於ける函數の展開，第七編に於ける偏導函數，第八編に於ける微分變數の變換，並に終編に於ける曲線の追跡である．蓋し是等の各編は微分學を始めて學習する者の最も理解に苦しむ所にして，且活用の範圍廣く，從つて其の完全なる把握は爾後の研究をして比較的容易ならしめるからである．

例題問題は難解なるものは極力之を避け，大部分は各章の定理又は定義の平易なる應用に過ぎず．而して各問題には其の終りに略解を附したるを以て，獨學者と雖も本書の征服は極めて容易であると信ずる．

昭和二十四年二月廿日　　松室隆光識す

カレッジ微分學

目次

第一編 函數及ビ函數ノ連續

第二編 微分法

第三編　導函數ノ應用

第四編　高次導函數及ビ其ノ應用

第五編　無限級數

第六編　函數ノ展開

第七編　偏導函數

第八編　微分變數ノ變換

第九編　平面曲線ノ研究

第十編　極座標ニ於ケル曲線ノ研究

カレッジ微分學

第一編　函數及ビ函數ノ連續

第一章　總　　論

微分學ノ目的　落下スル物體ハ絶エズ其ノ速度ヲ增加シ，又回轉スル獨樂ハ絶エズ其ノ廻轉ノ速サヲ減少スル．微分學ハ斯ノ様ナ絶エズ變化スル量ノ變化ノ割合ヲ計算シ，併セテ其ノ結果ヲ色々ナ方面ニ應用スルコトヲ研究スル學問デアル．而シテ虚數ニハ大小ガ論ゼラレナイカラ，從ツテ其ノ增減ヲ考ヘルコトハ出來ナイ．故ニ普通微分學ニ於テ取扱ハレル數ハ實數ニ限ルノデアル．

變數ト常數　變化スル數値ヲ代表シ得ル文字ヲ**變數**ト云フ．而シテ變數ガ代表スル數ノ各々ヲ，此ノ**變數ノ取ル値**又ハ此ノ**變數ノ値**ト云フ．變數ニ對シテ常ニ一定ノ數ヲ代表スル文字，又ハ一定ノ數ヲ**常數**ト云フ．例ヘバ

方程式 $y=mx+3$ ニ於テ $x=-1, 0, 1, 2 \cdots\cdots$ 等ト置クトキハ其ニ對シテ y ノ値ハ夫々 $-m+3,\ 3,\ m+3,\ 2m+3$ 等トナル．此ノ際 x ト y トハ變數デ m ノ値ハ一定デアルカラ常數，3 モ勿論常數デアル．而シテ $-1, 0, 1, 2$ 等ハ變數 x ノ取ル値 $-m+3,\ 3,\ m+3,\ 2m+3$ 等ハ變數 y ノ取ル値デアル．

通常變數ヲ表ハスニハあるふあべつとノ終リノ方ニアル文字 x, y, z 等ヲ用ヒ，常數ヲ表ハスニハ a, b, c 等ノ始メノ方ニアル文字ヲ用ヒル．

函數　落體ノ運動ニ於テ初速ヲ v_0，加速度ノ大イサヲ g トスルトキ運動時間 t ト，之ニ對スル經過距離 s トノ間ニハ次ノ關係式ガアル．

$$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此式ニ於テハ v_0, g ハ常數デ t, s ハ變數デアル．而シテ等シク變數デハアル

ガ, s ノ値ハ t ノ値ガ變ルニツレテ變リ, t ノ値ガ定レバ從ツテ定ル. コノ s ト t トノ如ク二ツノ變數ノ間ニ何等カノ關係ガアツテ, 其ノ中ノ一ツノ變數ノ値ガ定ルトキ, 之ニ對シテ他ノ一ツノ變數ノ値モ亦定ルトキ, 前ノ變數ヲ**獨立變數**又ハ**自變數**ト云ヒ, 後ノ變數ヲ**從屬變數**又ハ**被變數**ト云フ. 通常獨立變數ノコトヲ單ニ**變數**ト云ヒ, 從屬變數ノコトヲ其ノ變數ノ**函數**. 此等二ツノ間ニ存スル關係ヲ兩者ノ**函數關係**ト云フ. 從ツテ上記(1)ノ式ハ落體運動ニ於ケル運動時間 t ト, 經過距離 s トノ函數關係ニシテ, t ハ獨立變數 s ハ從屬變數デアル.

函數關係ハ一ツノ變數ノ値ガ定ルトキ, ソレニ應ジテ他ノ變數ノ値ガ定ルコトヲ指スノデアツテ, 其ノ關係ガ一ツノ式デ表ハサレルト否トニ關シナイ. 從ツテ或日ノ時間ノ經過ト溫度ノ變化トハ一ツノ式デ表ハサレナイガ, 矢張リ溫度ハ時刻ノ函數デアルト云フ.

一ツノ函數關係ニ於テ自變數 x ノ取リ得ル値ガ制限サレルコトガアル. 斯樣ナ場合ニ於テハ, 其ノ制限内ノ x ニ對シテ從屬變數 y ハ x ノ函數デアルト云フ. 而シテ其ノ制限下ニ取リ得ル x ノ値ノ全體ヲ變數 x ノ**變域**ト云フ. 變數 x ノ變域ハ其ニヨツテ y ノ取リ得ル値ノ範圍ガ定ルカラ, y ニツイテハ其ノ**定義域**ト云フ. 卽チ x ノ變域ト其ノ函數 y ノ定義域トハ同一ノモノデアル. 例ヘバ

$y=\sqrt{1-x^2}$ ニ於テハ $-1\leqq x\leqq 1$ ナル x ノ値ニ對シテノミ y ハ實數値ヲ取ルコトガ出來ルカラ, 其ノ制限下ノ x ニ對シテ y ハ x ノ函數デアル. 而シテ -1 及ビ 1 並ニ -1 ト 1 トノ間ニアル數ノ全體ガ變數 x ノ變域デアリ, 又ハ函數 y ノ定義域デアル.

$y=\sqrt{1-x^2}$ ナル函數關係ニ於テハ, x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ハ唯一ツ定ル. 然ルニ $x^2+y^2=1$ ナル函數關係ヲ y ニツイテ解イテ, x ヲ自變數トスル式ニ書キ直スト $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ トナル. 此ノ式ニ於テハ x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ハ二ツ定ル. 同樣ニシテ自變數ノ一ツノ値ニ對シテ, 從屬變數ガ三ツ, 四ツ……等定ル場合ガアル. 是等ヲ區別スルタメニ變數ノ一ツノ値ニ對シテ, 函數ノ値ガ唯一ツ定ルトキハ其ノ函數ヲ**一値函數**ト云ヒ, 二ツ定ルトキハ**二値函數**以下同樣ニシテ n 個定ルトキハ n 値函數ト云フ. 二値函數以上ヲ總稱シテ**多值函數**ト云フ.

二値函數 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ ヲ研究スルニハ, 之ヲ $y=\sqrt{1-x^2}$ ト $y=-\sqrt{1-x^2}$

トニ分ケテ別々ニ取扱ヒ, 其ノ得タル結果ヲ綜合スル方ガ便利デアル. 同樣ニ n 値函數ハ之ヲ n 個ノ一値函數ト考ヘテ取扱フ. 故ニ今後單ニ函數ト云ヘバ一値函數ヲ意味スルモノト規定スル.

y ガ x ノ函數ナルコトヲ表ハスニ次ノ樣ナ記號ヲ以テスル.

$$y=f(x),\quad y=F(x),\quad y=\varphi(x),\quad y=\phi(x).$$

而シテ $x=a$ ナルトキノ函數 $f(x)$ ノ數値ヲ表ハスニ $f(a)$ ヲ用ヒル. 卽チ $f(a)$ ハ "a ノ函數" ト云フ意味デナク, "$f(x)$ ノ $x=a$ ヲ代入シタルモノ" ト云フ意デアル. 例ヘバ

$y=2x^2-x+1$ ノコトヲ $y=f(x)$ デ表ハスト

$$\cancel{f(0)=2\times0^2-0+1=1},\qquad f(1)=2\times1^2-1+1=2,$$
$$\cancel{f(-1)=2\times(-1)^2-(-1)+1=4},\qquad f(3)=2\times3^2-3+1=16$$

~~トナル.~~

函數ノ定義ニ於テハ, 變數ノ値ガ定ルトキ, 之ニ對シテ函數ノ値ノ定マルコトヲ必要トスルノミデ, 變數ノ値ガ變動スルトキ函數ノ値ハ必ズシモ其ノ都度之ニ伴ヒテ變動スルコトヲ要シナイ. 從ツテ函數ノ特別ノ場合トシテ常數モ含マレルノデアル. コノコトハ又次ノ如ク式デモ說明スルコトガ出來ル. 例ヘバ

k ヲ常數トシ $y=k$ トオクト

$$y=k+0\times x$$

ト書キ直スコトガ出來ル. コノ式ニ $x=1, 2, 3$ 等ヲ代入スルト, 其ニ應ジテ y ノ値ハ定リ, 常ニ k デアル. 卽チ此ノ場合モ亦 x ノ函數ト見做スコトガ出來ルノデアル.

逆函數　$y=f(x)=2x+3$ ナル x ノ函數ヲ書キ換ヘテ, $x=\frac{1}{2}(y-3)=F(y)$ トスルトキハ, x ハ又 y ノ函數ト見做スコトガ出來ル. 此ノ際 $y=f(x)$ ト $x=F(y)$ トハ x, y ニツイテ全ク同一關係式デアル. 今 x ヲ自變數, y ヲ從屬變數ト書ク習慣ニ從ツテ $x=F(y)$ ヲ書キ直セバ $y=F(x)$ トナル. $y=f(x)$ ト $x=F(y)$ トハ x, y ニツイテ同一關係式デアルガ $y=f(x)$ ト $y=F(x)$ トハ同一關係式デハナイ. 此等ノコトヲ區別スルタメニ特ニ $y=f(x)$ ト $y=F(x)$ トヲ互ニ**逆ナル函數**ト云フ. 從ツテ上ノ例デハ

$y=2x+3$ ト $x=\frac{1}{2}(y-3)$ トハ x, y ニツイテ同一ノ關係式デアルガ, 此ノ後ノ式ニ於テ x, y ヲ入レ換ヘタ $y=\frac{1}{2}(x-3)$ ハ $y=2x+3$ ノ逆函數デアル.

又 $y=x^2$ ヲ書キ換ヘタ $x=\pm\sqrt{y}$ =於テ x, y ヲ入レ換ヘテ得ル $y=\pm\sqrt{x}$ ハ $y=x^2$ ノ逆函數デアル.

$y=f(x)$ ノ逆函數ヲ求メルニハ之ヲ x =ツイテ解イテ $x=\mathrm{F}(y)$ トシ, 此ノ關係式=於テ x ト y トヲ入レ換ヘテ $y=\mathrm{F}(x)$ トシテ得ラレルガ, 一般= $y=f(x)$ ヲ x =ツイテ解クコトハ不可能デアル. 斯樣ナ場合=其ノ逆函數ヲ表ハス=ハ新=記號ヲ設ケル. $y=\sin x$ ハ x =ツイテ解クコトガ出來ナイカラ, 其ノ逆函數ヲ $y=\sin^{-1}x$ デ表ハシ, $y=a^x$ ノ逆函數ヲ $y=\log_a x$ デ表ハスノハ是ガタメデアル.

練習問題 1.

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+2x+5$ ナルトキ $f(2+h)$ ト $f(2)$ トヲ求メ, 且其ノ差 $f(2+h)-f(2)$ ヲ計算セヨ.

(2) $f(x)=\tan x$, $\mathrm{F}(x)=2x+3$ ナルトキ $f\{\mathrm{F}(x)\}$ 及ビ $\mathrm{F}\{f(x)\}$ ヲ求メヨ.

(3) $y=f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-2}$ ナルトキハ $x=f(y)$, $x=f\{f(x)\}$ ナルコトヲ示セ.

(4) 函數 $f(x)$ ノ逆函數ヲ $f^{-1}(x)$ ナル記號=テ表ハストキ

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

ナラバ, $f^{-1}(x)$ ハ如何ナル形=テ表ハサレルカ.

(5) 或函數ト其ノ逆函數トガ同一ナル例ヲ三ツ擧ゲヨ.

【解　　答】

(1) $f(2+h)=2(2+h)^3-3(2+h)^2+2(2+h)+5=13+14h+9h^2+2h^3$.

$f(2)=2\cdot2^3-3\cdot2^2+2\cdot2+5=13$. $\quad\therefore\ f(2+h)-f(2)=14h+9h^2+2h^3$.

(2) $f\{\mathrm{F}(x)\}=f(2x+3)=\tan(2x+3)$, $\quad\mathrm{F}\{f(x)\}=\mathrm{F}(\tan x)=2\tan x+3$.

(3) $y=\dfrac{2x-1}{3x-2}$ カラ $3xy-2y=2x-1$. $\quad\therefore\ x=\dfrac{2y-1}{3y-2}=f(y)$.

$$f\{f(x)\}=\frac{2\dfrac{2x-1}{3x-2}-1}{3\dfrac{2x-1}{3x-2}-2}=\frac{\dfrac{x}{3x-2}}{\dfrac{1}{3x-2}}=x. \qquad \therefore\ x=f\{f(x)\}.$$

(4) $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. $\quad\therefore\ (cx+d)y=ax+b$. $\ x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$.

x, y ヲ入レ換ヘテ逆函數ハ

$$y=\frac{b-dx}{cx-a}. \qquad \therefore\ f^{-1}(x)=\frac{b-dx}{cx-a}.$$

(5) (i) $y=\dfrac{1}{x}$ =於テ x, y ヲ入レ換ヘルト $x=\dfrac{1}{y}$. 之ヲ書キ換ヘルト $y=\dfrac{1}{x}$ トナル. 同樣=

(ii) $x^2+y^2=a^2$, (iii) $x^2+y^2+xy=a^2$

ハ x, y ヲ入レ換ヘテモ同一トナルカラ何レモ其ノ逆函數ト同一デアル.

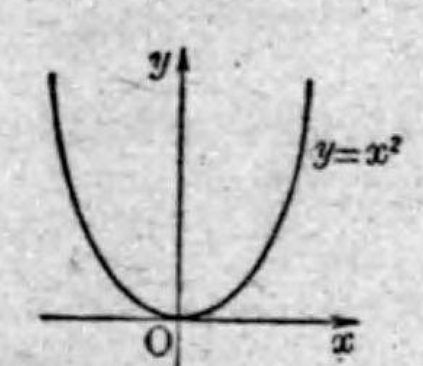
第二章 函數ノぐらふ

函數ノぐらふ $y=f(x)$ ナル函數關係=於テ, 自變數 x ノ變化=伴フ從屬變數ノ變化ノ狀態ヲ一目瞭然タラシメルコトハ色々ナ研究=於テ重要ナル役目ヲナスコトガアル. 之ガタメ=一ツノ直交軸ヲ取ツテ方程式

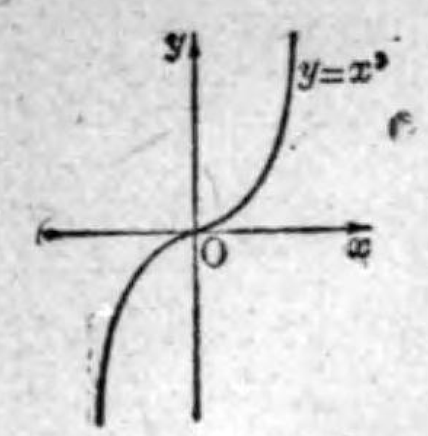
$$y=f(x)$$

ノ表ハス曲線ヲ畫ク. 然ルトキハ此ノ曲線ヲ見レバ函數 $y=f(x)$ ノ變化ノ狀態ハ一目瞭然トナル. 此ノ曲線ヲ函數 $y=f(x)$ ノ**ぐらふ**ト云フ. 勿論 $y=f(x)$ ノ形=依ツテハ曲線ヲ表ハサナイコトモアルガ, 左樣ナ函數ハコヽ=取扱ハナイコトヽスル.

偶函數奇函數ト其ノぐらふ $y=f(x)=3x^2+8x^4-7x^{-6}$ ノ如ク函數 $f(x)$ ガ, x ノ偶數冪ノ代數和カラノミナルトキ, 又ハ此ノ樣ナ形=書キ換ヘラレルトキハ, 其ノ x ノ代リ= $-x$ ヲ以テ書キ換ヘテモ, $f(x)$ ナルモトノ函數トナル. 即チ $f(x)=f(-x)$ デアル. 斯樣ナ場合=ハ其ノぐらふハ y 軸=關シテ對稱トナル. 此ノ種ノ函數ヲ**偶函數**デアルト云フ. $y=5x^4-6x^2+3$, $y=3x^2-\mathrm{A}$ ノ如キハ何レモ偶函數デアル. 但シコノ際常數 3, A ハ $3x^0$, $\mathrm{A}x^0$ ト考ヘ 0 ハ偶數ノ中=入レルノデアル. 又 $y=\cos x$ =於テ x ノ代リ= $-x$ ヲ以テ置キ換ヘルト $f(x)=\cos(-x)=\cos x$ デアルカラ $f(x)=f(-x)$ トナル. 故= $y=\cos x$ モ亦偶函數デアル. 從ツテ $\cos x$ ハ之ヲ x ノ偶數冪ノ代數和カラノミナル形=書キ換ヘルコトガ出來ル. 其=ツイテハ後=述ベル. 上圖ハ偶函數 $y=x^2$ ノぐらふデアル.



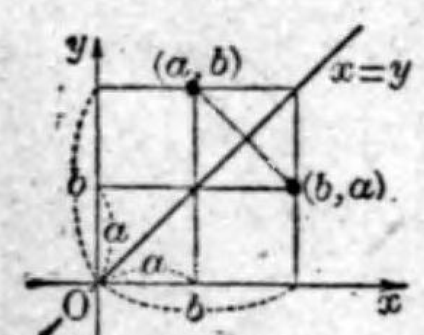
次ニ $y=3x-3x^3+6x^{-5}$ ノ如ク函數 $y=f(x)$ ガ奇數羃ノ代數和カラノミナルトキ, 又ハ此ノ樣ナ形ニ書キ換ヘラレルトキハ, 其ノ x ノ代リニ $-x$ ヲ以テ書キ換ヘルト元ノ函數ノ符號ヲ變ヘタモノヲ得ル. 即チ $f(-x)=-f(x)=-y$ デアル. 斯樣ナ場合ニハ其ノぐらふハ原點ニ關シテ點對稱トナル. 何トナレバ點 (x, y) ト $(-x, -y)$ トハ原點ニ關シテ對稱デアルカラデアル. 此ノ種ノ函數ヲ**奇函數**ト云フ.

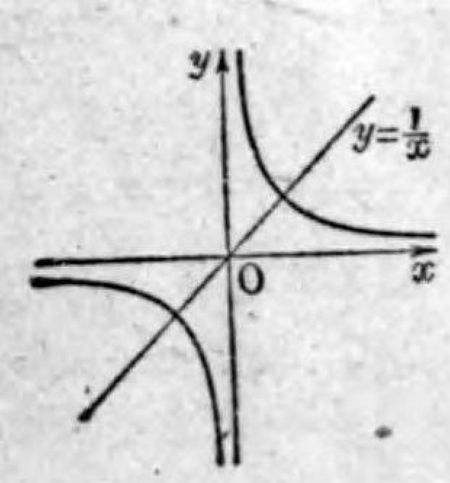


$y=5x^3-x$, $y=2x^3-x^5$ ノ如キハ何レモ奇函數デアル. 又 $y=\sin x$ ニ於テ x ノ代リニ $-x$ ヲ以テスルト $y=\sin(-x)=-\sin x$ トナルカラ $f(x)=-f(-x)$ トナル. 故ニ $y=\sin x$ モ亦奇函數デアル. 從ツテ $y=\sin x$ ハ x ノ奇數羃ノ代數和カラノミナル形ニ書キ換ヘルコトガ出來ル. 其ニツイテハ後ニ述ベル. 上圖ハ奇函數 $y=x^3$ ノぐらふデアル.

或函數ノぐらふガ對稱ナルコトヲ知ルトキハ其ノぐらふヲ畫クニ對稱ナル半分ヲ畫ケバ他ノ部分ハ對稱ナルコトカラ容易ニ畫カレル. 偶函數ヤ奇函數ハ其ノ一例デアル.

直線 $y=x$ ニ關シテ對稱ナルぐらふ　$y=\dfrac{1}{x}$ ナル函數ハ x ト y トヲ入レ換ヘルト $x=\dfrac{1}{y}$ トナリ, 之ヲ書キ換ヘルト $y=\dfrac{1}{x}$ トナリ, 元ノ函數トナル. 即チ $y=\dfrac{1}{x}$ ハ原函數ト其ノ逆函數トガ同一ナル函數デアル. 斯樣ナ函數ノぐらふ上ノ任意ノ點ノ座標ヲ (a, b) デ表ハスト, 上ノコトカラ點 (b, a) モ亦其ノぐらふ上ノ點デナケレバナラナイ. 然ルニ上圖ニ依リ明ナル如ク, 斯樣ナ二點ハ直線 $x=y$ ニ關シテ對稱デアル. 從ツテ $y=\dfrac{1}{x}$ ノぐらふ上ノ總テノ點ハ, 直線 $y=x$ ニ關シテ對稱ナル點ヲ其ノぐらふ自身ノ上ニ有スル. コレハ左圖ノ $y=\dfrac{1}{x}$ ノぐらふヲ見レバ明デアル.





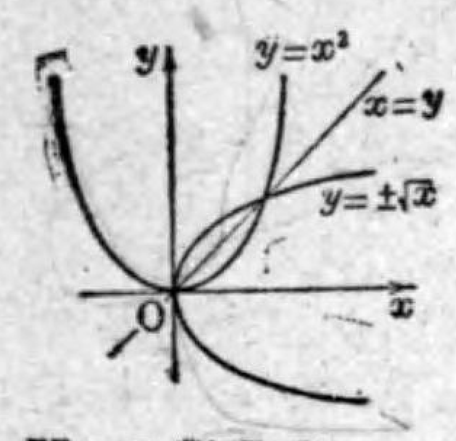
一般ニ獨立變數ト從屬變數トヲ入レ換ヘテモ, 同一ノ式ヲ得ル函數ノぐらふハ直線 $y=x$ ニ關シテ對稱

デアル. 從ツテ $x+y=5$, $x^2+y^2=a^2$, $x^3+y^3=a^3$ 等ノぐらふハ皆第一象限ヲ二等分スル直線 $x=y$ ニ關シテ對稱デアル.

次ニ二ツノ函數

$$y=f(x),\quad y=\mathrm{F}(x)$$

ガ互ニ逆ナル函數ナル場合ニハ, $y=\mathrm{F}(x)$ ハ $y=f(x)$ ノ x, y ヲ入レ換ヘテ得ラレルカラ, 點 (a, b) ガ $y=f(x)$ ヲ滿足スルナラバ, 點 (b, a) ハ $y=\mathrm{F}(x)$ ヲ滿足シナケレバナラヌ. 換言スルト點 (a, b) ガ $y=f(x)$ ノぐらふ上ニアルナラバ, 點 (b, a) ハ $y=\mathrm{F}(x)$ ノぐらふ上ニ必ズ存在スル. 而シテ上ニ述ベタ如ク點 (a, b) ト點 (b, a) トハ直線 $y=x$ ニ關シテ對稱デアルカラ, 互ニ逆ナル二ツノ函數ノぐらふモ亦直線 $y=x$ ニ關シテ對稱デアル. 例ヘバ上圖ノ如ク $y=x^2$ ト $y=\pm\sqrt{x}$ ノぐらふは直線 $x=y$ ニ關シテ對稱デアル. 又 $y=\sin x$ ト $y=\sin^{-1}x$, $y=a^x$ ト $y=\log_a x$ ノぐらふハ何レモ $y=x$ ナル直線ニ關シテ對稱トナル.



練 習 問 題 2.

(1) 次ノ函數カラ偶函數奇函數ヲ擧ゲヨ.

(i) $y=\dfrac{x^6}{x^2-x^4}$.　(ii) $y=\dfrac{x}{x^3+x^5}$.　(iii) $y=\dfrac{1}{x^3-x}$.

(2) 函數 $f(x)$ ガ $f(x)=f(a-x)$ ナル關係ヲ滿足スルトキハ, $f(x)$ ノぐらふハ直線 $x=\dfrac{a}{2}$ ニ關シテ對稱ナルコトヲ證明セヨ.

(3) 函數 $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ ノぐらふガ, 點 $(a, 0)$ ニ關シテ互ニ對稱ナル條件ヲ求メヨ. 之ニ依ツテ $f(x)$ ガ $f(x)=-f(2a-x)$ ヲ滿足スルトキハ, $f(x)$ ノぐらふハ點 $(a, 0)$ ニ關シテ對稱ナルコトヲ證明セヨ.

(4) 直線 $x+y=0$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ ニ對稱ナル曲線ノ方程式ヲ求メヨ.

(5) 直線 $x=y+1$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ ニ對稱ナル曲線ノ方程式ヲ求メヨ.

【解　答】

(1) (i) 偶函數,　(ii) 偶函數,　(iii) 奇函數.

(2) $y=f(x)$ ノぐらふ上ノ任意ノ一點ヲ $\mathrm{P}_1\left(\dfrac{a}{2}+b, y_1\right)$ トスルト直線 $x=\dfrac{a}{2}$ ニ關ス

ル P_1 點ノ對稱點 P_2 ノ座標ハ $\left(\frac{a}{2}-b, y_1\right)$ デアル．而シテ $y_1=f\left(\frac{a}{2}+b\right)$．然ルニ $f(x)=f(a-x)$ ナル故 兩邊ノ $x=\frac{a}{2}+b$ ヲ代入スルト

$$f\left(\frac{a}{2}+b\right)=f\left(a-\frac{a}{2}-b\right)=f\left(\frac{a}{2}-b\right).\quad \therefore\ f\left(\frac{a}{2}-b\right)=y_1.$$

即チ P_2 點ノ座標モ亦 $y=f(x)$ ヲ滿足スル．從ツテ P_2 點モ其ノぐらふ上ニアル．故ニ此ノぐらふハ直線 $x=\frac{a}{2}$ ニ關シテ對稱デアル．

(3) 二點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ヲ點 $(a, 0)$ ニ關シテ對稱ナル點トスルト $x_1+x_2=2a$, $y_1=-y_2$ デアル．$y=f(x)$ ト $y=F(x)$ ノぐらふガ點 $(a, 0)$ ニ關シテ對稱ニシテ，且點 $P_1(x_1, y_1)$ ガ $y=f(x)$ ノぐらふ上ニアルナラバ $P_2(x_2, y_2)$ ハ必ズ $y=F(x)$ ノぐらふ上ニアル．故ニ

$$y_1=f(x_1)\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad y_2=F(x_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1) ニ $x_1=2a-x_2$, $y_1=-y_2$ ヲ代入シテ $-y_2=f(2a-x_2)$．從ツテ (2) ヨリ $F(x_2)=-f(2a-x_2)$．此ノ關係ハ x_2 ノ如何ニ拘ハラズ成立スルカラ x_2 ヲ x ニ置キ換ヘテ

$$F(x)=-f(2a-x).$$

是求メル條件デアル．

$f(x)$ ガ $F(x)$ ト同一ナルトキハ $f(x)$ 自身對稱トナル故ニ $f(x)=-f(2a-x)$ ノトキハ $f(x)$ ノぐらふハ點 $(a, 0)$ ニ關シテ對稱デアル．

(4) 直線 $x+y=0$ ニ關シテ點 $P_1(x_1, y_1)$ ノ對稱點 P_2 ノ座標ヲ (x_2, y_2) トスルト $x_1=-y_2$, $y_1=-x_2$ ナル關係ガアル．點 $P_1(x_1, y_1)$ ガ $y=f(x)$ ノぐらふ上ニアルトキハ $y_1=f(x_1)$．之ニ上ノ關係式ヲ代入スルト $-x_2=f(-y_2)$，即チ $x_2=-f(-y_2)$．之ハ $y=f(x)$ ノぐらふ上ノ任意ノ點ノ直線 $x+y=0$ ニ關シテ對稱ナル總テノ點デ滿足セラレルコトヲ示ス．今 x_2, y_2 ノ代リニ x, y デ置キ換ヘルト

$$x=-f(-y)$$

トナル．是求メル方程式デアル．

(5) 直線 $x=y+1$ ニ關シ對稱ナル二點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トスル．直線 PQ ト $x=y+1$ トノ交點ヲ (X, Y) トスルト

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\quad Y=\frac{y_1+y_2}{2}.\ \text{又}\ y_1-y_2=x_2-x_1.\quad \therefore\ y_1+x_1=y_2+x_2\cdots\cdots(1)$$

(X, Y) ハ $x=y+1$ 上ニアル故 $X=Y+1$．　$\therefore\ x_1+x_2=y_1+y_2+2\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)−(2) ヨリ $y_1=x_2-1$．(1)+(2) ヨリ $x_1=y_2+1$．x_1, y_1 ヲ $y=f(x)$ ニ代入スルト $x_2-1=f(y_2+1)$ トナル．是ハ直線 $x=y+1$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 (x_1, y_1) ノ對稱ナル點 (x_2, y_2) ハ曲線 $x-1=f(y+1)$ 上ニアルコトヲ示ス．故ニ直線 $x=y+1$ ニ關シテ曲線 $y=f(x)$ ニ對稱ナル曲線ノ方程式ハ $x=1+f(y+1)$ デアル．

第三章　極限値及ビ其ノ證明

極限値　變數 x ガ一定數 a ニ限リナク接近スルコトヲ表ハスニ

$$x\to a$$

ナル記號ヲ以テシ，之ヲ "x 近迫 a" ト讀ム．而シテ此ノ a ヲ變數 x ノ極限値ト云フ．時トシテハ x ハ a ナル値ニ收斂スルトモ云フ．コヽニ x ガ a ニ限リナク接近スルト云フコトハ，必ズシモ $x=a$ トナルコトデハナイ．タヾ x ガ何程ニテモ a ニ近イ數値ヲトルコトガ出來ルコトデアル．之ヲ式デ表ハスト如何程小サイ正數 ε ヲトツテモ，x ヲシテ

$$(x-a)<\varepsilon,\quad (a-x)<\varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ルコトデアル．上ノ二ツノ式ハ一纒ニシテ通常次ノ如ク書ク．

$$|x-a|<\varepsilon.$$

次ニ $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ナル函數ニ於テ $x=1$ ナルトキノ數値ヲ求メルタメニ，x ノ値ヲ代入スルト $f(x)=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ トナル．而シテ零ノ割算ハ考ヘラレナイカラ，此ノ際ノ $f(x)$ ノ値ハ存在シナイ．然レドモ $x\neq 1$ ニ於テハ，x ノ値ニ對シテ $f(x)$ ノ値ハ常ニ存在スルカラ，今 x ニ漸次 1 ニ接近スル數例ヘバ

$$1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ 1.0001,\ 1.00001$$

ヲ與ヘテ，$f(x)$ ノ値ヲ計算シテ行クト，何程ニテモ 2 ニ接近スルコトハ次ノ表デワカル．

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	……1
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	……2

即チ x ガ限リナク 1 ニ接近スルトキノ $f(x)$ ノ値ハ 2 ニ限リナク接近スル．

是ニ由ツテ見ルト x ヲ 1 ニ限リナク接近セシメタトキノ $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ノ値ハ 2 ニ限リナク接近スルガ，$x=1$ ヲ $f(x)$ ニ代入シタトキニハ，其ノ値ハ存在シナイ．

ソコデ $x\to a$ ナルトキノ $f(x)$ ノ値ト, $x=a$ ナルトキノ $f(x)$ ノ値トガ一致スルト否トヲ問ハズ, 次ノ如ク定義スル.

a, b ヲ二ツノ定ツタ數トシ, $x\to a$ ナルトキ, $f(x)\to b$ ナルトキ, b ヲ "$x\to a$ ナルトキノ $f(x)$ ノ極限値" ト云ヒ, 之ヲ表ハスニ

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト書ク.

從ツテ　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ デアル.

(1) ノ意味ヲ式ヲ用ヒテ更ニ詳シク述ベルト次ノ如クナル.

如何程小ナル正數 ε ヲトツテモ, コレニ對シテ適當ナル正ノ數 δ ガ存在シ

$$0<|x-a|<\delta$$

ナルスベテノ x ノ値ニ對シテ, 常ニ

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

ナルトキハ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=b$ デアルト云フ.

コヽニ適當ナル正ノ數 δ トハ, 如何程ニテモ小ナル正ノ數ト假シテモヨイ. 勿論 ε ニ關係スルモノデアル. 而シテ $0<|x-a|$ ナル條件ハ $x=a$ ノ値ヲ $f(x)$ ニ代入スルコトヲ除クト云フ意味デアツテ, $x\to a$ ト $x=a$ トニ於テ $f(x)$ ノ値ガ一致スルト否トハ問ハナイノデアル.

時トシテハ x ガ a ヨリ大ナル値ヲトリツヽ限リナク a ニ近ヅクトキト, a ヨリ小ナル値ヲトリツヽ限リナク a ニ近ヅクトキトヲ區別スル必要ガアル. コレガタメ

x ガ a ヨリ大ニシテ限リナク a ニ近ヅクトキ, 函數 y ノ取ル値ガ限リナク b ニ近ヅクコト卽チ $y\to b$ ナルコトヲ

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b$$

$x\to a+0$
$x>a$.

ト書イテ表ハス. 同樣ニシテ

x ガ a ヨリ小ニシテ限リナク a ニ近ヅクトキ, 函數 $f(x)$ ノ値ガ限リナク b ニ近ヅクコト, 卽チ $y\to b$ ナルコトヲ

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b$$

$x\to a-0$
$x<a$

ト書イテ表ハス. 但シ簡便上 $x\to 0+0$, $x\to 0-0$ ハ $x\to +0$, $x\to -0$ ト書ク.

無限大　變數 x ガ如何程大ナル正ノ數ヲモ越エテ尙增大スルトキハ, x ハ正ノ無限大トナルト云ヒ, 之ヲ

$$x\to +\infty$$

ナル記號ニテ表ハス. 又 x ガ負ニシテ, 其ノ絕對値ガ正ノ無限大トナルトキハ x ハ負ノ無限大トナルト云ヒ, 之ヲ

$$x\to -\infty$$

ナル記號ニテ表ハス. 但シ正ノ無限大ノ場合ニハ, 之ヲ單ニ ∞ ト書ク習慣トナツテイル.

變數 x ガ正デアツテ, 限リナク大トナルトキ, 函數 $y=f(x)$ ノ値ガ限リナク b ニ近ヅクトキハ, 卽チ $y\to b$ ナルトキハ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

ト書イテ表ハス.

又 x ガ負ニシテ其ノ絕對値ガ限リナク增大スルトキ, $f(x)$ ノ値ガ限リナク b ニ近ヅクトキハ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

ト書イテ表ハス.

更ニ $x\to\infty$ ナルトキ $f(x)\to\infty$ ナルトキハ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

ト書イテ表ハス.

コヽニ ∞ トハ變數ガ如何ナル正ノ數ヲモ越エテ增大スル狀態ヲ云ヒ表ハス記號デ, 別ニ無限大ト云フ一ツノ數ガ存在スルノデハナイ. 故ニ記號 ∞ ハ常數デモ變數デモナイ. 從ツテ

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

ノ b ハ, $x\to a$ ナルトキノ函數 $f(x)$ ノ極限値デアルト云フ言葉ヲ用ヒテヨイガ

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

ノ ∞ ニハ極限値ト云フ言葉ヲ用ヒルコトガ出來ナイ. 卽チ函數 $f(x)$ ニハ極

限値ガナク唯無限大＝ナルト云フコトヲ示スノデアル.

無限小 獨立變數タルト從屬變數タルトヲ問ハズ，其ノ極限値ガ零ナルトキハ，其ノ變數ハ無限小トナルト云フ. 例ヘバ

$$x \to 0$$

ナルトキハ，變數 x ハ無限小トナルト云ヒ，又

$$\lim_{x \to a} f(x) \to 0$$

ナルトキハ，函數 $f(x)$ ハ $x \to a$ ナルトキ無限小トナルト云フ. 即チ無限小＝ナルト云フコトヽ，變數ガ限リナク零＝近迫スルト云フコトヽハ同一デアル. 而シテ無限小ナル變數ノコトヲ略シテ，單＝無限小ト云フノデアル.

[注意] 以上ノ結果 $x \to a$ ナルトキ，$f(x)$ ＝ハ次ノ四ツノ場合ガ起ル.

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$. (ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. (iv) $\lim_{x \to a} f(x)$ ハ (i), (ii), (iii) ノ何レ＝モ屬シナイ. コノコトヲ區別スルタメ＝

(i) ノ場合＝ハ $f(x)$ ノ極限値ハ有限確定

(ii) ノ場合＝ハ $f(x)$ ノ極限ハ無限確定

(iii) ノ場合＝ハ $f(x)$ ノ極限値ハ零又ハ $f(x)$ ハ無限小

(iv) ノ場合＝ハ $f(x)$ ノ極限ハ不定

デアルト云フ. 即チ無限確定トハ云フガ無限確定値トハ云ハナイ.

函數ノ極限値ノ證明 函數 $f(x)$ ノ極限値ガ b ナルコト即チ

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

ヲ證明スル＝ハ，其ノ定義ノ數學的意義即チ

如何程小ナル正數 ε ヲトツテモ，コレ＝對シテ適當ナル正ノ數 δ ガ存在シ

$$0 < |x - a| < \delta$$

ナルスベテノ x ノ値＝對シテ常＝

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル.

コノコトヲ云ハナクテハナラナイ. コヽ＝ δ ハ勿論 ε ＝關係スルモノ＝シテ一般＝ ε ガ小ナル＝ツレテ δ モ亦小トナル.

例題 1. $\lim_{x \to 1}(3x+2) = 5$ ナルコトヲ證明セヨ.

[證明] ε ヲ任意ノ正ノ小ナル數トシ

$$|(3x+2)-5| < \varepsilon$$

ナラシメルタメ＝ハ

$$|3x-3| < \varepsilon,\ \text{即チ}\ |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ナラシメレバヨイ. 故＝

$$0 < |x-1| < \delta$$

＝於ケル δ ヲ $\quad \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ トスレバ確＝

$$0 < |x-1| < \delta$$

ナルスベテノ x ＝ツイテ

$$|3x+2-5| < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル. 故＝ $\lim_{x \to 1}(3x+2) = 5$.

次＝

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

ヲ證明スル＝ハ

如何程小ナル正數 ε ヲトツテモコレ＝對シテ適當ナル正ノ大數 G ガ存在シ

$$G < x$$

ナルスベテノ x ノ値＝對シテ常＝

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル.

コノコトヲ云ハナクテハナラナイ. コヽ＝於ケル G ハ實際ノ證明＝際シテハ $G = \frac{1}{\varepsilon}$ 又ハ $\frac{1}{2\varepsilon}$ 等ヲ用ヒルコトガ往々アル.

例題 2. $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ

[證明] ε ヲ任意ノ小ナル正數トシ

$$\left|\frac{x+1}{2x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

ナラシメルタメ＝ハ

$$\left|\frac{x+1-x}{2x}\right| < \varepsilon. \quad \therefore \frac{1}{2|x|} < \varepsilon.$$

即チ $|x| > \frac{1}{2\varepsilon}$ ナラシメレバヨイ. 故＝

$$x > G \text{ ノ G ヲ} \quad G = \frac{1}{2\varepsilon}$$

トスレバ確＝ $\quad x > G$

ナルスベテノ x ＝ツイテ

$$\left|\frac{x+1}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル．故ニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

以上ノ證明ハ極限値ノ定義ニヨル正式ノ證明デアルガ，一々 ε, δ ヲ定メルコトハ困難ナル場合ガ多イカラ，次ニ述ベル極限値ニ關スル諸定理ヲ用ヒテ，簡單ニ證明スル．時トシテハ常識的ニ斷定シ得ル場合モアル．

極限値ニ關スル定理　無限大無限小ニ關スル定義カラ次ノ諸定理ハ容易ニ理解セラレル．

(I)　a ガ有限確定値ナルトキ

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a}{x}\right|=0.$$

(II)　a ガ有限確定値ナルトキ

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x}{a}\right|=\infty.$$

(III)　a ガ零デナイ有限確定値ナルトキ

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{x}{a}\right|=0.$$

(IV)　a ガ零デナイ有限確定値ナルトキ

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{a}{x}\right|=\infty.$$

(V)　二ツノ無限小ノ和ハ又一ツノ無限小デアル．

[證明]　$\delta_1\to0,\ \delta_2\to0$ トスルト任意ノ小ナル正數 ε ニ對シテ常ニ

$$|\delta_1|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |\delta_2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

從ツテ

$$|\delta_1+\delta_2|<\varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル．即チ

$$(\delta_1+\delta_2)\to0.$$

故ニ $\delta_1+\delta_2$ ハ一ツノ無限小デアル．

獨立變數タルト從屬變數タルトヲ問ハズ，變數 y, z ノ極限値ヲ夫々 b, c トス

ル．即チ $y\to b,\ z\to c$ トスルト

$$y-b=\delta_1,\qquad z-c=\delta_2$$

トオクコトガ出來ル．コヽニ δ_1, δ_2 ハ 0 ニ限リナク近迫スル小ナル變數デアル．是ニ由ツテ次ノ定理ヲ證明スルコトガ出來ル．

定理 1.　二ツノ變數ノ和ノ極限値ハ其ノ各々ノ極限値ノ和デアル．

[證明]　極限値ノ定義カラ

$$y=b+\delta_1,\qquad z=c+\delta_1,$$
$$y+z=b+c+\delta_1+\delta_2.$$

此ノ式ノ右邊ノ極限ハ $b+c$ デアル．

$$\lim(y+z)=b+e=\lim y+\lim z.$$
$$\therefore\ \lim(y+z)=\lim y+\lim z.$$

定理 2.　二ツノ變數ノ積ノ極限値ハ其ノ各々ノ極限値ノ積デアル．

[證明]

$$\lim yz=\lim(b+\delta_1)(c+\delta_2)$$
$$=\lim(bc+b\delta_2+c\delta_1+\delta_1\delta_2).$$

此ノ式ノ右邊ノ $b\delta_2, c\delta_1, \delta_1\delta_2$ ノ極限値ハ何レモ零デアル．故ニ

$$\lim yz=bc=\lim y\lim z.$$
$$\therefore\ \lim yz=\lim y\lim z.$$

定理 3.　二ツノ變數ノ商ノ極限値ハ其ノ各々ノ極限値ノ商ニ等シイ．但シ分母ノ極限値ハ零ナラザルモノトス．

[證明]　δ_1, δ_2 ハ限リナク零ニ近迫スル變數デアルトスルト y, z ハ又次ノ如ク表ハサル．

$$y=b-\delta_1,\qquad z=c-\delta_2.$$

$$\therefore\ \lim\frac{z}{y}=\lim\frac{c-\delta_2}{b-\delta_1}=\lim\left\{\frac{c}{b}+\frac{\frac{c}{b}\delta_1-\delta_2}{b-\delta_1}\right\}$$
$$=\frac{c}{b}+\lim\frac{\frac{c}{b}\delta_1-\delta_2}{b-\delta_1}.$$

而シテ $\left(\frac{c}{b}\delta_1-\delta_2\right)$ ハ零ニ限リナク近迫シ，$b-\delta_1$ ハ b ニ近迫スルカラ

$$\lim\frac{z}{y}=\frac{c}{b}=\frac{\lim z}{\lim y}.$$
$$\therefore\ \lim\frac{z}{y}=\frac{\lim z}{\lim y}.$$

例題 1.　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-5}{5x^3-8x+1}$ ヲ求メヨ．

[解] $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-5}{5x^3-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{5-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{0}{5}=0.$$

[注意] 此ノ際直＝ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{5-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=0$ トシテヨイ.

例題 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$ ヲ求メヨ.

2x+8

-2(x-2)

2x

[解] $$\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}=\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}{-2(x-2)}$$

$$=\frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}{-2}.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2})}{-2}$$

$$=\frac{4(\sqrt{4}+\sqrt{4})}{-2}=-8.$$

例題 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$ ヲ求メヨ.

[解] $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1\times2}{6}=\frac{1}{3}.$$

?

例題 4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x-1}$ ヲ求メヨ. 但シ m ハ有理數トスル.

[解] m ガ正ノ整數, 正ノ分數, 負ノ整數, 分數ノ場合＝分ケテ求メル.

(i) m ガ正ノ整數ナルトキ

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1)=m.$$

(ii) $m=\dfrac{p}{q}$ ナル正ノ分數ノトキ, 但シ p, q ハ正ノ整數トスル.

$$\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x-1}.$$

今 $x^{\frac{1}{q}}=\mathrm{X}$ トオクト $x^m=\mathrm{X}^p$, $x=\mathrm{X}^q$ ＝シテ $x\to1$ ノトキ $\mathrm{X}\to1$ トナル. 而シテ

$$\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{\mathrm{X}^p-1}{\mathrm{X}^q-1}=\frac{\mathrm{X}^p-1}{\mathrm{X}-1}\cdot\frac{\mathrm{X}-1}{\mathrm{X}^q-1}=\frac{\frac{\mathrm{X}^p-1}{\mathrm{X}-1}}{\frac{\mathrm{X}^q-1}{\mathrm{X}-1}}.$$

故＝ (i) ＝ヨリ

lim

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{\mathrm{X}\to1}\frac{\frac{\mathrm{X}^p-1}{\mathrm{X}-1}}{\frac{\mathrm{X}^q-1}{\mathrm{X}-1}}=\frac{\lim\limits_{\mathrm{X}\to1}\frac{\mathrm{X}^p-1}{\mathrm{X}-1}}{\lim\limits_{\mathrm{X}\to1}\frac{\mathrm{X}^q-1}{\mathrm{X}-1}}=\frac{p}{q}=m.$$

(iii) m ヲ負ノ整數又ハ分數トシ $m=-m'$ トオクト m' ガ正デアルカラ

$$\frac{x^m-1}{x-1}=\frac{x^{-m'}-1}{x-1}=\frac{1-x^{m'}}{x^{m'}(x-1)}=\frac{-1}{x^{m'}}\left(\frac{x^{m'}-1}{x-1}\right).$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\left(-\frac{1}{x^{m'}}\right)\frac{x^{m'}-1}{x-1}\right\}=(-1)\times m'=-m'=m.$$

即チ有理數ナル m ＝對シテ極限値ハ常＝ m デアル.

例題 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{1-\cos x}$ ヲ求メヨ.

[解] $\sin^2x=4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}$.　$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ ナル故,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to0}2\cos^2\frac{x}{2}=2.$$

練 習 問 題 3.

(1) $\lim\limits_{x\to1-0}\sqrt{1-x^2}=0$ ナルコトヲ ε, δ ヲ用ヒテ數學的定義＝從ツテ證明セヨ.

(2) 次ノ極限値ヲ求メヨ.

(i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+x-3}$.　　(ii) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+11x+5}{4x^2-4x-3}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.　　(iv) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)$.

(3) x ガ無限小ナルトキ, 及ビ x ガ無限大ナルトキ (正又ハ負) 有理分數

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}$$

ノ極限値ヲ求メヨ．但シ $a_0, a_1 \ldots\ldots, b_0, b_1 \ldots\ldots$ ハ何レモ零ナラズトス．

(4) $n \to \infty$ ナルトキ，次ノ各式ノ極限値ヲ求メヨ．

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

(5) 直角ノ二邊ガ b, c ナル直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ヲ $n+1$ 等分スル點ヲ $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$ トスルトキ，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(AM_1^2+AM_2^2+\cdots\cdots+AM_n^2)$$

ヲ求メヨ．

[解　　答]

(1) ε ヲ任意ノ小ナル正數トスル．$\sqrt{1-x^2}<\varepsilon$ ナラシメルタメニハ $|1-x^2|<\varepsilon^2$，即チ $|(1-x)(1+x)|<\varepsilon^2$，$|1-x|<\dfrac{\varepsilon^2}{1+x}$ ナレバヨイ．然ルニ $0<x<1$ デアルカラ

$$\frac{\varepsilon^2}{1+x}>\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

從ッテ $0<|1-x|<\dfrac{\varepsilon^2}{2}$ ナレバヨイ．故ニ $\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{2}$ ナル如キ δ ヲトレバ確ニ $0<|1-x|<\delta$ ナルスベテノ x ニツイテ，$\sqrt{1-x^2}<\varepsilon$ ナラシメルコトガ出來ル．即チ

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x^2}=0.$$

(2) (i) コノマヽ $x=1$ ヲ代入スルト分母子トモ零トナルカラ，$x=1+\varepsilon$ トオイテ $\varepsilon\to 0$ ナラシメル．

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{2x^2+x-3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2+4(1+\varepsilon)-5}{2(1+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)-3}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{6\varepsilon+\varepsilon^2}{5\varepsilon+2\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{6+\varepsilon}{5+2\varepsilon}=\frac{6}{5}.$$

(ii) $$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2+11x+5}{4x^2-4x-3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2+11\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)+5}{4\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)-3}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9\varepsilon+2\varepsilon^2}{-8\varepsilon+4\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{9+2\varepsilon}{-8+4\varepsilon}=-\frac{9}{8}.$$

(iii) $$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$$

$$=\frac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)}.$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\frac{1}{2}.$$

(iv) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{(\sqrt{1+x+x^2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

(3) (i) $$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\frac{a_n}{b_m}.$$

(ii) $n=m$ ナルトキ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots\cdots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

(iii) $n>m$ ナルトキ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-m-1}+\cdots\cdots+a_nx^{-m}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots\cdots+b_mx^{-m}}$$

$=\dfrac{a_0}{b_0}(\pm 1)^{n-m}$ ト同符號ノ無限大．

(iv) $n<m$ ナルトキ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0+a_1x^{-1}+\cdots\cdots+a_nx^{-n}}{b_0x^{m-n}+b_1x^{m-n-1}+\cdots+b_mx^{-n}}$$

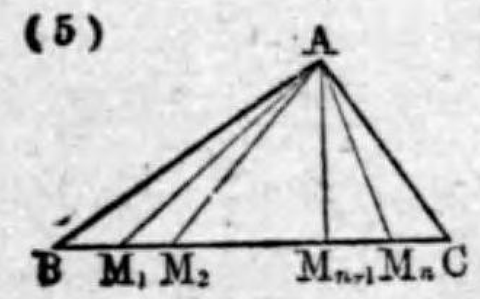
$$=0.$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(5)



$M_1C=\dfrac{n}{n+1}BC$,　$M_2C=\dfrac{n-1}{n+1}BC$,

$\cdots\cdots M_{n-1}C=\dfrac{2}{n+1}BC$,　$M_nC=\dfrac{1}{n+1}BC$,

且 $\cos C=\dfrac{AC}{BC}$.

三角法ノ公式ニ依リ

$$AM_1^2=AC^2+M_1C^2-2AC\cdot M_1C\cos C$$
$$AM_2^2=AC^2+M_2C^2-2AC\cdot M_2C\cos C$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$AM_{n-1}^2=AC^2+M_{n-1}C^2-2AC\cdot M_{n-1}C\cos C$$
$$+)\ AM_n^2=AC^2+M_nC^2-2AC\cdot M_nC\cos C$$

$$S=nAC^2+S_1-2AC\cdot\cos C(M_1C+M_2C+\cdots\cdots+M_{n-1}C+M_nC).$$

コヽニ　$S_1=M_1C^2+\cdots\cdots+M_{n-1}C^2+M_nC^2$

$$=\left\{\left(\frac{n}{n+1}\mathrm{BC}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n+1}\mathrm{BC}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{n+1}\mathrm{BC}\right)^2+\left(\frac{1}{n+1}\mathrm{BC}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{BC}^2}{(n+1)^2}\left\{n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{BC}^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(2n+1)\mathrm{BC}^2}{6(n+1)}.$$

$$\mathrm{S}=\mathrm{AM}_1{}^2+\mathrm{AM}_2{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{AM}^2{}_{n-1}+\mathrm{AM}_n{}^2.$$

又 $\mathrm{M}_1\mathrm{C}+\mathrm{M}_2\mathrm{C}+\cdots+\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{C}+\mathrm{M}_n\mathrm{C}=\frac{n}{n+1}\mathrm{BC}+\frac{n-1}{n+1}\mathrm{BC}+\cdots+\frac{2}{n+1}\mathrm{BC}+\frac{1}{n+1}\mathrm{BC}$

$$=\frac{\mathrm{BC}}{n+1}\left\{n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1\right\}=\frac{\mathrm{BC}}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n\mathrm{BC}}{2}.$$

故＝ $\mathrm{S}=n\mathrm{AC}^2+\frac{n(2n+1)}{6(n+1)}\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AC}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{n\mathrm{BC}}{2}=\frac{n(2n+1)}{6(n+1)}\mathrm{BC}^2.$

從ツテ $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{AM}_1{}^2+\mathrm{AM}_2{}^2+\cdots\cdots+\mathrm{AM}^2{}_{n-1}+\mathrm{AM}_n{}^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{6(n+1)}\mathrm{BC}^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{6\left(1+\frac{1}{n}\right)}\mathrm{BC}^2=\frac{\mathrm{BC}^2}{3}=\frac{b^2+c^2}{3}.$$

又初等幾何學＝依リ

$n\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=n\mathrm{BM}_1{}^2+\mathrm{M}_1\mathrm{C}^2+(n+1)\mathrm{AM}_2{}^2,$

$(n-1)\mathrm{AB}^2+2\mathrm{AC}^2=(n-1)\mathrm{BM}_2{}^2+2\mathrm{M}_2\mathrm{C}^2+(n+1)\mathrm{AM}_2{}^2$

………………………………………………………

$\mathrm{AB}^2+n\mathrm{AC}^2=\mathrm{BM}_n{}^2+n\mathrm{M}_n\mathrm{C}^2+(n+1)\mathrm{AM}_n{}^2$ 等ヲ邊々加ヘテ證明スルコトガ出來ル.

第四章　函數ノ連續ト其ノ應用

函數ノ連續　x ノ函數 $y=f(x)$ ＝於テ $x=a$ ナルトキノ函數ノ値, 即チ $f(a)$ ト $x\to a$ ナルトキノ函數ノ極限値トハ必ズシモ一致シナイ. 而シテ其ノ一致スル場合＝ハ函數 $y=f(x)$ ハ $x=a$ ＝於テ, 或ハ $x=a$ ナル値＝對シテ**連續**デアルト云フ. 即チ $x=a$ ＝於テ函數 $y=f(x)$ ガ連續ナルトキハ

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル.

若シ又 $x=a$ ＝對シテ x ノ函數 $y=f(x)$ ガ (1) ノ條件ヲ滿足シナイトキハ, $x=a$ ＝於テ函數ハ**不連續**＝ナルト云フ. 今 (1) ヲ言葉デ表ハスト次ノ三ツノ條件トナル.

(i)　$f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ有限確定値ヲトル.

(ii)　$\lim_{x\to a}f(x)$ ハ有限確定値ヲトル.

(iii)　$\lim_{x\to a}f(x)$ ト $f(a)$ トハ相等シイ.

此ノ三ツノ何レガ缺ケテモ函數ハ不連續トナルノデアル.

(1) ノ意味ヲ書キ直スト

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)\cdots\cdots\cdots(2),\quad \lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル. 之ヲ ε, δ ヲ用ヒテ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル.

任意ノ小ナル正數 ε ＝對シテ適當＝正數 δ ヲトルト $|x-a|<\delta$ ナルスベテノ x ＝對シテ常＝

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

ナルトキ, $f(x)$ ハ $x=a$ ＝於テ連續デアル. コヽデハ極限値ノ定義ノ場合ト異ナリ $|x-a|>0$ ナル條件ハ必要トシナイノデアル.

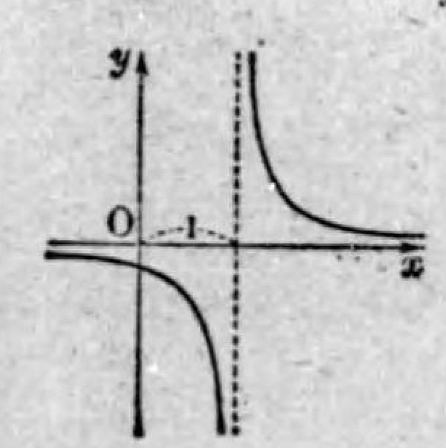
上式ノ (i), (ii), (iii) ト (3) トハ同一ノ事實ヲ表ハスカラ連續ノ定義ハ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル.

函數 $f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續デアルトハ x ガ a ヨリ極メテ少シク變動スルトキ之ニ對スル $f(x)$ ノ變動モ亦極メテ小デアルト云フコトデアル.

x ノ或變域内ノスベテノ値＝ツイテ $f(x)$ ガ連續ナルトキハ $f(x)$ ハ其ノ變域ニ於テ連續デアルト云フ

函數 $y=f(x)$ ガ或變域＝於テ連續ナルトキハ, 其ノぐらふハ其ノ變域内デ一般＝連續セル曲線トナリ, 若シ不連續ナル點＝至ルトキハ切斷, 其ノ他色々ナ異狀ヲ呈スルノデアル. 次ノ例題ハ各種ノ異狀ノ場合デアル.

例題 1. $y=f(x)=\frac{1}{x-1}$ ハ $x=1$ ＝於テ分母ガ零トナルカラ $f(1)$ ハ無意味トナリ確定値ヲ有シナイカラ不連續デアル. 或ハ次ノ如ク云ツテモヨイ.

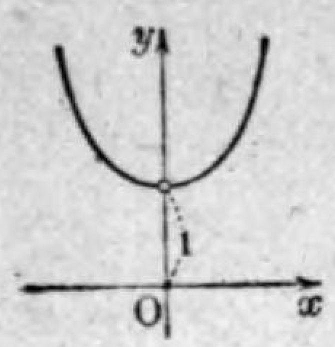


$\lim_{x\to 1-0}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}f(x)=+\infty$ トナリ有限確定値ヲ有シナイカラ不連續デアル. 而シテ其ノぐらふハ左圖ノ如クナル.

〔注意〕　無限大トナル異狀.

例題 2. 無限等比級數＝テ定メラレル函數

$$y=f(x)=x^2+\frac{x^2}{(1+x^2)}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots\cdots$$



ニ於テハ，$x \neq 0$ ナルトキハ公比 $\frac{1}{1+x^2}$ ハ1ヨリ小デアルカラ，其ノ和ノ公式ニヨリ

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$

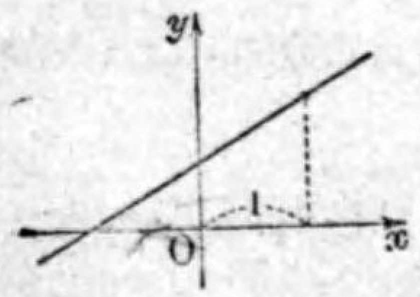
トナルカラ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ トナル．

然ルニ一方ニ於テハ $f(0)=0$ ナルコトハ明デアル．即チ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ト $f(0)$ トハ一致シナイカラ此ノ函數ハ不連續デアル．

此ノ函數ノぐらふハ $x \neq 0$ ナル所デハ $y=1+x^2$ ナル拋物線トナルガ $x=0$ ナルトキハ點ガ曲線上カラトビ出シテ原點ニ孤立スル．故ニ此ノ點 $(0, 0)$ ヲ孤立點ト云ヒ孤立點ニ相當スル原曲線上ノ點ハ存在シナイノデアル．

［注意］ 孤立點ノ異狀デアル．

例題 3. $y=f(x)=\frac{1-x^2}{1-x}$ ハ $x \neq 1$ ナルトキハ $1+x$ ニ等シイカラ常ニ連續デアル．而シテ $x=1$ ナルトキハ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ ニシテ有限確定デアルガ $f(1)$ ハ $\frac{0}{0}$ トナリ其ノ値ハ不定トナル．故ニ $f(x)$ ハ $x=1$ デ有限確定デナイカラ $x=1$ ニ於テハ不連續デアル．



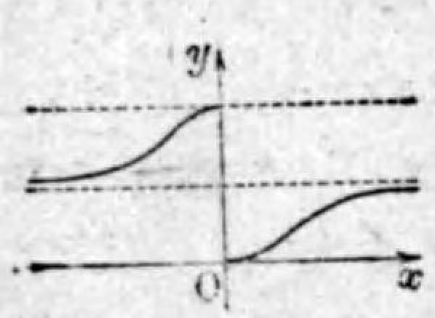
［注意］ 不定ナル異狀デアル．

併シ此ノ際若シ $f(1)$ ノ不定ナル値ヲ2ト定メルコトヽスルト $f(x)$ ハ $x=1$ ニ於テモ連續デアルト云フコトガ出來ル．

138

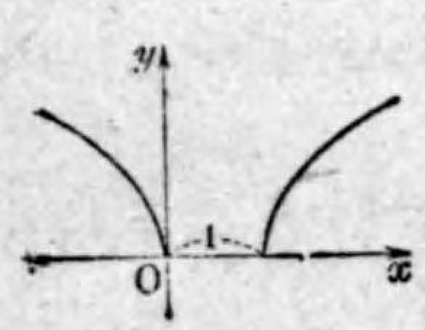
故ニ今後ハ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ不定デアツテモ $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ ガ存在シ，且一致スル場合ニハ此ノ極限値ヲ以テ $x=a$ ナルトキノ函數ノ値ト定メ，此ノ規約ノモトニ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ連續デアルト云フ．前例2ニ於テハ $f(0)=0$ ナル確定値ヲ有スルカラ，强ヒテ $f(0)=1$ トスルコトガ出來ナイノデアル．

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ 　2、$\lim\limits_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}}=0$



例題 4. $y=f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ ニ於テハ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1$ トナル．即チ $x\to 0$ ナルトキノ $f(x)$ ノ極限値ハ x ガ0ヨリ小ナル値ヲトツテ近迫スルトキト，0ヨリ大ナル値ヲトツテ近迫スルトキト異ナル．此ノ場合モ勿論不連續デアル．ぐらふハ左圖ノ如クナル．

［注意］ y 軸ノ切斷ニヨル異狀デアル．



例題 5. $y=f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ ハ $0<x<1$ ナル x ノ値ニ對シテ y ハ虛數トナリ，$f(x)$ ハ存在シナイ．故ニ此ノ函數ハ此ノ變域ニ於テ不連續デアル．其ノぐらふハ左圖ノ如クナル．

［注意］ x 軸ノ切斷ニヨル異狀デアル．

極限値ニ關スル定理ヨリ連續ニ關スル次ノ定理ハ容易ニ證明セラレル．

定理 1. **$x=a$ ニ於テ二ツノ函數 $f(x)$, $F(x)$ ガ共ニ連續ナルトキハ $x=a$ ニ於テ**

(i) $f(x)\pm F(x)$,　(ii) $f(x)F(x)$,　(iii) $\frac{f(x)}{F(x)}$ (但シ $F(x)\neq 0$) ハ何レモ連續デアル．

定理 2. **函數 $y=f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續デアリ，且 $x=a$ ナルトキ $y=b$ ナル値ヲトルモノトシ，次ニ y ノ函數 $z=F(y)$ ハ $y=b$ ニ於テ連續デアルトスルトキ z ハ x ノ函數ト見做スナラバ $x=a$ ニ於テ z モ亦連續デアル．即チ連續函數ノ連續函數ハ又一ツノ連續函數デアル．**

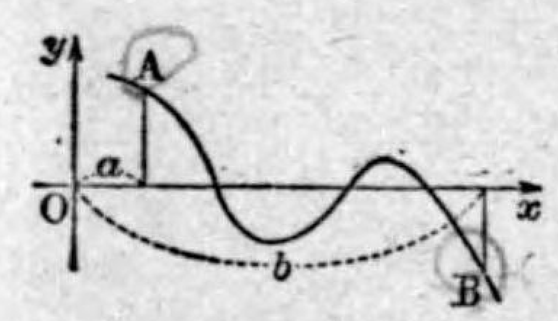
［注意］ 之ヲ合成函數ト云フ．

函數ノ連續ノ應用

函數ノ連續性ハ方程式ノ根ノ研究ニ色々ニ利用セラレル．次ニ述ベル諸定理ハ其ノ主ナルモノデアル．

定理 1. **x ノ或連續ナル變域ニ於テ $f(x)$ ガ連續ニシテ，且其ノ變域ニ屬スル二ツノ値 a, b ニ對シテ $f(a)$ ト $f(b)$ トガ反對ノ符號ヲ有スルトキハ，a ト b トノ間ニ $f(x)=0$ ナル如キ x ノ値ガ少クトモ一ツ存在スル．換言スルト方程式 $f(x)=0$ ハ a ト b トノ間ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有スル．** Rolle's law

［證明］ $f(a)$ ト $f(b)$ トガ異符號ヲ有スルカラ $x=a$ ナルトキノぐらふ上ノ點Aト，$x=b$ ナルトキノぐらふ上ノ點Bトハ x 軸ニ對シテ反對ノ側ニアル．而シテぐらふハAB間ニ於テ連續デアルカラ少クトモ一回 x 軸ト交ハラネバナラナイ．且奇數回交ハル．其ノ交點ノ横座標ノ一ツヲ $x=c$ トスルト $f(c)=0$ デアル．是本定理ノ眞ナルコトヲ表ハス．



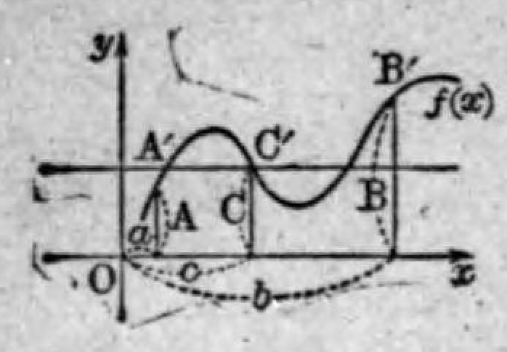
系 1. **方程式 $f(x)=0$ ノ左邊ノ $f(x)$ ニ $x=a$, $x=b$ ヲ代入シテ得タル値ガ，異符號ナルトキハ $f(x)=0$ ハ奇數個ノ實根ヲ有スル．**

系 2. **$a<c<b$ ニシテ $f(a)$, $f(b)$ ハ異符號トス．$f(a)$ ト $f(c)$ トガ異符號ナラバ $f(x)=0$ ノ少クトモ一ツノ實根ハ a, c 間ニアル．又 $f(c)$ ト $f(b)$ トガ異符號ナラバ $f(x)=0$ ノ少クトモ一ツノ實根ガ c, b 間ニ存在スル．**

此ノ方法ヲ繰リ返スコトニ依リ，方程式ノ根ヲ何程ニテモ相接近シタル二數ノ間ニ夾ムコトガ出來ル．之ヲ根ノ分離ト云フ．

定理2. $f(a)=A,\ f(b)=B$ ナルトキ A ト B トノ間ノ任意ノ一數ヲ C トスレバ，a ト b トノ間ニ $f(x)=C$ ナル如キ x ノ値ガ少クトモ一ツ存在スル．換言スレバ $f(x)=C$ ハ $a,\ b$ 間ニ少クトモ一ツノ根ヲ有スル．

［證明］ 函數 $f(x)$ ノぐらふニ於テ $x=a$ ニ對スルぐらふ上ノ點ヲ A'，$x=b$ ニ對スルぐらふ上ノ點ヲ B' トスルト，C ハ A ト B トノ間ノ數ナル故，$y=C$ ナル直線ハ $A'B'$ 間ニテ少クトモ一回ぐらふト交ハラネバナラナイ．其ノ交點 C' ノ横座標ヲ c トスルト $f(c)=C$ トナル．是本定理ノ眞ナルコトヲ表ハス．



練 習 問 題 4.

(1) $y=\sqrt{x}$ ハ $x>0$ ナル全變域ニ於テ連續ナルコトヲ證明セヨ．

(2) $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{1}{x^2}$ ハ何レモ $x=0$ ニ於テ不連續ナルコトヲ證明セヨ．

(3) $f(x)=x+\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{x}{(1+x)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{x}{(1+x)^n}+\cdots\cdots$ ハ $x=0$ ニ於テ不連續ナルコトヲ證明セヨ．

(4) $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ ノ連續性ヲ吟味セヨ．

(5) $y=\dfrac{a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}$ ハ $a>1$ ナルトキ $x=0$ ニ於テ不連續デアル．

(6) $y=\sin\dfrac{1}{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ不連續デアル．

(7) $y=\sin x$，$y=\cos x$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續デアル．

(8) $y=\sin^{-1}x$，$y=\cos^{-1}x$ ハ $|x|<1$ ナル變域ニ於テ連續ナルコトヲ證明セヨ．

(9) 奇數次ノ有理整方程式ハ少クトモ一ツノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ．

(10) $k>0$ ナルトキ方程式 $x-2\sin x=k$ ハ少クトモ正ナル根ヲ一ツ有スルコトヲ證明セヨ．

(11) 方程式 $x-\cos x=0$ ハ 0 ト $\dfrac{\pi}{2}$ トノ間ニ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ．

(12) 方程式 $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ ハ少クトモ 0 ト 1 トノ間ニ一ツノ根ヲ有スルコトヲ證明セヨ．

［解　　答］

(1) $x>0$ ナル變域内ノ任意ノ數ヲ a トスルト

$$\lim_{h\to 0}|\sqrt{a+h}-\sqrt{a}|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\right|$$

$$=\lim_{h\to 0}\left|\frac{h}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\right|=0.$$

即チ $x>0$ ナル任意ノ値ニ於テ $\sqrt{x}$ ハ連續デアルカラ $x>0$ ナル全變域ニ於テ連續デアル．

(2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$．故ニ $x=0$ ニ於テ極限値ハ存在シナイカラ不連續デアル．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ デアルカラ同樣ニ不連續デアル．

［注意］ $x=a$ ニ於テ極限値ガ無限大トナル函數ハ皆 $x=a$ ニ於テ不連續デアル．

(3) $x>0$ ナルトキ公比ノ絶對値 $\left|\dfrac{1}{1+x}\right|<1$ ナル故，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

而シテ $f(0)=0$ ナル故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$．故ニ $x=0$ ニ於テ不連續デアル．

(4) $a\neq 0$ トスルト

$$\lim_{x\to a}f(x)=\frac{e^{\frac{1}{a}}+e^{-\frac{1}{a}}}{e^{\frac{1}{a}}-e^{-\frac{1}{a}}}=f(a)$$

トナルカラ連續デアル．

$a=0$ ニ於テハ

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\left\{1+\frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}\right\}=\lim_{x\to +0}\left\{1+\frac{2}{e^{\frac{2}{x}}-1}\right\}=1.$$

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left\{\frac{2}{1-e^{-\frac{2}{x}}}-1\right\}=-1.$$

即チ $x\to +0$ ト $x\to -0$ トニ於テ函數ノ極限値ガ等シクナイカラ不連續デアル．

(5) $y=\dfrac{a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{x}}+1}$，$a>1$ デアルカラ

$$\lim_{x\to +0}y=1.\qquad \lim_{x\to -0}y=0.$$

即チ $x=0$ ニ於テ函數ノ極限値ガ等シクナイカラ不連續デアル．

(6) ε ヲ如何ニ小ナル正數トシテモ

$$0<\frac{1}{2(n+1)\pi}<\frac{1}{2n\pi}<\varepsilon$$

ナル如キ正ノ整數 n ヲ求メルコトガ出來ル．故ニ δ ヲ ε ニ等シクトリ x ヲ

$$\frac{1}{2(n+1)\pi}\leqq x\leqq\frac{1}{2n\pi}$$

ナル範圍ニ變化セシメルト

$$0<|x-0|<\delta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル式ガ成立ツ．而シテ此ノ場合 $\dfrac{1}{x}$ ハ $2n\pi$ ト $2(n+1)\pi$ トノ間ヲ變化スルカラ $\sin\dfrac{1}{x}$ ハ 1 ト -1 トノ間ニ變動スル．即チ任意ニ定メタル小ナル正數 ε ニ對シテ (1) ヲ滿足スルガ如キ總テノ δ ニ對シテ

$$\left|\sin\frac{1}{x}-b\right|<\varepsilon$$

ナル如キ b ガ存在シナイ．即チ $\displaystyle\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ ガ存在シナイカラ $x=0$ ニ於テ**不連續デアル．**

(7) (i) $\displaystyle\lim_{h\to0}|\sin(x+h)-\sin x|=\lim_{h\to0}\left|2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|.$

然ルニ $\left|\sin\dfrac{h}{2}\right|<\left|\dfrac{h}{2}\right|,\quad\left|\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\right|\leqq1$ ナル故，

$\displaystyle\lim_{h\to0}|\sin(x+h)-\sin x|\leqq\lim_{h\to0}|h|=0.$

コノ關係ハ x ノ總テノ値ニツイテ成立スルカラ $\sin x$ ハ x ノ總テノ値ニツイテ**連續デアル．**

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to0}|\cos(x+h)-\cos x|=\lim_{h\to0}\left|2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|\leqq\lim_{h\to0}|h|=0.$

故ニ $\cos x$ ハ x ノ總テノ値ニツイテ**連續デアル．**

[注意] (i) $y=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ ニシテ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ ハ x ノ總テノ値ニ於テ連續ナルコトヲ云ツテモヨイ．

(ii) $\sin x<x$ ハ 46 頁ヲ見ヨ．

(8) (i) $\sin\{\sin^{-1}(x+h)-\sin^{-1}x\}$

$$=(x+h)\cos(\sin^{-1}x)-\cos(\sin^{-1}\overline{x+h})\cdot x$$

$$=(x+h)\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}-\sqrt{1-\sin^2\sin^{-1}(x+h)}\cdot x$$

$$=(x+h)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+h)^2}\cdot x.$$

$\therefore\ \sin^{-1}(x+h)-\sin^{-1}x=\sin^{-1}\{(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\}.$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{h\to0}\{\sin^{-1}(x+h)-\sin^{-1}x\}=\lim_{h\to0}\left[\sin^{-1}\{(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\}\right]$

$$=\sin^{-1}(x\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-x^2})=\sin^{-1}0=0.$$

故ニ $\sin^{-1}x$ ハ $|x|<1$ ナル變域ニ於テ連續デアル．

(ii) $y=\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ デアル．而シテ $\sin^{-1}x$ ハ $|x|<1$ ナル x ノ變域ニ於テ連續デアルカラ，$\cos^{-1}x$ モ亦 **$|x|<1$ ナル變域ニ於テ連續デアル．**

(9) 奇數次ノ有理整方程式ハ次ノ形ヲトル．但シ n ハ奇數

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_n=0.$$

$x\neq0$ デアルカラ $f(x)=a_0x^n\left(1+\dfrac{a_1}{a_0}\cdot\dfrac{1}{x}+\cdots\cdots+\dfrac{a_n}{a_0}\dfrac{1}{x^n}\right).$

$x\to\infty$ ナルトキ $\dfrac{1}{x}\to0,\ \dfrac{1}{x^2}\to0\cdots\cdots$ デアルカラ

非常ニ大ナル x ニ對シテ $f(x)\fallingdotseq a_0x^n$ トナル．故ニ x ガ正ナルトキト，負ナルトキトハ $f(x)=a_0x^n$ ハ其ノ符號ヲ異ニスル．且 $f(x)$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續デアルカラ**少クトモ一ツノ實根ヲ有スル．**

(10) $f(x)=x-2\sin x-k$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續デアル．而シテ

$x_1>k+2$ ナル x_1 ヲトレバ．

$f(x_1)=x_1-2\sin x_1-k>k+2-2\times1-k>0.\quad$ 又 $f(0)=-k<0.$

故ニ $x-2\sin x-k=0$. 即チ $x-2\sin x=k$ ハ**正ナル根ヲ少クトモ一ツ有スル．**

(11) $f(x)=x-\cos x$ トオクト

$$f(0)=-1<0.\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0.$$

而シテ $f(x)$ ハ 0 ト $\dfrac{\pi}{2}$ トノ間ニ於テ連續ナル故，**0 ト $\dfrac{\pi}{2}$ トノ間ニ於テ少クトモ一ツノ實根ヲ有スル．**

(12) $f(x)=(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1$ トオクト

$f(1)=\sqrt{2}\sin1-1.\quad$ 然ルニ $\sin1>\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$\therefore\ f(1)=\sqrt{2}\sin1-1>\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=0.\quad f(1)>0.$ 又 $f(0)=-2<0.$

故ニ $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ ハ **0 ト 1 トノ間ニ少クトモ一ツノ根ヲ有スル．**

第二編　微分法

第五章　微分商及ビ其ノ幾何學的意義

微分商 $y=f(x)$ ヲ x ノ函數トスル．今 x ノ値ヲ變動セシメルトキハ，一般ニ y ノ値モ亦其ニ從ツテ變動スル．此ノ際 x ガ Δx ダケ變動シタガタメニ，y ハ Δy ナル變動ヲシタモノトスルト，

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x), \qquad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

トナル．コヽニ Δx ハ x ノ値ガ增加スルトキハ $\Delta x>0$ ニシテ，減少スルトキハ $\Delta x<0$ デアル．而シテ $\Delta x, \Delta y$ ハ其ノ x, y ノ値ノ增加スルト減少スルトヲ問ハズ，夫々 x 及ビ y ノ**增分**ト云フ．

x ガ或一定値 a ヨリ發シテ Δx ダケ變ジタルトキ，之ニ對スル Δy ヲ Δx デ割ツタ商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

ヲ考ヘルト，コレハ變數 x ノ a ヨリ發シテ生ジタ變動ニ對スル函數ノ變動ノ割合ヲ示スモノデアル．例ヘバ

$y=f(x)=x^3$ ナルトキハ $x=a$ ニ對シテ $f(a)=a^3$. 而シテ x ガ a ヨリ Δx ダケ變動スルト

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=(a+\Delta x)^3-a^3=3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=3a^2+3a\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

是 $f(x)=x^3$ ガ $x=a$ ニ於テ Δx ナル變動ヲ受ケタトキノ $f(x)$ ノ變動ノ割合デアル．

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ナル商ハ一般ニハ a ト Δx トニ依ツテ其ノ値ヲ異ニスル．而シテ a ヲ一定ニ保チ $\Delta x\to 0$ ナラシメルトキ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ一定ノ値ニ收斂スルコトモアレバ，然ラザルコトモアル．其ノ一定ノ値ニ收斂スル場合ニハ，之ヲ $x=a$ ニ於ケル函數 y ノ**微分商**又ハ**微分係數**，時トシテハ**微係數**ト云フ．而シテコノトキ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ**微分可能**デアルト云フ．微分商ハ函數 y ノ種類ニヨリテ其ノ値ヲ異ニスルハ勿論，a ノ値ニヨリテモ其ノ値ヲ異ニスル．故ニ $x=a$ ニ於ケル

函數 $f(x)$ ノ微分商ヲ表ハスニ $f'(a)$ ナル記號ヲ以テスル．即チ

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Δx ノ代リニ簡單ノタメ h デ表ハスト $x=a$ ニ於ケル微分商ハ

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

トナル．

例題 1. $y=x^3$ ナルトキ $f'(a)$ ヲ求メヨ．

〔解〕 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3a^2+3a\,\Delta x+(\Delta x)^2.$

$$\therefore \quad f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3a^2.$$

微分商ト導函數 微分商 $f'(a)$ ノ a ハ，x ノ變域內ニ於テハ如何ナル數デモヨロシイノデアルカラ，函數 $y=f(x)$ ノ $a=1$ ニ於ケル微分商ハ $f'(1)$ デアリ，$a=2$ ニ於ケル微分商ハ $f'(2)$ デアル．又 $a=\dfrac{1}{2}$ ニ於ケル微分商ハ $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ デアル．

斯樣ニ $x=a$ ニ於ケル函數 $y=f(x)$ ノ微分商ガ，若シ存在スルナラバ a ノ函數トナル．コノ a ノ代リニ x デ置キ換ヘルト $y=f(x)$ ニ依リ導カレ，且其ニ依ツテ形ノ定マル新シイ函數ヲ得ル．斯クノ如ク $y=f(x)$ ヨリ導カレタ新シイ函數 $f'(x)$ ヲ初メノ函數 $y=f(x)$ ノ**導函數**ト云フ．而シテ之ヲ表ハスニ $f'(x)$ ノ外ニ

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \mathrm{D}y, \quad \mathrm{D}f(x)$$

等ノ記號ヲ用ヒル．而シテ $x=a$ ニ於ケル函數 $y=f(x)$ ノ微分商ハ，導函數ニ於テ x ノ代リニ a ト置イタモノデアルカラ，之ヲ表ハスニ

$$f'(a), \qquad y'_{x=a}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$$

等ノ記號ヲ以テスル．

例題 1. $y=c$ ノ導函數ヲ求メヨ．

〔解〕 $y=c+0\times x$ ト考ヘテ

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c+0\times(x+\Delta x)-(c+0\times x)=0\times\Delta x.$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=0.\qquad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

即チ常數ノ導函數ハ零デアル.

例題 2. $y=cx$ ノ導函數ヲ求メヨ.

〔解〕
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c(x+\Delta x)-cx=c\Delta x.$$
$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=c.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c.$$

即チ常數 c ト x トノ積ノ導函數ハ c デアル.

例題 3. $y=\dfrac{1}{x}$ ノ導函數ヲ求メヨ.

〔解〕
$$\Delta y=\frac{1}{(x+\Delta x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}.$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{(x+\Delta x)x}.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2}.$$

例題 4. $y=\sqrt{x}$ ノ導函數ヲ求メヨ.

〔解〕
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

微分商ノ異狀 微分商ヲ求メルニ際シ函數 $f(x)$ ノ形ニ依ツテハ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

ガ有限確定値ヲ有セズニ, 次ノ三ツノ特別ナ場合ヲトルコトガアル.

(i) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\infty.$

(ii) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **ガ有限不確定トナル.**

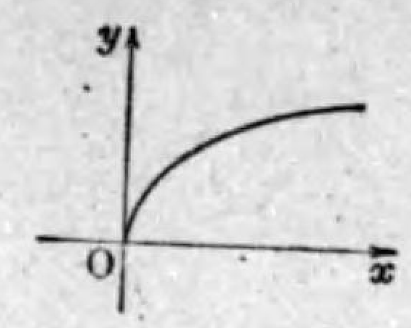
(iii) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **ニ於テ $\Delta x\to -0$ ナルトキト $\Delta x\to +0$ ナルトキトニ於テ, 各一定ノ有限確定値ヲトルモ, 兩者ガ一致シナイカ又ハ其ノ何レカ一ツシカ有シナイ.**

(i), (ii) ノ場合ニハ函數 $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ微分商ヲ有シナイト云ヒ, (iii) ノ場合ニハ $\Delta x\to +0$ ナルトキノ極限値ヲ**右方微分商**ト云ヒ, $\Delta x\to -0$ ナルトキノ極限値ヲ**左方微分商**ト云フ.

〔注意〕 (i) ノ場合ニハ時トシテ y ノ微分商ハ正又ハ負ノ無限大デアルト云フコトガアル.

例題 1. $y=\sqrt{x}$ ノ微分商ヲ求メヨ.

〔解〕 $y=\sqrt{x}$ ノ導函數ハ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ デアルカラ $x=1$ ニ於ケル微分商ハ $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ トナル. 然レドモ $x=0$ ニ於テハ



$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=\infty.$$

故ニ $f'(0)$ ナル有限確定値ヲ有シナイ. 即チ $y=\sqrt{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ微分商ヲ有シナイ.

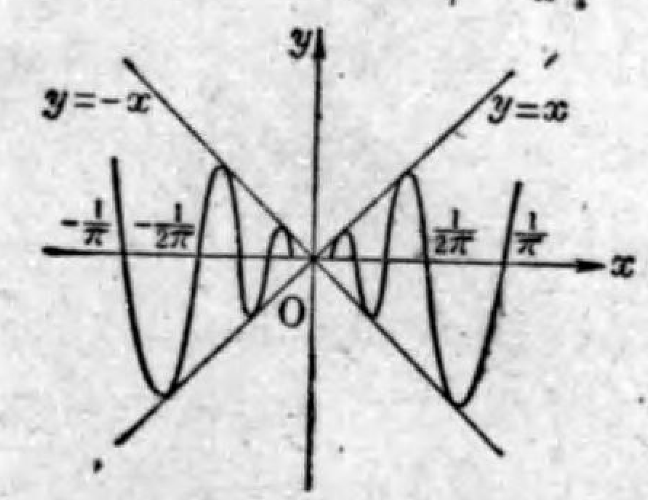
〔注意〕 (i) 此ノ際 $x=0$ ニ於ケル右方微分商ハ上ノ注意ニヨリ ∞ デアルト云フコトガアル.

(ii)
$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

トナリ, $\sqrt{\Delta x}$ ハ $\Delta x<0$ ナルトキ虛數トナル. 故ニ此ノ場合ニハ左方微分商ハ存シナイ. 即チ右方微分商ノミヲ有シ ∞ デアル.

例題 2. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ ノ $x=0$ ニ於ケル微分商ヲ求メヨ.

〔解〕 $x\neq 0$ ナルトキ $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ ナルヲ以テ $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$. 從ツテ今 ε ヲ如何ニ小ナル正數トスルモ, δ ヲ ε ニ等シクトルトキハ $0<|x-0|<\delta$ ナル總テノ x ノ値ニ對シテ



$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

トナラシメルコトガ出來ル. 故ニ

$$\lim_{x\to\pm 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

トナリ原點ニ於テ極限値ヲ有スル. 從ツテ $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ ハ $x=0$ ニ於テ値ヲ有シナイガ, 22頁ノ規約ニ依リ此ノ極限値ヲ以テ $x=0$ ニ於ケル函數 $f(x)$ ノ値 $f(0)$ ト定メルト, 此ノ函數ハ $x=0$ ニ於テ連續トナル. コヽニ於テ $f'(0)$ ヲ求メルト

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

トナリ, 此ノ結果ハ不定デアル. 即チ微分商ヲ有シナイ.

例題 3. $y=\dfrac{x}{1+a^{\frac{1}{x}}}$ ノ $x=0$ ニ於ケル微分商ヲ求メヨ. 但シ $a>1$ トス.

〔解〕 $y=\dfrac{x}{1+a^{\frac{1}{x}}}$ ハ $x=0$ ニ於テ無意味トナルガ

$$\lim_{x\to\pm0}\frac{x}{1+a^{\frac{1}{x}}}=0$$

トナル．此ノ零ヲ $f(0)$ ノ値ト定メルト，$x=0$ ＝於テ連續トナル．故＝ $f'(0)$ ヲ求メルト

$a>1$ ナル故　　$\lim_{x\to0+0}a^{\frac{1}{x}}=\infty,\qquad \lim_{x\to0-0}a^{\frac{1}{x}}=0$

デアルカラ $x=0$ ＝於ケル右方微分商ハ

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

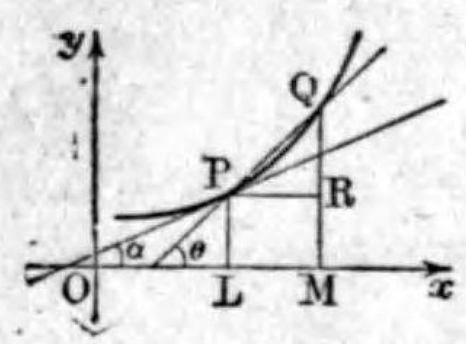
左方微分商ハ

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{\Delta x}}}=1$$

トナリ $x=0$ ＝於テ異ナル微分商ヲ有スル．

微分商ノ幾何學的意義

$y=f(x)$ ノぐらふ上ノ二點 P, Q ノ横座標ヲ夫々 a, $a+\Delta x$ トスルトキ，縱座標ハ夫々 $f(a)$，及ビ $f(a+\Delta x)$ トナル．今 P, Q 二點ヨリ x 軸＝垂線ヲ下シ，其ノ足ヲ L, M トシ，P 點ヨリ QM ＝引イタ垂線ノ足ヲ R トスルトキ



$$PR=LM=\Delta x.$$

$$RQ=MQ-MR=MQ-LP=f(a+\Delta x)-f(a)=\Delta y.$$

コヽ＝ Δx ハ x ノ增分＝シテ，R ガ P ノ右方＝アレバ正，左方＝アレバ負トナリ，又 Δy ハ y ノ增分＝シテ，Q ガ R ノ上方＝アレバ正，下方＝アレバ負トスルノデアル．

サテ直線 PQ ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ヲ θ デ表ハスト

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{RQ}{PR}=\tan\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

デアル．コヽ＝於テ Δx ヲ限リナク小ナラシメルト，Δy モ亦限リナク小トナリ從ツテ點 R ガ限リナク P 點＝近ヅクト同時＝，Q 點モ亦曲線＝沿ヒテ P 點＝限リナク近ヅク．而シテ此ノ時直線 PQ ハ P 點＝於ケル此ノ曲線ノ切線 PT ＝限リナク近ヅク．從ツテ切線 PT ト x 軸トノ間ノ角ヲ α トスルト，$\Delta x\to0$ トナルトキ $\theta\to\alpha$ トナル．故＝ (1) 式ヨリ

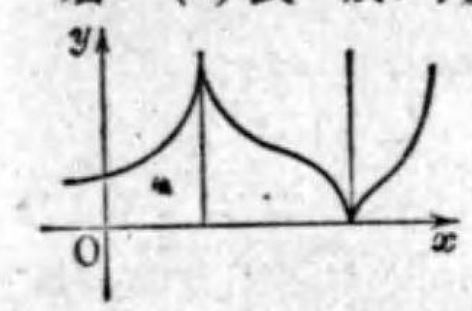
$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan\alpha$$

ヲ得ル．即チ

$f(x)$ ガ一ツノ曲線ヲ表ハストキ $f'(a)$ ハソノ曲線上ノ $x=a$ ナル點ニ於ケル切線ト x 軸トノナス角ノ正切ニ等シイ．

$\tan\alpha$ ハ解析幾何學＝於テハ切線 PT ノ方向係數ト云ハレルモノデアルカラ $f'(a)$ ハ曲線 $y=f(x)$ 上ノ $x=a$ ナル點＝於ケル切線ノ方向係數＝等シイトモ云フコトガ出來ル．

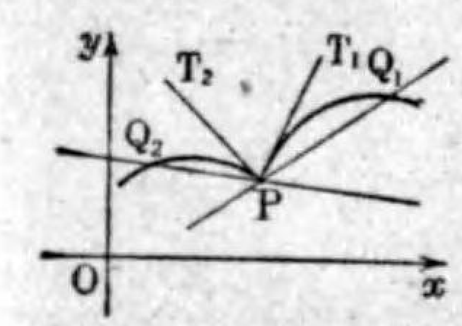
若シ (2) 式＝於テ角 α ガ直角ナルトキハ $\tan\alpha=\pm\infty$ デアルカラ



$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\infty$$

ヲ得ル．而シテ此ノトキノ切線ハ y 軸＝平行トナル．左圖ハ角 α ガ直角トナル場合＝シテ最初ノ切線ハ x 軸ト鋭角ヲナシツヽ直角トナル場合デアルカラ $\tan\alpha=\infty$ ＝シテ後ノ切線ハ鈍角カラ直角トナル場合デアルカラ $\tan\alpha=-\infty$ デアル．

既＝述ベタル如ク連續曲線上ノ或點 P ＝於テ，右方微分商ト左方微分商トガ異ナル場合ガアル．此場合ヲ左圖デ述ベルト P 點＝於テ二ツノ異ナル切線ヲ有シ，其等ハ曲線上 Q_1 點ヨリ P ＝近迫シタトキト，Q_2 點ヨリ P ＝近迫シタトキトノ割線 PQ_1, PQ_2 ノ極限ノ位置デアッテ，前者ノ場合＝ハ切線 PT_1 トナリ，後者ノ場合＝ハ切線 PT_2 トナルノデアル．



練　習　問　題　5.

(1) $f(x)=x^2-2x-3$ ナルトキ $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$ ヲ求メヨ．

(2) 次ノ函數ノ導函數ヲ求メヨ．

(i) $y=x^4$.　(ii) $y=\sqrt[3]{x}$.　(iii) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

(3) 次ノ函數ノ導函數ヲ求メヨ．

(i) $y=\sqrt{a^2-x^2}$.　(ii) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(4) $x=a$ ＝於テ $f(x)$ ハ連續ナルトキデモ，$f'(x)$ ノ存在セザル場合ヲ例ヲ以テ述ベヨ．

(5) 次ノ各函數ノ右方微分商，左方微分商ヲ求メ且ツノぐらふヲ描ケ．

(i) $y=x^{\frac{2}{3}}$.　(ii) $y=\sqrt{x^2+x^4}$.

(6) $y=x^2$ ナル曲線ヲ描キ，且 $x=\frac{1}{2}$ ナル曲線上ノ點ニ於ケル切線ガ，x 軸ノ正方向トナス角 α ヲ求メヨ．

〔解　　答〕

(1) $f'(-1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x-4)=-4.$

$f(0)=-3,\ f(0+\Delta x)=(\Delta x)^2-2\Delta x-3.$

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x-2)=-2.$

$f(2)=-3.\quad f(2+\Delta x)=(2+\Delta x)^2-2(2+\Delta x)-3=(\Delta x)^2+2\Delta x-3.$

$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+2)=2.$

(2) (i) $f(x)=x^4.\qquad f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4.$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^4-x^4}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(x+\Delta x)^2+x^2\}(2x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\{(x+\Delta x)^2+x^2\}(2x+\Delta x)$$

$$=2x^2\times2x=4x^3.$$

(ii) $f(x)=x^{\frac{1}{3}},\qquad f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}.$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\{(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\}\{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\}}{\Delta x\{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\}}$$

$$=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\}}=\frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(iii) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}.\qquad f(x+\Delta x)=\frac{a(x+\Delta x)+b}{c(x+\Delta x)+d}.$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{a(x+\Delta x)+b}{c(x+\Delta x)+d}-\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{(ad-bc)\Delta x}{\{c(x+\Delta x)+d\}(cx+d)}.$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

(3) (i) $f(x)=\sqrt{a^2-x^2},\qquad f(x+\Delta x)=\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}.$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\{\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}-\sqrt{a^2-x^2}\}\{\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}+\sqrt{a^2-x^2}\}}{\Delta x\{\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}+\sqrt{a^2-x^2}\}}$$

$$=\frac{-2x-\Delta x}{\sqrt{a^2-(x+\Delta x)^2}+\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(iii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.\qquad f(x+\Delta x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}}.$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}}{\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{(a^2+x^2)-\{a^2+(x+\Delta x)^2\}}{\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}\sqrt{a^2+x^2}\{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}\}}.$$

$$=\frac{-(2x+\Delta x)}{\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}\sqrt{a^2+x^2}\{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+(x+\Delta x)^2}\}}.$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(4) (i) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ハ $x=1$ ニ於テ連續デアル．然レドモ

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=\infty$$

トナルカラ $f'(1)$ ハ存在シナイ．

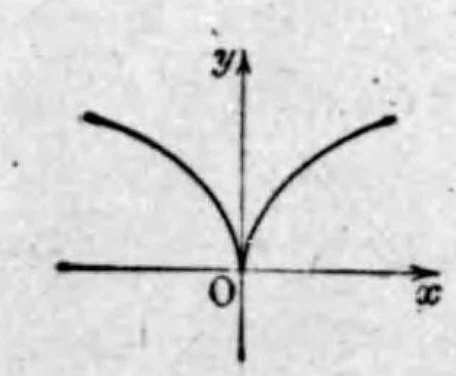
(ii) $f(x)=\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}}$ ハ $x=-1$ ニ於テ連續デアル．但シ $f(-1)=0.$

$f(-1+\Delta x)=\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}$ ナル故 $\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{1}{(1+e^{\frac{1}{\Delta x}})}=0.$

$$\lim_{\Delta x\to0-0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0-0}\frac{1}{(1+e^{\frac{1}{\Delta x}})}=1.$$

即チ $x=-1$ ノ右方微分商ハ 0 ニテ左方微分商ハ 1 デアルカラ $f'(-1)$ ハ存在シナイ．

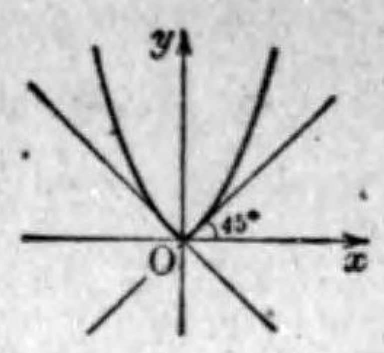
(5) (i) 右方微分商 $=\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{0^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$



$$=\lim_{\Delta x\to0+0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}=\infty.$$

左方微分商 $=\lim_{\Delta x\to0-0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}=-\infty.$

(ii) $f(0)=0.\qquad f(0+\Delta x)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^4}.$



右方微分商$=\lim_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\sqrt{1+(\Delta x)^2}$

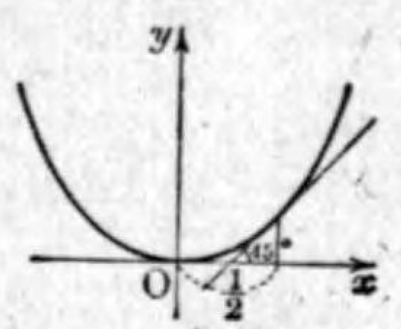
$=1.$

$\Delta x<0$ ナルトキハ $\sqrt{(\Delta x)^2}=-\Delta x$ デアルカラ

左方微分商$=\lim_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-\sqrt{1+(\Delta x)^2}$

$=-1.$

(6)　$f(x)=x^2.$



$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2.$

$\therefore\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

$\therefore\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1=\tan\alpha.$

$\alpha=45°.$

第六章　微分法ニ關スル基礎定理

導函數ヲ求メル簡便法　函數 $y=f(x)$ ノ $x=a$ ニ於ケル微分商ハ，其ノ導函數 $f'(x)$ ニ $x=a$ ヲ代入シテ得ラレルノデアルカラ，微分商ヲ求メルコトハ，一般ニ導函數ヲ求メル計算ニ歸スル．故ニ導函數ヲ簡便ニ求メナクテハナラナイ．

函數 $y=f(x)$ ノ導函數ヲ求メルコトヲ，**函數 y ヲ x ニツイテ微分スル**ト云ヒ，其ノ微分スル計算法ヲ**微分法**ト云フ．而シテ $y=f(x)$ ヲ微分スルニハ既ニ述ベタ如ク，

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ヲ計算スレバヨイノデアルガ，總テノ函數ニ此ノ計算法ヲ適用スルコトハ不可能ニシテ，タトヘ可能ノ場合デモ，其ノ計算困難ナコトガ多イ．故ニ此ノ方法ヲ用ヒルニアラザレバ導函數ヲ求メルコトノ出來難イ基礎ノ函數ダケハ，此ノ方法デ其ノ導函數ヲ求メ，爾後ハ此等ノ基礎函數ノ導函數ト，他ノ公式トヲ用ヒテ更ニ複雜ナル函數ノ導函數ヲ求メルノデアル．

例ヘバ $y=3x^2+2x+5$ ノ導函數ヲ求メルニハ，$y=x^n$ ノ導函數ヲ知リ，其ト

函數ノ和ノ導函數ノ求メ方ヲ知ルトキハ，直ニ此ノ函數ノ導函數ヲ求メルコトガ出來ル．以下 $y=x^n$ ノ導函數ヲ先ヅ求メ，次デ函數ノ和，差，積，商等ノ導函數ヲ求メル公式ヲ導キ以テ簡單ナル函數ノ導函數ヲ簡便ニ求メルコトヲ練習スル．

微分法ニ關スル基礎定理

(I)　$y=x^n$ ノ導函數ハ

$$nx^{n-1}$$

デアル．但シ n ハ正ノ整數トスル．

［證明］　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ デアルカラ

$\Delta y=(x+\Delta x)^n-(x)^n=\{(x+\Delta x)-x\}\{(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\cdots\cdots$

$+x^{n-2}(x+\Delta x)+x^{n-1}\}.$

$\therefore\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\cdots\cdots+x^{n-2}(x+\Delta x)+x^{n-1}.$

$\dfrac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots\cdots+x^{n-1}=nx^{n-1}.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

此ノ結果ハ $n=0$ ナルトキモ適用セラレル．

〔例題〕　$y=x^6$ ナルトキ，$y'=6x^5$．$y=x$ ナルトキ $y'=1\times x^0=1.$

$y=x^0=1$ ナルトキ，$y'=0\times x^{-1}=0.$

(II)　$y=cf(x)$ ノ導函數ハ

$$cf'(x)$$

デアル．但シ c ハ常數トスル．

［證明］　$\Delta y=cf(x+\Delta x)-cf(x)=c\{f(x+\Delta x)-f(x)\}.$

$\therefore\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=c\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$　　$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=cf'(x).$

〔例題〕　$y=6x^3$ ナルトキ $y'=6\times 3x^2=18x^2.$

$y=7x$ ナルトキ $y'=7.$

(III)　函數ノ代數和 $y=f(x)\pm F(x)$ ノ導函數ハ

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\pm F'(x)$$

デアル．

［證明］　$\Delta y=\{f(x+\Delta x)\pm F(x+\Delta x)\}-\{f(x)\pm F(x)\}.$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right\}=f'(x)\pm F'(x).$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=f'(x)\pm F'(x).$$

三ツ以上ノ場合モ同様=證明スルコトガ出來ル.

〔例題〕　$y=4x^2-3x$ ナルトキ $y'=8x-3.$

$y=\frac{7}{3}x^9-2x^3-3$ ナルトキ $y'=\frac{7}{3}\times 9\times x^{9-1}-2\times 3x^{3-1}=21x^8-6x^2.$

〔注意〕 $y=5x^4$ ナルトキ　$y=5\times 4x^{4-1}$ ト書クベキヲ, 直=　$y=20x^3$ ト書キ得ル様=練習シナケレバナラナイ.

(IV)　二ツノ函數ノ積 $y=f(x)F(x)$ ノ導函數ハ

$$f(x)F'(x)+f'(x)F(x)$$

デアル.

〔證明〕 $\Delta y=f(x+\Delta x)F(x+\Delta x)-f(x)F(x).$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)F(x+\Delta x)-f(x)F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)F(x+\Delta x)-f(x)F(x+\Delta x)+f(x)F(x+\Delta x)-f(x)F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}F(x+\Delta x)\right\}+\lim_{\Delta x\to 0}\left\{f(x)\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right\}$$

$=f'(x)F(x)+f(x)F'(x).$　ココ=　$\lim_{\Delta x\to 0}F(x+\Delta x)=F(x).$

$$\therefore\quad\frac{dy}{dx}=f(x)F'(x)+f'(x)F(x).$$

系　$y_1=f(x)$,　$y_2=F(x)$,　$y=y_1y_2$ トオクト

$$y'=y_1'y_2+y_1y_2'.$$

コノ兩邊ヲ $y=y_1y_2$ ノ兩邊デ割ルト

$$\frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}.$$

三ツノ函數ノ積 $y=y_1y_2y_3=y_1(y_2y_3)$ ニアリテハ

$$\frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1'}+\frac{(y_2y_3)'}{y_2y_3}=\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'y_3+y_2y_3'}{y_2y_3}=\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}+\frac{y_3'}{y_3}.$$

$$\therefore\ \frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}+\frac{y_3'}{y_3}.$$

同様ニ一般ニ $y=y_1y_2y_3\cdots\cdots y_n$ ナルトキハ

$$\frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1}+\frac{y_2'}{y_2}+\cdots\cdots+\frac{y_n'}{y_n}.$$

分母ヲ拂ツテ

$$y'=(y_1'y_2y_3\cdots\cdots y_n)+(y_1y_2'y_3\cdots\cdots y_n)+\cdots+(y_1y_2y_3\cdots\cdots y_n').$$

〔例題〕 $y=(6x+5)(2x-3)$ ナルトキハ $f(x)=(6x+5)$, $F(x)=(2x-3)$ トスルト

$$\frac{d}{dx}f(x)=6.\qquad \frac{d}{dx}F(x)=2.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=6(2x-3)+2(6x+5)=24x-8.$$

〔注意〕 $y=(6x+5)(2x-3)$ ノ導函數ヲ求メルニ一々 $f(x)=6x+5$, $F(x)=2x-3$ ト書クベキヲ直=

$$\frac{dy}{dx}=6(2x-3)+2(6x+5)=24x-8$$

ト書キ得ル如ク練習シナクテハナラナイ.

(V)　函數ノ商　$y=\frac{f(x)}{F(x)}$ ノ導函數ハ

$$\frac{f'(x)F(x)-f(x)F'(x)}{\{F(x)\}^2}$$

デアル. 但シ $F(x)\neq 0$ トスル.

〔證明〕

$$\Delta y=\frac{f(x+\Delta x)}{F(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x+\Delta x)F(x)-f(x)F(x+\Delta x)}{F(x+\Delta x)F(x)}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)F(x)-f(x)F(x)-f(x)F(x+\Delta x)+f(x)F(x)}{F(x+\Delta x)F(x)}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)F(x)-f(x)F(x)\}-\{f(x)F(x+\Delta x)-f(x)F(x)\}}{F(x+\Delta x)F(x)}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}F(x)-f(x)\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}}{F(x+\Delta x)F(x)}$$

$$=\frac{f'(x)F(x)-f(x)F'(x)}{\{F(x)\}^2}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)F(x)-f(x)F'(x)}{\{F(x)\}^2}.$$

系　$y=\frac{c}{F(x)}$ ナルトキハ $f(x)=c$, $f'(x)=0$ ナル故

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{cF'(x)}{\{F(x)\}^2}.$$

〔例題1.〕 $y=\dfrac{3x+2}{x^2-x-3}$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\times(x^2-x-3)-(3x+2)(2x-1)}{(x^2-x-3)^2}$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2-4x-7}{(x^2-x-3)^2}.$$

〔例題2.〕 $y=\dfrac{6}{2x^3-1}$ ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-6\times 6x^2}{(2x^3-1)^2}$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-36x^2}{(2x^3-1)^2}.$$

〔例題3.〕 $y=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2}=-nx^{-(n+1)}$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-nx^{-n-1}.$$

〔注意〕 $y=x^n$ ナルトキハ $y=nx^{n-1}$, 故ニ此ノ結果ハ n ノ正負ノ整數ニツイテ成立スル. 例ヘバ $y=x^{-3}$ ナルトキ $y'=-3x^{-4}$.

(VI) 函數ノ函數 $y=f(z)$, $z=F(x)$ ノ導函數ハ

$$\frac{dy}{dx}=f'(z)F'(x)=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

デアル. 但シ $y=f(z)$, $z=F(x)$ 共ニ連續ニシテ夫々 $f'(z)$, $F'(x)$ ヲ有スルモノトスル.

〔證明〕 $y=f(z)=f\{F(x)\}$ デアルカラ之ヲ x ニツイテ微分スルト

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\{F(x+\Delta x)\}-f\{F(x)\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\{F(x+\Delta x)\}-f\{F(x)\}}{F(x+\Delta x)-F(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

$F(x+\Delta x)-F(x)=h$, $F(x)=z$ ヲ代入スルト $F(x)$ ハ連續デアルカラ, $\Delta x\to 0$ ナルトキ $h\to 0$ トナル. 故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(z)\cdot F'(x)=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

系 $y=f(z)$, $z=F(u)$, $u=\varphi(x)$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}.$$

〔例題1.〕 $y=(3x^2-2x-1)^5$ ナルトキ $3x^2-2x-1=z$ トオクト

$$y=z^5,\qquad \frac{dy}{dz}=5z^4,\qquad \frac{dz}{dx}=6x-2.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=5z^4(6x-2)=10(3x-1)(3x^2-2x-1)^4.$$

〔注意〕 $y=(3x^2-2x-1)^5$ ヨリ直ニ $\dfrac{dy}{dx}=5(3x^2-2x-1)^4(6x-2)$ ト書キ得ル樣練習シナケレバナラナイ.

〔例題2.〕 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}=(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}$ ナルトキハ

$$y'=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}-1}(2ax+b).\quad\therefore\quad y'=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

〔例題3.〕 $y=3\{(x+1)^2-(6x-3)^{\frac{1}{2}}\}^6$ ナルトキ

$$\frac{dy}{dx}=3\times 6\{(x+1)^2-(6x-3)^{\frac{1}{2}}\}^5\left\{2(x+1)-\frac{1}{2}(6x-3)^{-\frac{1}{2}}\times 6\right\}$$

$$=18\{(x+1)^2-(6x-3)^{\frac{1}{2}}\}^5\{2(x+1)-3(6x-3)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

(VII) 逆函數ノ導函數 x ガ y ノ函數トシテ與ヘラレルトキ, 即チ

$$x=f(y)$$

ナルトキ, 此ノ式ヨリ y ヲ x ノ函數ト見做シテ x ニ關スル y ノ導函數ヲ逆函數ノ導函數ト云フ. 而シテ之ハ

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1,\ \text{又ハ}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

デアル.

〔證明〕 $z=x$, $z=f(y)$

トオクト

$$\frac{dz}{dx}=1.\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx},\ \text{又}\ \frac{dx}{dy}=f'(y).$$

$$\therefore\quad 1=f'(y)\frac{dy}{dx}.\qquad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1.\ \text{又ハ}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

$6y^2-1$

〔例題1.〕 $x=2y^3-y+1$ ナルトキ

$$\frac{dx}{dy}=6y^2-1.\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{6y^2-1}.$$

〔注意〕 兩邊ヲ直ニ x デ微分シテ,

$$1=6y^2\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}.\qquad\therefore\quad 1=(6y^2-1)\frac{dy}{dx}.\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{6y^2-1}$$

トシテモヨイ.

〔例題2.〕　$y=x^{\frac{1}{n}}$ ナルトキハ $x=y^n$.

$$\frac{dx}{dy}=ny^{n-1}.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

(VIII)　$y=x^n$ ノ導函數ハ

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

デアル. 但シ n ハ正又ハ負ノ分數トスル.

[證明]　(i)　n ヲ正ノ分數トシ $n=\frac{q}{p}$ ナル形ヲトルモノトスル. 但シ p, q ハ共ニ正ノ整數デアル.

$$y=x^n=x^{\frac{q}{p}}\ \text{ヨリ}\ y^p=x^q.$$

兩邊ヲ x デ微分スルト

$$py^{p-1}\frac{dy}{dx}=qx^{q-1}.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x^{q-1}}{\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^{p-1}}=\frac{q}{p}x^{q-1-\frac{q}{p}(p-1)}=\frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-1}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

即チ n ガ整數ノ場合ト同ジ結果ヲ得ル.

(ii)　n ガ負ノ分數ノ場合. $n=-m$ トオクト $m>0$ トナリ

$$y=x^n=x^{-m}.\qquad \therefore\ yx^m=1.$$

兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\frac{dy}{dx}x^m+y\cdot mx^{m-1}=0.\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{mx^{-m}\cdot x^{m-1}}{x^m}.$$

$$\frac{dy}{dx}=-mx^{-m-1}.\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

トナリ, 此ノ時モ同一ノ公式ヲ得ル. 故ニ一般ニ

$y=x^n$ ニ於テ n ガ正又ハ負ノ有理數ナル場合

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

ハ成リ立ツ.

更ニ $y=x^n$ ノ n ガ正負ノ無理數ナルトキ $y'=nx^{n-1}$ ガ成立ツコトヲ證明スルコトガ出來ル. 從ツテ (I) ヨリ (VIII) マデノ公式ヲ用フルコトニヨリ

$$y=\frac{b_0x^{m_0}+b_1x^{m_1}+\cdots\cdots+b_k}{a_0x^{l_0}+a_1x^{l_1}+\cdots\cdots+a_n}$$

ノ如キ函數又ハ斯クノ如キ形ノ函數ノ和, 差, 羃等カラナル函數ハ m_0, m_1, ……; l_0, l_1, ……; b_0, b_1……, a_0, a_1, ……ノ如何ニ拘ハラズ微分スルコトガ出來ル.

練 習 問 題 6.

次ノ各函數ヲ微分セヨ.

(1)　$y=2x^3-\frac{1}{x^2}+6\sqrt{x}.$

(2)　$y=x^3(2x+1)(x^2-1).$

(3)　$y=(1+x)^n(1-2x)^m.$

(4)　$y=\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{x+d}.$

(5)　$y=\frac{(1+x)^n}{(2-x)^m}.$

(6)　$y=\frac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}.$

(7)　$y=\sqrt{x+\frac{1}{\sqrt{x}}}.$

(8)　$y=\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$

(9)　$y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}.$

(10)　$y=\sqrt{\frac{1-x^n}{(1+x^2)^3}}.$

(11)　$y=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}.$

(12)　$y=x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.$

(13)　$x=\frac{y^2-1}{y^2+1}$ ヨリ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ.

(14)　$x=\frac{a}{y}\sqrt{a^2+y^2}$ ヨリ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ.

[注意]　本問題ノ解答ニ後ニ述ベル定理ヲ用ヒルト容易トナルモノガ相當ニアルガコヽデハ今マデノ定理ノミデ演習スル.

[解　　答]

(1)　$\frac{dy}{dx}=6x^2+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}}.$

(2)　$\frac{dy}{dx}=3x^2(2x+1)(x^2-1)+2x^3(x^2-1)+2x\cdot x^3(2x+1)$

$\qquad=x^2(12x^3+5x^2-8x-3).$

(3)　$\frac{dy}{dx}=n(1+x)^{n-1}(1-2x)^m+m\cdot(1-2x)^{m-1}\cdot(-2)(1+x)^n$

$\qquad=(1+x)^{n-1}(1-2x)^{m-1}\{n(1-2x)-2m(1+x)\}$

$\qquad=(1+x)^{n-1}(1-2x)^{m-1}\{(n-2m)-2(m+n)x\}.$

(4)　$\frac{dy}{dx}=\frac{\{(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a)(x+b)\}(x+d)-(x+a)(x+b)(x+c)}{(x+d)^2}$

$\qquad=\frac{2x^3+(a+b+c+3d)x^2+2d(a+b+c)x+(bcd+cda+abd-abc)}{(x+d)^2}.$

(5)　$\frac{dy}{dx}=\frac{n(1+x)^{n-1}(2-x)^m-m(2-x)^{m-1}(-1)(1+x)^n}{(2-x)^{2m}}$

$$=\frac{(1+x)^{n-1}(2-x)^{m-1}\{n(2-x)+m(1+x)\}}{(2-x)^{2m}}$$

$$=\frac{(1+x)^{n-1}\{(m+2n)+(m-n)x\}}{(2-x)^{m+1}}.$$

(6) $y=\dfrac{x\{x-\sqrt{a^2+x^2}\}}{\{x+\sqrt{a^2+x^2}\}\{x-\sqrt{a^2+x^2}\}}=\dfrac{x\{x-\sqrt{a^2+x^2}\}}{x^2-(a^2+x^2)}=\dfrac{x\{x-\sqrt{(a^2+x^2)}\}}{-a^2}.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\{x-\sqrt{a^2+x^2}\}+x\left\{1-\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x\right\}}{-a^2}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)}\,\{x+\sqrt{(x^2+a^2)}\}^2}.$$

(7) $y^2=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$ $\qquad\therefore\ 2y\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

(8) $y=(ax^2+2bx+c)^{-\frac{1}{2}}(ax+b).$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(ax^2+2bx+c)^{-\frac{3}{2}}(2ax+2b)(ax+b)+a(ax^2+2bx+c)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{ax^2+2bx-c}}-\frac{(ax+b)^2}{(ax^2+2bx+c)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ac-b^2}{(ax^2+2bx+c)^{\frac{3}{2}}}.$$

(9) $y=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2})(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2})}{(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2})(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2})}$

$$=\frac{(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2})^2}{a^2+x^2-(a^2-x^2)}=\frac{2a^2+2\sqrt{a^4-x^4}}{2x^2}=\frac{a^2+\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{-2\{a^2+\sqrt{a^4-x^4}\}}{x^3}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2}(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}\times(-4x^3)$$

$$=-\frac{2a^2}{x^3}\left\{1+\frac{a^2}{\sqrt{(a^4-x^4)}}\right\}.$$

(10) $y^2=\dfrac{1-x^n}{(1+x^2)^3}.$ $\qquad\therefore\ 2y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-6x(1-x^n)-nx^{n-1}(1+x^2)}{(1+x^2)^4}.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-x^n}{(1+x^2)^3}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-6x(1-x^n)-nx^{n-1}(1+x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

(11) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{x})-\sqrt{(a+x)}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{2\sqrt{x}\sqrt{a+x}(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}.$

(12) $\dfrac{dy}{dx}=(m-1)x^{m-2}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}+x^{m-1}\cdot\dfrac{p}{q}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}\cdot bnx^{n-1}$

$$=x^{m-2}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}\left\{(m-1)a+\left(m+n\frac{p}{q}-1\right)bx^n\right\}.$$

(13) $x(y^2+1)=y^2-1$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$y^2+1+x\cdot 2y\dfrac{dy}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}.$ $\qquad\therefore\ \dfrac{dy}{dx}\cdot 2y(1-x)=y^2+1.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^2+1}{2y(1-x)}.$$

(14) $x^2y^2=a^2(a^2+y^2)$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$2xy^2+x^2\cdot 2y\dfrac{dy}{dx}=a^2\cdot 2y\dfrac{dy}{dx}.$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}(a^2-x^2)=xy.$ $\qquad\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{a^2-x^2}.$

第七章 三角函數ノ微分法

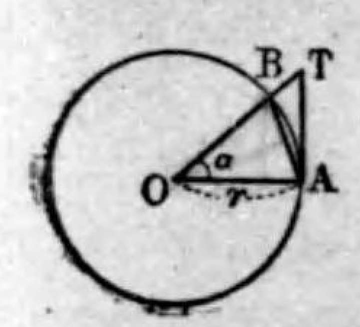
豫備定理 三角函數ノ導函數ヲ求メルニハ，先ヅ $y=\sin x$ ニツイテ

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\cdots\cdots(1)$$

ヲ計算シテ其ノ導函數ヲ求メ，之ヲ基礎トシテ $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ ヨリ $\cos x$ ノ導函數ヲ，更ニ $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ヨリ $\tan x$ ノ導函數ヲ求メ，以下同樣ニシテ全三角函數ノ導函數ヲ求メルノデアル．之ガタメニ (1) 式ノ計算ニ必要ナ豫備ノ定理ニツイテ述ベル．

定理 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ 但シ x ハ角ノ弧度ヲ表ハス．

[證明] ∠AOB ヲ正ノ銳角，O ヲ中心トシ $r=1$ ナル長サノ半徑ヲ有スル圓ガ，角ノ邊ト交ル點ヲ A, B トシ，A ニ於ケル此ノ圓ノ切線ト OB ノ延長トノ交點ヲ T トスルト



$$\triangle OAB<\text{扇形 }OAB<\triangle OAT.$$

故ニ ∠AOB ノ弧度ヲ x トスルト半徑ハ 1 ナル故，

$\triangle AOB$ ノ面積 $=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin x=\dfrac{1}{2}\sin x.$

扇形 OAB ノ面積 $=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\cdot x=\dfrac{1}{2}x.$

$\triangle AOT$ ノ面積 $=\dfrac{1}{2}OA\cdot AT=\dfrac{1}{2}OA\cdot(OA\tan x)=\dfrac{1}{2}\tan x$

ナルヲ以テ,

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x.\quad 又ハ\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

$$\therefore\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル. 次ニ $0>-x>-\frac{\pi}{2}$ ナル $-x$ ニ對シテ

$$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x},\quad \cos(-x)=\cos x.\qquad \therefore\quad 1>\frac{\sin(-x)}{-x}>\cos(-x).$$

即チ (1) ノ關係ハ x ノ正負如何ニ拘ハラズ成立スル.

(1) ノ不等式ニ於テ $x\to 0$ ナルトキ $\cos x$ ノ極限値ハ 1 デアル. 故ニ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

是證明セントスル極限値デアル.

例題 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ ヲ求メヨ.

〔解〕 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

例題 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ ヲ求メヨ. 但シ $a\neq 0,\ b\neq 0$.

〔解〕 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{a}{b}\right\}=\frac{a}{b}.$$

三角函數ノ導函數

(I) $y=\sin x$ ノ導函數ハ $\cos x$ デアル.

〔證明〕 $$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

然ルニ豫備定理ニヨリ $\frac{\Delta x}{2}=\theta$ トオクト

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.\qquad 又\ \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\cos x.$$

〔例題〕 $y=\sin(2x^2-x+1)$ ナルトキ $\frac{dy}{dx}=\{\cos(2x^2-x+1)\}(4x-1)$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=(4x-1)\cos(2x^2-x+1).$$

(II) $y=\cos x$ ノ導函數ハ $-\sin x$ デアル.

〔證明〕 $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ デアルカラ函數ノ函數ノ導函數ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}(-1)=-\sin x.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\sin x.$$

〔注意〕 $\sin x$ ノ導函數ヲ求メルト同樣ナ手續デモ求メルコトガ出來ル.

〔例題〕 $y=\cos^3 x$ ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=(3\cos^2 x)(-\sin x)$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-3\sin x\cos^2 x.$$

(III) $y=\tan x$ ノ導函數ハ $\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ デアル.

〔證明〕 $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ デアルカラ商ノ導函數ノ公式ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\sec^2 x.$$

〔例題〕 $y=\tan(a^2-x^2)$ ナルトキハ $\frac{dy}{dx}=\sec^2(a^2-x^2)\cdot(-2x)$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-2x\sec^2(a^2-x^2).$$

(IV) $y=\cot x$ ノ導函數ハ $\frac{-1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$ デアル.

〔證明〕 $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ デアルカラ, 商ノ導函數ノ公式ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x.$$

〔例題〕 $y=\cot\dfrac{1}{x}$ ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}.$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{x}.$$

(V) $y=\sec x$ ノ導函數ハ $\tan x\sec x$ デアル.

〔證明〕 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ デアルカラ商ノ導函數ノ公式ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\tan x\sec x.$$

〔例題〕 $y=\sec(2x+1)$ ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}=\tan(2x+1)\sec(2x+1)\cdot 2.$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=2\tan(2x+1)\sec(2x+1).$$

(VI) $y=\operatorname{cosec} x$ ノ導函數ハ $-\cot x\cdot\operatorname{cosec} x$ デアル.

〔證明〕 $y=\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$ デアルカラ，商ノ導函數ノ公式ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\cot x\cdot\operatorname{cosec}x.$$

練 習 問 題 7.

次ノ各函數ヲ微分セヨ.

(1) $y=\sin^2 2x.$

(2) $y=\sqrt{1+\sin x}.$

(3) $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}.$

(4) $y=\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x.$

(5) $y=\sin^3\left(\dfrac{K}{\sqrt{x}}\right).$

(6) $y=\tan^2(n\sqrt[3]{x}).$

(7) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}.$

(8) $y=\dfrac{(\sin nx)^m}{(\cos mx)^n}.$

(9) 函數 $y=x^m\sin\dfrac{1}{x}$ ノ導函數ハ $m>2$ ナルトキ $x=0$ ニ於テ連續ニシテ $m\leqq 2$ ナルトキ不連續ナルコトヲ證明セヨ.

〔解 答〕

(1) $y'=2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x.$

(2) $y'=\dfrac{1}{2}(1+\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cos x=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{(1+\sin x)}}.$

(3) $y'=\dfrac{-\sin x\cdot(1-x^2)-(-2x)\cos x}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x\cdot\cos x-(1-x^2)\sin x}{(1-x^2)^2}.$

(4) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{3}\cdot 3\tan^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}(1+\tan^2 x)=\dfrac{\sec^2 x}{\cos^2 x}=\sec^4 x.$

(5) $y'=3\sin^2\left(\dfrac{K}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(\dfrac{K}{\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{-K}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{3K}{2}\,\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{K}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(\dfrac{K}{\sqrt{x}}\right)}{x^{\frac{3}{2}}}.$

(6) $y'=2\tan(n\sqrt[3]{x})\cdot\sec^2(n\sqrt[3]{x})\cdot n\cdot\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2n}{3}x^{-\frac{2}{3}}\tan x(n\sqrt[3]{x})\sec^2(n\sqrt[3]{x}).$

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2\cot^2 x+b^2}}=(a^2\cot^2 x+b^2)^{-\frac{1}{2}}.$ (但 $\sin x>0$ トス)

$$\therefore\quad y'=-\frac{1}{2}(a^2\cot^2 x+b^2)^{-\frac{3}{2}}(-2a^2\cot x\cdot\operatorname{cosec}^2 x)$$

$$=\frac{a^2\cot x\operatorname{cosec}^2 x}{(a^2\cot^2 x+b^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2\cot x\cdot\operatorname{cosec}^2 x\cdot\sin^3 x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{a^2\cos x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$ ($\sin x<0$ ノトキモ同ジ結果ナル)

(8) $y'=\dfrac{m(\sin nx)^{m-1}\cos nx\cdot n(\cos mx)^n-n(\cos mx)^{n-1}\cdot(-\sin mx\cdot m)(\sin nx)^m}{(\cos mx)^{2n}}$

$$=\frac{mn(\sin nx)^{m-1}(\cos nx\cdot\cos mx+\sin mx\sin nx)}{(\cos mx)^{n+1}}$$

$$=\frac{mn(\sin nx)^{m-1}\cos(m-n)x}{(\cos mx)^{n+1}}.$$

(9) $f'(x)=mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}+x^m\cos\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}$

$$=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x}.$$

故ニ $m>2$ ナルトキハ

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=m\lim_{x\to 0}x^{m-1}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}x^{m-2}\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=0.$$

從ツテ $f'(0)=0$ ト定ムレバ $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$ トナリ連續トナル.

$m=2$ ナルトキハ

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=m\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

トナリ此ノ結果ハ不定トナル.

$m<2$ ナルトキハ

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \to \infty \text{ トナル.}$$

故ニ $f'(x)$ ハ $m>2$ ナルトキ連續ニシテ $m\leqq 2$ ナルトキ不連續トナル.

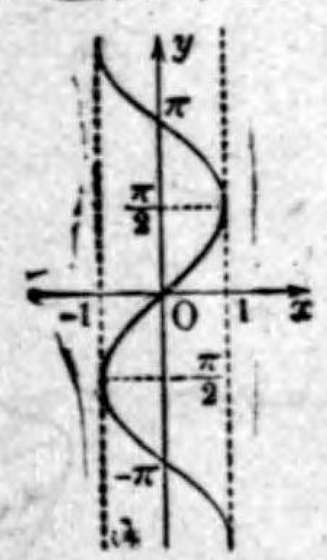
第八章　逆三角函數ノ微分法

逆三角函數ノ導函數

(i) $y=\sin^{-1}x$ ノ導函數ハ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ デアル. 但シ

$$-\frac{\pi}{2}\leqq \sin^{-1}x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

[證明] $y=\sin^{-1}x$ ト $x=\sin y$ トハ x, y ニ關シテ同一關係式デアル. 而シテ $x=\sin y$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メルコトガ出來ルカラ, 其ヨリ $y=\sin^{-1}x$ ノ導函數ヲ導イタ方ガ便利デアル. 但シ $y=\sin^{-1}x$ ハ其ノぐらふヨリ明カナル如ク, -1 ヨリ 1 ニ至ル x ノ變域內ニ於テ無限多値函數デアルカラ, 之ヲ一値函數ナラシメナケレバナラナイ. 故ニ次ノ如ク制限スル.



$$-\frac{\pi}{2}\leqq \sin^{-1}x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

此ノ制限ノモトニ $y=\sin^{-1}x$ ノぐらふハ左圖ノ太線ノ部分トナル. 從ツテ其ノ各點ニ於ケル切線ノ方向角 α ハ常ニ銳角ニシテ $\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha>0$ トナル. サテ $y=\sin^{-1}x$ ヲ書キ換ヘタ $x=\sin y$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$1=\cos y\frac{dy}{dx}. \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

然ルニ $-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq \dfrac{\pi}{2}$ ナル y ニ對シテ, $\cos y$ ハ正又ハ零デアルカラ, 複號ノウチ正號ノミヲトラネバナラナイ. 故ニ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \left(\frac{dy}{dx}=\tan\alpha>0 \text{ ヨリモ亦正}\right)$$

〔例題〕 $y=\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$ ナルトキハ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{-1}{x^2}. \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

然ルニ $x>0$ ナラバ $\sqrt{x^2}=x$. $x<0$ ナラバ $\sqrt{x^2}=-x$.

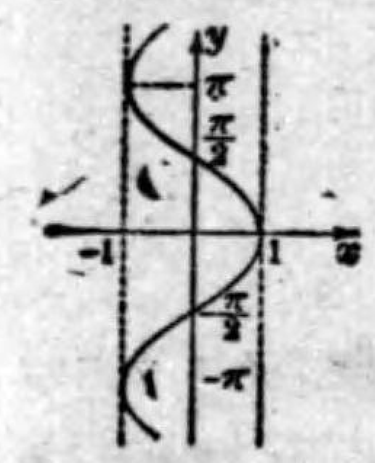
故ニ $x>0$ ナラバ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

$x<0$ ナラバ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

(ii) $y=\cos^{-1}x$ ノ導函數ハ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ デアル. 但シ

$$0\leqq \cos^{-1}x\leqq \pi.$$

[證明] $y=\cos^{-1}x$ ト $x=\cos y$ トハ x, y ニ關シテ同一關係式デアル. 而シテ $x=\cos y$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メルコトガ出來ルカラ, 其ヨリ $y=\cos^{-1}x$ ノ導函數ヲ導イタ方ガ便利デアル. 但シ $y=\cos^{-1}x$ ハ其ノぐらふヨリ明ナル如ク -1 ヨリ 1 ニ至ル變域內ニ於テハ y ノ無限多値函數デアルカラ, 之ヲ一値函數ナラシメネバナラナイ. 故ニ次ノ如ク制限スル.



$$0\leqq \cos^{-1}x\leqq \pi.$$

コノ制限ノモトニ $y=\cos^{-1}x$ ノぐらふハ左圖ノ太線ノ部分トナル. 從ツテ其ノ各點ニ於ケル切線ノ方向角 α ハ常ニ鈍角ニシテ,

$\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha<0$ トナル.

サテ $y=\cos^{-1}x$ ヲ書キ換ヘタ $x=\cos y$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$1=-\sin y\frac{dy}{dx}. \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin y}=\frac{\mp 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

然ルニ $0\leqq y\leqq \pi$ ナル y ニ對シテ $\sin y$ ハ正又ハ零デアルカラ, 複號ノ中負ノミヲトラネバナラナイ.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \left(\frac{dy}{dx}=\tan\alpha<0 \text{ ヨリモ亦負}\right)$$

〔例題〕 $y=\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$ ナルトキハ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2}}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

然ルニ $x>0$ ナラバ $\sqrt{x^2}=x$, $x<0$ ナラバ $\sqrt{x^2}=-x$.

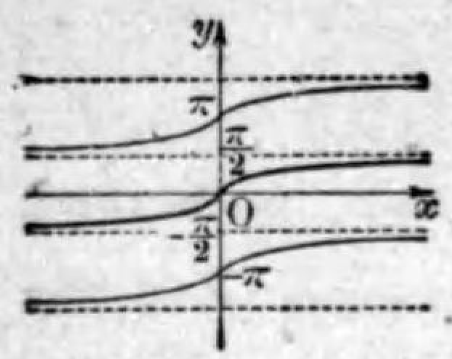
故ニ $x>0$ ナラバ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

$x<0$ ナラバ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

(iii) $y=\tan^{-1}x$ ノ導函數ハ $\dfrac{1}{1+x^2}$ デアル. 但シ

$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}.$$

[證明] $y=\tan^{-1}x$ ト $x=\tan y$ トハ x,y ＝關シテ同一ノ關係式デアルカラ $x=\tan y$ ヨリ其ノ導函數ヲ求メタ方ガヨイ．但シ $y=\tan^{-1}x$ ハ其ノぐらふヨリ明ナル如ク，x ノ値ノ如何＝拘ハラズ y ノ無限多値函數デアルカラ，之ヲ y ノ一値函數ナラシメルタメ＝次ノ制限ヲ設ケル．



$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}.$$

此ノ制限ノモト＝函數 y ノぐらふハ圖ノ太線デ表ハサレル．從ツテ其ノ切線ノ方向角 α ハ常＝鋭角＝シテ $\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha>0$ トナル．

此ノ際ハ x ＝制限ガナイカラ $x=\tan y$ ヲ直＝微分シテ

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+x^2.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}.$$

[例題] $y=2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)(1+x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

$$=\frac{-(1+x)}{2(1+x)}\cdot\left\{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{-1}{2}\left\{\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[別解] 與式ヨリ　$\tan^2\dfrac{y}{2}=\dfrac{1-x}{1+x}$.　　$1+\tan^2\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{1+x}$.

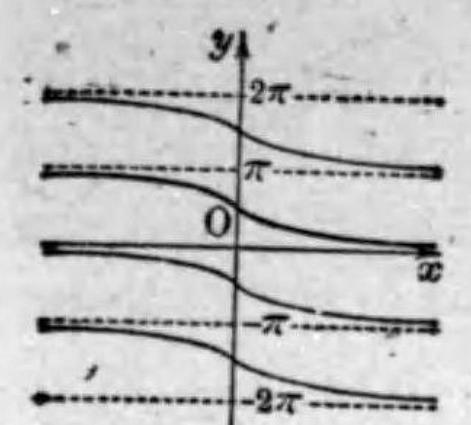
$\cos^2\dfrac{y}{2}=\dfrac{1+x}{2}$.　　$2\cos^2\dfrac{y}{2}-1=x$.　　$\cos y=x$.　　$y=\cos^{-1}x$.

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iv)　$y=\cot^{-1}x$ ノ導函數ハ $-\dfrac{1}{1+x^2}$ デアル．但シ

$$0<\cot^{-1}x<\pi.$$

[證明] $y=\cot^{-1}x$ ト $x=\cot y$ トハ x,y ＝關シテ同一關係式デアルカラ，$x=\cot y$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メタ方ガ便利デアル．但シ $y=\cot^{-1}x$ ハ其ノぐらふヨリ明ナル如ク，x ノ値ノ



如何＝拘ハラズ y ノ無限多値函數デアルカラ，之ヲ y ノ一値函數ナラシメルタメ＝，次ノ制限ヲ設ケル．

$$0<\cot^{-1}x<\pi.$$

コノ制限ノモト＝ $y=\cot^{-1}x$ ノぐらふハ左ノ太圖ノ如クデアル．

從ツテ其ノ各點＝於ケル切線ノ方向角 α ハ鈍角＝シテ $\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha<0$ トナル．

此ノ際モ亦 x ＝制限ガナイカラ $x=\cot y$ ヲ y ＝ツイテ直＝微分シテ

$$\frac{dx}{dy}=-\operatorname{cosec}^2 y=-(1+x^2).$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}.\qquad \left(\frac{dy}{dx}=\tan\alpha<0\ \text{ヨリモ亦負}\right)$$

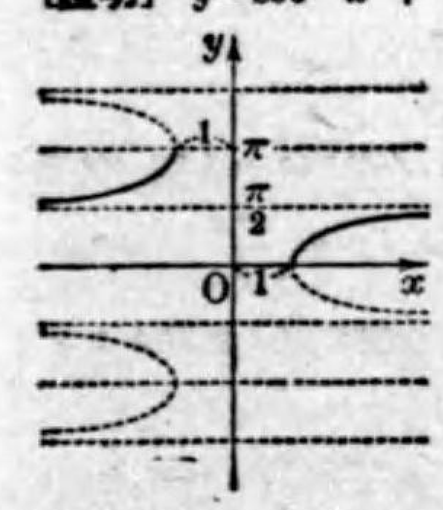
[例題] $y=\cot^{-1}\sin x$　ナルトキハ　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

(v)　$y=\sec^{-1}x$ ノ導函數ハ $\pm\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ デアル．但シ

$$0<\sec^{-1}x<\pi.$$

[證明] $y=\sec^{-1}x$ ト $x=\sec y$ トハ x,y ＝關シテ同一關係式デアルカラ，$x=\sec y$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メタ方ガ便利デアル．但シ $y=\sec^{-1}x$ ハ其ノぐらふヨリ明ナル如ク，$|x|\geqq 1$ ナル x ノ値＝對シテ y ノ無限多値函數デアルカラ，之ヲ y ノ一値函數ナラシメルタメ＝次ノ制限ヲ設ケル．



$$0<\sec^{-1}x<\pi.$$

コノ制限ノモト＝ $y=\sec^{-1}x$ ノぐらふハ左圖ノ如クデアル．

從ツテ其ノ各點＝於ケル切線ノ方向角 α ハ鋭角＝シテ $\dfrac{dy}{dx}=\tan\alpha>0$ トナル．故＝ $|x|\geqq 1$ ナル總テノ x ＝對シテ $\dfrac{dy}{dx}>0$ ナル如ク符號ヲ定メネバナラナイ．

サテ $x=\sec y$ ヲ y ＝ツイテ微分シテ

$$\frac{dx}{dy}=\sec y\tan y=\pm x\sqrt{x^2-1}.$$

然ル＝ $0<\sec^{-1}x<\pi$ ナルトキ $\sec y\tan y>0$ デアルカラ $x>0$ ナルトキ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}>0.$$

又 $x<0$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}>0.$$

〔例題〕 $y=\sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ヨリ $\cos y=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

從ツテ $\sin^2 y=1-\cos^2 y=\frac{x^2}{a^2}$.

$$\therefore\quad \sin y=\pm\frac{x}{a}.\quad \cos y\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{a}.$$

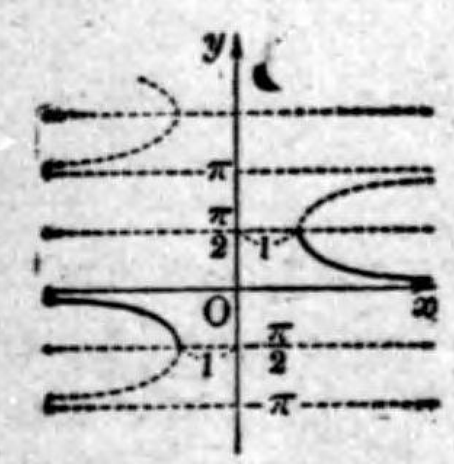
$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{a\cos y}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(vi) $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ ノ導函數ハ $\pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ デアル. 但シ

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{cosec}^{-1}x<\frac{\pi}{2}.$$

[證明] $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ ト $x=\operatorname{cosec}y$ トハ x,y ニ關シテ同一關係式デアルカラ $x=\operatorname{cosec}y$ ヨリ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メタ方ガ便利デアル. 但シ $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ ハ其ノぐらふヨリ明ナル如ク, $|x|\geqq 1$ ナル x ノ總テノ値ニ對シテ y ノ無限多値函數デアルカラ, 之ヲ y ノ一値函數ナラシメルタメニ次ノ制限ヲ設ケル.



$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{cosec}^{-1}x<\frac{\pi}{2}.$$

コノ制限ノモトニ函數 $y=\operatorname{cosec}^{-1}x$ ノぐらふハ左圖ノ太線ノ部分トナル. 從ツテ其ノ各點ニ於ケル切線ノ方向角 α ハ常ニ鈍角ニシテ $\frac{dy}{dx}=\tan\alpha<0$ トナル. 故ニ $|x|\geqq 1$ ナル總テノ y ニ對シテ $\frac{dy}{dx}<0$ ナル如ク符號ヲ定メネバナラナイ.

サテ $x=\operatorname{cosec}y$ ノ兩邊ヲ y ニツイテ微分スルト

$$\frac{dx}{dy}=-\operatorname{cosec}y\cot y=\pm x\sqrt{x^2-1}.$$

然ルニ $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{cosec}^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ ナルトキ $\operatorname{cosec}y\cot y>0$. 故ニ

$x>0$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}<0.$$

$x<0$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}<0.$$

〔例題〕 $y=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ナルトキハ $\operatorname{cosec}y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ トナル.

從ツテ $\operatorname{cosec}^2 y=\frac{1+x^2}{x^2}$.

$$\tan^2 y=\frac{1}{\cot^2 y}=\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y-1}=\frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}-1}=x^2.$$

$$\therefore\quad \tan y=\pm x.\qquad y=\tan^{-1}\pm x.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{1+x^2}.$$

練 習 問 題 8.

(1) $y=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.　　(2) $y=\sin^{-1}(\sqrt{\sin x})$.

(3) $y=\cos^{-1}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.　　(4) $y=\cos^{-1}\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

(5) $y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$.　　(6) $y=\tan^{-1}\{x+\sqrt{1-x^2}\}$.

(7) $y=\cot^{-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.　　(8) $y=\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}$.

【解 答】

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}\cdot\left\{2\sqrt{1-x^2}-\frac{4x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\right\}=\pm\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

$1-2x^2>0$ ナラバ $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. $1-2x^2<0$ ナラバ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x(1-\sin x)}}$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{(x^{2n}-1)^2}{(x^{2n}+1)^2}}}\cdot\frac{2nx^{2n-1}(x^{2n}+1)-2nx^{2n-1}(x^{2n}-1)}{(x^{2n}+1)^2}$.

故ニ n ガ偶數ナラバ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$.

n ガ奇數ナラバ x ノ正負ニ從ツテ $\frac{dy}{dx}=\mp\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$.

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)^2}}\frac{-a\sin x(a+b\cos x)+b\sin x(b+a\cos x)}{(a+b\cos x)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(a^2-b^2)\sin^2 x}{(a+b\cos x)^2}}}\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a+b\cos x)^2}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$.

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\cdot\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}+\frac{a-b}{a+b}\sin^2\frac{x}{2}}$.

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot(a+b)\cdot\frac{1}{a+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\,\frac{1}{a+b\cos x}.$$

(6) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\{x+\sqrt{1-x^2}\}^2}\left\{1+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2}\,\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{2\{1+x\sqrt{1-x^2}\}\sqrt{1-x^2}}.$$

(7) $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^{-\frac{1}{2}}-1-x^{-\frac{1}{2}}}{2(x+1)}=\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}.$$

(8) $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{-2}{2(1+x^2)}=\frac{-1}{1+x^2}.$$

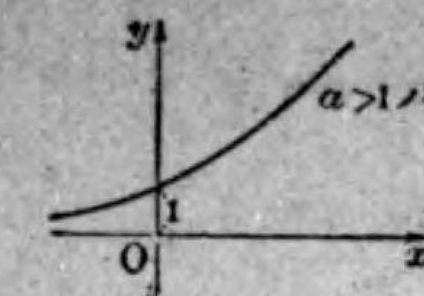
第九章　指數函數ノ微分法

指數函數　a ヲ正ノ一定數トスルトキ

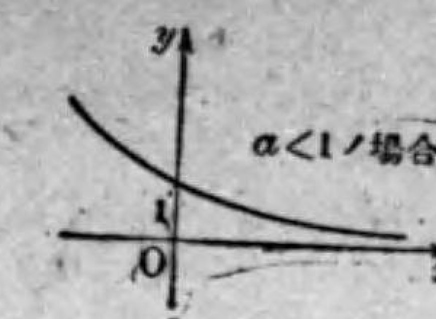
$$y=a^x$$

ナル函數ヲ**指數函數**ト云ヒ，a ヲ其ノ底ト云フ．$a=1$ ナルトキハ，y ハ x ノ値如何＝拘ハラズ常數トナルカラ，此ノ場合ハ除クノデアル．又 x ガ無理數ノ場合モ，有理數ノ場合ト同樣＝取扱ツテヨイコトガ證明セラレルカラ，以後ハ一般＝實數ヲ表ハスモノトシテ取扱フ．

指數函數 $y=a^x$ ハ底 a ガ1ヨリ大ナル場合＝ハ，x ノ増加＝從ツテ次第＝増加シ，x ガ無限大トナルトキ y モ亦無限大トナル．又 a ガ1ヨリ小ナル場合＝ハ x ノ増加＝從ツテ次第＝減少シ，x ガ無限大トナルトキ y ハ無限小トナル．コレラノコトハ初等代數學ノ力デ常識的＝ [illegible]ル．故＝ $y=a^x$ ノぐらふハ次ノ如クナル．



$$y=a^x$$



豫備定理　指數函數 $y=a^x$ ノ導函數ハ

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$$

ヲ計算シテ得ラレルノデアルガ，此ノ計算ハ今マデノ知識デハ不可能デアルカラ，豫備定理ガ必要トナルノデアル．

定理 1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ **ハ有限確定デアル．**

[證明]　x ヲ一ツノ正ノ整數 n ＝等シイト考ヘルト，二項定理＝ヨリ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{n-(n-2)\}\{n-(n-1)\}}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\quad\cdots\cdots(1).$$

同樣＝シテ

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\cdots(2).$$

(1) ト (2) トノ右邊ノ各項ヲ比較スルト，第一項，第二項ハ同一デアルガ，第三項以下＝於テハ (1) ノ各項ヨリモ，(2) ノ之＝對スル項ノ方ガ大＝シテ，且 (2) ノ方ガ最後ノ一項ダケ多イ．故＝次ノ不等式ガ成立ツ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

即チ n ノ値ノ増加＝從ツテ，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ハ次第＝増大スル．

然ル＝ (1) ヨリ $n>1$ ナルトキ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

ニシテ

$$3!=3\cdot2>2^2,\qquad 4!=4\cdot3\cdot2>2^3,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad n!>2^{n-1}$$

デアルカラ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

即チ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ハ n ノ增大ト共ニ增大スルガ，決シテ3ヲ超ユルコトガナイ．即チ n ガ正ノ整數ニシテ無限大トナルトキ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ハ3ヨリ大デナイ有限確定ナル極限値ヲ有スルコトヲ知ル．此ノ極限値ヲ e ナル文字デ表ハスコトトスルト

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e ノ値ハ實際計算ノ結果 $e=2\cdot71828\cdots\cdots$ トナルノデアル．上ノ證明ハ n ガ正ノ整數ニ限リ考ヘタノデアルガ，必ズシモ整數ニ限ル必要ハナイ．之ガタメニ今 x ヲ二ツノ整數 n, $n+1$ ノ間ノ數トスル．即チ

$$n\leqq x<n+1.$$

而シテ

$$\frac{1}{n}\geqq\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}.\qquad\therefore\quad 1+\frac{1}{n}\geqq1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}.$$

從ツテ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

即チ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

コヽニ於テ $x\to\infty$ トスルト勿論 $n\to\infty$, $(n+1)\to\infty$.

從ツテ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\qquad \lim_{(n+1)\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=1,$$

ナル故

$$e\geqq\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\geqq e.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

トナリ，x ガ如何ナル整數分數無理數即チ如何ナル正ノ實數ナルトキモ成立スル．

次ニ $x\to-\infty$ ナルトキ先ヅ $x=-z$ トオクト，勿論 $x\to-\infty$ ナルトキ $z\to\infty$ トナル．

而シテ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\left(\frac{z}{z-1}\right)^z=\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^z=\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right).$$

故ニ

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=e\cdot1=e.$$

故ニスベテノ場合ヲ綜合シテ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

系 上ノ x ノ代リニ $\frac{1}{x}$ ヲ代入スルト

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

定理 2.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

［證明］ 二項定理ニヨリ $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

(1) ノ兩邊ニ於テ $n\to\infty$ ナラシメルト

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) ヨリ

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

(3) ニ於テ $x\to0$ ナラシメルト右邊ハ1トナルカラ

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

［注意］ 此ノ證明ニ關シテハ第五編及ビ第六編ヲ參照セヨ．

指數函數ノ導函數 以下上ノ定理ヲ用ヒテ $y=e^x$ ノ導函數ヲ求メ其ノ結果ヲ應用シテ $y=a^x$ ノ導函數ヲ求メルノデアル．

(i) $y=e^x$ ノ導函數ハ e^x デアル．

［證明］

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}e^x\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

然ル＝豫備定理2＝ヨリ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1. \qquad 又\ \lim_{\Delta x\to 0}e^{x}=e^{x}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=e^{x}.$$

コレ底eナル指數函數ノ導函數＝シテ元ノ函數ト同一デアル．

例題 $y=e^{2x^2-3x+1}$ ノ導函數ヲ求メヨ．

[解] $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x^2-3x+1}\cdot(4x-3).$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=(4x-3)e^{2x^2-3x+1}.$$

(ii) $y=a^x$ ノ導函數ハ $a^x\log_e a$ デアル．但シ $a>0$ トス．

[證明] $y=a^x$ ハ之ヲeヲ底トスル指數函數＝書キ換ヘルコトガ出來ル．之ガタメeヲ底トシテ兩邊ノ對數ヲトルト

$$\log_e y=\log_e a^x=x\log_e a. \qquad \therefore\ y=e^{x\log_e a}.$$

故＝合成函數ノ導函數ノ公式ヲ用ヒテ

$$\frac{dy}{dx}=e^{x\log_e a}\cdot\log_e a=a^x\log_e a.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=a^x\log_e a.$$

例題 $y=a^{-\frac{1}{x}}$ ナルトキ其ノ導函數ヲ求メヨ．

[解] $\dfrac{dy}{dx}=a^{-\frac{1}{x}}\log_e a\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\log_e a}{x^2}a^{-\frac{1}{x}}.$$

練 習 問 題 9.

次ノ各函數ヲ微分セヨ．

(1) $y=x^ne^{-x^2}$.　(2) $y=e^{\sin x}$.

(3) $y=e^{mx^3}\cos kx$.　(4) $y=\tan(e^{kx^2})$.

(5) $y=e^{ax}\sin bx$.　(6) $y=e^{k\tan^{-1}(x^2)}$.

(7) $y=a^{\tan x}$.　(8) $y=a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}$.

[解 答]

(1) $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}e^{-x^2}+x^ne^{-x^2}(-2x).$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=e^{-x^2}x^{n-1}(n-2x^2).$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=e^{\sin x}\cdot\cos x.$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=e^{mx^3}\cdot 3mx^2\cdot\cos kx+e^{mx^3}(-\sin kx)k.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=e^{mx^3}(3mx^2\cos kx-k\sin kx).$$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\sec^2(e^{kx^2})\cdot e^{kx^2}\cdot 2kx=2kxe^{kx^2}\sec^2(e^{kx^2}).$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=ae^{ax}\sin bx+b\cos bx\cdot e^{ax}.$

(6) $\dfrac{dy}{dx}=e^{k\tan^{-1}(x^2)}\cdot k\cdot\dfrac{1}{1+x^4}\cdot 2x.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2kxe^{k\tan^{-1}(x^2)}}{1+x^4}.$$

(7) $\dfrac{dy}{dx}=a^{\tan x}\log_e a\cdot\sec^2 x=\log_e a\cdot a^{\tan x}\sec^2 x.$

(8) $\dfrac{dy}{dx}=a^{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}\cdot\log_e a\cdot-\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x).$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{xa^{\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}}\log_e a}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

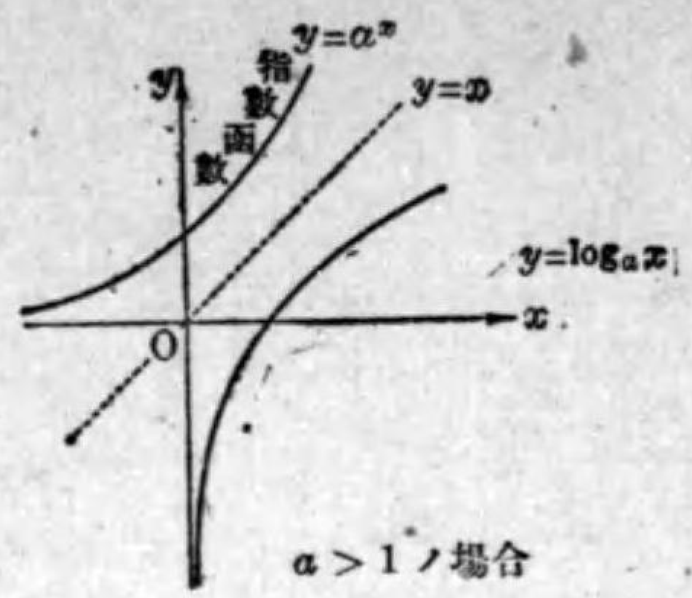
第十章　對數函數及ビ媒介變數ニヨル函數ノ微分法

對數函數 指數函數 $y=a^x$ ＝於テ x, y ヲ入レ換ヘテ得ル $x=a^y$ ヲ y ＝ツイテ解キ得ルモノトシ記號デ表ハスト

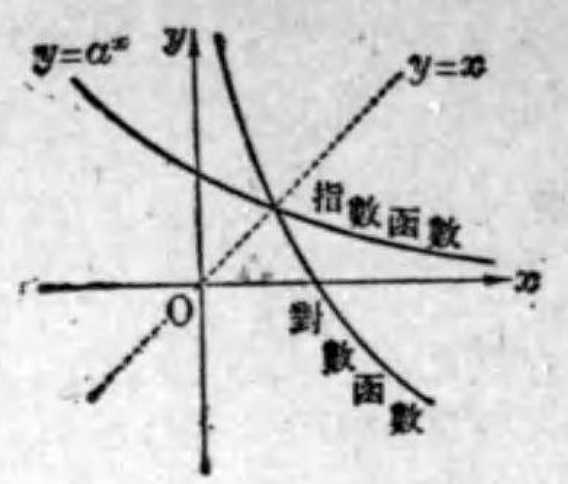
$$y=\log_a x.$$

之ヲ**對數函數**ト云フ．故＝對數函數ハ指數函數ノ逆函數デアル．コヽ＝aヲ對數函數ノ**底**ト云フ．卽チ底ハ其ノ逆函數ナル指數函數ノ又底デアル．

對數函數ハ指數函數ノ逆函數デアルカラ，其ノぐらふハ指數函數ノぐらふヲ $x=y$ ナル直線＝關シテ對稱＝書クコト＝ヨリ得ラレル．卽チ次ノ如クナル．



$a>1$ ノ場合



$a<1$ ノ場合

ぐらふヨリ明ナル如ク對數函數 $y=\log_a x$ ハ x ノ正ノ値ニ對シテノミ其ノ値ヲ有スル．而シテ $a>1$ ナルトキ x ノ增加ニ從ツテ函數ハ增加シ，$x\to+\infty$ ナルトキ $y\to\infty$ トナル．又 $x\to 0$ ナルトキハ $y\to-\infty$ トナル．

$a<1$ ナルトキハ右ノぐらふカラ x ノ增加ニ從ツテ函數ハ減少シ，$x\to+\infty$ ナルトキニハ $y\to-\infty$ トナル．又 $x\to+0$ ナルトキ $y\to+\infty$ トナル．

$y=\log_a x$ ニ於テ $a=e$ トスルトキハ $y=\log_e x$ トナル．此ノ特別ナル底 e ヲ有スル對數ヲ**自然對數**又ハ **Napier** ノ對數ト云フ．微分學ニ於テハ主トシテ此ノ自然對數ヲ用ヒルカラ $\log_e x$ ノ e ヲ省略シテ $\log x$ ト書ク．故ニ今後單ニ $\log x$ トアルトキハ $\log_e x$ ノコトヲ指スノデアル．

(i) $y=\log x$ ノ導函數ハ $\dfrac{1}{x}$ デアル．

[證明] $y=\log x$ ヨリ　$x=e^y$ トナル．此ノ兩邊ヲ y ニツイテ微分スルト

$$\frac{dx}{dy}=e^y=x. \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

[注意] $x<0$ ナルトキ $y=\log(-x)$ トオキ兩邊ヲ合成函數ノ微分法ニヨリ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{-x}\times(-1)=\dfrac{1}{x}$ トナル．即チ $x>0$ ナルトキノ $\log x$ ノ微分係數ト同ジ式ニテ與ヘラレル．故ニ x 正負ニ拘ラズ $\dfrac{d}{dx}\log|x|=\dfrac{1}{x}$.

(ii) $y=\log_a x$ ノ導函數ハ $\dfrac{1}{x}\log_a e$ デアル．

[證明] $y=\log_a x$ ヨリ　$x=a^y=e^{y\log_e a}$ …………(1)　トナル．何トナレバ

$x=a^y$ ノ兩邊ノ對數ヲトルト $\log x=y\log_e a$ ナル故 $x=e^{y\log_e a}$.

(1) ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$1=e^{y\log_e a}\cdot\log_e a\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\log_e a}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

但シ

$$\log_e a\cdot\log_a e=1.$$

例題 $\log_a(2x^2-6x+1)$ ノ導函數ヲ求メヨ．

[解]
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^2-6x+1}\log_a e\cdot(4x-6)=\frac{4x-6}{2x^2-6x+1}\log_a e.$$

(iii) 對數微分法 與ヘラレタ函數ヲ直接ニ微分スル代リニ其ノ對數ヲトリ，之ヲ微分スル方ガ便利ナ場合ガ多イ．斯樣ニシテ微分スルコトヲ**對數微分法**ト云フ．例ヘバ

$$y=\frac{(\sin nx)^m}{(\cos mx)^n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ兩邊ノ對數ヲトルト

$$\log y=m\log\sin nx-n\log\cos mx\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

兩邊ヲ x デ微分スルト左邊ハ x ノ函數ナル y ノ函數デアルカラ合成函數ノ微分法ニヨリ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=mn\frac{\cos nx}{\sin nx}+mn\frac{\sin mx}{\cos mx}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{mn(\sin nx)^{m-1}\cos(mx-nx)}{(\cos mx)^{n+1}}.$$

[注意] (1)式ノ y, $\sin nx$, $\cos mx$ ハ必ズシモ正トハ限ラヌ．依ツテ(1)式ヨリ(2)式ヲ無斷デ誘導スルハ不當ナルガ，(1) 式ヨリ $\log|y|=m\log|\sin nx|-n\log|\cos mx|$ ……(4)トナル．兩邊ヲ x デ微分スルト (3) 式ヲ得ル．即チ結果ハ同一デアル．從ツテ今後記號ノ簡便ノタメ (4) ノ代リニ (2) ヲ用ヒル．

時トシテハ對數微分法ヲ用ヒナイト，導函數ヲ求メ難イ場合ガアル．例ヘバ

$$y=x^x \text{ ナルトキハ } \log y=x\log x.$$

兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x+\frac{x}{x}=1+\log x.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=x^x(1+\log x).$$

コレヲ他ノ方法デ求メルト非常ニ困難トナル．

媒介變數ニヨル函數ノ微分法 x 及ビ y ノ何レモガ他ノ一ツノ變數 t ノ函數ナルトキハ，一般ニ y ハ x ノ函數デアルト考ヘルコトガ出來ル．例ヘバ

$$x=f(t)\cdots\cdots(1),\qquad y=F(t)\cdots\cdots(2)$$

ナルトキ，兩式ヨリ t ヲ消去スルト，x ト y トノ間ノ關係式ヲ得ル．即チ y ハ x ノ函數トナル．從ツテ x ニ關スル導函數ヲ考ヘルコトガ出來ル．此ノ際 t ノコトヲ**媒介變數**ト云フ．

(1) ヨリ t ハ x ノ函數デアルカラ合成函數ノ微分法ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}.$$

然ルニ $\quad \dfrac{dt}{dx}\,\dfrac{dx}{dt}=1 \quad$ ナルニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

コレ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メル公式デアル．

例題 $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ．

[解] $\quad \dfrac{dx}{dt}=-a\sin t. \qquad \dfrac{dy}{dt}=a\cos t.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-a\cos t}{a\sin t}=-\cot t.$$

[注意] $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ ヨリ t ヲ消去スルト

$$x^2+y^2=a^2.$$

此ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-\cot t$$

トナリ，上ノ結果ト一致スル．

練 習 問 題 10.

次ノ各函數ヲ微分セヨ．

(1) $y=\log\dfrac{x}{1+x}.$ (2) $y=\log(1+e^{x^2}).$

(3) $y=\log\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$ (4) $y=\log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}.$

(5) $y=\log\{\log(a+bx^n)\}.$ (6) $y=\log\sqrt{\dfrac{1-(\cos x)^n}{1+(\cos x)^n}}.$

(7) $y=(\tan x)^{\sin x}.$ (8) $y=x^{x^x}.$

(9) 次ノ各式ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ．

(i) $x=e^{\frac{x-y}{y}}.$ (ii) $e^y=x\sin(a+y).$

(10) $x=\dfrac{3at}{1+t^3},\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ．

[解 答]

(1) $y=\log x-\log(1+x).\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{x(1+x)}.$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{x^2}\cdot 2x}{1+e^{x^2}}=\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}.$

(3) $y=\log(1+\sqrt{x})-\log(1-\sqrt{x}).\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}.$$

(4) $y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\{\sqrt{1+x^2}+x\}^2}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\{\sqrt{1+x^2}+x\}^2}{1+x^2-x^2}$

$=\log\{\sqrt{1+x^2}+x\}.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\log(a+bx^n)}\,\dfrac{1}{a+bx^n}\,nbx^{n-1}=\dfrac{nbx^{n-1}}{(a+bx^n)\log(a+bx^n)}.$

(6) $y=\dfrac{1}{2}\log\{1-(\cos x)^n\}-\dfrac{1}{2}\log\{1+(\cos x)^n\}.$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\,\frac{-n(\cos x)^{n-1}(-\sin x)}{1-(\cos x)^n}-\frac{1}{2}\,\frac{n(\cos x)^{n-1}(-\sin x)}{1+(\cos x)^n}$$

$$=\frac{n\sin x(\cos x)^{n-1}}{1-(\cos x)^{2n}}.$$

(7) $\log y=\sin x\log\tan x.$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}=\cos x\log\tan x+\sin x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=(\tan x)^{\sin x}(\cos x\log\tan x+\sec x).$$

(8)　$\log y=x^x\log x.$　　$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dx^x}{dx}\cdot\log x+x^x\cdot\frac{1}{x}.$

然ルニ 63 頁ノ例ニヨリ　$\frac{dx^x}{dx}=x^x(1+\log x).$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=y\left\{x^x(1+\log x)\log x+x^x\frac{1}{x}\right\}.$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{x^x}x^x\left\{\frac{1}{x}+\log x+(\log x)^2\right\}.$$

(9)　(i)　$\log x=\frac{x-y}{y}=\frac{x}{y}-1.$　　$\therefore y=\frac{x}{1+\log x}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\log x)-\frac{x}{x}}{(1+\log x)^2}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}.$$

(ii)　兩邊ヲ y デ微分シテ

$$e^y=\frac{dx}{dy}\sin(a+y)+x\cos(a+y).$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin(a+y)}{e^y-x\cos(a+y)}.$$

然ルニ　$x=\frac{e^y}{\sin(a+y)}.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{e^y\{\sin(a+y)-\cos(a+y)\}}.$$

(10)　$\frac{dx}{dt}=\frac{3a(1+t^3)-3t^2\cdot 3at}{(1+t^3)^2}=\frac{3a-6at^3}{(1+t^3)^2}=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}.$

$\frac{dy}{dt}=\frac{6at(1+t^3)-3t^2 3at^2}{(1+t^3)^2}=\frac{6at-3at^4}{(1+t^3)^2}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

第三編　導函數ノ應用

第十一章　微分商ヲ求メル簡便法

導函數ト微分商　既ニ述ベタ如ク函數 $y=f(x)$ ノ $x=a$ ニ於ケル微分商ヲ求メルニハ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ計算スルノデアルガ，此ノ計算ハ一般ニ困難デアルカラ次ノ簡便法ニ依ルノデアル．

$x=a$ ニ於ケル $f(x)$ ノ微分商ヲ求メルニハ $f(x)$ ノ導函數 $f'(x)$ ヲ求メ然ル後 x ヲ a ト置イテ得ル $f'(a)$ ガ求メルモノデアル．但シ導函數中ノ x ニ a ヲ代入シテ無意味トナル場合ニハ，上ノ (1) 式ニヨリ直接ニ求メルノデアル．

例題 1.　$f(x)=2\sin^3 2x+6x^2$ ナルトキ $x=\pi$ ニ於ケル微分商ヲ求メヨ．

〔解〕 $f'(x)=12\sin^2 2x\cos 2x+12x$ デアルカラ $x=\pi$ ヲ代入シテ，求メル微分商ハ

$$f'(\pi)=12\pi.$$

例題 2.　$y=\sqrt{1-x^2}$ ナルトキ $x=1$ ニ於ケル微分商ヲ求メヨ．

〔解〕 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ デアルカラ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{1}{0}$ トナリ無意味トナル．然ルニ $x=1$ ニ於テハ $y=\sqrt{1-x^2}$ ハ左方連續デアルカラ，斯樣ナ場合ニハ

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{1-(1+\Delta x)^2}-\sqrt{1-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}-\sqrt{-\frac{\Delta x(2+\Delta x)}{(\Delta x)^2}}=\lim_{\Delta x\to -0}-\sqrt{-\frac{2}{\Delta x}-1}=-\infty$$

トナリ左方微分商ガ $-\infty$ トナル．

〔注意〕 特別ノ場合ヲ除キ一般ニ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\frac{A}{0}$ ナル形ナルトキハ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\pm\infty$ ト取扱ッテモヨイ．但シ A ハ零デナイ常數トスル；複號ハイヅレカ一方ヲトル．

第十二章　切線及ビ法線

導函數ト切線及ビ法線　一點 (a, b) ヲ過リ方向係數 m ナル直線

ノ方程式ハ $y-b=m(x-a)$ デアル．今曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$，其ノ上ノ任意ノ點 P ヲ $(a,\ b)$ トスルト，P 點ニ於ケル此ノ曲線ノ切線ノ方向係數 m ハ

$$m=f'(a)$$

デアル．故ニ P ニ於ケル $y=f(x)$ ノ切線ノ方程式ハ

$$\boldsymbol{y-b=f'(a)(x-a)}$$

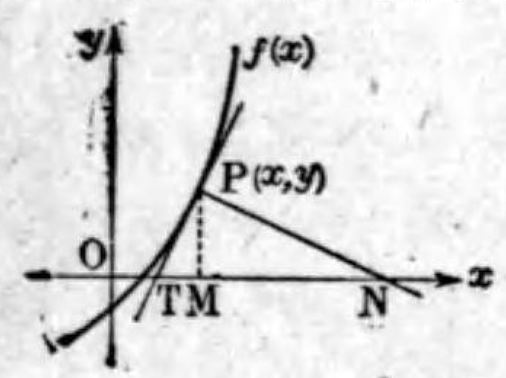
デアル．

従ツテ同ジ點ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$\boldsymbol{y-b=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)}$$

トナル．

定義　曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $\mathrm{P}(x,\ y)$ ヨリ x 軸ニ下シタ垂線ノ足ヲ M トシ，



P ニ於ケル切線及ビ法線ガ x 軸ト交ハル點ヲ夫々 T, N トスルトキ TM ヲ**切線影**，MN ヲ**法線影**，PT ヲ**切線ノ長サ**，PN ヲ**法線ノ長サ**ト云フ．$\tan\angle\mathrm{PTN}=\dfrac{dy}{dx}$ デアルカラ

$$\mathrm{TM}=\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}},\qquad \mathrm{MN}=y\frac{dy}{dx},$$

$$\mathrm{PT}=\left|\frac{y}{\dfrac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right|,\qquad \mathrm{PN}=\left|y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right|$$

トナル．通例切線影 TM ハ M ガ T ノ右ニアレバ正，左ニアレバ負，法線影 MN ハ N ガ M ノ右ニアレバ正，左ニアレバ負ト規約スル．此ノ規約ノ結果上ノ式ハ符號マデ入レテ成立スル．又切線ノ長サ，法線ノ長サハ常ニ正ナルモノト定メル．

例題 1.　楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ上ノ一點 $(p,\ q)$ ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ．

[解]　與ヘラレタ方程式ヲ y ニ關シテ解クト

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

従ツテ　$\dfrac{dy}{dx}=\mp\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$．　$\therefore\ \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=p}=-\dfrac{b^2p}{a^2q}$．$\left(\because\ \begin{matrix}x=p\\ y=q\end{matrix}\right)$

故ニ曲線上ノ一點 $(p,\ q)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\boldsymbol{y-q=-\frac{b^2p}{a^2q}(x-p).}$$

之ヲ變形スルト

$$\boldsymbol{\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1.}\qquad\left(\because\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1\right).$$

又法線ノ方程式ハ

$$y-q=\frac{a^2q}{b^2p}(x-p).$$

之ヲ變形スルト

$$\boldsymbol{\frac{a^2x}{p}-\frac{b^2y}{q}=a^2-b^2}$$

トナル．

[注意]　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ兩邊ヲ x デ微分シテ $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\dfrac{dy}{dx}=0$, $x=p$ ノトキ $y=q$ デアルカラ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=p}=-\dfrac{b^2p}{a^2q}$ トシテモヨイ．

例題 2.　媒介變數 ϕ ヲ用ヒテ表シタ楕圓

$$x=a\cos\phi,\qquad y=b\sin\phi$$

上ノ一點 $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ．

[解]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\phi}}{\dfrac{dx}{d\phi}}=-\frac{b\cos\phi}{a\sin\phi}.\qquad\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\alpha}=-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}.$$

故ニ切線ノ方程式ハ

$$y-b\sin\alpha=-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}(x-a\cos\alpha).$$

之ヲ變形スルト

$$\boldsymbol{\frac{x\cos\alpha}{a}+\frac{y\sin\alpha}{b}=1.}$$

又法線ノ方程式ハ

$$y-b\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha}{b\cos\alpha}(x-a\cos\alpha).$$

之ヲ變形スルト

$$\boldsymbol{\frac{ax}{\cos\alpha}-\frac{by}{\sin\alpha}=a^2-b^2.}$$

例題 3. 曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上ノ一點 $(p,\ q)$ =於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ.

[解] $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト.

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0. \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=p}=-\frac{q^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}.$$

故=求メル切線ノ方程式ハ

$$y-q=-\frac{q^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}(x-p). \qquad \therefore\ \frac{x}{p^{\frac{1}{3}}}+\frac{y}{q^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}} \qquad (\because\ p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}})$$

例題 4. 媒介變數=テ表ハサレタ曲線

$$x=a\cos^3\phi, \qquad y=a\sin^3\phi$$

上ノ點 $(a\cos^3\alpha,\ a\sin^3\alpha)$ =於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ.

[解]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{3a\sin^2\phi\cos\phi}{-3a\cos^2\phi\sin\phi}=-\frac{\sin\phi}{\cos\phi}.$$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

故=求メル切線ノ方程式ハ

$$y-a\sin^3\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-a\cos^3\alpha). \qquad \text{又ハ}\ \frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=a.$$

第十三章　函數ノ連續性ノ判定

導函數ト函數ノ連續　$y=f(x)$ ガ x ノ或變域=於テ連續デアルカ否カヲ知ルコトハ, 色々ナ點=於テ便利ナコトガアル. 而シテ x ノ函數 $f(x)$ ガ x ノ或變域=於テ連續ナルトキハ, 其ノ x ノ値=對シテ一般=微分商ヲ有スルモ, 特別ノ場合トシテ微分商ヲ有シナイコトモアル. 然シナガラ函數 $y=f(x)$ ガ $x=a$ =於テ連續デナイナラバ微分商 $f'(a)$ ハ必ズ存在シナイ. 故=本書=於テ取扱フ函數=對シテ其ノ連續性ヲ判斷スル=ハ次ノ如ク考ヘテヨイ.

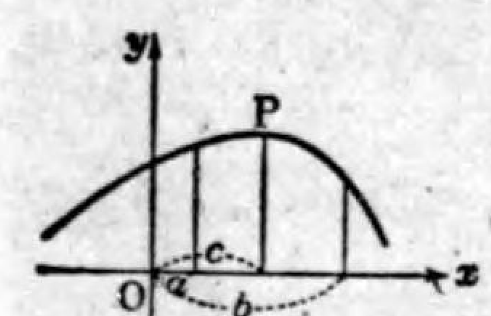
$f'(x)$ ガ x ノ或變域=於テ有限確定ナル導函數ヲ有スルトキ=ハ, 其ノ變域=於テハ $f(x)$ ハ連續デアル. 而シテ $f(x)$ ガ x ノ變域=於テ有限確定ナル導函數ヲ有シナイトキハ第四章ノ方法=ヨリ判定スル.

例ヘバ $y=\sin x$ ヨリ $f'(x)=\cos x$ トナル. 然ル= $\cos x$ ハ x ノ正負實數ノ總テノ變域=於テ有限確定値ヲ有スルカラ, $\sin x$ ハ此ノ變域=於テ連續デアルト判定シテヨイ.

又 $y=\tan x$ ヨリ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ トナル. 然ル= $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ハ $x=\left(n\pm\dfrac{1}{2}\right)\pi$ ヲ除イタ x ノ總テノ實數値=對シテ連續デアルカラ, $\tan x$ ハ此ノ變域=於テ連續デアルト判斷シテヨイ.

第十四章　函數ノ値ノ變化

導函數ト函數値ノ増減　$y=f(x)$ ノぐらふヲ左圖ノ如キモノトスル.



ぐらふヨリ $y=f(x)$ ハ x ガ負ヨリ零ヲ經テ P =至ル迄其ノ値ヲ増加シ, P 即チ $x=c$ =於テ最大値=達シ, x ガ c ヨリ大トナル=從ヒ其ノ値ヲ減少スル. 斯様=函數 $y=f(x)$ ノ値ガ x ノ増加ト共=増大スルトキ函數ハ**増加ノ狀態**=アルト云ヒ, 其ノぐらふハ**上昇ノ狀態**=アルト云フ. 又函數 $y=f(x)$ ガ x ノ増加ト共=其ノ値ヲ減少スルトキハ函數ハ**減少ノ狀態**=アルト云ヒ, 其ノぐらふハ**降下ノ狀態**=アルト云フ. 而シテ函數ノ増加, 又ハ減少ノ狀態ヲ云フ=ハ其ノ x ノ變域ヲ指定スル.

例ヘバ $y=x^2$ ハ x ノ $(-\infty,\ 0)$ ナル變域=於テハ減少ノ狀態=アリ, $(0,\ \infty)$ ナル變域=於テハ増加ノ狀態=アル.

函數 $y=f(x)$ ガ x ノ或變域=於テ増加ノ狀態=アルカ, 又ハ減少ノ狀態=アルカハ, 其ノぐらふヲ見レバ一目瞭然デアルガ, 實際問題=ハ其ノぐらふヲ見ルコトナク知ルコトガ必要デアル. コレ=ハ次ノ如ク其ノ導函數ヲ應用スルノデアル.

今 $y=f(x)$ ヲ或變域内=於ケル x ノ連續函數トシ, 其ノ導函數ガ存在スルモノトスル. 然ルトキハ其ノ變域内ノ一ツノ x ノ値=對シテ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

デアルカラ，$\Delta x\to 0$ ナルトキ $\varepsilon\to 0$ トスルト

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

トオクコトガ出來ル．何トナレバ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\{f'(x)+\varepsilon\}=f'(x)$$

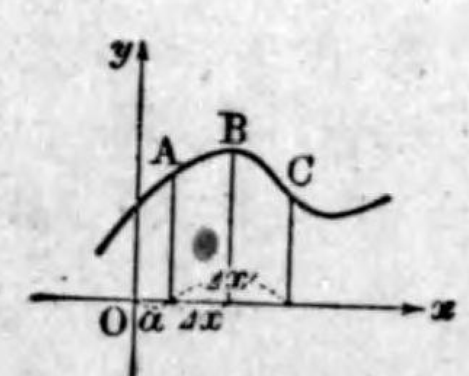
トナルカラデアル．即チ $|\Delta x|$ ノ非常ニ小ナル値ニ對シテ $|\varepsilon|$ モ亦非常ニ小ナル値ヲトル．故ニ $f'(x)\neq 0$ ナルトキ $|\Delta x|$ ヲ十分小ナラシメルトキハ $|f'(x)|>|\varepsilon|$ ナラシメルコトガ出來ル．從ツテ $f'(x)>0$ ナルトキハ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon>0$$

ヨリ Δy ト Δx トハ同符號ヲ有シ，$f'(x)<0$ ナルトキハ Δy ト Δx トハ相異ナル符號ヲ有スル．コレヨリ次ノ如ク述ベルコトガ出來ル．

$f'(x)>0$ ナル x ノ値ニ對シテハ自變數 x ガ極メテ僅カ增大スルトキ函數 $y=f(x)$ モ增大シ，x ガ極メテ僅カ減少スルトキ函數 $y=f(x)$ モ亦減少スル．換言スルト x ノ增減ト函數ノ增減トハ一致スル．之ニ反シ $f'(x)<0$ ナル x ノ値ニ對シテハ自變數 x ガ極メテ僅カ增大スルトキハ函數 $y=f(x)$ ハ減少シ，x ガ極メテ僅カ減少スルトキハ函數 $y=f(x)$ ハ增大スル．即チ x ノ增減ト函數ノ增減トハ相反スル．依ツテ次ノ定理ヲ得ル．

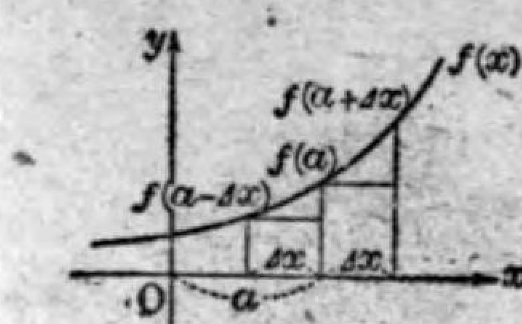
定理　**$f'(x)>0$ ナル x ノ變域ニ於テハ函數 $y=f(x)$ ハ增加スル函數ニシテ，$f'(x)<0$ ナル x ノ變域ニ於テハ函數 $y=f(x)$ ハ減少スル函數デアル．**



コヽニ極メテ僅カニ增大，減少ト云ツタノハ，左圖ヨリ明ナル如ク，$x=a$ ヨリ Δx ダケ增加シタトキノ y ノ値ガ，$x=a$ ニ於ケル y ノ値ヨリモ增大スルガ，$\Delta x'$ ダケ增加シタトキノ y ノ値ハ $x=a$ ニ於ケル y ノ値ヨリモ却ツテ減少スルヤウナ場合ガアルカラデアル．

以上ハ $f'(x)$ ノ正負ニ依ツテ函數 $f(x)$ ノ增減ヲ判定スル方法デアルガ，逆ニ

$f(x)$ ノ增減ニヨツテ $f'(x)$ ノ符號ヲ判定スルコトガ出來ル．何トナレバ今函數 $f(x)$ ハ或變域ニ於テ有限確定値ヲ有スルモノトシ，其ノ變域ニ於ケル x ノ一ツノ値ヲ a トシ，適當ニ定メタ正數 ε ヨリモ小ナル正數 Δx ニ對シテ



$$f(a-\Delta x)<f(a)<f(a+\Delta x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルトキハぐらふヨリ明ナル如ク $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ增加ノ狀態ニアル．(1) ヨリ

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0,\quad \frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}>0.$$

而シテ $\Delta x\to 0$ ナルトキ此ノ二ツノ極限値ハ決シテ負トナルコトガナイカラ極限ニ於テ

$$f'(a)\geqq 0$$

トナル．同樣ニシテ

$$f(a-\Delta x)>f(a)>f(a+\Delta x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ減小ノ狀態ニアリ，從ツテ

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0,\quad \frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}<0.$$

故ニ $\Delta x\to 0$ ナル極限ニ於テ何レモ

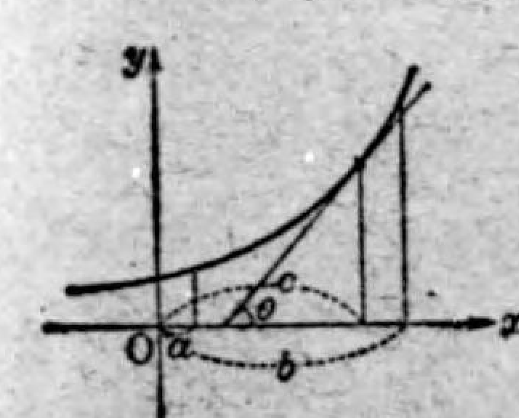
$$f'(a)\leqq 0$$

トナル．即チ次ノ定理ヲ得ル．

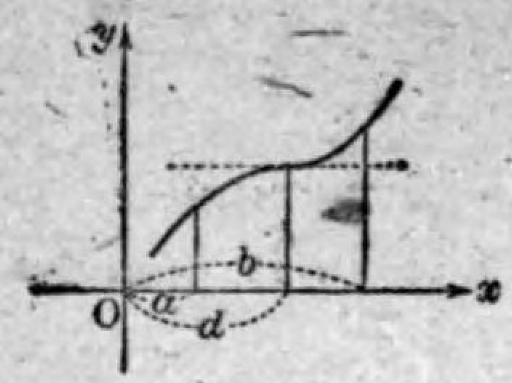
定理 $f(x)$ ガ增加ノ狀態ニアルトキハ $f'(x)\geqq 0$ ニシテ，減少ノ狀態ニアルトキハ $f'(x)\leqq 0$ デアル．

以上二ツノ定理ハ $y=f(x)$ ノぐらふニヨツテ容易ニ理解セラレル．即チ

(i)　(a, b) ナル x ノ變域內ノ任意ノ x ノ値 c ニ對シテ，$f'(x)>0$ ナルトキニハ，コノトキノ切線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ヲ θ トスルトキ，$\tan\theta=f'(x)>0$ デアルカラ θ ハ銳角トナル．而シテ θ ガ銳角トナルノハ曲線ガ上昇ノ場合ニ限ル．即チ函數 $y=f(x)$ ハ增加ノ狀態ニアル．逆ニ $y=f(x)$ ガ增加ノ狀態ニアル曲線ノ部分ニ於テハ θ ハ銳角トナリ，從ツテ $f'(x)=\tan\theta>0$，即チ $f'(x)>0$ トナル．



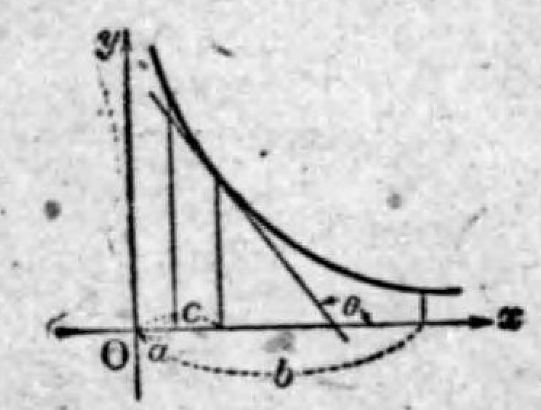
(ii) (a, b) ナル x ノ變域内ノ或 x ノ値 d ニ對シテ $f'(x)=0$ トナルモ其ノ他ノ部分ニ於テ全部 $f'(x)>0$ ナルトキハ先ヅ $f'(x)>0$ ナル部分ニ對シテハ (i) ニヨリ曲線ハ上昇ノ狀態ニアリ，從ツテ函數 $y=f(x)$ ハ增加ノ狀態ニアル．而シテ $x=d$ ナル部分ニ對シテハ



$\tan x=f'(x)=0$ トナリ，之ニ應ズル曲線上ノ點ニ於ケル切線ト x 軸トノナス角ハ零，即チ兩者ハ平行トナル．從ツテ曲線ハ此ノ點ニ於テ一時上昇ヲ中止スルケレドモ降下スルコトハナイ．故ニ此ノ場合ニ於テモ曲線ハ x ガ a ヨリ b マデ變ズル間絶エズ上昇シ，從ツテ $y=f(x)$ ハ增加ノ狀態ニアル．

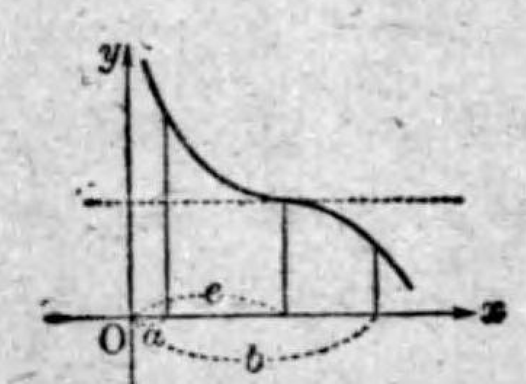
逆ニ函數 $y=f(x)$ ノぐらふガ上圖ノ狀態ヲ呈スル x ノ變域ニ於テハ $f'(x)\geqq 0$ デアル．

(iii) (a, b) ナル x ノ變域内ノ任意ノ値 c ニ對シテ $f'(x)<0$ ナルトキハ，



コノトキノ切線ガ x 軸ノ正方向トナス角ヲ θ トスルトキ $\tan\theta=f'(x)<0$ デアルカラ θ ハ鈍角トナル．而シテ θ ガ鈍角トナルノハ曲線ガ降下ノ狀態即チ函數 $y=f(x)$ ガ減少ノ狀態ノトキニ限ル．

逆ニ函數 $y=f(x)$ ガ減少ノ狀態ニアル曲線ノ部分ニ於テハ θ ハ鈍角トナリ，從ツテ $f'(x)=\tan\theta<0$, 即チ $f'(x)<0$ トナル．



(iv) (a, b) ナル x ノ變域内ノ或 x ノ値 e ニ對シテ $f'(x)=0$ トナルモ，其ノ他ノ部分ニ於テ全部 $f'(x)<0$ ナルトキハ，先ヅ $f'(x)<0$ ナル部分ニ對シテハ (iii) ニヨリ曲線ハ降下ノ狀態ニアリ，從ツテ函數 $y=f(x)$ ハ減少ノ狀態ニアル．而シテ $x=e$ ナル點ニ對シテハ $\tan\theta=f'(x)=0$ トナリ，之ニ應ズル曲線上ノ點ニ於ケル切線ト x 軸トナス角ガ零，即チ兩者ハ平行トナル．從ツテ曲線ハ此ノ點ニ於テ一時降下ヲ中止スルケレドモ上昇スルコトハナイ．故ニ此ノ場合ニ於テモ曲線ハ x ガ a ヨリ b マデ變ズル間絶エズ降下シ，從ツテ函數 $y=f(x)$ ハ減少ノ狀態ニアル．

逆ニ函數 $y=f(x)$ ノぐらふガ上圖ノ狀態ヲ呈スル變域ニ於テハ $f'(x)\leqq 0$ デアル．

定義 自變數ノ値ノ增加ト共ニ其ノ値ヲ增加スル函數ヲ**增加函數**ト云ヒ，之ニ反スル函數ヲ**減少函數**ト云フ．

例題 1. $f(0)=\phi(0)$ ニシテ，正ナル x ニ對シテ $f'(x)>\phi'(x)$ ナルトキハ正ナル x ニ對シテ $f(x)>\phi(x)$ ナルコトヲ證明セヨ．

[證明] $f(x)-\phi(x)=F(x)$ トオクト $F(0)=f(0)-\phi(0)=0$ トナル．而シテ $F'(x)=f'(x)-\phi'(x)>0$ 即チ $F'(x)>0$.

故ニ $F(x)$ ハ x ノ正ナル變域ニ於テ增加函數ニシテ且 $F(0)=0$ ヨリ增加スルカラ常ニ $F(x)=f(x)-\phi(x)>0$.

$$\therefore\ f(x)>\phi(x).$$

例題 2. 函數 $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$ ハ x ノ增加函數ナルコトヲ證明セヨ．

[證明] $$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2\geqq 0.$$

故ニ $f(x)$ ハ增加函數デアル．

例題 3. 函數 $f(x)=(x-1)e^x+1$ ハ負ナル x ニ對シテ減少函數ニシテ，正ナル x ニ對シテ增加函數ナルコトヲ證明セヨ．又此ノ結果ヲ利用シテ $x\neq 0$ ナラバ $(x-1)e^x+1>0$ ナルコトヲ證明セヨ．

[證明] $$f'(x)=(x-1)e^x+e^x=xe^x.$$

故ニ $x<0$ ナルトキ $f'(x)<0$, $x>0$ ナルトキ $f'(x)>0$. 依ツテ負ナル x ニ對シテ $f(x)$ ハ減少函數ニシテ，正ナル x ニ對シテ $f(x)$ ハ增加函數トナル．

次ニ $f(0)=0$ トナル故 $f(x)$ ハ x ガ負ナル値ヲトリツツ $x=0$ トナルマデ，絶エズ減少シツツ遂ニ零トナルカラ $x=0$ 以外ニ於テハ $f(x)>0$ デアル．又 $f(x)$ ハ零ヨリ x ノ正ノ値ノ增加ト共ニ增加スルカラ，$f(x)$ ハ $x=0$ 以外ニ於テ $f(x)>0$. 即チ $x\neq 0$ ナラバ x ノ正負ニ拘ラズ $f(x)>0$ デアル．

例題 4. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ．

$$x>\sin x>x-\frac{x^3}{6}.$$

[證明] $$f(x)=x-\sin x \quad \text{トオクト} \quad f'(x)=1-\cos x.$$

故ニ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ $\quad f'(x)>0.$

而シテ $f(0)=0.$

$$\therefore\ f(x)>0.\quad 即チ\quad x>\sin x.$$

又 $\phi(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ トオクト $\phi'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$.

之ヲ更ニ $\varphi(x)$ トオクト $\varphi'(x)=x-\sin x$.

而シテ之ハ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ前ノ證明ニヨリ $\varphi'(x)>0$.

故ニ $\varphi(x)$ ハ增加函數ニシテ且 $\varphi(0)=0$. 故ニ $\varphi(x)>0$.

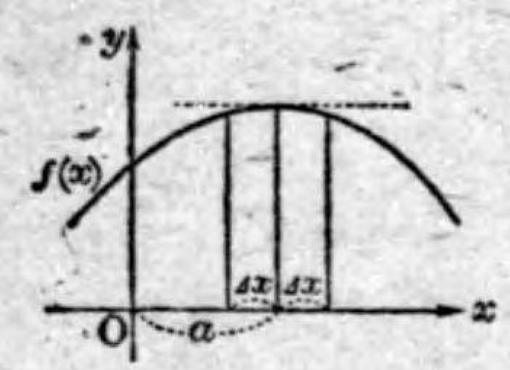
即チ $\phi'(x)>0$. 從ツテ $\phi(x)$ ハ增加函數トナリ，且 $\phi(0)=0$.

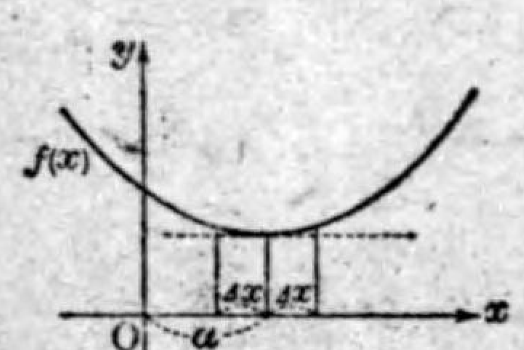
$$\therefore\ \phi(x)>0.\quad 即チ\quad \sin x>x-\frac{x^3}{6}.$$

依ツテ
$$x>\sin x>x-\frac{x^3}{6}.$$

第十五章　函數ノ極大極小

極大極小ノ定義　連續函數 $y=f(x)$ ニ於テ x ノ値ヲ增シテ行クトキ，$x=a$ ナル値ヲ經過スルト共ニ $f(x)$ ノ値ノ變動ガ增加ヨリ減少ニ轉ズルトキハ，$f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ**極大**トナル，又ハ**極大値**ヲトルト云ヒ，$f(a)$ ヲ其ノ**極大値**ト云フ．之ニ反シテ $x=a$ ニ於テ $f(x)$ ガ減少ヨリ增加ニ轉ズルトキハ，$f(x)$ ハ**極小**トナル，又ハ**極小値**ヲトルト云ヒ，$f(a)$ ヲ其ノ**極小値**ト云フ．而シテ極大値，極小値ヲ總稱シテ單ニ**極値**ト云フ．





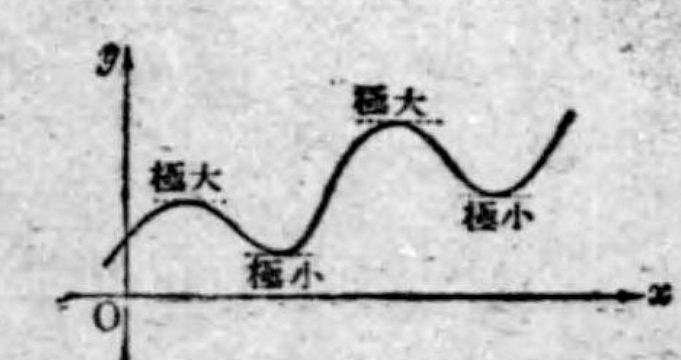
$f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ極大，又ハ極小トナルトキハ，$f(a)$ ハ a ニ近イ他ノ x ノ値例ヘバ $x+\Delta x$ ニ對スル函數ノ値ヨリモ夫々大ナルカ，又ハ小デアル．故ニ Δx ヲ十分小ナル任意ノ値トスルト，$f(a)$ ガ極大値ナルトキハ

$$f(a-\Delta x)<f(a)>f(a+\Delta x)$$

ニシテ，極小値ナルトキハ

$$f(a-\Delta x)>f(a)<f(a+\Delta x)$$

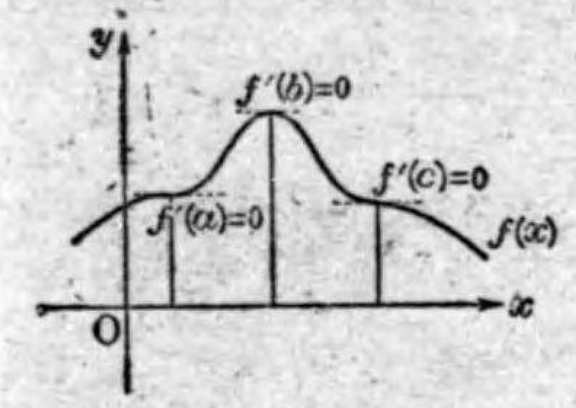
デアル．コノコトハ上ノ二ツノ圖ヲ見レバ直ニ理解サレル．



定義ヨリ明ナル如ク函數ノ極大，極小ハ其

ノ値ノ大小ニ關係ガナイカラ，同一ノ函數ニ於テ極大値ガ極小値ヨリモ小ナルコトガアリ得ル．又一ツノ函數ガ數個ノ極大値，極小値ヲ有スルコトモアリ得ル．

導函數ト極值　函數 $y=f(x)$ ガ有限確定ナル導函數ヲ有スルトキ，此ノ函數ガ $x=a$ ニ於テ極値ヲトルナラバ必ズ $f'(a)=0$ デアル．何トナレバ $f'(a)>0$ ナラバ $f(x)$ ハ $x=a$ ノ前後ニ於テ增加ノ狀態ニアリ，又 $f'(a)<0$ ナラバ減少ノ狀態ニアル．從ツテ $x=a$ ニ於テ $f(x)$ ガ極値ヲ有スルナラバ $f'(a)$ ハ正デモ負デモアリ得ナイ．即チ $f'(a)=0$ デアル．



逆ニ $f'(a)=0$ ナルトキ $f(a)$ ハ必ズ $f(x)$ ノ極値デアルト云フコトハ出來ナイ．何トナレバ既ニ述ベタ如ク，$y=f(x)$ ガ上昇ノ或點ニ於テ $f'(a)=0$ トナリ，又降下ノ或點ニ於テ $f'(a)=0$ トナリ得ルカラデアル．

極大極小ノ判定　$x=a$ ニ於テ $f'(a)=0$ ナルトキ函數 $f(x)$ ガ極値デアルトシテモ，其レガ極大ナルカ，極小ナルカハ不明デアル．之ヲ判定スルニハ次ノ如クスル．

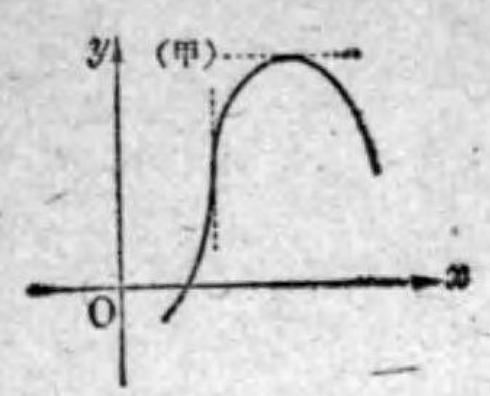
$f'(x)=0$ ナル方程式ヲ解キ，其ノ根ヲ $x=a$ トシ h ヲ十分小ナル任意ノ正數トスル．

(i) $f(a-h)$, $f(a)$, $f(a+h)$ ノ大イサヲ比較シ，$f(a)$ ガ此等ノ三ツノ値ノ中最大デアルナラバ極大値，最小デアルナラバ極小値，此ノ二ツノ何レニモ屬シナイトキハ極値デナイ．

(ii) x ガ增加シツヽ a ナル値ヲ通過スルトキ，$f'(x)$ ガ正ヨリ負ニ轉ズルトキハ函數 $f(x)$ ハ增加ノ狀態ヨリ減少ノ狀態ニ轉ズルカラ $f(a)$ ハ極大値，$f'(x)$ ガ負ヨリ正ニ轉ズルトキハ函數 $f(x)$ ハ減少ノ狀態ヨリ增加ノ狀態ニ轉ズルカラ $f(a)$ ハ極小値デアル．

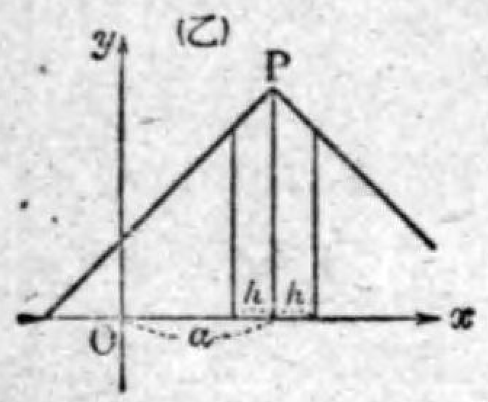
$f'(x)$ ガ一定ノ符號ヲ持續スルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ノ前後ニ於テ增加又ハ減少ノ狀態ヲ呈スルカラ $f(a)$ ハ極値デナイ．

若シ $f'(x)=0$ ニ $x=a$ 以外ノ根 $x=b, c, d, \ldots\ldots$ 等アルトキハ，是等ノ一ツ一ツニ就イテ $x=a$ ニ於ケルト同樣ナ事ヲ行ヘバヨイ．



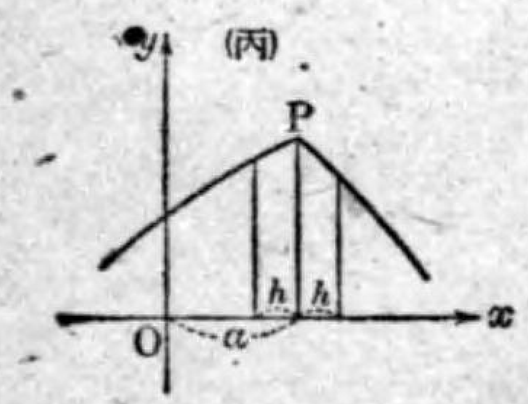
以上ハ微分可能ノ點ニ就イテデアルガ，甲圖ノ如ク $f'(x)$ ガ $+\infty$ 又ハ $-\infty$ トナル點ガソノ中ニアツテモ上ノ所論ハ成立ツノデアル．

コヽニ注意スベキコトハ，$f'(x)=0$ 以外ノ點デモ極値ヲトル場合ガアルコトデアル．例ヘバ乙圖，丙圖ノ如クＰ點デ極大値ヲトルガ，Ｐ點ハ $f'(x)=0$ ノ點デハナイ．卽チＰ點ハ左方微分商ト右方微分商トハ存在スルガ一致シナイ故微分可能ノ點デハナイケレドモ，



$$f(a-h)<f(a)>f(a+h)$$

デアルカラ，Ｐ點デ極大値ヲトルノデアル．コノヤウナ場合ハ左方微分商ト右方微分商トガ一致シナイ點デ起ル（之ハ多クハ $f'(x)$ ノ分母ガ零ナル x ノ値ニ對シテ起ル）ノデアルカラ，斯樣ナ點ニ就イテハ一々吟味シナクテハナラナイ．



例題 1. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ ノ極値ヲ求メヨ．

〔解〕 $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$．

$f'(x)=0$ ナラシメル x ノ値ハ $x=-1$, $x=3$ デアル．今 h ヲ十分小ナル正數トスルト

$$f'(-1-h)=\frac{(-4-h)(-h)}{(-2-h)^2}>0, \qquad f'(-1+h)=\frac{(-4+h)h}{(-2+h)^2}<0.$$

$$f'(3-h)=\frac{(-h)(4-h)}{(2-h)^2}<0, \qquad f'(3+h)=\frac{h(4+h)}{(2+h)^2}>0.$$

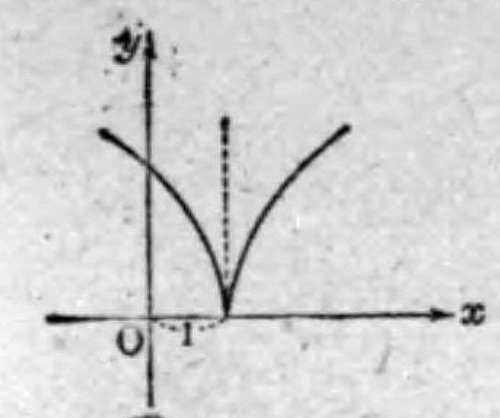
故ニ $f(-1)=-2$ ハ $f(x)$ ノ極大値，$f(3)=6$ ハ $f(x)$ ノ極小値デアル．

次ニ $x=1$ ニ於テハ $f'(x)$ ハ無意味トナル．而シテ $x\to 1\pm 0$ ナルトキ $f(x)\to\pm\infty$ トナルカラ，$x=1$ ニ於テ $f(x)$ ハ極値ヲ有シナイ．

答 $x=-1$ ニ於テ極大値 -2, $x=3$ ニ於テ極小値 6．

例題 2. $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}$ ノ極値ヲ求メヨ．

〔解〕 $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}$ デアルカラ $f'(x)=0$ ナル如キ x ノ値ハ存在シナイ．而シテ $x=1$ ニ於テハ $\lim\limits_{x\to 1+0} f'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=-\infty$ デ且 $f(x)$ ガ連續デアル故，$x=1$ ノ前後ニ於ケル $f(x)$ ノ値ヲ吟味スルト，



$$f(1+h)=\sqrt[3]{h^2}>0, \quad f(1)=0, \quad f(1-h)=\sqrt[3]{h^2}>0.$$

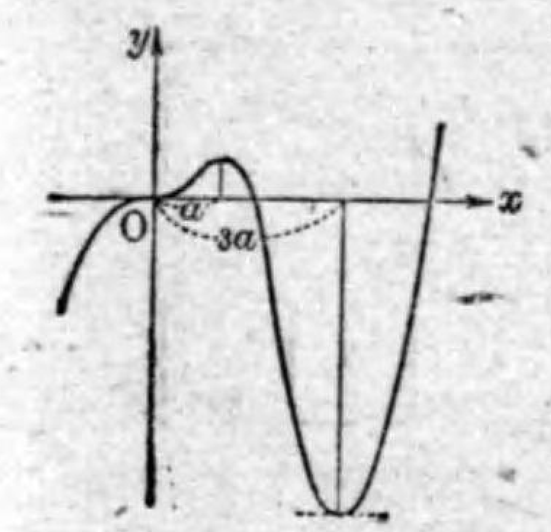
依ツテ $f(x)$ ハ $x=1$ ニ於テ極小ニシテ，ソノ値ハ 0 デアル．

答 $x=1$ ニ於テ極小値零．

例題 3. $f(x)=x^5-5ax^4+5a^2x^3$ ノ極値ヲ求メヨ．$(a>0)$

〔解〕 $$f'(x)=5x^4-20ax^3+15a^2x^2=5x^2(x-a)(x-3a).$$

故ニ $f'(x)=0$ ヨリ $x=0$, $x=a$, $x=3a$ ヲ得ル．



$x<a$ ナルトキ $f'(x)\geqq 0$ デアルカラ $f(x)$ ハ絶エズ上昇スルカ，又ハ一時上昇ヲ中止スルノミ．故ニ極値ヲ有シナイ．卽チ $x=0$ デハ極値ヲトラナイ．

$$a<x<3a \quad ナルトキ \quad f'(x)<0,$$

$$x>3a \quad ナルトキ \quad f'(x)>0.$$

故ニ $f(x)$ ハ **$x=a$ ニ於テ極大トナリ，ソノ値ハ a^5 デアル．**

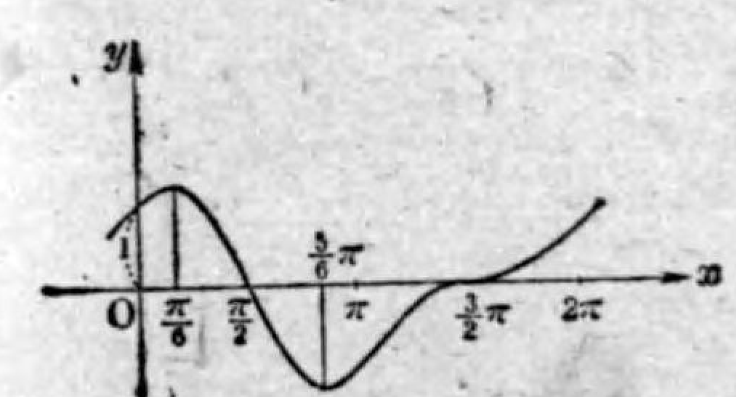
$x=3a$ ニ於テ極小トナリ，其ノ値ハ $-27a^5$ デアル．

$f(x)$ ハ常ニ微分可能デアルカラ以上ノ外ニ極値ヲトラナイ．

例題 4. $(0, 2\pi)$ 間ニ於ケル次ノ函數ノ變化ノ狀態ヲ研究セヨ．

$$f(x)=\cos x(1+\sin x).$$

〔解〕 $$f'(x)=-\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x=1-\sin x-2\sin^2 x$$
$$=(1-2\sin x)(1+\sin x)$$



デアル．而シテ $(0, 2\pi)$ ナル變域ニ於テハ $1+\sin x$ ハ $x=\dfrac{3}{2}\pi$ 以外デハ正デアル．從ツテ $f'(x)=0$ ヨリ $1-2\sin x=0$, $1+\sin x=0$ デアルカラ $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$ ヲ得ル．今 h ヲ十分小ナル正數トスレバ

$$f'\left(\frac{3}{2}\pi+h\right)=\left\{1-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+h\right)\right\}\left\{1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+h\right)\right\}>0,$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\pi-h\right)=\left\{1-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-h\right)\right\}\left\{1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-h\right)\right\}>0$$

ナル故，$f(x)$ ハ $x=\frac{3}{2}\pi$ デ極値ヲトラズ，タダ一時上昇ヲ停止スルダケデアル.

$$f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right)=\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\right\}\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\right\}<0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}-h\right)=\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi}{6}-h\right)\right\}\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{6}-h\right)\right\}>0$$

ナル故，$f(x)$ ハ $x=\frac{\pi}{6}$ デ極大トナリ，ソノ値ハ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ デアル.

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi+h\right)>0, \qquad f'\left(\frac{5}{6}\pi-h\right)<0$$

ナル故，$f(x)$ ハ $x=\frac{5}{6}\pi$ デ極小トナリ，ソノ値ハ $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ デアル.

次ニ x 軸ト交ハル點ハ $f(x)=0$ ヨリ $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3}{2}\pi$ デアル.

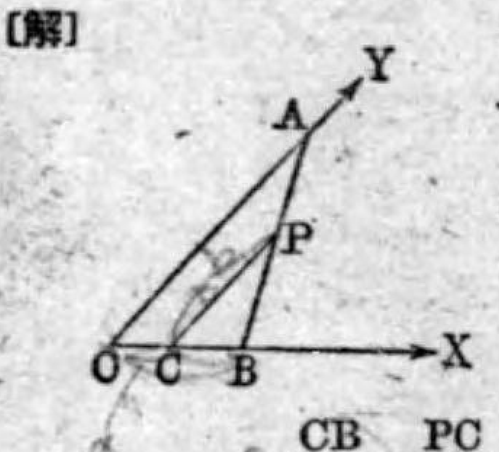
以上ノ事項ヲ表示スレバ次ノ如クナル.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		+	0		−		0		+		
$f(x)$	1	增	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	減	0	減	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	增	0	增	1

而シテ其ノ變化ノ狀態ハ上ノぐらふニテ表ハサレル.

例題 5. ∠XOY 內ノ固定點 P ヲ過ギテ直線ヲ引キ，角ノ二邊ト A, B ニテ交ハラシメ，積 OA·OB ヲ最小ナラシメル如ク直線 AB ヲ引ケ.

[解]



P ガ固定點デアルカラ，P ヨリ OA ニ平行線 PC ヲ引クト，OC ト PC ノ長サハ定長トナル. 故ニ PC=b，OC=a トオクト，直線 AB ハ P 點ヲ過ルカラ B 點ノ位置ガ定マレバ定マル. 從ツテ積 OA·OB ハ B 點ノ位置ノ函數ト云フコトガ出來ル. 故ニ OB ヲ x デ表ハスト，OA ハ次ノ比例式ヨリ求メルコトガ出來ル.

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{OA}} \text{ ヨリ } \frac{x-a}{x}=\frac{b}{\mathrm{OA}}. \quad \therefore\ \mathrm{OA}=\frac{bx}{x-a}.$$

$$\therefore\ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=f(x)=\frac{bx}{x-a}\cdot x=\frac{bx^2}{x-a}. \quad \text{但シ } x>a.$$

$$f'(x)=\frac{2bx(x-a)-bx^2}{(x-a)^2}=\frac{bx(x-2a)}{(x-a)^2}.$$

$x>0$ ナルベキ x ノ値ノ中 $f'(x)$ ガ零トナル x ノ値ハ $x=2a$ ノミデコノトキ $f'(2a)=0$ トナル.

$$\text{而シテ}\quad f'(2a-h)<0,\quad f'(2a+h)>0.$$

但シ h ハ十分小ナル正數. 故ニ

$$f(2a)=\frac{4ba^2}{2a-a}=4ab$$

ハ $f(x)$ ノ極小値デアル. 而シテ $2a>x>a$ ナルトキ $f'(x)<0$, $x>2a$ ナルトキ $f'(x)>0$ デアルカラ極小値ハ最小値デアル.

從ツテ積 OA·OB ヲ最小ナラシメル直線 AB ヲ引クニハ OB=2OC ニトツテ B ヲ定メ，P ト B トヲ結ビ，BP ヲ延長シテ OA ト A デ交ハラシメルトキ AB ハ求メル直線デアル.

[注意] 極大極小ノ應用問題ニハ其ノ問題ノ性質カラ極大又ハ極小ガ唯一度起ルコトガ前以テ知ラレルコトガアル. 斯樣ナ場合ニハ又同時ニ最大又ハ最小デアルカラ其ノ微係數ノ符號ニツイテノ研究ハ省略シテモヨイ.

練習問題 11.

(1) 方程式 $\tan x-x=0$ ハ π ヨリモ小ナル正根ヲ有セザルコトヲ證明セヨ.

(2) 方程式 $\frac{1}{\sin x}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos x}=\lambda$ ノ 0 ト 2π トノ間ニアル實根ノ數ヲ求メヨ.

(3) $f(x)$ ノ極値ヲ知ラバ $\{f(x)\}^2$ ノ極値ハスベテ求メラレルカ.

(4) 次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ.

(i) $f(x)=x^2(a-x)^3$. $(a>0)$ (ii) $f(x)=(x-1)^4(x+3)^3$.

(iii) $f(x)=\frac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$. (iv) $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$.

(v) $f(x)=xe^{-x}$. (vi) $f(x)=e^x\sin x$.

(vii) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$. (viii) $f(x)=\frac{x}{1+x\tan x}$.

(5) 定圓ニ內接シテ最大ナル周圍ヲ有スル矩形ヲ求メヨ.

(6) 扇形ノ周ヲ與ヘテ面積ヲ最大ナラシメヨ.

(7) 周圍ノ長サガ一定ニシテ最モ短キ對角線ヲ有スル矩形ヲ求メヨ.

(8) 角 XOY ノ內部ニ一定點 P アリ. 今 P ヲ過ル一ツノ直線ヲ引キ OX, OY ト交ハル點ヲ夫々 A, B トス. 三角形 OAB ノ面積ヲ最小ナラシメルニハ，其ノ直線ヲ如何ニ引クベキカ.

(9) 直線狀ノ海岸ヨリ a 粁沖ニアル船中ノ人ガ，海岸上ノ最近點 A ヨリ海岸ニ沿ツテ，b 粁ノ地點 B ニ最小時間ニテ到達セントス. 其ノ人ノ漕速ハ毎時 u 粁，步速ハ毎時 v 粁ナリトスレバ，如何ナル地點ニ上陸スベキカ.

(10) 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト y 軸ニ平行ナル直線トノ交點ヲ P, P′ トスル. A ヲ楕圓ノ長軸ノ左端トスルトキ, 三角形 APP′ ノ面積ノ最大値ヲ求メヨ.

(11) 楕圓上ノ一點ニ於テ切線ヲ引キ, 之ト二ツノ主軸トノ圍ム三角形ノ面積ヲ最小ナラシメヨ.

(12) 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ切線ガ x 軸, y 軸ト交ハル二點ヲ A, B トスルトキ AB ノ最小値ヲ求メヨ.

(13) 定三角形ノ面積ヲ成ル可ク短キ線分ニテ二等分セヨ.

(14) 球ニ內接スル直圓錐ニシテ體積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

(15) 球ニ內接スル直圓壔ニシテ體積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

(16) 直面錐ニ內接スル直圓柱ニシテ全表面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.

(17) 圓柱形ノ丸太ヨリ切口ガ矩形ナル一定ノ長サノ角材ヲ截リ取リテ梁トナサントス. 梁ノ支持力ハ其ノ長サガ一定ナルトキハ, 其ノ横幅ニ比例シ, 又其ノ厚サノ三乘ニ比例スルトセバ, ナルベク大ナル支持力ヲ有スル梁ヲ得ンニハ如何ニ丸太ヲ切ルベキカ.

(18) 一定ノ容積ト一定ノ厚サトヲ有シ, 一方ニ底ヲ有スル直圓筒ヲ作ルニ要スル材料ヲナルベク少量ニセントス. 其ノ圓筒ノ內面ニ於ケル深サト半徑トノ比ヲ如何ニスベキカ.

【解　答】

(1) $f(x)=\tan x-x$ トオクト $f'(x)=\tan^2x>0$ ナル故 $f(x)$ ハ增加函數デアル. 而シテ $f(0)=0$, $x\to\frac{\pi}{2}\pm0$ ナルトキ $f(x)\to\mp\infty$, $f(\pi)=-\pi$ トナル.

依ツテ $f(x)$ ハ x ノ 0 ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデニ對シ 0 ヨリ $+\infty$ マデ增加シ, x ノ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ π マデニ對シ $-\infty$ ヨリ $-\pi$ マデ增加スル. 從ツテ $f(x)$ ハ 0 ヨリ π マデノ x ノ値ニ對シ零トナルコトガナイ. 卽チ **$\tan x-x=0$ ハ π ヨリ小ナル正根ヲ有シナイ.**

(2) $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos x}$ トオクト $f(x)$ ハ $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ デ不連續デアル. ソレ以外ニ於テハ $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2x}+\frac{3\sqrt{3}\sin x}{\cos^2x}$ デアル. $f'(x)=0$ ヨリ $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. コレヨリ $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$. 今 h ヲ十分小ナル正數トスレバ

$$f'\left(\frac{\pi}{6}-h\right)<0,\quad f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right)>0;\quad f'\left(\frac{7}{6}\pi-h\right)>0,\quad f'\left(\frac{7}{6}\pi+h\right)<0$$

ニシテ　$x\to+0$　ナルトキ　$f(x)\to+\infty$.

$x\to\frac{\pi}{2}\pm0$　ナルトキ　$f(x)\to\mp\infty$,

$x\to\pi\pm0$　ナルトキ　$f(x)\to\mp\infty$,

$x\to\frac{3}{2}\pi\pm0$　ナルトキ　$f(x)\to\pm\infty$,

$x\to2\pi-0$　ナルトキ　$f(x)\to-\infty$

デアル.

以上ニヨリ $f(x)$ ハ

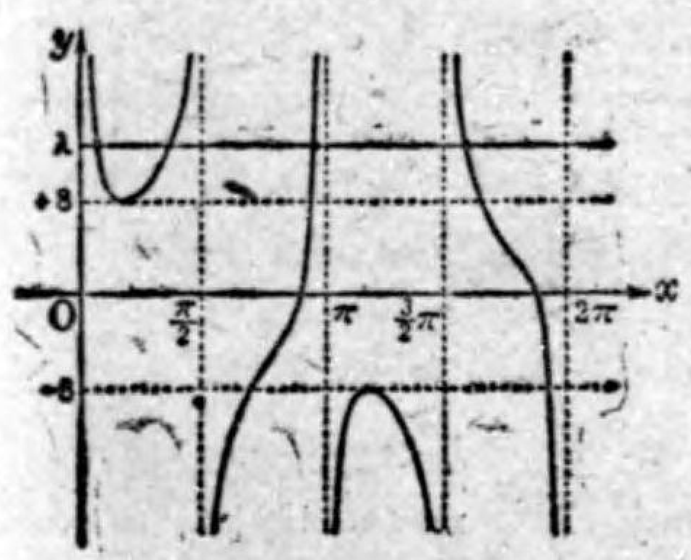
(i) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ ニ於テハ ∞ ヨリ減少シテ, $x=\frac{\pi}{6}$ ノトキ極小値 8 ヲトリ, 之ヨリ增大シテ ∞ トナル.

(ii) $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ ニ於テハ $f'(x)>0$ ニシテ, $-\infty$ ヨリ增大シテ∞トナル.

(iii) $\pi\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi$ ニ於テハ $-\infty$ ヨリ增大シテ, $x=\frac{7}{6}\pi$ ノトキ極大値 -8 ヲトリ, 之ヨリ減少シテ $-\infty$ トナル.

(iv) $\frac{3}{2}\pi\leqq x\leqq2\pi$ ニ於テハ $f'(x)<0$ ニシテ, ∞ ヨリ減少シテ $-\infty$ トナル.

之ニヨリ $f(x)$ ノぐらふハ概略左ノ如クナル.



サテ方程式

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos x}=\lambda$$

ノ實根ノ數ハ $y=\lambda$ ト $y=\frac{1}{\sin x}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos x}$ ノぐらふトノ交點ノ數ニ等シイ故 $0\leqq x\leqq2\pi$ ニシテ

$\lvert\lambda\rvert>8$	ナラバ	四根,
$\lvert\lambda\rvert=8$	ナラバ	三根, (等根一ツ)
$\lvert\lambda\rvert<8$	ナラバ	二根

ヲ有ス.

(3) $f(x)$ ハ微分出來ルモノトスル. $F(x)=\{f(x)\}^2$ トスルト $F'(x)=2f(x)\cdot f'(x)$. 故ニ $F(x)$ ヲ極値ナラシメル x ノ値ハ $f(x)=0$, $f'(x)=0$ ノ根ノ中ニアル. 一方 $f(x)$ ヲ極値ナラシメル x ノ値ハ $f'(x)=0$ ノ根ノ中ニアル. 而シテ $f(x)=0$ ナラシメ且 $F(x)$ ヲ極値ナラシメル x ノ値ハ必ズシモ $f'(x)=0$ ノ根トハナラナイ. **依ツテ $f(x)$ ノ極値ハ $\{f(x)\}^2$ ノ極値ノ一部デアル.**

[注意] $f(x)$ ノ極値ヲ A トスルトキ $\{f(x)\}^2$ ノ極値ハ A^2 及ビ零デアル.

(4) (i) $f'(x)=2x(a-x)^3-3x^2(a-x)^2=x(a-x)^2(2a-5x)=0$ ナルタメニハ $x=0,\ x=a,\ x=\frac{2a}{5}$.

x	……	0	……	$\frac{2}{5}a$	……	a	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	減	0	増	$\frac{108}{3125}a^5$	減	0	減

故ニ $x=0$ ニ於テ極小値 0, $x=\frac{2}{5}a$ ニ於テ極大値 $\frac{108}{3125}a^5$ ヲトル.

(ii) $f'(x)=4(x-1)^3(x+3)^3+3(x-1)^4(x+3)^2=(x-1)^3(x+3)^2(7x+9)=0$ ナルタメニハ $x=1,\ \ x=-3,\ \ x=-\frac{9}{7}$.

x	……	-3	……	$-\frac{9}{7}$	……	1	……
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	増	0	増	$\frac{16^4\times 12^3}{7^7}$	減	0	増

故ニ $x=-\frac{9}{7}$ ニ於テ極大値 $\frac{16^4\times 12^3}{7^7}$ ヲトリ, $x=1$ ニ於テ極小値 0 ヲトル.

(iii) $f'(x)=\frac{(3x^2+1)(x^4-x^2+1)-(x^3+x)(4x^3-2x)}{(x^4-x^2+1)^2}$

$$=\frac{(1-x)(1+x)(x^4+5x^2+1)}{(x^4-x^2+1)^2}=0$$

ナルタメニハ $x^4+5x^2+1>0$ ナル故 $x=1,\ x=-1$.

x	$-1-h$	-1	………………	1	$1+h$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	減	-2	増	2	減

故ニ $x=-1$ ナルトキ極小値 -2, $x=1$ ナルトキ極大値 2 ヲトル.

$x^4-x^2+1>0$ ナル故 $f'(x)$ ヲ無意義ナラシメル點ハナイ. 依ツテ以上ノミガソノ極値デアル.

(iv) $f'(x)=\frac{2x+3x^2}{2\sqrt{x^2+x^3}}=\frac{x(2+3x)}{2\sqrt{x^2+x^3}}=0$ ナルタメニハ $x=-\frac{2}{3},\ x=0$. 而シテ $x=0$ デハ $f'(x)$ ガ無意味トナル. 之ハ別ニ吟味スルコトトシ, $x=-\frac{2}{3}$ ナルトキハ, 今 h ヲ十分小ナル正數トスレバ

$$f'\left(-\frac{2}{3}-h\right)>0,\qquad f'\left(-\frac{2}{3}+h\right)<0,\qquad f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

ナル故 $f(x)$ ハ $x=-\frac{2}{3}$ ナルトキ極大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ヲトル. $x=0$ ナルトキハ $f(0\pm h)=\sqrt{h^2+h^3}>0,\ f(0)=0$. 故ニ $f(x)$ ハ $x=0$ ナルトキ極小値 0 ヲトル. $x=-1$ ナルトキ $f(x)$ ハ不連續ナル故極値ヲトラナイ.

(v) $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$. $e^x>0$ ナル故 $f'(x)=0$ ナルタメニハ $x=1$. 今 $h>0$ トスレバ

$$f'(1-h)>0,\qquad f'(1+h)<0,\qquad f'(1)=0,\qquad f(1)=\frac{1}{e}.$$

故ニ $x=1$ ナルトキ極大値 $\frac{1}{e}$ ヲトル.

(vi) $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=0$ ナルタメニハ $e^x>0$ ナル故 $\sin x+\cos x=0$.

而シテ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. $\quad\therefore\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

$$\therefore\ x=2n\pi+\frac{3}{4}\pi\quad 又ハ\ =2n\pi-\frac{\pi}{4}.\ (n\ ハ零又ハ整數)$$

今 h ヲ十分小ナル正數トスレバ

$$f'\left(2n\pi+\frac{3}{4}\pi+h\right)<0,\qquad f'\left(2n\pi+\frac{3}{4}\pi-h\right)>0,\qquad f'\left(2n\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=0.$$

$$f\left(2n\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2n\pi+\frac{3}{4}\pi}.$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ デ極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2n\pi+\frac{3}{4}\pi}$ ヲトル.

又 $f'\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}+h\right)>0,\qquad f'\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}-h\right)<0,\qquad f'\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)=0,$

$$f\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2n\pi-\frac{\pi}{4}}.$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=2n\pi-\frac{\pi}{4}$ デ極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2n\pi-\frac{\pi}{4}}$ ヲトル.

(vii) $x=0$ デ $f(x)$ ハ定義サレテキナイ. $x\neq 0$ トシテ取扱フ.

$$\log f(x)=\frac{1}{x}\log x.\qquad \therefore\ \frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}.$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{1}{x^2}(1-\log x)x^{\frac{1}{x}}.$$

$f'(x)=0$ ナルタメニハ $1-\log x=0$ ヨリ $x=e$.

x	$e-h$	e	$e+h$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	增	$e^{\frac{1}{e}}$	減

但 $h>0$ トス.

依ツテ $f(x)$ ハ $x=$ ニ於テ極大値 $e^{\frac{1}{e}}$ ヲトル.

(viii) $f'(x)=\dfrac{1+x\tan x-x\tan x-x^2\sec^2 x}{(1+x\tan x)^2}=\dfrac{1-x^2\sec^2 x}{(1+x\tan x)^2}=0$ ヨリ

$$\cos^2 x-x^2=0. \qquad \therefore\ \cos x-x=0, \qquad \cos x+x=0.$$

今 $\cos x-x=0$ ノ根ヲ x_1 [$y=\cos x-x$ トオケバ $y'=-\sin x-1$ トナリ, $x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ (k ハ整數又ハ零) 以外デ $y'<0$, 且 $x=0$ ナルトキ $y=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ $y=-\dfrac{\pi}{2}$ ナル故 $\cos x-x=0$ ハ一根ヲ有ス] トスレバ $\cos x+x=0$ ノ根ハ $-x_1$ デアル. コノ根ノ前後ニ於ケル $f'(x)$ ノ符號ノ變化ヲミルニ $x=x_1$ ニ對シテハ正ヨリ負ニ, $x=-x_1$ ニ對シテハ負ヨリ正ニ變ズル故前者ハ $f(x)$ ヲ極大ナラシメ, 後者ハ極小ナラシメル. 而シテソノ極値ハ

$$f(x)=\frac{x_1}{1+x_1\tan x_1}, \qquad f(-x_1)=\frac{-x_1}{1+x_1\tan x_1}$$

デアル.

$1+x\tan x=0$ ニ適合スル x ノ値ニ於テ $f(x)$ ハ不連續トナル故 $f(x)$ ノ極値ハナイ.

(5) 圓ノ直徑ヲ k, 矩形ノ相隣レル二邊ノ長サヲ x, y トスル. $x^2+y^2=k^2$ ナルトキ $x+y$ ノ最大ヲ求メルコトトナル.

y ハ邊ノ長サニテ正數ナル故 $x^2+y^2=k^2$ ヨリ

$$y=\sqrt{k^2-x^2}. \qquad 玆ニ \qquad 0<x<k.$$

之ヲ $x+y$ ニ代入シテ $x+\sqrt{k^2-x^2}$. 之ヲ $f(x)$ トオケバ

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}. \qquad f'(x)=0 \text{ ヨリ } x=\frac{\sqrt{2}k}{2}.$$

今 h ヲ十分小ナル正數トスレバ

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k-h\right)>0, \qquad f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k+h\right)<0, \qquad f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)=0.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)=\sqrt{2}k.$$

故ニ $f(x)$ ハ $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$ ニテ極大値ヲトリ, ソノ極大値ハ $\sqrt{2}k$ デアル. シカルトキハ $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$ トナル. サテ $0<x<k$ ナルトキ $f(x)$ ガ唯一ツノ極値ヲ有シ,

且ソレガ極大値ナル故, ソレハ $f(x)$ ノ最大値デアル. 依ツテ求メル矩形ハ圓ニ内接スル正方形デアル.

(6) 全周ヲ s, 半徑ヲ r, 中心角ヲ θ, θ ニ對スル弧ヲ α トスルト

$$\alpha=s-2r, \qquad r\theta=\alpha=s-2r, \qquad \theta=\frac{s-2r}{r}. \qquad 玆ニ \quad \frac{1}{2}s>r>0.$$

面積ヲ $f(r)$ トスルト $f(r)=\dfrac{\theta}{2}r^2=\dfrac{r(s-2r)}{2}$.

$$\therefore\ f'(r)=\frac{s}{2}-2r=0$$

ナルタメニハ $s=4r$. $s=4r$ ノ前後ニ於ケル $f'(r)$ ノ符號ノ變化ヲミルニ $f'(r)$ ハ正ヨリ負ニ變ズル. 故ニ $r=\dfrac{s}{4}$ ナルトキ $f(r)$ ハ $\dfrac{s^2}{16}$ ナル極大値ヲ有ス. 而シテ $\dfrac{1}{2}s>r>0$ ナルトキ $f(r)$ ガ唯一ツノ極値ヲ有シ, 且ソレガ極大値ナル故, ソレハ $f(x)$ ノ最大値デアル. シカルトキハ

$$\theta=\frac{s-2r}{r}=2$$

トナル. 即チ中心角ガ 2 radian ノトキ最大トナル.

(7) 周圍ノ長サヲ $2l$ トシ, 矩形ノ一邊ヲ x トスレバ他ノ邊ハ $l-x$ デアル. 依ツテ對角線ノ長サハ $\sqrt{x^2+(l-x)^2}$, 之ヲ $f(x$ トオク.

$$f'(x)=\frac{2x-l}{\sqrt{x^2+(l-x)^2}}=0$$

ナルタメニハ $x=\dfrac{l}{2}$.

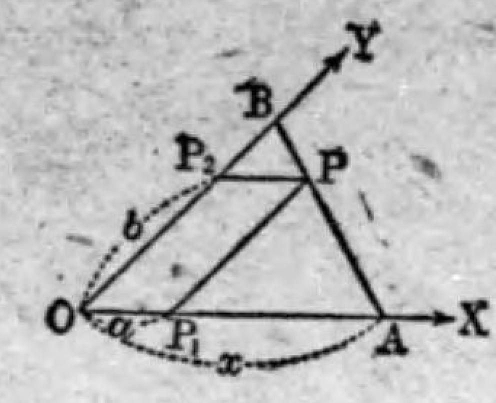
x	$\frac{l}{2}-h$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}+h$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	減	$\frac{\sqrt{2}}{2}l$	增

故ニ $x=\dfrac{l}{2}$ ニ於テ $f(x)$ ハ極小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$ ヲトル. コノトキ $l-x=\dfrac{l}{2}$ デアル.

而シテ $0<x<l$ ニ於テ $f(x)$ ハ唯一ツノ極値ヲ有シ, 且ツソレガ極小値ナル故, ソレハ $f(x)$ ノ最小値デアル.

依ツテ求メル矩形ハ一定ナル周圍ノ $\dfrac{1}{4}$ ヲ一邊トスル正方形デアル.

(8) P ヨリ OY, OX ニ夫々平行ニ引イタ直線ガ OX, OY ト交ハル點ヲ P_1, P_2 トシ $OP_1=a$, $OP_2=b$, $OA=x$ トスルト, $\triangle AP_1P \backsim \triangle AOB$ デアルカラ



$$\frac{\mathrm{OB}}{b}=\frac{x}{x-a}. \qquad \therefore\ \mathrm{OB}=\frac{bx}{x-a}.$$

サテ $\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle \mathrm{XOY}$

$$=\frac{b}{2}\frac{x^2}{x-a}\sin\angle \mathrm{XOY}.$$

故ニ $\triangle \mathrm{OAB}$ ノ面積ヲ最小ニスルニハ $\frac{x^2}{x-a}$ ヲ最小ニスレバヨイ.

$f(x)=\frac{x^2}{x-a}$ トオケバ $f'(x)=\frac{x(x-2a)}{(x-a)^2}=0$

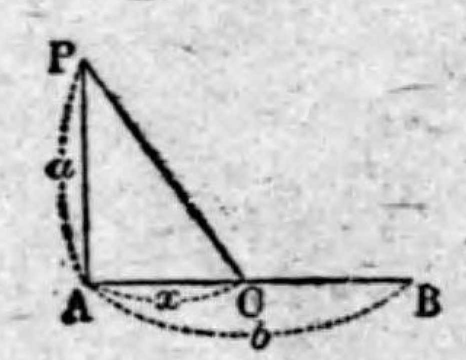
ナルタメニハ, $x>0$ ナル故 $x=2a$.

x	$2a-h$	$2a$	$2a+h$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	減	$4a$	増

從ツテ $x=2a$ ニ於テ $f(x)$ ハ極小トナル. 而シテ $f(x)$ ハ唯一ツノ極値ヲ有シ, 且ソレガ極小値ナル故, ソレハ $f(x)$ ノ最小値デアル. 即チ $f(x)$ ハ $x=2a$ ナルトキ最小トナル.

依ツテ $\triangle \mathrm{OAB}$ ハ $x=2a$ 即チ OA ガ a ノ 2 倍ナルトキ最小ノ面積トナル.

(9) A ヨリ上陸地點マデノ距離ヲ x トスルト



$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}+\frac{b-x}{v}$$

ガ B ニ達スル時間デアルカラ, 之ヲ極小ナラシメル x ハ

$$f'(x)=\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{v}=0$$

ヨリ $v^2x^2=u^2(a^2+x^2)$. $\therefore\ x=\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$.

x	$\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}-h$	$\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$	$\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}+h$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

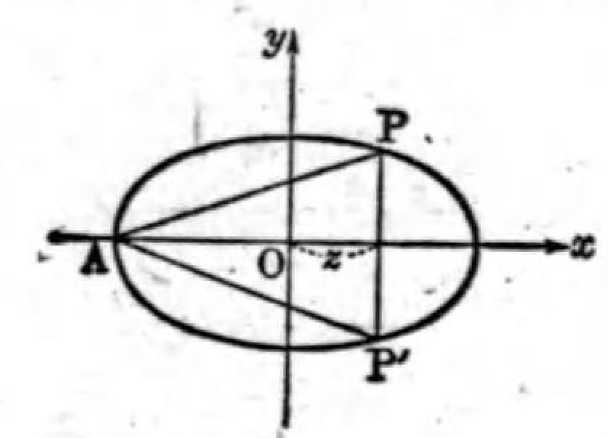
サテ $bv>u\sqrt{a^2+b^2}$ ナラバ $b-\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}>0$. 即チ AB ノ間 A ヨリ $\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$ ナル距離ノ地點ハ存在スル. 從ツテ $x=\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$ ナルトキ $f(x)$ ハ極小トナル.

而シテ $f(x)$ ガ極値ヲ唯一ツ有シ, 且ソレガ極小値ナル故, ソレハ最小値トナル. 即チ A ヨリ $\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$ ナル地點ニ上陸スレバ最小時間ニテ B 地點ニ達スル.

$bv\leqq u\sqrt{a^2+b^2}$ ナラバ $b-\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}\leqq 0$. 即チ AB ノ間ニ A ヨリ $\frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}}$ ナル距離ノ地點ハ存在シナイ. 條件式ヲ考ヘルト上陸地點ガ B デアルトキ最小時間トナル.

答 $\begin{cases} bv>u\sqrt{a^2+b^2} \text{ ナルトキ A, B 兩地點間ニ於テ A ヨリ } \frac{au}{\sqrt{v^2-u^2}} \text{ 粁ノ地點.} \\ bv\leqq u\sqrt{a^2+b^2} \text{ ナルトキ B 點.} \end{cases}$

(10) PP′ ト x 軸トノ交點ノ座標ヲ $(z, 0)$ トスルト



$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ $\therefore\ \mathrm{PP}'=2y=\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-z^2}.$

$\triangle \mathrm{APP}'=\frac{1}{2}\mathrm{PP}'\cdot(a+z)=\frac{b}{a}(a+z)\sqrt{a^2-z^2}.$

$\triangle \mathrm{APP}'$ ノ最大ハ $(a+z)\sqrt{a^2-z^2}$ (之ヲ $f(z)$ トオク) ノ最大ト一致スル.

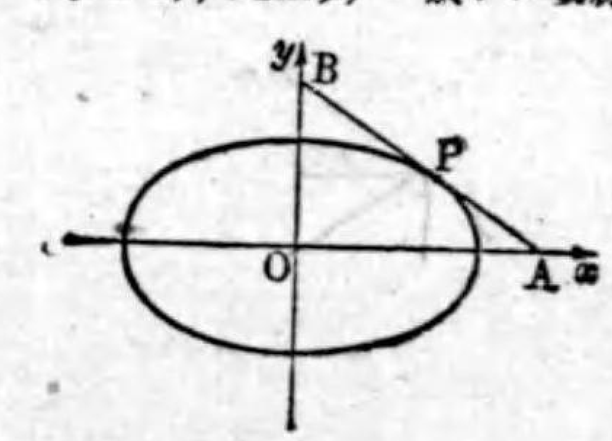
$$f'(z)=\sqrt{a^2-z^2}-\frac{z(a+z)}{\sqrt{a^2-z^2}}=0$$

ナルタメニハ $z=\frac{a}{2}$. ($z=-a$ ハ無意味ナル故捨テル).

z	$\frac{a}{2}-h$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}+h$
$f'(z)$	$+$	0	$-$

故ニ P 點ノ横座標ガ $\frac{a}{2}$ ナルトキ最大トナル.

(11) $\mathrm{P}(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ ニ於ケル切線ヲ AB トスルト AB ノ方程式ハ



$$\frac{\cos\varphi}{a}x+\frac{\sin\varphi}{b}y=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

(1) ニ於テ $y=0$ ナルトキ $\mathrm{OA}=\frac{a}{\cos\varphi}$.

(1) ニ於テ $x=0$ ナルトキ $\mathrm{OB}=\frac{b}{\sin\varphi}$.

$$\triangle \mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\varphi}\frac{b}{\sin\varphi}=\frac{ab}{\sin 2\varphi}.$$

$\triangle \mathrm{ABO}$ ヲ最小ニスルニハ $\sin 2\varphi$ ヲ最大ニスレバヨイ. 從ツテ $\sin 2\varphi=1$ ヲ滿足スル正ノ銳角ヲ求メルト $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

依ツテ $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ナルトキ最小トナル.

(12) $AB^2=OA^2+OB^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\varphi}+\dfrac{b^2}{\sin^2\varphi}=f(\varphi)$ トオクト

$f'(\varphi)=\dfrac{2a^2\sin\varphi}{\cos^3\varphi}-\dfrac{2b^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}=0$ ナルタメニハ

$$\frac{a^2}{\cos^4\varphi}-\frac{b^2}{\sin^4\varphi}=0.\qquad \therefore\ \left(\frac{a}{\cos^2\varphi}+\frac{b}{\sin^2\varphi}\right)\left(\frac{a}{\cos^2\varphi}-\frac{b}{\sin^2\varphi}\right)=0.$$

$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ ナル故 $\dfrac{a}{\cos^2\varphi}-\dfrac{b}{\sin^2\varphi}=0.\qquad\therefore\ \tan\varphi=\sqrt{\dfrac{b}{a}}.$

φ	$\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}-h$	$\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}+h$
$f'(\varphi)$	$-$	0	$+$
$f(\varphi)$	減	$(a+b)^2$	增

$f\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ ヲ計算スルニハ

$$f(\varphi)=\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(a^2\tan^2\varphi+b^2\right)=\frac{1}{1-\cos^2\varphi}\left(a^2\tan^2\varphi+b^2\right)$$

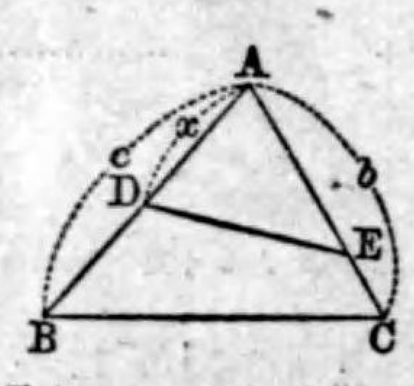
$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\tan^2\varphi}}(a^2\tan^2\varphi+b^2)=\frac{1+\tan^2\varphi}{\tan^2\varphi}(a^2\tan^2\varphi+b^2).$$

$$=\frac{1+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{b}{a}}\left(a^2\frac{b}{a}+b^2\right).\qquad \therefore\ f\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=(a+b)^2.$$

故ニ AB^2 ノ極小値ハ $(a+b)^2$ ニシテ之ハ又最小値デアル.

依ツテ **AB ノ最小値ハ $a+b$ デアル.**

(13) (I) D, E ガ夫々 AB, AC 上ニ在ル場合.



$AD\cdot AE=\dfrac{bc}{2}$, $AD=x$ トスルト $AE=\dfrac{bc}{2x}$.

$DE^2=x^2+\left(\dfrac{bc}{2x}\right)^2-2x\left(\dfrac{bc}{2x}\right)\cos A=x^2+\dfrac{b^2c^2}{4x^2}$
$-bc\cos A.$

故ニ DE ヲ最小ニスルニハ $f(x)=x^2+\dfrac{b^2c^2}{4x^2}$ ヲ最小ニスレバヨイ.

$$f'(x)=\frac{1}{2x^3}(2x^2+bc)(\sqrt{2}x+\sqrt{bc})(\sqrt{2}x-\sqrt{bc})=0$$

ナルタメニハ, $x>0$ ナル故 $x=\sqrt{\dfrac{bc}{2}}$. $f'(x)$ ハ $x=\sqrt{\dfrac{bc}{2}}$ ノ前後ニ於テ負ヨリ正ニ變ズル故, $x=\sqrt{\dfrac{bc}{2}}$ ニ於テ $f(x)$ ハ極小トナル. 而シテ D ハ AB 上ニナケ

レバナラナイカラ,

$$c\geqq\sqrt{\frac{bc}{2}},\quad 即チ,\quad 2c\geqq b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

又 E ハ AC 上ニナケレバナラナイカラ,

$$AE=\frac{bc}{2\sqrt{\dfrac{bc}{2}}}\leqq b,\quad 即チ\quad c\leqq 2b\cdots\cdots(2).$$

以上ノ結果

(i) (1), (2) ガ滿足サレルトキハ $x=\sqrt{\dfrac{bc}{2}}$ ナルトキ DE ハ極小値從ツテ最小値ヲトル.

(ii) $2c<b$ ナルトキハ $\sqrt{2}x-\sqrt{bc}<\sqrt{2}c-\sqrt{bc}=\dfrac{\sqrt{c}\,(2c-b)}{\sqrt{2c}+\sqrt{b}}<0$. 從ツテ $f'(x)<0$. 故ニ $f(x)$ ハ減少函數デアル. 即チ $x=c$ ナルトキ換言スレバ D ガ B ニ合スルトキ DE ハ最小トナル.

(iii) $c>2b$ ナルトキハ (ii) ニ於テ B ト C トヲ交換シタニ過ギナイカラ D ト E トヲ交換シテ E ガ C ト合スルトキ最小トナル.

(II) D, E ガ夫々 BC, BA 上ニアルトキ.

(III) D, E ガ夫々 CA, CB 上ニアルトキ.

此ノ二ツノ場合ハ (I) ト同様ニシテ DE ノ最小トナルベキモノヲ求メル.

以上ノ (I), (II), (III) ノ結果其ノ中ノ最小ナルモノヲ以テ答トスル.

(14) 球ノ半徑ヲ r トシ内接スル直圓錐ノ高サヲ x トスルト, 直圓錐ノ體積 $f(x)$ ハ

$$f(x)=\frac{1}{3}x\pi\{r^2-(x-r)^2\}=\frac{1}{3}\pi(2rx^2-x^3).$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{1}{3}\pi x(4r-3x).$$

$x>0$ ナル故 $f'(x)=0$ ヨリ $x=\dfrac{4}{3}r$.

$0<x<2r$ ニ於テ $f(x)$ ハ最小値ヲ有セズ, 且極値ヲ與ヘル點ハ唯一ツナル故, $f(x)$ ハ極小値ヲ有シナイ. 故ニ $x=\dfrac{4}{3}r$ ハ $f(x)$ ニ極大, 從ツテ最大ヲ與ヘル.

(15) 球ノ半徑ヲ r, 中心ヨリ直圓壔ノ底ニ至ル距離ヲ x トスルト, 底ノ半徑ノ自乘ハ r^2-x^2 トナル故, 直圓壔ノ體積 $f(x)$ ハ

$$f(x)=2\pi x(r^2-x^2).$$

$$\therefore\ f'(x)=2\pi(r^2-3x^2).$$

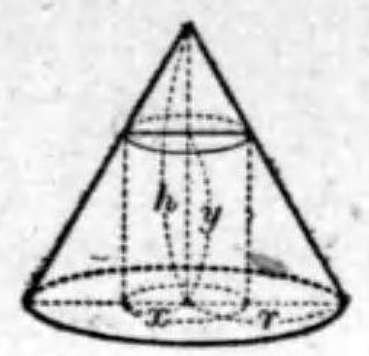
$f'(x)=0$ ヨリ $x>0$ ナル故 $x=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$

而シテ $f(x)$ ハ極小値ヲ有シナイカラ, $x=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ ハ $f(x)$ ニ極大ヲ與ヘル.

故ニ直圓壔ノ高サガ $2x=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ ノトキソノ體積ハ最大トナル.

(16) 直圓錐ノ底ノ半徑ヲ r, 高サヲ h トシ, 內接スル直圓壔ノ半徑ヲ x, 高サヲ y 全表面積ヲ S トスルト

$$S=2\pi(x^2+xy).$$



然ル= $r:h=x:h-y$. $\therefore\ y=\frac{h}{r}(r-x)$.

$$\therefore\ S=\frac{2\pi}{r}\{(r-h)x^2+rhx\}.$$

$$\therefore\ \frac{dS}{dx}=\frac{2\pi}{r}\{2(r-h)x+rh\}.$$

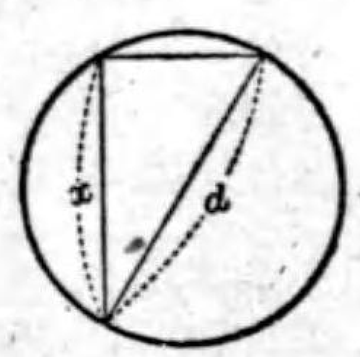
$\frac{dS}{dx}=0$ ナルタメニハ $x=\frac{rh}{2(h-r)}$. 而シテ S ハ極小値ヲ有シナイカラ, $x=\frac{rh}{2(h-r)}$ ハ極大卽チ最大値ヲ與ヘル. 但シ $x>0$ ニシテ $r>x$ デナケレバナラナイカラ

$$0<\frac{rh}{2(h-r)}<r. \qquad \therefore\ h>2r.$$

卽チ $h>2r$ ナルトキ $x=\frac{rh}{2(h-r)}$ ナレバ全表面積ノ最大ナル直圓壔ヲ得ル.

(17) 丸太ノ直徑ヲ d, 梁ノ厚サヲ x トスルト橫幅ハ $\sqrt{d^2-x^2}$. 從ツテ支持力 $f(x)$ ハ

$$f(x)=k\cdot\sqrt{d^2-x^2}\cdot x^3. \qquad \text{玆ニ } k \text{ ハ比例常數.}$$



$$\therefore\ f'(x)=\frac{kx^2(\sqrt{3}\,d+2x)(\sqrt{3}\,d-2x)}{\sqrt{d^2-x^2}}.$$

$x>0$ ナル故 $f'(x)=0$ ヨリ $x=\frac{\sqrt{3}}{2}d$. $f'(x)$ ハ $x=\frac{\sqrt{3}}{2}d$ ノ前後ニ於テ正ヨリ負ニ轉ズル. 故ニ極大, 從ツテ最大ヲ與ヘル. **故ニ角材ノ切ロナル矩形ノ一邊ヲ丸太ノ半徑ノ $\sqrt{3}$ 倍ニトレバヨイ.**

(18) 容積ヲ V, 厚サヲ a, 內面ノ深サヲ y, 半徑ヲ x トスルト

$$V=\pi x^2y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

外壁ノ體積卽チ材料ヲ $f(x)$ トスルト

$$f(x)=\pi(y+a)(x+a)^2-\pi x^2y=\pi\left(\frac{V}{\pi x^2}+a\right)(x+a)^2-V.$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{2a\pi(x+a)(\sqrt[3]{\pi}x-\sqrt[3]{V})(\sqrt[3]{\pi^2}x^2+\sqrt[3]{\pi V}x+\sqrt[3]{V^2})}{\pi x^3}.$$

$f'(x)=0$ ヨリ $x>0$ ナル故 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. $x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ ノ前後ニ於テ $f'(x)$ ハ負ヨリ正ニ轉ズル故, $f(x)$ ハコノトキ極小値, 從ツテ最小値ヲトル. 而シテ

$$y=\frac{V}{\pi x^2}=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}. \qquad \therefore\ x=y.$$

卽チ圓筒ノ半徑ト高サトヲ等シクスレバヨイ.

第十六章　導函數ト函數ノ變化率

導函數ト函數ノ近似値 旣ニ述ベタ如ク $\Delta x\to 0$ ナルトキ $\varepsilon\to 0$ トスルト

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

トオクコトガ出來ルカラ,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x.$$

Δx ノ絕對値ヲ十分小ニトルトキハ ε ノ絕對値モ亦十分小トナルカラ, 右邊ノ第二項ハ第一項ニ比シ遙ニ小トナル. 從ツテ近似的ニ

$$\Delta f(x)\doteqdot f'(x)\Delta x$$

トナル. コレハ自變數 x ノ小變化 Δx ニ對スル函數 y ノ變化ノ近似値デアル. 今 $\Delta x=h$ トオクト

$$f(x+h)\doteqdot f(x)+hf'(x)$$

トナル. 卽チ h ガ十分小ナルトキハ $f(x+h)$ ヲ計算スル代リニ, $f(x)+hf'(x)$ ヲ計算スレバヨイ.

例題 1. $y=\frac{1}{x^3}$ ニ於テ x ガ 2.000 ヨリ 2.001 ニ變動スルトキ y ノ變動ハ何程デアルカ.

[解] $y=\frac{1}{x^3}$ ヨリ $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{x^4}$. $\therefore\ \Delta y\doteqdot-\frac{3}{x^4}\Delta x$.

コノ式ニ於テ $x=2.000$, $\Delta x=0.001$ トオクト

$$\Delta y\doteqdot-\frac{3}{2^4}\times 0.001=-0.0001875.$$

故ニ y ハ大略 0.00019 ダケ減ズル.

例題 2. $\sqrt{2}=1.414$ ナルコトヲ知ツテ $\sqrt{2.01}$ ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ.

［解］ $f(x)=\sqrt{x}$ トオクト $\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\therefore\quad f(x+h)\fallingdotseq f(x)+hf'(x)=\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x+h}\fallingdotseq\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}}.$$

コヽニ於テ $x=2,\ h=0.01$ トオクト

$$\sqrt{2.01}=\sqrt{2}+\frac{0.01}{2\sqrt{2}}=1.414+0.00353\cdots\cdots\fallingdotseq 1.418.$$

例題2. 直角ノ二邊 AB, AC ガ夫々 $3m$, $4m$ ナル直角三角形ニ於テ AB ガ 1 cm 縮少スルトキ斜邊 BC ハ大略何程縮少スルカ.

［解］ $AC=a,\ AB=x,\ BC=y$ トオクト

$$y=\sqrt{a^2+x^2},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

故ニ x ガ Δx ダケ増ス場合ノ y ノ增分 Δy ハ次ノ式ニテ與ヘラレル.

$$\Delta y\fallingdotseq\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\Delta x.$$

コヽニ於テ $a=4,\ x=3,\ \Delta x=0.01$ トオクト,

$$\Delta y\fallingdotseq\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\times 0.01=0.006.$$

函數ノ變化率 x ノ函數 $y=f(x)$ ニ於テ $f(a+\Delta x)-f(a)$ ハ x ガ a ヨリ Δx ナル變化ヲシタトキノ y ノ變化デアル.

故ニ

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ $x=a$ ニ於ケル Δx 間ノ $f(x)$ ノ**平均變化率**ト云フ.

(1) ニ於テ Δx ヲ小サクスレバスル程, 平均スル範圍ガ小サクナリ, $\Delta x\to 0$ ナルトキハ $x=a$ ニ於ケル瞬間ノ**變化率**トナル. 即チ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

之ヲ $x=a$ ニ於ケル $f(x)$ ノ**變化率**ト云フ. 而シテ此ノ大小ハ $x=a$ ニ於テ函數 y ノ增減ノ緩急ヲ表ハス. 若シ a ノ代リニ x ヲ以テスルトキハ, $f'(x)$ ヲ x ニ對スル函數 $f(x)$ ノ變化率ト云フ.

函數ノ變化率ガ其ノ導函數ニテ表ハサレルコトハ物理學, 力學等ニ於テ屢々應用サレル. 例ヘバ物理學ノ定義ニ從ヘバ運動點ノ經過シタ途ノ時間ニ對スル

變化率ガ速サデアルカラ, 運動點ノ或位置ヲ起點トシテソレヨリ經過シタ途ヲ s 及ビ時間ヲ t トスルト, s ハ t ノ函數 $s=f(t)$ ニテ表ハサレル. 然ルトキハ

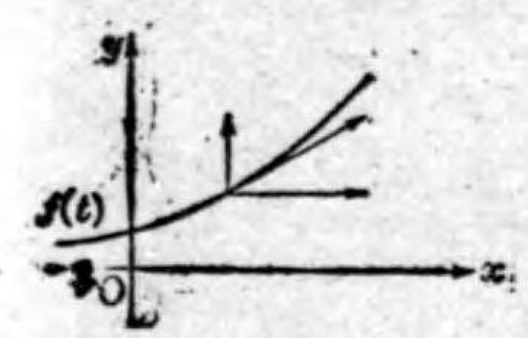
$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

ハ Δt ナル時間中ニ於ケル運動點ノ平均ノ速サヲ表ハシ, $\Delta t\to 0$ ナルトキノ極限値 $f'(t)$ 即チ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=v$$

ハ時間 t ナル瞬間ニ於ケル速サヲ表ハス.

若シ又其ノ運動點ノ各時間ニ於ケル位置ヲ示ス直角座標 (x, y) ガ t ノ函數トシテ與ヘラレルトキハ, 物理學ニ依リ, x 方向ノ分速度ノ平方ト y 方向ノ分速度ノ平方トノ和ノ平方根ガ原速度ノ大キサニシテ, 且速度ノ方向ハ動點ノ經路ヲ表ハス曲線ノ切線ノ方向ト一致スルカラ, 單ニ運動ノ速サノミデナク速度ヲモ求メルコトガ出來ル.



即チ　　$x=f_x(t),\qquad y=f_y(t)$

トスルト, ソノ動點ノ x 軸及ビ y 軸ノ方向ニ於ケル分速度ノ大キサハ夫々

$$\frac{dx}{dt}=f'_x(t),\qquad \frac{dy}{dt}=f'_y(t)$$

ニシテ, 從ツテ速度ノ大キサハ

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{f'_x(t)^2+f'_y(t)^2}$$

デ表ハサレル. 而シテ其ノ方向ガ x 軸トナス角ヲ θ トスルト

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{f'_y(t)}{f'_x(t)}$$

デ表ハサレル.

速度ノ時間ニ對スル變化率ガ加速度デアルカラ, 今加速度ヲ α デ表ハスト

$$\alpha=\frac{dv}{dt}$$

トナル.

回轉角 θ ノ時間 t =對スル變化率ガ角速度 ω =シテ, 角速度ノ時間=對スル變化率ガ角加速度 α デアルカラ

$$\omega=\frac{d\theta}{dt},\qquad \alpha=\frac{d\omega}{dt}$$

デアル.

又體積 V ナル物質ノ溫度ヲ T トシ, 溫度 T ヲ T+ΔT マデ變化セシメタトキ, 卽チ T ヲ ΔT ダケ增大セシメタトキ, 體積ガ ΔV ダケ增加シタトスルト, 體積一單位=對スル增加高ハ $\frac{\Delta V}{V}$ =シテ, 溫度ノ ΔT 間=於ケル體積一單位=ツイテノ平均變化率ハ $\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}$ デアル. 故= T =於ケル體積一單位ノ變化率ハ

$$\lim_{\Delta T\to 0}\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}=\frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$$

トナル. 之ヲ溫度 T =於ケル體積 V ノ物質ノ膨張係數ト云フノデアル.

例題 4. 或點ヨリ初速 v_0 デ落下スル質點ノ經過距離 s ハ經過時間ヲ t トシテ

$$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

デ表ハサレル. 此ノ落下=於ケル速度, 加速度ヲ求メヨ.

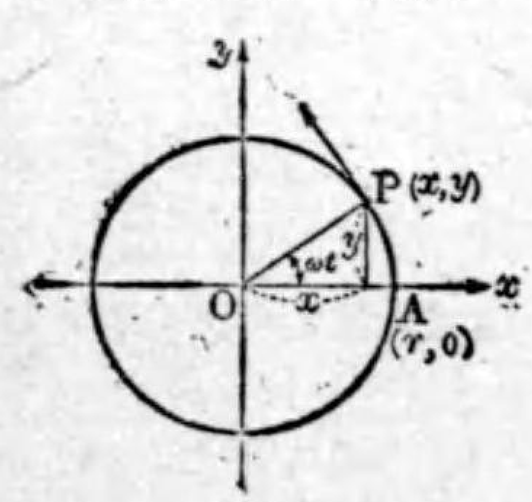
[解] 速度ヲ v, 加速度ヲ a デ表ハスト

$$v=\frac{ds}{dt}=v_0+gt.\qquad a=\frac{dv}{dt}=g.$$

卽チ此ノ運動=於テハ速度ハ刻々=變化スルモ加速度ハ一定デアル.

例題 5. 一定ノ角速度 ω デ r ナル半徑ノ圓周上ヲ運動スル點 P ノ速度ヲ求メヨ.

[解] 圓ノ中心ヲ原點, 互=垂直ナル二ツノ半徑ヲ夫々 x 軸, y 軸トシ, 運動點 P ノ任意ノ位置ノ座標ヲ (x, y) トシ, 圓周ト x 軸トノ交點 $A(r, 0)$ ヨリコノ位置=達スルマデノ時間ヲ t トスルト



$$\angle POA=\omega t.$$

$$x=r\cos\omega t,\qquad y=r\sin\omega t$$

ハ P 點ノ運動ヲ表ハス. x 軸, y 軸方向ノ分速度ノ大キサハ夫々

$$\frac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t,\qquad \frac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t.$$

故=P 點ノ速度ノ大キサハ

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=r\omega$$

=シテ一定デアル. 次=其ノ方向ガ x 軸トナス角ヲ τ トスルト

$$\tan\tau=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=-\cot\omega t.$$

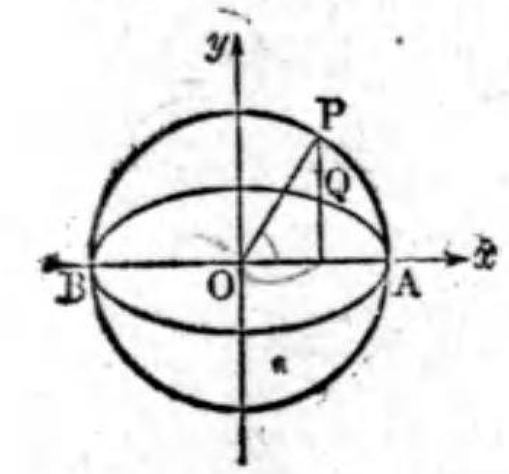
之ヨリ $\tau=\omega t+\frac{\pi}{2}.$

從ツテ其ノ方向ハ半徑 OP =垂直卽チ圓ノ切線ト一致スル.

[注意] 速度ハ大キサト方向トヲ有スル量ナルヲ以テ, 速度ヲ求メヨトアルトキハ其ノ大キサト方向トヲ求メネバナラナイ.

例題 6. 圓周上ヲ等速度=テ運動スル質點 P カラ x 軸=下ス垂線ガ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ ト交ハル點ヲ Q トス. Q ノ速度ヲ求メヨ.

[解] 質點ガ $A(a, 0)$ ノ位置カラ一定ノ角速度 ω =テ進行シ始メ, t 秒後= $P(X, Y)$ マデ來タトスルト



$$X=a\cos\omega t,\qquad Y=a\sin\omega t.$$

今 Q ノ座標ヲ (x, y) トスルト

$$x=X=a\cos\omega t.$$

之ヨリ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ナル關係= x ノ値ヲ代入シテ

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\cos^2\omega t}=b\sin\omega t.$$

故= Q ノ速度ノ大キサヲ v, Q ノ x 軸, y 軸ノ方向ヘノ分速度ヲ夫々 v_x, v_y トスルト

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t,\qquad v_y=\frac{dy}{dt}=b\omega\cos\omega t.$$

故=

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t}.$$

而シテ其ノ方向ガ x 軸トナス角ヲ τ トスルト

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=-\frac{b}{a}\cot\omega t$$

デアル.

例題 7. 質點ノ直線運動=於テ $v^2=ax+b$ ナルトキハ加速度ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

[證明] $v^2=ax+b$ ノ兩邊ヲ時間 t =關シテ微分スルト

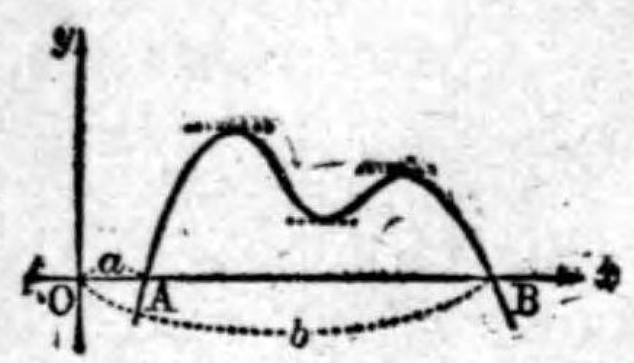
$$2v\frac{dv}{dt}=a\frac{dx}{dt}=av.$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dt}=\frac{a}{2}.$$

即チ加速度ハ一定デアル.

第十七章 Rolle ノ定理, 平均値ノ定理

導函數ト Rolle ノ定理 x ノ或連續ナル變域ニ於テ函數 $y=f(x)$ ガ連續ニシテ其ノぐらふト x 軸トノ二交點ヲ A, B トスルトキ, A, B 間ニ於ケルぐらふノ切線ガ連續的ニ方向ヲ變ジ, 而シテ y 軸ニ平行トナルコトガナイナラバ即チ $f'(x)$ ガ連續ナラバ, ソレラノ切線中 x 軸ニ平行ナルモノガ少クトモ一ツ存在スルコトハ左圖ニヨリ明デアル. 之ニ對シテ次ノ定理ガアル.



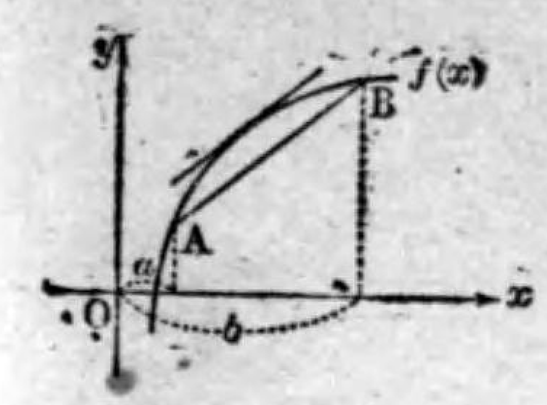
定理 x ノ或連續ナル變域ニ於テ $f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ共ニ連續ナルトキ其ノ變域ニ於ケル x ノ二ツノ値 a, b ニ對シテ

$$f(a)=0,\qquad f(b)=0$$

ナラバ, a ト b トノ間ニ $f'(x)=0$ ナル如キ x ノ値ガ少クトモ一ツ存在スル. 之ヲ Rolle ノ定理ト云フ.

[證明] x ガ a ヨリ b マデ變動スルトキ $f(x)$ ノ變動ハ假定ニ依リ連續デ且最初零ナル値ヨリ出發シテ最後ニ又零ナル値トナルカラ, 其ノ間 $f(x)$ ハ常ニ零ニ等シイカ又ハ途中デ少クトモ一回増加ヨリ減少ニ又ハ減少ヨリ増加ニ變ズルトコロガ必ズアル. 前ノ場合ニハ常ニ $f'(x)=0$ ニシテ後ノ場合ニハ $f'(x)$ ノ符號ハ $x=a$ ヨリ $x=b$ マデノ間ニ正ヨリ負ニ又ハ負ヨリ正ニ變ラネバナラナイ. 從ツテ $f'(x)=0$ ナル x ノ値ガ少クトモ一ツ其ノ中ニ存在シナケレバナラナイ.

導函數ト平均値ノ定理 函數 $y=f(x)$ ガ曲線上ノ二點 A, B 間ニ



於テ連續ニシテ且其ノ間ニ於テ $f'(x)$ モ連續ナラバ弦 AB ニ平行ナル切線ガ少クトモ一ツ存在スルコトハ左圖ヨリ明デアル. 之ニ對シ次ノ定理ガアル.

定理 x ノ連續ナル變域ニ於テ $f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ共ニ連續ナルトキ, 其ノ變域ニ於ケル二ツノ値ヲ a, b トスレバ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$$

ナル如キ x ノ値ガ a, b ノ間ニ少クトモ一ツ存在スル.

[證明]
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k\cdots\cdots(1)$$
トオキ分母ヲ拂フト
$$f(b)-f(a)-k(b-a)=0\cdots\cdots(2)$$
トナル. コヽニ於テ
$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)\cdots\cdots(3)$$
ナル函數ヲ考ヘルト, $f(x)$, $f'(x)$ 共ニ連續デアルカラ $\varphi(x)$ 並ニ $\varphi'(x)$ モ亦連續デアル.
(3) ニ $x=a$ ヲ代入スルト
$$\varphi(a)=f(a)-f(a)-k(a-a)=0.$$
又 (3) ニ $x=b$ ヲ代入スルト (2) ニヨリ
$$\varphi(b)=f(b)-f(a)-k(b-a)=0.$$
故ニ Rolle ノ定理ニ依リ
$$\varphi'(x)=0\cdots\cdots(4)$$
ナル如キ x ノ値ガ a, b ノ間ニ少クトモ一ツ存在スル.
(3) ヲ x ニツイテ微分スルト (4) ヨリ
$$\varphi'(x)=f'(x)-k=0,\qquad \therefore\ k=f'(x).$$
之ヲ (1) ノ k ニ代入スルト
$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
コヽニ x ハ少クトモ a ト b トノ間ノ一ツノ値ヲトル. コノ定理ヲ平均値ノ定理ト云フ.
コノ結果ニ於テ
$$\frac{x-a}{b-a}=\theta$$
トオクト $a<x<b$ デアルカラ明ニ $0<\theta<1$ デアル. 故ニ分母ヲ拂ツテ書キ換ヘルト
$$x=a+\theta(b-a),\qquad 0<\theta<1$$
トナル. 故ニ平均値ノ定理ハ次ノ如ク書キ換ヘラレル.

$a+h$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}, \qquad 0<\theta<1.$$

モシ $b=a+h$ トオクト

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h), \qquad 0<\theta<1$$

トナル.

例題1. 或變域ニ於テ常ニ $f'(x)=0$ ナルトキハ函數 $f(x)$ ハ此ノ變域ニ於テハ常數デアルコトヲ證明セヨ.

［證明］ 與ヘラレタ變域內ノ x ノ任意ノ二ツノ値ヲ a, b トスルト

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}. \qquad 但シ \quad 0<\theta<1 \quad トスル.$$

而シテ $a+\theta(b-a)$ ハ a ト b トノ間ノ値, 從ツテ與ヘラレタ變域內ノ値デアル故

$$f'\{a+\theta(b-a)\}=0$$

デアル. 故ニ常ニ $f(b)=f(a)$ トナル. 之ハ函數 $f(x)$ ノ x ニ如何ナル値ヲ代入シテモ同一ノ値ヲトルコトヲ示ス. 卽チ $f(x)$ ハ常數デアル.

例題2. $f(x)=x^n$ ナル場合ニ平均値ニ於ケル θ ノ値ヲ定メヨ. 之ニ依ツテ x^2 ナルトキノ θ ノ値ヲ定メヨ.

［解］ $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$ ニ於テ $f(x)=x^n$ トスルト

$$(x+h)^n=x^n+nh(x+\theta h)^{n-1}. \qquad \therefore \quad (x+\theta h)^{n-1}=\frac{(x+h)^n-x^n}{nh}.$$

$$\therefore \quad \theta=\frac{\left\{\dfrac{(x+h)^n-x^n}{nh}\right\}^{\frac{1}{n-1}}-x}{h}.$$

x^2 ナルトキハ $n=2$ ナルヲ以テ上ノ公式ニ代入スルト

$$\theta=\frac{\dfrac{(x+h)^2-x^2}{2h}-x}{h}=\frac{1}{2}.$$

函數ノ近似値ト誤差

$f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ連續ナルトキハ平均値ノ定理ニヨリ

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h), \qquad 但シ \ 0<\theta<1$$

デアルカラ, 今 $f(x+h)$ ノ近似値トシテ

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)$$

ナル式ヲ用ヒルトキ, 其ノ誤差ヲ E トスルト

$$\mathrm{E}=h\{f'(x+\theta h)-f'(x)\}$$

デアル. 故ニ x ヨリ $x+h$ ニ至ル間ニ於テ $f'(x)$ ノトル最大値ヲ G, 最小値ヲ L トスルト

19487

$x=a+\theta(b-a)$ $b=a+h$

$x=a+\theta h$

$$|\mathrm{E}| \leqq |h|(\mathrm{G}-\mathrm{L})$$

トナル. 之ニ依リ誤差ノ限界ヲ知ルコトガ出來ル.

若シ近似式トシテ $f(x+h)=f(x)+hf'(x)$ ナル式ヲ用ヒルト

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

トナル. 卽チ x ガ或値ヨリ僅ニ變動スル場合ニハ $\Delta f(x)$ ト Δx トノ比ハ Δx ノ大キサニ殆ド關係ナク一定デアルト見做スコトガ出來ル. 換言スレバ Δx ニ應ズル曲線ノ部分ハ之ヲ直線ト見做スコトガ出來ル. 比例部分ノ原理ハ此ノコトヲ利用シタノデアル.

例題3. 三角形ノ二邊 a, b ガ一定ニシテ其ノ夾角 θ ガ ε ダケ變ズルトキ第三邊ハ大略何程變ズルカ.

［解］ 第三邊ヲ c トスルト

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

デアルカラ c ハ θ ノ函數デアル. 故ニ $c=f(\theta)$ トオキ, ε ダケ變化シタトキノ第三邊ヲ c' トスルト $c'=f(\theta+\varepsilon)$ デアルカラ, 第三邊ノ變化ハ

$$f(\theta+\varepsilon)-f(\theta)=\varepsilon f'(\theta+\lambda\varepsilon). \qquad 但シ \quad 0<\lambda<1.$$

而シテ

$$f'(\theta)=\frac{ab\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}=\frac{ab}{c}\sin\theta.$$

$$\therefore \quad f(\theta+\varepsilon)-f(\theta)=\frac{\varepsilon ab}{c}\sin(\theta+\lambda\varepsilon)\fallingdotseq\frac{\varepsilon ab}{c}\sin\theta.$$

例題4. $\sin(x+h)=\sin x+h\cos x$ トスレバ誤差ノ最大限度ハ何程ナルカ.

［解］ 平均値ノ定理ニヨリ $\sin(x+h)=\sin x+h\cos(x+\theta h)$.

故ニ誤差ヲ E トスルト

$$|\mathrm{E}|=|h\{\cos(x+\theta h)-\cos x\}|. \qquad 但シ \quad 0<\theta<1.$$

而シテ又平均値ノ定理ニヨリ

$$\cos(x+\theta h)-\cos x=-\theta h\sin(x+\theta_1\theta h). \qquad 但シ \quad 0<\theta_1<1.$$

$$\therefore \quad |\mathrm{E}|=|\theta h^2\sin(x+\theta_1\theta h)|<h^2.$$

例題5. 平均値ノ定理ヲ應用シテ $(1.005)^{\frac{2}{3}}$ ノ近似値ヲ計算セヨ.

［解］ $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ トスルト $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

$$\therefore \quad (x+h)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}h(x+\theta h)^{-\frac{1}{3}}. \qquad 但シ \quad 0<\theta<1.$$

此ノ式ニ於テ $x=1$, $h=0.005$ トオクト

$$(1.005)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}\times 0.005\times(1+0.005\theta)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{2}{3}\times 0.005\fallingdotseq \mathbf{1.003.}$$

練習問題 12.

(1) 一ツノ動點ノ速サヲ v, 經過セル道ノ長サヲ s トスルトキ

$$v^2=\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{s}$$

ナル關係アルナラバ, 其ノ加速度ノ大キサハ s ノ平方ニ逆比例スルコトヲ證明セヨ.

(2) $x^2=at^2+2bt+c$ ナルトキハ加速度ハ x^3 ニ反比例スルコトヲ證明セヨ.

(3) 半徑 10 糎ナル圓ニ於テ其ノ半徑ガ每秒 1 糎ノ割合ニテ延長スルトキハ, 半徑ガ丁度 20 糎ナル瞬間ニハ其ノ面積ハ每秒幾平方糎ノ割合ニ增大シツツアルカ.

(4) 圓ノ面積ガ一樣ナル速サニテ增加シ行クトキハ, 圓周ノ增ス割合ハ半徑ニ半比例スルコトヲ證明セヨ.

(5) 一點 A 及ビ A ヲ通ラナイ一直線 XY ガアル. XY 上ニ一定ノ速サニテ運動スル點PヲAヨリ見タルトキ視線 AP ノ方向ヲ變ズル角速度 ω ハ

$$\omega=\frac{av}{\mathrm{AP}^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

(6) OX, OY ハ互ニ垂直ナル直線ニシテ P ハ OX 上ヲ每秒 2cm ノ速サニテ走ル動點, Q ハ OY 上ヲ每秒 −3cm ノ速サニテ走ル動點トス. OP=5m, OQ=3m ナル瞬間ニ於ケル長サ PQ ノ變ズル割合如何.

(7) 點 P ハ $x^2+y^2=a^2$ ナル圓上ヲ等速運動ヲナス. 又點 Q ハ P 點ヨリ y 軸ニ平行ニ引キタル直線ガ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ナル橢圓ト交ハル點トス. 點 P ガ一定ノ速サニテ圓周上ヲ運動スルトキノ點 Q ノ切線ノ方向ノ變ズル割合如何.

(8) 半徑 1m ナル圓周上ヲ每秒 1cm ノ速サニテ走ル動點アリ. 圓ノ中心ヲ O, 圓周上ノ定點ヲ A トスルトキ ∠AOP=60° ナル瞬間ニ於ケル △AOP ノ面積ノ增ス割合如何.

(9) 小孔ヲ通シテ砂ヲ地上ニ落ストキ其ノ砂ハ常ニ一定ナル頂角ヲ有スル直圓錐ノ形ニ堆積ストセバ, 其ノ圓錐ノ高サガ h 糎ナル瞬間ニハ其ノ高サハ每秒幾糎ノ割合ニ增シツヽアルカ. 但シ砂ハ每秒 m 立方糎宛流下セシムルモノトス.

(10) 攝氏 t 度ニ於ケル水 1 瓦ノ體積ハ

$$1+\frac{(t-4)^2}{144000}\ 立方糎$$

ナリト云フ. $t=0°$ 及ビ $t=10°$ ニ於ケル水ノ膨脹係數ヲ求メヨ.

(11) 一定量ノ氣體ノ容積ヲ v, 壓力ヲ p トスルトキ

$$\lim_{\Delta v\to 0}\Delta p\Big/\frac{\Delta v}{-v}$$

ヲ氣體ノ彈性率ト云フ. $pv^r=c$ ナル塲合ノ彈性率ヲ求メヨ. 但シ r, b ハ常數トス.

(12) 質點ノ直線運動ニ於テ力 F ハ質量 m ト速サ v トノ積ノ時間ニ對スル變化率ニ等シイコトヲ證明セヨ.

(13) 質點ノ直線運動ニ於テ經過距離ヲ x, 速サヲ v, 力ヲ F トスルトF ハ運動ノえねるぎーノ距離ニ對スル變化率ニ等シイコトヲ證明セヨ.

(14) 質點ノ直線運動ニ於テ力 F ニヨツテナサレル仕事ヲ W ニテ表ハセバ

$$\frac{d\mathrm{W}}{dx}=\mathrm{F}\qquad \therefore\ W=\int F\,dx$$

ナルコトヲ證明シ, 之ニ依ツテ W ト運動ノえねるぎートノ差ハ一定ナルコトヲ示セ.

(15) $f(x)$ ハ實係數ヲ有スル n 次ノ整式トス. 方程式 $f(x)=0$ ガ n 個ノ相異ナル實根ヲ有スルトキハ方程式 $f'(x)=0$ ハ $n-1$ 個ノ相異ナル實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

(16) $f(x)$ 及ビ $g(x)$ ガ有限確定ニシテ連續ナル導函數ヲ有シ, 且 $g'(x)$ ガ零トナラザル變域ニ於テハ,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)},\quad 但シ\quad h=b-a,\ 0<\theta<1$$

ナル關係アルコトヲ證明セヨ.

(17) $f(x)=x^3$ ナルトキ平均値ノ定理ニ於ケル θ ノ値ヲ x, Δx デ表ハセ.

(18) $f(b)-f(a)=(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}$, $0<\theta<1$ ナル平均値ノ定理ニ於テ

$$f(x)=\log x,\qquad \iota=1,\qquad =2$$

トスルトキ θ ノ値如何. 但コヽデハ對數ノ底ハ 10 トスル.

【解　　答】

(1) 與式ノ兩邊ヲ時間 t ニ關シテ微分スルト

$$2v\frac{dv}{dt}=-\frac{\mathrm{B}}{s^2}\frac{ds}{dt}.\qquad \frac{ds}{dt}=v.$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\mathrm{B}}{2s^2}.$$

即チ加速度ノ大キサハ s ノ平方ニ逆比例スル.

(2) 與式ノ兩邊ヲ時間 t ニ關シテ微分スルト

$$2x\frac{dx}{dt}=2at+2b.\qquad \therefore\ v=\frac{at+b}{\sqrt{at^2+2bt+c}}.$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{a\sqrt{at^2+2bt+c}-\frac{1}{2}(at+b)(at^2+2bt+c)^{-\frac{1}{2}}(2at+2b)}{(\sqrt{at^2+2bt+c})^2}$$

$$=\frac{a(at^2+2bt+c)-(at+b)^2}{(\sqrt{at^2+2bt+c})^3}=\frac{ac-b^2}{x^3}.$$

即チ加速度ハ x^3 ニ反比例スル.

(3) 半徑ヲ r, 圓ノ面積ヲ A トスルト　$\mathrm{A}=\pi r^2$.

$$\therefore\quad \frac{d\mathrm{A}}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}.$$

而シテ $r=20$, $\dfrac{dr}{dt}=1$ ナル故 $\dfrac{d\mathrm{A}}{dt}=40\pi$.　　　答　40π 平方糎.

(4) 圓ノ面積ヲ $\mathrm{A}=\pi r^2$ トス. 面積ガ一樣ナル速サニテ增加スルトキハ k ヲ定數トスレバ

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt}=k$$

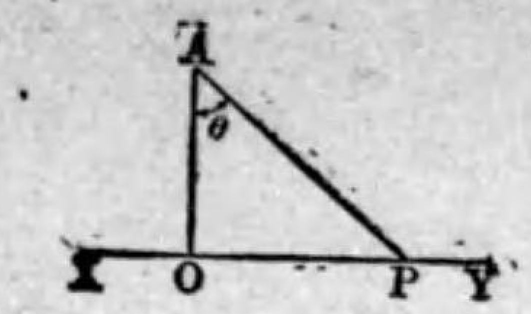
デアル. サテ

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}=k.$$

$$\therefore\quad r\frac{d(2\pi r)}{dt}=k.\qquad \therefore\quad \frac{d(2\pi r)}{dt}=\frac{k}{r}.$$

即チ圓周ノ增ス割合ハ半徑ニ反比例スル.

(5) A ヨリ XY ニ下シタ垂線ノ足ヲ O トシ, 且 $\mathrm{AO}=a$, P 點ノ速度ヲ v トシ,



$\angle\mathrm{OAP}=\theta$ トスルト

$$\mathrm{OP}=vt,\qquad \mathrm{AP}^2=a^2+(vt)^2.$$

$$\therefore\quad \mathrm{AP}=\sqrt{a^2+v^2t^2}.$$

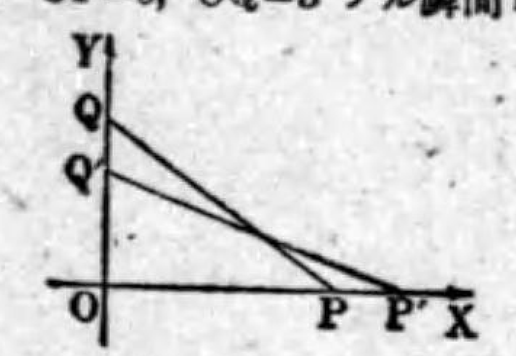
$$\sin\theta=\frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}.\qquad \therefore\quad \theta=\sin^{-1}\frac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}.$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{vt}{\sqrt{a^2+v^2t^2}}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2t^2}{a^2+v^2t^2}}}=\frac{av}{a^2+v^2t^2}=\frac{av}{\mathrm{AP}^2}.$$

$$\therefore\quad \omega=\frac{av}{\mathrm{AP}^2}.$$

但シ t ハ點 P ガ O ヨリ運動シ始メテヨリノ時間デアル.

(6) $\mathrm{OP}=5$, $\mathrm{OQ}=3$ ナル瞬間ヨリ t 秒後ノ P, Q ノ位置ヲ P′, Q′ トスルト



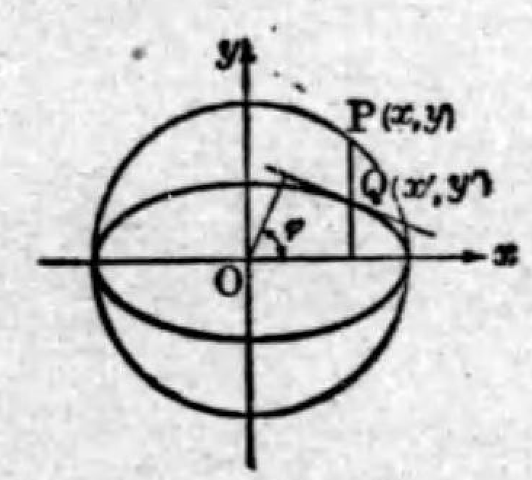
$$\mathrm{P'Q'}=\sqrt{(5+0.02t)^2+(3-0.03t)^2}.$$

$$\frac{d(\mathrm{P'Q'})}{dt}=\frac{0.02(5+0.02t)-0.03(3-0.03t)}{\sqrt{(5+0.02t)^2+(3-0.03t)^2}}.$$

コノ式ニ於テ $t=0$ トオクト

$$\frac{d(\mathrm{P'Q'})}{dt}=\frac{0.01}{\sqrt{34}}.\qquad 答\quad \frac{1}{\sqrt{34}}\,\mathrm{cm/sec}.$$

(7) 點 P ノ離心角ヲ ϕ トスルト



$\mathrm{P}(x,\ y)$ ニハ　$x=a\cos\phi$,　$y=a\sin\phi$.

$\mathrm{Q}(x_1',\ y')$ ニハ　$x'=a\cos\phi$, $y'=b\sin\phi$.

Q 點ニ於ケル切線ハ

$$\frac{x\cos\phi}{a}+\frac{y\sin\phi}{b}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i}).$$

(i) ノ角速度ハ原點ヨリ之ニ下シタ垂線ノ角速度ト一致スル. 而シテ原點ヨリ (i) ニ下シタ垂線ノ方程式ハ

$$y=\frac{a\sin\phi}{b\cos\phi}x.\qquad \therefore\quad y=\frac{a}{b}x\tan\phi\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii}).$$

(ii) ガ x 軸トナス角ヲ φ トスルト　$\tan\varphi=\dfrac{a}{b}\tan\phi$.

$$\therefore\quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right).$$

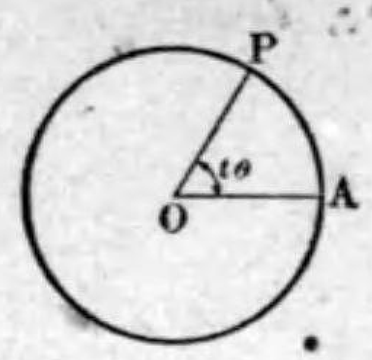
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\dfrac{a}{b}\sec^2\phi\dfrac{d\phi}{dt}}{1+\dfrac{a^2}{b^2}\tan^2\phi}=\frac{ab\sec^2\phi\dfrac{d\phi}{dt}}{b^2+a^2\tan^2\phi}.$$

P ハ圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ周上ヲ等速運動ヲナス故ソノ角速度ハ一定デアル. 之ヲ ω ト

オクト

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ab\omega\sec^2\phi}{b^2+a^2\tan^2\phi}.$$

(8) OP ノ角速度ヲ θ トスルト t 秒間ニ於ケル



$\angle AOP=t\theta.$ $\therefore\ \triangle AOP=\frac{1}{2}OA^2\sin t\theta.$

$$\therefore\ \frac{d(\triangle AOP)}{dt}=\frac{1}{2}OA^2\theta\cos t\theta.$$

而シテ $OA\cdot\theta=0.01\,\mathrm{m},\ \ OA=1\,\mathrm{m},\ \ t\theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ.$

$$\therefore\ \frac{d(\triangle AOP)}{dt}=\frac{1}{2}\times1\times0.01\times\cos60^\circ=0.0025.$$

即チ毎秒 25 平方糎デアル.

(9) 小孔ヨリ落チル砂ハ常ニ一定ナル頂角 2ϕ ヲ有スル直圓錐ノ形ニ堆積スルカラ, 或瞬間ニ於ケル體積ヲ V, 高サヲ h トスルト

$$V=\frac{1}{3}\pi h^3\tan^2\phi,\qquad \frac{dV}{dt}=\pi h^2\tan^2\phi\frac{dh}{dt}.$$

然ルニ $\qquad \frac{dV}{dt}=m,\qquad \therefore\ m=\pi h^2\tan^2\phi\frac{dh}{dt}.$

$$\therefore\ \frac{dh}{dt}=\frac{m}{\pi h^2\tan^2\phi}.$$

(10) $V=1+\frac{(t-4)^2}{144000}$ トオクト $\frac{dV}{dt}=\frac{2(t-4)}{144000}=\frac{t-4}{72000}.$

$t=0$ ナルトキハ $\qquad \frac{dV}{dt}=-\frac{1}{18000}.$

$t=10$ ナルトキハ $\qquad \frac{dV}{dt}=\frac{1}{12000}.$

但シ $\frac{dV}{dt}$ ハ膨張係數デアル.

(11) $v=\left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{1}{r}}.\qquad \therefore\ \frac{dv}{dp}=-\frac{1}{r}\left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{1}{r}-1}\frac{c}{p^2}.$

$$\frac{dv}{dp}=\lim_{\Delta p\to0}\frac{\Delta v}{\Delta p}.$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta p\to0}\Delta p\Big/\frac{\Delta v}{-v}=-v\lim_{\Delta p\to0}\frac{1}{\frac{\Delta v}{\Delta p}}=\frac{-v}{-\frac{1}{r}\left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{1}{r}-1}\frac{c}{p^2}}$$

$$=\frac{-vrp^2}{-v\left(\frac{c}{p}\right)^{-1}c}=rp.$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta p\to0}\Delta p\Big/\frac{\Delta v}{-v}=rp.$$

(12) $M=mv$ トオキ兩邊ヲ t デ微分スルト

$$\frac{dM}{dt}=m\frac{dv}{dt}=m\alpha=F.\qquad 但シ\ \alpha\ ハ加速度.$$

(13) 質量 m, 速度 v ナル質點ノ運動ノえねるぎーハ $\frac{1}{2}mv^2$ デアル.

$$\therefore\ \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=mv\frac{dv}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=mv\frac{dv}{dt}\frac{1}{v}=m\frac{dv}{dt}.$$

然ルニ $\qquad F=m\frac{dv}{dt}.$

$$\therefore\ F=\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dx}.$$

(14) 力 F ガ x ナル距離ノ間作用シタトキノ仕事 W ハ

$$W=xF.$$

$$\therefore\ \frac{dW}{dx}=F=\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dx}.$$

$$\therefore\ \frac{dW}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

即チ W ト $\frac{1}{2}mv^2$ ノ x ニ關スル導函數ガ等シイカラソノ差ハ常數デアル.

$$\therefore\ W-\frac{1}{2}mv^2=一定.$$

(15) $f(x)$ ハ n 次ノ整式, 從ツテ $f'(x)$ ハ $n-1$ 次ノ整式デアル故 $f(x)$, $f'(x)$ ハ總テノ實數ニ對シテ連續デアル.

今 $f(x)=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ トスルト

$$f(\alpha_1)=0,\ f(\alpha_2)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ f(\alpha_n)=0$$

ナル故, Rolle ノ定理ニヨリ $f'(x)=0$ ハ α_1 ト α_2 トノ間ニ一根ヲ有スル. 同様ニシテ α_2 ト α_3 トノ間ニ一根ヲ有スル. 以下同様ニシテ $n-1$ 個ノ實根ヲ有スル.

(16) $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=k$ トオクト $f(b)-f(a)=k\{g(b)-g(a)\}.$

今 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-k\{g(x)-g(a)\}$ ナル函數ヲ考ヘルト, $f(x)$, $g(x)$ ハ或變域ニ於テ有限確定ニシテ連續ナル導函數ヲ有スルヲ以テ, $\varphi(x)$ モ亦有限確定ニシテ連續ナル導函數ヲ有スル. 且

$$\varphi(b)=f(b)-f(a)-k\{g(b)-g(a)\}=0.$$

$$\varphi(a)=f(a)-f(a)-k\{g(a)-g(a)\}=0.$$

故ニ Rolle ノ定理ニヨリ

$$\varphi'(a+\theta h)=f'(a+\theta h)-kg'(a+\theta h)=0$$

ナル θ ハ存在スル. 但シ $0<\theta<1$, $h=b-a$, $g'(a+\theta h)\neq 0$ ナル故

$$k=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}.$$

$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}.$$

(17) $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x f'(x+\theta\Delta x)$, $0<\theta<1$ ニ於テ $f'(x)=3x^2$.
$(x+\Delta x)^3=x^3+\Delta x\cdot 3(x+\theta\Delta x)^2$. 之ヲ簡單ニスルト

$$3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2=3(x+\theta\Delta x)^2.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{\Delta x}\left\{\pm\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x\right\}.$$

(18) $f(x)=\log_{10}x=\log_{10}e\times\log_e x$. $\therefore\ f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_{10}e$,
$f(2)=\log_{10}2$, $f(1)=\log 1=0$,
ナルヲ以テ與式ヨリ

$$\log_{10}2=\frac{1}{1+\theta}\cdot\log_{10}e;\qquad \log_{10}2+\theta\log_{10}2=\log_{10}e,$$

$$\theta\log_{10}2=\log_{10}e-\log_{10}2.$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\log_{10}e-\log_{10}2}{\log 2}$$

第四編 高次導函數及ビ其ノ應用

第十八章 高次導函數

高次微分法 函數 $y=f(x)$ ノ導函數 $y'=f'(x)$ ハ一般ニ x ノ函數デアル. 故ニ函數 $f'(x)$ ヲ基トシテ其ノ導函數ヲ考ヘルコトガ出來ル. 之ヲ $f''(x)$ デ表ハシ $f(x)$ ノ**第二次導函數**ト云フ. 即チ

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

デアル. 此ノ第二次導函數ニ對シテ $f'(x)$ ヲ $f(x)$ ノ**第一次導函數**ト云フ.

$f''(x)$ ガ更ニ其ノ導函數ヲ有スルトキハ, 之ヲ $f(x)$ ノ第三次導函數ト云ヒ $f'''(x)$ ナル記號ニテ表ハス. 以下同様ニシテ一般ニ**第 n 次導函數**ナルモノヲ考ヘルコトガ出來ル. 而シテ之ヲ表ハスニ $f^{(n)}(x)$ ナル記號ヲ以テスル. 時トシテハ

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ f^{(n)}(x),\ \cdots\cdots$$

ノ代リニ

$$y'',\ \ y''',\ \ y^{(4)},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ y^{(n)},\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ \frac{d^4y}{dx^4},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \cdots\cdots\cdots$$

ナル記號ヲ用ヒルコトガアル. 但シ第二次, 第三次ハ $f''(x)$, $f'''(x)$ デ表ハスガ, 其レ以後ハ括弧ニテ包マレタ數字 (4), (5), ……, (n) デ表ハス. 之ハ y^4, y^5, ……, y^n トスルトキハ y ノ羃ト間違ヘルコトガアルカラデアル.

第二次以上ノ導函數ヲ總稱シテ**高次導函數**ト云ヒ, 高次導函數ヲ求メル算法ヲ**高次微分法**ト云フ. 而シテ第 n 次導函數ノ x ニ $x=a$ ヲ代入シテ得ル値ヲ原函數 $f(x)$ ノ**第 n 次微分商**又ハ**第 n 次微係數**ト云ヒ $f^{(n)}(a)$ 又ハ $\left(\dfrac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=a}$ ナル記號デ表ハス.

初等函數ノ高次導函數 普通微分學デ取扱フ初等函數ハ代數函數, 對數函數, 指數函數, 三角函數, 逆三角函數デアル. 以下是等ノウチ代表的ナモノトシテ x^m, $\log x$, a^x, $\sin x$, $\tan^{-1}x$ ノ第 n 次導函數ノ求メ方ヲ述ベル.

$y=x^m$ ノ第 n 次導函數 但シ $m>n$

$$y'=mx^{m-1},\quad y''=m(m-1)x^{m-2},\quad y'''=m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

一般ニハ $\boldsymbol{y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)x^{m-n}}$.

此ノ特別ナ場合トシテ m ガ正ノ整數ノトキハ

$$\boldsymbol{y^{(m)}=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3.\,2.\,1=m!.}$$

$$\boldsymbol{y^{(m+1)}=0,\quad y^{(m+2)}=0,\cdots\cdots,\ y^{(m+r)}=0.}$$

$y=\log x$ ノ第 n 次導函數

$$y'=\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{1}{x^2},\quad y'''=\frac{2!}{x^3},\quad y^{(4)}=-\frac{3!}{x^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

一般ニ $\quad \boldsymbol{y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}}.$

$y=a^x$ ノ第 n 次導函數

$$y'=a^x\log a,\quad y''=a^x(\log a)^2,\quad y'''=a^x(\log a)^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

一般ニ $\quad \boldsymbol{y^{(n)}=a^x(\log a)^n}.$

$y=\sin x$ ノ第 n 次導函數

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right),$$

一般ニ $\quad \boldsymbol{y^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)}.$

$y=\tan^{-1}x$ ノ第 n 次導函數

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\left\{-\sin y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right\}y'$$

$$=\cos^2 y\left\{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\cos^2 y\sin\left(2y+2\times\frac{\pi}{2}\right),$$

同樣ニシテ $\quad y'''=2\cos^3 y\sin\left(3y+3\times\dfrac{\pi}{2}\right),$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

一般ニ $\quad \boldsymbol{y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin\left(ny+n\dfrac{\pi}{2}\right)}.$

函數ノ和ノ高次導函數 二ツノ函數 u, v ハ變數 x ニ關シテ同一ノ變域ニ於テ各高次導函數ヲ有スルモノトスルトキ, 其ノ同ジ變域ニ於テ $y=u\pm v$ ニ對シテ

$$\boldsymbol{y^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}}$$

デアル.

[證明] $\quad y'=u'\pm v',\quad y''=u''\pm v'',$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

一般ニ $\quad y^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$

二ツヨリ多クノ函數ニツイテモ同樣ナ結果ヲ得ル.

例題 1. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ ナルトキ $y^{(n)}$ ヲ求メヨ.

[解] $\quad \dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right).$

コヽニ於テ $u=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ トオクト

$$u^{(n)}=(-1)(-2)\cdots\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

同樣ニ $v=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$ トオクト

$$v^{(n)}=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n(1-x)^{-(n+1)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right\}=\frac{n!}{2}\left\{\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right\}.$$

函數ノ積ノ高次導函數　二ツノ函數 u, v ハ變數 x ニ關シテ同一ノ變域ニ於テ各高次導函數ヲ有スルモノトスルトキ，其ノ同ジ變域ニ於テ $y=uv$ ニ對シテ

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v'''$$
$$+\cdots\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}u^{(n-r)}v^{(r)}+\cdots\cdots\cdots+uv^{(n)}$$

デアル．之ヲ Leibniz ノ定理ト云フ．

［證明］ $y'=u'v+uv'$,　　$y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''$.
$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+u'v''+uv'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$.

サテ第 k 次ノ導函數ニツイテ同樣ナ關係ガ成立スルモノト假定スルト

$$y^{(k)}=u^{(k)}v+ku^{(k-1)}v'+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}u^{(k-r)}v^{(r)}+\cdots\cdots+uv^{(k)}.$$

此ノ式ノ兩邊ヲ更ニ微分スルト

$$\{u^{(k-r+1)}v^{(r-1)}\}'=u^{(k-r+2)}v^{(r-1)}+u^{(k-r+1)}v^{(r)},$$
$$\{u^{(k-r)}v^{(r)}\}'=u^{(k-r+1)}v^{(r)}+u^{(k-r)}v^{(r+1)},$$
$$\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}=\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}\left\{1+\frac{k-r+1}{r}\right\}$$
$$=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+2)}{r!}$$

ナル故

$$y^{(k+1)}=u^{(k+1)}v+(k+1)u^{(k)}v'+\frac{(k+1)k}{2}u^{(k-1)}v''+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+2)}{r!}u^{(k-r+1)}v^{(r)}+\cdots\cdots\cdots+uv^{(k+1)}$$

トナリ，第 $k+1$ 次導函數ニ就イテモ同樣ナコトガ成立スル．

而シテ $k=2$ ナルトキ成立ツコトガ既ニ證明サレタカラ，其ヨリ 1 ダケ大ナル 3 ニ對シテ成立スル，同樣ニ，一般ニ任意ノ正ノ整數ニ對シテ成立スル．

［注意］ Leibniz ノ定理ニ於ケル $u^{(n-r)}v^{(r)}$ ノ係數ハ $(a+b)^n$ ノ展開式ニ於ケル $a^{n-r}b^r$ ノ係數即チ ${}_nC_r$ デアル．

例題 2. $y=e^{ax}\cos bx$ ノ第 n 次導函數ヲ求メヨ．

［解］ $y=uv$,　$u=e^{ax}$,　$v=\cos bx$　トオクト

$$u^{(l)}=a^le^{ax},$$
$$v'=-b\sin bx=b\cos\left(bx+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$v''=-b^2\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)=b^2\cos\left(bx+\frac{2\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v^{(m)}=b^m\cos\left(bx+\frac{m\pi}{2}\right).$$

故ニ Leibniz ノ定理ニヨリ

$$y^{(n)}=e^{ax}\Big\{a^n\cos bx+na^{n-1}b\cos\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2\cos\left(bx+\frac{2\pi}{2}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r\cos\left(bx+\frac{r\pi}{2}\right)+\cdots\cdots$$
$$+b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\Big\}.$$

［別解］ $y'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\cos bx-\frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\sin bx\right\}$.

コヽニ於テ　$a=r\cos\phi$,　$b=r\sin\phi$　トオクト

$$r=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$\therefore$　$y'=re^{ax}\cos(bx+\phi)$.　　但シ r, ϕ ハ常數.

同樣ニシテ

$$y''=re^{ax}\{a\cos(bx+\phi)-b\sin(bx+\phi)\}.$$
$$=r^2e^{ax}\cos(bx+2\phi).$$

一般ニ

$$y^{(n)}=r^ne^{ax}\cos(bx+n\phi).$$

3.　$y=\sin^{-1}x$　ナルトキ次式ヲ證明セヨ．

$$y^{(n+2)}(1-x^2)-(2n+1)y^{(n+1)}x-n^2y^{(n)}=0.$$

［證明］　$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.　　$\therefore$　$y'\sqrt{1-x^2}=1$ ……………………(1).

(1) ノ兩邊ヲ微分スルト

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0.\qquad\therefore\ y''(1-x^2)-y'x=0\ \cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) ヲ Leibniz ノ定理ニヨリ n 回微分スレバ

$$\left\{y^{(n+2)}(1-x^2)+ny^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n-1)}{2!}y^{(n)}(-2)\right\}-\{y^{(n+1)}x+ny^{(n)}\}=0.$$
$$\therefore\ y^{(n+2)}(1-x^2)-(2n+1)y^{(n+1)}x-n^2y^{(n)}=0.$$

［注意］ 最後ノ式ニ於テ $x=0$ トオクト

$$y^{(n+2)}_{x=0}=n^2y^{(n)}_{x=0}.$$

然ルニ $y'_{x=0}=1$ ナル故 n ガ奇數ナルトキハ

$$y_{x=0}^{(n+2)}=1^2.3^2.5^2\cdots\cdots n^2.$$

次ニ $y_{x=0}=0$ ナル故 n ガ偶數ナルトキハ

$$y_{x=0}^{(n)}=0.$$

練習問題 13.

(1) 次ノ各函數ノ第 3 次導函數ヲ求メヨ.

(i) $y=x^3\log x.$　　(ii) $y=(x^2+a^2)\tan^{-1}\dfrac{x}{a}.$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$ ナルトキ $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ ヲ求メヨ.

(3) $y=\sin^3x$ ナルトキ第 n 次導函數ヲ求メヨ.

(4) $y=x^{n-1}\log x$ ナルトキ第 n 次導函數ヲ求メヨ.

(5) $y=\tan^{-1}x$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

(6) $y=e^x\sin x$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

(7) 次ノ函數ノ第 n 次導函數ヲ求メヨ.

(i) $y=\dfrac{ax+bc}{x^2-c^2}.$　　(ii) $y=\sin x\cos^3 x.$

(iii) $y=(1-x^2)^n.$　　(iv) $y=x^n\sin x.$

(8) $y=e^{-x}\cos x$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4y=0.$$

(9) $y^2=\sec 2x$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$y+\frac{d^2y}{dx^2}=3y^5.$$

(10) $y=\{x+\sqrt{x^2-1}\}^n$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dx}{dx}-n^2y=0.$$

(11) $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$$

(12) $y=(\sin^{-1}x)^2$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0.$$

而シテ此ノ結果ヨリ

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-n^2\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

ヲ誘導シ且 $f^{(n)}(0)$ ヲ求メヨ.

(13) $e^xy=f^{(x)}$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$e^xy^{(n)}=f^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2!}f^{n-2)}(x)-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}f^{(n-r)}(x)+\cdots\cdots+(-1)^nf(x).$$

(14) $x=\phi(t),\ y=\varphi(t)$ ナルトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2},\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$ ヲ t ニヨリテ表ハセ.

〔解　　答〕

(1) (i) $y'=3x^2\log x+x^2.$　　$y''=6x\log x+3x^2\dfrac{1}{x}+2x=6x\log x+5x.$

$$\therefore\quad y'''=6\log x+6x\frac{1}{x}+5=\mathbf{6\log x+11}.$$

(ii) $y'=2x\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{a}\dfrac{x^2+a^2}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}=2x\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+a.$

$$y''=2\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\frac{2x}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}=2\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{2ax}{a^2+x^2}.$$

$$\therefore\quad y'''=\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{2a(a^2+x^2)-4ax^2}{(a^2+x^2)^2}=\mathbf{\frac{4a^3}{(a^2+x^2)^2}}.$$

(2) $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}.$

$$\therefore\quad y^{(4)}=\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\mathbf{\frac{4!}{(1-x)^5}}.$$

(3) $y=\sin^3x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x).$

$$\therefore\quad y^{(n)}=\mathbf{\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right)}.$$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=(n-1)x^{n-2}\log x+x^{n-2}.$

$\dfrac{d^r}{dx^r}x^{r-1}=0$ ナル故

$\dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{(n-1)x^{n-2}\log x+x^{n-2}\}=\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\{(n-1)x^{n-2}\log x\}.$

同樣ニシテ

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(n-1)(n-2)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^{n-3}\log x)$$

....

$$=(n-1)!\,\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{(n-1)!}{x}.$$

$$\therefore\quad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{(n-1)!}{x}.$$

(5) 今 $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$

ガ成立スルトスルト

$$y^{(n+1)}=\left\{n!\cos^{n-1}y(-\sin y)\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+n!\cos^n y\cos n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right\}y'$$

$$=n!\cos^{n-1}y\left\{\cos y\cos n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\sin y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right\}y'$$

$$=n!\cos^{n-1}y\cos\left\{n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y\right\}y'$$

$$=n!\cos^{n-1}y\sin(n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)y'.$$

而シテ $y=\tan^{-1}x$ ヨリ $y'=\cos^2 y.$

$$\therefore\quad y^{(n+1)}=n!\cos^{n+1}y\sin(n+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

サテ $y'=\cos^2 y=\cos y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$

即チ n ナルトキ成立スレバ $n+1$ ナルトキモ成立シ，且 $n=1$ ナルトキ成立スル故 n ガ任意ノ正整數ナルトキ成立スル．

(6) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$

$$=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

サテ $y^{(k)}=(\sqrt{2})^k e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)$ ガ成立スルモノトスルト

$$y^{(k+1)}=(\sqrt{2})^k e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)+(\sqrt{2})^k e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$=(\sqrt{2})^{k+1}e^x\sin\left\{x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right\}$$

トナリ，$n=k$ ナルトキ成立スレバ $n=k+1$ ノトキモ成立スル．而シテ $n=1$ ナルトキ成立シテ居ル故，n ガ任意ノ正整數ナルトキ成立スル．

(7) (i) $y=\frac{1}{2}\left\{\frac{a-b}{x+c}+\frac{a+b}{x-c}\right\}=\frac{1}{2}\{(a-b)(x+c)^{-1}+(a+b)(x-c)^{-1}\}.$

$$\therefore\quad y^{(n)}=\frac{1}{2}\{(a-b)(-1)^n n!(x+c)^{-(n+1)}+(a+b)(-1)^n n!(x-c)^{-(n+1)}\}$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{2}\left\{\frac{a-b}{(x+c)^{n+1}}+\frac{a+b}{(x-c)^{n+1}}\right\}.$$

(ii) $8y=8\sin x\cos^3 x=2\sin 2x+\sin 4x.$

故＝ $8y'=2\cdot 2\cos 2x+4\cos 4x=2^2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+4\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right).$

$$8y''=2^2\cdot 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+4\cdot 4\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=2^3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right)+4^2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

....

$$8y^{(n)}=2^{n+1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$\therefore\quad y^{(n)}=2^{n-2}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^{2n-3}\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(iii) $y=(1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n.$

$u=(1+x)^n,\quad v=(1-x)^n$ トオケバ

$$u^{(r)}={}_nP_r(1+x)^{n-r},\qquad v^{(r)}=(-1)^r{}_nP_r(1-x)^{n-r}$$

デアリ，又

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+{}_nC_1u^{(n-1)}v'+\cdots\cdots+{}_nC_ru^{(n-r)}v^{(r)}+\cdots\cdots+uv^{(n)}$$

デアル故

$$y^{(n)}=n!(1-x)^n+{}_nC_1{}_nP_{n-1}(1+x)(-1){}_nP_1(1-x)^{n-1}+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_r{}_nP_{n-r}(1+x)^r(-1)^r{}_nP_r(1-x)^{n-r}+\cdots\cdots+(1+x)^n(-1)^n n!$$

$$=n!(1-x)^n-n!n^2(1+x)(1-x)^{n-1}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n!n^2(n-1)^2\cdots(n-r+1)^2}{(r!)^2}(1+x)^r(1-x)^{n-r}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n n!(1+x)^n$$

$$=n!\left\{(1-x)^n-\frac{n^2}{(1!)^2}(1+x)(1-x)^{n-1}+\cdots\cdots\right.$$

$$+(-1)^r\frac{n^2(n-1)^2\cdots(n-r+1)^2}{(r!)^2}(1+x)^r(1-x)^{n-r}$$

$$\left.+\cdots\cdots+(-1)^n(1+x)^n\right\}.$$

(iv) $y=x^n\sin x$ ＝ Leibniz ノ定理ヲ適用スルト $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ ナル故

$$y^{(n)}=n!\sin x+{}_nC_1{}_nP_{n-1}x\sin\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_r{}_nP_{n-r}x^r\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)+\cdots\cdots+x^n\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=n!\sin x+\frac{n}{1!}n(n-1)\cdots 2x\sin\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}n(n-1)\cdots\cdots\cdots(r+1)x^r\sin\left(x+\frac{r}{2}\pi\right)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+x^n\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=n!\left\{\sin x+\frac{n}{(1!)^2}x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\right.$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r\sin\left(x+\frac{r\pi}{2}\right)+\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.+\frac{1}{n!}x^n\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)\right\}.$$

(8) $y'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$y''=e^{-x}\cos x+2e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x=2e^{-x}\sin x.$

$y'''=-2e^{-x}\sin x+2e^{-x}\cos x.$

$y^{(4)}=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x=-4e^{-x}\cos x=-4y.$

$$\therefore\qquad \frac{d^4y}{dx^4}+4y=0.$$

(9) $2yy'=2\sec 2x\tan 2x.\qquad \therefore\ yy'=\sec 2x\tan 2x.$

$\therefore\qquad (y')^2+yy''=2\sec 2x\tan^2 2x+2\sec^3 2x.$

而シテ $\qquad (y')^2=\sec 2x\tan^2 2x.$

$$\begin{aligned}\therefore\qquad yy''&=\sec 2x\tan^2 2x+2\sec^3 2x\\&=\sec 2x(\sec^2 2x-1)+2\sec^3 2x\\&=3\sec^3 2x-\sec 2x\\&=3y^6-y^2.\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad y+\frac{d^2y}{dx^2}=3y^5.$$

(10) $y'=n\{x+\sqrt{x^2-1}\}^{n-1}\left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right\}=\frac{ny}{\sqrt{x^2-1}}.$

$$\therefore\qquad y''=\frac{n}{\sqrt{x^2-1}}y'-\frac{nxy}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{n^2y}{x^2-1}-\frac{x}{x^2-1}y'$$

$$\therefore\qquad (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=n^2y.$$

(11) $y'=\cos(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$y''=-\sin(m\sin^{-1}x)\frac{m^2}{1-x^2}+\cos(m\sin^{-1}x)\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$=-y\frac{m^2}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}y'.$$

$$\therefore\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$$

(12) $y'=2\sin^{-1}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\qquad \therefore\ (1-x^2)(y')^2=4(\sin^{-1}x)^2=4y.$

$\therefore\qquad 2y'y''(1-x^2)-2x(y')^2=4y'.$

$\therefore\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0.$

兩邊ヲ n 回微分スルト

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-2nx\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-\frac{2n(n-1)}{2!}\frac{d^ny}{dx^n}-x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-n\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

$$\therefore\qquad (1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-n^2\frac{d^ny}{dx^n}=0.$$

最後ノ式ニ於テ $x=0$ トオクト

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_{x=0}=n^2\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0}.\qquad 又\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=2.$$

y ノ代リニ $f(x)$ ヲ用ヒルト

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0).$$

又 $\qquad f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=2.$

$\therefore\quad f^{(2r+1)}(0)=0.\quad f^{(2r)}=2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdots\cdots(2r-2)^2.\quad r\geqq 2.$

(13) $y=e^{-x}f(x)$ ニ於テ $u=e^{-x}$, $v=f(x)$ トシテ Leibniz ノ定理ヲ適用スルト

$$y^{(n)}=e^{-x}f^{(n)}(x)-\frac{n}{1!}e^{-x}f^{(n-1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2!}e^{-x}f^{(n-2)}(x)-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}e^{-x}f^{(n-r)}(x)+\cdots\cdots+(-1)^ne^{-x}f(x).$$

$$\therefore\quad e^xy^{(n)}=f^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}(x)-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}f^{(n-r)}(x)+\cdots\cdots+(-1)^nf(x).$$

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\varphi''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^2}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\varphi''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}\right]\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\{\varphi'''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi'''(t)\}\phi'(t)-3\{\varphi''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi''(t)\}\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^4}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}.$$

$$\therefore\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\{\varphi'''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi'''(t)\}\phi'(t)-3\{\varphi''(t)\phi'(t)-\varphi'(t)\phi''(t)\}\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^5}.$$

第十九章　微　　分

無限小無限大ノ位數　無限小トナル變數ヲ略稱シテ單ニ無限小ト云フコトハ旣ニ述ベタガ，等シク無限小ト云ツテモ此等ヲ比較スルトキ其處ニ異ルトコロガアルコトヲ知ルノデアル．例ヘバ $y=2x$ トオクナラバ，y ト x トハ何レモ無限小デハアルガ $\frac{y}{x}=2$ トナル．即チ y ト x トハ共ニ零ニ近迫スルガ常ニ其ノ比ハ 2 トナル．次ニ $y=x^2$ トオクナラバ，矢張リ y ト x トハ共ニ無限小デアルガ $\frac{y}{x}=x$ デアルカラ，其ノ比ハ零ニ近迫スル．又 $\frac{x}{y}=\frac{1}{x}$ デアルカラ其ノ比ハ ∞ トナル．

斯樣ニ無限小ハ單獨デハ零ニ近迫スルガ，二ツノ無限小ノ比ニアツテハ有限ノ極限値ヲトルコトモアレバ，零ニ收斂シ或ハ無限大トナルコトモアル．是等ヲ區別スルタメニ次ノ如ク定義スル．

定義　x,y ヲ二ツノ無限小トシ，$\frac{y}{x}$ ノ極限値ガ零トナルトキハ，y ハ x ヨリ高位ノ無限小デアルト云ヒ，$\frac{y}{x}$ ノ極限値ガ ∞ ナルトキハ，y ハ x ヨリ低位ノ無限小デアルト云フ．而シテ $\frac{y}{x}$ ノ極限値ガ有限ノ値ヲトルトキハ，y ト x トハ同位ノ無限小デアルト云フ．

y ガ x^n ト同位ノ無限小ナルトキハ，y ハ x ニ比シテ第 n 位ノ無限小デアルト云フ．但シ n ハ正數デアル．

例ヘバ x^6 ハ x ニ比シテ第 6 位ノ無限小デアリ，又 $x^{\frac{2}{3}}$ ハ x ニ比シテ第 $\frac{2}{3}$ 位ノ無限小デアル．

例題 1. x ガ第一位ノ無限小ナルトキ，次ノ各函數ハ第何位ノ無限小デアルカ．

(i) $\sin x$.　　(ii) $1-\cos x$.

[解] (i) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ デアルカラ $\sin x$ ハ x ト同位ノ無限小デアル．

(ii) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right\}^2=\frac{1}{2}.$$

故ニ $1-\cos x$ ハ x^2 ト同位ノ無限小デアルカラ x ニ比シ第二位ノ無限小デアル．

例題 2. x ガ第一位ノ無限小ナルトキ次ノ各函數ハ第何位ノ無限小デアルカ．

(i) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$.　　(ii) $\tan x-\sin x$.

[解] (i) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}=\sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{3-4x}$ デアルカラ

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to0}\sqrt[5]{3-4x}=\sqrt[5]{3}.$$

即チ $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ ハ $x^{\frac{2}{5}}$ ト同位ノ無限小デアルカラ x ニ對シテハ第 $\frac{2}{5}$ 位ノ無限小デアル．

(ii) $\tan x-\sin x=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}=\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}$ デアルカラ

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

即チ $\tan x-\sin x$ ハ x ニ對シテ第 3 位ノ無限小デアル．

例題 3. u_1 ガ v_1 ニ對シテ第 n 位ノ無限小ニシテ，u_2 ハ u_1 ヨリモ高位，v_2 ハ v_1 ヨリモ高位ノ無限小ナリトスレバ，u_1+u_2 ハ v_1+v_2 ニ比シテ矢張リ第 n 位ノ無限小ナルコトヲ證明セヨ．

[證明] 題意ニヨリ k ヲ有限値トスレバ

$$\lim_{x\to0}\frac{u_1}{v_1^n}=k,\qquad \lim_{x\to0}\frac{u_2}{u_1}=0,\qquad \lim_{x\to0}\frac{v_2}{v_1}=0$$

ナルヲ以テ

$$\lim_{x\to 0}\frac{u_1+u_2}{(v_1+v_2)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{u_1+u_2}{v_1{}^n+nv_1{}^{n-1}v_2+\cdots\cdots+v_2{}^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{u_1}{v_1{}^n}+\dfrac{u_2}{v_1{}^n}}{1+n\dfrac{v_2}{v_1}+\cdots+\dfrac{v_2{}^n}{v_1{}^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{u_1}{v_1{}^n}+\dfrac{u_2}{u_1}\dfrac{u_1}{v_1{}^n}}{1+n\dfrac{v_2}{v_1}+\cdots+\dfrac{v_2{}^n}{v_1{}^n}}=k.$$

故＝ u_1+u_2 ハ v_1+v_2 ＝對シテ矢張リ第 n 位ノ無限小デアル.

例題 4. 圓ノ直徑 AC ノ一端 A ヨリ弦 AB ヲ引キ CB ト A ＝於ケル切線トノ交點ヲ D トスル. 然ルトキハ AB ガ第一位ノ無限小ナルトキハ AD ハ第一位ノ無限小＝シテ, BD ハ第二位ノ無限小デアル.

［解］ △ADC, △BAC 及ビ △BDA ハ互＝相似三角形デアルカラ

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{AC},\qquad \frac{BD}{AD}=\frac{AB}{AC}.$$

今點 B ガ點 A ＝限リナク近迫スルトキハ BC ハ限リナク AC ＝近迫スル. 從ツテ極限＝於テ $\frac{AB}{AD}=1$. 即チ AB ガ第一位ノ無限小ナラバ AD モ亦第一位ノ無限小デアル.

次＝ $\frac{BD}{AD}$ ハ $\frac{AB}{AC}$ ト同時＝無限小トナル. 即チ BD ハ AD 又ハ AB ＝對シテ無限小トナル. 然ル＝ $AD^2=BD\cdot DC$ ナル故＝ $\frac{BD}{AD^2}=\frac{BD}{BD\cdot DC}=\frac{1}{DC}$. 且 AD ハ第一位ノ無限小デアル故＝ BD ハ第 2 位ノ無限小デアル.

無限小ノ位數ト同様＝無限大ノ位數ヲ考ヘルコトガ出來ル.

定義 x, y ヲ二ツノ無限大トスルトキ $\frac{y}{x}$ ノ極限値ガ $\pm\infty$ ナルトキハ y ハ x ヨリモ高位ノ無限大デアルト云ヒ, $\frac{y}{x}$ ノ極限値ガ零ナルトキハ y ハ x ヨリモ低位ノ無限大デアルト云フ. $\frac{y}{x}$ ノ極限値ガ有限ノ値ヲ取ルトキハ y ト x トハ同位ノ無限大デアルト云フ.

y ガ x^n ト同位ノ無限大ナルトキハ y ハ x ＝比シテ第 n 位ノ無限大デアルト云フ. 但シ n ハ正數トスル.

例ヘバ $x\to\infty$ ナルトキ x^2, x^5 ハ共＝無限大＝シテ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^5}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^2}=\infty$$

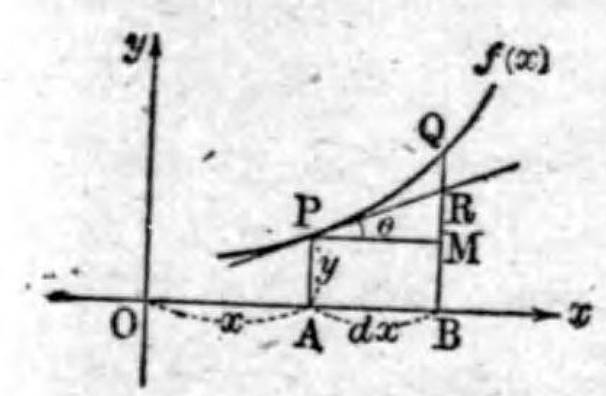
デアルカラ x^2 ハ x^5 ＝比シテ低位, x^5 ハ x^2 ＝比シテ高位ノ無限大デアル. 而シテ x ヲ第一位ノ無限大トスルトキハ x^2 ハ第二位ノ無限大, x^5 ハ第五位ノ無限大デアル.

微分 $y=f(x)$ ガ x ノ函數ナルトキ

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

ナルコトハ既＝述ベタ. コレ＝依ルト $\frac{dy}{dx}$ ハ dy ヲ dx デ割ルト云フ意味デナク, $\frac{dy}{dx}$ 全體デ $\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ナルコトヲ表ハス記號トナルノデアル. 從ツテ分母ヲ拂ツテ $dy=f'(x)dx$ トスルコトガ出來ナイノデアル. 併シ之ヲ次ノ如クシテ意義ヲ有スルヤウ＝シ, $dy=f'(x)dx$ ヨリ亦 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ヲ導キ得ルヤウ＝取扱フノデアル.

x ノ増分 $\triangle x$ ハ無限小デアル. 之ヲ表ハス＝ dx ヲ以テスル. 今 $y=f(x)$ ナル函數ノぐらふ上ノ一點 P ヨリ x 軸＝下シタ垂線ノ足ヲ A トシ, $OA=x$, $AB=dx$ トスル. B ＝於ケル x 軸ノ垂線ガ $f(x)$ ノぐらふト Q ＝於テ, P ＝於ケル切線ト R, P ヨリ x 軸＝平行＝引イタ直線ト M ＝於テ交ハルモノトスルト



$$MR=PM\tan\theta=PMf'(x).$$

$$\therefore\quad MR=f'(x)dx$$

トナル. 今此ノ MR ヲ dy デ表ハスト $dy=f'(x)dx$ トナル. 此ノ式＝於テ兩邊ヲ dx デ割ツテ

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

ナラシメルト, 此ノ關係ハ dx ガ零＝近迫シタ極限即チ Q ガ P ＝近迫シタ極限＝於テモ亦極限＝達シナイ前デモ意義ヲ有スルコトヽナル. 從ツテ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ノ分母ヲ拂ツテ $dy=f'(x)dx$ トスルコトガ出來ル. コノ場合 dx ヲ**自變數 x ノ微分**ト云ヒ, dy ヲ**從屬變數 y ノ微分**ト云フ. 而シテ $f'(x)$ ヲ微分係數ト云フノハ微分 dx ノ係數トナルカラデアル.

此ノ際注意シナケレバナラナイコトハ自變數ノ増分 $\triangle x$ ハ直＝之ヲ微分 dx ト取扱ツテヨイガ, 函數 y ノ増分 $\triangle y$ ト其ノ微分 dy トハ常＝ハ等シクナイ. 即チぐらふ＝於テ MQ ガ函數 y ノ増分 $\triangle y$ デアルカラ函數 y ノ微分 dy 即チ

MR トハ一般ニ相異ナル.

高次微分 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ ニ於テ微分係數ハ $dy\div dx$ ナル意義ヲ有スルコトカラ $dy=f'(x)dx$ トナル. 此ノコトハ之ヲ高次ノ場合ニモ亦適用スルコトガ出來ル. 即チ函數 $y=f(x)$ ノ微分

$$dy=f'(x)dx$$

ハ x 及ビ dx ノ函數デアルカラ, 今 dx ヲ一定ト見做スト dy ハ x ノミノ函數トナル. 之ヲ x ニ關シテ微分スルト

$$\frac{d(dy)}{dx}=f''(x)dx.$$

コヽニ於テ分母ヲ拂フコトヲ許シテ $d(dy)$ ヲ d^2y ト書クコトヽスルト

$$d^2y=f''(x)dx^2,\quad 從ツテ又\quad \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$$

トナル. 此ノ d^2y ヲ y ノ第二次微分ト云フ. 而シテ dx ガ第一位ノ無限小ナルトキハ d^2y ハ一般ニ第二位ノ無限小デアル.

同樣ニシテ d^2y ノ微分ヲ d^3y ト書クト

$$d^3y=f'''(x)dx^3,\qquad 從ツテ又\quad \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),$$

一般ニ

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n,\qquad 從ツテ又\quad \frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

ナルコトヲ證明スルコトガ出來ル. 此ノ d^ny ヲ y ノ第 n 次ノ微分ト云ヒ, dx ガ第一位ノ無限小ナルトキ之ハ一般ニ第 n 位ノ無限小デアル.

例題 5. $y=f(x)$, $x=\phi(t)$ ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x.$$

[證明] y ハ t ノ函數ナル故 t デ微分スルト

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}.$$

更ニ t デ微分スルト

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+f'(x)\frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$\therefore\qquad d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x.$$

[注意] 第二次以上ノ微分ハ自變數ヲ何ニトルカニ依ツテソレヲ表ハス式ガ異ナツテクル.

第二十章 高次導函數ト不定形ノ極限値

不定形 $y=2x$ ナルトキ $\frac{y}{x}$ ノ各々ニ $x=0$ ヲ代入スルト $\frac{0}{0}$ トナリ無意義トナル. 斯樣ナ形ヲ不定形ト云フ. 不定形ニハ此ノ外 $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, 1^∞, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 等ガアル. コヽニ不定形ト云フノハ其ノ函數ノ自變數ニ $x=a$ ナル値ヲ代入シタトキニ函數ガ取ル形デアツテ, タトヘ不定形デモ $x\to a$ ナルトキハ或有限確定値ヲ取ルコトガアル. 例ヘバ上述ノ $y=2x$ ニ於テ $\frac{y}{x}$ ハ $x\to 0$ ナルトキ 2 トナル. 本章ニ於テハ斯樣ナ $x=a$ ナルトキ不定形トナルガ $x\to a$ ナルトキ有限確定値ヲトルモノニツイテ研究スルノデアル.

$\frac{0}{0}$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値 二ツノ函數 $f(x)$, $g(x)$ 及ビ其ノ導函數ガ共ニ $x=a$ ノ附近ニ於テ連續ニシテ且 $f(a)=0$, $g(a)=0$ デアルトキハ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)+hf'(a+\theta_1h)}{g(a)+hg'(a+\theta_2h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta_1h)}{g'(a+\theta_2h)}.$$

コヽニ $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$ トスル. 然ルトキハ $f'(x)$, $g'(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續ナルコトヨリ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ヲ得ル. コノ式ニ於テ $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ ガ不定形ヲトルトキハ, 同樣ナコトヲ繰リ返シテ次ノ式ヲ得ル.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

以下同樣ニ進ム.

例題 1. 次ノ不定形ヲ計算セヨ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}.$$

[解] $f(x)=x-\log(1+x)$, $g(x)=x^2$ トオクト $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ハ $x=0$ ニ於テ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形トナル. 故ニ

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x},\qquad g'(x)=2x.$$

而シテ $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ モ $x=0$ ニ於テ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ヲトル. 故ニ

$$f''(x)=\frac{1}{(1+x)^2},\qquad g''(x)=2.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

例題 2. 次ノ不定形ヲ計算セヨ.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

[解] $$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値 二ツノ函數 $f(x)$, $g(x)$ ガ $x=a$ ナルトキ共ニ正又ハ負ノ無限大トナルトキハ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ハ $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ナル不定形トナルガ, 之ヲ變形シテ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

トスルト, $\dfrac{0}{0}$ ナル形トナルカラ前述ノ方法ヲ適用スルコトガ出來ル. 即チ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}}{\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}{\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}}=\lim_{x\to a}\left[\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2\cdot\frac{g'(x)}{f'(x)}\right].$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\left\{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

故ニ $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ノ不定形ハ全ク $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ト同様ニシテ求メラレル.

以上二ツノ場合ノ研究ニ於テ a ヲ有限ノ値ト考ヘタガ, 若シ $x\to\infty$ ナルトキニ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ガ $\dfrac{0}{0}$ 又ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲトルトキハ $x=\dfrac{1}{z}$ トオイテ $z\to0$ ナルトキノ極限値ヲ求メレバヨイ. 而シテ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to0}\frac{f\left(\dfrac{1}{z}\right)}{g\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{z}\right)\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{z}\right)\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{z}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

トナルカラ, 結局上ノ二ツノ場合ハ a ガ無限大トナルトキモ其ノマヽ適用サレル.

例題 3. 次ノ不定形ノ極限値ヲ求メヨ.

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}.$$

[解] $\log(\tan 2x)$, $\log(\tan x)$ ハ共ニ $x=0$ ニ於テ $-\infty$ トナルカラ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル形ヲトル. 故ニ

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\cot 2x\sec^2 2x}{\cot x\sec^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos 2x}=1.$$

例題 4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\cot x}$ ヲ求メヨ.

[解] $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\cot x$ トオクトキハ $x=0$ ナルトキ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ヲトル. 然ルニ

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2},\qquad g'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

又 $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\cot x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1.$$

[注意] (i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\cot x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ トナリ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形トナルカラ前述ノ場合ニ歸スル. 或ハ

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\cot x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

トシテモヨイ.

(ii) 要スルニ $\dfrac{0}{0}$ 又ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル不定形ノ極限値ヲ求メルニハ常ニ分子, 分母ヲ微分シテ得ル函數ノ極限値ヲ求メレバヨイコトニナルノデアル.

$0\times\infty$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値 二ツノ函數 $f(x)$, $g(x)$ ハ $f(a)=0$, $g(a)=\infty$ ナルモノトスル. 然ルトキハ

$$f(a)g(a)=0\times\infty$$

ナル形ヲトル. 然レドモ

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

ト書換ヘルトキハ $\dfrac{0}{0}$ ナル形トナル.

例題 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ヲ求メヨ.

[解]
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-\operatorname{cosec}^2x}=2.$$

0^0, ∞^0, 1^∞ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値 $f(x)$, $g(x)$ ヲ x ノ二ツノ函數トシ且 $x=a$ ナルトキ

$$\{f(x)\}^{g(x)}$$

ハ 0^0, ∞^0, 1^∞ ナル形ヲトルモノトスル. 然ルトキハ

$$f(x)=e^{\log f(x)}$$

デアルカラ $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log f(x)}$.

而シテ $g(x)\log f(x)$ ハ上ノ場合ノ各々ニ於テハ $0\times\infty$ ナル形トナルカラ其ノ極限値ヲ求メルコトガ出來ル. 其レヲ M トスルト

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^{g(x)}=e^{\mathrm{M}}$$

トナル.

例題 6. $\lim\limits_{x\to0}x^x$ ヲ求メヨ.

[解] x^x ハ $x=0$ ナルトキ 0^0 ナル不定形トナルカラ

$$x^x=e^{x\log x}$$

トオクト

$$\lim_{x\to0}x\log x=\lim_{x\to0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0.$$

$$\therefore\qquad \lim_{x\to0}x^x=e^0=1.$$

例題 7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ ヲ求メヨ.

[解]
$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^{-\sin x\log x}.$$

$$\lim_{x\to0}\sin x\log x=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\log x=1\times0=0.$$

$$\therefore\qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^0=1.$$

$\infty-\infty$ ナル不定形ヲ取ル函數ノ極限値 $f(x)$, $g(x)$ ハ $\lim\limits_{x\to a}f(x)\to\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)\to\infty$ ナル二ツノ函數トスル. 然ルトキハ

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\infty-\infty$$

トナル. 然レドモ

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$$

トナリ $\dfrac{0}{0}$ ナル不定形ニ歸着スルコトガ出來ル.

[注意] $\infty-\infty$ ガ有限確定ノ値ヲトルノハ例ヘバ次ノ如キ場合デアル.

$$f(x)=\frac{1}{x}+5,\qquad g(x)=\frac{1}{x}+2$$

トスルト

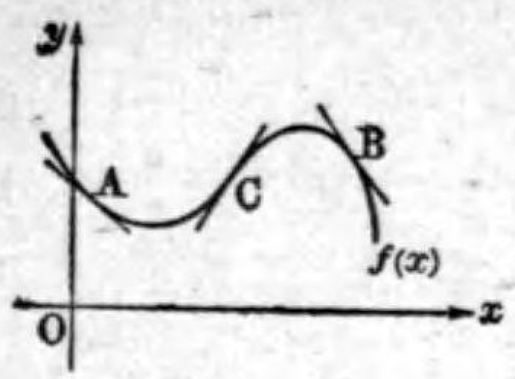
$$\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=\infty-\infty=3.$$

例題 8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)$ ヲ求メヨ.

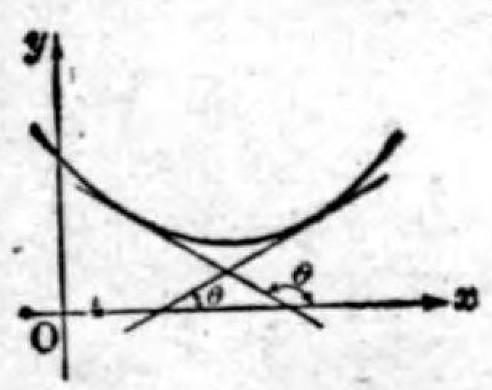
[解]
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

第二十一章 曲線ノ凹凸及ビ極大極小

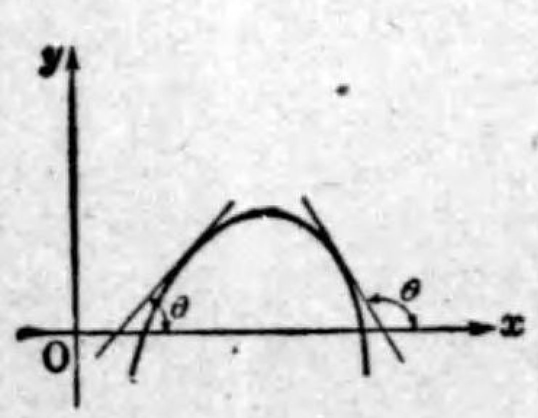
曲線ノ凹凸 x ノ函數 $y=f(x)$ ノ表ハス曲線ヲ左圖ノ如キモノトシ, 之ニ點 A ニ於テ切線ヲ引クトキ, 其ノ近傍ニ於テハ曲線ノ部分ハ切線ノ上方ニ在ル. 斯樣ナ場合ニハ曲線ハ A 點ノ近傍ニ於テ**上方ニ凹**, 又ハ**下方ニ凸**デアルト云ヒ, 之ニ反シ曲線上ノ點 B ニ於テハ, 其ノ近傍ニ於ケル曲線ノ部分ハ切線ノ下方ニ在ル. 斯樣ナ場合ニハ曲線ハ點 B ノ近傍ニ於テ**上方ニ凸**, 又ハ**下方ニ凹**デアルト云フ. 而シテ曲線上ノ點 C ニ於テハ其ノ點ニ於ケル切線ガ C ニテ曲線ヲ截ル. 斯樣ナ場合ニハ點 C ヲ曲線ノ**變曲點**ト云フ.



上方ニ凹ナル曲線ノ部分ニ於テ引イタ切線ガ x 軸トナス角 θ ハ鈍角タルト銳角タルトヲ問ハズ, 切點ノ x 座標ノ增加ト共ニ其ノ値ヲ增大スル. 然ルニ $f'(x)=\tan\theta$ ニシテ, $\tan\theta$ ハ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ナル θ ニ對シテハ θ ト共ニ其ノ値ヲ增加スルカラ, $f'(x)$ ハ曲線ノ上方ニ凹ナル部分ニ於テハ增加ノ狀態ニ在ル. 而シテ函數 $f'(x)$ ガ增加ノ狀態ニ在ルトキハ, 其ノ導函數ハ零ヨリ大ナル値ヲトルカラ $f''(x)>0$ トナル. 即チ上方ニ凹ナル曲線ノ部分ニ對シテハ $f''(x)>0$ デアル.



逆ニ $f''(x)>0$ ナルトキハ $f'(x)=\tan\theta$ ハ增加ノ狀態ニアル. 而シテ $\tan\theta$ ガ增加ノ狀態ニアルコトハ, 必ズ曲線ノ上方ニ凹ナル部分ニ於テ起ル. 故ニ $f''(x)>0$ ナル曲線ノ部分ハ上方ニ凹デアル.

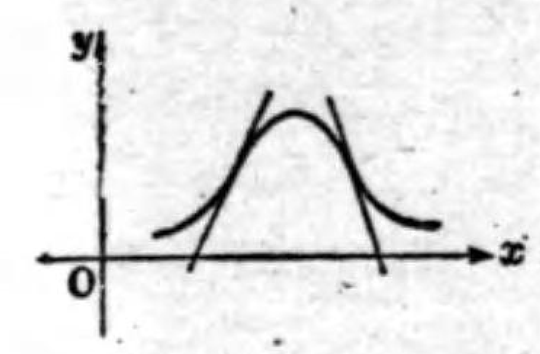


同樣ニ下方ニ凹ナル曲線ノ部分ニ於テ引イタ切線ガ x 軸トナス角 θ ハ, 銳角タルト鈍角タルトヲ問ハズ, 切點ノ x 座標ノ增加ト共ニ其ノ値ヲ減少スル. 然ルニ $f'(x)=\tan\theta$ ニシテ $\tan\theta$ ハ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ナル θ ニ對シテハ θ ト共ニ其ノ値ヲ減少スルカラ,

$f'(x)$ ハ曲線ノ下方ニ凹ナル部分ニ於テハ減少ノ狀態ニ在ル. 而シテ函數 $f'(x)$ ガ減少ノ狀態ニ在ルトキハ, 其ノ導函數ハ零ヨリ小ナル値ヲトルカラ, $f''(x)<0$ トナル. 即チ下方ニ凹ナル曲線ノ部分ニ對シテハ $f''(x)<0$ デアル.

逆ニ $f''(x)<0$ ナルトキハ $f'(x)=\tan\theta$ ハ減少ノ狀態ニ在ル. 而シテ $\tan\theta$ ガ減少ノ狀態ニ在ルコトハ, 必ズ曲線ノ下方ニ凹ナル部分ニ於テ起ル. 故ニ $f''(x)<0$ ナル曲線ノ部分ハ下方ニ凹デアル.

次ニ x ガ漸次增大シ行クトキ, $f''(x)=0$ トナル點即チ $f''(x)$ ガ正ヨリ負ニ又ハ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズル樣ナ點ハ, 曲線ノ上方ニ凹ナル部分ヨリ下方ニ凹ナル部分ニ轉ズル境界點デアルカ, 又ハ下方ニ凹ナル部分ヨリ上方ニ凹ナル部分ニ轉ズル境界點デアル. 此ノ點ニ於テハ切線ハ上方ニ凹ナル部分カラ見テモ, 下方ニ凹ナル部分カラ見テモ齊シク切線デナケレバナラナイカラ, 曲線ヲ截ラネバナラナイ. 即チ切點ハ變曲點デアル. 以上ノ結果ニヨリ一般ニ曲線 $y=f(x)$ 上ノ $x=a$ ナル一點ニ於ケル凹凸ニ關シテハ次ノ如ク判定スルコトガ出來ル.



$f''(a)>0$ **ナラバ上方ニ凹又ハ下方ニ凸.**

$f''(a)<0$ **ナラバ上方ニ凸又ハ下方ニ凹.**

$f''(a)=0$ ナルトキハ更ニ他ノ方法ニ依ッテ判定スル. 之ニツイテハ後述スル.

例題 1. 次ノ函數ノぐらふガ上方ニ凹, 下方ニ凹ナル部分並ニ變曲點ヲ求メヨ.

$$y=x^3-6x^2+9x.$$

〔解〕 $y'=3x^2-12x+9.$ $y''=6x-12=6(x-2).$

$x<2$ ナルトキハ $y''<0.$

故ニ此ノ部分ニ於テハ曲線ハ上方ニ凸デアル.

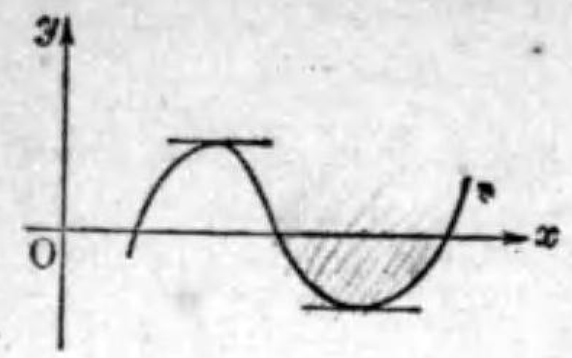
$x>2$ ナルトキハ $y''>0.$

故ニ此ノ部分ニ於テハ曲線ハ下方ニ凸デアル.

$x=2$ ナルトキハ $y''=0.$

$x=2$ ヲ代入シテ $y=2.$ 故ニ變曲點ハ $(2,2)$ デアル.

曲線ノ凹凸ト極値ノ判定　連續函數 $y=f(x)$ ノ極大値ハ其ノぐらふガ下方ニ凹ナル部分ニ於テノ切線ガ x 軸ト平行トナルトキノ切點ニ於テ起ル．故ニ函數 $y=f(x)$ ガ極大値ナルタメノ x ハ



$$f'(x)=0,\qquad f''(x)<0$$

ナル條件ヨリ求メルコトガ出來ル．

又極小値ハ曲線ガ上方ニ凹ナル部分ニ於テノ切線ガ，x 軸ト平行ナルトキノ切點ニ於テ起ル．故ニ函數 $y=f(x)$ ガ極小値ナルタメノ x ハ

$$f'(x)=0,\qquad f''(x)>0$$

ナル條件ヨリ求メルコトガ出來ル．

$f'(x)=0,\ f''(x)=0$ ナルトキハ後ニ述ベル．

[注意] $f''(x)$ ノ符號ヲ決定スルタメニ必ズシモ $f''(x)$ ノ一般ナル式ヲ求メル必要ガナイ．即チ $f'(x)=0$ ナル x ノ値ニ對スル $f''(x)$ ノ値ダケヲ求メレバヨイ．例ヘバ

$$f'(x)=\frac{Q}{P}=0 \quad \text{ナルトキ一般ニ} \quad f''(x)=\frac{PQ'-P'Q}{P^2}.$$

之ニ $Q=0$ ヲ代入シテ $f''(x)=\dfrac{Q'}{P}$．之ヲ計算スレバヨイ．

例題 2.　次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ．

$$\text{(i)}\quad y=\frac{x+a}{x^2+a^2}.\ a>0.\qquad \text{(ii)}\quad y=\frac{e^x}{\sin x}.$$

[解] (i)

$$y'=\frac{x^2+a^2-2x(x+a)}{(x^2+a^2)^2}=\frac{a^2-2ax-x^2}{(x^2+a^2)^2}.$$

$$y''=\frac{-2a-2x}{(x^2+a^2)^2}-\frac{4(a^2-2ax-x^2)x}{(x^2+a^2)^3}.$$

$y'=0$ ヨリ　$x^2+2ax-a^2=0$．　$\therefore\ x=-a\pm\sqrt{2}a$．

$x=-a+\sqrt{2}a$ ナルトキハ　$y''=\dfrac{-2\sqrt{2}a}{(x^2+a^2)^2}<0$．

故ニ極大値ヲ與ヘル．極大値ハ

$$y=\frac{\sqrt{2}a}{(-a+\sqrt{2}a)^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}a}{4a^2-2\sqrt{2}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{(4-2\sqrt{2})a}.$$

$x=-a-\sqrt{2}a$ ナルトキハ　$y''=\dfrac{2\sqrt{2}a}{(x^2+a^2)^2}>0$．

故ニ極小値ヲ與ヘル．極小値ハ

$$y=\frac{-\sqrt{2}a}{(-a-\sqrt{2}a)^2+a^2}=\frac{-\sqrt{2}a}{4a^2+2\sqrt{2}a^2}=\frac{-\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})a}.$$

(ii)

$$y'=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}.$$

$$y''=\frac{2e^x\sin x}{\sin^2 x}-\frac{2\{e^x(\sin x-\cos x)\}\cos x}{\sin^3 x}.$$

$y'=0$ ヨリ $\sin x-\cos x=0$．　$\therefore\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$．

$\therefore\quad x=\left(n+\dfrac{1}{4}\right)\pi$．但シ n ハ零又ハ整數．

$x=\left(n+\dfrac{1}{4}\right)\pi$ ナルトキハ　$y''=\dfrac{2e^x}{\sin\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}$．

故ニ　n ガ零又ハ偶數ナルトキハ　$y''>0$．
　　　n ガ奇數ナルトキハ　　　$y''<0$．

依ツテ　**n ガ零又ハ偶數ナルトキハ極小値ヲトリ，ソノ値ハ**

$$y=\frac{e^x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}e^{(n+\frac{1}{4})\pi}.$$

n ガ奇數ナルトキハ極大値ヲトリ，ソノ値ハ

$$y=-\frac{e^x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}e^{(n+\frac{1}{4})\pi}.$$

練　習　問　題　14.

(1)　x ニ比シテ u ガ第 m 位，v ガ第 n 位ノ無限小ナルトキ積 uv，及ビ商 $\dfrac{u}{v}$ ノ位數如何．

(2)　$u,\ v$ ガ同位ノ無限小ナルトキ $u\pm v$ ハ一般ニハ矢張リソレト同位ノ無限小ナルコトヲ證明シ，且如何ナル場合ニ然ラザルカヲ吟味セヨ．

(3)　C ヲ直角頂トスル直角三角形 ABC ニ於テ BC ヲ一定シ置キ ∠ABC ヲ無限小ナラシメルトキ BA−BC ノ無限小ノ位數ヲ求メヨ．

(4)　A，B ヲ同一圓周上ノ二點トシ，A ニ於ケル切線ニ B ヨリ下シタル垂線ノ足ヲ C トスル．然ルトキ弧 AB ヲ第一位ノ無限小ナラシメルトキ線分 AC 及ビ BC ハ夫々第何位ノ無限小ナルカ．

(5) 次ノ不定形ノ極限値ヲ求メヨ.

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.　　(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$, $n>0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)$.　　(iv) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

(v) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$.　　(vi) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec x\left(x\sin x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.　　(viii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(6) 次ノ函數ノ極値, 凹凸, 變曲點ヲ決定シ, 且其ノ概形ヲ描ケ.

(i) $y=e^{-x^2}$.　　(ii) $y=x^2(3-x)$.

(iii) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$.　　(iv) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

(7) 曲線 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ハ到ル所上方ニ凸ナルコトヲ證明セヨ. 但シ $a>0$ トスル.

(8) 曲線 $y=f(x)$ 上ノ變曲點ノ横座標ハ $f''(x)=0$ ヲ滿足スベキコトヲ利用シテ曲線 $y^2=f(x)$ 上ノ變曲點ノ座標ハ

$$\{f'(x)\}^2=2f(x)f''(x)$$

ヲ滿足スベキコトヲ證明セヨ.

(9) 圓形ナルぶりき板アリ. 之ヨリ一ツノ扇形ヲ截リ取リテ漏斗ヲ作リ, 其ノ容積ヲナルベク大ナラシメントス. 中心角何度ナル扇形ヲ截リ取ルベキカ.

(10) 靜水中ニテ汽船ヲ一定時間航行セシムルニ要スル石炭ノ量ハ速サノ三乘ニ比例ストセバ, 流ノ速サ v ナル河流ヲ一定ノ距離ダケ最モ經濟的ニ溯ルニハ船ノ速サヲ何程トスベキカ.

【解　答】

(1) x ヲ第一位ノ無限小トシ, a, b ヲ夫々 0 ナラザル有限數トスレバ

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x^m}=a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{v}{x^n}=b.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{uv}{x^{m+n}}=\lim_{x\to 0}\frac{u}{x^m}\lim_{x\to 0}\frac{v}{x^n}=ab.$$

ab ハ 0 ナラザル有限數ナル故 uv ハ第 $m+n$ 位ノ無限小デアル.

次ニ　$m>n$ ナルトキ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u}{v}}{x^{m-n}}=\lim_{x\to 0}\frac{u}{x^m}\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{v}=\frac{a}{b}.$$

故ニ $\dfrac{u}{v}$ ハ第 $m-n$ 位ノ無限小デアル.

次ニ　$m<n$ ナルトキ, $n=m+r$ トオクト

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{v}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u}{x^m}}{\frac{v}{x^n}}\cdot\frac{x^m}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u}{x^m}}{\frac{v}{x^n}}\cdot\frac{1}{x^r}=\pm\infty$$

トナリ $\dfrac{u}{v}$ ハ無限小ナラズ.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{v}=a$　トスルト　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{u}{v}\pm 1\right)=a\pm 1$.

故ニ

$$\lim_{x\to 0}\frac{u\pm v}{v}=a\pm 1.$$

依ツテ $u\pm v$ ハ一般ニ u 又ハ v ト同位ノ無限小デアル. $u\pm v$ ガ u 又ハ v ト同位ナラザル場合ハ $a\pm 1=0$, 卽チ $a=\mp 1$ ナルトキデアル.

[例]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^4}{-x^3-2x^4}=-1.$$

コノトキ　$x^3+4x^4+(-x^3-2x^4)=2x^4$　トナリテ

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{-x^3-2x^4}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^4}{2x^4}=\pm\infty.$$

又

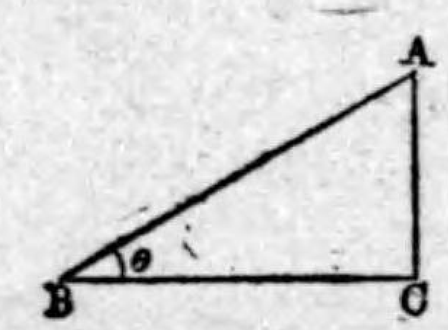
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^4}{x^3+2x^4}=1.$$

コノトキ　$x^3+4x^4-(x^3+2x^4)=2x^4$　トナリテ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^4}{2x^4}=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^3+2x^4}=0.$$

故ニ $a=\mp 1$ ナルトキハ $u\pm v$ ハ u 又ハ v ニ比シテ高位ノ無限小トナルヲ一般トスル.

(3) BC$=a$, $\angle$ABC$=\theta$ トスルト BC$=$BA$\cos\theta=a$.



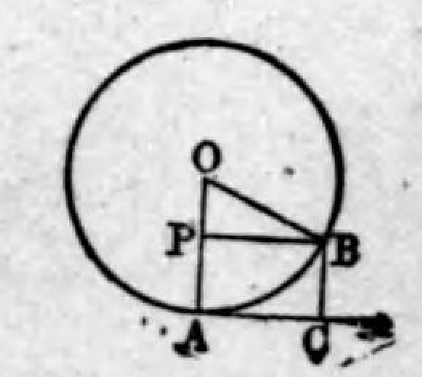
$$\therefore\quad \mathrm{BA}-\mathrm{BC}=\frac{a}{\cos\theta}-a=\frac{a}{\cos\theta}(1-\cos\theta).$$

$$\therefore\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{BA}-\mathrm{BC}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{a}{\cos\theta}\,\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{a}{\cos\theta}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{a}{2}.$$

故ニ BA－BC ハ角 ABC ニ比シテ第二位ノ無限小デアル.

(4) 中心角 AOB ヲ x (radian) トスルト ÂC$=\sin x$. 但シ圓ノ半徑ヲ 1 トスル.



BC$=$OA$-$OP$=1-\cos x$.

コヽニ P ハ B ヨリ OA ニ下シタ垂線ノ足トスル.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

デアルカラ，AC ハ第一位ノ無限小デアル．

次＝ $$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right\}^2=\frac{1}{2}.$$

故＝ BC ハ第二位ノ無限小デアル．

(5) (i) $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+a}}{2}}{x}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}{a}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

(ii) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

(iii) $$\lim_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\log a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x}}\log a=\log a.$$

(iv) $$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\log x=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\log x}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

(v) $y=\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$ トオケバ $\log y=m\log\cos\frac{x}{m}.$

$$\therefore\quad y=e^{m\log\cos\frac{x}{m}}.$$

サテ $$\lim_{m\to\infty}m\log\cos\frac{x}{m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\log\cos\frac{x}{m}}{\frac{1}{m}}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{x}{m}}\left(-\sin\frac{x}{m}\right)\left(-\frac{x}{m^2}\right)}{-\frac{1}{m^2}}=\lim_{m\to\infty}\left\{-x\tan\frac{x}{m}\right\}=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{m\to\infty}y=e^0=1.$$

(vi) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec x\left(x\sin x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+x\cos x}{-\sin x}=-1.$$

(vii) $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=e^{x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ デアル．而シテ

$$\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0.$$

故＝求メル極限値ハ $e^0=1.$

(viii) $$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin x\cos x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{4\sin x\cos x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}$$

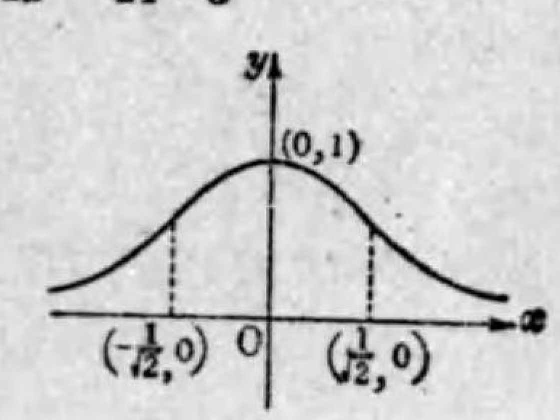
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24\cos 2x-32x\sin 2x-8x^2\cos 2x}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}.$$

(6) (i) $y=e^{-x^2}.\qquad y'=-2xe^{-x^2}.$

$$y''=2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

y' ノ正負＝ヨリテ曲線ノ昇降，y'' ノ正負零＝ヨリテ曲線ノ凹，凸．變曲點ヲ判定シ且偶函數ナル故曲線ハ y 軸＝關シテ對稱ナルコトヲ考ヘツ、曲線ヲ畫クト右圖ノ如クナル．



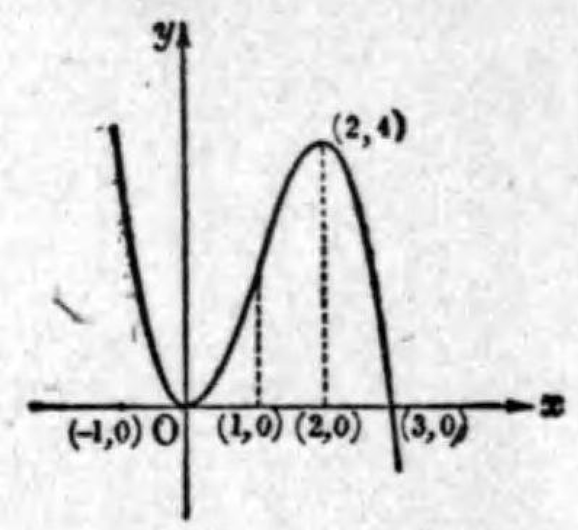
x	…… $-a$ ………	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	…………	0	…………	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…… a ……
y'	+			0	−		
y''	+	0	−			0	+
y	上昇	變曲點	上昇	極大	下降	變曲點	下降
	上=凹		上=凸		上=凸		上=凹

(ii) $y=x^2(3-x)$.

$y'=3x(2-x)$.

$y''=6(1-x)$.

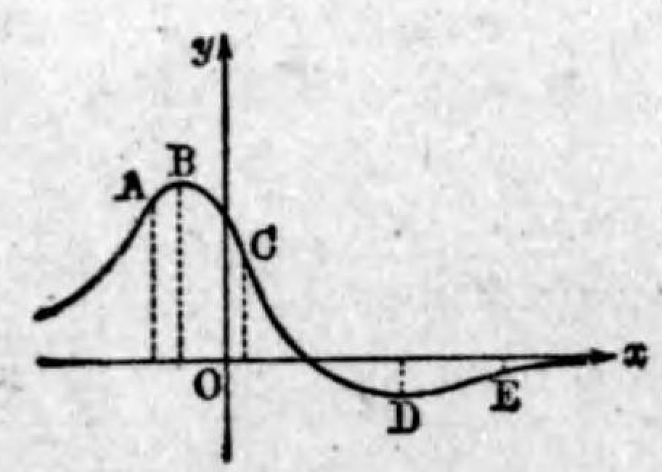
上ノ結果右圖ノ如キぐらふトナル。



x	……	−1	……	0	…………	1	…………	2	……	3	……
y'	−			0	+			0	−		
y''	+			+	+	0	−	−	−		
y	下降	4	下降	0	上昇	2	上昇	4	下降	0	下降
	上方=凹			極小	上方=凹	變曲點	上方=凸	極大	上方=凸		

(iii) $y=\frac{1-x}{1+x^2}$. $y'=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$.

$$y''=\frac{2(x-1)}{(1+x^2)^2}-\frac{4x(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}=\frac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(1+x^2)^3}.$$



玆ニ A $(-1,\ 1)$

B $\left(1-\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

C $\left(2-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$

D $\left(1+\sqrt{2},\ \frac{-\sqrt{2}+1}{2}\right)$

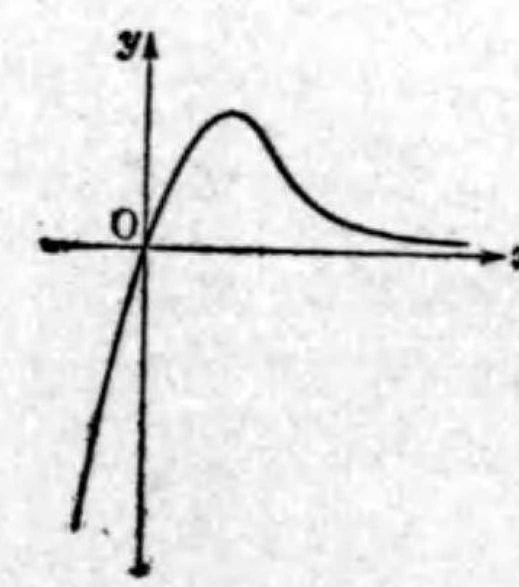
E $\left(2+\sqrt{3},\ \frac{-\sqrt{3}+1}{4}\right)$

x	$-1-a$	−1	…………	$1-\sqrt{2}$	……	0	……	$2-\sqrt{3}$	…………
y'	+			0	−				
y''	+	0	−					0	+
y	上昇	1	上昇	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	下降	1	下降	$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$	下降
	上方=凹	變曲點	上方=凸	極大	上方=凸			變曲點	上方=凹

x	……	1	……	$1+\sqrt{2}$	…………	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}+a$
y'	−			0	+		
y''	+					0	−
y	下降	0	下降	$\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$	上昇	$\frac{-\sqrt{3}+1}{4}$	上昇
	上方=凹			極小	上方=凹	變曲點	上方=凸

上ノ結果圖ノ如キぐらふトナル。

(iv) $y=\frac{x}{e^x}$. $y'=\frac{1-x}{e^x}$. $y''=\frac{x-2}{e^x}$.



x	$-a$	0	……	1	…………	2	$2+a$
y'	+			0	−		
y''	−					0	+
y	上昇	0	上昇	$\frac{1}{e}$	下降	$\frac{2}{e^2}$	下降
	上方=凸			極大	上方=凸	變曲點	上方=凹

上ノ結果圖ノ如キぐらふトナル。y 軸ノ縮尺ト x 軸ノ縮尺トハ相異ナル

(7) $x=f(t)$, $y=g(t)$ トスルト

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

此ノ兩邊ヲ更ニ x デ微分スルト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left\{\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right\}}{dt}\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{\{f'(t)\}^3}.$$

今 $x=f(t)=a(t-\sin t),\quad y=g(t)=a(1-\cos t)$ トオクト

$$f'(t)=a(1-\cos t),\qquad f''(t)=a\sin t.$$
$$g'(t)=a\sin t,\qquad g''(t)=a\cos t.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t}{a^3(1-\cos t)^3}$$
$$=\frac{a^2\cos t-a^2}{a^3(1-\cos t)^3}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}.$$

$a>0$ ナル故 $1-\cos t\neq 0$ ナルトキ

$$\frac{d^2y}{dx^2}<0$$

即チ曲線ハ到ル處上方ニ凸デアル.

(8) $y^2=f(x)$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$2yy'=f'(x)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

更ニ x デ微分スルト

$$2yy''+2(y')^2=f''(x).$$

然ルニ變曲點ニ於テハ $y''=0$

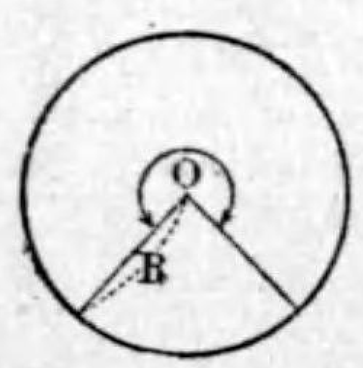
$$\therefore\quad 2(y')^2=f''(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

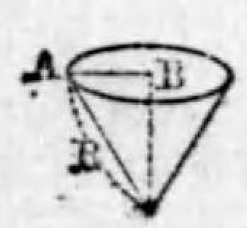
(1) ヨリ $y'=\dfrac{f'(x)}{2y}$. 之ヲ (2) ニ代入シテ

$$2\left\{\frac{f'(x)}{2y}\right\}^2=f''(x).$$
$$\therefore\quad \{f'(x)\}^2=2f(x)f''(x).$$

即チ $y^2=f(x)$ 上ノ變曲點ノ座標ハ上式ヲ滿足ス.

(9) ぶりき板ノ半徑ヲ R トシ, コレヨリ中心角 θ ノ扇形ヲ截リトルモノトスル. 漏斗ノ周ハ θR, 漏斗ノ半徑 AB ハ $\dfrac{\theta \mathrm{R}}{2\pi}$, 漏斗ノ高サ OB ハ $\sqrt{\mathrm{R}^2-\mathrm{AB}^2}$ 即チ $\dfrac{\mathrm{R}}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$ デアル. 漏斗ノ容積ヲ V トスルト





$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{OB}=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\mathrm{R}\theta}{2\pi}\right)^2\frac{\mathrm{R}}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$
$$=\frac{\mathrm{R}^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}.$$
$$\mathrm{V}'=\frac{\mathrm{R}^3}{24\pi^2}\left\{\frac{8\pi^2\theta-3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right\}.$$

$\mathrm{V}'=0$ ナルトキノ V'' ハ

$$\mathrm{V}''=\frac{\mathrm{R}^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\pi^2-9\theta^2}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}.$$

サテ $\mathrm{V}'=0$ ナラシメル θ ノ値ハ $0,\ \pm\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$.

問題ノ性質上 $\theta>0$. 從ツテ $\theta=\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$ ヲトルト $\mathrm{V}''<0$ トナリ, コノトキ **V ハ極大卽チ最大トナル.**

(10) 船ノ單位時間ノ速サヲ x トシ且單位時間ニ kx^3 ノ石炭ヲ用ヒルモノトスル. 一定距離ヲ l トスルトソレヲ渕ルニ要スル時間ハ $\dfrac{l}{x-v}$, 但 v ハ河流ノ速サトスル. 從ツテソノトキ要スル石炭ノ量ヲ y トスルト

$$y=kx^3\frac{l}{x-v}=\frac{klx^3}{x-v}.$$
$$y'=\frac{klx^2(2x-3v)}{(x-v)^2}.$$

$y'=0$ ナルトキハ $\quad y''=\dfrac{6klx(x-v)}{(x-v)^2}.$

$y'=0$ ナラシメル x ハ $x>0$ ナル故 $x=\dfrac{3}{2}v.$

ソノトキ $y''>0$. **從ツテ $x=\dfrac{3}{2}v$ ナルトキ y ハ極小卽チ最小トナル.**

【注意】 問題ノ性質上 $x>v$ デアル. コノ場合 $v<x<\dfrac{3}{2}v$ デ $y'<0$, $x=\dfrac{3}{2}v$ デ $y'=0$, $x>\dfrac{3}{2}v$ デ $y'>0$ トナリ極小値ガ唯一ツアル故, ソレガ最小値トナルノデアル.

第五編　無限級數

第二十二章　無限級數ノ性質

無限級數ニ關スル定義　一定ノ法則ニ從ツテ順次ニ定メラレタ數ノ一列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ u_n,\ \cdots\cdots\cdots$$

ヲ**數列**ト云ヒ，$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots$ ヲ數列ノ項ト云フ．而シテ項ノ個數ガ有限ナルモノヲ**有限數列**，無限ナルモノヲ**無限數列**ト云フ．

無限數列ヲ加法ノ記號デ結合シタモノ，即チ

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

ヲ**無限級數**ト云ヒ，$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots,\ u_n,\ \cdots\cdots$ ヲ夫々無限級數 (1) ノ第一項，第二項，第三項，$\cdots\cdots$，第 n 項，$\cdots\cdots$ ト云フ．時トシテハ第 n 項ヲ**一般項**ト云フコトモアル．第一項カラ第 n 項マデノ和ヲ S_n デ表ハス．コヽニ $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots,\ u_n,\ \cdots\cdots$ 等ノ取ル値ハ必ズシモ正デナク，項ノ値ガ一ツ置キニ正及ビ負トナル場合或ハ其他ノ場合モアル．

無限級數 (1) ノ第一項カラ第 n 項マデノ和 S_n ニツイテ n ヲ次第ニ增大スルニ從ヒ次ノ三ツノ場合ヲ生ズル．

(I)　n ヲ充分大ナラシメルトキ S_n ハ漸次或一定ナル有限値 S ニ近迫スル．換言スレバ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ナルトキ，無限級數 (1) ハ**收斂**デアルト云フ．或ハ此ノ級數ハ S **ニ收斂スル**ト云フ．

[例]　$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

ナルトキハ

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=2.$$

即チ S_n ノ極限値ハ有限確定値 2 デアル．故ニ級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots\cdots$$

ハ收斂級數デアル．

(II)　n ヲ增大スルトキ S_n ガ漸次ソノ絕對値ヲ增大シ如何ニ大ナル正ノ數ヨリモ尙大トナルトキ，即チ

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$$

ナルトキ無限級數 (1) ハ**發散**デアル．或ハ發散スルト云フ．

[例]　$$S_n=1+3+3^2+\cdots\cdots\cdots+3^{n-1}$$

ナルトキハ

$$S_n=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\infty.$$

即チ $n\to\infty$ ナルトキ S_n ハ無限大トナルカラ，無限級數

$$1+3+3^2+\cdots\cdots\cdots+3^{n-1}+\cdots\cdots\cdots$$

ハ發散デアル．

(III)　n ヲ增加スルトキ S_n ガ有限確定値ニ近迫モセズ又ハ無限大ニモナラナイトキ無限級數 (1) ハ**振動**デアル，或ハ振動スルト云フ．即チ收斂モ發散モナサザルトキ振動スルト云フ．

[例]　$$S_n=1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}$$

ナルトキハ

$$S_{2m}=0,\qquad S_{2m+1}=1$$

ニシテ，$n\to\infty$ ナルトキ S_n ハ有限デアルケレドモ不定デアル．即チ無限級數

$$1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots$$

ハ振動スル．

收斂級數ニ於テ其ノ極限値

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

ヲ其ノ級數ノ和ト云ヒ，收斂ナラザル級數ハ總テ其ノ極限値ヲ求メルコトガ出來ナイカラ，其等ヲ總稱シテ發散級數ト云フコトガアル.

微分學ニ於テ必要ナルハ收斂級數デアル．從ツテ一ツノ級數ガアルトキ，其ガ收斂級數デアルカ發散級數デアルカヲ見分ケルコトガ先ヅ必要トナル．時トシテハ同一ノ級數デモ其ノ項ノ取ル値ニ依リ，收斂スルコトモアリ發散スルコトモアルカラ，與ヘラレタ級數ガ收斂ナルタメニハ其ノ各項ニ附與スベキ條件ヲ求メルコトガ必要トナルコトモアル．例ヘバ

無限級數 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+ar^n+\cdots\cdots$ ニ於テ

(i) $-1<r<1$ ナルトキハ

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-a}-\frac{ar^n}{1-r}$$

デアルカラ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$, 從ツテ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}$ トナリ，$-1<r<1$ ナル r ニツイテ此ノ級數ハ $\dfrac{a}{1-r}$ ナル和ヲ有スル收斂級數デアル.

(ii) $r=1$ ナルトキハ

$$S_n=a+a+a+\cdots\cdots+a=na.$$

故ニ $a>0$ ナルトキ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ トナリ，$a<0$ ナルトキ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\infty$ トナル．此ノ場合ニハ與ヘラレタ級數ハ發散級數デアル.

(iii) $r>1$ ナルトキハ

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$ デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\pm\infty.$$

故ニ此ノ場合ニハ與ヘラレタ級數ハ發散級數デアル.

(iv) $r<-1$ ナルトキハ

n ガ偶數ナルトキ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=-\infty \quad a>0,$

$\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\infty \quad a<0.$

n ガ奇數ナルトキ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\infty \quad a>0,$

$\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=-\infty \quad a<0.$

卽チ a ノ正負ニ拘ラズ與ヘラレタ級數ハ發散スル.

(v) $r=-1$ ナルトキ

$$S_n=a(1-1+1-\cdots\cdots).$$

n ガ偶數ナルトキ零ニシテ，n ガ奇數ナルトキハ a デアル．卽チ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ハ不定デアルカラ與ヘラレタ級數ハ振動スル.

收斂級數ノ性質 一ツノ級數ガ收斂ナルカ，發散ナルカヲ判定スルニハ，色々ナ工夫ヲ要スルノデアルガ，若シ收斂級數ナルトキハ次ノ性質ヲ有スルカラ，此ノ性質ヲ往々利用スルコトガアル．是ハ又收斂級數ノ四則ノ一部トモ見做スコトガ出來ル.

(1) 收斂級數ニ有限個ノ項ヲ加ヘテモ，又有限個ノ項ヲ引キ去ルモ收斂級數デアル.

(2) 收斂級數ノ各項ニ任意ノ一定數ヲ乘ズルモ亦各項ヲ零デナイ任意ノ一定數デ除シテモ共ニ收斂デアル.

(3) 收斂級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ノ若干項ヲ加ヘタ和ヲ項トスル級數

$$(u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_r)+(u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots+u_m)$$
$$+(u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots\cdots+u_n)+\cdots\cdots$$

モ亦收斂デアツテ兩者ノ和ハ同一デアル.

(4) 二ツノ收斂級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$
$$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

ノ和ヲ夫々 U 及ビ V トスルト，級數

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\cdots\cdots+(u_m+v_m)+\cdots\cdots,$$
$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+(u_3-v_3)+\cdots\cdots+(u_m-v_m)+\cdots\cdots$$

ハ何レモ收斂デ其ノ和ハ夫々 $U+V$, 及ビ $U-V$ デアル.

(5) 收斂級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$ ニ於テハ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ デアル.

[證明] $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$ トオキ，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ トオクト

$$u_n=S_n-S_{n-1}.$$

而シテ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S$ デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

[注意] (5) ノ逆ハ必ズシモ成立シナイ．卽チ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ デアツテモ，級數ハ必ズシモ收斂デハナイノデアル．例ヘバ級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

ハ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ デアルケレドモ，後ニ證明セラレル如ク此ノ級數ハ發散デアル．此ノ級數ヲ調和級數ト云フ．

第二十三章　正項級數交項級數

正項級數　無限級數ノ總テノ項ノ數値ガ正ナルトキ，之ヲ正項無限級數或ハ略シテ正項級數ト云フ．正項級數ノ收斂發散ノ判定ニハ次ノ定理ガヨク用ヒラレル．

定理 1.　正項級數ハ收斂デアルカ，又ハ正ノ無限大ニ發散スル．卽チ決シテ振動スルコトハナイ．

[證明]
$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_m+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
ヲ正項級數トシ，
$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n$$
ヲ考ヘルト，$u_1, u_2, \cdots\cdots>0$ デアルカラ S_n ハ n ノ增大スルニ從ツテ漸次增大スル．故ニ S_n ハ限リナク大トナルカ，又ハ一定ノ値ニ限リナク近ヅキ決シテ振動スルコトハナイ．卽チ S ハ正ノ無限大ニ發散スルカ又ハ收斂スル．

定理 2.　二ツノ正項無限級數

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$V=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ニ於テ

(i)　U ガ收斂ニシテ $u_n\geqq v_n$ ナルトキハ V モ亦收斂デアル．

茲ニ $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ トスル．

(ii)　U ガ發散ニシテ $u_n\leqq v_n$ ナルトキハ V モ亦發散デアル．

[證明] (i) 二ツノ級數 U, V ノ最初ノ n 項ノ和ヲ夫々 U_n, V_n トシ U ノ和ヲ u トスルト，假定ニヨリ u ハ有限確定ニシテ

$$V_n\leqq U_n<u$$

デアル．而シテ V ハ正項級數デアルカラ V_n ハ n ガ增大スルニ從ツテ增大スル．卽チ V ハ常ニ增大スルモ有限確定値 u ヨリモ小デアル．故ニ $\lim_{n\to\infty} V_n$ ハ或有限確定値ヲ有シナケレバナラナイ．卽チ V ハ收斂デアル．

(ii) 假定ニヨリ　$V_n\geqq U_n$.

然ルニ U ハ正項級數デアリ，且之ガ發散デアル故

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\infty$$

デアル．從ツテ
$$\lim_{n\to\infty} V_n=\infty.$$

故ニ V ハ發散デアル．

或級數 V ノ發散，收斂ヲ吟味スルニ發散，收斂ナルコトノ知ラレタ他ノ級數ト比較スルト便利ナコトガ多イ．定理 2 及ビ次ノ定理ハ斯樣ナ場合ニヨク用ヒラレル．而シテ發散，收斂ノ知ラレタ級數トシテ等比級數，調和級數ガヨク用ヒラレル．

[注意] 正項級數ノ項ヲイクツヅツカ括ツテ得ル新シイ級數ハモトノ級數ト同樣ニ收斂若シクハ發散デアルコトハ容易ニ證明出來ル．

例題 1.
$$U=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル等比級數ノ收斂ナルコトヲ知ツテ

$$V=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ノ收斂ナルコトヲ證明セヨ．

[證明]
$$\frac{1}{1!}=1.\quad \frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.\quad \frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot3}<\frac{1}{2^2}.$$

一般ニ
$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots n}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\therefore V_n\leqq U_n.$$

U ガ收斂ナル故 V モ亦收斂デアル．

例題 2.
$$U=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots$$

ナル級數ノ發散ナルコトヲ知ツテ調和級數

$$V=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

ノ發散ナルコトヲ證明セヨ．

[證明] $$V'=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots$$

トオク．但シ V' ニ於テハ括弧内ガ一纏ニナツテ級數ノ各項トナル．サテ

$$1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般ニ $$\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}>\underbrace{\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}}_{2^m\text{個}}=\frac{1}{2}.$$

今 $2^{m+1}\leqq n<2^{m+2}$ ナル如キ m ハ決定スルコトヲ得ルカラ，カヤウニ m ヲトレバ

$$V_n\geqq V'_{m+1}>U_{m+2}.$$

依ツテ U ガ發散スルコトカラ V'，從ツテ V モ亦發散デアル．

例題 3. 次ノ級數ノ收斂發散ヲ吟味セヨ．但シ $k>1$．

$$S=\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots\cdots.$$

[證明] $$V=1+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right)+\cdots\cdots$$

トスルト級數 $V=S$ トナル．而シテ V ニツイテ

第2項 $$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

第3項 $$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}+\frac{1}{4^k}=\frac{1}{2^{2(k-1)}}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ $$V_n<1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2(k-1)}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^{k-1}}=U_n.$$

U_n ハ公比 $\frac{1}{2^{k-1}}$ ナル等比級數デ，且 $k>1$ デアルカラ此ノ公比ハ1ヨリ小サイ．

$$\therefore\ U_n<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{k-1}}}=U.$$

即チ $V_n<U_n$ ニシテ U ハ收斂デアルカラ，V モ亦收斂デアル．

定理 3. 二ツノ正項級數

$$U=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$

$$V=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

ニ於テ U ガ收斂ニシテ，且

$$\frac{v_n}{u_n}<a$$

ナル常數 a ガ存在スルトキハ，V モ亦收斂デアル．

若シ又 U ガ發散ニシテ

$$\frac{v_n}{u_n}>a>0$$

ナル常數 a ガ存在スルトキハ，V モ亦發散デアル．

[證明] U ガ收斂デアルカラ

$$aU=au_1+au_2+\cdots\cdots+au_n+\cdots\cdots$$

モ亦收斂デアル．然ルニ假定ニヨリ n ノ値ノスベテニ對シテ

$$v_n<au_n$$

デアルカラ V モ亦收斂デアル．

次ニ $a>0$ デアルナラバ

$$aU=au_1+au_2+\cdots\cdots+au_n+\cdots\cdots$$

モ亦發散デアル．然ルニ假定ニヨリ n ノ値ノスベテニ對シテ

$$v_n>au_n$$

デアルカラ V モ亦發散デアル．

[注意] $$U=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$
$$V'=aV=av_1+av_2+\cdots\cdots+av_n+\cdots\cdots$$

ト置イテ U, V' ニツイテ考ヘルト定理2ヲ適用スルコトガ出來ル．

例題 4. 次ノ級數ノ收斂發散ヲ判定セヨ．

(i) $$S_1=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}+\cdots\cdots.$$

(ii) $$S_2=\frac{1}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots.$$

[解] (i) $H=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ ハ發散デアル．$\frac{1}{2}H=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots\cdots$ モ發散デアル．從ツテ $H'=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$ モ發散デアル．

然ルニ S_1 ノ一般項ト H' ノ一般項ヲ比較スルト $\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n}$.

故ニ S_1 ハ發散デアル．

(ii) S_2 ト H トヲ比較スルト双方ノ第 n 項ノ比ハ

$$\frac{\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n}}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}$$

ニシテ此ノ値ハ $n=1$ ナルトキニ $\dfrac{1}{6}$ トナリ，$n>1$ ナルトキハ常ニ $\dfrac{1}{6}$ ヨリモ大デアル．

而シテ H ハ發散デアルカラ S モ亦發散デアル．

定理 4. **正項級數 $U=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ニ於テ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=r_n$ トオクトキ**

(i) n ノ總テノ値ニ對シテ常ニ $r_n<k<1$ ナル如キ一定數 k ガ存在スルトキハ U ハ收斂デアル．

(ii) $r_n\geqq 1$ ナルトキハ U ハ發散デアル．

[證明] (i) $u_{n+1}<k\,u_n$ デアルカラ

$$u_1=u_1,$$
$$u_2<ku_1,$$
$$u_3<ku_2<k^2u_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般ニ　$$u_{n+1}<ku_n<\cdots\cdots<k^nu_1.$$

然ルニ $0<k<1$ デアルカラ等比級數

$$S=u_1+ku_1+k^2u_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+k^nu_1+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=u_1(1+k+k^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+k^n+\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

ハ收斂デアル．從ツテ U モ亦收斂デアル．

(ii) $u_{n+1}\geqq u_n$ デアルカラ

$$u_1=u_1,$$
$$u_2\geqq u_1,$$
$$u_3\geqq u_2\geqq u_1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般ニ　$$u_{n+1}\geqq u_n\geqq\cdots\cdots\geqq u_1.$$

故ニ　$$U\geqq u_1+u_1+u_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_1+\cdots\cdots\cdots\cdots=\lim_{n\to\infty}nu_1=\infty.$$

即チ U ハ發散デアル．

系　正項無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ニ於テ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=r$ ナル極限値ガ存在スルトキ $r<1$ ナラバ收斂デアル．又 $r>1$ ナラバ發散デアル．

[證明] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=r$ デアルカラ $r<1$ ナルトキハ $0<\varepsilon<1-r$ ナル如キ一數 ε ヲトルト，之ニ對應シテ $n>N$ ナル總テノ n ニ對シテ恒ニ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-r\right|<\varepsilon$$

ガ成立スル如クーツノ整數 N ヲ定メルコトガ出來ル．從ツテ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r+\varepsilon.\qquad n>N.$$

然ルニ $\varepsilon<1-r$ デアルカラ　$0<r+\varepsilon<1$　デアル．故ニ**定理ニ依リ原級數ハ收斂デアル．**

次ニ $r>1$ ナルトキハ $0<\varepsilon<r-1$ ナル如キ一數 ε ヲトルト，之ニ對應シテ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-r\right|<\varepsilon.\qquad n>N$$

ガ成立スル如クーツノ整數 N ヲ撰定スルコトガ出來ル．從ツテ

$$r-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

然ルニ $\varepsilon<r-1$ ナル故 $1<r-\varepsilon$ デアル．即チ**原級數ハ發散デアル．**

例題 5. 正項無限級數　$u_1+u_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots$　ニ於テ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$ ナル極限値ガ存在スルトキ $r<1$ ナラバ收斂，$r>1$ ナラバ發散デアルコトヲ證明セヨ．

[證明] $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$ デアルカラ $r<1$ ナルトキハ $0<\varepsilon<1-r$ ナル如キ一數 ε ヲトルト之ニ對應シテ $|\sqrt[n]{u_n}-r|<\varepsilon$ ヲ滿足スル $n>m$ ナル m ヲ決定スルコトガ出來ル．換言スレバ此ノ m ヨリ大ナル n ニ對シテ常ニ $r-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<r+\varepsilon$ デアル．故ニ斯ノ如キ n ヲ $m+1$, $m+2$, …… ナル如クスルト上ノ不等式ハ常ニ成立スル．

故ニ u_{m+1} 項以下ヲトツテ考ヘルトキハ

$$\sqrt[m+1]{u_{m+1}}<r+\varepsilon.\qquad\therefore\ u_{m+1}<(r+\varepsilon)^{m+1}$$
$$\sqrt[m+2]{u_{m+2}}<r+\varepsilon.\qquad\therefore\ u_{m+2}<(r+\varepsilon)^{m+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$<(r+\varepsilon)^{m+1}+(r+\varepsilon)^{m+2}+(r+\varepsilon)^{m+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=(r+\varepsilon)^{m+1}\{1+(r+\varepsilon)+(r+\varepsilon)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\}.$$

$\varepsilon<1-r$ ナル故 $r+\varepsilon<1$. 故ニ右邊ハ收斂デアル．從ツテ左邊モ收斂デアル．即チ**與ヘラレタ級數ハ收斂デアル．**

$r>1$ ナルトキハ $0<\varepsilon<r-1$ ナル如キ一數 ε ヲトレバ，之ニ對應シテ $|\sqrt[n]{u_n}-r|<\varepsilon$ ヲ滿足スル $n>m$ ナル m ヲ決定スルコトガ出來ル．

故ニ u_{m+1} 項以下ヲトツテ考ヘルトキハ

$$r-\varepsilon<\sqrt[m+1]{u_{m+1}}. \qquad \therefore\ (r-\varepsilon)^{m+1}<u_{m+1}.$$
$$r-\varepsilon<\sqrt[m+2]{u_{m+2}}. \qquad \therefore\ (r-\varepsilon)^{m+2}<u_{m+2}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots\cdots\cdots\\ &>(r-\varepsilon)^{m+1}+(r-\varepsilon)^{m+2}+(r-\varepsilon)^{m+3}+\cdots\cdots\cdots\\ &=(r-\varepsilon)^{m+1}\{1+(r-\varepsilon)+(r-\varepsilon)^2+\cdots\cdots\cdots\}.\end{aligned}$$

$\varepsilon<r-1$ ナル故 $r-\varepsilon>1$. 故ニ右邊ハ發散デアル. 從ツテ左邊モ發散デアル. **即チ與ヘラレタ級數ハ發散デアル.**

例題 6. 次ノ級數ノ收斂發散ヲ吟味セヨ.

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\cdots\cdots.$$

[解]
$$u_n=\frac{n}{2^n}. \qquad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}.$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}<1.$$

故ニ S ハ收斂デアル.

交項級數 一ツオキニ正項, 負項ヲ有スル級數ヲ交項級數又ハ交番級數ト云フ. 即チ

$$U=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots\cdots\cdots$$

ノ如キモノデアル. 交項級數ニハ次ノ定理ガ成立ツ.

定理 5. 交項級數

$$U=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots\cdots\cdots$$

ニ於テ

$$u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots\cdots>u_n>\cdots\cdots\cdots$$

ニシテ, 且 $$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

ナルトキハ U ハ收斂デアル.

[證明] 與ヘラレタ級數ノ第 n 項マデノ和ヲ U_n デ表ハスト

$$U_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots\cdots\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})$$

デアル. 然ルニ假定ニヨリ各括弧內ノ數ハ正デアルカラ U_{2m} ハ m ト共ニ增大スルコトヲ知ル. 然レドモ亦一方ニ

$$U_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}$$

デアルカラ, U_{2m} ハ m ノ如何ニ拘ラズ常ニ u_1 ヨリ小デアル. 故ニ $m\to\infty$ ナルトキ U_{2m} ハ有限確定ナル極限値ヲ有スル. 此ノ極限値ヲ U' トオクト

$$\lim_{m\to\infty}U_{2m}=U'.$$

然ルトキハ

$$\lim_{m\to\infty}U_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}(U_{2m}+u_{2m+1}).$$

且假定ニヨリ $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ ヨリ $\lim_{m\to\infty}u_{2m+1}=0.$

$$\therefore\ \lim_{m\to\infty}U_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}U_{2m}.$$

即チ n ノ偶數奇數ニ拘ラズ常ニ

$$\lim_{n\to\infty}U_n=U'$$

ニシテ U ハ收斂デアル.

例ヘバ $S=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{n^k}+\cdots\cdots$. $k>0$ ハ上ノ定理ニヨリ收斂デアル.

第二十四章 一 般 級 數

絕對值級數 符號ニツイテ何等ノ制限ノナイ一般級數ノ收斂發散ヲ吟味スルニハ, 其ノ級數ノ各項ノ絕對值ヲ以テ作ツタ級數ノ收斂發散ヲ先ヅ吟味シ, 之ニ基イテ原級數ノ收斂發散ヲ吟味スルト便利ナコトガアル. 斯ノ如ク原級數ノ各項ノ絕對值ヲ以テ作ツタ級數ヲ原級數ノ**絕對值級數**ト云フ. 而シテ絕對值級數ガ收斂ナルトキ, 原級數ヲ**絕對收斂**デアルト云フ. 時トシテハ絕對值級數ガ收斂デナクテモ原級數ガ收斂ナルコトガアル. 此ノ場合原級數ヲ**條件附收斂級數**ト云フ.

[例]
$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots\cdots\cdots$$

ナル級數ノ絕對值級數

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots\cdots$$

ハ收斂デアルカラ, S ハ絕對收斂級數デアル. 然ルニ

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots\cdots$$

ナル級數ハ收斂デアルガ, 其ノ絕對值級數

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$$

ハ發散デアルカラ，S ハ條件附收斂級數デアル．

定理 1.　級數 $S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ノ絕對値ヲ以テ作ツタ級數

$$A=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots\cdots+|u_n|+\cdots\cdots\cdots$$

ガ收斂ナルトキハ，原級數 S モ亦收斂デアル．而シテ原級數ノ和ハ其ノ正項ノミノ和ヨリ負項ノミノ和ヲ減ジタ差ニ等シイ．

［證明］ S, A ノ始メヨリ n 項ノ和ヲ夫々 S_n, A_n ニテ表ハシ，S_n 中ノ正項ノ和ヲ P_n, 負項ノ和ヲ $-Q_n$ デ表ハスト

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n=P_n-Q_n.$$
$$A_n=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots\cdots+|u_n|=P_n+Q_n.$$

假定ニヨリ級數 A ガ收斂デアルカラ

$$A_n<A. \qquad \therefore\ P_n<A. \qquad Q_n<A.$$

然ルニ P_n, Q_n ハ n ガ增大スルニ從ツテ增大スルカラ一定ノ極限値ヲ有スル．之ヲ P, Q トスルト

$$\lim_{n\to\infty} P_n=P. \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n=Q.$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=P-Q.$$

即チ原級數ハ收斂ニシテ其ノ和ハ P ヨリ Q ヲ減ジタル差ニ等シイ．

絕對收斂級數ニ於テハ項ノ順序ヲ取リカヘテモ矢張リ絕對收斂デアル．且其ノ和ハモトノ級數ノ和ニ等シイガ，條件附收斂級數ニ於テハ，項ノ順序ヲ取リカヘルコトニ依ツテ和ノ異ナル級數ニ變ズルコトガ出來ル．故ニ條件附收斂級數ニ於テハ妄リニ項ノ順序ヲカヘルコトガ出來ナイノデアル．

［例］ $$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots.$$

ニ於テ其ノ順序ヲ變ヘテ括弧デ括リ

$$S_1=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)-\frac{1}{2(n+1)}+\cdots\cdots\cdots$$

トスルトキハ，交項級數ノ定理ニヨリ收斂デアル．從ツテ此ノ級數ノ括弧ヲ去ツタ級數

$$S'=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

ニ於テ，S'_{3n} 及ビ S'_{3n+2} ハ $n\to\infty$ ナルトキ同一極限値ヲ有スル．從ツテ $S'_{3n+1}=S'_{3n}+\dfrac{1}{4n+1}$ モ亦同一極限値ヲ有スル．從ツテ S' ハ收斂デアル．然ルニ

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots.$$
$$\frac{1}{2}S=\quad\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{4}\quad+\frac{1}{6}\quad-\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots.$$
$$\therefore\ \frac{3}{2}S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots=S'$$
$$\therefore\ 3S=2S'$$

リ S ニ於テ項ノ順序ヲ入換ヘヲ作ツタ S' ハ同一ノ和ヲ有シナイ．

絕對收斂級數ノ積

ニツノ絕對收斂級數ニツイテハ次ノ定理ガ成立スル．

定理 2.　ニツノ絕對收斂級數

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots,$$
$$V=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots$$

ノ和ヲ夫々 U, V トスルト級數

$$W=u_1v_1+(u_2v_1+u_1v_2)+(u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3)+\cdots\cdots\cdots$$
$$+(u_nv_1+u_{n-1}v_2+\cdots\cdots\cdots+u_1v_n)+\cdots\cdots\cdots$$

モ亦絕對收斂ニシテ其ノ積 W ハ

$$W=UV$$

デアル．

［證明］ U, V ガ共ニ正項級數ナルトキハ

$$W_2=u_1v_1+(v_2v_1+u_1v_2).$$
$$U_2V_2=(u_1+u_2)(v_1+v_2)=u_1v_1+(v_2v_1+u_1v_2)+u_2v_2.$$
$$\therefore\ W_2<U_2V_2<UV.$$
$$W_3=u_1v_1+(u_2v_1+u_1v_2)+(u_3v_1+v_2v_2+u_1v_3)$$
$$U_3V_3=(u_1+v_2+u_3)(v_1+v_2+v_3)$$
$$=u_1v_1+(u_2v_1+u_1v_2)+(u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3)$$
$$+(u_2v_3+v_3v_2+u_3v_3).$$
$$\therefore\ W_3<U_3V_3<UV.$$

一般ニ $$W_n<U_nV_n<UV.$$

故ニ W ハ收斂級數ニシテ，其ノ和ハ

$$W\leqq UV.$$

デナケレバナラナイ．然ルニ又一方ヨリ考ヘルト上ノ式ヨリ

$$U_2V_2<W_3.$$

一般ニ ノ $\qquad U_nV_n<W_{2n-1}$.

デアルカラ $\qquad UV\leqq W$.

故ニ結局 $\qquad W=UV$ デナケレバナラナイ.

次ニ U, V ノ中少クトモ一方ガ正項級數デナイ場合ニハ各級數ノ正項ノミノ和ヲ U_1, V_1 又負項ノミノ和ヲ $-U_2$, $-V_2$ トスルト

$$\begin{aligned} UV&=(U_1-U_2)(V_1-V_2)\\ &=U_1V_1-U_2V_1-U_1V_2+U_2V_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \end{aligned}$$

デアル. 玆ニ U_1V_1 等ハ何レモ正項級數ノ積デアルカラ W ナル形ノ收斂級數デアル. 從ツテ (1) ハ各項ガ收斂ナル級數デアルカラ全體トシテ一ツノ收斂級數デアル.

故ニ U, V ノ各々ノ絕對値級數ノ和ヲ U_a, V_a トスルト

$$U_aV_a=(U_1+U_2)(V_1+V_2)=U_1V_1+U_2V_1+U_1V_2+U_2V_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナリ, 之モ亦一ツノ收斂級數デアル. 然ルニ (2) ハ (1) ノ絕對値級數ナルヲ以テ (1) ハ絕對收斂級數デアル.

從ツテ (1) ニ於テ其ノ項ノ順序ヲ適當ニ變ヘテモ, 其ノ和ハ變ラナイ. 然ルニ (1) ノ項ノ順序ヲ適當ニ變ヘルト之ヲ W トスルコトガ出來ル. 故ニ **W ハ絕對收斂級數ニシテ其ノ和ハ UV ニ等シイ.**

例題 1. $|x|<1$ ナルトキ

$$(1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots)^2$$

ヲ求メヨ.

[解] $|x|<1$ ナルトキハ

$$S=1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ絕對收斂デアル. 而シテ

$$S=\frac{1}{1-x}.$$

故ニ $$\frac{1}{(1-x)^2}=(1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots)^2.$$

然ルニ二項定理ニヨリ

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ (1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots)^2=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots.$$

例題 2. $|x|<\frac{1}{2}$ ナルトキ次ノ式ヲ證明セヨ.

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=1+3x+7x^2+\cdots\cdots\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots.$$

[證明] $|x|<\frac{1}{2}$ ナルトキ

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+(2x)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2x)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\begin{aligned} \because\ \frac{1}{(1-x)(1-2x)}&=\{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots\}\{1+2x+(2x)^2+\cdots\cdots+(2x)^{n-1}+\cdots\cdots\}\\ &=1+(1+2)x+(1+2+2^2)x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\qquad +(1+2+2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+2^{n-1})x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &=1+3x+7x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{1}{1-3x+2x^2}=1+3x+7x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

第二十五章 冪級數

冪級數ノ收斂 微分學ニ於テ最モ必要ナルハ次ニ述ベル冪級數デアツテ, 今マデノ事項ハ之ガ爲ノ豫備ノ様ナモノデアル.

定義 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ ヲ常數トスルトキ

$$S=a_0+a_1x+a_2x+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル形ノ級數ヲ**冪級數**ト云フ. 從ツテ冪級數 (1) ノ絕對値級數ハ次ノ形ニ書カレル.

$$S_a=|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots\cdots\cdots+|a_nx^n|+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

冪級數ハ x ノトル値ニヨリ或ハ收斂シ, 或ハ發散スル. 而シテ微分學ニ於テ必要ナルハ收斂ナル場合デアルカラ, 冪級數ヲシテ收斂ナラシメルタメノ x ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ定メナケレバナラナイ. 之ガタメニ次ノ定理ガアル.

定理 1. **冪級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$ ニ於テ, 一ツノ正數 r ニ對シ n ノ如何ニ拘ラズ常ニ**

$$|a_n|r^n<G$$

ナル如キ一定數 G ガ存在スルトキハ, 原級數ハ $|x|<r$ ナル變域ニ於テ絕對收斂デアル.

[證明] n ノ如何ニ拘ラズ $|a_n|r^n<G$ ナル如キ一定數 G ガ存在スルカラ $|a_n|<\frac{G}{r^n}$

ガ常ニ成立スル.

今 x ヲ $|x|<r$ ナル任意ノ數トスレバ

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots+|a_nx^n|+\cdots\cdots$$
$$<\frac{G}{r^0}+\frac{G}{r^1}|x|+\frac{G}{r^2}|x^2|+\cdots\cdots+\frac{G}{r^n}|x^n|+\cdots\cdots$$
$$=\frac{G}{r^0}+G\left|\frac{x}{r}\right|+G\left|\left(\frac{x}{r}\right)^2\right|+\cdots\cdots+G\left|\left(\frac{x}{r}\right)^n\right|+\cdots\cdots$$
$$=G\left\{1+\left|\frac{x}{r}\right|+\left|\left(\frac{x}{r}\right)^2\right|+\cdots\cdots+\left|\left(\frac{x}{r}\right)^n\right|+\cdots\cdots\right\}$$
$$=G\frac{1}{1-\left|\frac{x}{r}\right|}=\frac{G}{1-\frac{|x|}{r}}.\qquad (r>0,\ \frac{|x|}{r}<1 \text{ ナル故})$$

即チ原級數ノ絶對値級數ガ收斂ナル故原級數ハ絶對收斂級數デアル.

次ノ定理ハ本定理ノ一部ヲナシ本定理ヨリモ多ク用ヒラレル重要ナル定理デアル.

定理 2. **r ヲ一ツノ實數トスルトキ, 冪級數**

$$S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ガ $x=r$ ナルトキ收斂ナラバ $|x|<|r|$ ナル x ノ總テノ値ニ對シテ (1) ハ絶對收斂デアル.

[證明] 假設ニヨリ (1) ノ $x=r$ ヲ代入シタ

$$a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots\cdots+a_nr^n+\cdots\cdots$$

ハ收斂デアルカラ, n ガ十分大ナルトキ任意ノ小ナル正數 ε ニ對シテ常ニ

$$|a_nr^n|<\varepsilon$$

デナケレバナラナイ. 故ニ

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{|r^n|}.$$

從ツテ
$$\left|a_nx^n\right|<\varepsilon\left|\frac{x}{r}\right|^n.$$

故ニ (1) ノ絶對値級數ノ各項ハ n ノ値ガ十分大ナルトキハ

$$\varepsilon+\varepsilon\left|\frac{x}{r}\right|+\varepsilon\left|\frac{x}{r}\right|^2+\cdots\cdots+\varepsilon\left|\frac{x}{r}\right|^n+\cdots\cdots \qquad (2)$$

ノ相當スル各項ヨリ小デアル. 而シテ $|x|<|r|$ ナルトキハ (2) ハ收斂ナル等比級數デアル. **故ニ (1) ハ $|x|<|r|$ ナルトキ絶對收斂デアル.**

r ガ正ナルトキハ $|x|<r$ ハ $-r<x<r$ ト書キ換ヘラレ $|x|>r$ ハ $x>r$ 及ビ $x<-r$ ト書キ換ヘラレルカラ上ノ定理ハ又次ノ如ク述ベラレル.

r ヲ一ツノ正數トシ或冪級數ガ $x=r$ ナルトキ收斂ナルトキハ其ノ級數ハ $-r<x<r$ ナル變域ニ於テ常ニ絶對收斂デアル. 若シ又 $x=r$ ニ於テ發散ナルトキハ $x>r$ 及ビ $x<-r$ ナル變域ニ於テ常ニ發散デアル.

例題 1.
$$S=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

ナル級數ハ $x=1$ ニ於テ收斂デアル. 故ニ **$|x|<1$ ナル總テノ x ニ對シテ絶對收斂デアル.** 又 **$|x|>1$ ナル總テノ x ニ對シテ發散デアル.**

例題 2.
$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

ナル級數ハ x ノ總テノ値ニ對シテ絶對收斂ナルコトヲ示セ.

[解]
$$r_n=\frac{\left|\frac{x^n}{n!}\right|}{\left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right|}=\frac{|x|}{n}.$$

故ニ $n>|x|+1$ ナルトキハ $r_n<\frac{|x|}{|x|+1}$. 從ツテ $r_n<k<1$ ナル如キ一定數 k ヲトルコトガ出來ル. 即チ**絶對收斂デアル.**

以上ハ $x\neq0$ ト考ヘタガ $x=0$ ナルトキモ明ニ收斂デアル.

例題 3. $f(h)$ 並ニ其ノ導函數ガ悉ク連續ニシテ且有限ナルトキハ

$$f(h)+\frac{f'(h)}{1!}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

ハ x ノ總テノ値ニ對シテ絶對收斂デアル.

[證明] $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, $\cdots\cdots$, $f^{(n)}(h)$, $\cdots\cdots$ 等ハ皆有限デアルカラ其等ノ中最大ナルモノヲ G トスルト

$$\left|f(h)\right|+\left|\frac{f'(h)}{1!}x\right|+\left|\frac{f''(h)}{2!}x^2\right|+\cdots\cdots+\left|\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n\right|+\cdots\cdots$$
$$<G\left\{1+\left|\frac{x}{1!}\right|+\left|\frac{x^2}{2!}\right|+\cdots\cdots+\left|\frac{x^n}{n!}\right|+\cdots\cdots\right\}$$

トナル. **例題 (2) ニヨリ右邊ノ括弧ノ中ガ收斂デアルカラ原級數ハ絶對收斂デアル.**

以上ノ結果一般ニハ x ノ絶對値ヲ零ヨリ漸次增大シテ行クトキ, 或一ツノ値ヲ通過スルマデハ冪級數ハ收斂デアルガ, 其レヲ通過シタ後ハ發散トナル樣ナ一ツノ數ガ存在スルコトガ解ル. 即チ級數

$$a_0+a_1x+a_3x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots \qquad (1)$$

ニ就イテ $|x|<R$ ナルトキ收斂, $|x|>R$ ナルトキ發散ナル如キ R ナル數ガ

存在スル．此ノ R ヲ級數 (1) ノ收斂半徑ト云フ．而シテ冪級數ヲ收斂ナラシメル x ノ變域ハ此ノ收斂半徑ニヨツテ定マル．之ヲ收斂域ト云フ．例題 1 ノ級數ニ於テハ收斂半徑ハ 1 デアル．又例題 2 ノ級數ノ收斂域ハ實數全體デアル．

級數 (1) ノ絶對値級數 A ガ收斂デアルナラバ (1) ハ當然收斂デアルカラ，A ノ收斂半徑ハ (1) ノ收斂半徑ヨリ大ナルコトガ出來ナイ．故ニ (1) ト A トノ收斂半徑ヲ夫々 R_1, R_2 トスルト $R_1 \geqq R_2$ デアル．然ルニ (1) ノ收斂半徑ヨリ小ナル $|x|$ ニ對シテハ (1) ハ絶對收斂デアル．從ツテ A ガ收斂ナルコトカラ $R_1 > R_2$ ナルコトガ出來ナイ．斯樣ニシテ (1) ト A トハ同一ノ收斂半徑ヲ有スル．

(1) ト A トガ同一ノ收斂半徑ヲ有スルナラバ (1) ノ收斂半徑ヲ求メル代リニ A ノ收斂半徑ヲ求メタ方ガ便利デアル．

例題 4. 次ノ級數ノ收斂域ヲ求メヨ．

$$x-\frac{x^2}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots\cdots-(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

[解] $x=1$ トスレバ

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots\cdots\cdots-(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル交項無限級數トナリ，收斂スル．

又 $x=-1$ トスルト

$$-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル交項無限級數トナリ矢張リ收斂スル．而シテ $|x|>1$ ナルトキ原級數ハ發散デアル．故ニ收斂半徑ハ $-1 \leqq r \leqq 1$ デアル．

冪級數ノ導函數

x ニ關スル冪級數

$$S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ノ收斂半徑ヲ r トスルト $|x|<r$ ナル x ニ對シテ S ノ値ガ定マルカラ，S ハ其ノ收斂域ニ於テ x ノ函數トナル．而シテ此ノ函數ハ其ノ變域內ニ於テ x ノ連續函數トナル．從ツテ S ノ導函數ハ其ノ各項ノ導函數ノ和トナル．卽チ

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots$$

ナルトキ

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots\cdots\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

デアル．

例題 5. $|x|<1$ ナルトキ等式

$$1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}$$

ノ兩邊ヲ順次ニ x ニツイテ微分シテ次ノ等式ヲ證明セヨ．

(i) $1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

(ii) $\dfrac{1\cdot2}{2}+\dfrac{2\cdot3}{2^2}+\dfrac{3\cdot4}{3^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots=8.$

[證明] (i) 與ヘラレタ等式ヲ x ニツイテ微分スルト

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots=-\frac{-1}{(1-x)^2}.$$

$$\therefore\ 1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

(ii). (i) ニヨツテ

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

之ヲ x ニツイテ微分スルト

$$2\cdot1+3\cdot2x+4\cdot3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$\therefore\ \frac{2\cdot1}{2}+\frac{3\cdot2x}{2}+\frac{4\cdot3x^2}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{(n+1)nx^{n-1}}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{(1-x)^3}.$$

本式ニ $x=\frac{1}{2}$ ヲ代入スルト

$$\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2^2}+\frac{3\cdot4}{2^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots=8.$$

練習問題 15.

次ノ各級數ノ收斂發散ヲ吟味セヨ．

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

(2) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

(3) $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

(4) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\cdots\cdots.$

(5) $1+\frac{1}{2^3}+\frac{2^2}{3^4}+\frac{3^3}{4^5}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n+1}}+\cdots\cdots.$

(6) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\cdots.$

(7) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\cdots\cdots.$

(8) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot2}{3\cdot5}+\frac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}+\cdots\cdots.$

(9) $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots\cdots.$

(10) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots\cdots.$

(11) 次ノ級數ハ x ノ總テノ値ニ對シテ收斂ナルコトヲ示セ.

$$\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\cdots\cdots.$$

(12) 次ノ級數ノ收斂, 發散ヲ吟味セヨ.

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+x^n}+\cdots\cdots.$$

次ノ各級數ノ收斂域ヲ求メヨ.

(13) $1-\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+\cdots\cdots.$

(14) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots.$

(15) $1-\frac{x}{\sqrt{1}}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}}+\cdots\cdots.$

(16) $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\cdots\cdots.$

(17) $1\cdot2x+2\cdot3x^2+3\cdot4x^3+\cdots\cdots+n(n+1)x^n+\cdots\cdots.$

(18) $x+x^{2^2}+x^{3^2}+\cdots\cdots+x^{n^2}+\cdots\cdots.$

【解　　答】

(1) $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots$ トオク.

$S_1=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ ハ發散スル.

S_1 = $\frac{1}{2}$ ヲ乘ジタル次ノ級數モ亦發散スル.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots\cdots.$$

然ルニ $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}.$

故ニ S ハ發散スル.

(2) $S_n=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}$

$<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}=S_n'.$

然ルニ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ ハ收斂ナル故原級數ハ收斂スル.

(3) $\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$ $\frac{3}{2}>1$ ナル故原級數ハ收斂スル.

(4) $\frac{1}{\sqrt{2n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}\geqq\frac{1}{n}.$ (但シ $n>1$) 故ニ原級數ハ發散スル.

(5) $S_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{2^2}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n+1}}$

$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n^2}$

$<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}.$

故ニ原級數ハ收斂スル.

(6) $u_n=\frac{n}{2^n},\ u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}.$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

故ニ原級數ハ收斂スル.

(7) $\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ ナル故

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots.$

交項級數ニシテ $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots\cdots>\frac{1}{2n}>\cdots\cdots.$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ ナル故原級數ハ收斂デアル.

(8) $u_n=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)},\quad u_{n+1}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n(n+1)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)(2n+3)}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}<1.$

故＝與ヘラレタ級數ハ收斂デアル．

(9)　$u_n=\dfrac{n!}{10^n}$,　　$u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

故＝原級數ハ發散スル．

(10)　$S=1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1+n}{1+n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

$S_1=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

トオクト $\dfrac{1+n}{1+n^2}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n(1+n^2)}>0.$　(但シ $n>1$).

而シテ S_1 ハ發散デアル．故＝ S ハ發散スル．

(11)　原級數ノ絕對值級數ヲ考ヘルト

$$\left|\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right|<\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{n^2}.$$

然ル＝ $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ ハ收斂デアルカラ原級數ハ收斂デアル．

(12)　(i)　$|x|>1$ ナルトキハ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{1}{x^n}+x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<1.$$

即チ原級數ノ絕對值級數ガ收斂ナル故原級數モ亦收斂デアル．

(ii)　$|x|<1$ ナルトキハ與ヘラレタ級數ハ正項級數デアツテ

$$\frac{1}{1+x^n}>\frac{1}{2}.$$

而シテ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ ナル級數ハ發散スル故原級數モ亦發散スル．

(iii)　$|x|=1$ ナルトキ與ヘラレタ級數ハ發散スル．

(13)　$x=-1$ ナルトキハ與ヘラレタ級數ハ

$$1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナリ收斂デアル．$x=1$ ナルトキハ

$$1-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナリ收斂デアル．而シテ $x>1$ ナルトキハ

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n^2}=\infty$ トナルカラ收斂デハナイ．又 $x<-1$ ナルトキハ原級數ハ正項級數トナリ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2x}{(n+1)^2}=-x>1.$$

トナルカラ發散デアル．

故＝收斂域ハ $-1\leqq x\leqq 1$ デアル．

(14)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n-1)(2n)}=0<1.$$

故＝原級數ハ x ガ如何ナル值＝テモ絕對收斂デアル．從ツテ x ノ收斂域ハ實數全體デアル．

(15)　$x=1$ ナルトキハ與級數ハ

$$1-\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナリ交項級數＝シテ $|u_1|>|u_2|>|u_3|>\cdots\cdots\cdots$ ナル故收斂デアル．$x>1$ ナルトキハ

$$1-\frac{x}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^2}{2^{\frac{1}{2}}}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル交項級數＝シテ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$ ナル故收斂デハナイ．$x=-1$ ナルトキハ

$$1+\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナリ發散スル．$1>x>-1$ ナルトキハ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{x^n}{\sqrt{n}}}{\frac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,|x|=|x|<1.$$

故＝原級數ハ收斂スル．

從ツテ收斂域ハ　$-1<x\leqq 1$.

(16)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x|=|x|.$$

$|x|<1$ ナルトキハ收斂デアル．$x=1$ ノトキハ原級數ハ

$$1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル故發散スル．$x=-1$ ナルトキハ

$$-1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル交項級數ニシテ $|u_1|>|u_2|>|u_3|>\cdots\cdots\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ ナル故收斂スル．$x<-1$ ナルトキハ交項級數ニシテ $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$ ナル故收斂ナラズ．又 $x>1$ ナルトキハ正項級數ニシテ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$ ナル故發散スル．

故ニ收斂域ハ $-1\leqq x<1$.

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)(n+2)x^{n+1}}{n(n+1)x^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\dfrac{2}{n}\right)x\right|=|x|$.

故ニ $|x|<1$ ノトキ收斂ニシテ $x=1$, $x=-1$ 及ビ $|x|>1$ ノトキ發散デアル．

即チ收斂域ハ $-1<x<1$.

(18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{(n+1)^2}}{x^{n^2}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|x^{2n+1}|$. 從ツテ $|x|<1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty}|x^{2n+1}|<1$. 即チ $|x|<1$ ナルトキハ收斂デアル．

$x=1$, $x=-1$ ノトキハ明ニ發散デアル．

從ツテ收斂域ハ $-1<x<1$.

第六編 函數ノ展開

第二十六章 豫備定理

導函數ト恒等式 二ツノ連續函數 $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ ガ x ノ或變域ニ於テ恒等的ニ等シイナラバ，其等ノ導函數ハ x ノ同ジ變域ニ於テ又恒等的ニ等シイ．然シナガラ此ノ逆ハ必ズシモ眞デハナイ．何トナレバ導函數ノ等シイ二ツノ原函數ハ相等シイカ，又ハ或常數ダケノ差ヲ有スルコトハ第十七章ノ例題ヨリ容易ニ證明セラレルカラデアル．

例題 (i) $\sin 2x=2\sin x\cos x$, (ii) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ ヨリ $\cos 2x$, $\sin 3x$ ノ公式ヲ導ケ．

[解] (i) $\sin 2x=2\sin x\cos x$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$\cos 2x\cdot 2=2\cos^2 x-2\sin^2 x. \qquad \therefore\ \boldsymbol{\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.}$$

(ii) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$-3\sin 3x=4\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)+3\sin x=12\cdot(1-\sin^2 x)(-\sin x)+3\sin x.$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x.}$$

定理 1. 連續函數 $y=f(x+h)$ ガ x ノ冪級數ニテ書キ表ハサレルトキハ，x ノ指數ハ零カ又ハ正ノ整數ニ限ル．

[證明] m ヲ正ノ整數トシ若シ此ノ冪級數ガ $\mathrm{A}x^{-m}$ ナル項ヲ有スルトキニハ，$x\to 0$ ナルトキ h ノスベテノ値ニ對シテ無限大トナル．然ルニ與ヘラレタ級數ハ其ノ時 $f(h)$ トナル．而シテ $f(h)$ ハ連續デアルカラ h ノ總テノ値ニ對シテ無限大トナルコトガナイ．即チ $f(x+h)$ ハ x ノ正ノ冪級數ノ項カラノミナル．

次ニ又 $f(x+h)$ ハ x ノ分數指數，即チ $\mathrm{B}x^{n+\frac{p}{q}}$ ナル形ノ項ヲモ有スルコトガ出來ナイ．何トナレバ若シ斯樣ナ項ヲ有スルナラバ，x ニ關スル其ノ項ノ第 $(n+1)$ 次ノ導函數ハ x ノ負ノ指數ヲ有スルコトトナル．而シテ之ハ $x\to 0$ ノトキ無限大トナルカラ前ト同ジ理由ニ依リ不合理デアル．

故ニ $f(x+h)$ ヲ x ノ冪級數ニ書キ表ハスコトガ出來ルトキハ x ノ正ノ整數

冪ヨリ成ル。

定義 函數ヲ其ノ自變數ノ冪指數ノ項デ書キ表ハスコトヲ，其ノ自變數ノ冪級數ニ展開スルト云フ．

例ヘバ $f(x+h)=2(x+h)^2-3(x+h)+6$ ヲ h ヲ自變數ト見做シ其ノ冪級數ニ展開スルト

$$f(x+h)=(2x^2-3x+6)+(4x-3)h+2h^2.$$

若シ又 x ヲ自變數ト見做シテ其ノ冪級數ニ展開スルト

$$f(x+h)=(2h^2-3h+6)+(4h-3)x+2x^2$$

トナル．

定理 2. $z=x+h$ トス．函數 $u=f(z)$ ガ z ノ或變域ニ於テ連續ナルトキハ

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dh}$$

デアル．

[證明]
$$\frac{dz}{dx}=1. \qquad \frac{dz}{dh}=1.$$
$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=f'(z).$$
$$\frac{du}{dh}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dh}=f'(z).$$
$$\therefore \quad \frac{du}{dx}=\frac{du}{dh}.$$

[例] $u=f(x+h)=3(x+h)^3-2(x+h)^2+5(x+h)-6$ ナルトキハ

$$\frac{du}{dx}=9(x+h)^2-4(x+h)+5.$$
$$\frac{du}{dh}=9(x+h)^2-4(x+h)+5.$$
$$\therefore \quad \frac{du}{dx}=\frac{du}{dh}.$$

定理 3. x ニ關スル二ツノ冪級數ガ，$x=0$ ヲ含ム變域ニ於テ常ニ相等シイ和ヲ有スルトキハ，此ノ二ツノ冪級數ハ恒等的ニ相等シイ．

[證明] x ニ關スル二ツノ相等シイ冪級數ヲ

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$
$$=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_nx^n+\cdots\cdots$$

トシ，$x=0$ トオクト

$$a_0=b_0.$$

此ノ兩邊ヲ x デ微分スルト

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$
$$=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots\cdots+nb_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

此ノ兩邊ニ $x=0$ ヲ代入スルト

$$a_1=b_1.$$

一般ニ兩邊ヲ n 回微分シテ後 $x=0$ トオクト

$$a_n=b_n$$

トナル．故ニ二ツノ級數ハ全ク同一ノ形トナル．卽チ恒等的ニ等シイ．

例題 $(a+x)^n$ ハ x ノ冪級數ニ展開サレルコトヲ知ツテ其ノ形ヲ決定セヨ．但シ n ハ正ノ整數トスル．

[解]
$$(a+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n \cdots\cdots(1)$$

トオクコトガ出來ル．此ノ兩邊ニ $x=0$ トオクト

$$a^n=a_0.$$

(1) ノ兩邊ヲ x ニ關シテ微分スルト

$$n(a+x)^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}.$$

兩邊ニ $x=0$ トオクト

$$na^{n-1}=a_1.$$

更ニ x ニツイテ兩邊ヲ微分スルト

$$n(n-1)(a+x)^{n-2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

兩邊ニ $x=0$ トオクト

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}=a_2.$$

以下同樣ニシテ一般ニ

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}=a_r.$$

$$\therefore \quad (a+x)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r+\cdots\cdots+x^n.$$

第二十七章　函數ノ展開

Taylor ノ級數　h ニ關スル連續函數 $f(h)$ ノ逐次導函數ガ有限ニシテ且連續デアリ，且 $f(x+h)$ ガ x ノ冪級數ニ展開セラレルトキハ

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

デアル．之ヲ Taylor ノ級數ト云フ．

[證明]　函數 $f(x+h)$ ガ x ノ冪級數ニ展開セラレルトキハ，x ノ各項ノ指數ハ皆正ノ整數デアル．

$$\therefore \quad f(x+h)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル形ヲトル。コヽニ $p_0, p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n \cdots\cdots$ ハ h ノ連續函數ニシテ且有限デアル。
(1) ニ於テ $x=0$ トオクト $f(h)=p_0$ トナル．

次ニ　$u=f(x+h)$　トオイテ兩邊ヲ微分スルト

$$\frac{du}{dh}=\frac{dp_0}{dh}+\frac{dp_1}{dh}x+\frac{dp_2}{dh}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{dp_n}{dh}x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\frac{du}{dx}=p_1+2p_2x+3p_3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+np_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

然ルニ豫備定理ニヨリ

$$\frac{du}{dh}=\frac{du}{dx}$$

デアルカラ，コノ二ツノ式ハ x ノスベテノ値ニ對シテ恒等的ニ等シイ．即チ x ノ同一指數ノ項ノ係數ハ等シクナケレバナラナイ．

$$\therefore \quad p_1=\frac{dp_0}{dh}=\frac{df(h)}{dh}=f'(h).$$

$$p_2=\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dh}=\frac{1}{2!}\frac{d^2f(h)}{dh^2}=\frac{1}{2!}f''(h).$$

$$p_3=\frac{1}{3}\frac{dp_2}{dh}=\frac{1}{3!}\frac{d^3f(h)}{dh^3}=\frac{1}{3!}f'''(h).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般ニ　$$p_n=\frac{1}{n}\frac{dp_{n-1}}{dh}=\frac{1}{n!}\frac{d^nf(h)}{dh^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(h).$$

故ニ $p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n \cdots\cdots$ 等ノ値ヲ (1) ニ代入シテ

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n+\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル．

系　x ニ關スル $f(x)$ ノ逐次導函數ガ連續ニシテ且有限ナルトキ $f(x+h)$ ガ h ノ冪級數ニ展開サレルナラバ

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\cdots\cdots\cdots(3)$$

デアル．

[注意]　(2), (3) ハ第二十五章定理 2 例題 3 ニヨリ收斂デアル．

例題 1.　$(x+h)^n$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ．但シ n ハ正ノ整數トスル．

[解]　$f(x+h)=(x+h)^n$ トオクト $f(h)=h^n$

$$f'(h)=nh^{n-1},\quad f''(h)=n(n-1)h^{n-2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(r)}(h)=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)h^{n-r}.$$

而シテ $f(h)$, $f'(h)$, …… 等ハ有限デアルカラ

$$(x+h)^n=h^n+\frac{n}{1}h^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}h^{n-2}x^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}h^{n-r}x^r+\cdots\cdots+\frac{n!}{n!}x^n.$$

例題 2.　$f(x+h)=4(x+h)^3+6(x+h)^2-7(x+h)+4$ ヲ h ノ冪級數ニ展開セヨ．

[解]

$$f(x)=4x^3+6x^2-7x+4.$$
$$f'(x)=12x^2+12x-7.$$
$$f''(x)=24x+12.$$
$$f'''(x)=24.$$

而シテ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …… 等ハ x ノ値如何ニ拘ハラズ有限デアル．

$$\therefore \quad f(x+h)=4x^3+6x^2-7x+4+(12x^2+12x-7)h$$
$$+(24x+12)\frac{h^2}{1\cdot 2}+24\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

例題 3.　$f(x+h)=\log(x+h)$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ．

[解]　$f(h)=\log h,\quad f'(h)=\dfrac{1}{h},\quad f''(h)=\dfrac{-1}{h^2},$

$$f'''(h)=\frac{2!}{h^3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\quad f^{(n)}(h)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{h^n}.$$

而シテ $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, ……, $f^{(n)}(h)$, …… 等ハ $h>0$ ナル値ニ對シテ有限デアル．
故ニ

$$\log(x+h)=\log h+\frac{1}{h}x-\frac{1}{2h^2}x^2+\frac{1}{3h^3}x^3-\frac{1}{4h^4}x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{nh^n}x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナル. 但シ $x+h>0$, $h>0$.

Maclaurin ノ級數 Taylor ノ級數ニ於テ $h=0$ ナルトキハ次ノ展開式ガ得ラレル.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\cdots\cdots(1)$$

コヽニ $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ……, $f^{(n)}(0)$…… ハ勿論有限デアル. 從ツテ (1) ハ勿論收斂デアル. 之ヲ **Maclaurin ノ級數**ト云フ.

Maclaurin ノ級數ハ又次ノ如クシテ得ラレル.

$f(x)$ 及ビ其ノ導函數ハ連續ニシテ且 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, …… 等ハ有限デアルトスル. 今

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トオクト

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f'''(x)=3\cdot2a_3+4\cdot3\cdot2a_4x+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vdots$$

各式ノ兩邊ニ $x=0$ ヲ代入スルト

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad \frac{f''(0)}{2!}=a_2,\quad \frac{f'''(0)}{3!}=a_3,\ \cdots\cdots,\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n,\ \cdots\cdots$$

コレ等ヲ (1) ニ代入シテ

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナル.

例題 1. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ.

[解]

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\qquad f(0)=1.$$
$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad f'(0)=1.$$
$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3},\qquad f''(0)=2!.$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot3}{(1-x)^4},\qquad f'''(0)=3!.$$
$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\qquad f^{(n)}(0)=n!.$$

$$\therefore\quad f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

コヽニ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, …… 等ハ $-1<x<1$ ナルトキ有限デアル. 故ニ上式ノ收斂域ハ $-1<x<1$ デアル.

[注意] $\dfrac{1}{1-x}$ ヲ實際割算ヲ行フト

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1} \\ \hline
1-x & 1 \\
 & \underline{1-x} \\
 & x \\
 & \underline{x-x^2} \\
 & x^2 \\
 & \underline{x^2-x^3} \\
 & x^3 \\
 & \underline{x^3-x^4} \\
 & x^4 \\
 & \cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots \\
 & \underline{\cdots\cdots} \\
 & x^n
\end{array}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$$

トナル. 之ト

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}+x^n+x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ト比較スルト

$$\frac{x^n}{1-x}=x^n+x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナル. 即チ剩餘 $\dfrac{x^n}{1-x}$ ハ第 $(n+1)$ 項カラ無限項マデノ和デアル.

定義 函數 $f(x+h)$, $f(x)$ ヲ x ノ冪級數ニ展開シタトキ, 其ノ第 $(n+1)$ 項カラ無限項マデノ總和ヲ第 n 項マデ展開シタトキノ剩餘ト云フ.

第二十八章　展開ニ於ケル剩餘

Taylor ノ展開ニ於ケル剩餘　x ノ或變域ニ於テ $f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ガ連續ニシテ，且其ノ變域ニ於ケル二ツノ値ヲ a, b トスルトキ，即チ $b=a+h$ トスルトキ

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \qquad 0<\theta<1$$

ナルコトハ，平均値ノ定理ニ於テ旣ニ述ベタ．此ノ式ニ於テ a ノ代リニ h，h ノ代リニ x トオクト

$$f(x+h)=f(h)+xf'(h+\theta x) \qquad 0<\theta<1$$

トナル．然ルニ Taylor ノ級數ハ

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

デアルカラ，Taylor ノ級數ニ於ケル第二項以下ノ剩餘ハ

$$xf'(h+\theta x)$$

デアル．即チ

$$xf'(h+\theta x)=\frac{f'(h)}{1}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

トナル．同様ニシテ平均値ノ定理ヲ用ヒテ Taylor ノ級數ノ第三項以下ノ剩餘ハ

$$\frac{x^2}{2!}f''(h+\theta_1 x) \qquad 0<\theta_1<1$$

ナルコトガ證明セラレル．從ツテ又第 n 項以下ノ剩餘ガ

$$\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(h+\theta_n x)$$

ナルコトガ類推セラレル．コヽニ θ_1，θ_2，θ_3，……θ_n ハ何レモ一般ニ異ナルモ 0 ヨリ大ニシテ 1 ヨリ小デアル．

定理　Taylor 級數ノ第 n 項以下ノ剩餘ハ

$$\frac{x^n}{n}f^{(n)}(h+\theta x) \qquad 0<\theta<1$$

デアル．之ヲ Lagrange ノ定理又ハ Lagrange ノ剩餘形式ト云フ．

［證明］ Taylor ノ級數

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\frac{f'''(h)}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}x^n+\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ第 n 項以下ノ剩餘ヲ R_n デ表ハシ x ヲ $x-h$ ニ變ズルト，

$$f(x)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}(x-h)+\frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2+\frac{f'''(h)}{3!}(x-h)^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}(x-h)^{n-1}+R_n\cdots\cdots(2)$$

トナル．コヽニ $f(h)$，$f'(h)$，……，$f^{(n)}(h)$，…… ハ x ト h トノ間ノスベテノ値ニ對シテ有限デアル．然ルトキハ

$$R_n=\frac{f^{(n)}(h)}{n!}(x-h)^n+\frac{f^{(n+1)}(h)}{(n+1)!}(x-h)^{n+1}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{(x-h)^n}{n!}\left\{f^{(n)}(h)+\frac{f^{(n+1)}(h)}{(n+1)}(x-h)+\cdots\cdots\right\}$$

デアルベキコトカラ R_n ハ

$$R_n=\frac{(x-h)^n}{n!}p$$

ナル形ニ書クコトガ出來ル．但シ p ハ x ト h トヲ含ム式デアル．

從ツテ (2) 式ヨリ

$$f(x)-\left\{f(h)+\frac{f'(h)}{1}(x-h)+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}(x-h)^{n-1}+\frac{(x-h)^n}{n!}p\right\}=0\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ル．(3) 式ノ左邊ニ於テ p ノ外各項ノ h ノ代リニ z ヲ代入シタ式ヲ $F(z)$ トスルト

$$F(z)=f(x)-\left\{f(z)+\frac{f'(z)}{1}(x-z)+\cdots\cdots+\frac{(x-z)^n}{n!}p\right\}\cdots\cdots(4)$$

トナル．コヽニ p ハ前ト同ジ値ヲ有シ，且 z ヲ含マナイカラ $\frac{dp}{dz}=0$ デアル．

(4) 式ノ右邊ハ $z=h$ ノトキ 0 トナル．即チ

$$F(h)=0.$$

又 (3) 式カラ $z=x$ ノトキモ (4) 式ノ右邊ハ 0 トナル．即チ

$$F(x)=0.$$

故ニ函數 $F(z)$ ハ $z=h$，$z=x$ ノトキ 0 トナルカラ Rolle ノ定理ニヨリ其ノ第一次導函數 $F'(z)$ ハ h ト x ノ間ノ z ノ或値ニ對シテ 0 トナル．然ルニ一方 $F'(z)$ ヲ考ヘルト (4) 式ノ右邊ヲ z デ微分スルト

$$F'(z)=-\Big\{f'(z)-f'(z)+(x-z)f''(z)-(x-z)f''(z)+\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}-\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}p\Big\}$$

トナル．故＝

$$F'(z_1)=-\frac{f^{(n)}(z_1)}{(n-1)!}(x-z_1)^{n-1}+\frac{(x-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}p=0$$

ナル z_1 ガ h ト x トノ間＝存在スル．從ツテ其ノ z_1 ＝對シテ

$$f^{(n)}(z_1)=p$$

トナル．今 $0<\theta<1$ ナル θ ヲトルトキハ h ト x トノ間ノ z_1 ハ

$$z_1=h+\theta(x-h)$$

デ表ハサル．從ツテ

$$p=f^{(n)}\{h+\theta(x-h)\}.$$

故＝ Taylor ノ級數ノ第 n 項ノ後ノ剩餘ハ

$$R_n=\frac{f^{(n)}\{h+\theta(x-h)\}}{n!}(x-h)^n$$

デ表ハサレル．是卽チ Lagrange ノ剩餘形式デアル．今後之ヲ R_n^1 デ表ハス．此ノ R_n^1 ヲ (2) 式＝代入スルト

$$f(x)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}(x-h)+\frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}(x-h)^{n-1} + \frac{f^{(n)}\{h+\theta(x-h)\}}{n!}(x-h)^n \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

トナル．或ハ $x-h$ ノ代リ＝ x ヲ代入スルト x ハ $x+h$ トナルカラ

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots\cdots + \frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(h+\theta x)}{n!}x^n\cdots\cdots\cdots(6)$$

トナル．是求メル第 $(n+1)$ 項マデノ展開式デアル．

コノ結果＝於テ $n=1$ トオクト

$$f(x+h)=f(h)+f'(h+\theta_1 x)x.$$

$n=2$ トオクト

$$f(x+h)=f(h)+f'(h)x+\frac{f''(h+\theta_2 x)}{2!}x^2.$$

コヽ＝ θ_1, θ_2 ハ旣＝述ベタ如ク一般＝異ナル．而シテ何レモ 0 ヨリ大＝シテ 1 ヨリ小デアル．且函數ノ形＝ヨリ其ノ値ハ定ル．

Taylor 級數ニ於ケル Cauchy ノ剩餘形式 Taylor ノ級數＝於ケル第 n 項以下ノ剩餘ハ又次ノ如ク書キ表ハサレル．

$$R_n=\frac{f^{(n)}(h+\theta x)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n.$$

之ヲ Cauchy ノ剩餘形式ト云フ．

［證明］ R_n ヲ $(x-h)p_1$ デ書キ表ハスト第 5 式ヨリ

$$f(x)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}(x-h)+\frac{f''(h)}{2!}(x-h)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}(x-h)^{n-1} + (x-h)p_1\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

トナル．(7) ＝於テ p_1 ノ外各項ノ h ノ代リ＝ z ヲ代入シテ前ト全ク同様ナ手續ヲ施スト

$$F'(z)=-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}+p_1=0$$

トナル．而シテ $F'(z)$ ハ h ト x トノ間ノ z ノ或値＝對シテ 0 トナル．今其ノ値ヲ $h+\theta(x-h)$ デ表ハスト

$$(x-z)^{n-1}=\Big[x-\{h+\theta(x-h)\}\Big]^{n-1}=(x-h)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}$$

デアルカラ

$$p_1=\frac{f^{(n)}\{h+\theta(x-h)\}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-h)^{n-1}$$

トナル．コヽ＝ $0<\theta<1$ デアル．$x-h$ ＝ x ヲ代入スルト (7) 式ハ

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(h+\theta x)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n$$

トナル．從ツテ

$$R_n=\frac{f^{(n)}(h+\theta x)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n$$

トナル．是卽チ Cauchy ノ剩餘形式＝シテ今後之ヲ R_n^2 デ表ハス．

定義 **Taylor ノ級數ニ於テ第 n 項ノ後ノ剩餘ヲ R_n^1 デ表ハシ之ヲ代入シタモノヲ Taylor ノ定理ト云フ．**

Taylor ノ定理

$$f(x+h)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}x+\frac{f''(h)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$$

＝於テ $x+h=z$, $x=z-h$ トオクト

$$f(z)=f(h)+\frac{f'(h)}{1!}(z-h)+\frac{f''(h)}{2!}(z-h)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}(z-h)^{n-1}+R_n$$

トナル．之ハ又 Taylor ノ定理ノ他ノ形式デアル．

Maclaurin ノ級數ニ於ケル剰餘

Taylor ノ定理ニ於テ $h=0$ トオクト

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

トナル. 之ヲ Maclaurin ノ定理ト云フ. 而シテ n 項ノ後ノ Lagrange ノ剰餘形式ハ

$$R_n^1=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \qquad 0<\theta<1$$

デ表ハサレル. コノ剰餘ハ n ガ無限大トナルトキ $f^{(n)}(x)$ ガ有限デアル限リ 0 トナルコトハ次ノ頁ノ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x\log a)^n}{n!}\to 0$ ト同様ニ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ ナルコトガ證明出來ルカラデアル. 以上ノ結果函數ヲ展開スルニハ次ノ如クスレバヨイ.

或函數ヲ展開スルニハ其ノ函數ノ逐次導函數ヲ求メ, 次ニ其ノ收斂域ヲ定メ, 然ル後剰餘 R_n^1 ノ極限値ガ零ナルコトヲ證明スル.

例題 1. $f(x)=x^3-2x^2+5x-7$ ヲ $(x-1)$ ノ冪ニ展開セヨ.

[解]

$$\begin{aligned} &f(x)=x^3-2x^2+5x-7, &&\therefore\ f(1)=-3.\\ &f'(x)=3x^2-4x+5, &&\therefore\ f'(1)=4.\\ &f''(x)=6x-4, &&\therefore\ f''(1)=2.\\ &f'''(x)=6, &&\therefore\ f'''(1)=6.\end{aligned}$$

故ニ Taylor ノ定理ニヨリ

$$\begin{aligned} f(x)&=-3+\frac{4}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3\\ &=-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3.\end{aligned}$$

例題 2. $f(x)=5x^4+6x^3-17x^2+18x-20$ ヲ $x+4$ ノ冪ニ展開セヨ.

[解]

$$\begin{aligned} &f(x)=5x^4+6x^3-17x^2+18x-20, &&\therefore\ f(-4)=532.\\ &f'(x)=20x^3+18x^2-34x+18, &&\therefore\ f'(-4)=-838.\\ &f''(x)=60x^2+36x-34, &&\therefore\ f''(-4)=782.\\ &f'''(x)=120x+36, &&\therefore\ f'''(-4)=-444.\\ &f^{(4)}(x)=120, &&\therefore\ f^{(4)}(-4)=120.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=532+(-838)(x+4)+\frac{782}{2!}(x+4)^2+\frac{-444}{3!}(x+4)^3+\frac{120}{4!}(x+4)^4\\ &=532-838(x+4)+391(x+4)^2-74(x+4)^3+5(x+4)^4.\end{aligned}$$

第二十九章　初等函數ノ展開

指數函數ノ展開

$f(x)=a^x$ トオクト

$$\begin{aligned} &f(x)=a^x, &&\therefore\ f(0)=1.\\ &f'(x)=a^x\log a, &&f'(0)=\log a.\\ &f''(x)=a^x(\log a)^2, &&f''(0)=(\log a)^2.\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, &&\cdots\cdots\cdots\cdots.\\ &f^{(n)}(x)=a^x(\log a)^n, &&f^{(n)}(0)=(\log a)^n.\end{aligned}$$

故ニ Maclaurin ノ定理ニヨリ

$$a^x=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(x\log a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n^1 \quad\cdots\cdots(1).$$

ココニ

$$R_n^1=\frac{(x\log a)^n}{n!}a^{\theta x}. \qquad 0<\theta<1.$$

$\left|\frac{(x\log a)^n}{n!}\right|=\left|\frac{x\log a}{1}\right|\cdot\left|\frac{x\log a}{2}\right|\cdots\cdots\left|\frac{x\log a}{n}\right|$ ナル故 n ヲ十分大キクトレバ $\left|\frac{x\log a}{n}\right|<1$ トナル. 其ノ後 n ガ大ナルニ従ツテ $\left|\frac{(x\log a)^n}{n!}\right|$ ハマスマス小トナルガ負トナルコトハナイ. 故ニ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x\log a)^n}{n!}\right|=N$ ナル有限値 N ガ存在スル.

然ルニ $N=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x\log a)^n}{n!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x\log a)^{n-1}}{(n-1)!}\right|\cdot\left|\frac{x\log a}{n}\right|=N\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x\log a}{n}\right|=0,$

且 $a^{\theta x}$ ハ有限ナル故 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n^1=0$ デアルカラ次ノ無限級數ヲ得ル.

$$a^x=1+\frac{x\log a}{1}+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(x\log a)^n}{n!}+\cdots\cdots$$

此ノ展開式ハ x ノスベテノ有限値ニツイテ成立スル.

(1) 式ノ a ノ代リニ e ヲ代入スルト

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

$$\therefore\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

此ノ展開式モ亦スベテノ x ノ有限値ニツイテ成立スル. $x=1$ ナルトキハ

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

トナル. コノ式カラ自然對數ノ底 e ノ値ヲ計算スルコトガ出來ル. 其ノ値ハ次ノ如クナル.

$$e=2.718281828459\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例題 1. 次ノ式ヲ證明セヨ.

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}<e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}.$$

[證明] $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}<e$ ナルコトハ e ノ式ヨリ明デアル. 今

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}$$

トオキ, $n=1$ トスルト

$$S_1=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1!}=3.\qquad S_2=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!2}=2.75.$$

一般ニ $$S_n-S_{n+1}=\frac{1}{n!n}-\left\{\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{n!}\left\{\frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{n(n+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n!n(n+1)^2}>0.$$

$\therefore$ $$3\geqq S_1>S_2>\cdots\cdots\cdots\cdots>S_n>S_{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

而シテ

$$\lim_{n\to\infty}S_n=e$$

$$\therefore\ 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}<e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}\frac{1}{n}.$$

例題 2. e^x ヲ $x-2$ ノ冪ニ展開セヨ.

[解] $$f(x)=e^x,\qquad f'(x)=f''(x)=\cdots\cdots\cdots\cdots=f^{(n)}(x)=\cdots\cdots\cdots\cdots=e^x.$$
$$f(2)=e^2.\qquad f'(2)=e^2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,f^{(n)}.(2)=e^2.$$

$$\therefore\ f(x)=e^2+\frac{e^2}{1!}(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{e^2}{(n-1)!}(x-2)^{n-1}+R_n^1.$$

$$R_n^1=\frac{(x-2)^n}{n!}e^{2+\theta(x-2)},\qquad 0<\theta<1.$$

然ルニ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}=0.$ 又 $e^{2+\theta(x-2)}$ ハ有限デアル.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}R_n^1=0.$$

$$\therefore\ e^x=e^2\left\{1+(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{(x-2)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\right\}.$$

正弦及ビ餘弦ノ展開 $f(x)=\sin x$ トオクト

$$f(x)=\sin x.\qquad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

故ニ $$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{(4)}(0)=0,$$
$$f^{(n)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad 0<\theta<1.$$

之ニヨリ高次ノ微係數ノ値ハ 1, 0, -1, 0 ノ四ツノ値ヲ循環的ニトル. 故ニ Maclaurin ノ定理ニヨリ

$$f(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n^1.$$

コヽニ $$R_n^1=\frac{x^{2n}}{2n!}\sin\left(\theta x+2n\frac{\pi}{2}\right),\qquad 0<\theta<1.$$

$f^{(n)}(\theta x)$ ハ有限ナル故 $\lim\limits_{x\to\infty}R_n^1=0$ デアルカラ次ノ無限級數ヲ得ル.

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\cdots\cdots(1).$$

此ノ展開式ハ x ノスベテノ有限値ニツイテ成立スル. 同樣ニシテ x ノスベテノ有限値ニツイテ次ノ展開式モ成立スル.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

コヽニ

$$R_n^1=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left\{\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}.$$

例題 1. $\sin^2x$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ.

[解] $$f(x)=\sin^2x,\quad f'(x)=2\cos x\sin x=\sin 2x.$$
$$\therefore\ f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$
$$\therefore\ f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=2,\quad f'''(0)=0,\quad f^{(4)}(0)=-2^3.$$
$$f^{(n)}(0)=2^{n-1}\sin\frac{n-1}{2}\pi.$$

$$\therefore\ f(x)=\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\cdots\cdots+\frac{2^{n-2}\sin\frac{n-2}{2}\pi}{(n-1)!}x^{n-1}+\mathrm{R}_n^1.$$

$$\mathrm{R}_n^1=\frac{x^n 2^{n-1}}{n!}\sin\left(2\theta x+\frac{n-1}{2}\pi\right)=\frac{(2x)^n}{2\cdot n!}\sin\left(2\theta x+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$

x ガ有限ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{R}_n^1=0$ ナルコトハ明デアル.

$$\therefore\ \sin^2 x=x^2-\frac{2}{3!}x^4+\frac{32}{6!}x^6-\cdots\cdots.$$

例題 3. $\sin^3 x$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ.

〔解〕

$$f(x)=\sin^3 x=\frac{1}{4}\{3\sin x-\sin 3x\}.$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

$$f''(x)=\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)-3^2\sin\left(3x+\frac{2\pi}{2}\right)\right\}.$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-3^3\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}.$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

$$\therefore\ f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=\frac{1}{4}(3^3-3).$$

$$f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^{n+1}\frac{1}{4}(3^{2n+1}-3).$$

$$\therefore\ f(x)=\sin^3 x=\frac{1}{4}\left\{\frac{3^3-3}{3!}x^3-\frac{3^5-3}{5!}x^5+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right\}+\mathrm{R}_{2n+2}^1.$$

$$\mathrm{R}_{2n+2}^1=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{1}{4}\left\{3\sin\left(\theta x+\frac{2n+2}{2}\pi\right)-3^{2n+2}\sin\left(3\theta x+\frac{2n+2}{2}\pi\right)\right\}.$$

$$\therefore\ |\mathrm{R}_{2n+2}^1|\leqq\frac{3}{4}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin\left(\theta x+\frac{2n+2}{2}\pi\right)\right|+\frac{1}{4}\left|\frac{(3x)^{2n+2}}{(2n+2)!}\sin\left(3\theta x+\frac{2n+2}{2}\pi\right)\right|.$$

而シテ x ガ有限デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_{2n+2}^1=0.$$

$$\therefore\ \sin^3 x=\frac{1}{4}\left\{\frac{3^3-3}{3!}x^3-\frac{3^5-3}{5!}x^5+\frac{3^7-3}{7!}x^7-\cdots\cdots\right\}$$

例題 4. $\sin x$ ヲ $x-\alpha$ ノ冪ニ展開セヨ.

〔解〕 $f(x)=\sin x,\qquad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

$$\therefore\ f(\alpha)=\sin\alpha,\qquad f^{(n)}(\alpha)=\sin\left(\alpha+\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$\therefore\ \sin x=\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)(x-\alpha)+\frac{\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{2}\right)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\pi\right)}{(n-1)!}(x-\alpha)^{n-1}+\mathrm{R}_n^1.$$

$$\mathrm{R}_n^1=\frac{(x-\alpha)^n}{n!}\sin\left\{\alpha+\theta(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}\right\}.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{R}_n^1=0.$$

$$\therefore\ \sin x=\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)(x-\alpha)+\frac{\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{2}\right)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-\alpha)^n+\cdots\cdots.$$

對數函數ノ展開 $f(x)=\log(1+x)$ トスルト

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots.$$

故ニ $f(0)=0,\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\quad n=1,2,\cdots\cdots$

トナル. 從ツテ Maclaurin ノ定理ニヨリ

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+\mathrm{R}_n$$

トナル. コヽニ

$$\mathrm{R}_n^1=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^n},\qquad 0<\theta<1,$$

$$\mathrm{R}_n^2=(-1)^{n-1}\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n},\qquad 0<\theta<1$$

デアル. 今 R_n^1 ニツイテ考ヘルト $0\leqq x\leqq 1$ ナルトキ

$$0\leqq\frac{x}{1+\theta x}<1$$

デアルカラ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{R}_n^1=0$ ナルコトハ明デアル.

又 R_n^2 ニツイテ考ヘルト $-1<x<0$ ナルトキハ $x=-z$ トオクト

$$0<z<1, \qquad 0<1-\theta<1-\theta z$$

デアルカラ

$$|R_n^2|=\frac{(1-\theta)^{n-1}z^n}{(1-\theta z)^n}<\frac{z^n}{1-\theta z}.$$

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty} R_n^2=0$$

トナル．是等ノ二ツノ場合カラ $-1<x\leqq 1$ ナルトキニハ常ニ剩餘ノ極限値ガ 0 トナル．又 $x>1$ 及ビ $x\leqq -1$ ナル場合ニハ一般項ガ $(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ デアルカラ發散スルコトハ既ニ擧ンダ．故ニ $-1<x\leqq 1$, 卽チ $0<1+x\leqq 2$ ナルトキニ限リ

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル．此ノ展開式ニテハ 2 ヨリ大ナル正數ノ對數ヲ計算スルコトガ出來ナイカラ更ニ大ナル數ノ對數ヲ求メルニハ次ノ如クスル．

(1) 式ニ x ノ代リニ $-x$ ヲ代入スルト

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル．故ニ (1)−(2) ヨリ次ノ式ヲ得ル．

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

今 $\dfrac{1+x}{1-x}=a$ トオクト $x=\dfrac{a-1}{a+1}$ トナル．

從ツテ (3) ハ次ノ如クナル．

$$\log a=2\left\{\frac{a-1}{a+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n-1}+\cdots\cdots\right\}\cdots(4).$$

(3) ノ收斂域ハ (1) ノ $-1<x\leqq 1$ ト (2) ノ收斂域 $-1\leqq x<1$ トヨリ $-1<x<1$ デアルカラ (4) ヲ收斂ナラシメル a ノ値ハ

$$-1<\frac{a-1}{a+1}<1. \qquad \therefore \quad a>0$$

トナル．卽チ (4) 式ヲ用ヒルト $a>0$ ナル任意ノ數ノ對數ヲ計算スルコトガ出來ル．但シコヽニ得ルモノハ自然對數デアルカラ若シ常用對數ヲ求メントスレバ次ノ公式ヲ用ヒル．

$$\log_{10}x=\frac{\log x}{\log 10}=\frac{\log x}{2.3025850}.$$

例題 1. $\log_e 10$ ヲ計算セヨ．

〔解〕 $$\log a=2\left\{\frac{a-1}{a+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n-1}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

ニ於テ $a=2$, $a=5$ ヲ代入スルト

$$\log 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\right\}=0.6931471\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log 5=2\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\right\}=1.6094379\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \log 10=\log 2+\log 5=2.3025850.$$

例題 2. $\log(x+h)$ ヲ x ノ冪級數ニ展開セヨ．但シ $h>0$, $|x|<h$.

〔解〕 $$f(x)=\log(x+h), \qquad f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+h)^n}.$$

$$\therefore \quad f(0)=\log h, \qquad f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{h^n}.$$

故ニ Maclaurin ノ定理ニヨリ

$$f(x)=\log(x+h)=\log h+\frac{1}{h}x-\frac{1}{h^2}\frac{x^2}{2!}+\frac{2!}{h^3}\frac{x^3}{3!}-\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{h^{n-1}}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n.$$

コヽニ

$$R_n^1=\frac{x^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!(\theta x+h)^n}=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(\theta x+h)^n}.$$

$$R_n^2=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+h)^n}=\frac{(-1)^{n-1}x^n(1-\theta)^{n-1}}{(\theta x+h)^n}.$$

$\therefore$ $0<x<h$ ナルトキハ R_n^1 ヨリ

$$|R_n|=\frac{1}{n\left(\theta+\dfrac{h}{x}\right)^n}. \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}|R_n|=0.$$

又 $0>x>-h$ ナルトキハ $x=-z$ トオクト $0<z<h$ デアルカラ R_n^2 ヨリ

$$|R_n|=\frac{z^n(1-\theta)^{n-1}}{(h-\theta z)^n}=\left(\frac{z}{h}\right)^n\cdot\left(\frac{1-\theta}{1-\theta\dfrac{z}{h}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{1-\theta\dfrac{z}{h}}.$$