# 初中會攷升學指導

## 第 1 集

## 初中算學複習

南京書店發行

# 初中會攷升學指導

第一集　算學之部

## 初中算學複習

編者　李修睦　張伯康　黃祖瑜

南京書店出版

# 初中會攷升學指導

（全部共六集）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 第一集 | 初中算學複習 | 第四集 | 初中自然常識 |
| 第二集 | 英文分類詳解 | 第五集 | 中外史地問答 |
| 第三集 | 國文常識問答 | 第六集 | 黨義測驗問答 |


主編人　馮順伯

編著者　李修睦　張伯康　黃祖瑜

程豫生　施肯丞　王敏時

朱　濬　陳重寅　程柳南

薛如仲　楊雋秋　江菊入

章柳泉　蔣子奇　袁韭伯

林　杞

校閱者　余介石　張季信　李清悚

胡叔異　林子碩



南京書店出版

# 編輯大意

1.本書係專為初中畢業生升學者預備而作，故其內容悉依教部最近頒布之初中課程標準而編輯。惟我國普通中學所用之課本各有不同，而程度亦復有深淺之別，故材料方面頗多增加，如幾何中共點，共線及共圓諸問題亦述及之。

2.代數中之不等式，普通教科書均不載及，惟教部課程標準將其列入，故亦略加敘述。至於圖解及不定方程式，查各處試題，均鮮及此，茲為節省篇幅計故從略。

3.在初等代數中以因數分解，二次方程式之解法及其根之討論等問題為最重要，故特詳加敘述。至若聯立二次方程式及高次方程式之可化歸二次方程式者較為複雜，初學者多

不易領會，故亦詳舉例以明之。希讀者細心玩味！

4. 幾何部份之編輯係將定理，因其致用而分類，在系統方面雖與普通教科書迥異，但爲便於預備考試計，不得不如是也。

5. 本書中各定理及法則之證明，完全略去，以省篇幅，讀者應於普通教科書中求之，以資溫習。因解題要訣，首在明瞭定理及定則，方可運用裕如。

6. 幾何中之作圖題及軌跡，初學者多視爲畏途，而普通教科書中又語焉不詳。故本書對其定義及解法均略加敍述，以補不逮。但因教部課程標準規定初中不必多授作圖題及軌跡，兼之篇幅有限，故不克詳及，讀者諒之。

7. 三角學，初中多略去不教，且照教部規定，亦僅須授教値三角大意，故本書敍述從簡。至於算術，則所難者不過整數雜題與分數雜題而已。其他次要者則爲節省篇幅計概行删去。

8. 本書倉卒付梓，而編者復才疏學淺，疵瑕之處，在所不免。尙希讀者有以教之！

編者識　二十二年三月

# 序

算學一科，爲各種科學之基礎，如探鎖之鑰，如入室之階，盡人而知，然繁賾奧妙，非熟練精研，不易了解，初中算學課程，又爲算學初基，善治者愼終於始，不但於尋常應用，有六轡在手之樂；卽進求深造，亦可拾級而登。但初中學生，課事紛繁，又苦演習艱澀，除少數天才者外，往往涉獵一過，未得要領，已及畢業之期，不但爲升學進修之大礙，卽社會尋常問題，亦難期應付裕如，殊足深慨。本書作者，針砭時病，特著是編，備初中學生，一面作詳明切實之複習，一面供涉奧探賾之指導，學者得此，如對良師益友，於應用升學兩方，必無歧路徬徨之感矣。校訂訖，欣誌數言。

余介石識

時次中央大學

# 初中算學複習目錄

## 算術之部

## 代數之部

# 幾何之部



# 數值三角之部

# 初中算學複習

## 算術之部

### 第一章　整數分類雜題

I.　和差問題

【公式】

(1) 大數$=\dfrac{和+差}{2}$

(2) 少數$=\dfrac{和-差}{2}$

【例題】

有二數，其和為55，其差為5，求二數

〔解〕若於二數之和中，加上二數之差，所得結果，即

大數之二倍。

故得

$$大數=\frac{55+5}{2}=\frac{60}{2}=30.$$

$$小數=55-30=25.$$

2. 甲乙二數，甲之五倍與乙之三倍之和，爲66，甲之三倍，與乙之五倍之和爲62，求甲乙二數各幾何？

（解）甲三倍乙五倍之和，及甲五倍乙三倍之和，其總和

$$66+62=128$$

爲甲八倍乙八倍之和。故甲乙之和爲

$$128\div 8=16.$$

又甲五倍，乙三倍之和，及甲三倍乙五倍之和，其差

$$66-62=4$$

爲甲乙之差之二倍，故甲乙之差爲

$$4\div 2=2.$$

故按公式卽得

$$甲數=\frac{16+2}{2}=9.$$

$$乙數=\frac{16-2}{2}=7.$$

3. 甲乙二人，自同地同時出發，若相反而行，則5分鐘後，相隔85步，若同向而行，則3分鐘後相隔15步，問甲，

乙每分速度。

（解）　甲乙每分速度和＝85÷5＝17

甲乙每分速度差＝15÷3＝5

∴　甲每分之速度　＝(17＋5)÷2＝11步。

乙每分之速度　＝(17－5)÷2＝6步。

4.　在複線鐵道上，長168尺之急行車，與長210尺之普通車，相向而行，6秒分離，若同向而行，則42秒分離，問二車每秒速度。

（答）　急行車每秒36尺，普通車每秒27尺。

II.　連續數問題

【公式】　(1)最大數＝(和＋1＋2＋…＋p)÷(p＋1)

(2)最小數＝(和－1－2－…－p)÷(p＋1)

【例題】

1.　有偶數連續數5個，其和爲50，求各數。

（解）　在此，每兩個連續數之差爲2，故

最大數＝(50＋2＋4＋6＋8)÷5＝70÷5＝14.

∴　第二數＝14－2＝12，　第三數＝12－2＝10.

第四數＝10－2＝8，　第五數＝8－2＝6.

2.　有奇連續數7個，其和爲63，求中間一數

（解）　按公式，

最小數$=(63-2-4-6-8-10-12)\div 7$

$=21\div 7=3.$

故中間數$=3+2+2+2=9.$

（別解）　中間數$=(63-2-4-6+2+4+6)\div 7$

$=63\div 7=9.$

3.　六個連續數之和爲39。求此六數。

（答）4,5,6,7,8,9.

III.　追及問題

【公式】　時間＝距離差÷速度差。

【例題】

1.　甲乙二人，每日之速度，甲7.5里，乙6里，今甲在乙行二日後出發，問甲須行幾里，始能追及乙？

（解）　甲乙每日之速度$=7.5-6=1.5$里。

二日後甲乙相距$=6\times 2=12$里。

∴　甲追及乙所需之時間$=12\div 1.5=8$日。

∴　甲追及乙所行之路程$=7.5\times 8=60$里。

2.　蝸牛爬行於高25尺之樹上，晝升5尺，夜降2尺，問幾日始可爬至樹梢？

（解）　晝升5尺，夜降2尺，故一晝夜間，蝸牛上升尺數爲　5尺$-$2尺$=$3尺

倘最後一日，果能達到樹梢，蝸牛實無須再行下降。今以3除25，剩餘4。4小於5，而大於2，故7日後共行

$$7\times3=21\text{尺},$$

剩餘4尺，一日卽能爬上，故欲求日數爲

$$7+1=8\text{日}。$$

3. 甲乙二船，自同地同時出發，甲船每時30里，乙船每時20里，十小時後，甲船因事折回，問乙船開行幾時後追及甲船。

（解） 甲乙二船每小時之速度爲

$$30-20=10\text{里}。$$

故十小時後，二船相距 $10\times10=100$里。

今甲船因事折回，則甲船被乙船追及之時間應爲

$$10+100\div(30+20)=10+2=12\text{時}。$$

IV. 植竿問題

【公式】竿數＝距離÷間隔＋1

【例題】

1. 南京之中山路，共長40里，今欲于路之兩側，栽植梧桐，若每棵間之距離爲1丈，問共須梧桐幾株？

（解） $40\times180\div1+1=7201$株。

故兩側合共 $7201\times2=14402$。

2. 某月三日爲日曜日，問此月內，共有幾度日曜日，並求最後之日曜日爲何日？

（解） 設此月爲大月，則三日後，尚有28日，在28日內

共日曜日數爲 $28\div7=4$度。

故大月之日曜日數共爲 $4+1=5$度。

設此月爲小月，則此小月之日數爲30日或28日，除去 3日尚27日或25日，故在若干日內，日曜日數爲

$27\div7=3$度餘6日

或 $25\div7=3$度餘4日

故小月內日曜日數共爲 $3+1=4$度。

按上之計算，吾人易知大月之最後日曜日爲三十一日，小月之最後日曜日爲二十四日。

3. 某池周圍共長51鏈8碼，今每隔2碼，植柳一株，問需柳若干株？

（解） 51鏈8碼＝1130碼，故植柳株數爲

1130碼÷2＝565株。

（注意） 此處於計算除法後，不再加一者。因兩端兩株，今合併而爲一株也。

## V. 數目問題

【例題】

1. 某數加上11，以3除之，加22，其結果之二倍爲100求某數。

（解）凡此等題，皆須反題之次序，向逆推之。

$100\div2=50$

$50-22=28$

$28\times3=84$

$84-11=73.$

即某數爲73。

2. 某數之3倍加18，與該數之5倍減24，試求該數。

（解）該數之5倍減24等於該數之3倍加18，故 $18+24$ 應爲該數之2倍，故得

某數 $=(24+18)\div(5-3)=42\div2=21$。

3. 三位數的數字和爲13，其十位數爲1，又原數加396，則成轉位數，試求此數。

（解）在此，當該數加396後，百位數，應加4．而原數百位數與個位數之和爲 $13-1=12$，但百位數加4後，即與個位數相等，故知個位數與百位數之和爲12，差爲4，按和差問題，即得

個位數 $=(12+4)\div2=8$

百位數 $=(12-4)\div2=4$

故知原數爲418。

VI. 年齡問題

【公式】 (1) 若干年後$=\dfrac{\text{大數}-\text{小數}\times\text{倍數}}{\text{倍數}-1}$

(2) 若干年前$=\dfrac{\text{小數}\times\text{倍數}-\text{大數}}{\text{倍數}-1}$

【例題】

1. 父年50，子年14，問自今幾年後，父年爲子年之3倍。

(解) 按公式得

$(50-14\times3)\div(3-1)=8\div2=4$年後。

(別解) 父子年齡之差爲$50-14=36$歲，當父年爲子年三倍時，父子年齡之差仍爲36歲，而彼時父年較子年大2倍，故36應爲此時子年之2倍，故此時子年得

$36\div2=18$歲。

但其子之現年爲14歲，故得

$18-14=4$年後。

2. 某人現年90歲，其二孫之年齡，一爲21歲，一爲19，問祖父之年齡，爲其二孫年齡和之三倍，當在幾年前？

(解) 二孫年齡和之3倍爲$(19+21)\times3=120$，與其祖父

年齡之差爲30。故每上數一年，祖父之年齡減1，

而二孫年齡和之3倍應減6，故得

$\frac{120-90}{6-1}=30\div5=6$。卽六年前。

3. 哥哥年齡，較弟弟大28歲，自今10年後，哥哥年齡，恰是弟弟之3倍，問兄，弟現年各爲幾何？

（解）十年後兄弟年齡之差，仍爲28，而彼時哥哥年齡，較弟弟多2倍，故28歲應爲十年後弟弟年齡之2倍，故十年後弟弟年齡應爲

$28\div(3-1)=28\div2=14$，

$14-10=4$歲，弟弟現年，

$4+28=32$歲，哥哥現年，

VII. 盈差問題

【公式】人數＝(盈＋差)÷個數差。

【例題】

1. 兵卒若干人，共乘小舟若干艘，若每舟25人，則餘50人。今人增100，而每舟35人，則其中一艘全空，一艘僅載20人。問小舟若干艘，兵卒若干人？

（解）增加一百人，尙空一舟，而另一舟僅載20。故每舟35人，應不足　$100+35+(35-20)=150$人。

每舟上人數之差爲　$35-25=10$人。

故得船數爲　$(150+50)\div(35-25)=200\div10=20$艘。

人數爲　$25\times20+50=550$人。

2. 分橘子與兒童，其中3人，每人4個，其餘各得3個，尚餘9個，若其中一人得3個，其餘各得5個，恰好分完，求人數與橘數。

（解）若第一次每人3個，則3人中多出3個，故共餘12個。若第二次每人5個，應不足兩個，故

人數$=(12+2)\div(5-3)=14\div2=7$。

橘數$=7\times3+12=21+12=33$。

3. 分桃與兒童，其中二人，各與4枚，其他各與5枚，則餘12枚，若每人6枚，恰能分盡，問童子與桃各若干？

（答）童子10人，　桃60枚。

4. 有人買小麥若干石，若以之買每石價4元9角之大麥，則可多買5石，若以之買每石7元之米，則少7石，問小麥石數及每石之價各若干？

（解）題中所謂多買5石者，卽尚餘$4.9\times5=24.5$元之意，少7石者卽不足$7\times7=49$元之意，故

小麥石數$=(49+24.5)\div(7-4.9)=35$石。

每石之價$=\dfrac{35\times7-7\times7}{35}=\dfrac{245-49}{35}=\dfrac{196}{35}$元

$=5.6$元。

VIII. 龜鶴問題

【公式】 (1)鶴數＝(頭數×4－足數)÷(4－2)

(2)龜數＝(足數－頭數×2)÷(4－2)。

【例題】

1. 龜鶴同處，頭共50，足共164，問龜鶴各若干？

解： 設全數皆爲鶴，則應有足50×4＝200。但原數僅有164，尙差 200－164＝36。今以鶴換龜，每換一次，頭數不變，而足少2，故得鶴數爲

(50×4－164)÷(4－2)＝36÷2＝18鶴數。

50－19＝32龜數。

2. 甲乙二種茶，共50斤，甲種每斤1.25元，乙種每斤0.83元，總價52.84元，問兩種茶各幾斤？

(解) 50×1.25＝62.5元，

62.5－52•84＝9.66元，

1.25元－.83元＝.42元，

故乙種茶共　9.66÷.42＝23斤。

甲種茶共　50－23＝27斤。

12000噸之戰鬬艦與8000噸之巡洋艦合計 10隻，其製造費爲97600000元，但按噸計算，在戰鬥爲1000元，巡洋艦爲800元，問兩軍艦各幾隻。

（答） 戰鬥艦6隻， 巡洋艦4隻。

IX. 水流問題

【公式】 (1) 順流時間$=\dfrac{\text{距離}}{\text{原速}+\text{水速}}$。

(2) 逆流時間$=\dfrac{\text{距離}}{\text{原速}-\text{水速}}$。

【例題】

1. 水程270里，甲舟順流行須18小時，逆流須30小時，乙舟，順流行須15小時，問逆流須幾小時？

（解） 甲順流每時應爲 $270\div18=15$里，逆流應爲

$270\div30=9$里， 故水流速度，每小時應爲

$(15-9)\div2=3$里。

乙順流每時應爲

$270\div15=18$里，故乙逆流每時速度爲

$18-2\times3=12$里，

故得 $270\div12=22.5$時卽22點30分。(乙逆流所需時間)。

2. 甲河水流速度爲乙河的 2倍，舟子在甲河順流行若干里，費時 7時，若在乙河順流行同樣距離，費時10時，已知舟子在靜水中划行速度每時 4里，問二河水流速度，每小時各爲若干里？

（解） 據題意知，舟子在甲河中， 7小時內水流距離，

應與乙河十小時之水流距離，及舟子在靜水中划行三小時之距離之和相等，而甲河水流速度爲乙河之2倍，故得，

乙河水流速度$=4\times3\div(7\times2-10)=12\div4=3$里

甲河水流速度$=3\times2=6$里

3. 沿河南北兩鎮，相隔 360里。甲船從南至北，順流行9日可到，乙船則僅需6日，今乙船自北回南， 9日即到，問甲需若干日？

（答）18日。

X. 方陣問題

【公式】 空心方陣人數＝（最外層人數$)^2-($最外層人數$-2\times$排數$)^2$。

【例題】

1. 軍士若干人，排成 6層之空心方陣，已知其最外層18人，求人數。

（解） 若此方陣爲每邊18人之實心方陣，則人數應爲$18\times18=324$人 。然該方陣實爲空心方陣，故應自324人中減去心中方陣人數。今本題僅有六層，第七層以下卽無人，而第七層每邊之人數爲$18-2\times6=6$人。故心中方陣人數，應爲 $6\times6=$

36人。故得

空心方陣人數$=18^2-(18-2\times6)^2=324-36=288$人。

2. 以兵一隊，列爲方陣，假定每邊若干人，則餘42人，若每邊增2人，則不足118人，問兵士若干？

（解）若於原隊中加上118人，則每邊恰能增加二人，但每邊增加二人時，全隊應加$42+118$人。而新方陣外層人數，應爲

$(42+118+2^2)\div(2\times2)=41$。

故新方陣之總人數應爲　$41^2=1681$。

∴　原隊人數爲　$1681-118=1563$人。

3. 有兵士一隊，共7500人，排成中空方陣，共排25列，問每邊若干人。

（答）100人

# 第二章　整數之性質

## 第一節　公約數

【定則】

(1) 任何數之個位數爲偶數者，必爲2之倍數，反之亦然。

(2) 任何數，其各位數字之和爲3之倍數者，該數亦必爲3之倍數，反之亦然。

(3) 任何數，若能被5除盡，則其末位數必爲0或5。反之亦然。

(4) 任何數，若能被11除盡，則該數隔位相加，其結果相減，必爲11之倍數，反之亦然。

**求最大公約數法**

(1) 求公約數法

【例】 試求 36， 126， 42 之G.C.M.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 36 | 126 | 42 |
| 3 | 18 | 63 | 21 |
| | 6 | 21 | 7 |

∴ G.C.M. = 2×3 = 6。

(2) 展轉相除法

【例】 試求4641，6279，4329三數之最大公約數。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 4329 | 4641 | 1 |
| | 312 | 4329 | |
| | 1209 | 312 | |
| | 936 | 273 | |
| 7 | 273 | 39 | 1 |
| | 273 | | |
| | 0 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 39 | 6679 | 161 |
| 二 | 39 | |
| | 237 | |
| | 234 | |
| | 39 | |
| | 39 | |
| | 0 | |

∴ G.C.M. = 39

【例題】

1.某數除193除4，餘1677又不夠3，問此數爲何

(解)　自193−4　得189.　1677+3=1680.　求1677及189之G.C.M.得

$$\begin{array}{r|ll} 3 & 189 & 1680 \\ \hline 7 & 63 & 560 \\ \hline & 9 & 80 \end{array}$$

故　G.C.M=3×7=21。此卽某數也。

2.　有長589寸，寬399寸，厚361寸的物體，分爲若干體積相同的最大立方體，問此立方每邊長幾寸？

(解)　欲求此立方體每邊之長，應求長，寬，厚之最大公約數。

$$\begin{array}{r|lll} 19 & 589 & 399 & 361 \\ \hline & 31 & 21 & 19 \end{array}$$

故　G.C.M.=19，卽最大立方體，每邊應長19寸。

3.　有四方地，長270丈4尺，寬112丈4尺，今於其周圍栽植楊柳，使其間隔相等，而每角必植一株，問最少需楊柳幾株？

(解)　先求2704及1124之最大公約數，

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 2704 & 1124 \\ \hline 2 & 1352 & 562 \\ \hline & 676 & 281 \end{array}$$

故得 G.C.M.$=2\times2=4$尺，

即每株間之間隔最大4尺，而楊柳之數爲

$$(2704\times2+1124\times2)\div4=1914\text{株}。$$

## 第二節 公倍數

**最小公倍數求法**

(1) 求公約數法

【例】 試求 32, 24, 64 之L.C.M.

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 32 & 24 & 64 \\ \hline
2 & 16 & 12 & 32 \\ \hline
2 & 8 & 6 & 16 \\ \hline
2 & 4 & 3 & 8 \\ \hline
2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
 & 1 & 3 & 2
\end{array}$$

故 L.C.M.$=2^5\times3\times2=192$。

(注意) 求G.C.M.時，必須求得各個數之公約數，而後始可試除求L.C.M.時，諸數中僅有兩個有公約數時，即可以其公約數試除不能除盡者，仍其原形。

(2) 先求最大公約數法

【公式】 $\text{L.C.M.}=\dfrac{\text{第一數}\times\text{第二數}}{\text{G.C.M.}}$

【例】 試求 572，3696之L.C.M.

用展轉除法，先求得572，3696之 G.C.M. 爲44。故該二數之L.C.M.爲

$$3696\times572\div44=3696\times13=48048。$$

【例題】

1. 以52，91，143除某數，恆餘27，某數最小當爲何數？

（解） 先求52， 91， 143之最小公倍數。

$$\begin{array}{r|lll} 13 & 52, & 91, & 143. \\ \hline & 4 & 7 & 11 \end{array}$$

故 G.C.M.$=13\times4\times7\times11=4004$. 故欲求之某數，最小當爲

$$4004+27=4031$$

2. 有48齒之齒輪，與 132齒之齒輪接合，而小輪至少幾次回轉後與大輪接合之齒，將再同樣接合。

（解） 求48與132之L.C.M.得

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 48, & 132 \\ \hline 2 & 24 & 66 \\ \hline 3 & 12 & 33 \\ \hline & 4 & 11 \end{array}$$

故 L.C.M.$=2^2\times3\times4\times11=528$齒。卽二輪各轉528齒後，二輪接合之齒，將再同樣接合。但小輪僅有48齒，故小輪應轉 $528\div48=11$次。

3. 甲，乙，丙三人，繞池而行，甲2時行12周，乙1時行5周，丙 16分一周，若三人同時同地出發，若干時後將再相會。

(解) 甲2時12周，故甲每行一周，費時

$$2\times 60\div 12=10\text{分}。$$

同理，乙每行一周費時　$60\div 5=12$分，

再求10，12，16之 L.C.M.得

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 10, & 12, & 16 \\ \hline 2 & 5 & 6 & 8 \\ \hline & 5 & 3 & 4 \end{array}$$

故L.C.M.$=2^2\times 3\times 4\times 5=240$分。即三人再會時，需時240分即4時，即三人第一次相會，當在4小時以後也。

4. 設有一數，以6除之餘4，以9除之餘7，以14除之餘12，此數最小當爲何數。

(答) 124.

# 第三章　分數及小數

## 第一節　分數四則

【定則】(1)分數相加減時，分母相同，則分子相加減，分母不同，則用通分法，使分母化同，而後加減分子。

(2) 分數相乘時，分子分母各相乘

(3) 分數相除時，顚倒除數之分子分母，被除數不動，而後相乘卽得。

繁分數之計算法　視繁分數中橫線之長短，自短者算起，化簡繁分數之分子分母爲最簡式，而後按除法以分母除分子卽得。

【例題】

(1)試計算　$8+\dfrac{4}{8-\dfrac{7}{2-\dfrac{3}{4}}}-\dfrac{6-\dfrac{3}{2\frac{5}{6}}}{10\frac{2}{7}}$.

(解)　原式 $=8+\dfrac{4}{8-\dfrac{7}{\dfrac{5}{4}}}-\dfrac{6-\dfrac{3}{\dfrac{17}{6}}}{\dfrac{72}{7}}$

$$=8+\frac{4}{8-\dfrac{28}{5}}-\frac{6-\dfrac{18}{17}}{\dfrac{12}{7}}$$

$$=8+\frac{4}{\dfrac{40-28}{5}}-\frac{\dfrac{102-18}{7}}{\dfrac{12}{7}}$$

$$=8+\frac{20}{12}-\frac{84}{17}\times\frac{7}{12}=8+1\frac{2}{3}-\frac{49}{17}$$

$$=9\frac{24}{51}-2\frac{45}{51}=6\frac{40}{51}\text{.}$$

2. 化簡 $\dfrac{3+\dfrac{4}{4-\dfrac{5}{6}}}{2-\dfrac{3}{3+\dfrac{4}{5}}}\div\dfrac{\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{4}}$

（解）原式 $=\dfrac{3+\dfrac{4}{\dfrac{19}{6}}}{2-\dfrac{3}{\dfrac{19}{5}}}\times\dfrac{\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{4}}{\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{4}}$

$$=\frac{3+\dfrac{24}{19}}{2-\dfrac{15}{19}}\times\frac{\dfrac{16}{28}+\dfrac{7}{28}}{\dfrac{16}{28}-\dfrac{7}{28}}$$

$$=\frac{57+24}{38-15}\times\frac{16+7}{16-7}=\frac{81}{23}\times\frac{23}{9}=9\text{.}$$

3. 化簡 $\dfrac{6\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\left(7\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)}{5\frac{1}{2}-\left\{2\frac{9}{14}\div\left(5\frac{1}{9}\div8\frac{4}{11}\right)\right\}}$

原式 $=\dfrac{10\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\left(\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}\right)}{5\frac{1}{2}-\left\{\frac{37}{14}\div\left(\frac{49}{9}\div\frac{58}{7}\right)\right\}}$

$$=\frac{10\frac{5}{6}-2\frac{3}{6}}{5\frac{1}{2}-\left\{\frac{37}{14}\times\frac{9}{46}\times\frac{58}{7}\right\}}$$

$$=\frac{8\frac{1}{3}}{5\frac{1}{2}-\frac{37}{7}\times\frac{9}{46}\times\frac{29}{7}}$$

$$=\frac{8\frac{1}{3}}{5\frac{1127}{2254}-4\frac{641}{2254}}=\frac{8\frac{1}{3}}{1\frac{486}{2254}}=\frac{\frac{25}{3}}{\frac{1740}{2254}}$$

$$=\frac{25}{3}\times\frac{1127}{1370}=\frac{5635}{822}=6\frac{703}{822}.$$

4. 化簡 $10\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$

原式 $=\frac{21}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}}=\frac{21}{2}+\cfrac{1}{\frac{7}{4}}=\frac{21}{2}+\frac{4}{7}$

$$=\frac{155}{14}=11\frac{1}{14}.$$

5. 化簡 $25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{19-\cfrac{6}{7+\cfrac{3}{8}}}}}$

原式 $=25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{19-\cfrac{6}{\frac{59}{8}}}}}$

$$=25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{19-\cfrac{48}{59}}}}$$

$$=25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{\cfrac{1072}{59}}}}=25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{236}{1072}}}$$

$$=25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{\cfrac{1308}{1072}}}=25^2\times\cfrac{3}{3+\cfrac{1072}{1308}}$$

$$=25^2\times\cfrac{3}{\cfrac{4996}{1308}}=25^2\times\frac{3924}{4996}=490\frac{1115}{1249}$$

## 第二節　小數四則

小數之各種運算法則與整數同，所當注意者，乃其小數點。

(1) 加減時祇須對齊小數點卽可。

(2) 乘法無須對齊小數點，其積之小數位數，與乘數及被乘數之小數位數之和相等。

(3) 除法恆先移動除數與被除之小數點，使除數化為整數，而後相除，其商之小數點應與被除數之小數點對齊。

(4) 循環小數之加法減法，除對齊小數點外，並應對齊

循環點，而後相加減。若循環節之第一位，在加減時進位或不夠，則循環節末位，亦應加入或減去

(5) 循環小數之乘法除法，普通先化循環小數爲分數，而後乘除。

(6) 化循環小數爲分數時，小數點後，有幾位循環，即書幾個9，有幾位不循環，即書幾個0於9後，當做分母，而後把循環小數之小數點與循環點除去，並在此中減去不循環部份，當做分子。而後化此分數爲最簡形式即得。

【例題】

(1) 試計算

$$\frac{0.8\times(124.378+678.35)+28.342\times0.25-149.2604}{0.01\times(611.9-246.3)+0.12\times11.2}$$

(解)　原式$=\dfrac{0.8\times802.728+7.078-149.2604}{0.01\times365.6+1.314}$

$$=\frac{642.1824+7.078-149.2604}{3.656+1.314}=\frac{500}{5}=100.$$

(2) 試求 $.0\dot{1}\dot{2}+.\dot{3}5\dot{1}-.\dot{2}7\dot{3}$

解：　原式 $=.0\dot{1}2121\dot{2}+.3\dot{5}1351\dot{3}-.2\dot{7}3273\dot{2}$

$=.0\dot{9}0199\dot{2}$

(3) 試計算 $\dfrac{.\dot{3}\dot{5}\times3+.\dot{8}\dot{3}}{.\dot{4}\dot{5}-.1\dot{2}\dot{3}\times3}$

（解）　原式$=\dfrac{1.\dot{0}\dot{6}+.\dot{8}\dot{3}}{.\dot{4}\dot{5}-.3\dot{6}\dot{9}}=\dfrac{1.\dot{8}\dot{9}}{.0\dot{8}\dot{4}}=\dfrac{1\frac{89}{99}}{\frac{84}{990}}$

$$=\frac{188}{99}\times\frac{990}{84}=22\frac{8}{21}.$$

## 第三節　分類雜題

I.　子母問題

1.　一分數，其母子之和爲80，今分母減2，分子加2，約之得$\frac{7}{9}$。問該分數爲何？

（解）　新分數分子分母相加得，

$$\frac{7}{9+7}=\frac{7}{16}$$

新分數分子分母之和，仍爲80，故新分子應爲

$$80\times\frac{7}{16}=35.$$

故原分子爲　$35-2=33.$

原分母爲　$80-33=47.$

故欲求之分數爲　$\frac{33}{47}$.

2.　$\frac{74}{95}$之分子加上一數而分母減去該數，則約分後變爲$\frac{6}{7}$，求此數。

（解） $\frac{6}{7}$之分子與分子分母之和之比爲

$$\frac{6}{6+7}=\frac{6}{13}.$$

而原分數之母子和爲　$74+95=169.$

但$\frac{6}{7}$在未約分前，母子之和亦爲 169，故$\frac{6}{7}$未約分時之分子應爲

$$169\times\frac{6}{13}=78.$$

故欲求之數爲　$78-74=4.$

3. 一分數，分母加1，則此分數變爲$\frac{3}{4}$，分母加5，則變爲$\frac{2}{3}$，求此分數。

（解） 分母加 1，分數變爲$\frac{3}{4}$，故知分母加 1 後，爲其分子之$\frac{4}{3}$倍。同理分母加 5後，爲其分子之$\frac{3}{2}$倍。故知 $5-1=4$，應爲分子之

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$

倍，故分子分母應爲

$$4\div\frac{1}{6}=24，\qquad 24\times\frac{4}{3}-1=31，$$

故原分數爲　$\frac{24}{31}.$

II．工程問題

【公式】合作時間$=1\div\left(\frac{1}{\text{甲作時間}}+\frac{1}{\text{乙作時間}}\right)$。

【例題】

1．有一工程，甲獨作，24日而成，甲乙合作15日而成，問乙獨作，幾日可成？

（解）甲每日應作全工程之$\frac{1}{24}$，甲乙二人合作，每日應作全工程之$\frac{1}{15}$，故乙一人每日應做全工程之

$$\frac{1}{15}-\frac{1}{24}=\frac{3}{120}=\frac{1}{40}.$$

故乙獨做所需之日數為

$$1\div\frac{1}{40}=40\text{日}。$$

2．有一工程，甲15日做成，乙20日做成，二人合做5日後，甲因事他去，問乙尚須幾日完成？

（解）二人合做5日，應做全工程之

$$\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{26}\right)\times 5=\frac{35}{60}。$$

二人合做5日後，全工程應餘

$$1-\frac{35}{60}=\frac{25}{60}，$$

故乙應再做

$$\frac{25}{60}\div\frac{1}{20}=\frac{25}{60}\times 20=8\frac{1}{3}\text{日}。$$

3. 有一工程，甲乙丙三人做之，各需15,20，25日做成，今三人合做，3日後甲因事他去，2日後乙復因事他去。問丙尚須幾日完成此工程？

(解) 甲乙丙三人合做1日，應做全工程之

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{25}=\frac{47}{300}.$$

合做三日，應做全工程之 $\frac{47}{300}\times 2=\frac{47}{150}$.

乙丙二人合做1日，應做全工程之

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{25}=\frac{9}{100}$$

合做2日應做全工程之 $\frac{9}{100}\times 2=\frac{9}{50}$.

故5日後，尚餘全工程之

$$1-\frac{47}{150}-\frac{9}{50}=\frac{76}{150}.$$

故丙應再做

$$\frac{76}{150}\div\frac{1}{25}=\frac{76}{150}\times 25=12\frac{2}{3}\text{日}.$$

III. 時計問題

【公式】 (1)重叠時間$=5\times$間隔$\div\left(1-\frac{1}{12}\right)$

(2)成直角時間$=(5\times$間隔$\pm 15)\div\left(1-\frac{1}{12}\right)$

(3)成平角時間$=(5\times$間隔$\pm 30)\div\left(1-\frac{1}{12}\right)$.

【例題】

(1) 5點與6點間，時針分針重叠應在何時？成直角應在何時？

(解)　$5\times5\div\frac{11}{12}=25\times\frac{12}{11}=\frac{300}{11}=27\frac{3}{11}$

故5點與6點間重叠當在　5點$27\frac{3}{11}$分。

又　$(5\times5-15)\div\frac{11}{12}=10\times\frac{12}{11}=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$.

$(5\times5+15)\div\frac{11}{12}=40\times\frac{12}{11}=\frac{480}{11}=43\frac{7}{11}$.

故成直角時，

一在　5點 $10\frac{10}{11}$分，

一在　5點 $43\frac{7}{11}$分。

(2)　7點與8點間，時針與分針成60°角，當在何時？

(解)　所謂成60°者，卽二針之間隔爲十分也，故得二解如下：

(I)　$(7\times5-10)\div\frac{11}{12}=25\times\frac{12}{11}=\frac{300}{11}=27\frac{3}{11}$

(II)　$(7\times5+10)\div\frac{11}{12}=45\times\frac{12}{11}$

$=570\div11=51\frac{9}{11}$.

卽　一在　7點$27\frac{3}{11}$分，

　　一在　7點$51\frac{9}{11}$分。

(3)　今有一鐘，一晝夜，共快8分，於正午時，欲使此鐘於下午九點正確無誤，則須撥慢幾分？

(解)　一晝夜共快8分，故每小時應快

$$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}\text{分。}$$

故九小時共快　$\frac{1}{3}\times9=3$分。

故欲使此鐘於九點時正確無誤，當於正午時撥慢3分。

IV.　部份問題

【例題】

(1)　有繩二條，共長1丈1尺，甲繩剪去$\frac{1}{15}$，乙繩加長7寸，二繩恰相等，問二繩各長多少？

(解)　甲繩剪去$\frac{1}{5}$，應餘$\frac{4}{5}$，卽乙繩加上7寸等於甲繩的$\frac{4}{5}$.

若甲繩不剪，乙繩加7寸，則二繩共長$110+7=117$寸。

故117寸應爲甲繩之$1+\frac{4}{5}$倍。

故甲繩長$=117\div\left(1+\frac{4}{5}\right)=117\div\frac{9}{5}=65$寸。

乙繩長$=110-65=45$寸。

(2)　絹一匹其價適當布價之五又四分之一。今買布18匹，絹8匹，共用去洋20.1元，問絹布之價各若干？

(解)　若以買絹之價，全數購布，應購

$$8\times5\frac{1}{4}=42\text{匹},$$

故20.1元全買布，可買　$4.2+18=60$匹。

故布一匹之價爲　$20.1\div60=.335$元。

絹一匹之價爲　$.335\times5\frac{1}{4}=1.759$元。

(3)　某人從甲地走到乙地，坐船坐$\frac{3}{4}$，坐火車走餘下的$\frac{1}{3}$，坐轎走第二次餘下的$\frac{4}{5}$，再步行6里，始走到乙地，問甲乙兩地相隔多少里？

(解)　第一次餘下的爲　$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

第二次餘下的爲　$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

第三次餘下的爲　$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{30}$

而第三次所餘的恰是6里，故全路程應爲

$$6\div\frac{1}{30}=180\text{里}。$$

即甲乙兩地相隔　180里也。

## 第四章　百分法

【公式】（1）　子數＝母數×成數

（2）　總數＝母數×(1＋成數)

【例題】

（1）　甲乙丙3人分錢，甲得10%，乙得30%，丙所得比乙多600元，問原有幾元？

（解）　甲，乙共得全數之　$10\%+30\%=40\%$。
故丙應得全數之　$1-40\%=60\%$。
故丙較乙多得全數之　$60\%-30\%=30\%$
故原有元數為　$600\div30\%=600\times\frac{100}{30}=2000$元。

（2）　七兩海綿，曬乾後，失去重量三錢，而所含的水量，是原重的百分之幾？如果失重3錢後，還重七兩問水佔百分之幾？

（解）（1）　在第一情形，海綿重量佔

$$\frac{3}{70}=\frac{30}{700}=\frac{30}{7}\%=4.25\%.$$

（2）　在第二情形，海綿在未曬乾前，共重7兩3錢故海綿佔 $\frac{3}{73}=\frac{300}{7300}=4.11\%$.

（3）　某鉛礦的礦石，含鉛60%，而鉛內又含銀1%，問

1200噸礦石，可鍊得多少鉛和銀？

（解）1200噸中，應含鉛

$$1200\times\frac{60}{100}=720\text{噸。}$$

而此中又含銀　$720\times1\%=7.2$噸。

故1200噸中，共含銀7.2噸，鉛712.8噸。

# 第五章　開方及比例

## 第一節　開平方

【方法】（1）自右向左，每兩位劃成一段。

（2）先求首段能容之最大平方根，為根之第一位數。

（3）自首段內，減去根第一位數之平方，於其後加上第二段，作為第一餘數。

（4）二倍根之第一位數，為試除數，除第一餘數，用其商為根之第二位數。

（5）附此商於試除數之後，為全除數，再用此商乘全除數，自第一餘數中，減去此積，（若積大於餘數，則應將商減一再試。）再添下一段數，為第二餘數。

（6）然後視所得根之二數為根之第一位數，再

用上法演算，直至無有餘數，或位數已足為止。

【例題】

(1) 試求35721之平方根。

```
         1  8  9
       ___________
        3,57,21
        1
      ____________
 28  | 251
     | 224
      ____________
 369  | 3321
      | 3321
      ____________
         0
```

35721之平方根為189。

(2) 試求9998.0001之平方根。

```
           9  9. 9  9.
         ______________
          99,98.00,01
          81
         ______________
 189     |1898
         |1701
          _____________
 1989     |19700
          |17901
           ____________
 19989     |179901
           |179901
           ____________
```

9998.0001之平方根為99.99，

(注意) 求小數之平方根法與整數同，不過其劃位方向乃自小數點起，由左而右，每兩位一段。

(3) 某人有錢若干元，祗知用元數之3倍乘，結果得

4563，問某人原有若干元？

（解）　此人原有元數之自乘數，應爲

$4563 \div 3 = 1521.$

故某人原有元數爲1521之平方根，卽39元。

## 第二節　開立方

【方法】（1）自右而左，每3位劃爲一段。

（2）先求首段能容最大之立方數卽立方根之第一位數。

（3）自首段內，減去此數之立方，加第二段於其後，得第一餘數。

（4）300倍根之第一位數之平方數。爲試除數，其商卽根之第二位數。

（5）加此商與第一位數乘積之 30 倍於試除數上，再加此商之平方數，以商乘此三數之和，自第一餘數內減去，(若積大於第一餘數，則商上應減去1，再試)。再加第三段於其後，爲第二餘數。

（6）然後視此所得之二數爲根之第一位數，再用上法演算，直至無有餘數，或位數已足爲止。

【例題】

(1) 試求 7414875之立方根。

## 第三節 比

I. 正比及反比

比實相當於分數，比之前項，相當於分數之分子，比之後項，相當於分數之分母，故分數上之特性，皆可用之於比。

II. 連比

【定理】 甲數：乙數$=a:b$.

乙數：丙數$=c:d$.

則 甲：乙：丙$=ac:bc:bd$.

III. 複比

【定理】 若 $a:b$，$c:d$，$e:f$ 爲三單比，則此三比之複比爲 $ace:bdf.=(a:b)(c:d)(e:f)$.

【例題】

(1) 甲乙之比爲3:5，乙丙之比爲7:8，求甲丙之比。

(解) 甲：乙$=3:5=(3\times7):(5\times7)=21:35$.

乙：丙$=7:8=(7\times5):(8\times5)=35:40$.

∴ 甲：乙：丙$=21:35:40$

∴ 甲：丙$=21:40$.

(2) a，b二數之比爲3:4，b，c二數之比爲6:7，c，d

二數之比爲9:10，求a，b，c，d之連比，並求其複比爲何？

（解） $a:b=3:4=18:24=162:216$

$b:c=6:7=24:28=216:252$

$c:d=9:10=28\times9:10\times28=252:280.$

$\therefore\ a:b:c:d=162:216:252:280=81:108:126:140.$

該三比之複比爲

$(3:4)\times(6:7)\times(9:10)=(3\times6\times9):(4\times7\times10)=81:140.$

## 第四節 比例

I. 比例式之解法

【定理】 比例式內兩外項之積，等於兩內項之積。

【例題】

(1) 試解： $2\frac{1}{5}:3\frac{1}{2}=10\frac{1}{5}:x$

（解） 按定理得

$$x\times2\frac{1}{5}=3\frac{1}{2}\times10\frac{1}{5}$$

$$\therefore\ x=\frac{3\frac{1}{2}\times10\frac{1}{5}}{2\frac{1}{5}}=\frac{\frac{7}{2}\times\frac{51}{5}}{\frac{11}{5}}$$

$$=\frac{7}{2}\times\frac{51}{5}\times\frac{5}{11}=\frac{357}{22}=16\frac{5}{22}。$$

(2) 甲數之$\frac{8}{15}$，乙數之$\frac{13}{22}$相等，求甲乙二數之比。

（解） 令甲數爲1，則乙數之$\frac{13}{22}$爲$\frac{8}{15}$，故乙數應爲

$$\frac{8}{15}:\frac{13}{22}=\frac{8}{15}\times\frac{22}{13}=\frac{176}{195}.$$

$\therefore$　甲：乙$=1:\frac{176}{195}=195:176.$

（3）　甲乙二商人資本之比爲4：5，甲獲利60元，乙損失70元則其所有金之比爲9：4，問二人原有資本各若干？

（解）　令甲的資本是a，乙的資本爲x，則

$$a:x=4:5,$$

$$\therefore\ x=\frac{5a}{4}.$$

甲獲利60元後，資本變爲$a+60$，乙損失70元，資本變爲$\frac{5a}{4}-70$，故　$(a+60):\frac{5a}{4}-70=9:4$

$$\therefore\quad 9\left(\frac{5a}{4}-70\right)=4(a+60)$$

即　$45a-16a=960+2520$

$\therefore$　$a=120$元。

$\therefore$　$x=120\times\frac{5}{4}=150$元。

故得甲原有資本120元，乙原有150元。

II. 正比例及反比例

【例題】

（1）　父子8年前年齡之比爲4:1，今後8年，其年齡之比爲5:2，問父子現年各幾何？

（解）　令a代8年前父之年齡，x代8年前子之年齡，則

$$a:x=4:1$$

即　$x=\frac{a}{4}$…

今後8年，父子之年齡應各爲$a+16$，$\frac{a}{4}+16$，故

$$(a+16):\left(\frac{a}{4}+16\right)=5:2$$

即　$\frac{5}{4}a+80=2a+32$

即　$5a+320=8a+128$

$\therefore$　$3a=320-128=192$

$\therefore$　$a=192\div3=64.$

故父子之現年各爲　$64+8=72$，

$$\frac{64}{4}+8=24.$$

（2）　甲乙二軍，其員兵之比爲 5：2，兩軍會戰後，員兵損失之比爲 4：1，所餘員兵，成 2：1 之比，但乙軍尙餘 900 人，問甲乙二軍原有員兵各若干人？

（解）　令a代甲軍人數，x代乙軍人數，則

$$a:x=5:2$$

$\therefore$　$x=\frac{2}{5}a.$

又令甲軍所餘員兵，爲 y 人，則

$$y:900=2:1$$

$\therefore\quad y=2\times900=1800.$

$\therefore\quad (a-1800):\left(\frac{2}{5}a-900\right)=4:1$

即　$a-1800=4\times\left(\frac{2}{5}a-900\right)$

即　$5a-9000=8a-18000$

$\therefore\quad a=3000$。

而　$x=\frac{2}{5}a=1200$

故甲軍原有3000人，乙軍原有1200人。

(3) 男工3人4日所成之事，女工5人，須6日成之，今男工8人，女工7人13日做成之事，以男工5人，女工7人做之，應需幾日？

(解) 男工一人一日之工作爲$\frac{1}{12}$，而女一人一日之工作爲$\frac{1}{30}$。玆令x代欲求日數，則

$x:13=\left(\frac{8}{12}+\frac{7}{30}\right):\left(\frac{5}{12}+\frac{7}{30}\right)$

即　$x:13=\frac{54}{60}:\frac{39}{60}$

$\therefore\quad x=\frac{54}{60}\times13:\frac{39}{60}=\frac{54}{60}\times13\times\frac{60}{39}=18$日。

III. 複比例

【解法】 取複比例之一般形狀爲

$$\left.\begin{array}{r} a:b \\ a':a' \end{array}\right\} = c:x$$

則　$aa:bb' = c:x$

$$\therefore \quad x = \frac{bb'c}{aa'}\text{。}$$

【例題】

（1）甲茶3斤，乙茶5斤，其價相等，今甲茶二斤之價爲1元7角，問乙茶35斤之價爲何？

（解）若總額定，則斤數與價値成反比，若價値定，則斤數與總額成正比，令 x 代乙茶35斤之價，則

$$\left.\begin{array}{r} 5:3 \\ 2:3.5 \end{array}\right\} = 17:x$$

$$\therefore \quad x = \frac{3\times3.5\times17}{5\times2} = 1.785\text{元}$$

（2）牛肉3斤之價與鷄肉4斤之價相等，鷄肉2斤之價與猪肉5斤之價相等，今牛肉半斤，値價4角，問猪肉3斤之價幾何？

（解）令鷄肉一斤之價爲x，則

$$\left.\begin{array}{r} 4:3 \\ \frac{1}{2}:1 \end{array}\right\} = 4:x$$

$$\therefore \quad x = \frac{4\times3\times1}{5\times\frac{1}{2}} = 6\text{角}\text{。}$$

再設猪肉3斤之價爲y，則

$$\left.\begin{matrix}5:2\\1:3\end{matrix}\right\}=6:x$$

$$\therefore \quad x=\frac{2\times3\times6}{5}=7.2\text{角}。$$

(3) 馬15頭，8日間，能運彈藥若干往東庫，已知馬牛速度之比爲4:3，力之比爲3:5，東西兩庫距離之比爲6:9，今若以牛18頭，運同量彈藥往西庫，問需時若干日？

(解) 令x爲所需之日數，則頭數與日數，速度與日數，力與日數，皆成反比，而距離則與日數成正比。故得

$$\left.\begin{matrix}18:15\\3:4\\5:3\\6:9\end{matrix}\right\}=8\text{日}:x\text{日}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{\cancel{15}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{9}\times8}{\cancel{18}\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times\cancel{6}}=8\text{日}.$$

IV. 配分比例

【公式】 若A按l:m:n之比分配A數，則

$$x=\frac{Al}{l+m+n},$$

$$y=\frac{Am}{l+m+n},$$

$$z=\frac{An}{l+m+n}。$$

【例題】

(1) 金1809元，分與甲乙丙3人，甲所得之6倍與乙所得之7倍相等，又乙所得與丙所得之比爲8:5，問各得幾何？

(解) 甲所得之6倍等於乙所得之7倍，故甲所得與乙所得之比爲 7:6，

而乙丙之比爲 8:5，

故 甲：乙：丙＝28:24:15。

$$\therefore\quad 甲所得=1809\times\frac{28}{28+24+15}=1809\times\frac{28}{67}=756元。$$

$$乙所得=1809\times\frac{24}{28+24+15}=648元，$$

$$丙所得=1809\times\frac{15}{28+24+15}=405元。$$

(2) 甲乙丙丁四人共有金3902元，若四人再分400元，則四人所有金之比爲 甲：乙＝2：3，乙：丙＝5：7，丙：丁＝2：7，問丁原有金幾何？

(解) 甲，乙，丙，丁四人分得400元後所有金之元爲

甲：乙：丙：丁＝20：30：42：147。

故丁所有金當爲

$$(3902+400)\times\frac{147}{20+30+42+147}=2646元，$$

故丁原有金爲 $2646-100=2546$元。

(3)　甲，乙，丙三人，合購地皮一塊，共費33867元，今甲乙之和，與甲丙之和，與乙丙之和之比爲$\frac{1}{2}:\frac{3}{5}:\frac{7}{10}$，問三人應各出資若干元？

(解)　三人合資之二倍應爲

$$33867\times 2=67734\text{元，}$$

故　$$\text{甲}+\text{乙}=67734\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}}=67734\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{18}{10}}$$

$$=18815\text{元，}$$

$$\text{甲}+\text{丙}=67734\times\frac{\frac{3}{5}}{\frac{18}{10}}=22578\text{元，}$$

$$\text{乙}+\text{丙}=67734\times\frac{\frac{7}{10}}{\frac{18}{10}}=26341\text{元。}$$

故　甲之資金爲$\frac{1}{2}(18815+22578-26341)=7526$元，

乙之資金爲　$18815-7526=11289$元。

丙之資金爲　$26341-11289=15052$元。

## V.　連鎖比例

【例題】

(1)茶葉48斤的價，與麥酒54升的價相等，麥酒63升的

價，與葡萄酒24瓶的價相等，葡萄酒 11瓶的價，和手套 9付的價相等，問買手套20付的款來買茶葉，能買幾斤？

（解）設手套20付，能換茶x斤。則

| | |
|---|---|
| 茶　x斤 | 手套20付 |
| 手套　9付 | 葡萄酒11瓶 |
| 葡萄酒24瓶 | 麥酒63升 |
| 麥酒　55升 | 茶葉48斤 |

$x\times9\times24\times55=20\times11\times63\times48$，

$$\therefore\quad x=\frac{20\times11\times63\times48}{9\times24\times55}=56,$$

故手套20付可換茶葉56斤。

（注意）在連鎖比例中，每一橫線所連之二物必爲相等之二物，而以斜線相連者，必爲同類，且最後者與最前者爲同類。

（2）金屬重量的比是金:鉛＝32:19，銀：鉛＝10:11，銅：銀＝6：7，鐵：銅＝8：9，若有重 380 兩之鐵瓶，以金製之，應重幾兩？

（解）令　x＝金瓶之重量。

| | |
|---|---|
| 金32兩 | 鉛　19兩 |
| 鉛　11 | 銀　10 |
| 銀　7 | 銅　6 |
| 銅　9 | 鐵　8 |
| 鐵 380 | 金 x兩 |

$$\therefore \quad x=\frac{11\times7\times9\times380}{\frac{19}{32}\times10\times6\times8}=924。$$

(3) 用平年計算，土星一年當火星 $15\frac{635}{685}$年，天王星一年，當土星 $2\frac{4}{5}$年，火星一年，當水星 $7\frac{26}{29}$年，地球一年，當水星 $4\frac{17}{87}$年，天王星 $1\frac{20}{21}$年，當海王星一年，問海王星一年，當地球幾年？

(解) 令x代表年數。

| | |
|---|---|
| 地球 x年 | 海王星1年 |
| 海王星1年 | 天王星 $1\frac{20}{21}$年 |
| 天王星1年 | 土星 $2\frac{4}{5}$年 |
| 土星 1年 | 火星$15\frac{635}{687}$年 |
| 火星 1年 | 水星 $7\frac{26}{29}$年 |
| 水星$4\frac{17}{87}$ | 地球1年 |

$$x=\frac{1\times1\frac{20}{21}\times2\frac{4}{5}\times15\frac{635}{687}\times7\frac{26}{29}\times1}{4\frac{17}{87}}=161\frac{3099}{6205}\text{年}$$

## VI. 混合比例

【例題】

(1) 米麥共50石，米每石獲利5角，麥每石獲利3角，

共獲利21元，問米麥各幾石？

（解）

| 平均值 | 品名 | 原價 | 比較 | 混合量的比 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.2角 | 米 | 5.0角 | 益 .8角 | 12 | 3 |
| | 麥 | 3.0角 | 損1.2角 | 8 | 2 |

故米麥按50石分配，應為

$$50\times\frac{3}{3+2}=30\text{石}\cdots\cdots\text{米}$$

$$50\times\frac{2}{3+2}=50\times\frac{2}{5}\text{—}20\text{石}\cdots\cdots\text{麥}$$

（2）　有上中下三種酒，上酒2斤，每斤價3角5分，中酒3斤，每斤價3角，問同每斤2角的酒多少混合，始能得每斤2角6分的酒。

（解）

| 平均價 | 品名 | 原價 | 比較 | 混合量 |
|---|---|---|---|---|
| 26分 | 上酒 | 35分 | 損 9分 | 2斤 |
| | 中酒 | 30分 | 損 4分 | 3斤 |
| | 下酒 | 20分 | 益 6分 | x斤 |

在此上酒共損　$2\times9=18$分

中酒共損　$3\times4=12$分

二種酒共損　$18+12=30$分，

欲耕下酒，補此損失，下酒 x斤，必益出30分，故下酒應用

$30 \div 6 = 5$斤。

(3) 有上中下三種茶，上茶60斤，每斤價6角，中茶30斤，每斤價 4角 5分，問與每斤價4角的下茶幾斤混合，才能造成每斤價5角的茶？

答　45斤。

# 代數之部

## 第一章　代數式之運算法則

### 第一節　整式四則

I. 符號定則

【加法】

$$(+a)+(+b)=+(a+b),$$

$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

【減法】

$$a-(+b)=a+(-b),$$

$$a-(-b)=a+(+b).$$

【乘法】

$(+a)\times(+b)=+ab$，

$(-a)\times(-b)=+ab$，

$(-a)\times(+b)=-ab$，

$(+a)\times(-b)=-ab$。

【除法】

$(+b)\div(+a)=+\frac{b}{a}$，

$(-b)\div(-a)=+\frac{b}{a}$，

$(+b)\div(-a)=-\frac{b}{a}$，

$(-b)\div(+a)=-\frac{b}{a}$。

（注意）　乘除時，同號得正，異號得負。

II. 交換定則

加法…………$a+b+c=a+c+b$。

減法…………$a-b-c=a-c-b$。

乘法…………$a\times b\times c=a\times c\times b$、

除法…………$a\div b\div c=a\div c\div b$。

III. 結合定則

加法…………$a+b+c=a+(b+c)$，

減法…………$a-b-c=a-(b+c)$，

乘法…………$a\times b\times c=a\times(b\times c)$，

除法…………$a \div b \div c = a \div (b \times c)$。

IV. 分配定則

加法…………$a+(b+c)=a+b+c$，

減法…………$a-(b+c)=a-b-c$，

乘法…………$(a+b)\times c=ac+bc$

$(a-b)\times c=ac-bc$

$a(bc)=abc$。

除法…………$(a+b)\div c=a\div c+b\div c$

$(a-b)\div c=a\div c-b\div c$

$a\div(bc)=a\div b\div c$。

## 第二節 特殊積及因數分解

I. 特殊積 乘法中頗有若干重要公式，望讀者注意。

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。
4. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$。
5. $(x\pm a)(x\pm b)=x^2\pm(a+b)x+ab$。
6. $(ax\pm b)(a'x\pm b')=aa'x^2\pm(ab'+a'b)x+bb'$。
7. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$。
8. $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$。

9. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

10. $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a+b+c)=a^3+b^3+c^3$

$-3abc$.

【例題】 展開下列各式：

1. $(5x+6y-7z)^2=(5x)^2+(6y)^2+(7z)^2+2(5x)(6y)$

$+2(5x)(-7z)+2(6y)(-7z)$

$=25x^2+36y^2+49z^2+60xy-70xz-84yz$.

2. $(4a^2+6ab+9b^2)(4a^2-6ab+9b^2)$

$=[(2a)^2+(2a)(3b)+(3b)^2][(2a)^2-(2a)(3b)+$

$(3b)^2]$

$=(2a)^4+(2a)^2(3b)^2+(3b)^4$

$=8a^4+36ab+81b^4$.

3. $(4a^2+9b^2+c^2-3bc-2ca-6ab)(2a+3b+c)$

$=[(2a)^2+(3b)^2+c^2-(2a)(3b)-(2a)c-(3b)\times c]$

$[2a+3b+c]$

$=(2a)^3+(3b)^3+c^3-3(2a)(3b)c$

$=8a^3+27b^3+c^3-18abc$.

4. $(3a+4b+3c-5d)^2$

$=[(3a+4b)+(3c-5d)]^2$

$=(3a+4b)^2+2(3a+4b)(3c-5d)+(3c-5d)^2$

$= 9a^2 + 24ab + 16b^2 + 2(9ac + 12bc - 15ad - 20bd)$

$+ 9c^2 - 30cd + 25d^2 = 9a^2 + 24ab + 18ac - 30ad$

$+ 16b^2 + 24bc - 40bd + 9c^2 - 30cd + 25d^2$.

5. $(a+b+c-d)(a+b-c+d) + (a-b+c+d)$

$(-a+b+c+d) = ?$

6. 試證 $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 - 3(b-c)(c-a)$

$(a-b) = 0$。

按公式(10) 原式$= [(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$

$-(b-c)(c-a) - (b-c)(a-b) - (c-a)(a-b)]$

$\times [(b-c) + (c-a) + (a-b)]$

但 $(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$

故原式$= 0$.

7. 試證 $(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)$

$= 1 + x^8 + x^{16}$.

8. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$

$= (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)$

$= (x^8-1)(x^8+1)$

$= x^{16} - 1$.

II. 因數分解 因數分解，無一定方法，玆舉出若干公

式，祇須將欲分解之數式取與公式相較，視其果與何式相似，然後即按該公式，將其因數直接書出倘因數中再能分解，當再分解之，直至不能分解時為止。

【公式】

1. $ax+bx+cx=x(a+b+c)$

2. $x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$.

3. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

4. $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$.

5. $x^2\pm(a+b)x+ab=(x\pm a)(x\pm b)$.

6. $x^2\pm(a-b)x-ab=(x\pm a)(x\mp b)$.

7. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^3)$.

8. $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$.

9. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$.

10. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

11. $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

12. $$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

【例題】試分解下列各式：

1. $27x^4+8x=x\ (27x^3+8)\ =x\ [(3x)^3+2^3]\ =x$
$(3x+2)(9x^2-6x+4)$。

2. $(x+y)^4-(x-y)^4=[(x+y)^2-(x-y)^2][(x+y)^2+(x-y)^2]$
$=[(x+y)-(x-y)][(x+y)+(x-y)]$
$[x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2]$
$=(x+y-x+y)(x+y+x-y)(2x^2+2y^2)$
$=8xy(x^2+y^2)$。

3. $6x^2-5xy-6y^2=(2x-3y)(3x+2y)$。

4. $x^2-2ax-b^2+2ab=x^2-b^2-2ax+2ab$
$=(x-b)(x+b)-2a(x-b)$
$=(x-b)(x-2a+b)$，

5. $x(x+4)-y(y+4)=x^2+4x-(y^2+4y)$
$=x^2-y^2+4x-4y=(x-y)(x+y)+4(x-y)$
$=(x-y)(x+y+4)$。

6. $ab(x^2-y^2)\ +xy\ (a^2-b^2)\ =abx^2-aby^2+a^2xy$
$-b^2xy$
$=(abx^2+a^2xy)-(b^2xy+aby^2)\ =ax(bx+ay)$
$-by(bx+ay)$

$=(ax-by)(bx+ay)$。

7. $x^4-23x^2+1=x^4+2x^2+1-25x^2=(x^2+1)^2$
$-25x^2$

$=(x^2+1)^2-(5x)^2=(x^2-5x+1)(x^2+5x+1)$.

8. $x^4-11x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2+y^4-9x^2y^2$

$=(x^2+y^2)-(3xy)^2$

$=(x^2-3xy-y^2)(x^2+3xy-y^2)$.

9. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=(x^2+5x)(x^2-5x$
$+10)$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$.

10. $2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$

$=(2x-y)(x-2y)+a(x-2y)-a(2x-y)-a^2$

$=(x-2y)[(2x-y)+a]-a[(2x-y)+a]$

$=(x-2y-a)(2x-y+a)$.

11. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)=(b+c)[(a+b+$
$c)^2+(a+b+c)\times a+a^2]-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)[3(a^2+ab+bc+ca)]=3(b+c)[a^2+(b+c)a+bc]$

$=3(b+c)(a+b)(a+c)$。

12. $x^3-8y^3-18xy-27=x^3+(-2y)^3+(-3)^3-3x(-2y)(-3)$

$=[x+(-2y)+(-3)][x^2+4y^2+9-x(-2y)-x(-3)-(-2y)(-3)]$

$=(x-2y-3)(x^2+4y^2+2xy+3x+6y+9)$。

13. $x^2-4xy+3y^2-6y-9$

$$=\left(x-\frac{+2y+\sqrt{4y^2-3y^2+6y+9}}{1}\right)\left(x-\frac{2y-\sqrt{4y^2-3y^2+6y+9}}{1}\right)$$

$=(x-2y-\sqrt{y^2+6y+9})(x-2y+\sqrt{y^2+6y+9})$

$=(x-2y-y-3)(x-2y+y+3)=(x-3y-3)(x-y+3)$。

14. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$

$=(yz+z^2+xy+xz)(x+y)+xyz$

$=(xy+yz+zx)(x+y)+xz^2+yz^2+xyz$

$=(xy+yz+zx)(x+y)+(xy+yz+zx)z$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$。

15. $x^3+6x^2+11x+6=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$

$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3)$。

16. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280=(x+1)(x-8)(x^2+7x+26)$。

17. $x^4-3x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$。

18. $a^6b^6-2^6=(ab+2)(ab-2)(a^2b^2-2ab+4)(a^2b^2+2ab+4)$。

19. $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3=(a-b)(a+b)^3$

20. $(1+a)^2-2b^2(1+a^2)+b^4(1-a)^2=(1+b)(1-b)(1+a+b-ab)(1+a-b+ab)$

III. 餘式定理　在任一代數式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

中，若以b代x，能使該式之值爲零，則$(x-b)$必爲該式之因數。

【例題】試分解下列各式：

(1) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$。

（解）令$a=b$，則原式$=bc(b-c)+bc(c-b)=0$，故$a-b$爲原式之一因數。同理，$b-c$，$c-a$，亦爲原式之因數，故

$$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=M(b-c)(c-a)(a-b)$$

M為其數字因數，欲求M之數值，可令 $a=o$，$b=1$，$c=2$，則此式

$$1\times2(1-2)=M\times(-1)\times(-1)\times2.\therefore M=-1.$$

故原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

2.　$a^2(b^2-c^2)-b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$.

（解）令 $a^2=b^2$，$b^2=c^2$，$c^2=a^2$，：原式皆為零，故得

$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=M(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2).$$

但原式為一四次式，而新得之式為一六次式，故M必為零，即

$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=o.$$ 也。

3.　$x^3+2x^2-x-2$

（解）令 $x=1$，原式為零，故 $x-1$ 為原式之因數，又令 $x=2$，$x=-1$，原式皆為零，故 $x-2$，$x+1$，皆為原式之因數。故得

$$x^3+2x^2-x-2=M(x-1)(x+1)(x-2).$$

試比較 $x^3$ 之係數，得 $M=1$. 即

原式 $=(x-1)(x+1)(x-2)$ 也。

4.　$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$

$=(a+b)(b+c)(c+a).$

5. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3).$

## 第三節 最高公因數及最低公倍數

I. 最高公因數

【方法】

1. 因數分解法 先將諸式分成質因數連乘積形式，然後于諸乘積中尋出相同之因數，而附最小之指數于其上卽得。

【例題】

1. 求$a^4b^2-a^2b^4$與$a^4b^3+a^3b^4$之H.C.F.

(解) $a^4b^2-a^2b^4=a^2b^2(a^2-b^2)=a^2b^2(a+b)(a-b).$

$a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3(a+b).$

$\therefore$H.C.F.$=a^2b^2(a+b).$

2. 求$a^2-b^2-2bc-c^2$與$a^2-b^2+ac-bc$之H.C.F.

(解) $a^2-b^2-2bc-c^2=(a+b+c)(a-b-c)$

$a^2-b^2+ac-bc=(a-b)(a+b+c)$

$\therefore$H.C.F.$=a+b+c.$

3. 求$x^3+3x^2y+2xy^2$與$x^4+6x^3y+8x^2y^2$之H.C.F.

(答) H.C.F.$=x(x+2y).$

2. 展轉相除法 用低算式，除高算式，若得餘式，卽以

次除第一次之除式，若再得除式，再除第一次之除式，

繼續相除，其最後之除式，即欲求之最高公因數也。

例題】

1. 求$x^3-4a^2x+15a^2$，與$x^4+a^2x^2+25a^4$之H.C.F.

$$)\ x^3-4a^2x+15a^2)x^4+a^2x^2+25a^4\ \lfloor x$$
$$\underline{x^4-4a^2x^2+15a^3x}$$
$$5a^2x^2-15a^3x+25a^4$$

卜　$5a^2x^2-15a^3x+25a^4=5a^2(x^2-3ax+5a^2)$.

因數$5a^2$，以$x^2-3ax+5a^2$爲新除數，繼行演算。

$$x^2-3ax+5a^2)x^3-4a^2x+15a^3\ \lfloor x+3a$$
$$\underline{x^3-3ax^2+5a^2x}$$
$$3ax^2-9a^2x+15a^3$$
$$\underline{3ax^2-9a^2x+15a^3}$$

$\therefore$ H.C.F. $=x^2-3ax+5a^2$.

2. 求$y^3-2y^2+3y-6$與$y^4-y^3-y^2-2y$之H.C.F.

$$y^2+3y-6)y^4-y^3-y^2-2y\ \lfloor y+1$$
$$\underline{y^4-2y^3+3y^2-6y}$$
$$y^3-4y^2+4y$$
$$\underline{y^3-2y^2+3y-6}$$
$$-2y^2+y+6)y^3-2y^2+3y-6\ \lfloor -y$$
$$\underline{\times 2}$$
$$2y^3-4y^2+6y-12$$
$$\underline{2y^3-y^2-6y}$$
$$-3y^2+12y+12$$

$$+y^2-4y+4)-2y^2+y+6 \,\lfloor -2$$

$$-2y^2+8y-8$$

$$-7y+14)y^2-4y+4$$

$$\times 7$$

$$7y^2-28y+28 \,\lfloor -y+2$$

$$7y^2-14y$$

$$-14y+28$$

$$-14y+28$$

$\therefore$ H.C.F. $=y-2$.

3. 求 $2x^4-6x^3+3x^2-3x+1$ 與 $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$ 之H.C.F.

(答) H.C.F. $=x^2-3x+1$.

II. 最低公倍數

【方法】

1. 因數分解法　先將諸式分成質因數連乘積形式，於諸乘積中，尋出相同之因數，而附最高之指數于其上，然後以此式與各積中所賸餘者連乘卽得。

【例題】

1. 求 $a^3+3a^2b+2ab^2$ 與 $a^4+4a^3b+3a^2b^2$ 之L.C.M.

(解) $a^3+3a^2b+2ab^2=a(a+b)(a+2b)$

$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a+b)(a+3b)$.

$\therefore$ L.C.M. $=a^2(a+b)(a+2b)(a+3b)$.

2. 求$x^2-7xy+12y^2$，$x^2-6xy+8y^2$，及$x^2-5xy+6y^2$之L.C.M.

（解） $x^2-7xy+12y^2=(x-3y)(x-4y)$.

$x^2-6xy+8y^2=(x-2y)(x-4y)$.

$x^2-5xy+6y^2=(x-2y)(x-3y)$.

$\therefore$ L.C.M. $=(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

3. 求$x^2-1$，$x^3+x^2+x+1$，$x^3-x^2+x-1$之L.C.M.

（答） L.C.M. $=x^4-1$.

2. 先求最高公因數法　先求二式之最高公因數，以此最高公因數，除二式之連乘積卽得。

【公式】 $\dfrac{A\times B}{\text{H.C.F.}}=$ L.C.M.

【例題】

1. 求$x^4+3x^2+6x+35$，及$x^3-4x^2+10x-7$之L.C.M.

（解） 用展轉相除法，得二式之H.C.F. $=x^2-3x+7$.

$\therefore$ L.C.M. $=(x^4+3x^2+6x+35)(x^3-4x^2+10x-7)$
$\div(x^2-3x+7)$
$=(x-1)(x^4+3x^2+6x+35)$.

2. 求 $2x^4+9x^3+14x+3$ 及 $3x^4+14x^3+9x+2$ 之L.C.M.

（解） 用展轉除法，得二式之H.C.F.$=x^2+5x+1$.

$\therefore$L.C.M.$=(2x^4+9x^3+14x+3)(3x^4+14x^3+9x+2)\div(x^2+5x+1)$
$=(2x^2-x+3)(3x^4+14x^3+9x+2)$.

3.求$x^2y^2-9y^2$，$x^2y-xy-6y$，$x^3+x^2-6x$之L.C.M.

（答） L.C.M.$=xy^2(x^2-4)(x^2-9)$.

## 第四節 分數之化簡及其四則

I. 符號定則

1. $\dfrac{b}{a}=\dfrac{-b}{-a}=-\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{b}{-a}$.

2. $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-b}{-a}=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{b}{-a}$.

II. 定理 分數之分子分母，同以一數乘之除之，其值不變。

III. 通分 先求諸分母之最低公倍數，作為公分母，然後以原分母除公分母，乘原分子，為新分子，卽得。

IV. 約分 求分母分子之最高公因數，除分數之因子，使分子分母變為互質數，卽得。

V. 四則

1. 加法：

(a)分母相同，分子相加。

(b)分母不同，通分母，加分子。

2.減法：

(a)分母相同，分子相減。

(b)分母不同，通分母，分子相減。

3.乘法　分子分母各自相乘。

4.除法　顚倒除數之分子分母，相乘卽得。

【例題】　試化簡下列各式。

1. $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{ab}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2}{a^4+b^4}$

（解）　$原式=\dfrac{a(a-b)+ab}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2}{a^4+b^4}=\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

$$=\frac{a^2[(a^2+b^2)-(a^2-b^2)]}{a^4-b^4}=\frac{2a^2b^2}{a^4-b^4}.$$

2. $\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}+\dfrac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x+1}-2\dfrac{x^2+1}{x^4-1}.$

（解）　$\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2+2x+1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x-1}{x+1}.$

$$\frac{x^3+1}{x^3-2x^2+2x+1}=\frac{(x+1)(x^3-x+1)}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{x+1}{x-1}.$$

$故原式=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}-2\dfrac{x^2+1}{x^4-1}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$$-2\frac{x^2+1}{x^4-1}=0$$

3. $\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$

（解）　$原式=\dfrac{x^{3n}-1}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}-1}{x^n+1}=x^{2n}+x^n+1-$

$(x^n-1)=x^{2n}+2.$

$$4.\ \frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}-\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$$

（解）　原式$=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$

$$=\frac{3x^2}{x^6-1}-\frac{-3x^2}{x^6+1}=\frac{6x^2}{x^{12}-1}。$$

$$5.\ \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)$$

（解）　原式$=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2-1=\dfrac{a^2}{b^2}+2+\dfrac{b^2}{a^2}-1$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2b^2}.$$

$$6.\ \left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\times\left[1+\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}\right]$$

（解）　原式$=\dfrac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\times\dfrac{a^2-(b-c)^2+(b+c)^2-a^2}{a^2-(b-c)^2}$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\times\frac{4bc}{a^2-(b-c)^2}=2.$$

$$7.\ (a^2-b^2-c^2-2bc)\div\frac{a+b+c}{a+b-c}$$

（解）　原式$=[a^2-(b+c)^2]\ \div\dfrac{a+b+c}{a+b-c}$

$$=(a-b-c)(a+b+c)\times\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$=(a-b-c)(a+b-c)=[(a-c)-b][(a-c)$$

$$+b]=(a-c)^2-b^2$$

$$=a^2-b^2+c^2-2ac.$$

8. $\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2+2ab+2cd}{a^2+c^2-b^2-d^2+2ac+2bd}$

$$\div\frac{a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd}{a^2+b^2-c^2-d^2-2ab-2cd}.$$

（解） 原式$=\dfrac{(a+b)^2-(c-d)^2}{(a+c)^2-(b-d)^2}\div\dfrac{(a-c)^2-(b+d)^2}{(a-b)^2-(c+d)^2}$

$$=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{(a+c-b+d)(a+c+b-d)}$$

$$\div\frac{(a-c-b-d)(a-c+b+d)}{(a-c-b-d)(a-b+c+d)}$$

$$=\frac{a+b-c+d}{a+c-b+d}\times\frac{a-b+c+d}{a+b-c+d}=1.$$

VI. 繁分數 按分數中橫線之長短，自最短者算起，將繁分數之分子分母各合併爲一分數，然後相除。

【例題】 試化簡下列各式。

1. $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}=\dfrac{\dfrac{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2}{a^2+x^2}}{\dfrac{a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2}{a^2-x^2}}$

$$=\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}\div\frac{4ax}{a^2-x^2}=\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}\times\frac{a^2-x^2}{4ax}$$

$$=\frac{a^2+x^2}{2ax}.$$

2. $$\frac{\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}}{\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}}+\frac{\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}\times\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}+$$

$$\frac{2x^2}{(x^2+1)}=\frac{x^4+2x^3+6x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

3. $$\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}}=\frac{1}{x+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3-x}}}=\frac{1}{x+\dfrac{3-x}{4}}$$

$$=\frac{4}{4x+3-x}=\frac{4}{3(x+1)}.$$

4. $$\frac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{x-1+\dfrac{1}{x+1}}}=\frac{x+1}{x+1+\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x+1}}}$$

$$=\frac{x+1}{x+1+\dfrac{x+1}{x^2}}=\frac{x+1}{\dfrac{(x^2+1)(x+1)}{x^2}}$$

$$=(x+1)\times\frac{x^2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{x^2}{x^2+1}.$$

## 第五節　乘方及指數

**二項式定理**

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots$$

$$+\frac{n!}{r!(n+r)!}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n。$$

**指數定理**

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

2. $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

3. $(a^m)^n=a^{mn}$。

4. $(ab)^m=a^mb^m$。

5. $\left(\frac{b}{a}\right)^m=\frac{b^m}{a^m}$。

6. $(a^xb^yc^z)^m=a^{mx}b^{my}c^{mz}$。

7. $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$。

【例題】

1. 求$\left(3\frac{3}{8}\right)^{.333\cdots\cdots}$之值。

（解）$\left(3\frac{3}{8}\right)^{.333\cdots\cdots}=\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1.5.$

2. 化簡　$a\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt[4]{a^3}}$

（解）　原式$=a\cdot\sqrt[4]{a^{-3}a^{\frac{3}{4}}}=a.\sqrt[4]{a^{\frac{3}{4}-3}}$

$$=a.\sqrt[4]{a^{-2\frac{1}{4}}}=a.a^{-\frac{9}{16}}=a^{\frac{7}{16}}$$

3.化简　$\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$.

（解）　原式$=\dfrac{2}{1-x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}=\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{4}{1+x}$

$$=\frac{8}{1+x^2}\text{。}$$

4.化简　$\left(a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}}\right),\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}\right)$.

（解）　原式$=a^2-2a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{2}{3}}-a^{-2}$

$$=3\left(a^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right).$$

5.證明　$\sqrt{7}=\dfrac{8}{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{64}}$.

6.展開　$(1-\dfrac{3}{2}x)^5$.

（解）　原式$=1+5\cdot\left(-\dfrac{3}{2}x\right)+\dfrac{5\cdot4}{1\cdot2}\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$

$$+\frac{5.4.3}{1.2.3}\left(-\frac{3}{2}x\right)^3$$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(-\frac{3}{2}x\right)^4+\left(-\frac{3}{2}x\right)^5.$$

$$=1-\frac{15}{2}x+\frac{45}{4}x^2-\frac{135}{4}x^3+5\cdot\frac{81}{16}x^4$$

$$-\frac{243}{32}x^5$$

$$=1-\frac{15}{2}x+\frac{45}{4}x^2-\frac{135}{4}x^3+\frac{405}{16}x^4$$

$$-\frac{243}{32}x^5.$$

7. 試展開　$(3x^{-1}+2y^{\frac{1}{2}})^4$ .

原式 $=(3x^{-1})^4+4\cdot(3x^{-1})^3(2y^{\frac{1}{2}})^1+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}(3x^{-1})^2$

$$(2y^{\frac{1}{2}})^2\quad+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}(3x^{-1})(2y^{\frac{1}{2}})^3+(2y^{\frac{1}{2}})^4$$

$$=81x^{-4}+216x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+216x^{-2}y+96x^{-1}y^{\frac{3}{2}}$$

$$+16y^2.$$

8. 在 $(1+x)^n$ 中試證其係數之和為 $2^n$.

(解)　$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots\cdots+x^n$$

在上式中，若令 $x=1$，則左端變為 $(1+1)^n=2^n$，

而右端即諸係數之和，故得

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$+\cdots\cdots+1=2^n.$$

## 第六節　開方、無理數、虛數

### I. 開方

1.開平方法：

單項式之平方根，係數之平方根卽根之係數，而以2除各個文字之指數卽得。

多項式之平方根，先將該式按降級排列，求得首項之平方根卽根之首項，自原式中減去首項之平方，再以首項之2倍，除餘式之首項，卽得根之第二項，首項之二倍加第二項，而以第二項乘其和，得積自餘式減之，若無餘數，則首項及第二項之和，卽欲求之平方根，若有餘數，則視首項及第二項之和爲新首項，而按上法演算卽得。

【例題】

1.求$x^6+4x^5-10x^3+4x+1$之平方根。

（解）

$$
\begin{array}{r|l}
x^6+4x^5\qquad -10x^3\qquad +4x+1 & x^3+2x^2-2x-1 \\
x^6\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
+4x^5\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & (2x^3+2x^2)(2x^2) \\
+4x^5+4x^4\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-4x^4-10x^3\qquad\qquad\qquad & (2x^3+4x^2-2x)(-2x) \\
-4x^4-10x^3+4x^2\qquad\qquad & \\
\hline
-2x^3-4x^2+4x+1 & (2x^3+4x^3-4x-1)(-1). \\
-2x^3-4x^2+4x+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

平方根$=x^3+2x^2-2x-1$

2. 求$\frac{4x^2}{y}+\frac{\sqrt{x^3}}{y^{-\frac{1}{2}}}-2x+\frac{y}{4}+x^3-4\sqrt{x^5y^1}$之平方根

（解）去各項之根號，而排列之，如下：

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-4x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+4x^2y^{-1}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\frac{y}{4} & x^{\frac{3}{2}}-2xy^{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{2}{}^{\frac{1}{2}} \\
x^3 & \\
\hline
-4x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+4x^2y^{-1} & (2x^{\frac{3}{2}}-2xy^{-\frac{1}{2}})(-2xy^{-\frac{1}{2}}). \\
-4x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+4x^2y^{-1} & \\
\hline
+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\frac{y}{4} & (2x^{\frac{3}{2}}-4xy^{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{2}{}^{\frac{1}{2}})(\frac{y}{2}{}^{\frac{1}{2}}). \\
+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\frac{y}{4} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 平方根$=x^{\frac{3}{2}}-2xy^{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{2}{}^{\frac{1}{2}}$.

3. 求$x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+280$之平方根。

（答）平方根$=x^3-11x+17$。

4. 試求$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$之四乘根。

（解）求得題式平方根之平方根卽得先將題式按 x 之降

級排列，而開平方如次：

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-4x^2+6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4} & x^2-2+\frac{1}{x^2} \\
x^4 \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-4x^2+6 \qquad\qquad & (2x^2-2)(-2) \\
-4x^2+4 \qquad\qquad & \\
\hline
2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4} & \\
2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4} & \left(2x^2-4+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

而 $x^2-2+\frac{1}{x^2}$ 之平方根爲 $x-\frac{1}{x}$，故原式之四乘根爲 $x-\frac{1}{x}$。

2. 開立方法

單項式之立方根，係數之立方根卽根之係數，而後以3除各個文字之指數卽得。

多項式之立方根，先將該式按降級排列求得首項之立方根，卽根之首項，自原式中減去首項之立方，再以首項平方之3倍除餘式之首項，卽得根之第二項。首項平方之3倍加首項與第二項乘積之3倍，再加第二項之平方，而以第二項乘其和，得積，自餘式減之，若無餘數，則首項及第二項之和，卽欲求之立方根，若有餘數，則視首項及第二項之和爲新首項而按上法演算卽得。

【例題】

1.　求$x^6-3x^5-5x^3-3x-1$之立方根。

(解)

$$
\begin{array}{l}
x^6-3x^5\qquad+5x^3\qquad-3x-1 \\
x^6 \\
\hline
\quad-3x^5\qquad+5x^3 \\
\quad-3x^5+3x^4\quad x^3 \\
\hline
\qquad\quad-3x^4+6x^3\qquad-3x-1 \\
\qquad\quad-3x^4+6x^3\qquad-3x-1 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|l}
x^2-x-1 \\
\hline
3(x^2)^2=3x^4 \\
3(x^2)(-x)=\quad 3x^3 \\
-(x^2\quad=\quad+x^2 \\
\hline
\qquad(3x^4-3x^3+x^2)(-x) \\
\hline
3(x^2-x)^2\qquad=3x^4-6x^3+3x^2 \\
3(x^2-x)(-1)=\qquad-3x^2+3x \\
(-1)^2\qquad=\qquad\qquad+1 \\
\hline
\qquad(3x^4-6x^3\qquad+3x+1)(-1)
\end{array}
$$

$\therefore$　立方根$=x^2-x-1$

2.　求$8m^6+36m^5+66m^4+63m^3+33m^2+9m+1$之立方根。

(解)

$$
\begin{array}{l}
8m^6+36m^5+66m^4+63m^3+33m^2+9m+1 \\
8m^6 \\
\hline
\quad+36m^5+66m^4+63m^3 \\
\quad+36m^5+54m^4+27m^3 \\
\hline
\qquad\qquad 12m^4+36m^3+33m^2+9m+1 \\
\qquad\qquad 12m^4+36m^3+33m^2+9m+1 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|l}
\underline{2m^2+3m+1} \\
3(2m^2)^2 = 12m^4 \\
3(2m^2)(3m) = \quad +18m^3 \\
(3m)^2 \quad = \quad\quad +9m^2 \\
\hline
\quad (12m^4+18m^3+9m^2)(3m) \\
\hline
3(2m^2+3m)^2 = 12m^4+36m^3+27m^2 \\
3(2m^2+3m)1 = \quad\quad +6m^2+9m \\
1^2 \quad = \quad\quad\quad +1 \\
\hline
1\cdot(12m^4+36m^3+33m^2+9m+1)
\end{array}
$$

∴ 立方根 $=2m^2+3m+1$.

3. 求 $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$ 之立方根。

（答） 立方根 $=2x^2-3x+4$.

4. 求 $64x^6-192x^5+240x^4-160x^3+60x^2-12x+1$ 之六乘根。

（解） 先求其立方根，而後再求立方根之平方根，即得題式之六乘根 $=2x-1$.

## II. 無理數

【公式】 $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

【例題】

1. 試化簡 $3\sqrt{45}-\sqrt{20}+7\sqrt{5}$.

（解） 原式 $=3\sqrt{5\times9}-\sqrt{4\times5}+7\sqrt{5}$

$$=3\cdot3\cdot\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$$

$=9\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}=14\sqrt{5}$.

2. 求$\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$及$\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$之乘積．

（解）$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=[\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{5})][\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{5})]$

$=2-\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=2-(3+5-2\sqrt{15})$

$=2-8+2\sqrt{15}=2\sqrt{15}-6$.

3. 求以$2-\sqrt{3}$除$2+\sqrt{3}$之商．

（解）$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{4+3+4\sqrt{3}}{4-3}$

$=7+4\sqrt{3}$

4. 試化簡

$$\frac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\div\frac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}.$$

（解）原式$=\dfrac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\times\dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}$

$$=\frac{30\sqrt{5}+40\sqrt{3}-30\sqrt{3}-24\sqrt{5}}{40\sqrt{3}-30\sqrt{5}+24\sqrt{5}-30\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})}{2(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})^2}{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$$

$$=\frac{45+75+30\sqrt{15}}{75-45}=\frac{120+30\sqrt{15}}{30}$$

$$=4+\sqrt{15}.$$

5. 試求$12+\sqrt{140}$之平方根・

（解） $(12+\sqrt{140})^{\frac{1}{2}}=(12+\sqrt{35.4})^{\frac{1}{2}}$

$=[(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\times\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2]^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{7}.$

6. 求$6-\sqrt{35}$之平方根・

（解） $(6-\sqrt{35})^{\frac{1}{2}}=\left(6-2\sqrt{\frac{35}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2\right.$

$\left.-2+\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}.$

7. 化$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$為簡式・

（答） 原式$=0$。

8. 化$\frac{2\sqrt{(a+b)}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$為簡式・

（答） 原式$=\frac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}$・

9. 化$3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{(7+2\sqrt{10})}$為簡式。

（答） 原式$=4\sqrt{5}$・

10. 化$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$為簡式・

（答）　原式$=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

## III.　虛數

【定理】

1，若$a+bi=0$

則　$a=0$，　$b=0$。

2，若　$a+bi=c+di$

則　$a=c$，　$b=d$。

【例題】

1.　求$2\sqrt{3}i+3\sqrt{2}i$及$4\sqrt{3}i-5\sqrt{2}i$之乘積。

（解）　$(2\sqrt{3}i+3\sqrt{2}i)(4\sqrt{3}i-5\sqrt{2}i)$

$=-24-12\sqrt{6}+10\sqrt{6}+30=6-2\sqrt{6}$。

2.　化$\frac{3\sqrt{2}i+2\sqrt{5}i}{3\sqrt{2}i-2\sqrt{5}i}$之分母爲有理式

（解）　$\frac{3\sqrt{2}i+2\sqrt{5}i}{3\sqrt{2}i-2\sqrt{5}i}$

$=\frac{(3\sqrt{2}i+2\sqrt{5}i)(3\sqrt{2}i+2\sqrt{5}i)}{(3\sqrt{2}i-2\sqrt{5}i)(3\sqrt{2}i+2\sqrt{5}i)}$

$=\frac{-18-12\sqrt{10}-20}{-18+20}=\frac{-38-12\sqrt{10}}{2}$

$=-19-6\sqrt{10}$。

3.　化簡　$\frac{3+2i}{2-5i}+\frac{3-2i}{2+5i}$

（解） 原式$=\dfrac{-4+19i}{4-(-25)}+\dfrac{-4-19i}{4-(-25)}=\dfrac{-8}{29}$

4. 化簡 $\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$

（解） $\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$

$=\dfrac{(a+i)^2+(a+i)(a-i)+(a-i)^2}{(a+i)+(a-i)}$

$=\dfrac{3a^2+i^2}{2a}=\dfrac{3a^2-1}{2}$。

6. 求$\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}$之平方。

（解） $[\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}]^2$

$=(9+40i)+2\sqrt{9+40i}\sqrt{9-40i}+(9-40i)$

$=18+2\sqrt{9^2-40^2}=18+2\sqrt{1681}=100$。

6. 化簡 $\dfrac{1}{3-\sqrt{-2}}$。

（答）原式$=\dfrac{3+\sqrt{2}i}{11}$。

7. 試證 $2+3i$為$-5+12i$之平方根。

8化簡 $(2+3i)^2/(2+i)$。

（答） 原式$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{29}{5}i$。

## 第七節 對數及其用法

I. 定理

1, $\log_c a\times b=\log_c a+\log_c b$

2. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$。

3. $\log_c a^n = n \log_c a$。

4. $\log_c a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_c a$。

【例題】

1. 已知$\log_{10}2 = .3010300$，$\log_{10}3 = .4771213$，試求$\log_{10}6$，$\log_{10}40$，$\log_{10}12$，$\log_{10}15$，$\log_{10}\sqrt[3]{2880}$之值。

(解)　(a)$\log_{10}6 = \log_{10}(2\times3) = \log_{10}2 + \log_{10}3$

$= .3010300 + .4771213 = .7781513.$

(b)$\log_{10}40 = \log_{10}(4\times10) = \log_{10}2^2 + \log_{10}10$

$= 2\times.3010300 + 1 = 1.6020600.$

(c)$\log_{10}12 = \log_{10}(2^2\times3) = 2\log_{10}2 + \log_{10}3$

$= 2\times.3010300 + .4771213$

$= 1.0791813.$

(d)$\log_{10}15 = \log_{10}\left(\frac{3\times10}{2}\right) = \log_{10}10 + \log_{10}3$

$-\log_{10}2 = 1 + .4771213 - .3010300$

$= 1.1760913.$

(e)$\log_{10}\sqrt[3]{2880} = \frac{1}{3}\log_{10}2880 = \frac{1}{3}\log_{10}(10\times2^5\times3^2)$

$= \frac{1}{3}(\log_{10}10 + 5\log_{10}2 + 2\log_{10}3)$

$$=\frac{1}{3}(1+1.5051500+.9542426)=1.1531308$$

2. 已知$\log_{10}5=.6989700$，$\log_{10}6=.7781513$. 試求$\log_{10}324$, $\log_{10}1.28$，$\log_{10}.00432$, 及$\log(1.2)^{\frac{2}{3}}$之值。

（答） $\log_{10}324=2.5105452$，$\log_{10}1.28=.1637578$。

$\log_{10}.00432=-2.3645161$，

$\log(1.2)^{\frac{2}{3}}=.0527875$。

# 第二章 方程式之解法

## 第一節 一元一次方程式

解法 按移項法，將方程式中含未知數之項，全移於等號之左，已知數全移於等號之右而後按等量公理，卽可求出未知數之值。

【例題】

1. 試解$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{6}+1$

（解） 等號兩邊，各乘12，得

$$6x-6+4x-8=3x+9+2x+8+12$$

$$6x+4x-3x-2x=9+8+12+6+8$$

$$5x=43$$

$$\therefore\ x=8\frac{3}{5}.$$

2. 試解$4.8x-1.44x+0.1=1.6x+8.9$

(解) $4.8x-1.44x-1.6x=8.9-0.1$

$1.76x=8.8$

$\therefore\ x=5.$

3. 試解$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-5)+(x+7)(x-2)=0$

(解) $x^2-7x+10-2x^2+15x-25+x^2+5x-14=0$

$x^2-2x^2+x^2-7x+15x+5x=14+25-10$

$13x=29$

$\therefore\ x=2\frac{3}{13}.$

4. 試解$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$

(解) $(x-1)^3+x^5+(x+1)^3=3x(x^2-1)$去括弧得

$3x^3+6x=3x^3-3x$

$3x^3-3x^3+6x+36=0$

$9x=0$

$\therefore\ x=0.$

5. 試解$(x-9)(x-7)(x-5)(x-1)=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10).$

(解) 兩邊去括弧，得

$x^4-22x^3+164x^2-458x+315$

$=x^4-22x^3+164x^2-488x+480$

$30x=165$

$\therefore\quad x=55$。

6. 試解$\dfrac{3abc}{a+b}+\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\dfrac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\dfrac{bx}{a}$。

（解）兩邊同以$a(a+b)^2$乘之，得

$$3a^2bc(a+b)+\frac{a^3b^2}{a+b}+(2a+b)b^2x$$

$$=3ac(a+b)^2x+b(a+b)^2x$$

即　$3a^2bc\,(a+b)+\dfrac{a^3b^2}{a+b}=3ac(a+b)^2x+a^2bx$

即　$a^2b\dfrac{3c(a+b)^2+ab}{a+b}=a[3c(a+b)^2+ab]x$

$\therefore\quad x=\dfrac{ab}{a+b}$。

7. 試解$\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{c}+\dfrac{x-c}{a}=\dfrac{x-(a+b+c)}{abc}$

（解）以abc乘等式兩端，得

$$cax+abx+bcx-ca^2-ab^2-bc^2=x-(a+b+c)$$

即　$bcx+cax+abx-x=bc^2+ca^2+ab^2-(a+b+c)$

$\therefore\quad x=\dfrac{bc^2+ca^2+ab^2-(a+b+c)}{bc+ca+ab-1}$。

8. 試解$(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$

（答）$x=0$

9. 試解$(x+a+b+c)(x+a-b-c)=(x-a-b+c)$

$(x-a+b-c)$

（答）$x=\dfrac{bc}{a}$

10. 試解$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3$
$=3(x-a)(x-b)(x-c)$。

（答）　$x=\frac{1}{3}(a+b+c)$。

**應用問題**

1. 某人以其收入金之$\frac{1}{3}$作飲食費，$\frac{1}{8}$衣住費，$\frac{1}{10}$交際費，尙餘318元，問某人收入若干？

（解）　令$x=$元數。

$$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{8}-\frac{x}{10}=318$$

$x=720$元。

2. 不知投考生若干，但知臨場不到者十分之一，犯規投考者二十分之一，成績不及格者五分之三，結果及格者百人問投考人數？

（解）　設投考人數爲$x$，則

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+\frac{3x}{5}=x-100$$

$$2x+x+12x=20x-2000$$

$\therefore\quad 5x=2000$

$\therefore\quad x=400$

3. 有父子二人，父之年爲40，子之年爲10，問父年爲子年之三倍時，爲今後若干年？

（解） 命$x$＝年數，則

$$40+x=3(x+10)$$

$$3x-x=40-30$$

$$\therefore\ 2x=10$$

$$\therefore\ x=5.$$

4. 有父子二人，問其年齡，父年為子年之三倍，而今後10年父年當子年之二倍，問父子之年各幾何？

（解） 命$x$代子年，則父年＝$3x$

$$3x+10=2(x+10)$$

$$3x+10=2x+20$$

$$3x-2x=20-10$$

$$\therefore\ x=10.$$

∴ 子年＝10歲，父年＝$10\times3=30$歲。

5. 有兵一千人，屯在某地，備60日間之糧，然10日後，忽增屯在之兵，故所備之糧，僅支20日，問所增之兵數幾何？

（解） 命$x$表所增兵數，得

$$(60-10)\times1000=20\times(1000+x)$$

$$50000=20000+20x$$

$$\therefore\ 20x=30000$$

$\therefore\quad x=1500$，

（答）　增兵1500人。

6.　有甲乙二工，甲20日完成之工程，乙30日完成，今甲先做此工程，若干日之後，以乙代之，乙比甲多做10日，此工程始完成，問甲做工之日數幾何？

（解）　令x代甲做日數，則

$$\frac{x}{20}+\frac{x+10}{30}=1.$$

$$3x+2(x+10)=60$$

$$3x+2x+20=60$$

$$5x=40$$

$\therefore\quad x=8.$

（答）　甲共做8日。

7.　有兵卒一隊，擺中空之方陣二個，但一爲三列，一爲五列，而其一方陣，恰能容他之一方陣，且兩方陣之人數相等，問兵卒之人數幾何？

（解）　令x代三列空陣最外一層之人數，則有

$$x^2-(x-6)^2=(x-6)^2-(x-16)^2$$

$$x^2-x^2+12x-36=x^2-12x+36-x^2+32x-256$$

$$12x+12x-32x=36-256+36$$

$\therefore\quad -8x=-184$

$\therefore\quad x=23$人．

故三列空陣之人數爲　$23^2-17^2=240$人．

故全人數$=240\times 2=480$人．

8．有一旅人，自甲地一時間，以5哩之速，向乙地出發，又有一旅人，同時自乙地一時間以3哩之速，向甲地出發，而第一人至半途時，距第二人5哩。問甲乙兩地之距離如何？

（解）令$x=$哩數，則

$$\frac{\frac{1}{2}x}{5}=\frac{\frac{1}{2}x-5}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}x=\frac{5}{2}x-25$$

$$\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}x=-25$$

$\therefore\quad x=25$哩．

（答）甲乙二地相距25．

9．四年前父年爲子年之7倍，16年後爲其子之2倍，問父子年齡各幾何？

（解）令$x=$父年、

$$\frac{x-4}{7}+4=\frac{x+16}{2}-16$$

$$2x-8+56=7x+112-224$$

$$5x=224-112-8+56=160$$

$\therefore\ x=32$，

$\therefore\ \dfrac{32-4}{7}+4=4+4=8$。

（答）父年32歲，子年8歲。

10. 兔在犬前60步，犬追之，兔行9步時，犬可行6步，而兔行7步之長，等於犬3步之長，求犬追幾步而及兔，但犬與兔同走一路。

（解）設兔一步之長爲 a尺，則犬一步之長爲$\frac{7}{3}$a 尺，

故所求之步數若爲 x，則犬走之長爲$\frac{7}{3}$ax尺。

又犬走 x步時，兔可走$\frac{9}{6}$x步，其長爲$\frac{9}{6}$ax尺，故得方程式

$$\frac{7}{3}ax=60a+\frac{9}{6}ax$$

以a除各項，得

$$\frac{7}{3}x=60\ \frac{9}{6}x$$

$\therefore\ x=72$。

（答）犬追72步而及兔。

## 第二節　聯立一次方程式

【注意】 聯立方程式中，未知數之數，若多於方程式之數，則未知數之値有無窮個，若少於方程式之數，則無解。

I. 加減消去法　以適當之數值，乘各方程式之兩端，使某一未知數之係數相同，而後視其符號之同與否，引用減法或加法，使二式相加減消，去該未知數，則得一方程式含一未知數於是用第一節方法，卽能解出。

【例題】

1. 解

$$\begin{cases} 3x+2y=13 & (1) \\ 7x+3y=27 & (2) \end{cases}$$

（解）以$3\times(1)$，得　$9x+6y=39$　　(3)

以$2\times(2)$　得　$14x+6y=54$　　(4)

$(4)-(3)$　得　$5x=15$

$\therefore\ x=3.$

以x之値，代入(1)，得

$$9+2y=13$$

$\therefore\ y=2.$

故　$x=3$，$y=2$爲所求之値。

2. 解

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{3}-\dfrac{y}{4}=9 & (1) \\ 6x-\dfrac{7y}{4}=29 & (2) \end{cases}$$

（解） 以12×(1)，4×(2)得

$$20x-3y=108 \qquad (3)$$

$$24x-7y=116 \qquad (4)$$

以 7×(3)，3×(4)得

$$140x-21y=756 \qquad (5)$$

$$72x-21y=348 \qquad (6)$$

(5)−(6)得 $68x=408$

$\therefore$ $x=6$。

代入(3)得$120-3y=108$

$\therefore$ $y=4$、

3. 解

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 & (1) \\ \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=3 & (2) \end{cases}$$

（解） 以2×(1)，而與(2)相加，得

$$\frac{5}{4}x=5。$$

$\therefore$ $x=4$。

代入(1)，得 $y=-3$。

4. 解

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+2}{4}=0 & (1)\\[2ex] \dfrac{2x-5}{5}-\dfrac{11-2y}{7}=0 & (2)\end{cases}$$

（解）　去(1)，(2)之分母而整理之，得

$$4x-3y=14 \qquad (3)$$

$$14x+10y=90 \qquad (4)$$

以10×(3)，3×(4)，相加，得

$$82x=140+270=410$$

$\therefore\quad x=5$

代入(3)，得$y=2$。

5.　解

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+5}{2}=0 & (1)\\[2ex] \dfrac{2x-7}{3}-\dfrac{13-y}{16}=0 & (2)\end{cases}$$

答　$x=5$，　$y=-3$。

6.　解

$$\begin{cases}2x-3y+4z=4 & (1)\\ 3x+5y-7z=12 & (2)\\ 5x-y-8z=5 & (3)\end{cases}$$

（解）　(1)×2+(3)，　$9x-7y=13$　(4)

(1)×7+(2)×4　$26x-y=76$　(5)

$$\left.\begin{array}{lrl} (5\times7)-(4) & 173x=519 & \therefore\ x=3 \\ \text{代入}(5) & y=26\times3=76 & \therefore\ y=2 \\ \text{代入}(1) & 6-6+4z=4 & \therefore\ z=1 \end{array}\right\}$$

（注意）解三個三元一次方程式者，可先從二對方程式消去一個未知數，更從所得二方程式消去第二未知數。四元一次方程式，或多於四元者亦可倣此解法。

7．解

$$\begin{cases} y+z=2a & (1) \\ z+x=2b & (2) \\ x+y=2c & (3) \end{cases}$$

（解）加此之式，得

$$2x+2y+2z=2a+2b+2c$$

即　$x+y+z=a+b+c \qquad (4)$

$$\left.\begin{array}{ll} (4)-(1) & x=b+c-a \\ (4)-(2) & y=c+a-b \\ (4)-(3) & z=a+b-c \end{array}\right\}$$

8．解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} & (1) \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\dfrac{5}{6} & (2) \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{4}{z} & (3) \end{cases}$$

(解) 視$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$爲三個未知數。

$$(1)\times3+(3)\qquad \frac{7}{x}-\frac{4}{z}=\frac{1}{2}\qquad(4)$$

$$(1)+(2)\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=4\qquad(5)$$

$$(4)+(5)\times4\qquad \frac{11}{x}=16\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \therefore & x=\frac{2}{3} \\ \text{代入(1)}\ \therefore & y=\frac{3}{4} \\ \text{代入(2)}\ \therefore & z=\frac{2}{5} \end{array}\right\}$$

II. 代入消去法　在任一方程式中，視某未知數爲常數，而解出他未知數，代入第二式，則第二式卽變爲一元一次方程式，於是引用第一節方法，卽能解出。

【例題】

1. 解

$$\begin{cases} 3x-5y=2 & (1) \\ 5x-2y=16 & (2) \end{cases}$$

(解) 由(1)，解得　$x=\frac{1}{3}(5y+2)$.　(3)

代入(2) 得

$$\frac{5}{3}(5y+2)-2y=16.$$

此爲僅含一未知數之一次方程式，解之得

$$y=2.$$

代入(3) 得 $x=4.$

2. 試解

$$\begin{cases}4x+\dfrac{y}{2}=3 & (1)\\ 2x+y=0 & (2)\end{cases}$$

(解) 自(2)得 $y=-2x$ (3)

代入(1)得 $4x-x=3$

$$\therefore\ 3x=3$$

$$\therefore\ x=1$$

代入(3)得 $y=-2.$

3. 解

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 & (1)\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2y}{3}=6 & (2)\end{cases}$$

(解) 自(1)得 $\dfrac{y}{3}=2-\dfrac{x}{2}$ (3)

代入(2) 得 $\dfrac{x}{4}-4+\dfrac{x}{2}\times2=6$

$\therefore \quad \frac{5x}{4}=10$

$\therefore \quad x=8.$

代入(3)得 $y=-6$。

4. 解

$$\begin{cases} 8x+3y=24 & (1) \\ 2x-y=6 & (2) \end{cases}$$

(解) 自(2)得$y=6-2x$ (3)

代入(1)得 $8x+18-6x=24$

$\therefore \quad 2x=24-18=6$

$\therefore \quad x=3$。

代入(3)得 $y=0$。

5. 試解

$$\begin{cases} x+.2y=-1.4 & (1) \\ .4x-y=1.6 & (2) \end{cases}$$

(解) 自(1)得 $x=-1.4-.2y$ (3)

代入(2)得 $-.56-.08y-y=1.6$

$\therefore \quad -1.08y=1.6+.56=2.16.$

$\therefore \quad y=-2$。

代入(3),得 $x=-1.4-.2(-2)=.4-1.4=-1$。

6. 試解

$$\begin{cases} x+y=4 & (1) \\ y+z=9 & (2) \\ z+x=5 & (3) \end{cases}$$

（解）　自(1)得 $y=4-x$． (4)

代入(2)得　$z-x=9-4=5$ (5)

自(3)得　$z=5-x$． (6)

代入(5)得　$5-x-x=5$．

　$\therefore\ x=0$．

代入(1)得　$y=4$

代入(2)得　$z=5$、

7．解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 & (1) \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=5 & (2) \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-4 & (3) \end{cases}$$

（解）　視$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$，等爲未知數，解之得

$$x=\frac{1}{2},\quad y=1, z=\frac{1}{3}、$$

8．試解

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c & (1) \\ bx+cy+az=a^2+b^2+c^2 & (2) \\ cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2 & (3) \end{cases}$$

（解）　按法解之得

$$\begin{cases} x=b+c-a \\ y=c+a-b \\ z=a+b-c \end{cases}$$

III. 比較消去法　在二方程式中，視某未知數爲常數，同時解出他一未知數，而後使所得之二值相等，得一僅含一未知數之一次方程式，解之卽得。

【例題】

1.　試解

$$\begin{cases} 3x+7y=7 & (1) \\ 2x+3y=8 & (2) \end{cases}$$

（解）　由(1)及(2)，得 $x=\dfrac{8-3y}{2}$　(3)

$$x=\frac{7-7y}{3}\quad(4)$$

比較(3)，(4)卽得

$$\frac{8-3y}{2}=\frac{7-7y}{3}$$

解之得　　$y=-2$；

由(3)，得　　$x=7$.　　答

2.　試解

$$\begin{cases} 3y-7x=4 & (1) \\ 2y+5x=22 & (2) \end{cases}$$

（解）　由(1)及(2)，得$y=\frac{4+7x}{3}$　　(3)

$$y=\frac{22-5x}{2}\qquad(4)$$

比較(3)(4)得　$\frac{4+7x}{3}=\frac{22-5x}{2}$

解之得　$14x+15x=66-8$

$\therefore\quad 29x=58$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore\qquad x=2\\ \text{代入(3)得}\ y=6\end{array}\right\}\text{答}$$

3.　試解

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{6} & (1)\\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{4}{3} & (2)\end{cases}$$

由(1)及(2)得　$\frac{1}{x}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{y}$　　(3)

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2y}\qquad(4)$$

比較(3)，(4)，得　$-\frac{1}{6}-\frac{1}{y}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2y}$

$\therefore\quad \frac{3}{2y}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$

$\frac{5}{2y}=-\frac{5}{6}$

$\therefore\quad 2y=-6$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \qquad & y=-3 \\ \text{代入(3)得} \quad & x=6 \end{aligned}\right\}\text{答}$$

4. 試解

$$\begin{cases} \dfrac{5m}{6}+\dfrac{n}{4}=7 & (1) \\ \dfrac{2m}{3}-\dfrac{n}{8}=3 & (2) \end{cases}$$

(解)　由(1)及(2)得　$\dfrac{n}{4}=7-\dfrac{5}{6}m$ (3)

$$\frac{n}{4}=\frac{4m}{3}-6 \quad (4)$$

比較(3)，(4)，得 $7-\dfrac{5}{6}m=\dfrac{4m}{3}-6$

$\therefore\quad 42-5m=8m-36$

$\therefore\quad m=6.$

代入(3)得　$n=8.$

5. 試解

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{3a}{y}=1 & (1) \\ \dfrac{3a}{x}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

(解)　由(1)及(2)得　$\dfrac{a}{x}=1-\dfrac{3a}{y}$　　(3)

$$\frac{a}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{y}\right) \quad (4)$$

$$\therefore\ 1-\frac{3a}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{y}\right)$$

$$\frac{3a}{y}-\frac{a}{3y}=1-\frac{1}{6}$$

$$\frac{8a}{3y}=\frac{5}{6}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore & y=\dfrac{16a}{5}\\ \text{代入(3)得} & x=16a\end{array}\right\}\text{答}$$

6. 試解

$$\begin{cases}4x-3y=z & (1)\\ z=x+y & (2)\\ 2x=3y+1 & (3)\end{cases}$$

(解)　比較(1)及(2)得　$4x-3y=x+y$　(4)

由(3)及(4)得　$x=\frac{1}{2}(1+3y)$　(5)

$$x=\frac{1}{3}4y \qquad (6)$$

比較(5)及(6)得

$$\frac{1}{2}(3y+1)=\frac{4}{3}y$$

$$9y-8y=-3$$

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore & y=-3\\ \text{代入(6)得} & x=-4\\ \text{代入(2)得} & z=-7\end{array}\right\}\text{答}$$

7. 試解

$$\begin{cases} ax+by=1 & (1) \\ by+cz=1 & (2) \\ cz+ax=1 & (3) \end{cases}$$

（解）按法解之得
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2a} \\ y&=\frac{1}{2b} \\ z&=\frac{1}{2c} \end{aligned}\right\}\text{答}$$

8. 試解

$$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=5 & (1) \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3 & (2) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1 & (3) \end{cases}$$

（解）按法解得
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2} \\ y&=\frac{1}{3} \\ z&=\frac{1}{4} \end{aligned}\right\}\text{答}$$

## IV、應用問題

1. 雞鴨頭共30，足100。問雞鴨各若干？

（解）命　x＝雞數，

　　y＝鶴數，

則　$x+y=30$　　(1)

　　$4x+2y=100$　　(2)

　　(2)－2×(1)得　$2x=40$

$\therefore$　$x=20$。

代入(1)得$y=10$。

(答)龜20隻，鶴10隻。

2. 金1000元，分存於甲，乙二銀行，甲行年利5分，乙行6分，年終共得利56元，問二行之存款各若干？

(解)　令　x＝甲行存款

　　y＝乙行存款

則　$x+y=1000$　　(1)

　　$.05x+.06y=56$　　(2)

解之得　$x=400$

　　$y=600$

(答)　甲行共存400元。

　　乙行共存600元。

3. 甲乙二人，自隔120里之兩處，同時相向而行，甲比乙早到6日，歸路甲每日增速五分之一，乙每日增速四分之一，於是甲比乙早到四日。問去時每人之速率如何？

（解）令　$x=$甲之速率

$y=$乙之速率

則歸路甲之速率爲　$x+\frac{x}{5}=\frac{6x}{5}$

乙之速率爲　$y+\frac{y}{4}=\frac{5y}{4}$

因得　$\frac{120}{x}=\frac{120}{y}-6$　　(1)

$\frac{120}{\frac{6x}{5}}=\frac{120}{\frac{5y}{4}}-4$　(2)

解之得　$x=5$

$y=4$。

即甲每日5里，乙每日4里。

4. 有長92碼之火車，與長84碼之火車，相向而駛，則$1\frac{1}{2}$秒全行過，若相併駛，則6秒一車越過他車，試求各一秒之速率。

（解）令各車每秒之速率爲x碼及y碼，兩車相向而行，則$1\frac{1}{2}$秒所行距離之和爲兩車長之和，又相併而行，則6秒兩車距離之差亦爲兩車長之和，因得次之方程式：

$1\frac{1}{2}(x+y)=92+84$　　(1)

$6(x-y)=92+84$　　(2)

解之得　$x=73\frac{1}{3}$，　$y=44$。

即所求之速率為$73\frac{1}{3}$碼，及44碼。

5.　男子十人，兒童八人，每日之工資為4.44元。而男子四人之工資，較兒童六人之工資多12分，然則兒童工資如何？

（解）令　$x=$兒童一人工資，

$y=$男子一人工資。

則　$8x+10y=4.44$　　(1)

$4y-6x=.12$　　(2)

$2\times(1)-5\times(2)$得

$$16x+30x=8.88-.6$$

$\therefore\ 46x=8.28$

$\therefore\ x=18$分。

（答）兒童每人工資為18分。

6.　一事甲乙丙作之30日而成，甲乙兩人合作之32日而成，乙丙兩人合作之，120日而成，今使各人獨作此事，則各須幾日而成？

（解）令　$x=$甲獨作所需日數

$y=$乙獨作所需日數

$z=$丙獨作所需日數

則三人每日應各作全工程之$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$，故得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{32} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120} \qquad (3)$$

解之得　$x=40$

$y=160$

$z=480$。

（答）　甲獨作需40日，乙獨作需160日，丙獨作需480日。

7. 一舟往復於河流上下兩地之間共費十時，兩地間之距離爲20里，已知此舟順流行三里之時刻，與逆流行二里之時刻相等，則其往復之時刻各若何？

（解）　令　$x$＝順流所需之時間

$y$＝逆流所需之時間

於是順流每時應走$\frac{20}{x}$里，逆流每時$\frac{20}{y}$里，故得

$$\begin{cases} x+y=10 & (1) \\ \dfrac{3}{\frac{20}{x}}=\dfrac{2}{\frac{20}{y}} & (2) \end{cases}$$

化簡(2)得　$3x=2y$　(3)

由(1)，(3)二式解得

$$x=4,\quad y=6。$$

即順流共需4小時，逆流共需6小時。

8. 有銀1000元，分配甲、乙、丙、丁四人，乙之所得，爲甲所得之半，丙之所得，較丁之所得多甲所得之三分之一，又乙所得增100元，等於丙丁二人所得之和，然則四人之所得各幾何？

（答）甲450元，乙225元，丙$237\frac{1}{2}$元，丁$87\frac{1}{2}$元。

## 第三節　一元二次方程式

### I. 解法

1. 因數分解法

二次方程式之一般形狀爲

$$ax^2+bx+c=0$$

將右端之二次式，按因數分解法，分爲下形；

$$(px+q)(rx+s)=0$$

則　$$x_1=-\frac{q}{p},\quad x_2=-\frac{s}{r}。$$

此即欲求之二根也。

【例題】

1. 試解 $x^2-3x+2=0$。

（解） $(x-1)(x-2)=0$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right\} \text{答。}$$

2. 試解 $3x^2-4x-32=0$

（解） $(3x+8)(x-4)=0$

$$\left.\begin{array}{ll} \therefore 3x+8=0 & \therefore x=-\dfrac{8}{3} \\ x-4=0 & \therefore x=4 \end{array}\right\} \text{答}$$

3. 試解 $-3x^2+5x=-2$

（解） 原式卽 $-3x^2+5x+2=0$

卽 $3x^2-5x-2=0$

$(3x+1)(x-2)=0$

$$\left.\begin{array}{lll} \therefore & 3x+1=0 & \therefore x=-\dfrac{1}{3} \\ \text{又} & x-2=0 & \therefore x=2 \end{array}\right\} \text{答}$$

4. $(2x+4)^2-(3x-1)^2=(4x-6)^2$ 試解之

（解） 原式去括弧，移項，卽

$3x^2-10x+3=0$

$(3x-1)(x-3)=0$

$$\therefore\ 3x-1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{3}$$
$$\text{又}\ x-3=0 \qquad \therefore\ x=3$$
答。

5. $x^2+(a-x)^2=(a-ax)^2$試解之。

（解）原式去括弧並加以整理即

$$x^2(2-a^2)-2a(1-a)x=0$$

$$\therefore\ x=0，\text{或}x=\frac{2a(1-a)}{2-a^2}。$$

6. 試解 $(2x+1)^2+(3x+1)^2=(2x+3)^2$

（解）原式去括弧並加以整理，即

$$9x^2-2x-7=0$$

即 $(9x+7)(x-1)=0$

$$\therefore\ 9x+7=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{7}{9}$$
$$\text{又}\ x-1=0 \qquad \therefore\ x=1.$$
答

7. 試解 $3x^2+(5x+2)^2=20x+32$

（答）$x=\pm1$。

8. $7(x^2-1)-(x+3)(x-3)=56$試解之

（答）$x=\pm3$。

II. 公式解法

令一般之二次方程式為

$$ax^2+bx+c=0$$

則　$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

【討論】 $b^2-4ac$名為二次方程式之判別式，若

1，$b^2-4ac>0$，　原式有二實根。

2，$b^2-4ac=0$　　原式有二等根。

3，$b^2-4ac<0$　　原式有二虛根。

【例題】

1。試解　$3x^2=10x-3$

（解）移項得　$3x^2-10x+3=0$

以$x^2$之係數3除之則　$x^2-\frac{10}{3}x+1=0$

x之係數之半為$-\frac{5}{3}$，故$x^2-\frac{10}{3}x$加$\left(-\frac{5}{3}\right)^2$，則成完全平方，

因而加$\left(-\frac{5}{3}\right)^2$即$\frac{25}{9}$，且同時減之，則得

$$x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+1=0$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0$$

即　$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=0$

$$\therefore\ \left[x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right]\left[x-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right]=0$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)=0$$

故 $x-\frac{1}{3}=0$，或$x-3=0$

因得 $x-3$，或$x=\frac{1}{3}$。

2. 試解 $x^2=2x+99$。

(解) 移項，得$x^2-2x-99=0$。

在此 $a=1$，$b=-2$，$c=-99$。

$$\therefore \quad x=\frac{+2\pm\sqrt{4+396}}{2}=1\pm10$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=11 \\ x=-9 \end{array}\right\}\text{答}$$

3. $6x^2=5x+1$試解之。

(解) 移項，得$6x^2-5x-1=0$

在此 $a=6$，$b=-5$，$c=-1$。

$$\therefore \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{12}=\frac{5\pm7}{12}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{6} \end{array}\right\}\text{答}$$

4. 試解 $16x^2+3=16x$

(解) 移項得 $16x^2-16x+3=0$

在此　$a=16$，$b=-16$，$c=3$，

$$\therefore\quad x=\frac{16\pm\sqrt{256-192}}{32}=\frac{16\pm8}{32}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}\text{答},$$

5.　試解　$(x+2)^2=4(x-1)$

（答）　$x=0$ 或 $4$.

6.　試解　$x^2+2ax=b^2+2ab$。

（答）　$x=b$或$-(2a+b)$

7.　在$3x^2+bx+3=0$式中，b為何值，始能有二等根？

（解）　在此判別式為

$$b^2-4\times3\times3=b^2-36$$

欲使原式有二等根必其判別式為零，故得

$$b^2-36=0$$

即　$b=\pm6$

8.　在方程式$x^2+bx+bc=0$中，欲使其有二等根，b，c之關係應如何？

（答）　$b=4c$，或$b=0$。

II.　二次方程式根與係數之關係

令 $r_1, r_2$為方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

之二根，則

1. $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$

2. $r_1r_2=\frac{c}{a}$。

【例題】

1. 已知某二次方程式之根為 $r_1$ 及 $r_2$，試求其方程式。

（解） 令該方程式為

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

則 $\frac{b}{a}=-(r_1+r_2)$， $\frac{c}{a}=r_1r_1$。(2)

在原式中以a除全式，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

以(2)中各值代入得

$$x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2=0$$。

此即欲求之方程式也。

2. 已知某方程式之二根為3與5，試求其方程式。

（解） 按上公式得欲求之方程式為

$$x^2-(3+5)x+3\cdot5=0$$

即　$x^2-8x+15=0$。

3.　已知方程式之根爲

1.　$\frac{4}{3}$，$-\frac{3}{2}$，　2.　$a+1$，$a-1$，

3.　$\frac{m+n}{m-n}$，$\frac{m-n}{m+n}$

（答）　1. $6x+x-12=0$，　2. $x^2-2ax+(a^2-1)=0$，

3. $x^2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}+1=0$

4.　若　$36x^2-(k+5)x+25=0$有二等根，試決定k值。

（解）　該式有等根之條件爲

$(k+5)^2-4\times25\times36=0$

即　$k^2+10k+25-4\times25\times36=0$

$k^2+10k-25\times11\times13=0$

$(k+11\times5)(k-13\times5)=0$

∴　$k=-55$，或65。

5.　若下之方程式有二等根，試決定k值。

1.　$x^2-4kx+64=0$

2.　$(k^2+13)x^2+112x+64=0$

（答）　1.　$k=\pm4$，　2.　$k=\pm6$

## 第四節　聯立二次方程式

聯立二次方程式，無一定解法，讀者倘能於下列諸例，熟讀而深思之，則觸類旁通，庶乎得之。

【例題】

1. 試解

$$\begin{cases} xy=2 & (1) \\ x+y=3 & (2) \end{cases}$$

(解)　由(2)得　$x=3-y$，

代入(1)得　$(3-y)y=2$

即　$y^2-3y+2=0$

$\therefore\quad y=1,\quad y=2$。

代入(1)得　$x=2,\quad x=1$。

故得二組值　$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$，$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$。

(別解)(2)自乘得　$x^2+2xy+y^2=9$　(3)。

$(3)-(1)\times 4$得　$x^2-2xy+y^2=1$

即　$(x-y)^2=1$

即　$x-y=1$　　(4)

或　$x-y=-1$　　(5)。

由(2)及(4)，解得　$\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}$

由(2)及(5)，解得 $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\}$

2. 試解

$$\begin{cases}x-y=2 & (1)\\xy=15 & (2)\end{cases}$$

(解) (1)式自乘，得 $x^2-2xy+y^2=4$ (3)

(3)+(2)×4得 $x^2+2xy+y^2=64$

即 $(x+y)^2=64$

即 $x+y=8$ (4)

或 $x+y=-8$ (5)

自(1)及(4)得 $\left.\begin{matrix}x=5\\y=3\end{matrix}\right\}$

自(1)及(5)得 $\left.\begin{matrix}x=-3\\y=-5\end{matrix}\right\}$

3. 試解

$$\begin{cases}x+y=5 & (1)\\x^2+y^2=13 & (2)\end{cases}$$

(解) 2×(2)得 $2x^2+2y^2=26$ (3)

(1)自乘， $x^2+2xy+y^2=25$ (4)

(3)-(4)得 $x^2-2xy+y^2=1$

卽　$(x-y)^2=1$

卽　$x-y=1$　　　　(5)

或　$x-y=-1$　　　　(6)

由(1)及(5)解得　$\left.\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right\}$

由(1)及(6)解得　$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$

4，試解

$$\begin{cases}xy=36 & (1)\\x^2+y^2=97 & (2)\end{cases}$$

（解）(1)×2+(2)得　$x^2+2xy+y^2=169$

卽　$x+y=\pm13$　　(3)

(2)−(1)×2　得　$x^2-2xy+y^2=25$

卽　$x-y=\pm5$　　(4)

由(3)及(4)得四組一次聯立方程式如下：

$$\begin{cases}x+y=13\\x-y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=13\\x-y=-5\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-13\\x-y=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=-13\\x-y=-5\end{cases}$$

故得
$$\left.\begin{aligned}x&=9\\y&=4\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=-4\\y&=9\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=-4\\y&=-9\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=-9\\y&=-4\end{aligned}\right\}$$

5. 試解

$$\begin{cases}x^2+y^2+x+y=4 & (1)\\ x^2+y^2-xy=1 & (2)\end{cases}$$

(解) (1)−(2)得　$x+y+xy=3$

即　$x+y=3-xy$　　(3)

(3)平方，並移項，得　$x^2y^2-8xy+9=x^2+y^2$　(4)

自(2)得　$x^2+y^2=1+xy$

代入(4)得　$x^2y^2-8xy+9=1+xy$

即　$x^2y^2-9xy+8=0$

即　$(xy-8)(xy-1)=0$

$\therefore$　$xy=8$　　(5)

或　$xy=1$　　(6)

由(5)及(3)得

$$\begin{cases}x+y=-5\\ xy=8\end{cases}$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(-5+7i)\\y&=\frac{1}{2}(-5-7i)\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(-5-7i)\\y&=\frac{1}{2}(-5+7i)\end{aligned}\right\}$$

由(6)及(3)得

$$\begin{cases}x+y=2\\xy=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}\right\}$$

6. 試解

$$\begin{cases}2x^2-9xy-3y^2-6x+6y+4=0 & (1)\\2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0 & (2)\end{cases}$$

(解)　(2)-(1)而以9除之得

$$4xy+y^2-3y=0$$

或　$y(4x+y-3)=0$　(3)

故得　$y=0$　(4)

及　$4x+y-3=0$　(5)

由(4)及(1)解得　$\left.\begin{matrix}y=0\\x=4\end{matrix}\right\}$　$\left.\begin{matrix}y=0\\x=2\end{matrix}\right\}$

由(5)解出y，得　$y=3-4x$

代入(2)得　$2x^2-3x+1=0$

卽　$(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore\quad x=1$，　或　$x=\frac{1}{2}$

代入(5)得　$y=+1$，　及$y=-1$。

故得四組解答如下：

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=2\\y=0\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\y=-1\end{matrix}\right\}$$

7. 試解

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=13 & (1)\\x^2-xy+y^2=7 & (2)\end{cases}$$

(解) (1)−(2)得 $2xy=6$

$$\therefore \qquad xy=3. \qquad (3)$$

(1)+(3)得 $x^2+2xy+y^2=16$

即 $x+y=\pm4$ (4)

(2)−(3)得 $x^2-2xy+y^2=4$

即 $x-y=\pm2$ (5)

由(4)及(5)得四組方程式如下：

$$\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases},\quad\begin{cases}x+y=4\\x-y=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-4\\x-y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=-4\\x-y=-2\end{cases}$$

故解得 $\left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=1\\y=3\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=-3\\y=-1\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-3\end{matrix}\right\}$。

8. 試解

$$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=2y & (1) \\ 2x^2+4xy=5y & (2) \end{cases}$$

（解）　$(1)\times5-(2)\times2$得　$6x^2-13xy+5y^2=0$

卽　$(3x-5y)(2x-y)=0$

故　$x=\frac{5}{3}y$，　(3)

及　$x=\frac{1}{2}y$　(4)

由(3)及(1)得

$$2\times\frac{25}{9}y^2-\frac{5}{3}y^2+y^2=2y$$

故　$y=0$　及　$y=\frac{9}{22}$

代入(3)得　$x=0$　及　$x=\frac{15}{22}$

由(4)及(2)得　$\frac{2}{4}y^2+4\times\frac{1}{2}y^2=5y$

故　$y=0$　及　$y=2$

代入(4)得　$x=0$　及　$x=1$

故得四組值如下：

$$\left.\begin{aligned} x=0 \\ y=0 \end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x=0 \\ y=0 \end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x=1 \\ y=2 \end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x=\frac{15}{22} \\ y=\frac{9}{22} \end{aligned}\right\}$$

在此$x=0$，$y=0$爲一雙根也。

9. 試解

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=7 & (1)\\[2ex] \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=25 & (2)\end{cases}$$

（解） 視$\dfrac{1}{x}$及$\dfrac{1}{y}$爲未知數，按第三題方法卽可解得

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\[2ex] y=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\[2ex] y=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}$$

10. 試解

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=61 & (1)\\ x^4+x^2y^2+y^4=1281 & (2)\end{cases}$$

（解） (2)÷(1)得 $x^2+xy+y^2=21$ (3)

(3)−(1)得 $2xy=-40$

卽 $xy=-20$ (4)

由(1)與(4)， $x^2-2xy+y^2=81$

$\therefore$ $x-y=9$ (5)

或 $x-y=-9$ (6)

由(3)與(4)， $x^2+2xy+y^2=1$

$\therefore$ $x+y=1$ (7)

或　$x+y=-1$　(8)

由(5)，(6)，(7)，(8)四式解得

$$\left.\begin{array}{l}x=5\\y=-4\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-5\\y=+4\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=+4\\y=-5\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-4\\y=+5\end{array}\right\}$$

11. 試解

$$\begin{cases}x+y=7 & (1)\\x^3+y^3=91 & (2)\end{cases}$$

(解)　(2)÷(1)得　$x^2-xy+y^2=13$　(3)

$(1)^2-(3)$，　$3xy=36$

即　$xy=12$.　(4)

由(1)與(4)得　$\left.\begin{array}{l}x=4\\y=3\end{array}\right\}$，　$\left.\begin{array}{l}x=3\\y=4\end{array}\right\}$。

12. 試解

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3} & (1)\\[2ex]xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} & (2)\end{cases}$$

(解)　將(1)及(2)化為

$$\frac{y^2+1}{xy}=\frac{20}{3}\qquad(3)$$

$$\frac{xy^2+x}{y}=\frac{5}{3}\qquad(4)$$

$(4)\div(3)$，　$x^2=\frac{1}{4}$，

$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{2}$

代入(4)，得　$y=\pm3$，或$\pm\frac{1}{3}$。

故四組解答如下：

$$\left.\begin{aligned}x&=\tfrac{1}{2}\\y&=3\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}x&=-\tfrac{1}{2}\\y&=-3\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}x&=\tfrac{1}{2}\\y&=\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}x&=-\tfrac{1}{2}\\y&=-\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right\}。$$

13. 試解

$$\begin{cases}x(y+z)=27 & (1)\\ y(z+x)=32 & (2)\\ z(x+y)=35 & (3)\end{cases}$$

(解)　$(1)+(2)-(3)$，　$2xy=24$

即　　$xy=12$　(4)

$(2)+(3)-(1)$，　$yz=20$　(5)

$(3)+(1)-(2)$，　$zx=15$　(6)

$(4)\times(6)\div(5)$，　$x^2=9$

$\therefore\quad x=\pm3$.

代入(4)，(5)，得　$y=\pm4$

$z=\pm5$。

故得二組解答如下：

$$\left.\begin{aligned}x&=3\\y&=4\\z&=5\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}x&=-3\\y&=-4\\z&=-5\end{aligned}\right\}$$

14. 試解

$$\begin{cases}x^2y+xy^2=180 & (1)\\ x^2y^2=400 & (2)\end{cases}$$

（答）$\left.\begin{aligned}x&=5\\y&=4\end{aligned}\right\}$，$\left.\begin{aligned}x&=4\\y&=5\end{aligned}\right\}$，$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{161})\\y&=\frac{1}{2}(-9\mp\sqrt{161})\end{aligned}\right\}$

15. 試解

$$\begin{cases}xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} & (1)\\[2ex] xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} & (2)\end{cases}$$

（答）$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}\\y&=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}$　$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{1}{2}\\y&=-\frac{1}{8}\end{aligned}\right\}$　$\left.\begin{aligned}x&=\pm\frac{1}{3}\sqrt{-14}\\y&=\mp\frac{1}{2}\sqrt{-14}\end{aligned}\right\}$

16. 試解

$$\begin{cases}x(x+y+z)=8 & (1)\\ y(x+y+z)=12 & (2)\\ z(x+y+z)=5 & (3)\end{cases}$$

（答） $x=\frac{8}{5}$， $y=\frac{12}{5}$，$z=1$； $x=-\frac{8}{5}$， $y=-\frac{12}{5}$，

$z=-1$。

17. 試解

$$\begin{cases} yz-23=4y+3z & (1) \\ zx-13=2z-4x & (2) \\ xy-9=3x+2y & (3) \end{cases}$$

（答） $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=8 \\ z=11 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{array}\right\}$。

18. 試解

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2} \\ xyz=1 \end{cases}$$

（答） $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$， $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=2 \end{array}\right\}$， $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$， $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=1 \end{array}\right\}$，

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$， $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \\ z=2 \end{array}\right\}$。

## 第五節　高次方程式

高次方程式之解法，乃高等代數中一大問題，玆舉出若干特例，可用初等方法解出者。

【例題】

1. 試解　$x^4-6x^2+8=0$

（解）此種方程式，其所含未知數之相異乘方，祇有兩種，且其一種爲他一種之平方，故可化之爲二次方程式而解之。

令　$y=x^2$，則原式變爲

$$y^2-6y+8=0$$

$$(y-2)(y-4)=0$$

$\therefore$　$y=2$　或$y=4$。

$\therefore$　$x^2=2$，　或$x^2=4$。

$\therefore$　$x=\pm\sqrt{2}$，　或$\pm2$。

2. 試解　$(x^2-x)^2-8(x^2-x)=-12$。

（解）令　$y=(x^2-x)$，則原式變爲

$$y^2-8y+12=0$$

$$(y-2)(y-6)=0$$

$\therefore$　$y-2=0$，　或$y-6=0$

即　$x^2-x-2=0$　或$x^2-x-6=0$。

∴　$(x-2)(x+1)=0$或$(x-3)(x+2)=0$

∴　$x=2$，　$-1$，　$3$，　$-2$。

3.試解　$x^3-2x+1=0$

（解）　用餘式定理知$x-1$爲原式之一因子，故原式等於

$$(x-1)(x^2+x-1)=0$$

∴　$x-1=0$　或$x^2+x-1=0$

∴　$x=1$，　或$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$。

4.　試解　$5x^3-15x^2+3x+14=0$

（解）　用餘式定理，知$x-2$爲原式之一因子，故原式可變爲

$$(x-2)(5x^2-5x-7)=0$$

∴　$x-2=0$，　或$5x^2-5x-7=0$

∴　$x=2$，　或$\frac{5\pm\sqrt{165}}{10}$。

5.　試求1之立方根。

（解）　令　$x^3=1$。　則

$$x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

∴　$x=1$，　或$\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

普通令$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega_1$， $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega_2$。

故1之立方根爲

$$1,\quad \omega_1,\quad \omega_2。$$

6. 試解 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$

（解） 此種方程式，若以$\frac{1}{x}$代 x，其式完全不變，是爲倒數方程式。以$x^2$除全式，得

$$x^2+2x+3+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

即 $$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0 \qquad (A)$$

令 $y=x+\frac{1}{x}$ 則

$$y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

即 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

代入(A)得

$$y^2-2+2y+3=0$$

即 $$y^2+2y+1=0$$

$$(y+1)^2=0$$

$$y=-1$$

$$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=-1$$

即 $x^2+x+1=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

此題爲一四次方程式，本應有四根，今得二根者，此二根皆爲二重根也。

7. 試解 $2x^3+7x^2-5x-4=0$

（答） $x=1$， $-4$， $-\frac{1}{2}$

8. 試解 $abx(x+a+b)^3-(ax+bx+ab)^3=0$.

（答） $x=\frac{a^2}{b}$，$\frac{b^2}{a}$，及$\pm\sqrt{ab}$.

## 第六節 分數方程式

【解法】 以各分母之最小公倍，乘全方程式，去分母，解之即得。

【注意】 凡依上法求得之根，能使分母之最小公倍爲零者，決非原方程式之根。

【例題】

1. 試解 $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}$

（解） 移項 $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x+3}=\frac{x+3}{x+5}-\frac{x+5}{x+7}$

$$\frac{-4}{(x+1)(x+3)}=\frac{-4}{(x+5)(x+7)},$$

$\therefore\ (x+1)(x+3)=(x+5)(x+7)$

$x^2+4x+3=x^2+12x+35$

$12x-4x=3-35$

$8x=-32$

$\therefore\ x=-4$

2. 試解 $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$。

(解)移項 $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{x-b}{a}-\dfrac{b}{x-a}=0$

即 $\dfrac{x^2-(a+b)x}{b(x-b)}+\dfrac{x^2-(a+b)x}{a(x-a)}=0$

$\therefore\ x^2-(a+b)x=0$ 或 $\dfrac{1}{b(x-b)}+\dfrac{1}{a(x-a)}=0$

自第一式得 $x=0$， 及 $a+b$。

自第二式得 $a(x-a)+b(x-b)=0$

即 $(a+b)x-(a^2+b^2)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$。

故欲求之根為 $0$，$a+b$，$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$。

3. 試解 $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{10}{x^2-1}=\dfrac{7}{x+1}$

(解) 諸分母之最低公倍數 $x^2-1$， 以 $x^2-1$ 乘方程式得

$2x(x+1)-10=7(x-1)$

即　　$2x^2+2x-7x-10+7=0$

$$2x^2-5x-3=0$$

$$(x-3)(2x+1)=0$$

$\therefore$　$x=3$，　或 $-\dfrac{1}{2}$

4．試解　$\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\dfrac{1}{x-1}=0$

（解）以 $x^2-1$ 乘方程式，得

$$x^2-3x+2x^2-2+x+1=0$$

即　　$3x^2-2x-1=0$

即　　$(3x+1)(x-1)=0$

$\therefore$　$x=1$　或 $-\dfrac{1}{3}$

然在此須注意者 $x=1$ 爲最低公分母之根，故1爲由乘法而生之增根，而非原式之根。故原式僅有 $x=-\dfrac{1}{3}$ 一解。

5．試解　$\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}$.

（解）移項　$\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x+2}$

即　　$\dfrac{x^2-x^2+1}{x^2+x}=\dfrac{x^2-4-x^2+1}{x^2+x-2}$

即　　$\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{-3}{x^2+x-2}$

即　　$-3x^2-3x=x^2+x-2$.

$\therefore \quad 4x^2+4x-2=0$

或 $\quad 2x^2+2x-1=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

6. 試解 $\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x-4}{x-5}=\dfrac{x-6}{x-7}-\dfrac{x-7}{x-8}$.

（答） $x=6$

7. 試解 $\dfrac{1}{x^2-3x}+\dfrac{1}{x^2+4x}=\dfrac{9}{2x^2}$

（答） $x=4$，$-\dfrac{27}{5}$.

8. 試解 $\dfrac{1}{x-a-b}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$.

（答） $x=a$，$b$.

## 第七節　無理方程式

【解法】 移各項於方程式之一端，使他端僅留一項，含未知數於根號內，然後兩端各自乘方，消去該根號，移項合併後，若式中仍有根號，再依上法演算直至無根時爲止，而後按一般解方程式法解之卽得。

【例題】

1. 試解 $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=1$

（解） 移項得$\sqrt{x+10}=1-\sqrt{x+1}$

兩邊自乘，得$x+10=1+x+1-2\sqrt{x+1}$

或　$4=-\sqrt{x+1}$

即　$16=x+1$

$\therefore$　$x=16-1=15$.

2. 試解　$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$

(解)　$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$.

兩邊自乘，$x+4+x+20+2\sqrt{(x+4)(x+20)}=4x+44$

即　$\sqrt{(x+4)(x+20)}=(4x+44-2x-24)\div 2=x+10$

$\therefore$　$x^2+24x+80=x^2+20x+100$

即　$4x=100-80=20$

$\therefore$　$x=5$.

3. 試解　$\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=2$.

(解)　去分母，得　$x+1+1=2\sqrt{x+1}$

即　$x+2=2\sqrt{x+1}$

即　$x^2+4x+4=4x+4$

即　$x^2=0$

$\therefore$　$x=0$.

4. 試解　$x^2-2x+6\sqrt{x^2-2x+6}=21$

（解）　在此，根號內$x^2$，及$x$二項之係數，與根號外相似項之係數成比例，故可令根號內之式，等於某式之平方而化原方程式爲一不帶根號之二次方程式，在此令

$y^2=x^2-2x+6$　則　$x^2-2x=y^2-6$　故原式變爲

$y^2-6+6y=21$

即　$y^2+6y-27=0$

$\therefore$　$(y+9)(y-3)=0$

即　$y=-9$，　或$y=3$.

故　$x^2-2x+6=y^2=(-9)^2=81$

即　$x^2-2x-75=0$

$\therefore$　$x=1\pm\sqrt{76}$.

又　$x^2-2x+6=y^2=(3)^2=9$.

即　$x^2-2x-3=0$

即　$x=3$　或$-1$.

故原式有四根，即　$3$，$-1$，$1\pm\sqrt{76}$.

5.　試解　$9\sqrt{x^2-9x+28}=x^2-9x+36$.

（解）　令　$y^2=x^2-9x+28$，則原式變爲

$9y=y^2+8$

即　$y^2-9y+8=0$

即 $(y-8)(y-1)=0$

$\therefore\ y=8$，或1。

故 $x^2-9x+28=y^2=(8)^2=64$

即 $x^2-9x-36=0$

$$\therefore\ x=\frac{9\pm\sqrt{81+144}}{2}=\frac{9\pm15}{2}=12\text{或}-3.$$

又 $x^2-9x+28=y^2=1^2=1$

即 $x^2-9x+27=0$

$$\therefore\ x=\frac{9\pm\sqrt{81-108}}{2}=\frac{9\pm3\sqrt{3i}}{2}.$$

6. 試解 $3+\sqrt{x^2+x-1}=2x$

（答） $x=1$，$3\frac{1}{3}$。

7. 試解 $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$

（答） $x=1$，$\frac{1}{2}$。

8. 試解 $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}$

（答） $x=\frac{5}{4}$。

## 第八節　二次方程式應用問題

1. 父子二人，其歲數之和為100，而其歲數之積之十分之一，比父之歲數多180，問父子之歲數各幾何？

（解）令　$x=$ 父年

則　子年 $=100-x$。

故得　$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180$.

卽　$100x-x^2=10x+1800$

$x^2-90x+1800=0$

卽　$(x-30)(x-60)=0$

$\therefore$　$x=30$，或60。

故子年爲　$100-30=70$，或 $100-60=40$。

然父年决不能小於子年，故合理之解答爲父年60，子年40。

2.將金若干元，買羊若干頭，死去2頭，將其餘羊每頭高價一元仍得利5元，問買入羊數若干？

（解）令　$x=$ 羊數，則

$$\left(\frac{85}{x}+1\right)(x-2)=85+5。$$

卽　$(x+85)(x-2)=90x$

卽　$x^2-7x-170=0$

$\therefore$　$(x-17)(x+10)=0$

$\therefore$　$x=17$　卽17頭。

【注意】凡不合理之解，皆應棄去。

3. 有甲乙丙三工，作某工事，甲一人作之，比三人同作之時間增6時，乙一人作之，則增15時，丙一人作之，則時間增二倍。問三人同作之時間如何？

（解） 令 $x$＝三人同作時數，則

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+15}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$$

即 $$\frac{2x+21}{(x+6)(x+15)}=\frac{1}{2x}$$

$\therefore$ $3x^2+21x-90=0$

即 $x^2+7x-30=0$

$\therefore$ $(x-3)(x+10)=0$

$\therefore$ $x=3$. 即3小時.

4. 有滿盛清酒8石1斗之罈，自其取出若干，以水換入再取出與前同之量，亦以水換入，於是現在清酒之量爲6石，4斗，試求每回取出之量。

（解） 令每回取出之量＝$x$. 則

$$(81-x)\left(1-\frac{x}{81}\right)=64.$$

即 $x^2-162x+1377=0$

即 $(x-153)(x-9)=0$

$\therefore$ $x=9$. 故所取酒量爲9斗.

5.某數與其平方根之和爲42問某數幾何？

（解）　令　x＝某數，則

$$x+\sqrt{x}=42$$

即　$\sqrt{x}=42-x$

即　$x^2-85x+1764=0$

解之得　$x=36$，

6．設有人赴七里遠之某處，既行一里後，其每時之定速增一里，可比預定之時數快半點鐘到，問所費之時幾何？

（解）　令　x＝預定時數，則

$$\frac{6}{\frac{7}{x}+1}+\frac{1}{\frac{7}{x}}=x-\frac{1}{2}$$

即　$84x+2x(x+7)=7(x+7)(2x-1)$

即　$84x+2x^2+14x=7(2x^2+13x-7)$

即　$12x^2-7x-49=0$

$\therefore\ x=2\frac{1}{3}$．

故實際所費時間爲　$2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=1\frac{5}{6}$時．

7．有兩數，其平方之和爲39，而其平方差爲21，求兩數。

（解）　令　x＝甲數，　y＝乙數。則

$$\begin{cases}x^2+y^2=39 & (1)\\ x^2-y^2=21 & (2)\end{cases}$$

$$(1)-(2)\quad 2y^2=18$$

即　$y^2=9$

$\therefore\quad y=\pm 3.$

代入(2)得　$x^2=21+9=30$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{30}.$

故此題可有四對解答即

$$\left.\begin{array}{l}x=+\sqrt{30}\\ y=3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=+\sqrt{30}\\ y=-3\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=-\sqrt{30}\\ y=-3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x=-\sqrt{30}\\ y=-3\end{array}\right\}.$$

8. 有三數，其中任意二數之和為餘一數之逆數，各數若何？

(解) 令　$x$=第一數，$y$=第二數，$z$=第三數，則

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{1}{z} & (1)\\ y+z=\dfrac{1}{x} & (2)\\ z+x=\dfrac{1}{y} & (3)\end{cases}$$

變化上式得

$$\begin{cases}xz+yz=1 & (4)\\ xy+xz=1 & (5)\\ yz+xy=1 & (6)\end{cases}$$

(5)−(4)+(6)得　$2xy=1$

即　$xy=\frac{1}{2}$　(7)

同理　$yz=\frac{1}{2}$　(8)

$zx=\frac{1}{2}$　(9)

(7)×(9)÷(8)得　$x^2=\frac{1}{2}$

∴　$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$。

同理　$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$，

$z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$。

故得二組解如下：

$$\left.\begin{aligned}x&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\y&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\z&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}x&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\y&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\z&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}\right\}$$

9.　鷄卵每打之價若干，今以1角2分所買之個數，比前多兩個，則每打減洋1分，問鷄卵每打之價幾何？

（答）　每打9分。

10. 有二分數，其和為$\frac{5}{6}$，其差與其積等，問二分數如何？

（答）　$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\\&\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}&-\frac{5}{2}\\&-\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}$$

11. 甲乙兩地，相距25里。今有二人，同時由此兩地相向而行。其一人每行一里，較他一人快8分而二人行後，經五點鐘始相會。問每點鐘之速度各幾何？

（答） 每時$3\frac{1}{3}$里及$1\frac{2}{3}$里。

12. 有一矩形，若由其長邊減三尺，其短邊減一尺，則其面積爲原面積之半，又其長邊增九尺，其短邊減2尺，則其面積與原面積等，問長邊短邊各幾何？

（答） 長邊＝9尺，　短邊＝4尺。

## 第九節　不等式

【定理】

1. 在不等式之兩端，加同數，或從兩端減同數，不等號之向不變。

2. 不等式之兩端，乘以同一正數，或除以同一正數，不等號之向不變。

3. 不等式之兩端，若乘以同一負數，或除以同一負數，則不等號之向變。

【例題】

1. 試解　$x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2.$

（解） 以＋9乘兩端，得

$$9x-\frac{45}{7}>2x+18$$

$\therefore$　$9x-2x>18+\frac{45}{7}$

即　$7x>\frac{171}{49}$

$\therefore$　$x>3\frac{24}{49}$.

故比 $3\frac{24}{49}$大之數值，均適合所與之不等式。

2.　試解　$\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$

（解）　以24乘不等式之兩端，得

$$9x-4x+2>12x+4-30$$

即　$9x-4x-12x>4-30-2$

即　$-7x>-28$

$\therefore$　$x<4$.

故小於4之數值，均適合所與之不等式。

3.　在不等式$5x-8<3x+2$中，試求x之極大值。

（解）　$5x-8<3x+2$

$\therefore$　$5x-3x<8+2$

即　$2x<10$

$\therefore$　$x<5$,

在此，x之值無論如何，均應小於5，故x之極大值應爲5。

4. 求適合下二不等式之正整數值。

$$\frac{3x}{4}>\frac{x}{5}+1,\quad \frac{7}{5}x-1<\frac{2x}{3}+2$$

(解) 自 $\frac{3x}{4}>\frac{x}{5}+1$，

得 $11x>20$

即 $x>1\frac{9}{11}$.

自 $\frac{7}{5}x-1<\frac{2x}{3}+2$，

得 $11x<45$

即 $x<4\frac{1}{11}$.

x之值，在$1\frac{9}{11}$及 $4\frac{1}{11}$之間，故x之正整數值爲2，3，4。

5. 若a≒b，而a，b爲同號，試證

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

(證) 因a，b爲同號，故 $ab>0$.在不等式中，以ab乘兩端，得

$$a^2+b^2>2ab$$

即 $(a-b)^2>0$。

ab爲二實數，故$(a-b)^2$恆爲正數，即$(a-b)^2$恆能大於零，即原式恆能成立也。

6. 若a+b爲正，且a≠b，試證$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$。

7. 試解 $3x^2-4x+1>0$.

(解) $3x^2-4x+1>0$

$(3x-1)(x-1)>0.$

欲該不等式成立，必 $3x-1$及$x-1$爲同號，即二者同爲正，或同爲負也，若

(1)二者同爲負，則$x<\frac{1}{3}$.

(2)二者同爲正，則$x>1$

故x之值，決不能在1與$\frac{1}{3}$之範圍內，在此範圍外之一切數值，皆能適合原不等式。

8. 求適合不等式 $5x^2+6x-8<0$之正整數值

(解) $5x^2+6x-8<0$

$(5x-4)(x+2)<0$

欲此二者異號，必 $x<\frac{4}{5}$，$x>-2$ 即x之值，應在$\frac{4}{5}$與 $-2$之間。此二者間之正整數，僅爲 0，故得原不等式之解，爲$x=0$.

9. 在方程式$x^2+6ax-(8a-1)=0$中，欲x之值，恆爲

實數，a之最小正整數，當為何數？

（解） 該式之判別式為

$$9a^2+8a-1.$$

欲x之值，恆為實數，必

$$9a^2+8a-1>0,$$

即 $a>\frac{1}{a}$，或$a<-1$.

故a之最小正整數當為1.

10. 在方程式 $4x^2+8ax-(9a+2)=0$中，欲x之值恆為實數，a之最小正整數當為何數？

（答） $a=0$.

# 第三章 雜 論

## 第一節 比及比例

【定理】

1. $a:b=a\cdot m:b\cdot m$.

2. $a>b$，則 $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$.

3. $a<b$，則 $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

4. $a:b=c:d$ 則 $ad=bc$.

5. $a:m=m:b$ 則 $m=\sqrt{ab}$

m名曰a,b之比例中項。

6. $a:b=b:m$ 則 $m=\frac{b^2}{a}$.

m名曰a,b之第三比例項。

7. $a:b=c:m$, 則 $m=\frac{bc}{a}$.

m名曰a,b,c之第四比例項。

8. $a:b:=c:d$, 則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

9. $a:b=c:d=e:f=g:h=\cdots\cdots$

則 $(a+c+e+g+\cdots):(b+d+f+h+\cdots)=a:b=c:d=\cdots$

【例題】

1. 設 $\frac{4x+5y}{3x-y}=2$,求x與y之比。

(解) 在原式右端,分子分母同以y除之,得

$$\frac{4\times\frac{x}{y}+5}{3\times\frac{x}{y}-1}=2$$

即 $\frac{4x}{y}+5=\frac{6x}{y}-2$

$\therefore\ \frac{2x}{y}=7$ 即 $x:y=7:2$.

2. 若a及x為正,且$a>x$,則$a^2-x^2:a^2+x^2$較$a-x:a+x$為大,求證。

(證) $a-x:a+x=\dfrac{(a-x)(a+x)}{(a+x)^2}=\dfrac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$.

試比較 $\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$及$\dfrac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$，斯二分數之分子相同，而

$a^2+2ax+x^2$較$a^2+x^2$為大，因a及x均為正數故$a\times x$亦必為正也。同一分數，分子相同，分母大者，其值必小，故$\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$必大於$\dfrac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$卽$a^2-x^2:a^2+x^2$大於$a-x:a+x$也。

3. 若$a:b=b:c$，試證$a:c=a^2:b^2$.

(證) $\because\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}\qquad\therefore\ \dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}\times\dfrac{a}{b}$

$\therefore\ a:c=a^2:b^2$.

4. 若$a:b=c:d$，試證$a^2+ab:b^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd$.

(證) 令 $\dfrac{a}{b}=x=\dfrac{c}{d}$.

則 $a=bx,\quad c=dx$.

$$\therefore\ \frac{a^2+ab}{b^2+cd}=\frac{b^2x^2+b^2x}{d^2x^2+d^2x}=\frac{b^2(x^2+x)}{d^2(x^2+x)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

又 $$\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd}=\frac{b^2-2b^2x}{d^2-2d^2x}=\frac{b^2(1-2x)}{d^2(1-2x)}=\frac{b^2}{d^2}$$

$$\therefore\ \frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd}$$

即 $a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd$.

5. 若 $a:b=c:d$, 則 $ab+cd$為$a^2+c^2$與$b^2+d^2$之比例中項，求證。

(證) 令$a:b=c:d=x$, 則

$$a=bx,\quad c=dx.$$

於是 $$ab+cd=b^2x+d^2x=(b^2+d^2)x,$$

$$a^2+c^2=(b^2+d^2)x^2$$

$$b^2+d^2=b^2+d^2.$$

$$\therefore\quad (a^2+c^2)\times(b^2+d^2)=(b^2+d^2)(b^2+d^2)x^2$$

$$=[(b+d)x]^2=(ab+cd)^2.$$

6. 若$a:b=b:c$, 則$(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$ $=a^4+b^4+c^4$.

(證) $\because a:b=b:c$, 故$b^2=ac$. 而

$$(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2+c^2)$$

$$=[(a+c)^2-b^2](a^2-ac+c^2)$$

$$=[(a+c)^2-ac](a^2-ac+c^2)$$

$$=(a^2+ac+c^2)(a^2-ac+c^2)$$

$$=a^4+a^2c^2+c^2=a^4+b^4+c^4.$$

7. 若 $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ 試證

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

(證) $\because \frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$

$\therefore \quad \frac{(bz-cy)a}{a^2}=\frac{(cx-az)b}{b^2}=\frac{(ay-bx)c}{c^2}$

$\therefore \quad \frac{(bz-cy)a}{a^2}=\frac{(cx-az)b}{b^2}=\frac{(ay-bx)c}{c^2}$

$$=\frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^4+b^4+c^4}=0.$$

$\therefore \quad bz-cy=0,\ cx-az=0,\ ay-bx=0.$

$\therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$

8. 若$a:x=b:y=c:z$,求證

$a^4+a^2b^2+b^4:x^4+x^2y^2+y^4=b^4+b^2c^2+c^4:y^4+y^2z^2+z^4$

9. 若$x-z:y-z=x^2:y^2$,求證

$x+z:y+z=x^2+2xy:y^2+2xy.$

10. 若$a:b=c:d$,求證　$a^2+b^2+c^2d^2:(a+b)^2+(c+d)^2$

$=(a+c)^2+(b+d)^2:(a+b+c+d)^2.$

## 第二節　變數法

令x,y代任二變量,若

1. $y=kx$,則y謂為依x正變,或書為$y\propto x$

2. $y=\frac{k}{x}$，則y謂爲依x反變，或書爲$y\infty\frac{1}{x}$

3. $z=kxy$ 則z 謂爲依x，及y合變，或書爲$z\infty xy$。

【例題】

1. A因B正變，因C反變，而$B=3$，$C=4$，則$A=2$，今$A=6$，$C=3$，求B之值。

(解) $A=K_1B$ 又有 $A=\frac{K_2}{C}$

$$\therefore \quad A=\frac{KB}{C} \qquad (1)$$

將$A=2$，$B=3$，$C=4$，之値代入(1)得，

$$2=K\frac{3}{4} \qquad \therefore K=\frac{8}{3}.$$

復將$A=6$，$C=3$之値代入(1)得

$$6=\frac{8}{3}\cdot\frac{B}{3} \qquad \therefore B=6\frac{3}{4}.$$

2. 若$x\infty\frac{1}{y}$，$y\infty\frac{1}{z}$求證$x\infty z$，

(證) $\because\ x\infty\frac{1}{y} \quad \therefore\ x=\frac{k_1}{y}. \qquad (1)$

又 $\because\ y=\infty\frac{1}{z} \quad \therefore\ y=\frac{k_2}{z} \qquad (2)$

將(2)代入(1)，得 $x=k_1k_2z=kz$

即 $x\infty z$。

3. 球之體積，因其半徑立方變，而球之半徑 1尺，其

體積爲4.188立方尺，問球之半徑3尺，其體積爲何？

（解） $V=k\cdot r^3$ (1)

將第一次之半徑及體積代入(1)得

$$4.188=k\cdot 1^3=k \quad \text{即} k=4.888.$$

$$\therefore \quad V=4.188\times r^3=4.188\times 3^3=113.076 \text{立方尺}$$

4. 墜體由靜止墜落，因墜落之時間變，而在二秒末之速度爲64尺，問五秒末之速度爲何？

（解） $v=k\cdot t.$ (1)

將第一次之結果代入，得

$$64=k\cdot 2 \quad \therefore k=32.$$

$$\therefore \quad v=k\cdot t=32\times 5=160 \text{尺}$$

5. 球之體積，因其半徑之立方變，今有三個球彈，其半徑爲6,8,10寸，若鎔之爲一球其半徑幾何？

（解） 按題意應有 $v_1=kr_1^3=k6^3=216k$

$$v_2=kr_2^3=k8^3=512k$$

$$v_3=kr_3^3=k10^3=1000k.$$

$$\therefore \quad \text{總體積} V=v_1+v_2+v_3=k(216+512+1000)$$

$$=1728k=k\cdot 12^3$$

即半徑爲12寸也。

## 第三節　級　數

### I，等差級數

【公式】

1. $s=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$.

2. $l=a+(n-1)d$

3. 等差中項$=\frac{a+b}{2}$.

4. 諸等差中項$=a+\frac{b-a}{n+1}$，$a+2\frac{b-a}{n+1}$，$a+3\frac{b-a}{n+1}$，…

$a+i\frac{b-a}{n+1}$，……$a+n\frac{b-a}{n+1}$.

【例題】

1. 試求$1+2+3+\cdots\cdots+n$之結果

(解)　$a=1,\ l=n,\ n=n$.

$\therefore\quad s=\frac{n}{2}(1+n)$

2. 初項爲$\frac{3}{2}$，第七項爲 3之等差級數，試求其第十項至第二十項之和。

(解)　公差$=\left(3-\frac{3}{2}\right)\div(7-1)=\frac{1}{4}$

第十項$=\frac{3}{2}+9\times\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$，

$$\text{第二十項}=\frac{3}{2}+19\times\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\therefore\quad s=\frac{11}{2}\left(\frac{15}{4}+\frac{25}{4}\right)=\frac{11}{2}\times10=55.$$

3. 求於8與29間插入六個等差中項。

（解） $a=8,\ b=29,\ n=6$

故得諸中項爲

$$8+\frac{21}{7},\ 8+2\times\frac{21}{7},\ 8+3\times\frac{21}{7},\ 8+4\times\frac{21}{7},$$

$$8+5\times\frac{21}{7},\ 8+6\times\frac{21}{7}$$

即　11，　14，　17，　20，　23，　26.

故諸中項爲11,14,17,20,23,26.

4. 級數$\frac{4}{3}$，1，$\frac{2}{3}$，……之和爲零，問項數幾何？

（解）　$a=\frac{4}{3},\ d=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$故有

$$\frac{n}{2}\left[\frac{8}{3}+(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=0$$

即　$n^2-9n=0$

$\therefore\quad n=0$　或$n=9.$

5. 級數8,16,24,……等若干項之和加1，其結果爲奇數之平方，試證之。

（解）　$s=\frac{n}{2}[2\times8+(n-1)\times8]=8n\times4n^2-4n$

$$=4n^2+4n.$$

$$\therefore\quad s+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2.$$

n無論爲何數時，$2n+1$恆爲奇數，故知$s+1$爲一奇數之平方。

6. 求100於500間一切3之倍數之和。

（解） 3之倍數，大於100者102爲最小，小於500者，498爲最大，而

$498=102+(n-1)\times 3$， 因得$n=133$.

$$\therefore\quad s=\frac{133}{2}(102+498)=133\times 300=39900.$$

7. 等差級數，87,85,83,……等n項之和，等於等差級數3,5,7……等n項之和，求n之數值。

（答） $n=43$.

8. a,b,c爲等差級數，則$a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$亦爲等差級數，試證之。

## II. 等比級數

【公式】

1. $l=a\cdot r^{n-1}$

2. $s=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$.

3．等比中項$=\sqrt{ab}$

【例題】

1．等比級數$s=4400$，$a=11$，$n=4$，則r之值如何？

（解）$4400=\dfrac{11(1-r^4)}{1-r}$

$$\therefore\quad 400=\frac{1-r^4}{1-r}=1+r+r^2+r^3$$

即　$r^3-343+r^2-49+r-7=0$

即　$r^3-7^3+r^2-7^2+r-7=0$

$$\therefore\quad (x-7)(r^2+8r+57)=0$$

$$\therefore\quad r=7.$$

自　$r^2+8r+57=0$中，解得r之值爲虛數，故棄之，

2．試求級數　$2-3+\dfrac{9}{2}\cdots\cdots$六項之和。

（解）$a=2$，　$r=-\dfrac{3}{2}$，　$n=6$.

$$\therefore\quad s=2\cdot\frac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^6}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}=2\cdot\frac{1-\frac{3^6}{2^5}}{1+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{5}\left(1-\frac{3^6}{2^5}\right)=-8\frac{5}{16}.$$

3．求$4x^2-12x+9$與$9x^2+12x+4$之等比中項。

（解） 等比中項$=\sqrt{(4x^2-12x+9)(9x^2+12x+4)}$

$$=\sqrt{(2x-3)^2(3x+2)^2}$$

$$=(2x-3)(3x+2)=6x^2-5x-6.$$

4. $a,b,c,d$為等比級數，求證$ad=bc$.

（解） 若$a,b,c,d$為等比級數，則

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}. \qquad \therefore \quad ad=bc.$$

5. 求於$a^3b^{-6}$,與$a^{-2}b^4$間插入四個等比中項。

（解） $a^{-2}b^4=a^3b^{-6}\times r^5$.

即 $r^5=a^{-2}b^4\cdot a^{-3}\cdot b^6=a^{-5}b^{10}$.

即 $r=a^{-1}b^2$

故四個等比中項為$a^2b^{-4},ab^{-2},1,a^{-1}b^2$.

6. 等比級數之第一，第二，第三三項之和為42，而第四項較第一項多126,問此級數如何？

（解） 令 首項$=a$,公比$=r$,則

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=42 & (1) \\ ar^3-a=126 & (2) \end{cases}$$

$(2)\div(1)$, $\quad r-1=3$

$\therefore \qquad r=4.$

代入(2)得 $\quad a=2.$

故該等比級數爲2,8,32,128,……。

7. 等比級數之第一，第二，第三，三項之和與第三，第四，第五三項之和之比爲1:4，而第五項爲8，問此級數如何

答 $\frac{1}{2}$,±1,2,……

8. 若a,b,c,d爲等比級數，則a+b, b+c, c+d爲等比級數，而$a^2+b^2$, $b^2+c^2$, $c^2+b^2$亦爲等比級數。

III. 調和級數

【定理】 調和級數中，各項之倒數，爲等差級數。

【公式】 調和中項$=\frac{2ab}{a+b}$.

【例題】

1. 調和級數之第二項爲2，第四項爲6，求此級數。

(解) 此調和級數，其相當等差級數之第二項爲$\frac{1}{2}$，第四項爲$\frac{1}{6}$.故該等差級數應爲

$$\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}.$$

而欲求之調和級數，即

$$\frac{3}{2},2,3,6.$$

2. 若$a^2$,$b^2$,$c^2$,爲等差級數，求證b+c,c+a,a+b爲調

和級數。

（解） 設$b+c$，$c+a$，$a+b$為調和級數，則該三數之倒數，必為等差級數。卽應有

$$\frac{2}{c+a}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}.$$

卽 $2(a+b)(b+c)=(a+c)(2b+a+c)$

卽 $2ab+ab^2+2ac+2bc=2abc+2bc+a^2+2ac+c^2$

卽 $2b^2=a^2+c^2$.

此式之意，卽$b+c$, $c+a$, $a+b$,若為調和級數，則$b^2$必為$a^2$, $c^2$之等差中項，按吾人假設，$a^2$, $b^2$, $c^2$適成等差級數，故知$b+c$, $c+a$, $a+b$必為調和級數也。

3. 設$x, y, z$為調和級數，求證$\frac{x}{y+z}$，$\frac{y}{z+x}$，$\frac{z}{x+y}$亦為調和級數。

（解） 若 $\frac{2(z+x)}{y}=\frac{y+z}{x}+\frac{x+y}{z}$

則 $2xz(x+z)=y^2(x+z)+y(x^2+z^2)$

但已知$x, y, z$,為調和級數，故$2xz=y(x+z)$,故

$$y(x+z)^2=y^2(x+z)+y(x^2+z^2)$$

卽 $2xyz=y^2(x+z)$.

卽 $y=\frac{2xz}{x+z}$。

此與吾人之假設符合，故知$\frac{x}{y+z}$，$\frac{y}{z+x}$，$\frac{z}{x+y}$為調和級數。

4. 求在$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$間插入五個調和中項。

(解) 取此調和級數之倒數，則$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$間之五個等差中項應為 $\frac{29}{36}$，$\frac{34}{36}$，$\frac{39}{36}$，$\frac{44}{36}$，$\frac{49}{36}$，故欲求之五個調和中項為 $\frac{36}{29}$，$\frac{18}{17}$，$\frac{12}{13}$，$\frac{9}{11}$，$\frac{36}{49}$.

5. 求於1與7間，插入五個調和中項。

(答) $\frac{7}{6}$，$\frac{7}{5}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{7}{3}$，$\frac{7}{2}$

6. 若a,b,c為調和級數，求證

$$\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$$

(解) 若 $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$

則 $b^2+ab-bc-ac+b^2+bc-ab-ac$

$=2b^2-2ab-2bc+2ac$

即 $ab+bc=2ac.$

$$\therefore\quad b=\frac{2ac}{a+c}$$

故題以證明。

7. 若$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$，證$b=a+c$,又證 a,b,c 為

調和級數。

8. 有二數，其等差中項爲9，調和中項爲8，二數爲何？

（解） 今 $x=$甲數， $y=$乙數，則

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=9 & (1) \\ \dfrac{2xy}{x+y}=8 & (2) \end{cases}$$

解此聯立方程式，得 $\begin{cases} x=12, \\ y=6, \end{cases}$ 此卽欲求之二數也。

# 幾何之部

## 第一章　定理之證明

I. 公理及公法

1. 直線爲兩點間最短之線。

2. 一幾何圖形之位置可任意移動而其大小及性質則並不因之而變更。

3. 過線外一點可作且僅可作一直線與該線平行。

4. 過二定點可作且僅可作一直線。

5. 一直線可引至無限長。

6. 以一定點爲圓心，定長爲半徑可作且僅可作一圓。

II. 關於相等線段之定理及例解

（一）直線形之定理：

1.能使之相疊合者。

2.同等於另一線段者。

3.為等線段之和，差，等倍數及等份數者。

4.為全等三角形之對應部份。

二三角形全等之條件

（1）二邊及其夾角相等。

（2）二角及其夾邊相等。

（3）三邊相等。

（4）二直角三角形之一腰及一股相等。

（5）二邊及其一者之對角相等。（但在此條件外，尚須另加條件：即該角須為鈍角或其對邊為最大者。）

5.等腰三角形之二邊為相等。

6.等底角梯形之兩腰為相等。

7.平行四邊形之對邊為相等。

8.菱形或正方形之各邊為相等，

9.設由已知線之垂線內一點，作兩直線截已知線於兩點。若自此點至垂線足之距離相等，則此兩線必等。反之若此兩斜線相等，則自此兩點至垂線足之距離必

亦等。

10. 自一角之平分線上作至此角兩邊之垂線必等。

11. 平行線之介在兩平行線間者必等。

12. 設一線爲數平行線所截，而其所截之諸線分若相等，則他線之爲此數平行線所截者，其所截之諸線分必亦等。

13. 平行四邊形之兩對角線互相平分。

14. 兩全等平行四邊形之相當邊必等。

兩平行四邊形全等之條件：

（1）設兩平行四邊形有兩邊及其夾角相等，則此兩形必全等。

15. 設一線與一三角形之底邊平行且平分他一邊者，則必平分其他一邊。

16. 聯三角形兩邊中點之線必與底邊平行，且等於底邊之半。

17. 梯形之中線等於兩底之和之半。

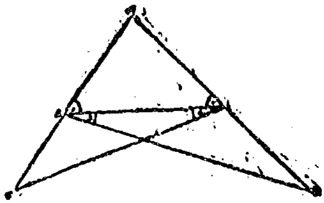
18. 直角三角形斜邊之中點，至三頂點等距離。

19. 直角三角形中如有一角爲 $30^0$，則其最短邊等於斜邊之半。

20. 任一三角形之重心至頂點距離之半等於其至對邊中

點之距離。

【例解】



1. 已知∠1＝∠2，∠3＝∠4

（求證）BC＝ED，AC＝AD

（證）在△BEC，EBD內

∠3＝∠4，

∠EBC＝∠BED（同爲∠1，∠2之補角。）

BE公用。

∴△BEC≌△EBD，

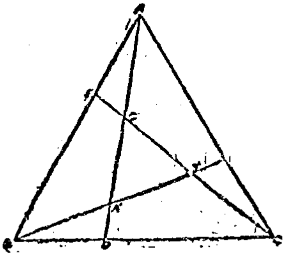
∴BC＝ED，

又　∵∠1＝∠2

∴AB＝AE、

∴AB＋BC＝AE＋ED，

卽AC＝AD，



2. 已知△ABC爲等邊三角形，BD＝CE＝AF。

（求證）△A′B′C′亦爲等邊三角形。

（證）在△ABD，BCE，CAF中

∠ABD＝∠BCE＝∠CAF，

AB＝BC＝CA，BD＝CE＝AF。

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE \cong \triangle CAF$。

$\therefore AD = BE = CF$。

又 在△BA'D，CB'E，AC'F中

$\angle A'BD = \angle B'CE = \angle C'AF$

$\angle BDA' = \angle CEB' = \angle AFC'$

$BD = CE = AF$。

$\therefore \triangle BA'D \cong \triangle CB'E \cong \triangle AC'F$。

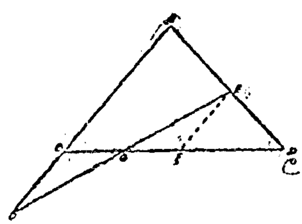
$\therefore BA' = CB' = AC'$，$B'E = C'F = A'D$。

$\therefore A'B' = B'C' = C'A'$。

3. 已知△ABC為等腰三角形，在腰及延長線上取

$BD = CE$，

（求證）$DG = GE$。



（證）作輔助線 $EF \parallel BD$。

則$\angle ECF = \angle ABC = \angle EFC$，

$EF = EC$。

在△BGD，FGE中有

$\angle BDG = \angle FEG$，$\angle DBG = \angle EFG$。

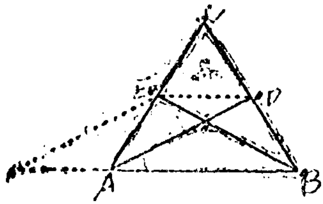
$\therefore \triangle BGD \cong \triangle FGE$。

$\therefore DG = EG$。

4. 等腰三角形底邊之兩端至兩腰之中線必等。

(已知)AC＝BC，E，D爲AC，BC之中點。

(求證)AD＝BE。




(證)在△ADC，BEC中

AC＝BC，

$DC=EC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC$

∠ACD＝∠BCE。

∴△ADC≌△BDC。

∴AD＝BE。

5. 有二等中線之三角形必等腰。

在上圖中作EG∥AD交BA之延長線於G點。則▱ADEG爲一平行四邊形，故EG＝AD，

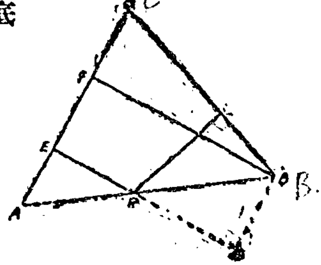
∴EG＝EB，∠EGB＝∠EBA＝∠DAB，

∴△ABE≌△BAD，

∴∠EAB＝∠DBA，

∴AC＝BC、

6. 已知△ABC爲等腰，P爲其底邊上任意一點，PE⊥AC，PD⊥BC，BF⊥AC。




(求證)PD＋PE＝BF。

(證)延長EP，並作BG∥AC，

與 EP 之延長線交于 G 點則▱ EGBF 為平行四邊形，而EG＝BF。

$\because \angle CAB = \angle CBA$

$\therefore \angle BPD = \angle APE = \angle BPG$

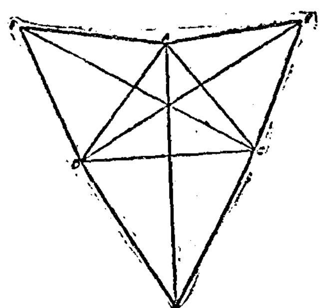
$\angle PBD = \angle PBG$。

$\therefore \triangle PBD \cong \triangle PBG$。

$\therefore PG = PD$

$\therefore PD + PE = PG + PE = EG = BF$。

7.於△ABC之各邊外側作等邊三角形BCD，CAE，ABF。



（求證）AD＝BE＝CF。

（證）在△FBC，ABD中

$FB = AB$，$BC = BD$

$\angle FBC = \angle FBA + \angle ABC$

$= \angle ABC + \frac{2}{3}\angle R$

$= \angle ABD$、

$\therefore \triangle FBC \cong \triangle ABD$

$\therefore FC = AD$

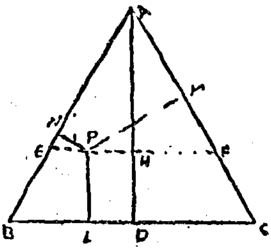
依同理△ECB≌△ACD

∴BE＝AD

∴AD＝BE＝CF

8. 等邊三角形內任意一點至三邊距離之和恆等於其高。

(已知)AB＝AC＝BC，P爲在△ABC內任意一點，PM⊥AC，PN⊥AB，PL⊥BC，AD⊥BC．




(求證)PM＋PN＋PL＝AD

(證)過P作EF∥BC交AD於H點，AB，AC於E，F點

則△AEF爲等腰三角形。

故PM＋PN＝AH

又 ∵PHDL爲平行四邊形。

∴PL＝HD

∴PM＋PN＋PL＝AH＋HD＝AD

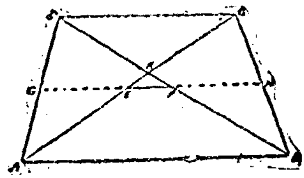
9. 梯形二對角線中點之聯線等於兩底之差之半。

(已知)E，F爲AC，BD之中點

(求證)EF＝ $\frac{1}{2}$(AB－CD)

(證)過E作底邊之平行線交兩腰於G，H就△ACD觀之，

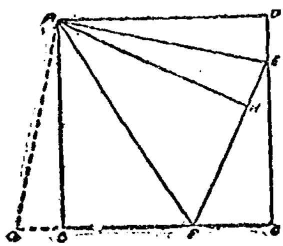
知G爲AD之中點，又就△ABD觀之，知GE過BD之中點。故GH與EF相合。



$\because EH=\frac{1}{2}AB$，$EG=\frac{1}{2}CD=FH$

$\therefore EF=EH-FH=\frac{1}{2}(AB-CD)$

10. 已知▱ABCD爲正方形 ∠FAE等於45°. AH⊥EF



(求證)AH=AB

(證)作AG使∠BAG=∠DAE 而與CB之延長線交于G點。

則在△ABG,ADE中有

$AB=AD$, $\angle ABG=\angle ADE=\angle R$，$\angle BAG=\angle DAE$.

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADE$

$\therefore AG=AE$

又在△AGF,AEF中有

$AG=AE$，$\angle GAF=\angle EAF=45^\circ$, AF公用

$\therefore \triangle AGF \cong \triangle AEF$

$\therefore \angle AFB = \angle AFH$

$\therefore \angle BAF = \angle HAF = 90^0 - \angle AFB$

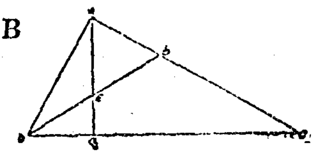
今在△ABF，AHF內有

$\angle AFB = \angle AFH$，$\angle BAF = \angle HAF$，AF公用。

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AHF$

$\therefore AH = AB = BC = CD = DA$

11．已知$\angle A$為直角，BD為$\angle B$之二等分線，$AG \perp BC$



（求證）$AD = AE$

（證）$\because \angle AED = \angle BEG = 90^0 - \frac{1}{2}\angle B$，

$\angle ADB = 90^0 - \frac{1}{2}\angle B$

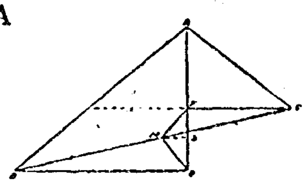
$\therefore \angle AED = \angle ADB$

$\therefore AD = AE$。

12．已知　$AB > AC$，AE為$\angle A$之二等分線，

$CF \perp AE$，$BE \perp AE$，

M為BC之中點。



（求證）$ME = MF = \frac{1}{2}(AB - AC)$

(證)作$MD \perp AE$

則$MD \parallel CF \parallel BE$

因M為BC之中點

故D為EF之中點

故M在EF之垂直平分線上。

$\therefore ME=MF$

又延長CF交AB於G。

則在二直角三角形AGF,ACF中

$\angle CAF=\angle GAF$, $\angle AFG=\angle AFC=\angle R$,

AF公用。

$\therefore \triangle AGF \cong \triangle ACF$

$\therefore AC=AG$，$CF=FG$

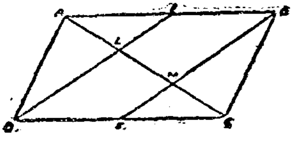
今在$\triangle BCG$中，F為CG之中點，M為BC之中點。

故$MF=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(AB-AC)$

$\therefore ME=MF=\frac{1}{2}(AB-AC)$

13.已知ABCD為平行四邊形。

E，F為AD，BC邊之中點。



(求證)$AL=LM=MC$

(證)∵ED∥BF，$ED=BF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$.

∴EBFD為平行四邊形。

∴EL∥DM

但E為AD之中點，故L為AM之中點

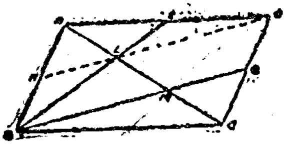
∴AL=LM

仝理可證CM=LM

∴AL=LM=MC

14. 已知ABCD為平行四邊形，

E,G為AD,DC之中點。



(求證)AL=LM=MC

(證)由上題知 $AL=\frac{1}{3}AC$

今設H為AB之中點，而BG交AC於M點。則就DH，BG二線觀之，與上題同一理由，可知$MC=\frac{1}{3}AC$

故$AL=LM=MC=\frac{1}{3}AC$

(二)圓之定理

1. 等圓或同圓之半徑必等。

2. 等圓或同圓中張等弧之弦必等。

3. 垂直於弦之直徑必平分此弦及其所對之弧。

4. 在同圓或等圓內，等弦與圓心之距離必等。

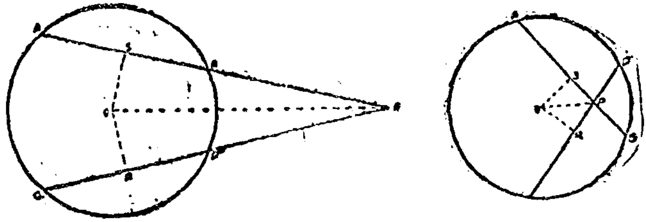
5. 在同圓或等圓內，與圓心等距離之弦必等。

6. 由圓外一點至此圓之兩切線必等。

7. 兩圓相交其聯心線為公弦之垂直平分線。

【例解】

1. 圓內二等弦或其延長線如相交於一點，則此點分弦所成之兩段相等。



(已知)AB=CD，P為AB,CD之交點，O為圓心。

(求證)PA=PC，PB=PD

(證)作OS⊥AB，OR⊥CD則OS=OR

聯OP，則Rt△OSP≌Rt△ORP

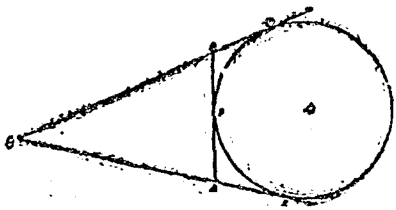
∴PR=PS

又AS=BS=CR

$=DR=\frac{1}{2}AB$

∴PA=PC, PB

=PD



2. 已知O圓為△ABC之一傍切圓。D,E,F為三切點。

(求證)$CE=CD=\frac{1}{2}(AB+BC+CD)$

(證)∵$AE=AF$，$BF=BD$，$CD=CE$

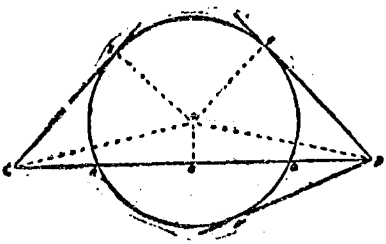
　　∴$CA+CB+AB=\angle A+\angle B+(AF+BF)$

　　　　　　　　　$=(CA+AE)+(CB+BD)$

　　　　　　　　　$=CE+CD$

　　∴$CE=CD=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

3.在 AB 弦兩端延線上取$AC=BD$，自C,D作圓之切線CE及DF而E,F爲切點。



(求證)$CE=DF$

(證)作$OG\perp AB$

　　聯OC，OD，OE，OF

　　則$AG=BG$

　　$CG=DG$

　　∴$\triangle OGC=\cong OGD$

　　∴$OC=OD$

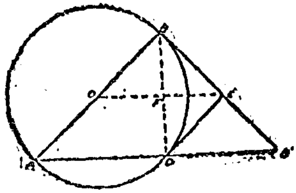
又　∵$OF=OE$

　　∴$\triangle OEC\cong\triangle OFD$

　　故$CE=DF$

由此可知CE＝DF，。

4. 以 Rt△ABC 之一腰爲直徑而作一圓，交弦於D點。過D作切線交他腰BC於E點，O爲圓心。



(求證)BE＝CE

(證)自O作OF⊥CD則CF＝DF

又　∵CD⊥AB

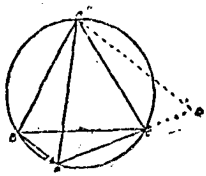
∴OF∥AD

故OF之延長線必平分BC。

今ED＝EC，卽△ECD爲等腰。故底邊CD之垂直平分線OF必經過頂點E。

∴E點平分BC。卽BE＝CE。

5. 已知P爲等邊三角形ABC之外接圓BC弧上任意一點。



(求證)PA＝PB＋PC

(證)延長PC至D使有BP＝CD

則在△ABP，ACD中

∠ABP＝∠ACD，AB＝AC，BP＝CD。

∴△ABP≌△ACD

$\therefore \angle BAP = \angle CAD$，$AP = AD$，

$\therefore \angle APC = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle R$，

今在等腰三角形APD中旣有一角$\angle APD$等於$\frac{2}{3}\angle R$

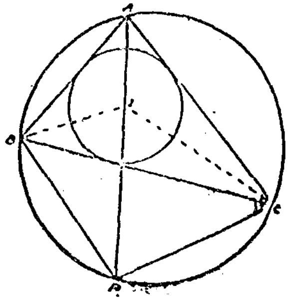
故$\triangle APD$爲等邊三角形

$\therefore PA = PC + CD = PB + PC$

6. 已知I爲$\triangle ABC$之內心，

聯AI延長之交其外接圓於P

點。



(求證)$PB = PI = PC$

(證)$\because$ I爲$\triangle ABC$之內心，

$\therefore$ AI爲$\angle A$之平分線

$\therefore$ P爲BPC弧之中點，

$\therefore BP = PC$，

又在$\triangle ABC$中，BI爲$\angle B$之平分線

$\therefore \angle BIP = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$\angle IBP = \frac{1}{2}\angle B + \angle PBC$

$= \frac{1}{2}\angle B + \angle PAC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

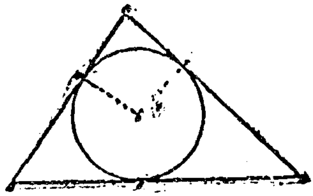
$\therefore \angle BIP = \angle IBP$

$\therefore BP = PI$

$\therefore BP = PI = PC$

7. 已知△ABC 爲直角三角形，∠A＝∠R

O圓爲其內切圓。D, E, F 爲三邊之切點。



(求證) $AB + AC - BC = OD + OF$

(證) $\because \angle A = \angle D = \angle F = \angle R$

$\therefore$ ▱ADOF爲矩形

$\therefore AD + AF = OD + OF$

$\therefore AB + AC - BC = AD + AF = OD + OF$

Ⅲ. 關於不等線段之定理及例解：

(一) 直線形之定理：

1. 三角形兩邊之和大於第三邊。而兩邊之差小於第三邊。

2. 由三角形內一點至底邊之兩端點，所作二線之和小於該三角形兩腰之和。

3. 設三角形內兩角不等，則大角對大邊，小角對小邊。

4. 設兩三角形有兩邊彼此各相等，但甲形之夾角大於乙形之夾角，則甲形之第三邊亦必大於乙形之第三邊。

5.自線外一點至該線之斜線大於由此點至該線之垂線。

6.設由已知線之垂線內一點作兩斜線截已知線於兩點。若此點至垂線點之距離（即距程）不等，則此兩斜線亦不等。而距程大者斜線長。

7.自線外一點至線上斜線之長者，其距程亦大。

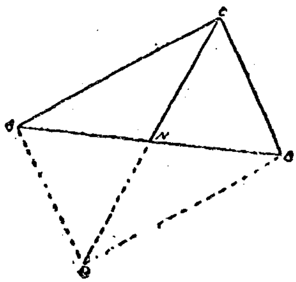
8.設由已知直線外之一點至此線作二斜線，則與該線所成之角小者，其斜長必較長。

【例解】

1.三角形底邊上之中線必小於兩腰之和之半。

(已知)CN為△ABC之一中線。

(求證)$CN<\frac{1}{2}(AC+BC)$



(證)延長中線CN至D，使

$CN=ND$

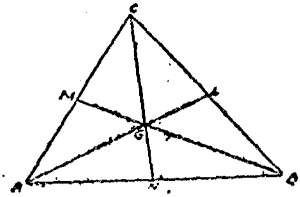
則▱ADBC為一平行四邊形。

故$BD=AC$，

$AC+BC=BD+BC>CD$。

$\therefore CN<\frac{1}{2}(AC+BC)$

2.三角形三中線之和小於周之$\frac{2}{3}$而大於周之$\frac{3}{4}$。



(已知)AL,BM,CN為 $\triangle ABC$ 之三中線。G為其交點。

(求證) $AL+BM+CN<\frac{2}{3}(AB+BC+CA)$，

$AL+BM+CN>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$

(證)$\because AB+BL=AB+\frac{1}{2}BC>AL$

$BC+CM=BC+\frac{1}{2}AC>BM$，

$CA+AN=CA+\frac{1}{2}AB>CN$。

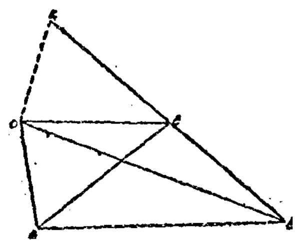
$\therefore\ \frac{2}{3}(AB+BC+AC)>AL+BM+CN$。

又 $\because GA+GB>AB, GB+GC>BC, GC+GA>AC$，

$\therefore 2(GA+GB+GC)>AB+BC+CA$。

但$2(GA+GB+GC)=\frac{4}{3}(AL+BM+CN)$

$\therefore AL+BM+CN>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$



3. 在三角形 ABC 外角∠ACE 之平分線內任意取一點D。

(求證)$DA+AB+BD>AB+BC+CA$

(設)在BC之延長線上取一點E

使CE＝CA

則$\triangle CAD\cong\triangle CED$

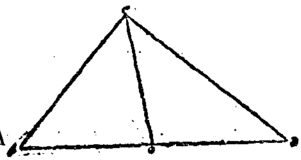
$\therefore DE=AD$

$\therefore AD+BD=ED+BD>BE$

但$BE=BC+CE=BC+CA$

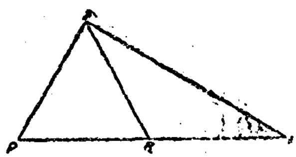
$\therefore AD+BD+AB>BC+CA+AB$

4.已知 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 爲二直角三角形，$\angle C$及$\angle F$爲直角。並$AB=D$，$E\angle D>\angle A$，



(求證)$DF<AC$

(證)取AB之中點 O，DE之中點P，



則$OA=OB=OC=\frac{1}{2}AB$

$$=\frac{1}{2}DE=PD=PE=PF$$

$\therefore\angle A=\angle ACO<\angle D=\angle PFD$

故$\angle AOC>\angle DPF$。就$\triangle AOC$，DPF觀之卽可知

$AC>DF$

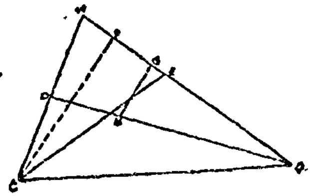
同理可證$EF>BC$

5.如二直角三角形有一腰相等，則其斜邊長者之他腰亦

長。

(證)將此二三角形合置一處卽可知之。

6. 三角形內大角之平分線小於小角之平分線。



(已知)∠ACB>∠ABC,

CE，BD爲二角之平分線。

(求證)CE<BE

(證)∵∠ACB>∠ABC

∴∠ACE>∠ABD

作CF使∠FCE=∠ABD

則∠FCB>∠FBC

∴BF>CF而可在BF內取G點使BG=CF

作GH∥CF

則∠CFE=∠BGH，BG=CF

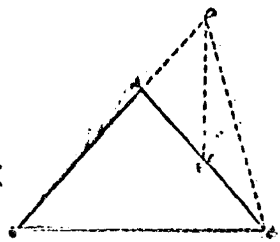
又∠GBH=∠FCE

∴△GBH≌△FCE

∴BH=CE

∴BD>CE

7. 已知△ABC爲一等腰直角三角形，



卽 $AB = AC$，$\angle A = \angle R$

（求證）$3AB > 2BC$

（證）延長BA至D，使 $AD = \frac{1}{2}AC$。取AC之中點E

聯DE，DC，則在直角三角形DAE中有

$DE > DA = EC = AE$

$\therefore \angle ECD < \angle EDC$

但△AED爲一等腰直角三角形。

故 $\angle ADE = \frac{1}{2}\angle R = \angle ACB$

故 $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle R + \angle ECD$

$\angle BDC = \frac{1}{2}\angle R + \angle EDC$

$\therefore \angle DCB > \angle BDC$

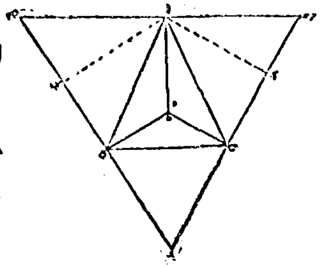
$\therefore BD > BC$

卽 $AB + \frac{1}{2}AB > BC$

$\therefore 3AB > 2BC$

8、已知 △ABC 爲一銳角三角形，P爲其內一點。

$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$



（求證）$PA + PB + PC < AB + AC$，

$PA+PB+PC<AB+BC$

$PA+PB+PC<BC+AC$

(證)作 $MAN\perp PA$，$MCL\perp PC$，$NBL\perp PB$

則在 $\triangle MNL$ 中各角均爲 $\angle APC$ 之補角，故相等。

卽 $\triangle MNL$ 爲一等邊三角形。

但等邊三角形內任一點至三邊垂線之和恆等于其高，今自 A 點作 ML 及 NL 之垂線 AX，AY，則有

$AB>AY$，$AC>AX$

$\therefore\ AB+AC>AX+AY$

但 $AX+AY=PA+PB+PC$

$\therefore\ AB+AC>PA+PB+PC$

仝理可證 $AB+BC>PA+BP+PC$

$AC+BC>PA+PB+PC$

（二）圓之定理：

1. 直徑大於一切弦。

2. 圓內一點至圓心之距離小於半徑，而圓外一點至圓心之距離則大於半徑。

3. 等圓或同圓內張大弧之弦大。

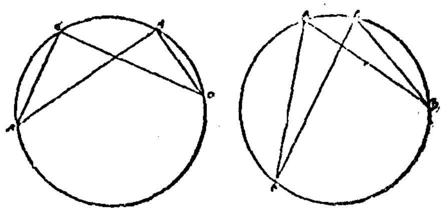
4. 同圓或等圓內距圓心較近之弦較大。

5. 同圓或等圓內弦大者與圓心之距離近，而弦小者與圓

心之距離遠。

【例解】

1.已知AB，CD爲同圓內之二弦而AB>CD



(求證)AC>BD

(證)

$\because AB>CD$

$\therefore \overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$

$\therefore \overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CB}>\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{CB}$

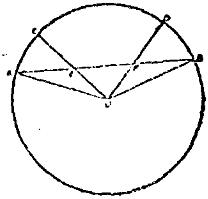
即$\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{BD}$

$\therefore AC>BD$

此乃就AB，CD相交之情形而論也，若AB與CD不相交，則僅須將上第三式中之減號易爲加號即足矣。

2.三等分弦之二半徑不能三等分弧；反之三等分弧者不能三等分弦。

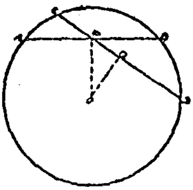
(i)如AE=EF=FB，則在△OAF中，OE爲中線，今F在圓內。故OF<OA，而△OAF非等腰，其中線不得爲分角線。故$\overset{\frown}{AC}\neq\overset{\frown}{CD}$



(ii)如$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，則在△OAF中，OE爲∠AOF之平分線，此三角形非等腰，故分角線不得爲中線。

即$AE \neq EF$

3.過圓內一定點之諸弦中，以此點作中點者爲最短。



如$AP=BP$，則$OP \perp AB$而不垂直於CD。作$OQ \perp CD$，則$OP>OQ$。

故$CD>AB$

IV 關於等角之定理及例解：

(一)直線形之定理：

1.兩角能相疊合者必相等。

2.兩角均爲直角或平角，則相等。

3.兩角同爲等角之餘角或補角。

4.對頂角相等。

5.三角形三內角之和等於二直角。

6.三角形之任一外角等於其二內對角之和。

7.二平行線爲一線所截，則其外錯角相等；內錯角相等；同位角相等；而其兩內角同在截線之一側者則相補。

8.等腰三角形之兩底角必等。

9. 全等三角形之對應角相等。

10. 直角三角形二銳角之和等於一直角。

11. n角形諸內角之和為(n—2)2Rt∠。

12. 多角形外角之和等於四直角。

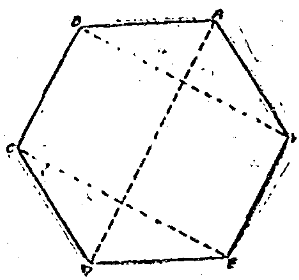
13. 二銳(或鈍)角之邊對應平行，或二邊依同向平行，則此二角相等。

14. 二銳(或鈍)角之邊對應垂直，或二邊依同向垂直，則此二角相等。

15. 如二三角形有兩對角相等，則其第三角必亦相等。

【例解】

1. 設六角形 ABCDEF 之對邊，兩兩平行，



(求證)其各組對角兩兩相等。

(證)∵AB ∥ DE

∴∠BAD = ∠EDA

又AF ∥ DC

∴∠FAD = ∠CDA

∴∠BAD + ∠FAD = ∠EDA + ∠CDA

即∠A = ∠D

同理可證∠B = ∠E，∠C = ∠F

2. 設六角形 ABCDEF 之對邊兩兩相等，且一組對角相等，卽∠A＝∠D

(求證)其他各組對角亦兩兩相等。

(證)∵AB＝DE，AF＝CD，∠A＝∠D

∴△ABF≌△DEC

∴BF＝EC

∴▱BCEF為平行四邊形。

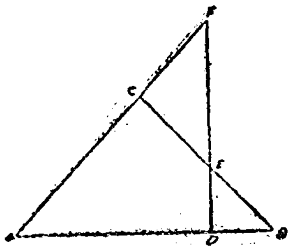
∴∠CBF＝∠FEC

∴∠FBA＝∠CED

∴∠B＝∠E

同理可證∠C＝∠F

3. 已知AC＝BC，D為BA上任一點，DF⊥AB



(求證)∠CEF＝∠CFE

(證)∵∠A＝∠B

故在Rt△ADF，BDE中觀之可知

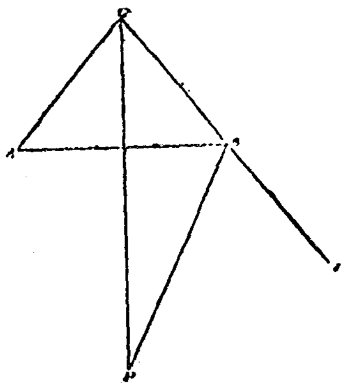
∠AFE＝∠BED＝∠CEF

∴∠CEF＝∠CFE

4. 已知PC為∠C之平分線，

BP為∠ABE之平分線。

(求證)$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BAC$



(證)$\because \frac{1}{2}\angle ABE=$

$\angle BPC+\frac{1}{2}\angle C$

而$\angle ABE$

$=\angle C+\angle A$

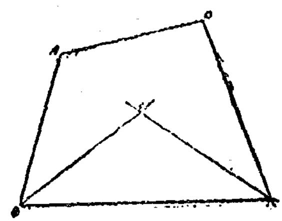
$\therefore \angle BPC=\frac{1}{2}\angle A$

即$\angle BAC=2\angle BPC$

5. 已知BE爲$\angle B$之平分線，

CE爲$\angle C$之平分線，

而▱ABCD爲一任意四邊形。



(求證)$\angle BEC=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$

(證)$\because \frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=2Rt\angle$

而在$\triangle BEC$中，則有

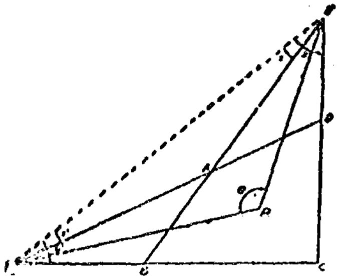
$\angle BEC+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=2Rt\angle$

$\therefore \angle BEC+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)$

$\therefore \angle BEC=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$

6. 已知E，F爲四邊形ABCD兩兩對邊之交點，PE，PF爲 $\angle BEC$，$\angle DFC$之平分線，



(求證) $\angle O=\angle A+\angle C$

(證) 令 $\angle AEF=x$，

$\angle AFE=x'$，$\angle DEF=y$，$\angle DFE=y'$.

則 $\angle PEF=\frac{1}{2}(x+y)$

$\angle PFE=\frac{1}{2}(x'+y')$

但 $x+x'$，$y+y'$ 各爲 $\angle A$，$\angle C$之補角，

故 $\angle O=\angle A+\angle C$

（二）圓之定理：

1. 等圓或同圓內同度之角相等。

度角法：

（1）圓心角可以其所截之弧度之。

（2）圓周角可以其所截之弧之半度之。

（3）設兩弦於圓內相交，則其所成之角可以其所截之弧之和之半度之。

（4）切線及由切點所作之弦，其間所成之角可以其截之弧之半度之。

（5）設由圓外至此圓作兩割線，或兩切線，或一割線及一切線，則其所成之角可以其所截兩弧之差之半度之。

2.等圓或同圓內對等弧之圓心角必等，至於圓周角亦然。

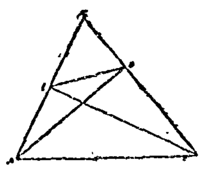
3.由圓一點至此圓作兩切線，則聯此點與圓心之線必平分此兩切線間之角。

4.圓內接四邊形兩內角之和必等於一直角。反之如一四邊形中對角相補則其四頂點必在一圓周上，即此點爲共圓者。

5.兩相似形之對應角。

【例解】

1.已知　AD⊥BC，BE⊥AC



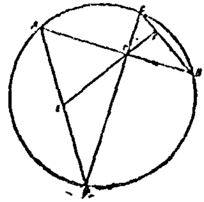
（求證）∠EDC＝∠BAC

（證）∵∠ADB＝∠AEB＝Rt∠

∴A，B，E，D在以 AB 爲直徑之圓周上。

∴∠BAC＋∠BDE＝2Rt

∴∠BAC＝∠EDC



2.已知　AB,CD爲互相垂直之兩弦，

P爲其交點，AD之中點爲E

(求證)$EP\perp BC$，即$\angle BFP=Rt\angle$

(證)∵$\triangle APD$爲直角三角形，而E爲

其斜邊之中點。

$\therefore AE=DE=PE$

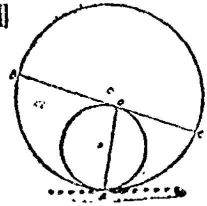
$\therefore \angle EAP=\angle EPA=\angle BPF$

而$\angle BCD=\angle EAP$

$\therefore \angle PCB=\angle BPF$

$\therefore \triangle BPC \backsim \triangle BFP$

$\therefore \angle PFB=\angle CPB=Rt\angle$



3.已知　O及O'二圓內切於A，BC爲O圓

之弦而切O'圓於D點。

(求證)$\angle BAD=\angle CAD$

(證)過A作切線AT

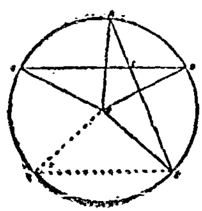
則$\angle CBA=\angle CAT$

但$\angle CDA=\angle DAB+\angle DBA$

$\therefore \angle CDA=\angle PAB+\angle CAT$

$=\angle DAT=\angle DAC+\angle CAT$

$\therefore \angle DAB=\angle DAC$



4.已知　AB,CD爲O圓內之二弦交于

E點。

(求證) $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD)$

(證)過B作BF ∥ CD

則$\angle AEC = \angle ABF$

且$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CF}$(在同圓內介在兩平行線間之弧相等)。

$\therefore \overset{\frown}{FCA} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}$

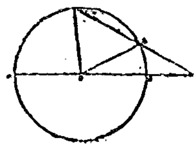
$\therefore \angle ABF = \frac{1}{2}\angle AOF$

$= \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle COF)$

$= \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD)$

$\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD)$

5. 已知AB為O圓之直徑，C為其延長線之一點而CD＝OD



(求證)$\angle ACE = \frac{1}{3}\angle AOE$

(證)$\because OD = CD$

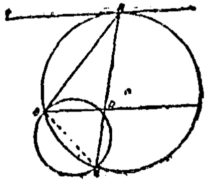
$\therefore \angle DOC + \angle DCO = 2\angle DCO$，

$\angle OED = \angle ODE = 2\angle DCO$

$\therefore \angle AOE = \angle OED + \angle DCO = 3\angle DCO$

卽$\angle ACE = \frac{1}{3}\angle AOE$

6. 已知　AT爲O圓之切線，AB，AC爲任意過A點之二弦，BD ∥ AT



(求證)過B，D，C 三點之圓必與AB相切，卽∠ACB＝∠ABD

(證)∵∠TAB＝∠ACB

而AT ∥ BD

∴∠TAB＝∠ABD

∴∠ACB＝∠ABD

故過B，D，C三點之圓與AB相切，且切於B點。

V. 關於不等角之定理及例解

(一)直線形之定理：

1. 設三角形之兩邊不等，則大邊對大角，小邊對小角。

2. 三角形之外角大於其內對角。

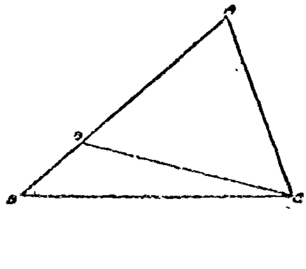
3. 設兩三角形有兩邊彼此各相等，但甲形之第三邊大於乙形之第三邊，則甲形之夾角必大於乙形之夾角。

(二)圓之定理：

1. 同圓或等圓內度大之角必大。

【例解】

1. 在△ABC 中 AB 邊上取



AD＝BC

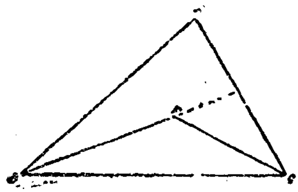
(求證)∠ADC＞∠DCB

(證)∵BD＝AB－AD＝AB－BC＜AC

故在△ADC，BCD中有一公共邊及一組等邊，而AC＞BD

∴∠ADC＞∠DCB

2.已知　P爲△ABC內任一點。



(求證)∠BPC＞∠BAC

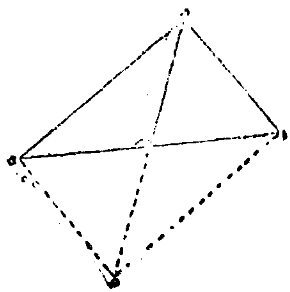
(證)延長BP交AC於D點。

則∠BPC＞∠PDC

但∠PDC＞∠BAC

∴∠BPC＞∠BAC

3.已知　AB＞AC，M爲BC之中點。



(求證)∠BAM＜∠CAM

(證)引長AM至D使AM＝MD

則▱ABDC爲平行四邊形。

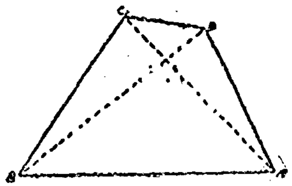
而BD＝AC

$\angle ADB=\angle DAC$

在$\triangle ABD$中　$\angle ADB>\angle BAD$

$\therefore\angle MAC>\angle MAB$，

4.已知　ABCD四邊形之四邊中以AD為最長而BC為最短。



(求證)$\angle ABC>\angle ADC$，

$\angle BCD>\angle BAD$，

(證)聯AC，BD二對角線。

則在$\triangle ABD$內，

$\because AD>AB$

$\therefore\angle ABD>\angle ADB$

又在$\triangle BCD$內，

$\because CD>BC$

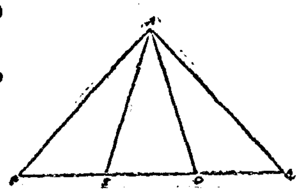
$\therefore\angle CBD>\angle CDB$

$\therefore\angle ABD+\angle CBD>\angle ADB+\angle CDB$

即$\angle ABC>\angle ADC$

同理可證$\angle BCD>\angle BAD$

5.已知　$\triangle ABC$為等腰三角形，



即　$AB=AC$

而$BE=ED=DC$

(求證) $\angle BAE=\angle CAD<\angle EAD$

(證)在 $\triangle BAE, CAD$ 中有 $\angle ABE=\angle ACD$, $AB=AC$,

$BE=CD$

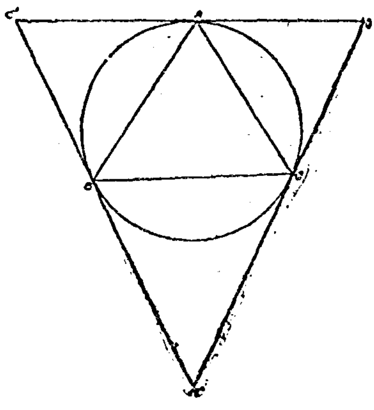
$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAD$

$\therefore \angle BAE=\angle CAD$

但在 $\triangle ABD$ 中，E為BD之中點，$AB>AD$，故引用例丁可知 $\angle BAE<\angle EAD$

$\therefore \angle BAE=\angle CAD<\angle EAD$

6. 已知O圓為 $\triangle ABC$ 之外接圓，而 $\triangle A'B'C'$ 為在A, B, C三處之切線所成者。并 $\angle BAC>\angle ABC$



(求證)

$\angle B'A'C'<\angle A'B'C'$

(證) $\because \angle BAC>\angle ABC$

$\therefore \overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CA}$

$\therefore \angle BCA'>\angle ACB'$

今 $\triangle A'BC$, $B'CA$ 均為等腰三角形。

$\therefore \angle BA'C=2Rt\angle-2\angle BCA'$

$\angle CB'A=2Rt\angle-2\angle ACB'$

$\therefore \angle BA'C < \angle AB'C$

即 $\angle B'A'C' < \angle A'B'C'$

此題之逆亦能成立，其證法顯與本題同。

VI. 平行線之判別

（一）定理：

1.同垂直於一直線之兩線必平行。

2.如二直線被一直線所截而其

(1)內錯角相等者，

(2)外錯角相等者，

(3)同位角相等者，

則此兩線必平行。

3.如二直線同與他一線平行，則此兩直線必平行。

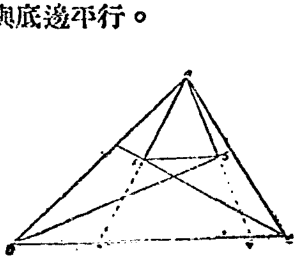
4.平行四邊形之對邊或梯形之兩底必平行。

5.聯三角形兩腰中點之線必與底邊平行。

6.梯形之中線必與其兩底平行。

7.分三角形兩邊成等比之線必與底邊平行。

【例解】



1.已知 BD，CE為$\angle B$, $\angle C$

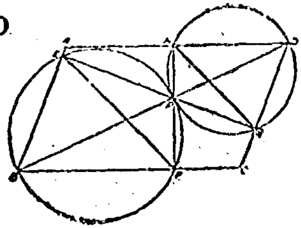
之平分線，

$AD \perp BD$，$AE \perp CE$

(求證)DE ∥ BC

(證)引長AD，AE交BC於G，F兩點。則在△AGB中BD既爲∠B之平分線又垂直於AG，故D爲AG之中點，同理E爲AF之中點。故就△AFG觀之，可知DE ∥ FG，卽DE ∥ BC

2.已知 P爲平行四邊形ABCD之對角線BC上任一點。HPF⊥BC，EPG⊥DC



(求證)HG ∥ EF

(證)∵∠PGD＝∠PHD＝∠PEB＝∠PFB＝Rt∠

故P，E，B，F四點在以BP爲直徑之圓上，而P，G，D，H四點在以PD爲直徑之圓上。

∴∠EFP＝∠FBP，∠PHG＝∠PDG

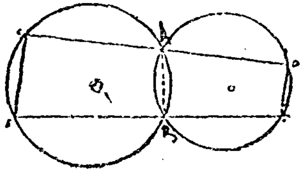
但AB ∥ CD

∴∠EBP＝∠PDG

∴∠EFP＝∠PHG

∴EF ∥ HG

3.(已知)O與O' 兩圓交於A及B兩點.CD，EF爲過A，B之任意二弦。



(求證)CE ∥ DF

(證)聯公弦AB

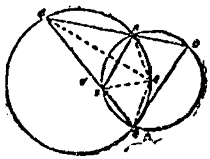
則∠ACE＝∠ABF，

∠ADF＝∠ABE

∴∠ACE＋∠ADF＝2Rt∠

∴CE ∥ DF

4. 已知　O與O' 兩圓交於A 及B兩點，圓心O在O' 圓之圓周上。C爲O' 圓周上任一點。



(求證)AE ∥ BD

(證)在△AOC，EOC中有

AO＝EO，CO公用，∠ACO＝∠ECO，而 CO邊爲最大，

∴△AOC≌△EOC

∴AC＝EC

依同理可證CD＝CB

∴A爲CD之中點而E爲CB之中點。

故AE ∥ BD

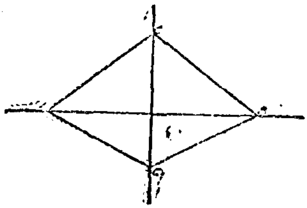
VII. 垂線之判別

(一)定理：

1. 如兩直線相交所成之隣角相等，則此兩線垂直。

2. 如一線為二平行線中一者之垂線則亦必為他一線之垂線。

3. 若一線上之兩點至他一線上之兩點成兩組相等之距離，則此兩線垂直。即如 AC=BC，AD=BD，則 AB⊥DC.



4. 等腰三角形頂角之平分線必垂直於底邊。

5. 一圓之切線與過切點之半徑垂直。

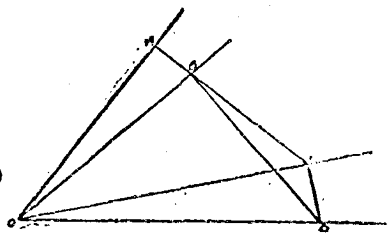
6. 兩相交圓之公弦與聯心線垂直。或兩相切圓之公切線亦與其聯心線垂直。

7. 同圓或等圓內平分弦之半徑必垂直於該弦。

【例解】

1. 已知 ∠AOB=∠COD, OA⊥AB OB⊥BD 而A B,C 在一直線上;

(求證)OC⊥CD



(證)∵∠AOB=∠COD

∴∠AOC=∠BOD

又$\angle ACO = Rt\angle - \angle AOC$

$= Rt\angle - \angle BOD$

$= \angle BOD$

故O，B，C，D四點在一圓周上

$\therefore \angle OCD = \angle OBD = Rt\angle$

$\therefore OC \perp CD$

2.已知　$BE \perp AC$，$CF \perp AB$

M為EF之中點，而D為BC之中點。

(求證)$DM \perp EF$

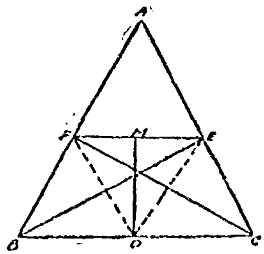
(證)在Rt△BEC，BFC中，D為其斜邊之中點。

故$ED = \frac{1}{2}BC = FD$

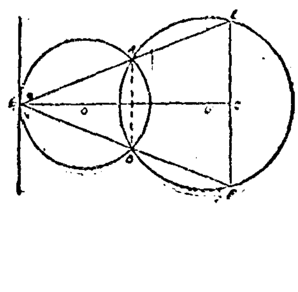
故△DEF為等腰三角形，

今M既為其底邊之中點，

$\therefore DM \perp EF$



3.已知　O，O' 兩圓相交于A，B兩點，P為O圓上任一點，PT為過P之切線。



(求證)$POC \perp EF$

(證)$\because \angle BFE+\angle BAE=2Rt\angle$

而$\angle BAE+\angle BAP=2Rt\angle$

$\therefore \angle BFE=\angle BAP$

但$\angle BAP=\angle BPF$

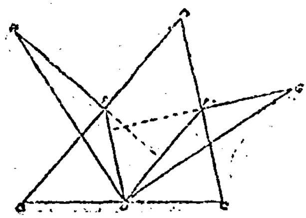
$\therefore \angle PFE=\angle FPT$

$\therefore PT \parallel EF$

但$PC\perp PT$，

$\therefore PC\perp EF$

4. 已知　D, E, F爲△ABC三邊之中點，$FH\perp AB$，$FH=\frac{1}{2}AB$, $GE\perp AC$，$GE=\frac{1}{2}AC$



(求證)$HD\perp DG$

(證)聯DE，DF，

$\because EG=\frac{1}{2}AC=DF$，　$DE\parallel AB$

$HF=\frac{1}{2}AB=DE$，　$DF\parallel AC$

$\therefore EG\perp DF$，$HF\perp DE$

故$\angle DEG$與$\angle DFH$爲相等或相補，但此二角旣均爲鈍角。故　$\angle DEG=\angle DFH$

$\therefore \triangle EDG \cong \triangle FHD$

$\therefore HD = DG$，

$\therefore HD \perp DG$（$\because EG \perp DF$，$DE \perp HF$）

## VIII. 點之共線問題

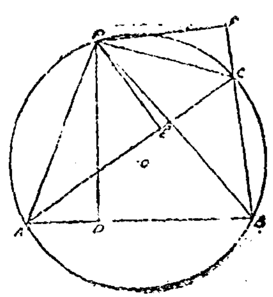
本節及下節所述者在初等幾何中多不討論，茲特略述之，以備一考耳。

（一）定理：

1. 若兩隣角互相補，則其兩外邊成一直線。
2. 等腰三角形頂角之平分線與對底上之高二者相合。
3. 同過一點之兩直線若均與第三線平行，則此二線相合。
4. 過AB直線上之一點O，與該線上下兩側之二點C，D相聯結，如$\angle AOC = \angle BOD$，則C，O，D三點在一直線上。

【例解】

1. 已知　PA，PB，PC為O圓內之任意三弦，以PA，PB，PC為直徑作三圓，此三圓兩兩相交於D，E，F三點。



（求證）A，D，B三點共線，

A，E，C三點共線，

B，F，C三點共線。

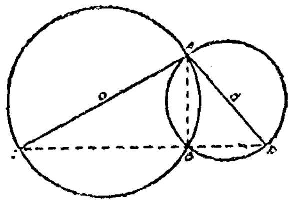
(證)如D在以PA爲直徑之圓上則 ∠PDA＝Rt∠

而D又在以PB爲直徑之圓上，故∠PDB＝Rt∠

∴A，D，B三點共線。

同理可證A，E，C三點共線，B,C,F三點亦共線。

2.已知　O及O' 兩圓相交於A，B 兩點。AC，AD 爲其直徑。




(求證)C，B，D三點共線。

(證)∵∠ABC＝Rt∠

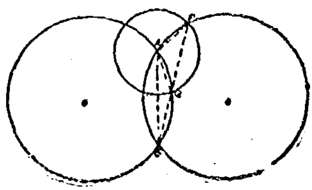
∠ABD＝Rt∠

∴BC與BD成一直線。

卽C，B，D三點共線。

3.已知　O及O' 爲相等之兩圓，且相交於A，B兩點，過A作任意一圓與O及O' 相交於Q，P兩點。

(求證)P，Q，B三點共線。



(證)聯AB，BP，BQ，AP，AQ

則AP＝AQ

∴$\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{AQ}$

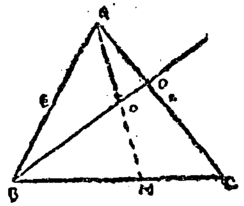
∴∠ABP＝∠ABQ

∴P，Q，B三點共線。

4. 已知　BD為∠B之平分線

AP⊥BD，E，F為AB，AC

之中點，



(求證)E，P，F三點共線。

(證)∵E，F為AB，AC之中

點。

∴EF∥BC.

又BD為∠ABC之平分線，而AP⊥BD。

故引長AP交BC於M點，則P為AM之中點。

∴EP∥BC

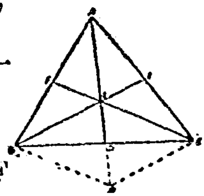
∴E，P，F三點共線。

## Ⅸ. 共點問題，點之共圓及兩圓間之關係

此類問題多半需應用軌跡之理者，今舉數例於下：

1. 三角形之三中線會於一點。

(已知)D，E，F為△ABC三邊之中點。



(求證)三中線 AD，BE，CF 相遇於一

點。

(證)設BE，CF相交於G. 過B作BH∥CF

聯AG遇BH於H點。則就△ABH觀之，F既為AB

之中點而FG ∥ BH。故G必亦爲AH之中點。

又就△AHC觀之，G 旣爲AH之中點而E又爲AC之中點，故EG ∥ CH.

故▱BHCG爲一平行四邊形，而以 BC，HG 爲其二對角線。

故BC與GH必相遇於BC之中點D.

卽三中線AD，BE，CF爲共點者。

再者於上之證明中，易知$AG=\frac{2}{3}AD$，$BG=\frac{2}{3}BE$

而 $CG=\frac{2}{3}CF$. 此G點卽稱爲△ABC之重心。

2. 三角形三邊之垂直平分線必相遇於一點。此點稱爲外心。（此題及以下二題之證明須應用軌跡之理。故其證法俟論及軌跡時再爲詳述）。

3. 三角形三內角之平分線必相遇於一點。此點稱爲內心。

4. 三角形之三高必相遇於一點。此點稱爲垂心。

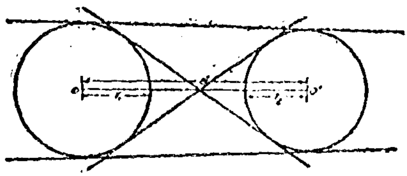
5. 試詳論兩圓間之關係。

(解)

同在一平面內之兩圓，其間關係不外相交與否及相切與否，而此等諸關係則均與其聯心線之長短有關，茲分述之於下：

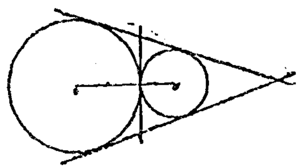
設O圓之半徑為$r_1$，O'圓之半徑為$r_2$，其聯心線為d，而$r_1>r_2$.

(1)如$d>r_1+r_2$，則此兩圓既不相交復不相切且互不包含。如下圖：

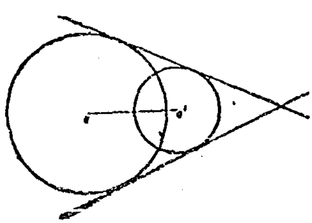


在此種情形下，該二圓有兩外公切線及二內公切線。

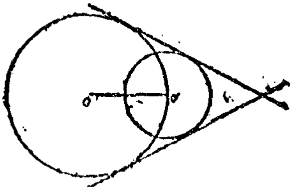
(2)如 $d=r_1+r_2$，則此兩圓相外切，且有兩外公切線及一內公切線。如右圖：



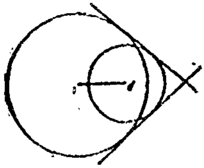
(3)如 $r_1>d<r_1+r_2$ 則此兩圓相交，有二外公切線而無內公切線。且O'圓之圓心尚在O圓之外。如下圖：



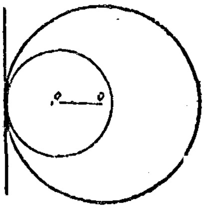
(4)如 $d=r_1$，則此兩圓相交而O'圓之圓心則在O圓之圓周上。在此情形下仍有二外公切線而無內公切線。如下圖：



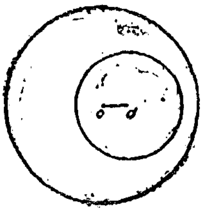
(5)如 $r_1 > d > r_1 - r_2$ 則O'圓之圓心在O圓內，但仍爲相交者。其圖如右：



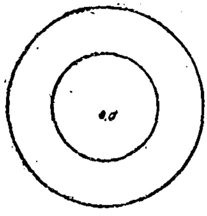
(6)如 $d = r_1 - r_2$ 則此兩圓相內切而僅有一外公切線。如左圖：



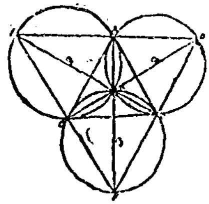
(7)如 $< r_1 - r_2$ 則此兩圓既不相內切，復不相交，而O'圓則包含在O圓之內。至於內外公切線則均化爲無有矣。其圖如上右圖：



(8)如 $d = O$，則此兩圓之圓心合而爲一。即所謂同心圓是也。其內外公切線當亦無有。其圖如右：



6. 自 △ABC 之各邊向外側作三等邊三角形 ACD，ABE，BCF. $O_1, O_2, O_3$ 各爲 △ABE，ACD，BCF 之外接圓。



(求證) i. $O_1, O_2, O_3$ 三圓共過一點。

ii. AF, BD, CE三線共過一點。

(證) i. 設△ABE, ACD之外接圓 $O_1, O_2$ 相交於P點。

則 $\angle APB + \angle AEB = \angle APC + \angle ADC = 2Rt\angle$

但 $\angle AEB = \angle ADC = 60^\circ$

$\therefore \angle APB = \angle APC = 120^\circ$

$\therefore \angle BPC = 120^\circ$

$\therefore \angle BPC + \angle BFC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

故B，F，C，P 四點共圓。

$\therefore O_1$，$O_2$，$O_3$三圓共過一點P.

ii. $\because \angle BPF = \angle BCF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BF} = 60^\circ$.

$\therefore \angle BPA + \angle BPF = 180^\circ$

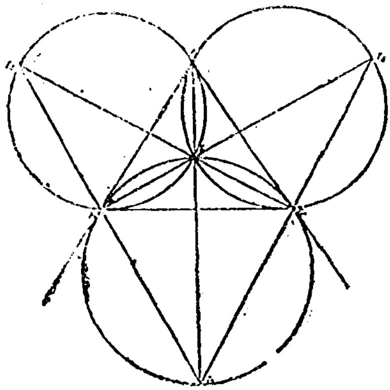
$\therefore$ A，P，F三點共線

同理可證，B，P，D三點共線, E, P, C 三點亦共線。故AF，BD，CE三線共點。

7. 已知　I為△ABC之內心，$I_1$為在∠A內之傍切圓心，$I_2$為∠B內之傍切圓心而$I_3$為∠C內之傍切圓心。

(求證) I，B，$I_1$，C四點為共圓者。

(證) ∵BI為∠ABC之平分線，而$BI_1$為∠ABC之補角之平分線。



∴$BI \perp BI_1$，

即$\angle IBI_1 = Rt\angle$.

同理$\angle ICI_1 = Rt\angle$.

故 B，$I_1$，C，I 四點共圓。

依同理可證$A, I, B, I_3$爲共圓者，而$A, I, C, I_2$四點亦然。

## X. 關於比例及相似多邊形之定理及例解

### （一）關於成比例線段之定理及例解：

【定理】

1. 過三角形之兩邊作一線與第三邊平行，則必分此兩邊成比例。

2. 設兩線爲數平行線所截，則其諸相當線分成比例。

3. 三角形內一角之平分線分其對邊成兩線分。此兩線分之比與其兩隣邊之比相等。例如在△ABC內，∠A之平分線分BC成BP，CP 兩線分，則

   $BP:CP = BA:CA$.

4. 三角形一外角之平分線分其對邊成兩線分，則此兩線分之比與其兩隣邊之比相等。

5.相似多邊形之各相當邊成比例。

相似多邊形之判別：

欲判別兩多邊形之是否相似，普通恆自分此二多邊形爲諸三角形，然後再視其相當之諸三角形是否爲相似而言。故今先述二三角形爲相似之條件：

(1)如二三角形之各相當角相等，則此兩三角形相似。

(2)如二三角形有一角相等，而此角之兩邊復成比例，則此兩三角形必相似。

(3)如兩三角形之相當邊成比例，則此兩三角形必相似。

(4)如兩三角形之諸邊彼此爲平行或垂直，則此兩三角形必相似。

(5)如兩多邊形可分爲諸三角形，而此諸三角形又兩兩相似，則此兩多邊形必亦相似。

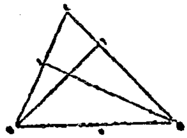
6.兩相似三角形之高，中線及分角線必成比例。

7.如過一定之諸線爲兩平行線所截，則其所成之諸相當線分成比例。

8.兩相似多邊形之對應邊與其周界成比例。

【例解】

1.已知　$BE \perp AD$，$DF \perp AB$.



(求證)$AB:AD=BE:DF$.

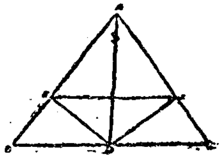
(證)在Rt△ABE，ADF中

$\angle ABE=90^\circ-\angle A$

$=\angle ADF$.

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ADF$.

$\therefore AB:AD=BE:DF$.



2. 已知D爲BC之中點，DE，DF爲$\angle ADB$，$\angle ADC$之平分線。

(求證)$AE:EB=AF:FC$.

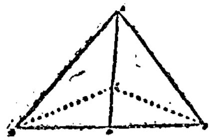
(證)在△ADB，ADC中，DE，DF既爲$\angle ADB$，$\angle ADC$之平分線。故

$AD:DB=AE:EB$，

$AD:DC=AF:FC$.

但　$DB=DC$.

$\therefore$　$AE:EB=AF:FC$.



3. 已知　I爲△ABC之內心，AD爲$\angle A$之平分線。

(求證)$BC:(AB+AC)=DI:AI$.

(證)聯BI，CI.

在△ADB，ACD中有

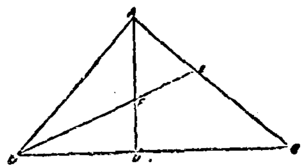
$AB:BD=AI:DI.$

$AC:CD=AI:DI.$

$\therefore AB:BD=AC:CD=AI:DI.$

$\therefore (AB+AC):(BD+CD)=AI:DI.$

即$BC:(AB+AC)=DI:AI.$



4. 已知$\angle A=Rt\angle$, $AD\perp BC$, BE為$\angle B$之平分線$\angle$交AD於F點。

(求證)$DF:AF=AE:EC.$

(證)在$\triangle ABD$內，$\because$ BE為$\angle B$之平分線，

$\therefore BD:AB=DF:AF.$

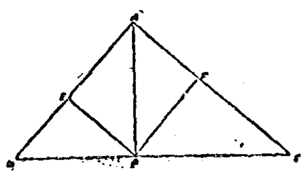
又在$\triangle ABC$內，$\because$ BE為$\angle B$之平分線，

$\therefore AB:BC=AE:EC.$

但$\triangle ABD \backsim \triangle CBA$

$\therefore AB:BC=BD:AB.$

$\therefore DF:AF=AE:EC.$



5. 已知$\angle A=Rt\angle$, $AD\perp BC$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$.

(求證) i. $DB:DC=AB^2:AC^2.$

ii. $BE:CF=AB^3:AC^3$

(證)i. $\because \triangle ABC \backsim \triangle DBA$

$\therefore AB:BC=DB:AB$

又$\because \triangle ABC \backsim \triangle DAC$,

$\therefore AC:BC=DC:AC$

$\therefore AB^2=BC\cdot DB$

$AC^2=BC\cdot DC$

$\therefore BD:CD=AB^2:AC^2$.

ii. $\because$ ▱AEDF為矩形。

$\therefore AE=DF$，$AF=DE$.

又$\because \triangle EBD \backsim \triangle EDA \backsim \triangle FDC \backsim \triangle ABC$.

$\therefore BE:ED=AB:AC$，……(1)

$ED:AE=AB:AC$，

$ED:DF=AB:AC$，……(2)

$DF:FC=AB:AC$，……(3)

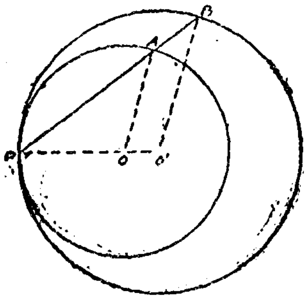
將(1)，(2)，(3)三式相乘卽得

$BE:CF=AB^3:AC^3$.

6. 已知O兩O′兩圓內切於P點，過P任意作一弦交O圓於A點，O′圓於B點。

(求證)$AB:PA=OO':OP$.

(證)$\because \triangle AOP$，$PO'B$均為等腰三角形。



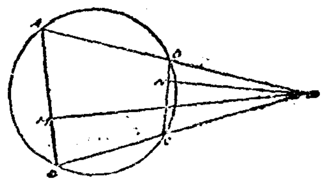
$\therefore \angle OPA = \angle OAP = \angle O'BP$.

$\therefore \triangle AOP \backsim \triangle BO'P$, $AO \parallel BO'$

$\therefore AB : PA = OO' : OP$

今$OO'$爲兩圓半徑之差，$OP$爲O圓之半徑故此二量均爲常數。由此可知過P點任意作一弦，則其所成兩線段之比均爲一定而不變，卽等於 $OO' : OP$ 是也。

7. 已知 P爲圓外之任一點，過P引兩割線PDA，PCB. 作$PM \perp AB$，$PN \perp CD$



(求證)$PM : PN = AB : CD$.

(證)$\because \triangle PAB \backsim \triangle PCD$

$\therefore AB : CD = PA : PC$.

又在Rt△PAM，PCN中有

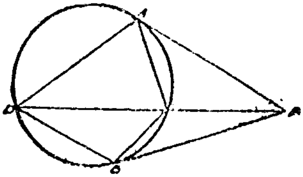
$\angle A = \angle PCN$.

$\therefore \triangle PAM \backsim \triangle PCN$.

$\therefore PM : PN = PA : PC$.

$\therefore PM : PN = AB : CD$

8. 已知P為圓外任一點，作P作至該圓之兩切線PA，PB，及任意一弦PCD。




(求證)AC:AD=BC:BD。

(證)∵△PCA∽△PAD

∴AC:AD=PA:PD。

又∵△PCB∽△PBD

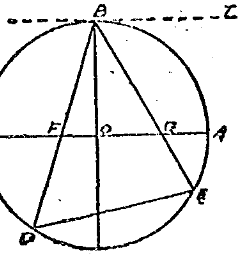
∴BC:BD=PB:PD。

但PA，PB均爲過P點之切線

∴PA=PB。

∴AC:AD=BC:BD。

9. 已知OA及OB爲互相垂直之兩半徑，DE圓爲任意之一弦，BD，BE交OA及其延長線於F，G兩點。




(求證)△BFG∽△BED。

(證)過B引O圓之切線BT。

則∠TBE=∠D。

又因OA及OB爲垂直者，而OB及BT亦爲垂直者，故

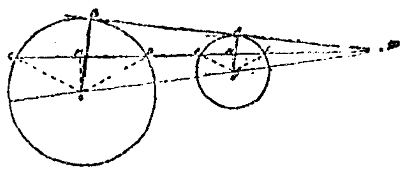
BT與OA平行。

$\therefore \angle TBE = \angle BGF$.

故在$\triangle$BDE,BGF內$\angle$B為公用者,而$\angle D = \angle BGF$

故$\triangle BFG \backsim \triangle BED$.

10. 已知O,O'為不相交之兩圓。其聯心線與外公切線BA相遇於P點(此點稱為此兩圓之相似中心),過P作任意一割線交O'圓與E,F兩點而交O圓於C,D兩點。又r為O圓之半徑,r'為O'圓之半徑。A,B,兩點為切點。



(求證)i. $PO:PO' = r:r'$.

ii. $PF:PE = PD:PC$.

iii. $CD:EF = r:r'$.

(證)i. 在$\triangle PO'A$,POB中有

$\angle PAO' = \angle PBO = Rt\angle$,

$\angle APO' = \angle BPO$.

$\therefore \triangle PO'A \backsim \triangle POB$.

$\therefore PO:PO' = BO:AO' = r:r'$

ii. 作$OM \perp CD$,$O'N \perp EF$.

則在Rt△PNO'，PMO中有

$\angle NPO' = \angle MPO$

$\therefore \triangle PNO' \backsim \triangle PMO$.

$\therefore OM:O'N = OD:O'F$.

但$\triangle MOD \backsim \triangle NO'F$

$\therefore \angle MDO = \angle NFO'$

$\therefore OD \parallel O'F$

同理可證$OC \parallel O'E$.

$\therefore PF:PD = PO':PO = PE:PC$.

$\therefore PF:PE = PD:PC$.

iii. $\because OM:O'N = OD:O'F = r:r'$.

$MD:NF = OM:O'N = r:r'$.

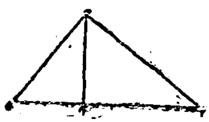
$\therefore CD:EF = 2MD:2NF$

$= r:r'$.

（二）關於比例中項及其他雜定理：

【定理】

1. 直角三角形斜邊上之高爲斜邊上兩線分之比例中項，至於此兩線分乃爲該高分此斜邊所成者。



2. 如△ABC爲直角三角形，∠A爲

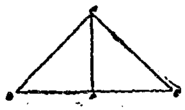
直角，而 $AD \perp BC$，則AB爲BC及BD之比例中項，而AC爲BC及CD之比例中項。

3. 由圓外一點至圓周上一切線爲過此點任一割線被圓周所分成兩段之比例中項。

4. 直角三角形兩腰平方之和等於其斜邊之平方。

5. 設兩弦於圓內相交，則其兩線分之積相等。即如AB，CD相交於P點，則 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。

6. 三角形兩邊之積等於其外接圓之直徑與其第三邊上高之乘積。



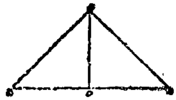
7. 如AD爲∠A之平分線，
則 $\overline{AD}^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$。

8. 如AD爲△ABC之一高，則
$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \pm 2BC \cdot DC$。
若AB所對之角爲銳角，則用負號，爲鈍角則用正號。

9. 在△ABC內，如M爲BC之中點，而 $AD \perp BC$，則
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AM}^2$
$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2BC \cdot DM$。

【例解】

1. 等腰直角三角形之各腰爲其斜邊及斜邊上高之比例中項。



(已知)$\angle A=Rt$，$AB=AC$。

$AD\perp BC$。

(求證)$\overline{AC}^2=AD\cdot BC$，

$\overline{AB}^2=AD\cdot BC$。

(證)$\because\triangle ABC\backsim\triangle DBA$。

$\therefore AB:AC=BD:DA$，

又$\triangle ABC\backsim\triangle DCA$。

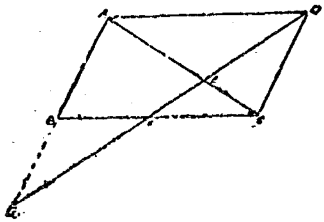
$\therefore AB:AC=DC:DA$。

$\therefore BD=DC=DA$。

但$\overline{AB}^2=BC\cdot BD$。

$\therefore\overline{AB}^2=BC\cdot AD=\overline{AC}^2$。

2.已知▱ABCD為平行四邊形，DG為任意一線，交對角線AC於E點，BC邊於G點，AB邊之引長線於G點。



(求證)$\overline{DE}^2=EF\cdot EG$。

(證)$\because\triangle DEC\backsim\triangle GEA$，$\triangle DEA\backsim\triangle FEC$

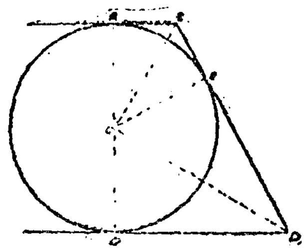
$\therefore DE:DC=GE:GA=EC:EA$，

$DE:DA=FE:FC=EA:EC.$

$\therefore DE:DC=DA:DE$，$DE:GE=EF:DE.$

$\therefore \overline{DE}^2=EF\cdot EG.$

3. 已知 AC，BD，CD 三線均為O圓之切線，A，E，B為三切點，而AC ∥ BD，Y為圓之半徑。CD交AC，BD於C，D兩點。



(求證)Y為EC，ED之比例中項。

(證)∵AC ∥ BD，$OA\perp AC$，$OB\perp BD$.

$\therefore \angle ACD+\angle BDC=2Rt\angle.$

令CO為∠ACD之平分線，DO為∠BDC之平分線。

$\therefore CO\perp DO.$

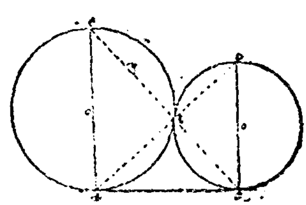
故△DOC為直角三角形而$\angle POC=Rt\angle.$

又$OE\perp DC.$

$\therefore EC:OE=OE:ED.$

即$\overline{OE}^2=Y^2=EC\cdot ED.$

4. 已知O及O' 兩圓外切於 E點，AB 為外公切線。AC 為過A點之O圓直徑而BO 則為



過B點O'圓之直徑。

(求證)$AC:AB=AB:BD$.

(證)∵A，E，D三點在一直線上，B，E,C三線亦然。

故在△ABC，DAB中有

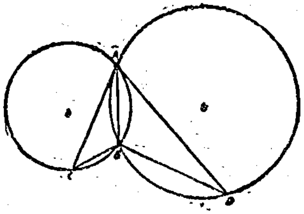
$\angle CAB=\angle ABD=Rt\angle$.

$\angle ACB=\angle DAB$.

∴$\triangle ABC\backsim\triangle BDA$.

∴$AC:AB=AB:BD$.

5. 已知O及O'兩圓相交於A，B兩點，AD，AC爲O，O'圓過A點之切線，且交O'，O圓於D，C兩點。



(求證)AB爲BC，BD之比例中項。

(證)∵CA爲O'圓之切線，DA爲O圓之切線，

∴$\angle ADB=\angle CAB$，$\angle ACB=\angle BAD$.

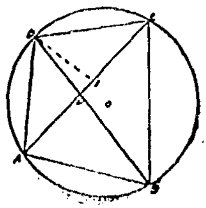
∴$\triangle ABC\backsim\triangle DBA$.

∴$BC:AB=AB:DB$.

卽$\overline{AB}^2=DB\cdot BC$.

6. 已知▱ABCD爲O圓之內接四邊形。

(求證)$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$.



(證)作DE使$\angle CDE=\angle ADB$.

則在△ABD，ECD，BCD，AED

中有

$$\angle ABD=\angle ECD,$$

$$\angle ADB=\angle CDE,$$

$$\angle CBD=\angle EAD$$

$$\angle EAD=\angle ADB+\angle EDB=\angle CDE+\angle EDB$$

$$=\angle CDB.$$

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ECD$，$\triangle BCD\backsim\triangle AED$.

$\therefore AB:BD=EC:CD$,

$BC:AE=BD:AD$.

即$AB\cdot CD=BD\cdot EC$

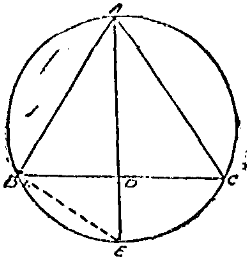
$BC\cdot AD=BD\cdot AE$

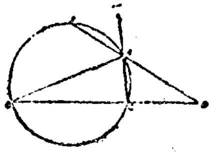
$\therefore AB\cdot CD+BC\cdot AD=BD(AE+EC)$

$=BD.AC.$

7.已知i.　AD爲△ABC中一內角$\angle A$之平分線，交△ABC之外接圓於E點。

ii.　AD爲△ABC中$\angle A$之外角平分線交其外接圓於E點。





(求證) i. $AB \cdot AC = BD \cdot CD + \overline{AD}^2$,

ii. $AB \cdot AC = BD \cdot CD - \overline{AD}^2$.

(證) 就第一圖觀之，可知在$\triangle$ABE，ADC中有

$\angle BAE = \angle DAC$,

$\angle AEB = \angle C$.

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ADC$.

$\therefore AB : AD = AD : AC$.

$\therefore AB \cdot AC = AD \cdot AE$

$= AD(DE \pm AD)$

$= AD \cdot DE \pm \overline{AD}^2$

又在$\triangle$ADC，BDE中有

$\angle ADC = \angle BDE$，$\angle DAC = \angle DBE$.

$\therefore \triangle ADC \backsim \triangle BDE$

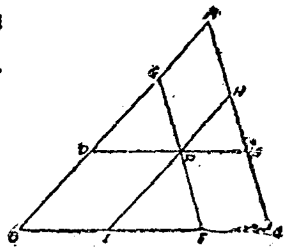
$\therefore AD : DC = BD : DE$,

$\therefore AD \cdot DE = BD \cdot DC$.

$\therefore AB \cdot AC = AD \cdot DE + \overline{AD}^2$

$= BD \cdot DC + \overline{AD}^2$.

8. 已知P爲△ABC內任一點。過P作與BC，CA，AB三邊平行之三線DE，FG，HI.



（求證）$\dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{CA}+\dfrac{HI}{AB}=2$.

（證）

$\because DE \parallel BC$，$FG \parallel AC$.

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$, $\dfrac{FG}{CA}=\dfrac{BG}{AB}$.

$\therefore \dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{CA}+\dfrac{HI}{AB}=\dfrac{AD+BG+HI}{AB}$.

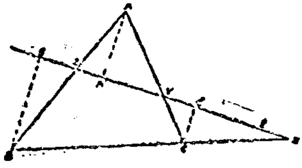
但▱AGPH，DBIP均爲平行四邊形。

$\therefore HI = HP + PI = AG + BD$.

$\therefore \dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{CA}+\dfrac{HI}{AB}=\dfrac{AD+BG+AG+BD}{AB}$

$=\dfrac{2AB}{AB}=2$.

9. 已知一任意直線e交△ABC之三邊及其延長線於三點X，Y，Z.



（求證）$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1.$

（證）過A，B，C，三點作c之垂線AA'，BB'，CC'。

則BB' ∥ CB' ∥ AA'

$\therefore\frac{BX}{CX}=\frac{BB'}{CC'}$，

$\frac{CY}{AY}=\frac{CC'}{AA'}$，$\frac{AZ}{BZ}=\frac{AA'}{BB'}$。

以此三式相乘，卽得

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{AZ}{BZ}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BB'}=1.$$

## XI. 關於面積之定理及例解

（一）關於面積公式及等積問題之定理及例解：

1. 三角形之面積等於其底乘高之半。

2. 平行四邊形之面積等於其底乘高。

3. 梯形之面積等於其兩底之和之半與高之乘積。

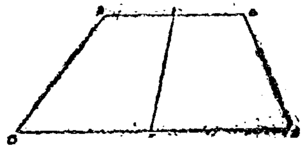
4. 有法多邊形之面積等其邊心距與周界相乘之積之半。

5. 圓之面積等於半徑平方之π倍。

6. 同底，等高或等底同高之二三角形爲等積。

此乃求多邊形面積之數基本定理，若欲求一任意多邊形之面積，則可先將此多邊形分爲數三角形而研究之。

【例解】



1已知▱ABCD 為一梯形，

AD=BC,

E,F為AD，BC之中點。

(求證)▱ABFE$\Leftrightarrow$▱EFCD.

(證)設▱ABCD之高為h.

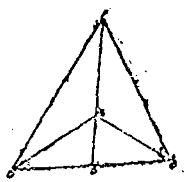
則▱ABFE $=\dfrac{1}{2}h(AE+BF)$

▱EFCD $=\dfrac{1}{2}h(ED+FC)$

但AE=ED，BF=FC

∴▱ABFE$\Leftrightarrow$▱EFCD.

2.已知G為△ABC之重心。



(求證)△GBC$\Leftrightarrow$△GAC$\Leftrightarrow$△GAB.

(證)∵ $AG=\dfrac{3}{2}AD$.

∴△ABD$\Leftrightarrow$△ADC

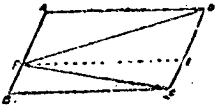
$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}$△ABC.

∴△GAB $\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}$△ABD $\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}$△ABC.

依同理可證△GBC$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}$△ABC$\Leftrightarrow$△GAC.

∴△GAB$\Leftrightarrow$△GAC$\Leftrightarrow$△GBC.

3. 已知P 爲平行四邊形之 AB上任一點。



(求證)$\triangle PAD+\triangle PBC \doteqdot \frac{1}{2}\square ABCD$.

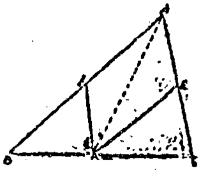
(證)過P作PE∥AD∥BC而交CD於E點。

則$\triangle PAD \doteqdot \triangle PED$，

$\triangle PBC \doteqdot \triangle PEC$.

$\therefore \triangle PAD+\triangle PBC \doteqdot \frac{1}{2}\square ABCD \doteqdot \triangle PCD$.

4. 已知E，F爲△ ABC二邊 AB 及 AC之中點。P爲底邊BC上任一點。



(求證)$\square AEPF \doteqdot \frac{1}{2}\triangle ABC$.

(證)聯AP.則因AE=BE，AF=CF.

$\therefore \triangle APE \doteqdot \triangle BPE$，

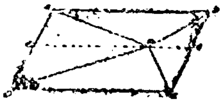
$\triangle APF \doteqdot \triangle CPF$.

$\therefore \triangle APE+\triangle APF \doteqdot \triangle BPE+\triangle CPF$.

卽$\square AEPF \doteqdot \triangle BPE+\triangle CPF$.

但$\square AEPF+\triangle BPE+\triangle CPF \doteqdot \triangle ABC$

$\therefore \square AEPF \doteqdot \frac{1}{2}\triangle ABC$.



5. 已知P爲平行四邊形 ABCD之任意一點。

(求證)$\triangle PAD + \triangle PBC \doteq \frac{1}{2}$▱$ABCD$.

(證)過$P$作$GH \parallel AD \parallel BC$.

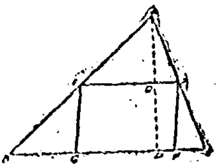
則$\triangle PAD \doteq \triangle APG + \triangle DPH$.

$\triangle PBC \doteq \triangle BPG + \triangle PCH$.

$\therefore \triangle PAD + \triangle PBC \doteq \triangle PAB + \triangle PDC$

$\doteq \frac{1}{2}$▱$ABCD$.

6.已知：E，F為$\triangle ABC$兩邊$AB, AC$之中點。$FH \parallel EG$



(求證)▱$EFHG \doteq \frac{1}{2}\triangle ABC$

(證)作$AP \perp BC$，並設$AP$交$EF$於$Q$點。

則$AQ \perp EF$, $EF = \frac{1}{2}BC = GH$

又$\because AE = EB = \frac{1}{2}AB$.

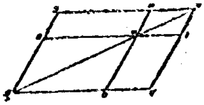
$\therefore AQ = QP = \frac{1}{2}AP$.

今▱$EFHG = PQ \cdot GH$, $= \frac{1}{2}AP \cdot \frac{1}{2}BC$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot AP$.

$\therefore$▱$EFHG \doteq \frac{1}{2}\triangle ABC$.

7. 已知：▱ABCD 爲平行四邊形，P 爲對角線 BD 上任一點。過 P 作 EF ∥ AD ∥ BC，GH ∥ AB ∥ DC.



(求證)▱AEPG≎▱PHCF.

(證)∵▱ABCD，▱GPFD，▱EBHP 均爲平行四邊形

而BD，DP，BP各爲其對角線

∴△ABD≎△CBD，　(1)

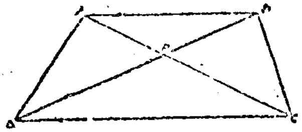
△GPD≎△FPD，　(2)

△EPB≎△BHP　(3)

由(1)式內減去(2)+(3)卽得

▱AEPG≎▱PHCF.

8. 已知：▱ABCD 爲梯形，P 爲其兩對角線之交點。



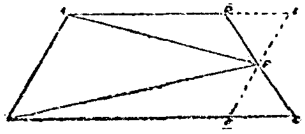
(求證)△PAB≎△PCD

(證)∵AD＝BC.

∴△DBC≎△ABC.

∴△DBC－△PBC≎△ABC－△BPC.

∴△PAB≎△PCD.

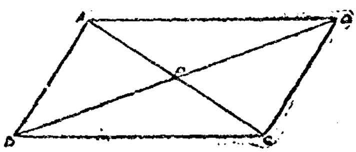


9. 已知：▱ABCD 爲一梯形，P爲其CD腰之中點。

(求證)$\triangle PAB \Bumpeq \frac{1}{2}$ ▱ABCD.

(證)過P作EF∥AB，且交AD之延長線及BC於E及F兩
　點。
　則$\triangle PDE \Bumpeq \triangle PFC$.
　又∵▱EABF爲平行四邊形。
　　∴$\triangle PAB \Bumpeq$ ▱EABF.
　　∴$\triangle PAB \Bumpeq$ ▱ABCD.

10.已知：▱ ABCD 爲平行四邊形，AC，BD兩對角之交點爲P.



(求證)$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)$

(證)∵AB=CD，AD=BC，AP=PC，BP=PD

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$

又∵$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)$

$=(\overline{2AP}^2+\overline{2BP}^2)$

$=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.

此定理又可述之曰：平行四邊形之四邊上正方形之和與兩對角線上正方形之和爲等積者。

（二）關於多邊形面積之比之定理及例解：

【定理】

1. 同底兩三角形面積之比等於其高之比。

2. 等高兩三角形面積之比等於其底之比。

3. 等高兩平行四邊形面積之比等於其底之比；而等底兩平行四邊形面積之比則等於其高之比。

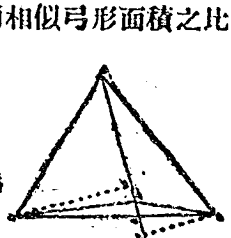
4. 等中線兩梯形面積之比等於其高之比；而等高兩梯形面積之比則等於其中線之比。

5. 如兩三角形有一角彼此相等，則此兩三角形面積之比等於夾此角兩邊之積之比。

6. 兩相似多邊形面積之比等於其任一對相當邊平方之比。

7. 邊數相等之兩有法多邊形面積之比等於其任一對相當邊平方之比；又等於其外接圓半徑平方之比；且亦等於其內切圓半徑平方之比。

8. 兩圓面積之比等於其半徑平方之比。故兩相似扇形面積之比等於其半徑平方之比，而兩相似弓形面積之比亦然。



【例解】

1. 已知：P為△ABC內任意一點。聯AP交BC於D。

(求證)$\triangle ABP:\triangle ACP=BD:CD$.

(證)自B，C作$BK\perp AD$，$CH\perp AD$.

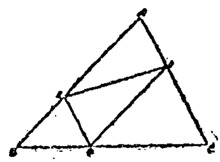
則$\triangle ABP:\triangle ACP=BK:CH$.

但$CH\parallel BK$.

$\therefore\triangle KBD\backsim\triangle CHD$.

$\therefore BK:CH=BD:CD$

$\therefore\triangle ABP:\triangle ACP=BD:CD$.



2. 已知：P為$\triangle ABC$之底邊BC上任一點，過P作$PE\parallel AC$，$PF\parallel AB$.

(求證)$\triangle BPE:\triangle AEF=\triangle AEF:\triangle CPF$.

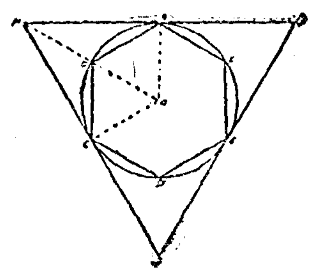
(證)$\because PE\parallel AC$，$PF\parallel AB$.

$\therefore\triangle BPE:\triangle AEF=BE:AE$.

$\triangle AEF:\triangle CPF=AF:CF$.

而$BE:AE=BP:CP=AF:CF$.

$\therefore\triangle BPE:\triangle AEF=\triangle AEF:\triangle CPF$.



3. 已知⎔ABCDEF為O圓之內接有法六邊形，$\triangle HGI$為O圓之外切等邊三角形而其切點則為A，C，E三點。

（求證）⬡ABCDEF：△GHI＝1:2

（證）聯AO，CO，HO．則

$$▱ABCO \doteq \frac{1}{3}⬡ABCDEF,$$

$$▱AHCO \doteq \frac{1}{3}\triangle GHI$$

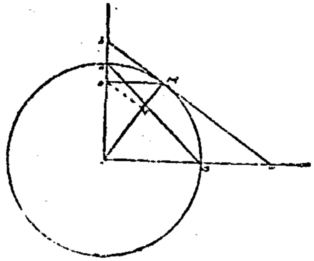
又∵ $\triangle AHB \doteq \triangle BCH \doteq \frac{1}{2}▱ABCO$．

∴ $▱AHCO \doteq ▱ABCO + \triangle AHB + \triangle BHC$

$\doteq 2▱ABCO$．

∴ ⬡ABCDEF：△GHI＝1:2

4．已知：OA，OB爲O圓互相垂直之兩半徑。過 $\overset{\frown}{AB}$ 中任一點M作切線交OA，OB之延長線於S，T兩點，MP⊥OA．



（求證）△SOT：△AOB＝△AOB：△OMP．

（證）過P作PH⊥OM．

則△SOT：△AOB＝ST：OM，

△AOB：△OMP＝OM：PH，

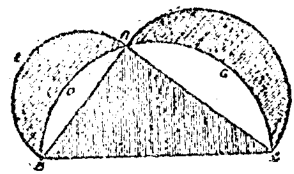
而△SOT∽△POM，△SOM∽△PHM．

∴ST：OM＝SO：PM，OM：PH＝SO：PM

$\therefore ST:OM=OM:PH$

$\therefore \triangle SOT:\triangle AOB=\triangle AOB:\triangle OMP$.

5. 已知：以直角三角形ABC之斜邊 BC，及兩腰 AB，AC 為直徑而作半圓BAC, AEB, AFC.



(求證)半圓BAC≎半圓CFA＋半圓AEB.

(證)∵兩圓面積之比等於其半徑平方之比。

$\therefore$ 半圓BAC：半圓AFC $=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$，

半圓BAC：半圓AEB $=\overline{BC}^2:\overline{AB}^2$.

$\therefore$ 2半圓BAC：(半圓AFC＋半圓AEB) $=2\overline{BC}^2:(\overline{AC}^2+\overline{AB}^2)$

但 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$\therefore$ 半圓BAC≎半圓AFC＋半圓AEB.

將此結果再引伸之，吾人又可得一定理：

$\triangle$ABC≎月形AEBD＋月形AFCG.

蓋若自上式中，兩端均減去弓形 ADB及AGC 則卽可得之也。

# 第二章　作圖題及軌跡

## XII. 作圖題之解法及例解

(一)作圖題之意義及其解法：

作圖題者卽求作一幾何圖形使其適合於已知之條件也。質言之卽用直尺及圓規爲器械而根據數基本公法，依合理之步驟，作所需之圖形。故作圖題中共有三部卽條件，作法與證明是也。蓋以圖旣成矣，必也證其作法爲合理，且更須示明所作之圖確爲所需者而後可。顧普通作圖題之解決頗非易事，甚至有無從着手者，爲便於構思計，而解析法尙焉。普通作圖題之解法共分四部，玆分述於下：

(1)設問題爲已解者，卽圖形業經作出。然後再於此圖形中研究未知部份與已知部份間之關係。此卽所謂解析是也。

(2)由適所述者，探討出其間關係後，卽藉之以助吾人之作圖，而將圖形作出。

(3)爲證明如是所作之圖形確爲吾人所需者。

(4)終則討論此種作法在何種情形下方爲可能，且在何種情形下其解答之數究爲若干。

學者若循是以進，則泰半難題自不難迎刃而解。題第四步Q之討論則稍涉微妙之域，非初學者所能領悟，故初等教科書中多不述及。

(二)基本作圖題。

以下所述數基本作圖題普通教科書中均載之，故不述其解法。

1. 作一已知線段之垂直平分線。
2. 過線上一點作該線之垂線。
3. 過線外一點作該線之垂線。
4. 過線外一點作該線之平行線。
5. 求作一角與一已知角相等。
6. 作一已知角之平分線。
7. 已知一三角形之兩角及其夾邊，求作此三角形。
8. 已知一三角形之兩邊及其夾角，求作此三角形。
9. 已知一三角形之三邊求作此三角形。
10. 已知一三角形之兩邊及其一者之對角，求作此三角形。(在此情形下有幾種解答)。
11. 已知一三角形之兩角及其一者之對邊，求作此三角形。
12. 已知一圓，求其圓心。

13.過圓外一定點求作該圓之切線。

14.作兩圓之公切線。

15.求作一三角形之外接圓，內切圓及傍圓。

16.以一已知直線爲弦，求作一弓形使其內切角等於一已知角。

17.已知三線分求作其第四比例項。

18.求分一已知線分爲二線與二已知線分成比例。

19.求作二已知線分之比例中項。

20.求分一已知線成內外比。

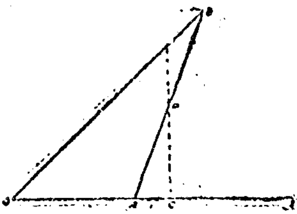
21.以一定線分爲與一已知多角形之一邊相當，求作一多角形與已知多角形相似。

22.求作一正方形與已知兩正方形之和爲等積；或與其差爲等積。

23.求作一三角形與一已知多角形爲等積。

24.求作一圓之內接正方形，內接有法六邊形。

（三）例解



1.已知P爲∠XOB內一定點。

(求作)過P作一線與OX交於A，OB交於B，而有PA=PB.

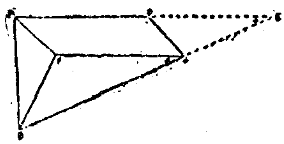
（解析）設此圖已作成。過D作 PC⊥OX，復過B作 DB∥OX且交PC之延線於D．則△PAC≌△PBD。

∴PC＝PD。

今PC爲一定者，故D點可求，因而 B點亦爲可求。

（作圖）過P作 PC⊥OX，延長PC至D使 PC＝PD，過D作OX之平行線而過 OB 於B點。則聯 PB 線卽爲所求。

2．已知一四邊形之四邊及其兩對邊間之一夾角，求作此四邊形。

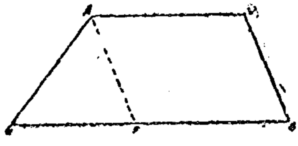


（解）設圖形爲已作者如▱ABCD。而∠AEB＝∠a爲已知者。

今過C作CF∥AD，過A作AF∥DC，AF與CF交於F點。則∠FCB＝∠a，AF＝CD，CF＝AD。

故在△CFB中已知其兩邊及夾角，則此三角形當爲可求。因而▱ABCD亦爲可求者。

3．已知梯形之四邊求作此梯形。

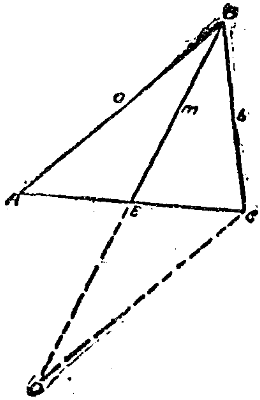


（解）設圖形爲已作而▱ABCD卽爲所求者。過A作 AF∥CD 而過BC底於F點，

則$BF=BC-AD$，$AF=CD$.

今AB,CD,BC,AD四邊既爲已知，則AB,AF,BF三邊亦爲已知者。故△ABF爲可求。因而▱ABCD爲可作。

4. 已知一三角形之兩邊及其第三邊上之中線求作此三角形。

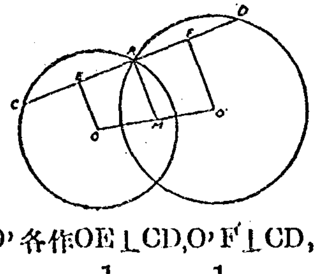



(解)設△ABC卽爲所求者，過C作$CD \parallel AB$而遇中線AE之引長線於D則$\triangle ABE \cong \triangle CDE$.

$\therefore CD=AB$，$BD=BE$.

故△BCD之三邊均爲已知。其作法爲吾人所已知者。故△ABC亦爲可求。

5. 已知O及O'兩圓相交於A，B兩點。




(求作)過A作一弦CAD，使有$CA=AD$.

(解析)設此圖爲已作，過O及O'各作$OE \perp CD$, $O'F \perp CD$，復作$AM \parallel OE \parallel O'F$則因$AE=\frac{1}{2}CA=\frac{1}{2}AD$

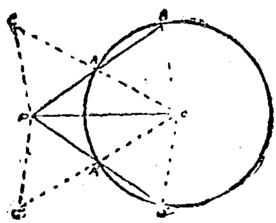
$=AF$，

故▱EOO'F爲梯而AM爲其中線，質言之卽M爲OO'之中點。且$AM\perp CD$。

(作圖)聯OO'，取其中點M，聯AM，過A作AM之垂線CD，則此垂線CD卽爲所求者。

(證明)根據解析之結果，此種作法乃爲可能且亦爲合理者。

6. 已知：P爲O圓外任一定點。



(求作)過P作一線交O圓於A，B兩點，而有PA＝BA。

(解析)設此圖爲已作者。聯OA且引長之至C使OA＝AC。

則$\triangle PAC\cong\triangle BAO$，∴PC＝OB＝AC。

故在△POC中，PO爲一定者，OC等於O圓之直徑而PC則等於O圓之半徑。

(作圖)以OP爲底邊，O圓之直徑及O圓之半徑爲兩腰作△POC，其OC邊交O圓於A，聯PA交O圓於B，則PAB線卽爲所求者。

(證明)∵PC＝OB，OC＝2AO。

故AC＝PC＝OA＝OB。

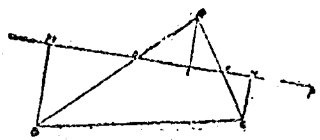
且$\angle BAC=\angle PAC$.

$\therefore \triangle PAC \cong \triangle BAC$.

$\therefore PA=BA$.

(討論)此題之解題係有2.蓋以$\triangle CPO$之數有2而C點亦有2也，其一在OP之上而他者則在OP之下。故所求之線有2即PAB與PA'B'是也。

7.已知$\triangle ABC$爲任一三角形l, m, n爲三定量



(求作)作一截線P，使其與$\triangle ABC$三頂點距離之比等於$l:m:n$.

(解析)設此圖已作成，p線交AB，AC於D，E兩點，

$AL\perp p$，$BM\perp p$，$CN\perp p$.

則$AL:BM:CN=l:m:n$.

但$AL:BM=AD:DB$，$AL:CN=AE:EC$.

(作圖)於AB邊取D點使$AD:DB=l:m$,

於AC邊取E點使　$AE:EC=l:n$.

則聯DE線即爲所求。

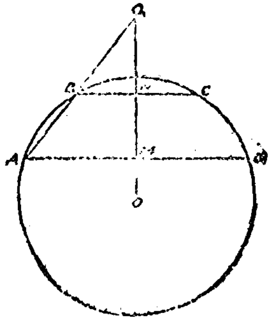
(證明)過A作$AL\perp DE$,過B作$BM\perp DE$,過C作$CN\perp DE$.

則$AL\parallel BM\parallel CN$.

$\therefore AD:DB=AL:BM=l:m$，

$AE:EC=AL:CN=l:n$.

$\therefore AC:BM:CN=l:m:n$.



8. 已知：A,B 為O圓之圓周上兩定點，m，n為二定量。

(求作)過 A,B 作二平行弦 AD，BC使$AD:BC=m:n$.

(解析)設此圖為已作，過 O 作AD，BC之垂線交AD，BC，及AB之引長線於Q，則 $AM=\frac{1}{2}AD$，$BN=\frac{1}{2}BC$.

$AM:BN=QA:QB=m:n$.

(作圖)聯AB並引長之，在其延長線上取Q點使$QA:QB=m:n$.

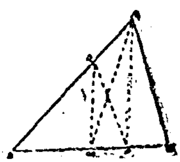
聯QO.自A，B，作QO之垂線得二弦AD，BC.

則AD，BC卽為所求者。

(證明)$\because QA:QB=AM:AN=m:n$

而 $AM=\frac{1}{2}AD$, $AN=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore AD:BC=m:n$.



9. 已知P為△ABC之BC邊上一定點。

(求作)過P引一線PQ而分△ABC為等積之二部。

(解析)設此圖爲已作，PQ 卽爲所求，M爲BC之中點，

則$\triangle ABM \Leftrightarrow \triangle ACM \Leftrightarrow \triangle BQP \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$.

$\therefore \triangle AQM \Leftrightarrow \triangle PQM$.

$\therefore AP \parallel QM$.

(作圖)取BC之中點M.過M作AP之平行線交AB於Q點

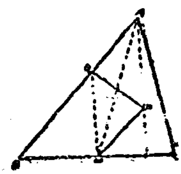
則 PQ 線卽爲所求者。

(證明)$\because AP \parallel QM$.

$\therefore \triangle AQM \Leftrightarrow \triangle PQM$

$\therefore \triangle BQP \Leftrightarrow \triangle BAM \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$.

10. 已知P爲△ABC內一定點。



(求作)過P作兩線分此三角形爲二等積部份。

(作圖)取BC之中點M.過M作AP之平行線交AB於Q點。則PQ，PM卽爲所求者。

(證明)$\because MQ \parallel AP$.

$\therefore \triangle PQM \Leftrightarrow \triangle AQM$.

但M爲BC之中點。

$\therefore \triangle ABM \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$

$\therefore \square PQBM \Leftrightarrow \triangle ABM \Leftrightarrow \frac{1}{2}\triangle ABC$.

故PQ，PM卽爲所求者。

XIII. 軌跡之定理及例解

（一）軌跡之意義及軌跡問題之解法

於作圖題中如條件過多則圖形固有時爲不可作，然條件過少，則其解答之數恆不止於一而其圖形之位置及形狀復不能確定。質言之卽適合於此條件之圖形爲數甚多。更申言之，卽此圖形非爲固定不變，而乃爲移動者。當此圖形變動時其上某一點之跡復更爲另一圖形，此圖形卽稱爲該動點之軌跡。此軌跡之所由來也。如已知一三角形之頂角及一底邊而求作此三角形，則此三角形之形狀固不能定卽其位置亦復爲變動者。而其頂Q點則恆在以底邊爲弦之弓形上。觀基本作圖題16卽可知之。故軌跡之定義可下之曰：所謂一點之軌跡云者卽該點依某一條件所限制而變動所生之圖形也。由是可知所謂解軌跡問題云者，卽求該圖形之謂也。明乎此吾人可進論解軌跡之方矣！

由適所述者可知當吾人解一軌跡問題之際首先須定其軌跡之圖形，俟後再證明如是所定之圖形確爲合理且卽爲所需者。至於證明之道則又須分爲二步，卽1. 凡適合於此條件之點均在此圖形之上；2. 凡在此圖形上之點均適

合於此條件。蓋以第2步如能證明，則吾人所求得之圖形確爲所需者而第1步如能證明則吾人之所需者已完全求出而無遺漏之弊矣。

在初等幾何中點之軌跡不外直線及圓或線分及弧。故吾人於定圖形之際可先求出其數主要點以察其圖形是否爲直線或線分，抑爲圓或弧，然後再依合理之步驟而探討之。苟如是，則事半功倍而不致茫然無從着手矣。顧探求軌跡之方尚有藉其他特別法術者，惜乎於玆不克深論之且恐亦非初學者所能領悟。故從略。

(二)基本軌跡

1. 與一線段兩端點等距離點之軌跡爲該線段之垂直平分線。

2. 與一角兩邊等距離點之軌跡爲該角及其補角之二平分線。

3. 與二平行線等距離點之軌跡爲其公共垂線之垂直平分線。

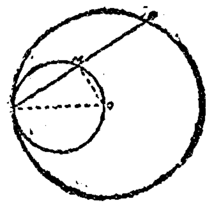
4. 與一定點有定距離點之軌跡爲以該定點爲圓心，定距離爲半徑之圓。

5. 與一直線有定距離點之軌跡爲該線兩側之平行線。而此二平行線與該直線之距離與定距離相等。

6.如三角形之底邊及頂角爲一定，則其頂點之軌跡爲在底邊兩側二弓形之弧，至此二弓形乃均以該底邊爲弦且其內切角乃等於該頂角者。

(三)例解

1.已知P爲O圓之圓周上一定點，過P任意作一弦PB。求其中點M之軌跡。

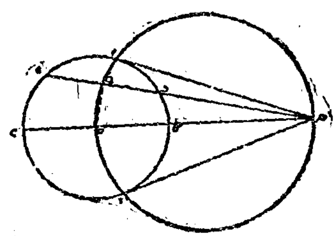


(解)

PB旣爲O圓之弦故M點必在圓內由此可知其軌跡不得爲一直線。

再設M爲PB之中點，則OM⊥PB.故可知∠PMO恆爲直角。且更就特例言之，過P作O圓之直徑，則其中點當爲O.是故O點亦在M點之軌跡上。由此可知M點之軌跡爲以PO爲直徑之圓。

2.自圓外一點P，任作該圓之割線PBC。求BC中點Q之軌跡。



(解)

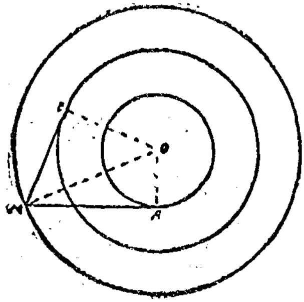
設O爲定圓之心，PO交定圓於B'及C'兩點。B'C'爲定圓之直徑而以O爲中

點。又自P作定圓之兩切線PT及PT′則PT，PT′二線爲割線之特例，而T及T′兩點亦爲Q點之特例。是故O，T，T′三點爲在Q之軌跡上者。

復聯OQ，則$\angle PQO = Rt\angle$.

故Q點之軌跡爲以OP爲直徑所作之圓爲定圓所包含之一段圓弧$\overset{\frown}{TQOT'}$.

3. 已與兩同心圓，各於其上一點A，B，作切線，相交於M，而$\angle AMB$爲一定者。求M點之軌跡。



(解)

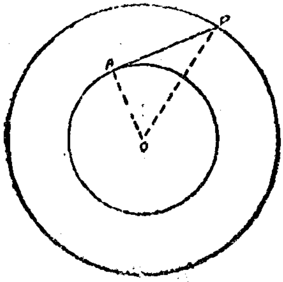
設O爲兩圓之心，聯OA，OB，則在▱OAMB中，$\angle A = \angle B = \angle Rt$.

$\therefore \angle AMB + \angle AOB = 2Rt\angle$.

今$\angle AMB$既爲一定而不變，故$\angle AOB$當亦爲一定而不變。故▱OAMB中有兩邊OA，OB及三角$\angle O$，$\angle A$，$\angle B$爲一定故其本身自必亦爲一定。因而對角線OM有定長。故M點之軌跡爲以O爲圓心，OM爲半徑之圓。

4. 設P爲O圓外之一點，PA爲O圓之切線，如PA之長度

爲一定，求 P點之軌跡。




(解)

設PA之長度爲a，聯OA，OP，則

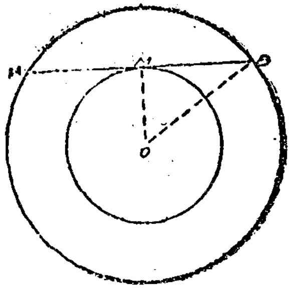
$$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2$$

$$=\overline{OA}^2+a^2.$$

今AO爲定圓O之半徑，其長度乃爲一定者，而a復爲定量。故OP之長度必也亦爲一定者。

由是可知P點之軌跡爲以O爲圓心，OP爲半徑之圓。

5. 設AB爲定圓O內之一弦，其長度爲一定者。求其中點M之軌跡。




(解)

設AB=a，聯OM，OB.

則$OM\perp AB$，$MB=\frac{1}{2}AB$

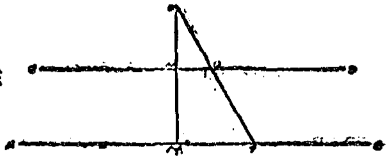
$$=\frac{1}{2}a.$$

$$\therefore\overline{OM}^2=\overline{OB}^2-(\frac{1}{2}a)^2$$

今OB爲定圓O之半徑，其長度乃爲不變者，而a復

爲定量。故OM之長度必也亦爲定量。

由是可知M點之軌跡爲以O爲圓心 OM爲半徑之圓。



6. 已知P爲定直線 AB 外之一定點。自 P作任意一線交AB於T。在PT上取Q點使有　　PQ:PT=m:n。而m,n爲二定量，求Q點之軌跡。

(解)

AB既爲一直線，而PT又爲任意一直線，故T點可在AB線上任意移動。由此可知Q點之軌跡絕不能爲圓而乃爲一直線。

今進而定此直線。自P作 PM ⊥AB。在PM上取N點使有 PN:PM=m:n。再過N作AB之平行線 CD。則余謂CD卽爲所求者。何則？蓋以如自P作任意一直線交CD於Q;AB於T。則在△PMT中，NQ ∥ MT。故有

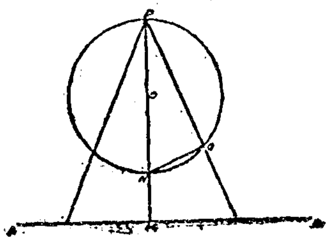
$$PQ:PT=PN:PM.$$

但　$PN:PM=m:n$

$\therefore$　$PQ:PT=m:n$

故Q點之軌跡爲CD線。

7. 已知P為定圓O之圓周上一定點。過P引任意一弦PQ。於PQ之延長線上。取T點使有



$PQ \cdot PT = k$.

而k為定量。求T點之軌跡。

（解）

聯PO，交圓周於N. 於PN之延長線上取M點，使

$PM \cdot PN = k$.

過M作PN之垂線AB，則AB卽爲所求者。蓋若過P引任意一弦PQ交AB於T. 則在Rt△PQN, PMT中有

$\angle P$公用，$\angle PQN = \angle PMT = Rt\angle$.

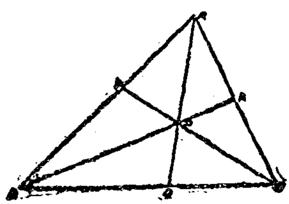
$\therefore \triangle PQN \backsim \triangle PMT$.

$\therefore PQ : PN = PM : PT$.

$\therefore PQ \cdot PT = PM \cdot PN = k$.

今PQ線既為任意之弦，故AB卽爲所求。

8. 三角形三內角之平分線必交於一點。



（已知）△ABC三內角$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$之平分線為

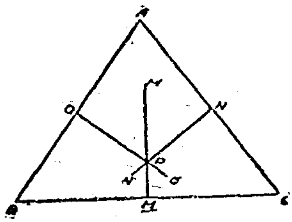
AD,BE,CF.

(求證)AD,BE,CF交於一點.

(證)設BE,CF二分角線交於P.則P既在∠B之平分線上,故必與BC及AB二線有等距離。同時P又在∠C之平分線上,故必與BC及AC二線有等距離。由此可知P點與AC及AB二線有等距離,故必在∠A之平分線上,即在AD上。

∴ AD,BE,CF三線交於一點。

9.三角形三邊之垂直平分線必交於一點。



(已知)MM',NN',QQ'為△ABC三邊BC,CA,AB之垂直平分線。

(求證)MM',NN',QQ'三線交於一點.

(證)設MM'及NN'交於P.

則按軌跡理知P既在MM'上,故

PB=PC,

同時P又在NN'上,故

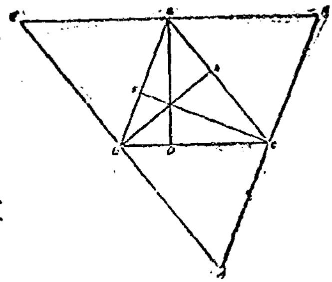
PC=PA.

∴ PA=PB.

今P既與A,B有等距離則必在AB之垂直平分線上。

質言之即MM',NN',QQ'三線交於一點。

10. 三角形之三高必交於一點。



(已知)AD，BE，CF爲△ABC三邊BC,AC,AB之高。

(求證)AD，BE，CF三邊交於一點。

(證)過A，B，C三頂點各作AD，BE，CF之垂線。此三垂線兩兩相交而成△A'B'C'.

∵　BC'∥AC，BC∥AC'；AB∥CB'，BC∥AB'.

∴　▱ACBC'及▱ABCB'均爲平行四邊形。

∴　BC＝AC'＝AB'

∴　A爲B'C'之中點。

同理可證B爲A'C'之中點而C爲A'B'之中點。

故　AD，BE，CF乃△A'B'C'之三邊垂直平分線。因而相交於一點。

【附註】此題本與軌跡無關，不過此證法須藉用三垂直平分線交於一點之理。而三垂直平分線交於一點理之證明則須藉軌跡之理。此其所以選本題於茲之故也。

# 數值三角之部

## 第一章　三角函數之基本關係式

1 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\cos A}{\sin A}$，

$\sec A=\frac{1}{\cos A}$，$\csc A=\frac{1}{\sin A}$.

2. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

3. $1+\tan^2 A=\sec^2 A$.

4. $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$.

5. $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

6. $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\tan^2 A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$.

7. $\tan A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$

8. $\cot A = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \dfrac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$.

9. $\sin(90^\circ - A) = \cos A$.

10. $\cos(90^\circ - A) = \sin A$.

11. $\tan(90^\circ - A) = \cot A$,　$\cot(90^\circ - A) = \tan A$.

12. $\sec(90^\circ - A) = \csc A$,　$\csc(90^\circ - A) = \sec A$.

## 例　題

1. 【證】 $(1-\sin A)(1+\sin A) = \cos^2 A$.

$(1-\cos A)(1+\cos A) = \sin^2 A$.

(解)

$$(1-\sin A)(1+\sin A) = 1-\sin^2 A$$
$$= \sin^2 A + \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= \cos^2 A.$$

$$(1-\cos A)(1+\cos A) = 1-\cos^2 A$$
$$= \sin^2 A + \cos^2 A - \cos^2 A$$
$$= \sin^2 A.$$

2. 【試證】 $\dfrac{\sin A}{1-\cos A} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

$$\frac{\cos A}{1-\sin A} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

（解）

$$\because\quad \sin^2A=1-\cos^2A$$

$$=(1+\cos A)(1-\cos A)$$

$$\therefore\quad \frac{\sin^2A}{1-\cos A}=1+\cos A.$$

$$\therefore\quad \frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{1+\cos A}{\sin A}$$

同理 $\because\quad \cos^2A=1-\sin^2A.$

$$=(1-\sin A)(1+\sin A)$$

$$\therefore\quad \frac{\cos A}{1-\sin A}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$$

3. 【試證】

$$(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)=1,$$

$$(\csc A-\cot A)(\csc A+\cot A)=1.$$

【證】

$$(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)$$

$$=\sec^2A-\tan^2A=1.$$

而 $(\csc A-\cot A)(\csc A+\cot A)=\csc^2A-\cot^2A=1.$

4. 【試證】 $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$

【證】 $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

$$=\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\cos A$$

$$+\sin^2A-2\sin A\cos A+\cos^2A$$

$$=2(\sin^2A+\cos^2A)$$

$$=2.$$

5. 【試證】 $\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A.$

【證】 $\cos^2A-\sin^2A=\cos^2A-(1-\cos^2A)$

$$=2\cos^2A-1.$$

又 $\cos^2A-\sin^2A=(\sin^2A+\cos^2A-\sin^2A)-\sin^2A$

$$=(1-\sin^2A)-\sin^2A$$

$$=1-2\sin^2A.$$

6. 【試證】 $\sin^4A-\cos^4A=1-2\cos^2A=2\sin^2A-1.$

【證】 $\sin^4A-\cos^4A=(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^2A-\cos^2A)$

$$=\sin^2A-\cos^2A$$

$$=(1-\cos^2A)-\cos^2A$$

$$=1-2\cos^2A.$$

又 $\sin^4A-\cos^4A=\sin^2A-\cos^2A$

$$=\sin^2A-(1-\sin^2A)=2\sin^2A-1.$$

7. 【試證】 $\sin^4A+\cos^4A=1-2\sin^2A\cos^2A.$

【證】 $\because$ $\sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore$ $(\sin^2A+\cos^2A)^2=1$

$\therefore\quad \sin^4A+2\sin^2A\cos^2A+\cos^4A=1$

$\therefore\quad \sin^4A+\cos^4A=1-2\sin^2A\cos^2A.$

8. 【試證】 $\sin^3A-\cos^3A$

$$=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A).$$

【證】 $\because\quad \sin^3A-\cos^3A$

$$=(\sin A-\cos A)(\sin^2A+\sin A\cos A+\cos^2A)$$

$$=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A)$$

$\therefore\quad \sin^3A-\cos^3A$

$$=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A).$$

9. 【試證】 $\sin^6A+\cos^6A=1-3\sin^2A\cos^2A.$

【證】 $\because\quad \sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore\quad (\sin^2A+\cos^2A)^3=1$

$\therefore\quad \sin^6A+3\sin^4A\cos^2A+3\sin^2A\cos^4A$

$$+\cos^6A=1.$$

$\therefore\quad \sin^6A+\cos^6A$

$$=1-3\sin^4A\cos^2A-3\sin^2A\cos^4A$$

$$=1-3\sin^2A\cos^2A(\sin^2A+\cos^2A)$$

$$=1-3\sin^2A\cos^2A.$$

10. 【試證】 $(1+\sin A)^2+(1+\cos A)^2$

$$=3+2(\sin A+\cos A)$$

【證】 $(1+\sin A)^2+(1+\cos A)^2$

$$=1+2\sin A+\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A$$

$$=2+(\sin^2 A+\cos^2 A)+2(\sin A+\cos A)$$

$$=3+2(\sin A+\cos A).$$

11.【試證】 $\tan A+\cot A=\dfrac{1}{\sin A\cos A}$

【證】 $\tan A+\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}$$

12.【試證】 $\tan^2 A-\sin^2 A=\tan^2 A\sin^2 A.$

【證】 $\tan^2 A-\sin^2 A=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A$

$$=\sin^2 A\left(\frac{1}{\cos^2 A}-1\right)$$

$$=\sin^2 A\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$=\sin^2 A\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$=\tan^2 A\sin^2 A.$$

13.【試證】 $\tan A(1-\cot^2 A)+\cot A(1-\tan^2 A)=0.$

【證】 $\tan A(1-\cot^2 A)+\cot A(1-\tan^2 A)$

$=\tan A-\tan A\cot^2 A+\cot A-\cot A\tan^2 A$

$=\tan A-\cot A+\cot A-\tan A$

$=0.$

14.【試證】 $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\cos^2 A-\sin^2 A.$

【證】 $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}=\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$

$=\cos^2 A-\sin^2 A.$

15.【試證】 $\left(\tan A+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$

【證】 $\left(\tan A+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2$

$=\tan^2 A+2\tan A\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos^2 A}$

$=\tan^2 A+2\dfrac{\sin A}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\cos^2 A}$

$=\dfrac{\sin^2 A+2\sin A+1}{\cos^2 A}$

$=\dfrac{(\sin A+1)^2}{1-\sin^2 A}$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$$

$$=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$$

16.【試證】 $\cos^2A+\sin^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B=1$.

【證】 $\cos^2A+\sin^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B$

$$=\cos^2A+\sin^2A(\sin^2B+\cos^2B)$$

$$=\cos^2A+\sin^2A$$

$$=1.$$

17.【試證】 $\dfrac{\sin^2A}{\tan^2A}+\dfrac{\cos^2A}{\cot^2A}=1$.

【證】 $\dfrac{\sin^2A}{\tan^2A}+\dfrac{\cos^2A}{\cot^2A}=\dfrac{\sin^2A}{\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}}+\dfrac{\cos^2A}{\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}}$

$$=\cos^2A+\sin^2A=1.$$

18.【試證】 $\dfrac{\cot A\cos A}{\cot A+\cos A}=\dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A\cos A}$

【證】 $\because$ $(\cos A+\cot A)(\cot A-\cos A)=\cot^2A-\cos^2A$

$$=\frac{\cos^2A}{\sin^2A}-\cos^2A$$

$$=\frac{\cos^2A-\sin^2A\cos^2A}{\sin^2A}$$

$$=\frac{\cos^2A(1-\sin^2A)}{\sin^2A}$$

$$=\cot^2A\cos^2A$$

$$\therefore\quad (\cot A-\cos A)(\cot A+\cos A)=\cot^2A\cos^2A$$

$$\therefore\quad \frac{\cot A+\cos A}{\cot A\cos A}=\frac{\cot A-\cos A}{\cot A\cos A}$$

19.【試證】 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\cos A}$$

【證】 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$

$$=\sin A(1+\frac{\sin A}{\cos A})+\cos A(1+\frac{\cos A}{\sin A})$$

$$=\sin A+\cos A+\frac{\sin^2A}{\cos A}+\frac{\cos^2A}{\sin A}$$

$$=(\sin A+\frac{\cos^2A}{\sin A})+(\cos A+\frac{\sin^2A}{\cos A})$$

$$=\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\sin A}+\frac{\cos^2A+\sin^2A}{\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\cos A}$$

20.【試證】 $\frac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\tan A\tan B.$

【證】 $\frac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\frac{\tan A+\tan B}{\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}}$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{\dfrac{\tan B+\tan A}{\tan A\tan B}}$$

$$=\tan A\tan B.$$

## 第二章　直角三角形之真數解法

(一)特別角三角函數之值。

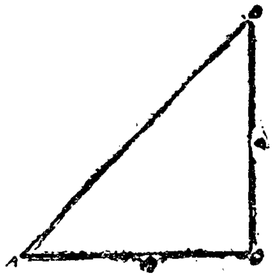
特別角三角函數數值之求法，普通教科書中均載及之，茲將其結果列表如下：

| 角 | sine | cosine | tangent | cotangent | 角 |
|---|---|---|---|---|---|
| $15^\circ$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ | $2-\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ | $75^\circ$ |
| $18^\circ$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$ | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ | $72^\circ$ |
| $30^\circ$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $60^\circ$ |
| $36^\circ$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ | $\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ | $54^\circ$ |
| $45^\circ$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 | 1 | $45^\circ$ |
| 角 | cosine | sine | cotangent | tangent | 角 |

(二)三角函數之符號及其變化：

| 函數＼象限 | | 第　一 | 第　二 | 第　三 | 第　四 |
|---|---|---|---|---|---|
| sine | 符號 | + | + | − | − |
| | 數值 | 由0變至1 | 由1變至0 | 由0變至−1 | 由−1變至0 |
| cosine | 符號 | + | − | − | + |
| | 數值 | 由1變至0 | 由0變至−1 | 由−1變至0 | 由0變至1 |
| tangent | 符號 | + | − | + | − |
| | 數值 | 由0變至＋∞ | 由−∞變至0 | 由0變至＋∞ | 由−∞變至0 |

(三)直角三角形解法：



在直角三角形中如已知其兩邊或一邊及一銳角或三邊則其餘之一邊兩角或兩角或三角均可由下之數關係式中求之：

Ⅰ．$\angle A+\angle B=90^{\circ}$．

Ⅱ．$\sin A=\cos B=\frac{a}{c}$

Ⅲ．$\cos A=\sin B=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$

Ⅳ．$a^2+b^2=c^2$

茲舉數例以明之。

## 例　題

1. 已知　$c=150$，　$\angle B=55^\circ$

（求）　$a$，$b$，$\angle A$.

（解）

$$\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-55^\circ=35^\circ$$

$$\begin{aligned} a=c\ \sin A&=150\sin 35^\circ \\ &=150\times 0.5736 \\ &=86.04. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b=c\ \cos A&=150\times\cos 35^\circ \\ &=150\times 0.8192 \\ &=122.88. \end{aligned}$$

2. 已知　$a=449.3$，　$b=418.5$

（求）　$\angle A$，$\angle B$，$c$.

（解）

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{4493}{4185}=1.0736$$

$$\therefore\quad \angle A=47^\circ 02'.$$

$$\angle B=90^\circ-\angle A=42^\circ 58'$$

又　$c=\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{418.5}{\cos 47^\circ 02'}=\dfrac{418.5}{0.6816}=614$

3. 已知　$c=12$,　$\angle A=32^\circ$.

（求）　$a$,　$b$,　$\angle B$.

（解）

$$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-32^\circ=58^\circ.$$

$$a=c\sin A=12\sin 32^\circ$$

$$=12\times 0.5299=6.359.$$

$$b=c\cos A=12\times\cos 32^\circ$$

$$=12\times 0.8480=10.176$$

4. 已知　$a=2.3$,　$\angle A=35^\circ$.

（求）　$b$,　$c$,　$\angle B$.

（解）

$$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-35^\circ=55^\circ.$$

$$b=a\cot A=2.3\cot 35^\circ$$

$$=2.3\times 1.4281=3.3.$$

$$c=a\csc A=2.3\csc 35^\circ$$

$$=2.3\times 1.7404=4.0$$

5. 已知　$\angle A=43^\circ 17'$,　$C=26$.

（求）　$\angle B$,　$b$,　$a$.

（解）

$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-43^\circ17'=46^\circ43'$.

$b=c\ \cos A=26\times\cos43^\circ17'$

$=26\times0.7280$

$=18.9280.$

$a=c\ \sin A=26\times\sin43^\circ17'$

$=26\times0.6856$

$=17.8256.$

6. 已知　$\angle A=13^\circ58'$，　$a=15.2.$

（求）　$\angle B$，　$b$，　$c$.

（解）

$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-13^\circ58'=76^\circ2'$

$b=a\ \cot A=15.2\cot13^\circ58'$

$=15.2\times4.0207$

$=61.11464.$

$$c=\frac{a}{\sin A}=15.2\div\sin13^\circ58'$$

$=15.2\div0.2414\doteqdot62.97.$

7. 已知　$a+c=45$，　$b=30.$

（求）　$a$，　$c$，　$\angle A$，　$\angle B$.

（解）

$$\because \quad a^2+b^2=c^2$$

$$\therefore \quad a^2+900=(45-a)^2$$

$$=2025-90a+a^2$$

$$\therefore \quad 90a=1125$$

$$\therefore \quad a=12.5.$$

$$\therefore \quad c=45-a=32.5.$$

又 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{125}{325}=0.3846$

$\sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{30}{32.5}=0.9231.$

$$\therefore \quad \angle A=22^\circ 37' \quad \angle B=67^\circ 23'.$$

8．已知　$a=40$，　$b=27$.

（求）　CA，　$\angle B$，　$c$.

（解）

$$\because \quad c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore \quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1600+729}$$

$$=\sqrt{2329}$$

$$=48.26.$$

又　$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{40}{47}=1.4815$

$\therefore\quad \angle A=55°59'$

$\therefore\quad \angle B=90°-\angle A=34°1'.$

9. 已知 $\angle A=27°12'$, $b=31.$

（求） $\angle B$, $a$, $c$.

（解）

$$\angle B=90°-\angle A=62°48'.$$

$$\begin{aligned} a&=b\tan A=31\tan 27°12'\\ &=31\times 0.5139\\ &=15.9309. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c&=\frac{b}{\cos A}=31\div\cos 37°12'\\ &=31\div 0.8894\\ &=34.85 \end{aligned}$$

10. 已知 $a=8$, $b=9.5$

（求） $c$, $\angle A$, $\angle B$.

（解）

$$\begin{aligned} c&=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+90.25}\\ &=\sqrt{154.25}\\ &=12.45. \end{aligned}$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{8}{9.5}=0.8421$$

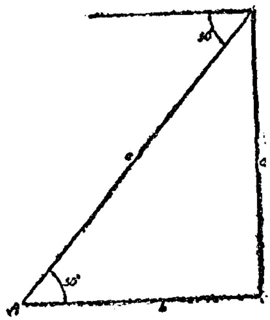
$\therefore\quad \angle A=40°6'$

$\therefore\quad \angle B=49°54'.$

# 第三章　簡易測量法

## (一)距離之測量：

1　BC 爲50ft.高之樹，自其頂點至地上A處一物之俯角爲$50°$.求A點與樹根C點之距離。



(解)

$$\tan A=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\quad b=\frac{a}{\tan A}=a\cot A$$

$$=50\cot 50°$$

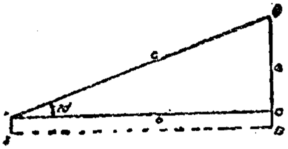
$$=50\times 0.8391$$

$$=41.955\text{ ft}.$$

故A點與C點間之距離爲 41.955 ft.

2.　BD 爲在河岸之一樹，其高爲50ft.今有身高5ft.之一人在河之對岸測得樹頂B之仰角爲$20°$.求河之

闊。



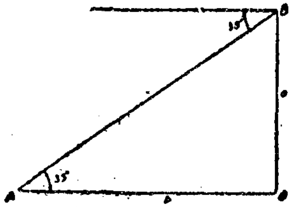
（解）

$a = 50\text{ft} - 5\text{ft} = 45\text{ft}.$

$\therefore\ b = a\cot A = 45\cot 20^{0}$

$= 45 \times 2.7475 = 123.6375\text{ft}.$

3. 自一300ft.高之塔頂B測得地上一物之俯角為$35^{0}$.求此物至塔足之距離。



（解）

設該物在A點。則

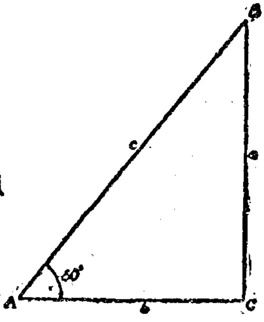
$\because\ a = 300\text{ft}.$

$\angle A = 35^{0}.$

$\therefore\ b = a\cot A = 300\cot 35^{0}$

$= 300 \times 1.4281$

$= 428.4\text{ft}.$



4. AB為一池之徑，一測量者由A動身依與AB成$50^{0}$角之方向行880ft而至由B至此方向之垂線足C點。求AB之長度。

（解）

$\cos A = \dfrac{b}{c}$

$$\therefore \quad c = \frac{b}{\cos A}$$

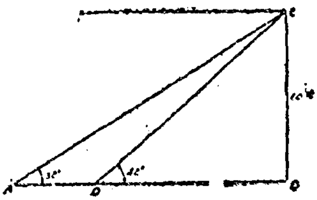
$$= 880 \div \cos 50^\circ$$

$$= 880 \div 0.6428$$

$$= 1369\,\text{ft}.$$

故該池之徑 AB 爲1369ft 長。

5. 自一 60ft.高之塔頂測得地上二物A,B各者之俯角爲 32°,及 42°.求此二物間之距離。



(解)

$$\because \quad BD = 60\cot 42^\circ$$

$$AD = 60\cot 32^\circ$$

$$\therefore \quad AB = AD - BD$$

$$= 60[\cot 32^\circ - \cot 42^\circ]$$

$$= 60[1.6003 - 1.1106]$$

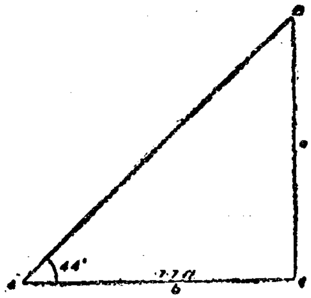
$$= 60 \times 0.4897$$

$$= 2.9382\,\text{ft}.$$

(二)高度之測量：

1、 設BC爲一樹，一人距離樹根7.7ft 遠之處測得樹頂

B之仰角爲44°,求樹之高。




(解)

$a=b\tan A$

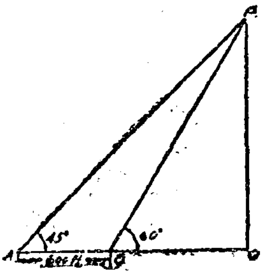
$=7.7\tan 44°$

$=7.7\times 0.9657$

$=7.43587\text{ft}.$

故該樹之高約爲7.43587ft.

2. 一人自A處測得塔頂P之仰角爲45°,再進前600ft而至B處復測得塔頂之仰角爲60°試求該塔PQ之高。




(解)

令　$PQ=x.$

則　$AQ=x\cot 45°=x,$

$BQ=x\cot 60°=\frac{x}{\sqrt{3}}$

但　$AQ-BQ=600\text{ft}.$

$\therefore\quad x-\frac{x}{\sqrt{3}}=600.$

$\therefore\quad \sqrt{3}x-x=600\sqrt{3}$

$$\therefore \quad x=\frac{600\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

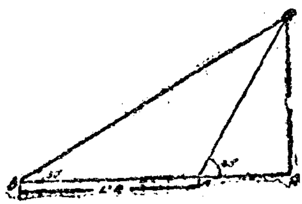
$$=\frac{600\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{600\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$=300\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$$

$$=1419.6\text{ft.}$$

故該塔之高為1419.6ft.

3. 一人立於河岸A點測得對岸一樹頂點 C 之仰角為$60^0$，復退後 12ft. 而再測其仰角則為$30^0$，求河面之寬及此樹之高。



(解)

$\because \quad \angle CAD=60^\circ, \quad \angle CBA=30^0.$

$\therefore \quad \angle ACB=30^0.$

$\therefore \quad AC=AB=12\text{ft.}$

$CD=AC\sin 60^\circ$

$$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\text{ ft.}$$

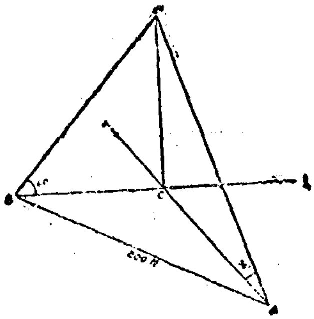
而　$AD=AC\sin ACD.$

$=AC\sin 30^\circ$

$=12\times\frac{1}{2}=6\text{ft}$。

故河面之寬爲 6ft. 而樹高爲 $6\sqrt{3}$ ft.

4. A,B二村相距有2000ft.之遙。一飛機自空中D處測得A村向北之仰角爲 30° 而 B 村向東之仰角則爲 60°. 求此飛機離地面之高度。



(解) 設DC爲由D至地面之垂線。

則在△ADC中有

$$AC=DC\cot 30^{\circ}.=\overline{DC}\cdot\sqrt{3}$$

而在△DBC中則有

$$BC=DC\cot 60^{\circ}=\frac{DC}{\sqrt{3}}$$

但△ABC乃爲直角三角形，蓋以 AC 爲正北之方向而BC 乃爲正東之方向也。

故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.

$$\therefore\quad 2000=\sqrt{(\sqrt{3}\,DC)^2+\left(\frac{DC^2}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$=\sqrt{3\,\overline{DC}^2+\frac{\overline{DC}^2}{3}}$$

$$\therefore\quad (2000)^2 = 3\,\overline{DC}^2 + \frac{\overline{DC}^2}{3}$$

$$\therefore\quad 3(2000)^2 = 9\,\overline{DC}^2 + \overline{DC}^2$$

即 $$\overline{DC}^2 = 3(2000)^2 \div 10$$

$$= 1200000$$

$$\therefore\quad DC = \sqrt{1200000} = 1095\text{ft.}$$ 强。

故飛機此時離地之高約為 1095ft.

中華民國廿年九月拾五日

送贈

# 初中會攷升學指導



以上全部共六集不零售

合集每部大洋二元五角

（郵費外加）


中華民國二十二年五月初版

初中會攷升學指導

第一集　算學之部　（不零售）

▲初中算術複習▼

編著者　李修睦　張伯康　黃祖瑜

發行者　南京書店

發行所　南京書店　上海河南路　南京太平路

分售處　各省各大書局