

普通結構學

下 冊

蔡 方 蔭 著

商 務 印 書 館 發 行

普通結構學

下 冊

蔡 方 蔭 著

商 務 印 書 館 發 行

中華民國三十六年九月初版
中華民國三十八年八月三版

⊕(88324.10)

普通結構學三冊

下冊基價貳拾元

印刷地點外另加運費

版 翻
權 印
所 必
有 究

著 者 蔡 方 蔭

發 行 人 陳 懋 解
上海河南中路

印 刷 所 商 務 印 刷 廠
商 務 印 書 館

發 行 所 商 務 印 書 館
各 地

下 册 目 次

第十章	長跨橋梁(一)——三鉸拱橋及三 鉸加勁懸橋	1
10— 1.	長跨橋梁之需要及型式	1
10— 2.	三鉸拱橋之通用型式	2
10— 3.	三鉸拱橋之反力及其感應圖	6
10— 4.	三鉸拱骨之彎矩, 切力, 與直接應力及其感 應圖	10
10— 5.	三鉸拱骨之最外纖維應力及其感應圖	29
10— 6.	三鉸拱桁架之應力及其感應圖	34
10— 7.	特殊型式之三鉸拱橋	44
10— 8.	三鉸拱橋在側力及縱力下之應力	62
10— 9.	懸橋之型式	65
10—10.	懸索之形式及應力	68
10—11.	懸橋三鉸加勁梁之反力, 切力, 與彎矩及其 感應圖	72
10—12.	懸橋三鉸加勁梁之最大反力, 切力及彎矩	83
第十一章	長跨橋梁(二)——懸臂橋及威 氏桁架橋	93

11— 1.	懸臂橋之原理及型式	93
11— 2.	懸臂橋之反力,切力,與彎矩及其感應圖	103
11— 3.	懸臂桁架橋之應力及其感應圖	108
11— 4.	拱橋式與懸橋式懸臂桁架橋之應力及其感應圖	112
11— 5.	懸臂橋之最大反力,切力及彎矩	123
11— 6.	懸臂橋在側力下之應力	127
11— 7.	威氏桁架橋之型式及特點	131
11— 8.	威氏桁架橋之反力,切力及彎矩	133
11— 9.	威氏桁架橋之反力,切力及彎矩感應圖	143
11—10.	威氏桁架橋之桿應力及其感應圖	156
11—11.	威氏桁架橋之最大反力,切力及彎矩	158
11—12.	威氏桁架橋之穩定條件及經濟比例	166
11—13.	威氏桁架橋在側力下之應力	171
第十二章 結構之變位		173
12—1.	結構變位之原因及應用	173
12—2.	直梁變位之基本理論 (五圖之關係)	176
12—3.	用角變法求直梁之變位	182
12—4.	用虛功法求直梁之變位	200
12—5.	直梁由於切力及扭力之變位	207
12—6.	曲梁之變位	216
12—7.	用虛功法求桁架之線變位	223

12— 8.	桁架之相對線變位	230
12— 9.	桁架中桿之角變位及二桿間之角變	243
12—10.	用角變法求桁架之變位(一)	256
12—11.	用角變法求桁架之變位(二)	277
12—12.	桁架變位之圖解法(一)	288
12—13.	桁架變位之圖解法(二)	307
12—14.	用卡氏定理求結構之變位	313
12—15.	用富氏級數求結構之變位	321
12—16.	普通橋梁桁架之變位	333
12—17.	長跨橋梁之變位	337
12—18.	桁架加拱之計算法	358
12—19.	麥氏變位互等之定理	360
12—20.	桁架應力感應圖之圖解法	368
12—21.	由桿之變位求其應力	372
後記		375
圖、例題及習題索引		378

普通結構學

下 冊

第十章 長跨橋梁(一)——三鉸拱橋 及三鉸加勁懸橋

10-1. 長跨橋梁之需要及型式 若橋梁之跨長，超過約 240 公尺^①，則採用兩端支承之簡單跨，至不經濟。且有時橋梁所跨越之處，係一深而且寬之山谷；或係一大河，其河底太深，河流甚急；或因通航之需要，不易或不宜採用需要橋墩較多之短跨橋梁，於是可採用所謂長跨橋梁，以適應其需要。長跨橋梁之通用型式如下：

- (1) 拱橋；
- (2) 懸橋；
- (3) 懸臂橋；
- (4) 威氏桁架橋；
- (5) 連續橋。

上列五種長跨橋梁之中，懸臂橋及威氏桁架橋常係靜定。連續

① 刻下最長之簡單跨橋梁，推美國意省麥城(Metropolis, Ill.)之彭氏桁架橋，跨長約 220 公尺，於 1917 年造成。

橋係靜不定。至拱橋及懸橋是否靜定，視其型式而異。拱橋之靜定者必須有三鉸，稱爲三鉸拱橋。懸橋之有加勁桁架者，則其加勁桁架亦須有三鉸，始成爲靜定。本書之範圍，既限於靜定之結構，故以下所論之長跨橋梁，亦祇限以下四種：(1)三鉸拱橋，(2)三鉸加勁懸橋，(3)懸臂橋及(4)威氏桁架橋。本章所論者爲前二種，下章所論者則爲後二種。

長跨橋梁乃土木工程師對於近代文化之一大貢獻，主持此項橋梁之工程師，不但須有淵博之專門知識，且對於與計劃此項橋梁有關之社會及經濟方面，亦須有相當之了解。學者如讀關於此項長跨橋梁之論文或記錄^①，當知此言之不謬。

長跨橋梁常係有紀念性之結構。既須堅固，又須經濟，更須美觀。如設計或建造時略有差池，因而發生重大之不幸事件，則不但主持該橋之工程師受其害，即結構工程界亦蒙其羞。本書第 1—4 節所述之 1914 年 Quebec 大懸臂橋之不幸事件，可爲殷鑒。

10-2. 三鉸拱橋之通用型式^② 三鉸拱橋與第 5—11 節

① 例如鬼門 (Hell Gate) 拱橋及華盛頓懸橋二文，各見美國土木工程師會專刊，1918 年及 1933 年刊。

② 刻下跨度最長之三鉸拱橋，於鋼橋推美國亞省 (Arizona) 珂羅拉多 (Colorado) 河上之公路橋，跨長約爲 188.4 公尺，1928 年造成。於木橋推美國某地之公路橋，跨長約爲 55 公尺，1934 年造成。此二橋之跨長均短於第 1 面註脚^①中所述之簡單跨橋梁，惟爲便於分章起見，仍將三鉸拱橋列入長跨橋梁中。

所述之三鉸拱屋頂桁架相似，常各以一鉸置於拱兩端之支點，另一鉸則置於拱頂。

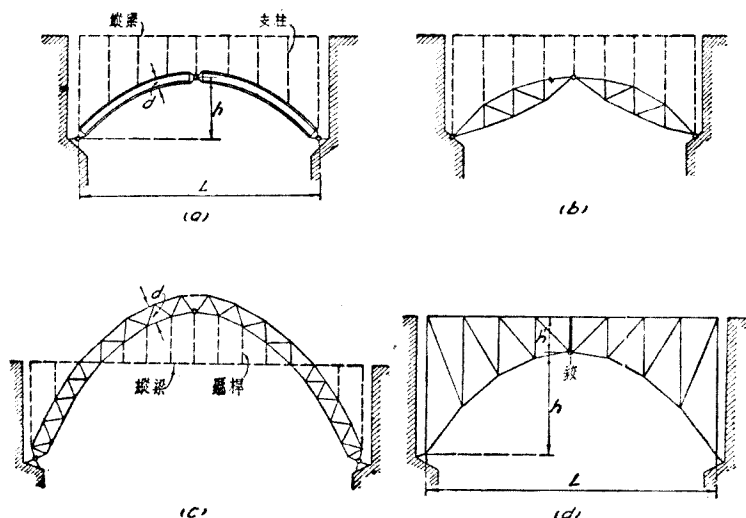


圖 10—1. 三鉸拱橋之通用型式

橋梁之拱可採下列三式之一，即：(1) 鉸梁拱骨〔圖10—1 (a)及影片 XVI〕，(2) 桁架拱骨〔圖 10—1 (b) 與 (c) 及影片 XVII〕，及(3) 拱桁架〔圖10—1 (d)〕。圖 10—1 中之虛線所示者，平直者為縱梁，豎立者為支柱或懸桿。拱骨式可用於上承式〔如圖 10—1 (a) 及 (b)〕或穿越式〔如圖 10—1 (c)〕之橋梁，但拱桁架祇能用於上承式橋梁〔如圖 10—1 (d)〕。於鉸梁拱骨，三鉸常係置於拱之中心軸。於桁架拱骨之如圖 10—1 (c) 者，其二支點之鉸可置於拱之中心或下弦，其拱頂之鉸可置於下弦上弦或二弦之中點。於拱桁架則拱頂鉸常置於下弦，如

圖 10-1 d), 蓋如此若使其下弦之形式與拱橋在呆荷重下之合力多邊形^①相合, 則其上弦桿及腹桿在呆荷重下之應力均等



影片 XVI. 三鐵版電機房拱橋



影片 XVII. 桁架拱骨拱橋

① 合力多邊形之形式見於圖 10-1 圖

於零。三鉸拱橋之特殊型式見 10-7 節。

鉸梁拱骨適宜於跨度較短之橋梁，桁架拱骨適宜於跨度較長之橋梁，而拱桁架則適於中跨橋梁。拱橋之鉸愈多，則其剛勁亦愈小，故三鉸拱之優點在其係一靜定之結構，其劣點則在其剛勁於拱橋中為最小。且其變位線於拱頂鉸之處，有一折斷之點，故三鉸拱橋不適宜於鐵路橋梁。惟橋梁縱係採用二鉸拱，一鉸拱，或無鉸拱，建造時亦常使其在呆荷重下成為三鉸拱。即最先建一三鉸拱橋，俟呆荷重加於橋上之後，再將不需要之鉸取去，或使其無鉸之作用，如是則該項拱橋在呆荷重下係靜定。

拱橋之高度 h 與跨長 L 之比，當依當地之情形及拱橋之型式而定。於拱桁架其高度約為跨長之 $1/12$ 至 $1/4$ ，以 $1/7$ 為適中。拱頂之深度 h' 約為跨長之 $1/30$ 至 $1/15$ ，以 $1/25$ 為適中。桁架拱骨之深度 d 亦與鉸梁拱骨之深度 d 相似，約為跨長之 $1/60$ 至 $1/40$ 。拱橋之形式常採用拋物線形，但亦有採用圓弧者。

上承式橋梁之採用拱骨者，每橋之拱骨數可在二以上，其數視橋之寬度而定。橋梁之採用拱桁架者及穿越式橋梁，每橋之拱數常祇二個。若橋面係置於拱橋之頂上，如圖 10-1(b) 及 (d)，則二拱間之中心距，不得小於跨長之 $1/15$ ，亦不得小於支點與橋面系間高度之 $1/3$ 或 $1/2$ 。若橋面系係懸吊於二拱之間，如圖 10-1(c)，則以橋面系之寬度為二拱間之中心距，但後者亦不得小於跨長之 $1/20$ ，或拱高之 $1/4$ 。有時為增加拱橋

在側力下之穩定起見，常使二拱均向內傾斜，即使支點處二拱間之中心距略大於拱頂之處者，此項傾度常在橫 1 豎 12 至橫 1 豎 7 之間。拱橋於無活荷重時及有活荷重時在側力下之穩度，必詳密計算。其在側力傾覆力矩下之穩定安全率，以不小於 2 為宜，至少亦不得小於 1.5，否則其支座必須加以相當之錨定。

10-3. 三鉸拱橋之反力及其感應圖 三鉸拱反力之數解及圖解法已詳見第 3-6 及 3-7 節，茲述三鉸拱橋之反力感應圖如下。

圖 10-2(a) 示一非對稱式之三鉸拱，鉸 B 之位置高於鉸 A 故， AB 線之傾度為 ϕ 。因此假定 ϕ 為正號，反是 ϕ 為負號。圖中 h 之值，係鉸 C 與 AB 線間之豎距，稱為 C 鉸之高度。此圖之要點乃在其 A, B 及 C 三鉸之相對位置，至拱之型式如何，並無關係。故下列之結果，可應用於任何型式之三鉸拱橋。

設以一單位豎向集中荷重置於 D 點，其與右支點之距離為 KL 。若此荷重在拱之右部，即 $0 \leq KL \leq b$ ，其左右二支點之反力，如圖 10-2(a) 所示。因鉸 C 之彎矩等於零，得，

$$\frac{V_A}{H} = \frac{h + a \tan \phi}{a}$$

用 $\Sigma M_B = 0$ ，以鉸 B 為矩心，得

$$KL + HL \tan \phi - V_A L = 0$$

由上列二方程可得

$$H = \frac{ak}{h} \quad (10-1)$$

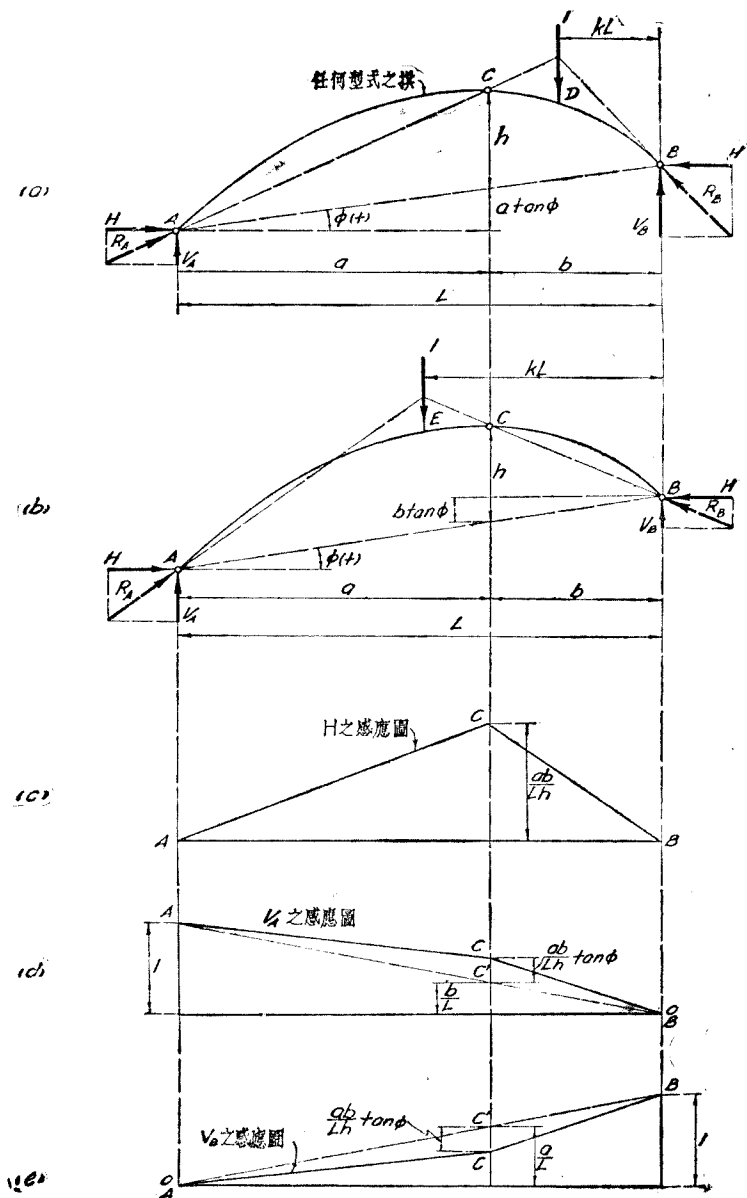


圖 10—2. 三鉸拱橋之反力感應圖

由是得,
$$V_A = k \left(1 + \frac{a}{h} \tan \phi \right) \quad (10-2)$$

$$V_B = 1 - k \left(1 + \frac{a}{h} \tan \phi \right) \quad (10-3)$$

若單位豎向集中荷重在拱之左部任何 E 點, 即 $b \leq KL \leq L$, 其左右二支點之反力如圖 10-2(b), 以相似之方法可得

$$H = \frac{b(1-k)}{h} \quad (10-4)$$

$$V_A = k + \frac{(1-k)b}{h} \tan \phi \quad (10-5)$$

及
$$V_B = (1-k) \left(1 - \frac{b}{h} \tan \phi \right) \quad (10-6)$$

若單位豎向集中荷重置於 C 鉸, 則 $k = b/L$, 於是上列諸方程式變為,

$$H = \frac{ab}{Lh} \quad (10-7)$$

$$V_A = \frac{b}{L} + \frac{ab}{Lh} \tan \phi \quad (10-8)$$

$$V_B = \frac{a}{L} - \frac{ab}{Lh} \tan \phi \quad (10-9)$$

注意, 採用上列諸方程時, ϕ 角之正負號, 必須顧及。

若該荷重置於右支點 B , 則 $k = 0$, 故

$$\left. \begin{aligned} H &= V_A = 0 \\ V_B &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

若該荷重置於左支點 A , 則 $k = 1$, 故

$$\left. \begin{aligned} H &= V_B = 0 \\ V_A &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (10-11)$$

方程(10-7)至(10-11),各係 H, V_A 及 V_B 感應圖於 C, B 及 A 三點之豎距。於該三點之間,所有之感應圖當然係一直線,故 H, V_A 及 V_B 之感應圖,各如圖 10-2 (c) (d) 及(e)所示。

設一簡單梁之跨長為 L , 以 C 點將其分為 a 及 b 二段, 與圖 10-2 (a) 之三鉸拱相同, 則 C 點彎矩 M'_C 之感應圖於 C 點之豎距為 ab/L 。若將此值除以圖 10-2 (a) 中 C 鉸之高度 h , 即得圖 10-2 (c) H 感應圖於 C 點之豎距。故三鉸拱橋 H 之感應圖, 等於一跨長相同簡單梁中 C 點之彎矩 M'_C 之感應圖, 除以 C 鉸之高度 h 。因此, 方程(10-1), (10-4) 及 (10-7) 可寫成一方程如下:

$$H = \frac{M'_C}{h} \quad (10-12)$$

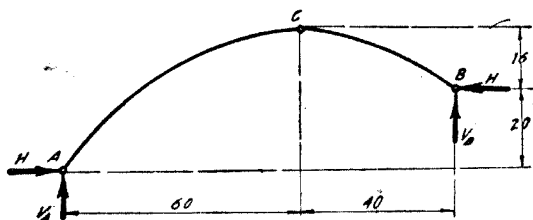
設圖 10-2 (a) 中 A 及 B 二鉸之高度相同, 則 $\phi=0$, 於是方程(10-8)及(10-9)各變為

$$\left. \begin{aligned} V_A &= \frac{b}{L} \\ V_B &= \frac{a}{L} \end{aligned} \right\} \quad (10-13)$$

圖 10-2 (d)及(e)中 V_A 及 V_B 感應圖均變為一直線 $AC'B$ 。故三鉸拱橋兩端之二鉸如係同一高度, 則其兩端豎反力 V_A 及 V_B 之感應圖, 均與一跨長相同簡單梁兩端之反力感應圖相同。

習題 10-1. 設某三鉸拱橋中 A, B 及 C 三鉸之位置如附圖所示。求其平反力 H 及其豎反力 V_A 與 V_B 之感應圖, 及其全跨長有均佈荷重

W /公尺時 H , V_A 及 V_B 之值。



習題 10—1.

習題 10—2. 求習題 10—1 三鉸拱橋在中華二十級活荷重下反力 H , V_A 及 V_B 之最大值。活荷重以每軌之重量計。

10—4. 三鉸拱骨之彎矩, 切力, 與直接應力, 及其感應圖

如圖 10—3 (a) 所示, 無論拱骨某正截面 D 所受之總合應力 R_D 如何, 依圖 3—1 (a) 及 (b) 所示之方法, 可將此總合應力 R_D 分解為彎矩 M_D , 切力 T_D , 及直接應力 N_D 。於任何荷重情形之下, 彎矩 M_D 可由荷重與拱一端之反力求之, 切力及直接應力可由正截面 D 之豎切力 V_D 及平壓力 H_D 求之。如圖 10—3 (b) 所示, 則

$$T_D = V_D \cos \theta_D - H_D \sin \theta_D \quad (10-14)$$

$$N_D = - (V_D \sin \theta_D + H_D \cos \theta_D) \quad (10-15)$$

方程 (10—15) 前有一負號, 因 N_D 係壓力。寫方程 (10—14) 及 (10—15) 時, 係假定 V_D 為正號切力, H_D 為壓力。若 V_D 或 H_D 之指向與圖 10—3 (b) 所示者相反, 則 V_D 或 H_D 變為負號。此外截面 D 處拱軸切線之傾度為 ϕ 時, θ_D 假定係正號, 若切線之傾為 ψ 時, θ_D 係負號, 與前述 ϕ 之正負號相同。

故採用上列二方程及以下之諸方程時，均須顧及 θ_D 之正負號。

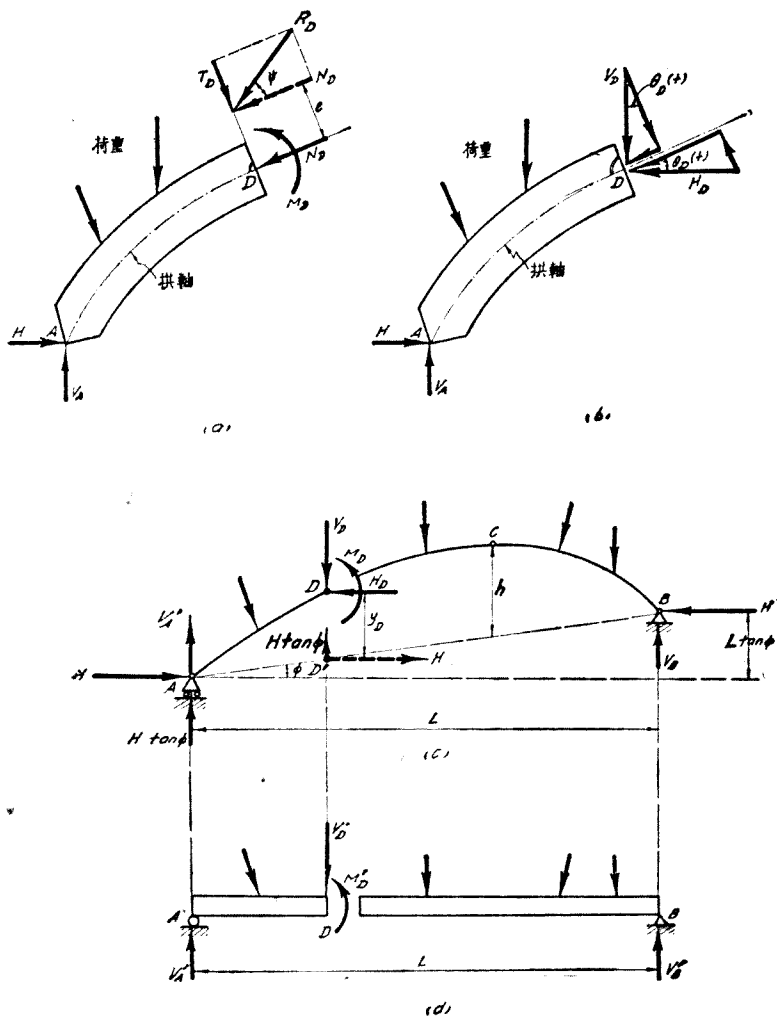


圖 10—8. 三鉸拱骨之彎矩切力及直接應力

反是，既知 V_D 與 H_D 或 T_D 與 N_D 之後，亦可求得總合應力

R_D 之值。

在任何豎向荷重下，三鉸拱軸任何點之彎矩，切力，及直接應力亦可用圖解法求之。圖 10—4(a) 示一任何三鉸拱軸，受有任何豎向集中荷重 P_1, P_2, \dots 等。先以第 2—8 節中之任一方法，經過 A, B 及 C 三鉸，為所受之荷重，作一索線多邊形，如圖 10—4(a)，及其力多邊形，如圖 10—4(b)，其首尾二索線 0 及 3 各表示左右二支點之反力 R_A 及 R_B 之傾度及數量。試以任何 D 點為例，索線 1 表示該點以右或以左所有外力之合力 R_D 。圖(a)之索線 1 示 R_D 之作用線，圖(b)之索線 1 示 R_D 之傾度及數量。若以 R_D 視作 D 點以右所有外力之合力，則其指向如圖(b)所示，故對於 D 點為壓力。以 R_D 為弦，作一直角三角形，其他二邊各與拱軸於 D 點之切線垂直及平行，如圖(c)，

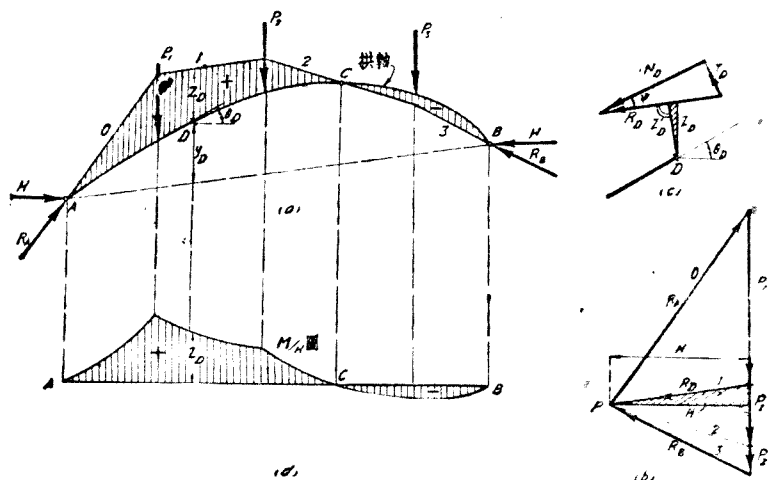


圖 10—4. 三鉸拱軸之彎矩切力及直接應力之圖解法

則前者爲 D 點之切力 T_D ，後者爲 D 點之直接應力 N_D ，其理由至爲明顯。

自圖(c)之 D 點作 Z'_D 與 R_D 之作用線成垂直，並作豎線 Z_D ，得一有斜線之直角三角形。又自圖(b)之極點 P 作一平線，表示 R_D 之平分力 H 。於荷重係豎向時，此 H 亦即拱之平反力或力多邊形之極距。由該平線及 R_D 亦得一有斜線之直角三角形因圖(c)之 Z'_D 及 Z_D 各與圖(b)之 R_D 及 H 成垂直，故該二直角三角形係相似，因此，

$$\frac{Z'_D}{Z_D} = \frac{H}{R_D} \quad \text{或} \quad R_D Z'_D = H Z_D$$

由圖(c)可知 D 點之彎矩 M_D 爲，

$$M_D = R_D Z'_D$$

由是

$$M_D = H Z_D \quad (10-16)$$

H 之單位爲力，其比例尺與力多邊形同。 Z_D 之單位爲距離，其比例尺與拱之跨度同。故荷重如係豎向，圖(a)拱軸與索線多邊形間之豎距 Z_D 之圖，乘以拱之平反力 H ，即得拱之彎矩圖^①。其底線爲拱軸，若將底線變爲一平直線，則得 $Z_D = M/H$ 圖如圖(d)。

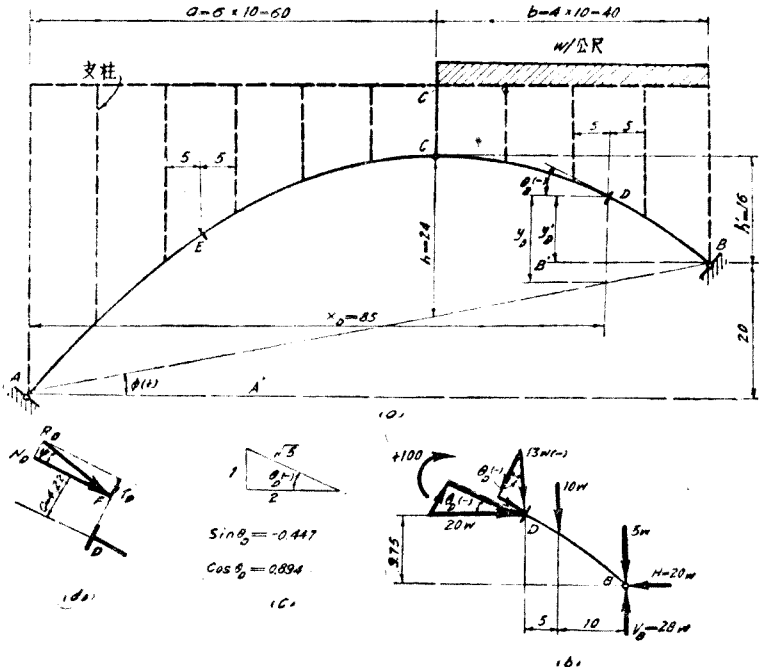
若荷重係均佈荷重，則圖(a)之索線多邊形變爲索形曲線，其作法見圖 2-13。

例題 10-1. 某三鉸拱骨橋之左右二部各係以 AA' 與 CC' ，及 BB'

① 此項理論係美國之艾(Eddy)氏所發見，見美國算學期刊第1卷，1878年出版。

與 CC' 爲坐標之拋物線，其頂點均爲鉸 C 。活荷重由縱梁橫梁及支柱而達於該拱。如附圖所示，設拱之右部 BC 段有活荷重 W /公尺，求拱軸上 D 點在該項活荷重下之彎矩 M_D ，切力 T_D ，直接應力 N_D ，及總合應力 R_D 。

解答：
$$\tan \phi = \frac{20}{100} = 0.2$$



例題 10-1.

由圖 10-2(c) 及 (e) 中 H 及 V_B 之感應圖，得

$$H = \frac{ab}{Lh} \times \frac{b}{2} \times W = \frac{60 \times 40}{100 \times 24} \times \frac{40}{2} \times W = 20W$$

$$V_B = \left(1 + \frac{a}{L} - \frac{ab}{Lh} \tan \phi \right) \frac{b}{2} \times W$$

$$= \left[1 + \frac{60}{100} - \frac{60 \times 40}{100 \times 24} (0.2) \right] \times \frac{40}{2} \times W = 28W$$

故 D 點之豎切力爲 $-(28W - 15W) = -13W$ 。如附圖(b)所示，拱軸任何點

與 AA' 之豎距設以 A 為原點可用下列拋物線方程定之。

$$y' = (h' + 20) \left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) = 36 \left(\frac{2x}{60} - \frac{x^2}{3600} \right) = \frac{6x}{5} - \frac{x^2}{100}$$

拱軸任何點切線之傾度 θ 可由上列方程之微分 dy'/dx 定之。

$$\tan \theta = \frac{dy'}{dx} = \frac{6}{5} - \frac{x}{50}$$

於拱軸右半之 D 點, $x = x_D = 85$, 故

$$y'_D = 9.75, \quad \tan \theta_D = -\frac{1}{2}, \quad \cot \theta_D = -2$$

θ_D 為負號, 因拱軸於 D 點之切線為 \。 如附圖(c)所示, 可得

$$\sin \theta_D = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -0.447, \quad \cos \theta_D = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.894$$

用 $\Sigma M = 0$, 以 D 點為矩心, 得 D 點之彎矩 M_D 如下:

$$M_D + 9.75 \times 20w + 5 \times 10w - 15(28w - 5w) = 0$$

$$M_D = +100w \searrow$$

於附圖(b)切力 $13w$ 為負號, 故,

$$T_D = (-13w)0.894 - 20w(-0.447) = -2.68w$$

$$N_D = -[(-13w)(-0.447) + 20w \times 0.894] = -23.69w$$

若將 M_D 與 N_D 合併得一偏心直接應力其偏心距 e 如下:

$$e = \frac{M_D}{N_D} = \frac{100w}{23.69w} = 4.22$$

若再將 N_D 與 T_D 合併, 得一總合應力 R_D 如下:

$$R_D = w\sqrt{23.69^2 + 2.68^2} = 23.82w$$

R_D 對於拱軸 D 點切線所成之傾度 ψ 為,

$$\psi = \tan^{-1} \frac{2.68}{23.69} = \tan^{-1} 0.113 = 6.5^\circ$$

故拱軸 D 點之總合應力為壓力 R_D , 其作用點為 F 點, 其與拱軸 D 點切線所成之傾度為 6.5° , 如附圖(d)所示。

習題 10-3. 與例題 10-1 相同, 惟 $\phi = 0$ 及 $h = 36$ 。

習題 10-4. 拱橋與例題 10-1 者相同, 荷重量 w /公尺, 在拱之左部 AC 段, 求 E 點在此項活荷重位置下之彎矩 M_E , 切力 T_E , 直接應力 N_E ,

及總合應力 R_E 。

習題 10—5. 與例題 10—1 相同, 惟拱軸之左右二部各係一圓弧, 其圓心均在豎線 CC' (延長) 之上。

習題 10—6. 用圖解法解答 (a), 習題 10—3 (b), 習題 10—4 及 (c) 習題 10—5。

三鉸拱軸上任何點彎矩, 切力及直接應力在活荷重下之最大值, 可由其感應圖定之。如圖 10—3(c) 所示, 一任何非對稱式之三鉸拱骨, 受有任何豎向荷重。若將其左端 A 點之鉸支座改為輓軸支座, 並另加一平力 H , 其數量與該端之平分反力 H 相等, 則三鉸拱所受之外力系, 仍無改變。設所有荷重對於 B 點之彎矩為 M_B , 則 A 點之豎分反力 V_A 為,

$$V_A = \frac{M_B}{L} + H \tan \phi = V'_A + H \tan \phi \quad (10-17)$$

其中 $V'_A = M_B/L$ 即一與拱跨同長簡單梁在各力作用線與 B 點相對位置不變之荷重下 A 點之反力, 如圖 10—3(d) 所示。比較圖 10—3(c) 及 (d) 中 D 點以左之外力, 則前者比後者多 H 及 $H \tan \phi$, 而此二力之合力作用線與 AB 虛線相合。將此合力於 AB 線上之 D' 分解為 H 及 $H \tan \phi$, 則圖 10—3(c) 中 D 點之彎矩 M_D 為^①

$$M_D = M'_D - My_D \quad (10-18)$$

其中 M'_D 即一與拱跨同長簡單梁在相同荷重下 D 點之彎矩 (圖 10—3(d))。

① 方程(10—18)亦可由彎矩之圖解法(圖10—4(a)及方程(10—16))求得之, 其解法列為習題 10—7。

依方程(10—18),則圖 10—5(a) 拱軸上任何 D 點彎矩 M_D 感應圖,等於 M_D 之感應圖減去 Hy_D 之感應圖,其作法如圖 10—5 (b)所示,其中 D 及 C 點之豎距 $M_{D(D)}$ 及 $M_{D(C)}$ 之值可由該圖用幾何方法求得如下:

$$M_{D(D)} = + \frac{x_D}{L} \left(L - x_D - b \frac{y_D}{h} \right) \quad (10-19)$$

$$M_{D(C)} = - \frac{b}{L} \left(a \frac{y_D}{h} - x_D \right) \quad (10-20)$$

$M_{D(D)}$ 爲荷重在 D 點時 M_D 之值,即 M_D 之最大正號彎矩。
 $M_{D(C)}$ 爲荷重在 C 點時 M_D 之值,即 M_D 之最大負號彎矩。由上列二方程如 $M_{D(D)} > M_{D(C)}$, 則

$$2x_D L > (x_D + a) \left(x_D + \frac{y_D}{h} b \right) \quad (10-21)$$

若荷重在圖 10—5 (a) 之 E 點,則 $M_D = 0$ 。設 E 點與鉸 A 之平距離爲 $K'L$, 由圖 10—5(b), 用幾何方法,可得

$$k' = \frac{1}{1 + \frac{b}{h} \times \frac{y_D}{x_D}} \quad (10-22)$$

若 D 點在拱軸之右部,可將方程(10—19)至(10—22)中之 a 改爲 b , b 改爲 a , 則該方程等均可採用,惟其中 x_D 及 $K'L$ 之值,均應量自右支點之鉸 B 。

圖 10—5(b) 中彎矩 M_D 爲零之 E 點,亦可用另一法定之。如圖 10—5(a)所示,作 AD 及 BC 二直線,相交於 E 點,設荷重置於 E 點,則該二直線各爲支點 A 及 B 反力 R'_A 及 R'_B 之作用線。因 R'_A 經過 D 點,故荷重在 E 點時 D 點之彎矩爲

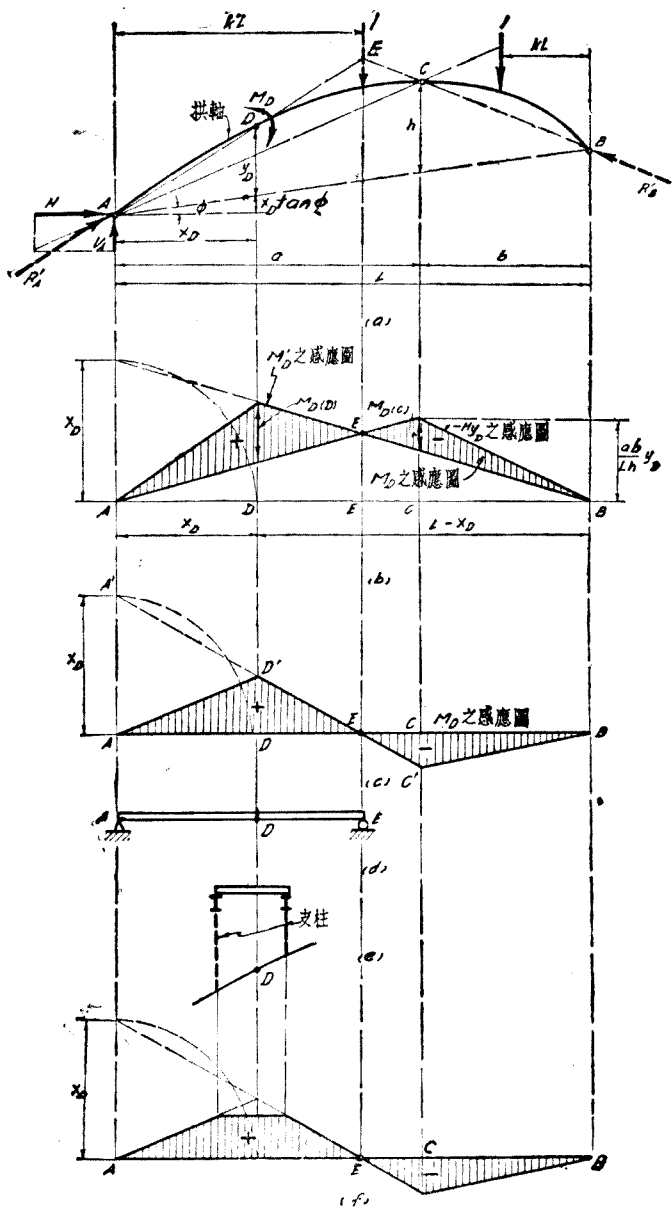


圖 10—5. 三鉸拱骨之彎矩感應圖

零。同此，若荷重在 E 點之右，則 R'_A 之作用線在 D 點之下，故 D 點之彎矩為負號。荷重在 DE 之間，則 R'_A 之作用線在 D 點之上，故 D 點之彎矩為正號。若荷重在 E 點之左，則 D 點之彎矩為 R'_B 之函數，而 R'_B 之作用線在 D 點之上，故 D 點之彎矩為正號。此與圖 10—5 (b) M_D 之感應圖所示者正相符合。

若 E 點之位置已定，則 M_D 之感應圖，亦可如圖 10—5 (c) 之法得之。使 $AA' = x_D$ ，聯 $A'E$ ，並得 D' 及 C' 二點。作 AD' 及 $C'B$ ，即得 M_D 之感應圖。由此圖又可知 M_D 感應圖之 $ADED'$ 部份，等於圖 10—5 (d) 所示簡單梁 AE 中 D 點之彎矩圖。此簡單梁 AE 稱為代梁，此法稱為代梁法，係彌 (Müller Breslau) 氏^① 所創。

若此拱骨上有支柱以支承橫梁及縱梁，而 D 點在二支柱之間，如圖 10—5 (e) 所示，則 D 點之彎矩感應圖如圖 10—5 (f) 所示。

以上所述，雖以拱軸上之任何一點 D 為例，但其應用並不受此限制。拱骨上拱軸以外任何點或拱桁架任何節點之彎矩感應圖，均可依上述之方法求之。

習題 10—7. 由圖 10—4 (a) 及方程 (10—16) 求方程 (10—18) $M_D = M'_D - Hy_D$ 。

① 此法之原名為 Die Methode des Stellvertretenden Balkens, 見所著之圖解力學, 第 1 卷, 第 25 節。

習題 10-8. 設圖 10-5(a) 三鉸拱骨之軸為對稱式 (即 $\phi=0$ 並 $a=b=L/2$) 之拋物線, 其頂點與拱頂之鉸 C 相合。若活荷重為一豎向單位集中荷重, (a): 求表示拱軸上任何點最大正負號彎矩之方程, (b): 由(a)所得之方程作拱軸上任何點之最大正負號彎矩圖。 (c): 由(b)之答案, 求拱軸上之絕對最大正負號彎矩及其所在之點。

提示: 因拱軸係對稱式, 故求得拱軸左半或右半之答案, 即已足, 其他一半之答案, 必與之成對稱。計算時可於拱軸之左半取任何 D 點, 與圖 10-5 (a) 相似, 將方程 (10-19) 及 (10-20) 化簡 [注意 $y_D=4h(x_D/L-x_D^2/L^2)$] 即得(a)之答案。以 M_D 為縱軸 x_D/L 為橫軸, 作一圖表示答案(a)中之方程, 即得(b)之答案。求答案(a)中方程之紀數 dM_D/dx_D , 使其等於零, 而求 x_D 之值, 即絕對最大彎矩所在之位置。將此項 x_D 之值代入答案(a)之方程中, 即得絕對最大彎矩。

習題 10-9. 與習題 10-8 相同, 惟活荷重為一單位均佈荷重。

提示: 解答之步驟與習題 10-8 相同, 圖 10-5 (b) M_D 感應圖之正負面積如下:

$$\text{正號面積} = \frac{1}{2} M_{D(D)} k' L$$

$$\text{負號面積} = \frac{1}{2} M_{D(C)} (L - k' L)$$

其中 $M_{D(D)}$, $M_{D(C)}$ 及 k' 之值, 各見方程 (10-19), (10-20) 及 (10-22)。採用時應先將其化簡。

由圖 10-3 (c) 及 (d) 可得,

$$V_D - H \tan \phi = V'_D$$

$$\text{或} \quad V_D = V'_D + H \tan \phi \quad (10-23)$$

$$\text{及} \quad H_D = H \quad (10-24)$$

其中 V'_D 等於一與拱跨同長簡單梁在相同荷重下 D 點之豎切力。以上列 V_D 及 H_D 之值代入方程 (10-14) 及 (10-15) 中並化簡, 可得,

$$T_D = \cos\theta_D [V_D' - H(\tan\theta_D - \tan\phi)] \quad (10-25)$$

$$N_D = \sin\theta_D [-V_D' - H(\cot\theta_D + \tan\theta)] \quad (10-26)$$

依方程(10-25)，則圖 10-6 (a) 拱軸上任何D點切力
 $T_D/\cos\theta_D$ 之感應圖，等於 V_D' 之感應圖減去 $H(\tan\theta_D - \tan\phi)$
之感應圖。 其作法如圖 10-6(b)所示，其中 D 及 C 點之豎距
 $T_{D(D)}$ 及 $T_{D(C)}$ 可由該圖用幾何方法求得之如下：

$$\text{正號 } T_{D(D)} = \cos\theta_D \left[\left(1 - \frac{x_D}{L}\right) - \frac{x_D b}{hL} (\tan\theta_D - \tan\phi) \right] \quad (10-27)$$

$$\text{負號 } T_{D(D)} = -\cos\theta_D \left[\frac{x_D}{L} + \frac{x_D b}{hL} (\tan\theta_D - \tan\phi) \right] \quad (10-28)$$

$$T_{D(C)} = \cos\theta_D \left[\frac{b}{L} - \frac{ab}{hL} (\tan\theta_D - \tan\phi) \right] \quad (10-29)$$

方程(10-29)中 $T_{D(C)}$ 之值係正號或負號。

若荷重在圖 10-6(b)之 E 點，如圖 10-6(a)。則 $T_D = 0$ 。
設 E 點與鉸 A 之平距離為 $k^7 L$ ，由圖 10-6(b)，用幾何方法，
可得，

$$k' = \frac{1}{1 + \frac{b}{h} (\tan\theta_D - \tan\phi)} \quad (10-30)$$

由圖 10-6(b) 或由方程(10-29)，可知：若使 $T_{D(C)} = 0$ ，

$$\text{即 } \frac{b}{L} = \frac{ab}{hL} (\tan\theta_D - \tan\phi)$$

$$\text{或 } \tan\theta_D = \frac{h}{a} + \tan\phi$$

則 E 點變為一線，即荷重在拱軸右部之任何點時， T_D 均為零，

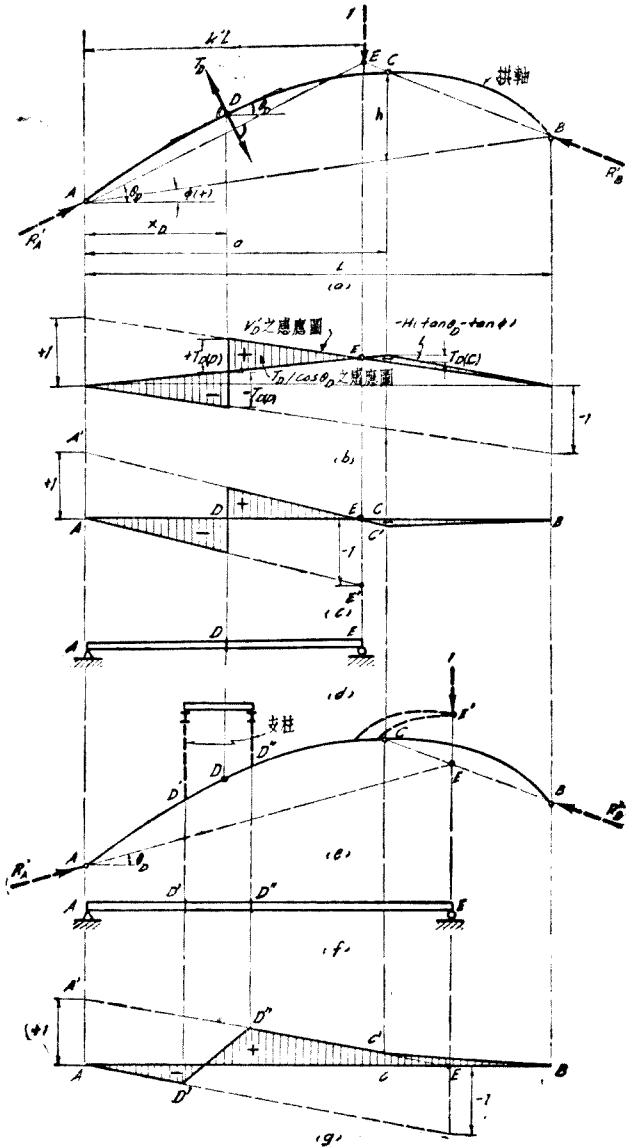


圖 10-6. 三鉸拱骨之切力感應圖

若

$$\tan\theta_D < \frac{h}{a} + \tan\phi \quad (10-31)$$

則 E 點實際不存在〔參閱圖 10—6 (e) 及 (g)〕。

若 D 點在拱軸之右部，可將方程 (10—27) 至 (10—31) 中之 a 改爲 b ， b 改爲 a ，則該方程等均可採用，惟其中 x_D 及 $K'L$ 之值，均應量自右支點之鉸 B ，而 θ_D 之值爲負號。

圖 10—6(b) 中切力 T_D 爲零之 E 點，亦可由另一方法定之。如圖 10—6(a) 所示，作 AE 線與拱軸於 D 點之切線平行。作 BC 線與 AE 線，相交得 E 點。設荷重置於 E 點，則該二線各爲支點 A 及 B 反力 R'_A 及 R'_B 之作用線。因 R'_A 與 T_D 所在之正截面成垂直，故荷重在 E 點時 D 點之切力爲零。同此，若荷重在 D 及 E 二點之間， D 點之切力爲正號。荷重在 A 及 D 二點或 E 及 B 二點之間， D 點之切力爲負號。均不難各由其反力 R'_A 及 R'_B 作用線之傾度證明之。如採用代梁法，則其代梁如圖 10—6(d) 所示，而 T_D 感應圖之作法，如圖 10—6(e) 所示。

設拱骨上有支柱，則節間 $D'D''$ 中任何 D 點之切力感應圖用代梁法之作法，如圖 10—6 (e), (f) 及 (g) 所示。於圖 (e) 中 AE 線亦與拱軸於 D 點之切線平行，惟 AE 與 BC 二線之相交點在鉸 C 之右若以荷重直接置於拱之右部，其作用線並經過 E 點，則 AE 及 BC 即非二支點 A 及 B 反力之作用線。故荷重之作用線，雖應經過 E 點，但該荷重仍應置於拱之左部，故應假

設拱之左部有一剛勁之臂，向右伸出而荷重即置於其與 E 點在同一豎線上之 E' 點。故圖 (g) 之感應圖中 $C'E$ 線為虛線，因該線係表示荷重在 C 鉸之右而同時又係加於拱之左部，此實際不可能也。故 E 點亦實際非一切力 T_D 為零之點，圖 (g) 感應圖之 $D'D''$ 仍係一直線，此與直梁節間之切力感應圖相同。若 D 點在拱之右部，則 θ_D 變為負號，圖 10—5 感應圖之作法，必與之相符（參閱例題 10—2）。

由方程 (10—26) 可知：圖 10—7(a) 拱軸任何 D 點之直接應力 $N_D/\sin\theta_D$ 之感應圖，等於 $-V_D$ 與 $-H(\cot\theta_D - \tan\phi_D)$ 二感應圖之和。 $N_D/\sin\theta_D$ 之感應圖，如圖 10—7(b) 所示。若 D 點在二支柱之間，如圖 (c)，則 N_D 之感應圖，如圖 (d)。由圖 10—7(b) 及 (d) 可知 D 點之直接應力以荷重置於 C 鉸時為最大，其值如下：

$$N_{D(c)} = -\sin\theta_D \left[\frac{b}{L} + \frac{ab}{Lh} (\cot\theta_D - \tan\phi) \right] \quad (10-32)$$

若 D 點在拱之右部，則上列方程中之 b/L 應改為 a/L ， θ_D 變為負號，圖 10—7，感應圖之作法，必與之相符（參閱例題 10—2）。

計算三鉸拱骨任何點彎矩，切力，及直接應力在活荷重下之最大正號及負號值時，若活荷重係均佈或集中荷重，則此項最大值及其活荷重位置，不難由感應圖定之。若活荷重係機車荷重，則上述之計算有時須特別考慮。若彎矩之感應圖如 10—5 (c) 所示，則活荷重位置之定法，可採用與方程 (8—15) 及 (8—

17) (圖 8-12) 相似之方法。若活荷重祇在圖 10-5(c) E 點之一邊則 AE 及 BE 二段中活荷重位置之定法，與代梁 D 點及 C 點之彎矩相同。若彎矩之感應圖如圖 10-5 (f) 之 AE 段，而 E 點之右無荷重，則活荷重位置之定法，可採用與方程 (8-5) (圖 8-11) 相似之方法。

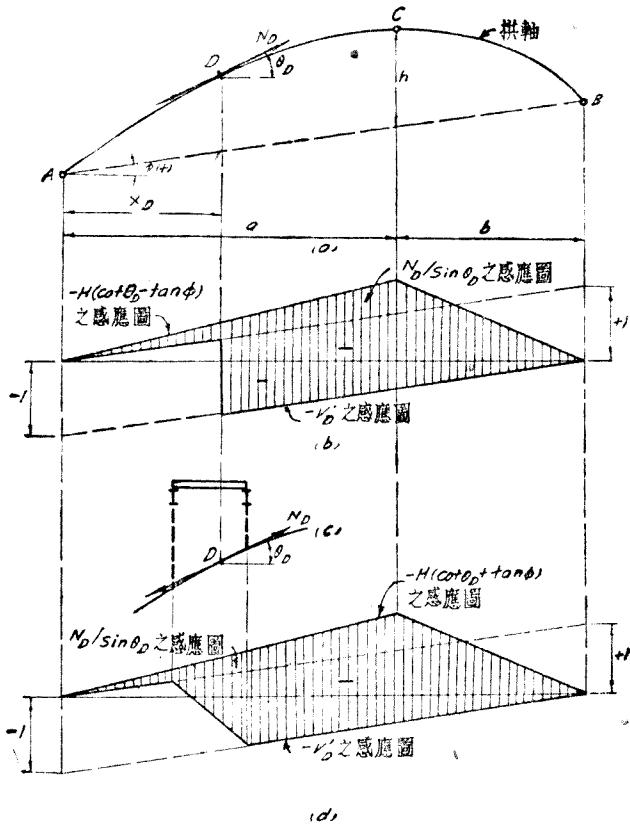


圖 10-7. 三鉸拱骨之直接應力感應圖

因切力及直接應力之感應圖頗為畸形，故其活荷重位置之

定法當然須採用感應圖移動荷重之法。若切力之感應圖如圖 10—6 (c) 所示， DE 段為正號， AD 及 EB 段為負號，則計算時其正號切力時，應使活荷重之長度約等於 DE 之長，但一機車之荷重，自不可任意截斷。至計算其負號切力時，為求其最大之值起見， AD 及 EB 段應有活荷重，而 DE 應無荷重。但實際上此種活荷重位置，有無發生之機會，似可加以相當之考慮。

例題 10—2. 作例題 10—1 拱軸右部 D 點之彎矩，切力，及直接應力感應圖，並用所得之感應圖校核例題 10—1 所得 M_D, T_D 及 N_D 之值。

解答：為簡便起見，附圖(a)以一平直虛線代表例題 10—1 附圖之三鉸拱骨， M_D 之感應圖如附圖(b)所示，其作法與圖 10—5(b) 相同。 H_{yD} 感應圖於 C 點之豎距如下：

$$y_D = y'_D + X_D \tan \phi = 0.75 + 15 \times 0.2 = 12.75$$

$$\frac{ab}{Lh} y_D = \frac{60 \times 45}{100 \times 25} \times 12.75 = 12.75$$

若荷重係直接加於拱骨之上，則 M'_D 感應圖於 D 點之豎距為 $15 \times 85 \div 100 = 12.75$ ，其於 D 點兩旁之豎距，可以幾何方法求之。於此例中， H_{yD} 與 M'_D 二感應圖之最大豎距及面積適相等（並非非常係如此參閱習題 10—13），故所需之 M_D 感應圖之面積 $A_1 - A_2$ 之計算，或以下列方法為簡便。因 H_{yD} 與 M'_D 二感應圖之面積相等，

$$\text{故} \quad A_1 + A_3 = A_2 + A_4$$

$$\text{所以} \quad A_1 - A_2 = A_4 - A_3$$

$$A_4 = (12.75 - 0) \frac{60}{2} = +112.50$$

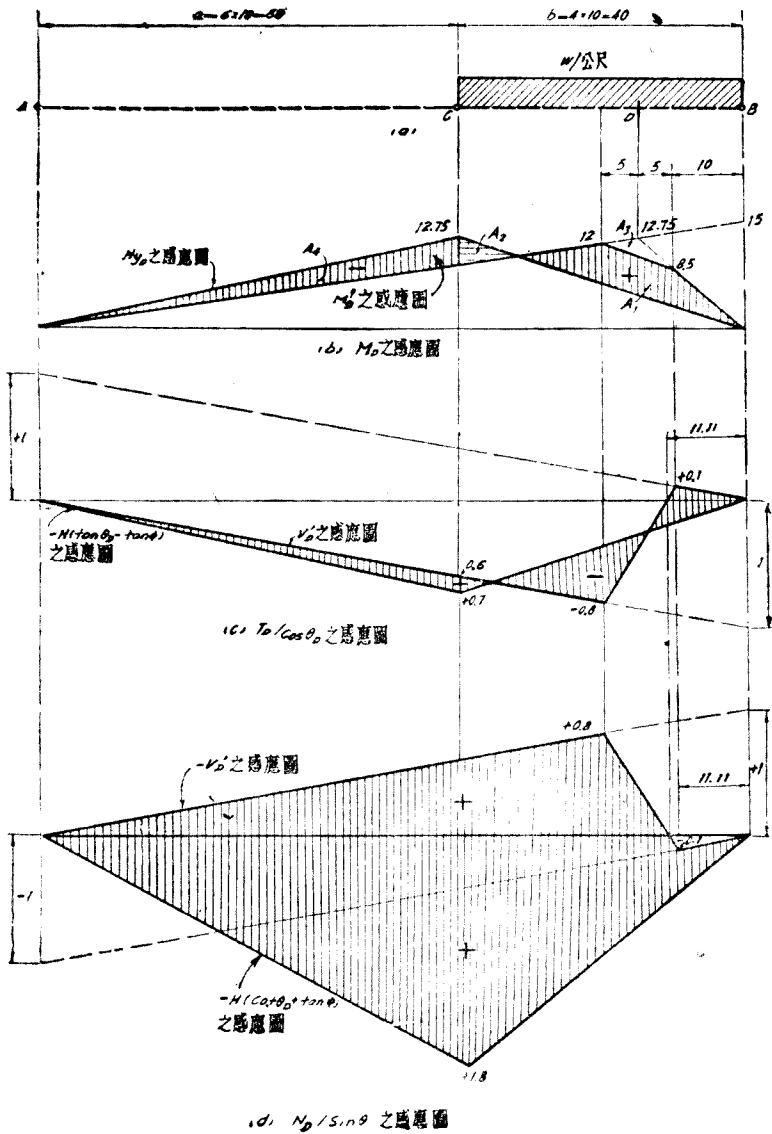
$$-A_3 = - \left(12.75 - \frac{12+8.5}{2} \right) \frac{10}{2} = -12.50$$

$$A_1 - A_2 = +100.00$$

故

$$M_D = \underline{\underline{+100w \curvearrowright}}$$

T_D 之感應圖如附圖 c) 所示, 其作法與圖 10-6 (b) 相似。



例題 10-2.

$$-H(\tan\theta_D - \tan\phi) = -\frac{60 \times 40}{100 \times 24}(-0.5 - 0.2) = +0.7$$

故此項感應圖為正號，應置於底線之下，以便與 V'_D 感應圖相加，此係與圖 10-6(b) 所不同之點。所需要 $T_D/\cos\theta_D$ 感應圖面積之計算如下：

$$+0.1 \times \frac{11.11}{2} = +0.56$$

$$-\left(0.8 \times \frac{88.89}{2} - 0.6 \times \frac{60}{2}\right) = -17.56$$

$$+0.7 \times \frac{40}{2} = +14.0$$

所需要之面積 = -3.00

故 $T_D = -3w \times \cos\theta_D = -3 \times 0.894w = -2.68w$

N_D 之感應圖如附圖(d)所示，因 $\sin\theta_D$ 之值為負號，故感應圖變為正號，與圖 10-7(a) 所示者正相反。

$$-H(\cot\theta_D + \tan\phi) = -\frac{60 \times 40}{100 \times 24}(-2 + 0.2) = +1.8$$

注意 $-V'_D$ 之感應圖與附圖(c)中 V'_D 之感應圖完全相同，惟正負號相反。

故所需要 $N_D/\sin\theta_D$ 感應圖面積之計算如下：

$$+17.56 - 0.56 = +17.00$$

$$+1.8 \times \frac{40}{2} = +36.00$$

所需要之面積 = +53.00

故 $N_D = +53w \times \sin\theta_D = +53(-0.447)w = -23.69w$

以上所得 M_D, T_D 及 N_D 之值，均與例題 10-1 所得者相同。

習題 10-10. 與例題 10-2 相同，惟 $\phi = 0$ 。及 $h = 36$ 。

習題 10-11. 設活荷重為 w /公尺，求例題 10-1 中拱骨右部 D 點彎矩 M_D ，切力 T_D ，及直接應力 N_D 之最大正號及負號值。

提示： M_D, T_D 及 N_D 之感應圖見例題 10-2。

習題 10-12. 作例題 10-1 拱軸左部 E 點之彎矩，切力，及直接應力之感應圖。並由所得之感應圖校核習題 10-4 中所得 M_E, T_E 及 N_E 之值。

習題 10-13. 設圖 10-5(a) 三鉸拱軸之左右二部各係以經過鉸 A 與

C 及鉸 B 與 C 之平線豎線為坐標之拋物線，其頂為鉸 C （與例題 10—1 之三鉸拱軸相似）。若拱跨之全長 A 至 B 受有均佈荷重時，拱軸上任何 D 點之彎矩為零（即 $M_D = 0$ ），試證明圖 10—5(a) 中拱頂 C 之高度 h ，必符合下列之條件，即，

$$h = \frac{ab \tan \phi}{b - a}$$

提示：設任何 D 點在拱軸之左部。若拱跨全長受有均佈荷重時， $M_D = 0$ ，則圖 10—5(b) 中 M'_D 及 H_{y_D} 二感應圖之面積或其最大之豎距必數量相等，即，

$$\frac{x_D(L - x_D)}{L} = \frac{ab}{Lh} y_D$$

其中 y_D 之值為 $a, h, \tan \phi$ 及 x_D 之函數。其求法與例題 10—1 及 10—2 解答中所示者相似。以所得 y_D 之值代入上列方程中，並化簡而求得 x_D 之值。 D 點既為拱軸左部之任何一點，則上列條件之有效，應與 x_D 之值無關。即上所求得 x_D 之值，不應為 a, b, h 及 $\tan \phi$ 之函數。由是即可求得上列之方程。若該任何 D 點在拱軸之右部，無相似之方法，亦可求得上列之方程，故解答時設 D 點在拱軸之左部或右部，均無不可。注意例題 10—1 及 10—2 之三鉸拱軸與上列之條件正相符合，該拱軸之左右二部實係一拋物線，其左部較右部稍長。

習題 10—14。設活荷為中華二十級活重制（一軌之荷重），求例題 10—1 中拱骨右部 D 點彎矩 M_D ，切力 T_D ，及直接應力 N_D 之最大正號及負號值。

10—5. 三鉸拱骨之最外纖維應力及其感應圖 既知拱骨某截面之彎矩 M 及直接應力 N ，即可用下列短柱在偏心荷重下之應力公式，求其最外纖維應力。

$$f = \frac{N}{A} \pm \frac{Mc}{I} \quad (10-33)$$

其中 f 為最外纖維應力， N 為直接應力， M 為彎矩， c 為最外纖

維與拱軸之正距， A 及 I 為該截面之面積及慣性矩。

如圖 10—8(a)所示，設拱骨任何截面 D 之總合應力為拉力 R_D ，於 R_D 與該截面之相交點 F ，將 R_D 分解為切力 T_D 及直接應力 N_D ， N_D 與拱軸之正距為 e （即偏心距），故該截面之彎矩為 $N_D e$ ，拱外線之最大纖維應力 f_1 為，

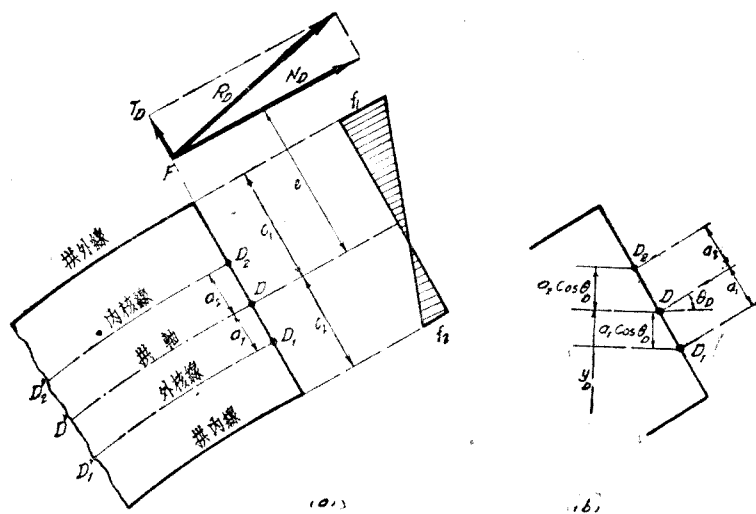


圖 10—8. 拱骨之最外纖維應力

$$f_1 = \frac{N_D}{A_D} + \frac{N_D e c_1}{I_D} = \frac{N_D (e + a_1) c_1}{I_D} \quad (10-34)$$

其中 $a_1 = I_D / A_D c_1$ ，同此，拱內線之最大纖維應力 f_2 為，

$$f_2 = \frac{N_D}{A_D} - \frac{N_D e c_2}{I_D} = - \frac{N_D (e - a_2) c_2}{I_D} \quad (10-35)$$

其中 $a_2 = I_D / A_D c_2$ 。採用方程(10—34) 及(10—35)時，須顧及 N_D 及 e 之正負號。如圖 10—8(a)所示，拉力 N_D 及偏心距 e

之在拱外線者，均假定係正號，但 c_1 及 c_2 無正負號之區別。至所得之 f_1 及 f_2 如係正號，則為拉應力，否則為壓應力。

如圖 10-8(a) 所示，於該面上量定 $DD_1 = a_1$ ， $DD_2 = a_2$ ，如是，則方程(10-34)及(10-35)之 $N_D(e+a_1)$ 及 $N_D(e-a_1)$ 各係總合應力 R_D 對於 D_1 及 D_2 二點之彎矩 M_{D_1} 及 M_{D_2} 。 N_D 及 e 既已假定均係正號，則該二彎矩均係負號，故方程(10-34)及(10-35)可各寫為

$$f_1 = -\frac{M_{D_1}c_1}{I_D} \quad (10-36)$$

$$f_2 = +\frac{M_{D_2}c_2}{I_D} \quad (10-37)$$

由是可知：無論拱骨某截面所受之總合應力如何，若以 D_1 及 D_2 二點為矩心而求其彎矩，則該截面拱外線及拱內線之纖維應力之計算，與梁之彎應力相同。

D_1 及 D_2 二點各稱為外核點及內核點，而 $D_1 D_2$ 稱為拱骨之核 (kernel)。若圖 10-8(a) 之 F 點在 $D_1 D_2$ 之內，即 $a_2 > e > (-a_1)$ ，則在任何情形之下， f_1 及 f_2 必係同號之應力。若拱骨之正截面係全跨一律，則 D_1 及 D_2 二點之軌跡，成為與拱軸平行之二曲線，各稱為外核線及內核線。若拱骨之正截面為長方，其深度為 a ，則

$$a_1 = a_2 = \frac{d}{6} \quad (10-38)$$

若拱骨為對稱式之鉸梁，計算其惰性矩時，並將其腹鉸之相當翼緣面積 $A_w/8$ [見方程(6-9)] 略去 則

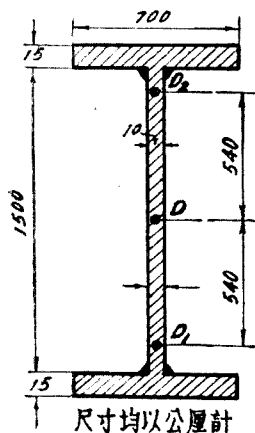
$$a_1 = a_2 = \frac{d}{2} \quad (10-39)$$

其中 d 爲上下二翼緣重心之距離，即核點 D_1 及 D_2 各在其上下翼緣之重心。

於拱骨之任何截面， I_D, c_1 及 c_2 均係一恆數。由方程(10—36)及(10—37)，可知最外纖維應力與其核點彎矩成正比例，而二者感應圖之關係亦同。核點彎矩感應圖之作法，與圖 10—3 相同，惟方程(10—18)中 y_D 之值，如圖 10—8 (b)所示，於求 M_D 時應減去 $a_1 \cos\theta_D$ ，於求 M_D 時應增加 $a_2 \cos\theta_D$ 。

由最外纖維應力之感應圖，即可定其值爲最大時之活荷重位置及其正負號之最大值。於研究拱骨各截面在活荷重下之強度時，最爲便利。

例題 10—3. 設例題 10—1 之三鉸拱骨係採用一鉚接鉚梁，其截面如



例題 10—3.

附圖所示，每一鉚梁所受之均佈荷重 w 爲 2 公噸/公尺，求 D 點之最外纖維應力。

解答：

$$\text{截面面積 } A_D = 3.6 \times 10^4 \text{ 公厘}^2$$

$$\text{截面慣性矩 } I_D = 1.49 \times 10^{10} \text{ 公厘}^4$$

$$c_1 = c_2 = 765 \text{ 公厘}$$

$$a_1 = a_2 = \frac{1.49 \times 10^{10}}{3.6 \times 10^4 \times 765} = 540 \text{ 公厘}$$

由例題 10—1,

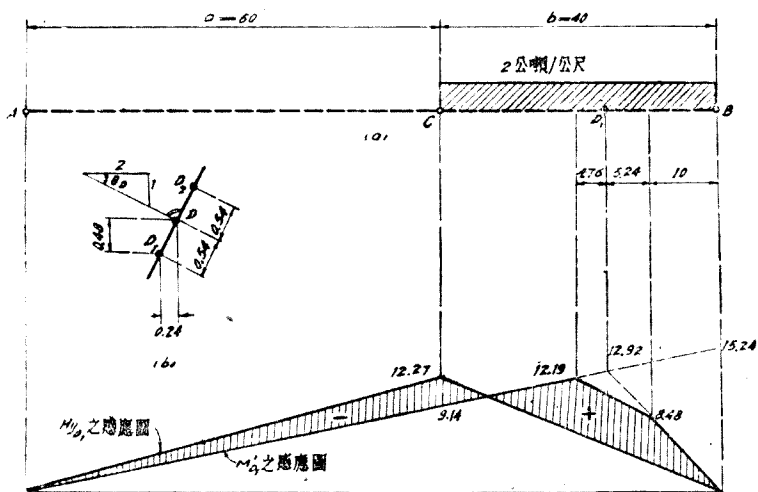
$$N_D = -4.74 \times 10^4 \text{ 公斤}$$

$$e = +4220 \text{ 公厘}$$

$$f_1 = \frac{-4.74 \times 10^4 (4220 + 540) 765}{1.49 \times 10^{10}} = -11.6 \text{ 公斤/公厘}^2$$

$$f_2 = -\frac{-4.74 \times 10^4 (4220 - 540) 765}{1.49 \times 10^{10}} = +9.0 \text{ 公斤/公厘}^2$$

例題 10-4. 用感應圖校核例題 10-3 中 f_1 之值。



(c) M_C 之感應圖

例題 10-4.

解答：附圖(a)代表例題 10-1 之三鉸拱骨，附圖(b)示核點 D_1 在 D 點之左 0.24 公尺 ($0.54 \times 0.44 = 0.24$)，由例題 10-2， $y_D = 12.75$ ，故 $y_{D_1} = 12.75 - 0.54 \times 0.894 = 12.27$ ，故

$$\frac{ab}{Lh} y_{D_1} = \frac{60 \times 40}{100 \times 24} \times 12.27 = 12.27$$

M_{D_1} 之感應圖如附圖(c)所示，其 CB 段面積之計算如下：

$$M_{D_1} \text{ 之感應圖：} \quad (9.14 + 12.19) \frac{20}{2} = +213.30$$

$$(12.19 + 8.48) \frac{10}{2} = +103.35$$

$$8.48 \times \frac{10}{2} = +42.40$$

$$+359.05$$

減去 $H y_{D_1}$ 之感應圖: $12.27 \times \frac{40}{2} = -245.40$

+113.65 公尺² 即 +1.14×10⁸ 公厘²

由方程(10-36),

$$f_1 = -\frac{1.14 \times 10^8 \times 2 \times 10^3 \times 0.765}{1.49 \times 10^{10}} = -11.6 \text{ 公斤/公厘}^2$$

與例題 10-3 所得之答案相符。

習題 10-15. 求例題 10-3 中三鉸拱骨 E 點之最外纖維應力。

習題 10-16. 用感應圖校核例題 10-3 中 f_2 之值。

習題 10-17. 設例題 10-1 三鉸拱骨每一鉸梁所受之活荷重為 2 公噸/公尺, 用感應圖求 D 及 E 二點 f_1 及 f_2 之最大值。

提示: D 點 f_1 之感應圖見例題 10-4, f_2 之感應圖見習題 10-16。

10-6. 三鉸拱桁架之應力及其感應圖 在任何荷重之下, 三鉸拱桁架之應力計算, 可採用第四章中所述之諸法, 及第 5-11 節 (圖 5-28) 之法, 無須贅述。

三鉸拱桁架 (及桁架拱骨) 中桿應力之最大正號與負號值及其活荷重位置, 可由其感應圖定之, 而此感應圖之計算, 則大半根據彎矩之數解法。至切力之數解法, 祇宜用之於腹桿之矩心在無窮之遠者 (例如圖 10-1(c) 桁架拱骨中之腹桿), 因其應力之計算根本不能採用彎矩法也。

圖 10-9(a) 示一非對稱式三鉸拱桁架, 設欲求其中任何下弦桿 d 之應力感應圖, 該 d 桿之矩心為 D 點, 其矩臂為 r_D , 則該桿之應力 S_d 當然等於其矩心 D 點之彎矩 M_D , 除以其矩臂 r_D , 其應力係拉力 (正號) 或壓力 (負號), 故

$$S_d = \pm \frac{M_D}{r_D} \quad (10-40)$$

以方程(10-18)中 M_D 之值代入上列方程中，並設 $S'_d = \pm M'_D$

T_D ，可得，

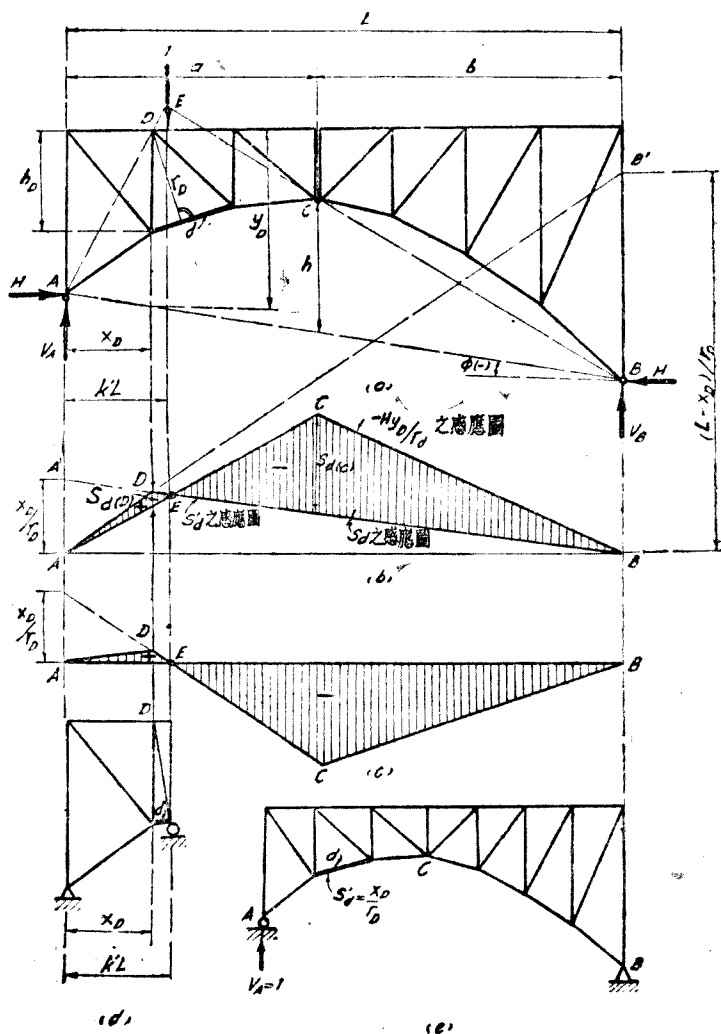


圖 10-9. 三鉸拱桁架弦桿應力之感應圖

$$S_d = S'_d \mp H \frac{y_D}{r_D} \quad (10-41)$$

其中 S'_d 等於將三鉸拱桁架視作一兩端支承之簡單跨桁架（即將其拱頂之鉸除去，其一端之鉸支座改為輻軸支座）時 d 桿之應力，方程（10—41）中之「 \mp 」號表示 S'_d 及 $H y_D / r_D$ 之正負號，常係相反，故三鉸拱桁架中任何 d 桿之應力 S 之計算，如可採用彎矩法，則 S_d 之感應圖等於 S'_d 與 $H y_D / r_D$ 二感應圖之代數和。故 S_d 之感應圖如圖 10—9 (b) 所示，其中 S'_d 感應圖左端之 $AA' = x_D / r_D$ ，即 $V_A = 1$ 時 S'_d 之值。同此，其右端之豎距 $BB' = (L - x_D) / r_D$ ，即 $V_B = 1$ 時 S'_d 之值。 S_d 感應圖中 D 及 C 點之豎距 $S_{d(D)}$ 及 $S_{d(C)}$ 之值，可由該圖用幾何方法求得如下：

$$S_{d(D)} = + \frac{1}{r_D} \times \frac{x_D}{L} \left(L - x_D - b \frac{y_D}{h} \right) \quad (10-42)$$

$$S_{d(C)} = - \frac{1}{r_D} \times \frac{b}{L} \left(a \frac{y_D}{h} - x_D \right) \quad (10-43)$$

$S_{d(D)}$ 為荷重在 D 點時 S_d 之值，即 d 桿之最大拉應力， $S_{d(C)}$ 為荷重在 C 點時 S_d 之值，即 d 桿之最大壓應力，注意方程（10—42）及（10—43）各等於方程（10—19）及（10—20）中 $M_{D(D)}$ 及 $M_{D(C)}$ 之值，除以矩臂 r_D ，故圖 10—9 (b) 中 S_d 為零之 E 點，與鉸 A 之平距離 $K^7 L$ ，亦可用方程（10—22）計算。 E 點之定法，亦可採用圖 10—9 (b) 所示之法，其理由與圖 10—5 (a) 相同，故荷重在 E 點之右時， S_d 為壓應力，荷重在 E 點之左時， S_d 為拉應力。

若弦桿 d 在拱桁架之右部，可將方程（10—42），（10—43）及

(10—22)中之 a 改爲 b , b 改爲 a , 則該方程等均可採用, 惟其中 x_D 及 $K'L$ 之值, 均應量自右支點之鉸 B 。

若所欲求得者爲 S_a 之平分應力 H_a , 則方程(10—41)可寫成

$$H_a = H'_a \mp H \frac{y_D}{h_D} \quad (10—44)$$

若 E 點之位置已定, 則 S_a 感應圖之作法, 亦可用代桁架法, 與前述之代梁法相同, 代桁架如圖 10—9(d) 所示, 得其中 d 桿之應力感應圖如圖 10—9(c) 之三角形 ADE 。將 DE 延長至 C 點, 作 CB , 即得三鉸拱桁架中 d 桿之感應圖, 如圖 10—9(c) 所示。

若 d 桿係腹桿, 其矩心爲 D 點, 如圖 10—10(a) 所示, 則其應力 S_a 之感應圖如圖 10—10(b) 所示, 其中 $AGFB$ 係 S_a 之感應圖作法與圖 8—6 相同, 其兩端之豎距 AA' 及 BB' 各等於 $V_A=1$ 及 $V_B=1$ 時 d 桿之應力, 此感應圖有二應力爲零之點 E 及 E' , E 點之定法與圖 10—9(a) 相同, E' 點之定法如下: 將 BC 延長得 F 點, 聯 FD 並延長得 G 點, 聯 AG 並延長與 BC 線之延長相交得 E' 點。 E' 點係一應力爲零之點, 可證明如下: 如圖 10—10(c) 中所示, 作一豎線代表單位集中荷重, 於其上下端各作一線與圖 10—10(a) 之 AGE' 及 BCE' 平行, 此二線相交得極點 P , 自極點 P 作一線與 GFD 平行。將圖 10—10(a) 之三角形 $E'GF$ 視作一索線多邊形, 若單位集中

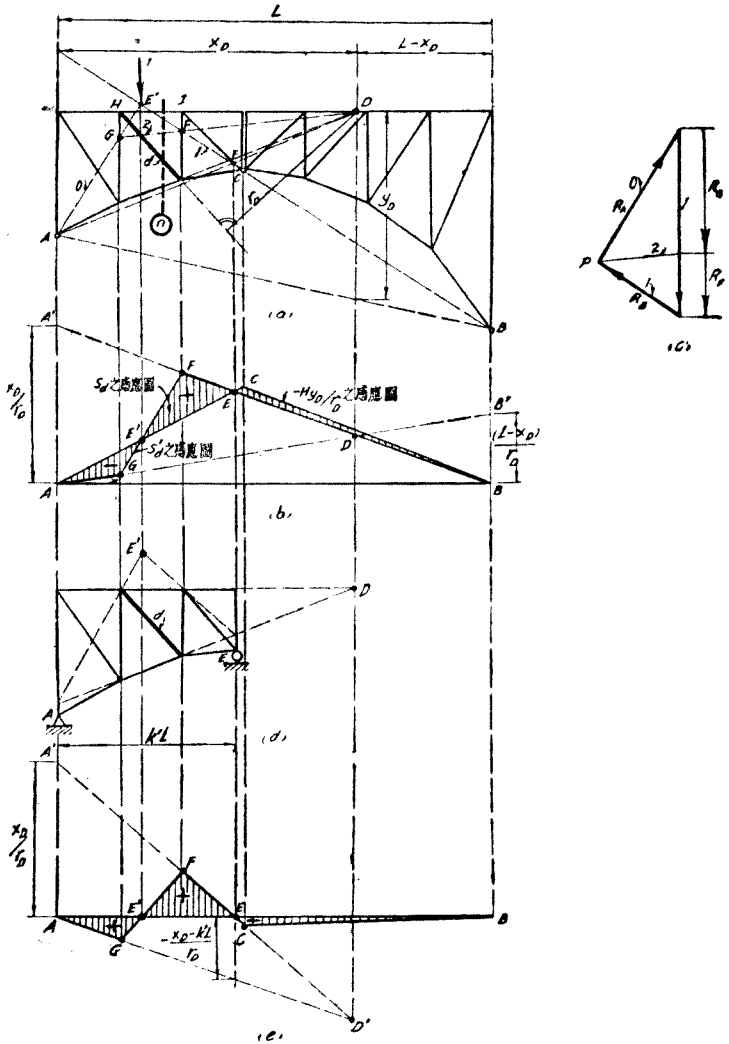


圖 10-10. 三鉸拱桁架腹桿應力之感應圖(一)

荷重在 E' 點，則由圖 10-10 (c) 可得拱兩端之反力 R_A 及 R_B 並 G 及 F 二點之橫梁反力 R_G 及 R_F 。求 d 桿之應力時，必

用截面②，而圖 10—10 (a)及(c)之索線 2 均表示截面②任何一邊所有外力之合力，惟索線 2 經過 d 桿之矩心 D 點，故 d 桿之應力為零。

如採用代桁架法，則其代桁架之跨長為 $K'L$ ，如圖 10—10 (d)所示。用與圖 8—5 (b)相似之方法，得此代桁架 d 桿之應力感應圖。此圖示 E' 點之定法，其方法及證明與圖 8—5 (a)相同。由是，得圖 10—10 (e)中之 $AGE'FE$ ，將 FE 延長與經過鉸 C 之豎線相交於 C 點，聯 CB ，即得原桁架 S_d 之感應圖。

圖 10—11 示豎桿 d 應力感應圖之作法。於圖 10—11 (a)中， E 點在鉸 C 之右，故圖 10—11 (b) S_d 之感應圖中，實際上無此應力為零之 E 點，其解釋見第 10—4 節及圖 10—6 (e)。注意圖 10—11 (b) 中 S_d 之感應圖大部份係負數，故 H_{y_D}/r_D 之感應圖全係正號，即根據前此所謂 S_d 及 H_{y_D}/r_D 之正負號常係相反之理。豎桿 d 之代桁架與圖 10—10 (d)相似，其跨長為 $K'L$ 。 S_d 感應圖用代桁架之作法，如圖 10—11 (c)所示。

由上述之討論及圖 10—9，10—10 及 10—11，可知三鉸拱桁架中任何桿之應力，如可用彎矩法求之，則其應力感應圖作法之最簡便步驟，大約如下：(1)作 H_{y_D}/r_D 之感應圖並注意其正負號；(2)將拱頂之鉸除去，並將桁架視作係兩端支承之簡單跨如圖 10—9 (e)，使 $V_A=1$ ，求得該桿之應力 $\pm \frac{x_D}{r_D}$ ，得

AA' ，再使 $V_B=1$ ，求得該桿之應力 $\pm \frac{L-x_D}{r_D}$ ，得豎距 BB' ，依二

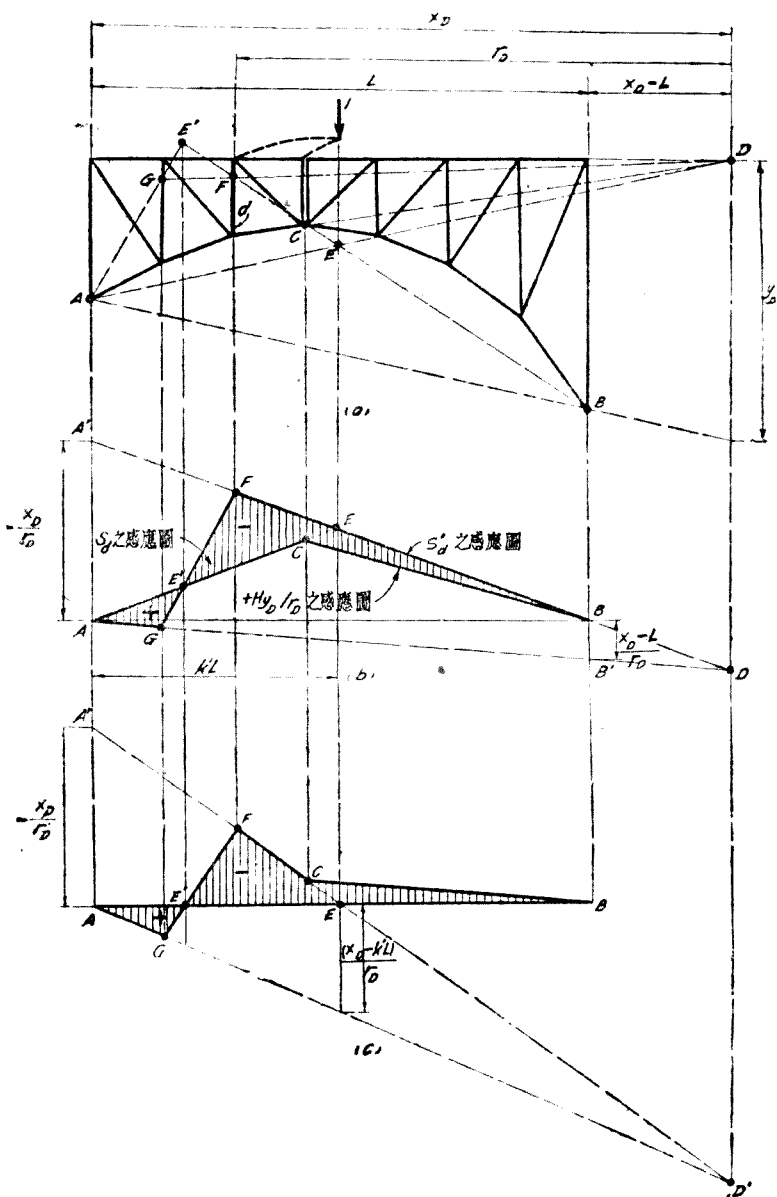


圖 10-11. 三鉸拱桁架內力之感應圖(二)

者之正負號，定 A' 及 B' 二點，視 AB' 及 $A'B$ 二線之交點 D 是否與該桿之矩心同在一豎線上，以資校核。由此得 S'_d 之感應圖；(3)上述二感應圖之代數和，即所求 S_d 之感應圖，其中應力為零之 E 及 E' 點可由圖 10—9 (a), 10—10 (a), 及 10—11 (a) 之作法校核之。

於某一三鉸拱桁架，若所欲求之應力感應圖之桿甚多，則第 (2) 步驟中應力之計算，可採用指數應力法，麥氏應力圖，或其他方法，將所有諸桿之該項應力共分二次求得，此外並可採用第 8—3 節縮減感應圖之法，其感應係數為 y_D/r_D ，如是則方程 10—41) 可寫成

$$S_d = \frac{y_D}{r_D} \left(\frac{x_D}{y_D} S'_d + H \right) \quad (10-45)$$

故圖 10—9 (b) 至 10—11 (b) 中之豎距 AA' 及 BB' 各變為 x_D/y_D 及 $(L-x_D)/y_D$ ，而 H 之感應圖可用之於所有諸桿之應力感應圖。惟採用縮減感應圖時，其豎距應乘以感應係數 y_D/r_D 。

桁架拱骨之上下弦常係平行，故其中腹桿應力之計算，不能採用彎矩法，必採用切力法。設圖 10—12 (a) 示一上下弦平行之桁架拱骨，設欲求其中腹桿 d 之應力 S_d ，可先求其與弦桿垂直之切力 T ，由圖 10—12 (b)，可得，

$$S_d = \frac{T}{\sin \alpha} \quad (10-46)$$

由方程 (10—25) 則

$$S_d = \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} [I'' - H(\tan\theta - \tan\phi)] \quad (10-47)$$

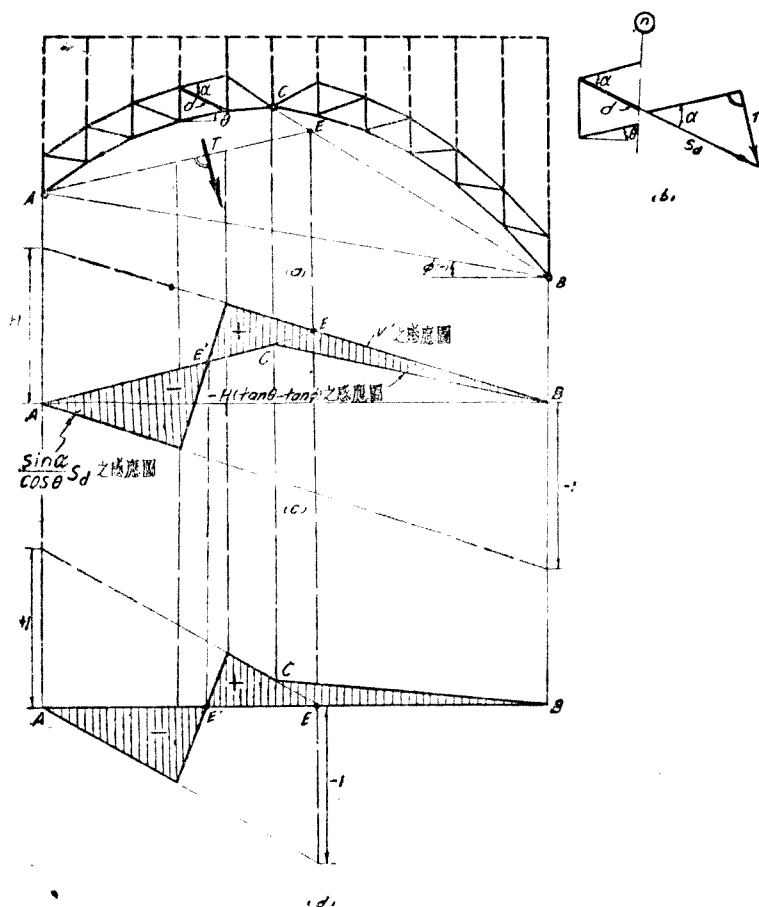
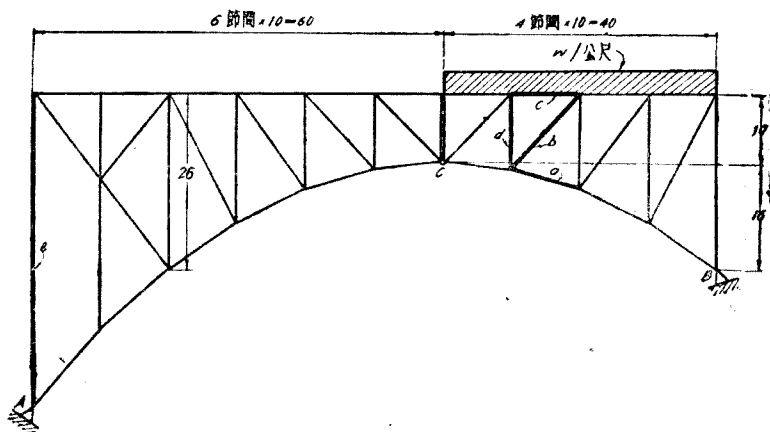


圖 10-12. 三鉸桁架拱骨腹桿應力之感應圖

由方程(10-17)可知 $(\sin\alpha/\cos\theta)S_d$ 之感應圖，等於與拱跨同長簡單梁豎切力 I'' 之感應圖減去 $H(\tan\theta - \tan\phi)$ 之感應圖故 $(\sin\alpha/\cos\theta)S_d$ 之感應圖如圖 10-12 (c) 所示，於圖 10-12

(a)中,作 AE 線與 d 桿所在節間之上下弦桿平行,並與 BC 線相交得 d 桿應力為零之 E 點。既知 E 點,則 d 桿應力之感應圖,亦可用代桁架法求之,其解答法如圖 10—12(d)所示。

習題 10—18. 某三鉸拱桁架如附圖所示,其下弦諸節點均在一以鉸 C 為頂點之拋物線上,設桁架之右部 BC 段受有均佈荷重 w /公尺,求 a, b, c, d 及 e 諸桿之應力。



習題 10—18.

習題 10—19. 與習題 10—18 相同,惟桁架之全跨受有均佈荷重 w /公尺。

習題 10—20. 用 $H y_D / r_D$ 之感應圖,求習題 10—18 中 a, b, c, d 及 e 諸桿之應力感應圖,並用各桿之矩心及應力為零之點,以資校核。

習題 10—21. 與習題 10—20 相同,惟用代桁架法。

習題 10—22. 用感應圖校核習題 10—18 及 10—19 之答案。

習題 10—23. 於圖 10—10 (a)作 AH 線及 EI 線,則此二線之交點亦與 E' 點同在一豎線上,用圖解法證明其正確。

習題 10—24. 設三鉸拱桁架與習題 10—18 中者相似,其下弦諸節點均在一以拱頂鉸為頂點之拋物線上,無論其各部之尺寸如何,及其二端之支點是否高度相同,若桁架之全跨受有均佈荷重,求證:

- (a) 所有上弦桿及斜桿之應力均為零；
 (b) 所有下弦桿之平分應力均相等；
 (c) 所有豎桿之應力均等於其上端之節點荷重。

提示：注意本習題下弦諸節點即在習題 10—13 中之拱軸上，則該習題所證明之答案，可否作為本習題所需證明之根據。

習題 10—25. 三鉸拱桁架與習題 10—18 者相同，由應力感應圖求 a , b , c , d 及 e 諸桿在中華二十級活荷重制（每一軌之荷重）下之最大拉應力及壓應力。

10—7. 特殊型式之三鉸拱橋 以上所論係三鉸拱橋之最通常型式，此外尚有若干特殊形式之三鉸拱橋，茲略論之如下。惟其中之三鉸懸臂拱橋一項，當於第十一章論懸臂橋時述及之。

(1) 拉桿三鉸拱橋 拉桿三鉸拱已見圖 5—29(b)，其與前述三鉸拱不同之點，即其兩支點之平分反力，由拉桿承受。因此，在任何荷重下，其兩支點之反力與簡單跨橋梁者相同。如圖 10—13(a) 所示，其拉桿之應力 S 為

$$S = \frac{H}{\cos\phi} \quad (10-48)$$

其中 H 之計算及其感應圖，均與前述者相同，其拱軸上任何點之彎矩，切力，直接應力，及最外纖維應力計算方法亦然。

圖 10—13 (b) 示一三跨之連續桁架橋，其中跨亦可按拉桿三鉸拱橋之原理以建造之，如圖 10—13 (c)，或 (d)，其中粗虛線 DE 表示拉桿，細虛線表示應力為零之桿。

如圖 10—14 (a) 所示，三鉸拱之拉桿亦可採二根傾度不同之桿 AF 及 BF ，並用一豎桿 CF ，如是，則此結構變為一桁架，惟其中 AC 及 BC 二桿係曲桿而非直桿，若於距鉸 C 以右

之極小距離處，取一截面，並以鉸為矩心，考慮該截面以右隔離體之平衡，則，

$$M_c = 0 = V_B b - Hh = M'_c - Hh$$

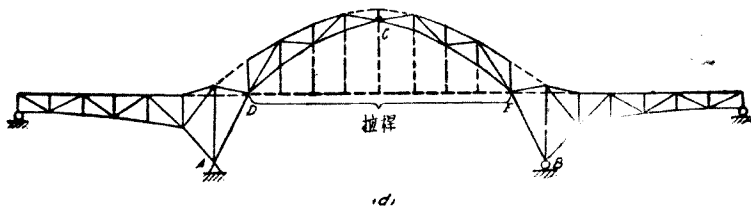
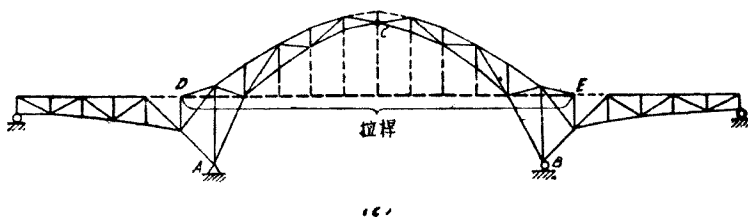
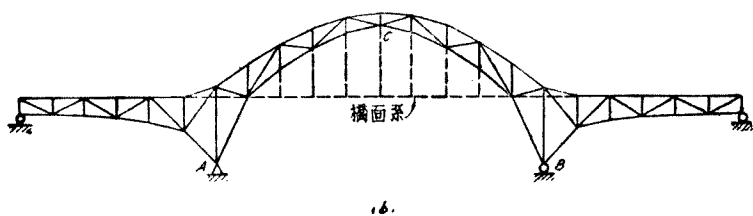
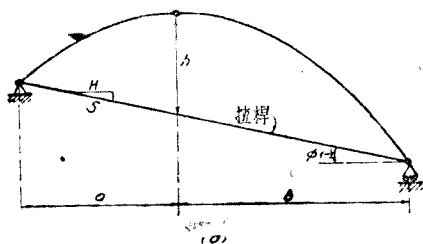


圖 10-13. 拉桿三鉸拱橋(一)

故
$$H = \frac{M_c}{h} \quad (10-12)$$

即前此所得之方程(10-12)，其中之 H 即拉桿 AF 及 BF 之平分應力。考慮節點 F 之平衡，作一力多邊形，如圖 10-14 (b)，即得 AF 、 BF 及 CF 三桿之應力 S_1 、 S_2 及 S_3 之值。由此圖可得，

$$S_1 = \frac{H}{\cos \alpha} \quad (10-49)$$

$$S_2 = \frac{H}{\cos \beta} \quad (10-50)$$

$$S_3 = H(\tan \alpha + \tan \beta) \quad (10-51)$$

既知二拉桿之平分應力 H ，則拱軸上任何 D 點之彎矩感應圖，如圖 10-14 (d) 所示，其作法與圖 10-5 (b) 相同，其中彎矩為零之 E 點，亦可用圖 10-14 (c) 之法求之。將 AF 延長與經過 B 點之豎線相交於 G 點，聯 CG 線，作 AD 線與 CG 線之延長相交，即得 E 點。證明如下：將圖 10-14 (c) 之三角形 AGE 視作一索線多邊形，於圖 10-14 (c) 作一豎線代表單位集中荷重，自其首尾作射線 1 及 0，各與 GE 及 AE 平行，得極點 P 及極距 H' 。自極點作射線 2 與 AG 平行，得荷重在 E 點時 A 及 B 二支點之豎反力 V_A 及 V_B ，由圖(c)及(e)中之相似三角形，可得，

$$\frac{H'}{V_A} = \frac{x_D}{y_D}$$

$$\frac{H'}{V_B} = \frac{b}{h}$$

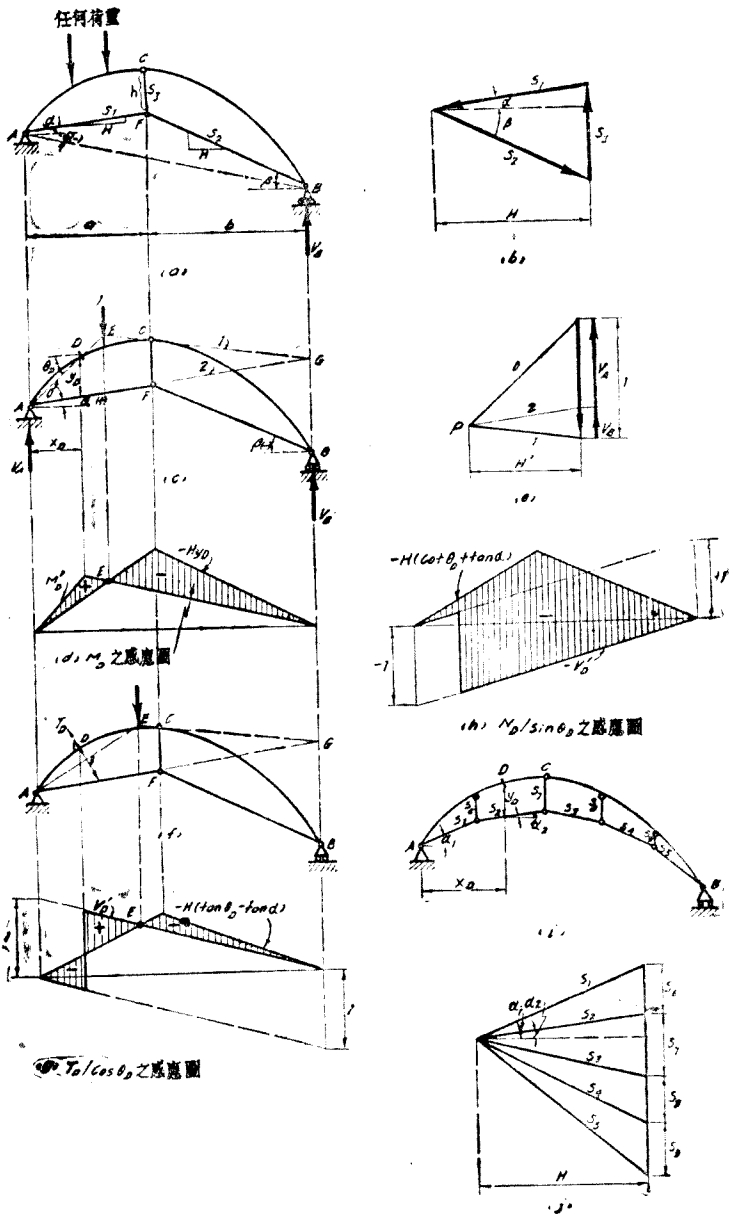


圖 10-14. 拉桿三鉸拱橋 (二)

由是可得

$$H'y_D = V_A x_D = M_D$$

$$H' = \frac{V_B b}{h} = \frac{M'_c}{h} = H$$

故 $M_D = M'_D - H y_D = H' y_D - H y_D = 0$

即荷重在 E 點時 D 點之彎矩 M_D 爲零。

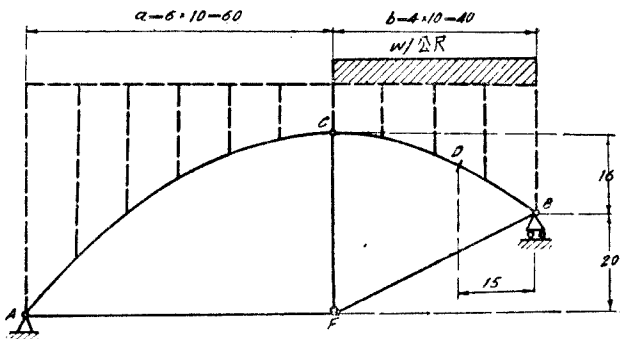
計算此項三鉸拱軸上任何 D 點之切力及直接應力時，方程 (10-25) 及 (10-26) 仍可採用，惟其中之 ϕ 應改爲 α 或 β ，視 D 點在拱之左部或右部而定， α 及 β 之正負號亦與前述 ϕ 之正負號相同，故於圖 10-14 (c) 中， α 爲正號而 β 爲負號，因此 D 點之切力 $T_D/\cos\theta_D$ 及直接應力 $N_D/\sin\theta_D$ 二感應圖之作法，各如圖 10-14 (j) 及 (h) 所示，各與圖 10-6 (b) 及 10-7 (b) 相同，圖 10-14 (g) 切力爲零之 E 點，亦可用圖 10-14 (f) 所示之法求之，其作法及證明與圖 10-6 (a) 及 10-14 (c) 相似。

若三鉸拱之拉桿分爲數段，且均不在一直線上，如圖 10-14 (i) 所示，則所有拉桿截斷之處，均應有一豎桿，因此所有拉桿之平分應力 H 均應相等，其計算法仍用方程 (10-12)。既知 H 之後，各桿之應力 S_1, S_2, \dots 等可用力多邊形求之，如圖 10-14 (j)，與圖 10-14 (b) 相同，或用與方程 (10-49) 至 (10-51) 相似之方程求之，至拱軸上任何 D 點之彎矩，切力，及直接應力之感應圖，亦均與圖 10-14 (d), (g) 及 (h) 相同，惟其中 y_D 及 α 之值，必採用與 D 點同在一段者，並應注意其正負號。

若圖 10-13 及圖 10-14 中之三鉸拱係拱桁架，則其中

任何桿之應力,可用彎矩法或切力法求之。至彎矩及切力之計算,當然與上述者相同,故不贅述。

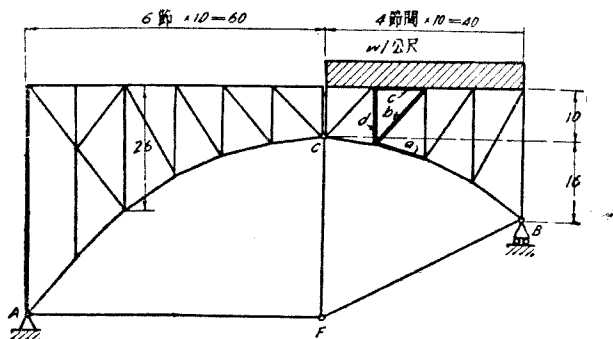
習題 10—26. 附圖示一拉桿三鉸拱,其拱軸及荷重均與例題 10—1 者相同,求 AF , BF 及 CF 三桿之應力。



習題 10—26.

習題 10—27. 求習題 10—26 拱軸上 D 點在所示活荷重下之彎矩 M_D , 切力 T_D , 及直接應力 N_D , 及總合應力 R_D 。

習題 10—28. 作習題 10—26 拱軸 D 點之彎矩, 切力, 及直接應力之感應圖, 並用所得之感應圖, 校核習題 10—27 中所得 M_D , T_D , 及 N_D 之值。



習題 10—29.

習題 10—29. 附圖示一拉桿三鉸拱桁架,其桁架及荷重均與習題 10—

18 者相同，求 a, b, c, d 及 e 諸桿之應力。

習題 10-30. 用 H_{yD}/r_D 之感應圖，求習題 10-29 中 a, b, c, d 及 e 諸桿之應力感應圖，並用各桿之矩心及應力為零之點，以資校核。

習題 10-31. 用感應圖校核習題 10-29 之答案。

(2) 三鉸加勁鏈桿拱 以三個或更多之鏈桿，成一拱形，如圖 10-15 (a) 與習題 2-15 之附圖相似，即得一不穩定之結

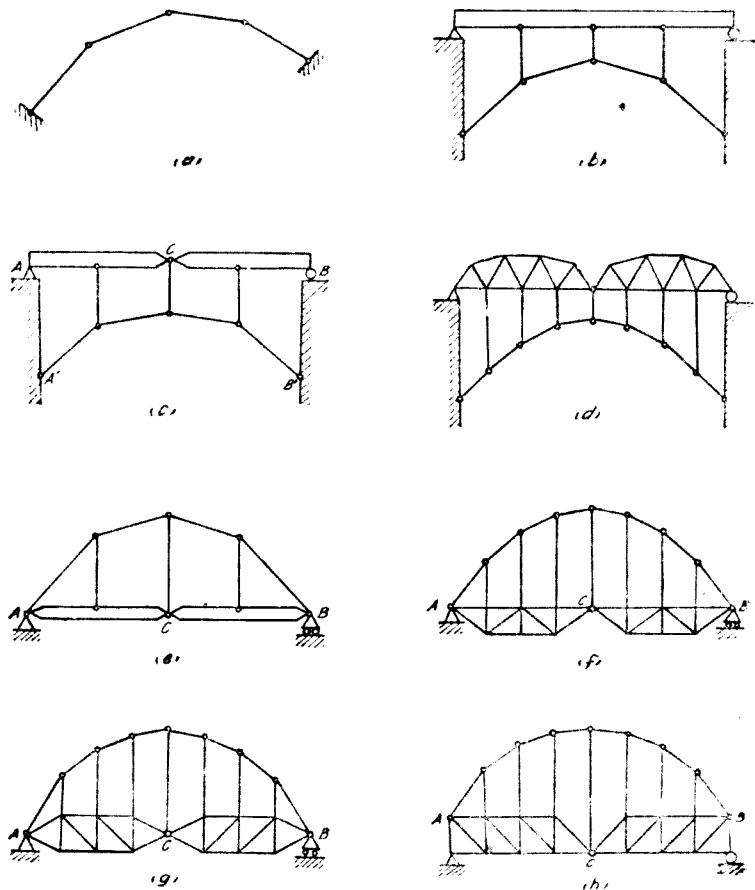


圖 10-15. 鏈桿拱橋之型式

構，其不穩定之次數，為鏈桿之數減二。若於圖 10—15 (a) 之鏈桿拱上，加一簡單梁，並用支柱與其節點相接合，如圖 10—15 (b)，〔與習題 4—31 (a) 之附圖相似〕則無論鏈桿之數如何，均成爲一次靜不定結構。若於該簡單梁之任何點加一鉸，如圖 10—15 (c)，即成爲一穩定而又靜定之結構，稱爲三鉸加勁鏈桿拱。

鏈桿拱之加勁，亦可採用任何型式之桁架，如圖 10—15 (d)，加勁梁或桁架，亦可置於鏈桿拱之下，如圖 10—15 (e) 至 (h)。注意 (e) 至 (g) 三圖中 A 、 B 及 C 三鉸均在一直線上，而 (h) 圖中則否。

圖 10—16 (a) 示一如圖 10—15 (c) 之任何非對稱式之三鉸加勁鏈桿拱，受有任何豎向重荷 P_1, P_2, \dots 等，其加勁梁 A 及 B 二端之反力各爲 V_A 及 V_B ，其鏈桿拱兩端之平反力爲 H ，其豎反力各爲 $H \tan \alpha$ 及 $H \tan \beta$ ，其作用點假設係在首尾鏈桿延長與經過 A 及 B 豎線之相交點 A' 及 B' 。以 B 點爲矩心，用 $\Sigma M=0$ ，考慮此結構全體之平衡，則

$$(V_A + H \tan \alpha)L - H(L \tan \phi) - M_B = 0 \quad (10-52)$$

其中 M_B 爲荷重 P_1, P_2, \dots 對於 B 點之力矩。故 M_B/L 即一與拱跨 AB 同長之簡單梁在相同荷重下 A 點之豎反力 V'_A 。故方程 (10—52) 可寫成，

$$V_A = V'_A - H(\tan \alpha - \tan \phi) \quad (10-53)$$

同此，

$$V_B = V'_B - H(\tan\beta + \tan\phi) \quad (10-54)$$

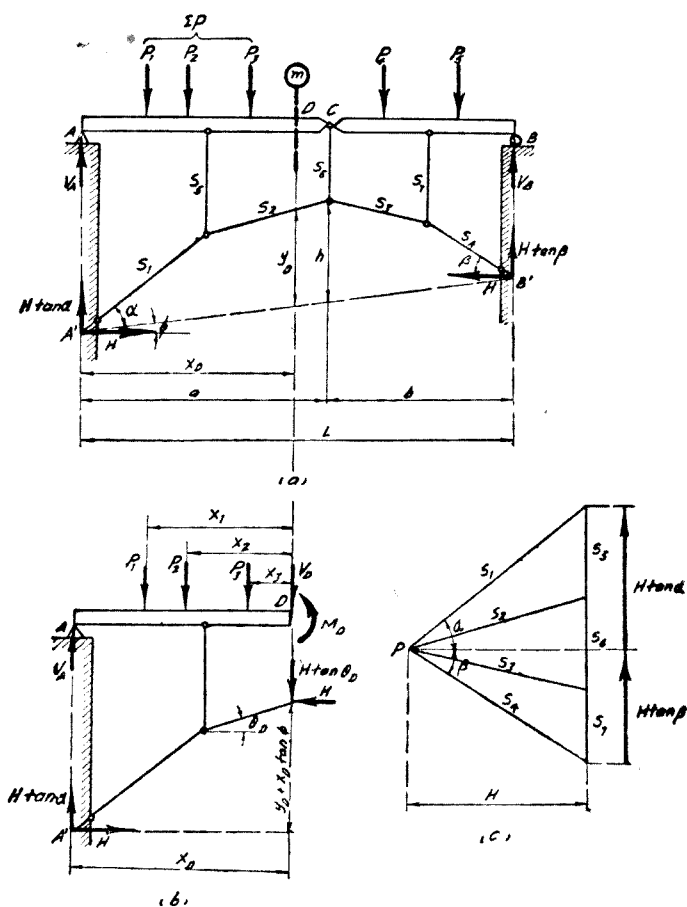


圖 10-16. 三鉸加勁鏈桿拱之反力切力及彎矩

其中 H 之值，須考慮加勁梁之彎矩以求之，注意方程 (10-53) 及 (10-54) 與方程 (10-17) 相似，如欲求加勁梁任何截面 D 之彎矩 M_D ，以一截面 \textcircled{m} 將結構之全體隔離為左右二部，考慮其

左邊隔離體之平衡，如圖 10—16 (b)，則

$$\begin{aligned} M_D &= (V_A + H \tan \alpha) x_D - H (y_D + x_D \tan \phi) - \Sigma P x \\ &= [V_A + H (\tan \alpha - \tan \phi)] x_D - \Sigma P x - H y_D \\ &= V'_A x_D - \Sigma P x - H y_D \end{aligned} \quad (10-55)$$

但 $V'_A x_D - \Sigma P x$ 等於一與拱跨 AB 同長簡單梁在相同荷重下截面 D 之彎矩 M'_D ，

故方程(10—55)可寫成，

$$M_D = M'_D - H y_D \quad (10-18)$$

設此任何截面 D 在鉸 C 之處，則，

$$M_C = 0 = M'_C - H h$$

故，

$$H = \frac{M'_C}{h} \quad (10-12)$$

故三鉸鏈桿拱平反力 H 及其加勁梁任何截面彎矩之求法，均與平常三鉸拱相同。

如欲求加勁梁任何截面之切力 V_D ，用 $\Sigma V = 0$ ，考慮圖 10—16 (b) 隔離體之平衡，則

$$\begin{aligned} V_D &= V_A + H \tan \alpha - H \tan \theta_D - \Sigma P \\ &= V'_A + H \tan \phi - H \tan \theta_D - \Sigma P \\ &= V'_A - \Sigma P - H (\tan \theta_D - \tan \phi) \end{aligned} \quad (10-56)$$

但 $V'_A - \Sigma P$ 等於一與拱跨 AB 同長簡單梁在相同荷重下截面 D 之切力 V'_D ，

故方程(10—56)可寫成

$$V_D = V'_D - H(\tan \theta_D - \tan \phi) \quad (10-57)$$

比較方程 10-57) 與 (10-25), 可得,

$$V_D = \frac{T_D}{\cos \theta_D} \quad (10-58)$$

故三鉸鏈桿拱加勁梁任何截面切力之求法, 與平常三鉸拱相似。

既知平反力 H 之後, 所有鏈桿及支柱之應力 S_1, S_2, \dots 等, 可用與方程 (10-49) 至 (10-51) 相似之方程求之, 或用力多邊形求之, 如圖 10-16 (c)。若 V_A, V_B , 及支柱之應力 S_5, S_6, \dots 等為已知, 則加勁梁任何截面之彎矩及切力亦可用通常之方法求之, 而不須採用方程 (10-18) 及 (10-57)。

圖 10-17 (b) 示加勁梁反力 V_A 之感應圖, 其作法係根據方程 (10-53), 即由 V'_A 之感應圖減去 $H(\tan \alpha - \tan \phi)$ 之感應圖。其中反力為零之 E_1 點, 可用圖 10-17 (a) 之法定之。作 $B'C'$ 線, 將左邊之首鏈桿延長與 $B'C'$ 之延長線相交, 即得 E_1 點。其證明如下: 設以一豎向單位集中荷重置於 E_1 點, 作力多邊形如圖 10-17 (c), 其中極距為 H , 而 0, 1 及 2 三射線各與圖 10-17 (a) 中之索線 $A'E_1 E_1B'$ 及 $A'B'$ 平行。由圖 (a) 及 (c) 之相似三角形, 得

$$\frac{H}{V'_B} = \frac{b}{h}$$

$$\text{故} \quad H = \frac{V'_B b}{h} = \frac{M'_c}{h} = H$$

故由圖 (c) 得

$$V_A = H(\tan \alpha - \tan \phi) = H(\tan \alpha - \tan \phi)$$

以上列 V_A 之值代入方程 10-53, 即得

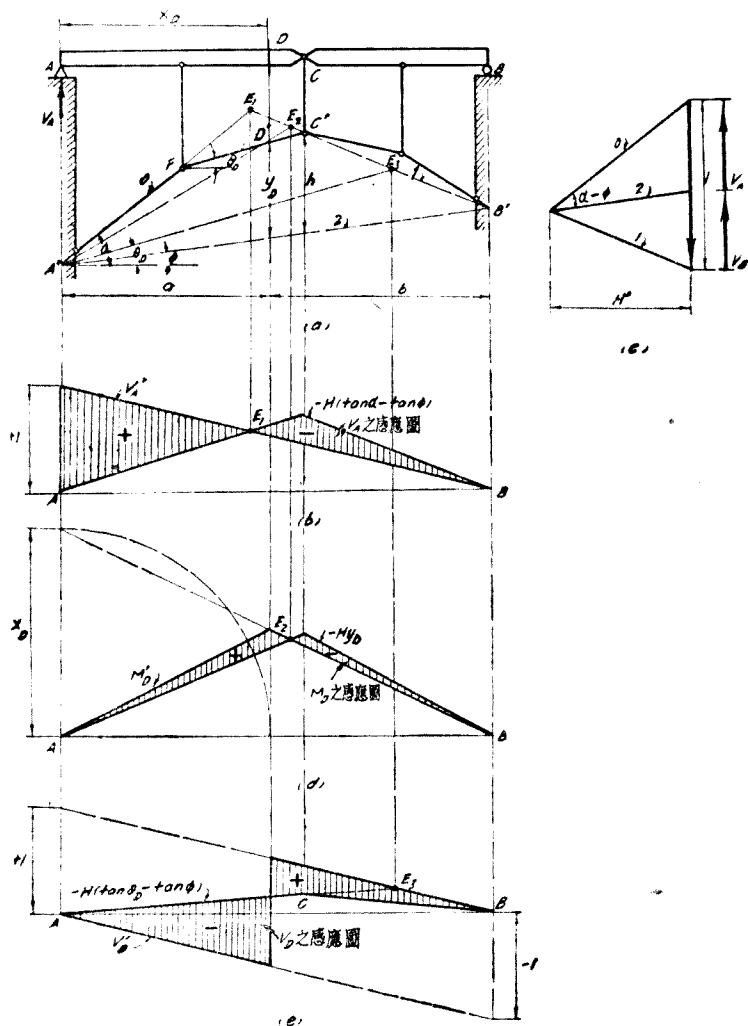


圖 10-17. 三鉸加勁鏈桿拱之感應圖(一)

$$V_A = 0$$

圖 10—17 (d) 示 M_D 之感應圖，其作法與圖 10—5 (b) 相同，其中 M_D 爲零之 E_2 點，亦可用圖 10—17 (a) 之法定之。圖 10—17 (e) 示 V_D 之感應圖，其作法與圖 10—6 (b) $T_D / \cos \theta_D$ 之感應圖相同，其中 V_D 爲零之 E_3 點，在 C 鉸之右，故實際不能存在。 E_3 之定法亦可如圖 10—17 (a)，其中 $A'E_3$ 與鏈桿 FC' 平行，其作法及意義均與圖 10—6 (e) 相同。既知 E_1, E_2 ，及 E_3 之位置，則 V_A, M_D 及 V_D 之感應圖之作法，均可採用代梁法。

若三鉸鏈桿拱之加勁係採用桁架，如圖 10—15 (d)，其中各桿應力之計算，必採用彎矩法或切力法，故方法與上述求加勁梁中彎矩及切力之方法相似，參閱圖 10—9 至 10—12 則更易明瞭。

若加勁梁置於鏈桿拱之下，如圖 10—15 (e)，其與圖 10—15 (c) 主要不同之點有二：(1) 圖 10—15 (c) 之支點 A 與 A' 及 B 與 B' 均合而爲一，故圖 10—15 (e) A 及 B 二支點之豎反力與簡單梁者相同，而鏈桿拱之平反力 H 由加勁梁承受。(2) 所有豎桿均係懸桿，其加勁梁彎矩及切力之計算，均與圖 10—16 及 10—17 相似。惟加勁梁既常係水平，故計算切力時方程 (10—57) 中之 ϕ 爲零。

圖 10—18 (a) 示一鏈桿拱，其加勁桁架在拱之下，三鉸 A, B, C 在一直線上，其下弦桿 $D'G$ 之應力 $S_{D'G}$ 等於節點 D 之彎

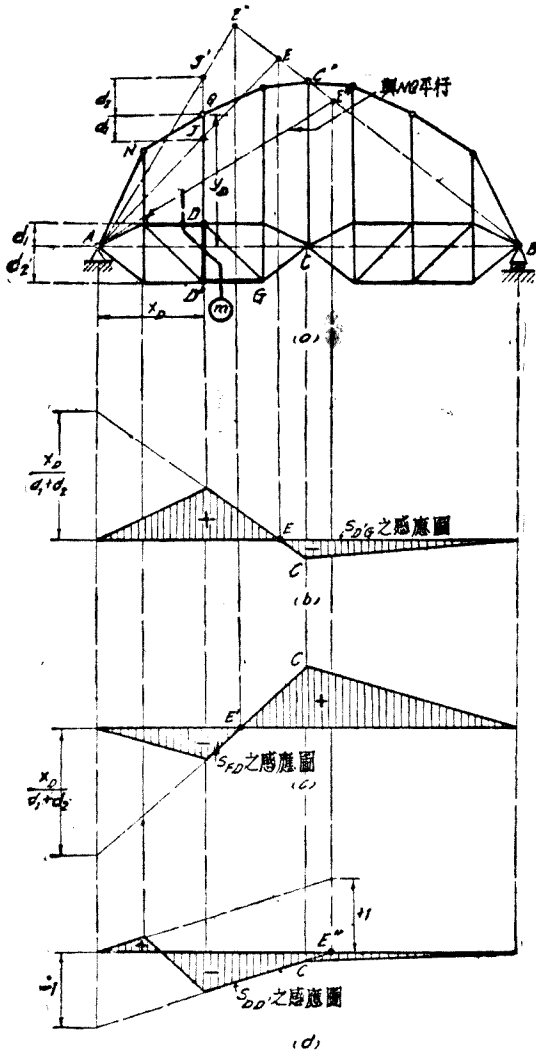


圖 10-18. 三鉸加勁鏈桿拱之感應圖(二)

矩， M_D 除以 d_1+d_2 ，但節點 D 在 ACB 直線之上，故，

$$M_D = M'_D - H(y_D - d_1) \quad (10-59)$$

因此 $S_{D'G}$ 爲零之 E 點，在 BC' 及 AJ 二線之交點。 J 點在 Q 點之下而 $JQ=d_1$ 。同此，上弦桿 FD 之應力 S_{FD} 等於節點 D' 之彎矩 $M_{D'}$ 除以 d_1+d_2 ，但節點 D' 在 ACB 直線之下，故，

$$M_{D'} = M_{D'} - H(y_D + d_2) \quad (10-60)$$

因此 S_{FD} 爲零之 E' 點，在 BC' 及 AJ' 之交點。 J' 點在 Q 點之上，而 $J'Q=d_2$ 。既知 E 及 E' 之位置，則 $S_{D'G}$ 及 S_{FD} 之感應圖，可用代梁法求之，如圖 10-18 (b) 及 (c)。豎桿 DD' 應力 $S_{DD'}$ 爲零之 E'' 點，在 BC' 與 AE'' 之交點。 AE'' 與鏈桿 NQ 平行。 $S_{DD'}$ 之感應圖如圖 10-18 (d)，亦係用代梁法。

圖 10-19 (a) 示另一鏈桿拱，其加勁桁架之中心鉸 C 在其兩端二鉸 A 及 B 之下，故方程 (10-12) 變爲，

$$H = \frac{M'_C}{h+d} \quad (10-61)$$

因此前述之 E ， E' 及 E'' 三點，不在 BC' 直線上而在 BC'' 直線上， $CC''=d$ 。 E ， E' 及 E'' 三點之定法，如圖 10-19 (a)，與圖 10-18 (a) 相同。 $D'G$ ， FD 及 DD' 三桿之應力 $S_{D'G}$ ， S_{FD} 及 $S_{DD'}$ 之感應圖，如圖 10-19 (b)，(c) 及 (d)，其作法亦用代梁法。

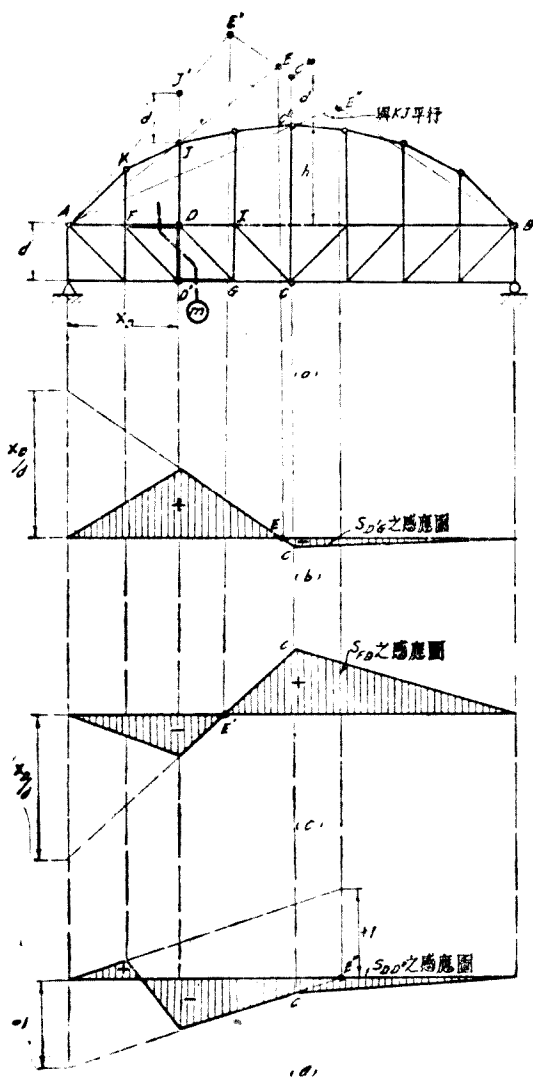
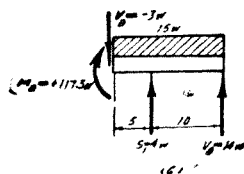
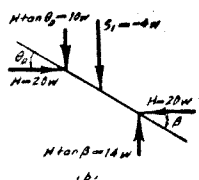
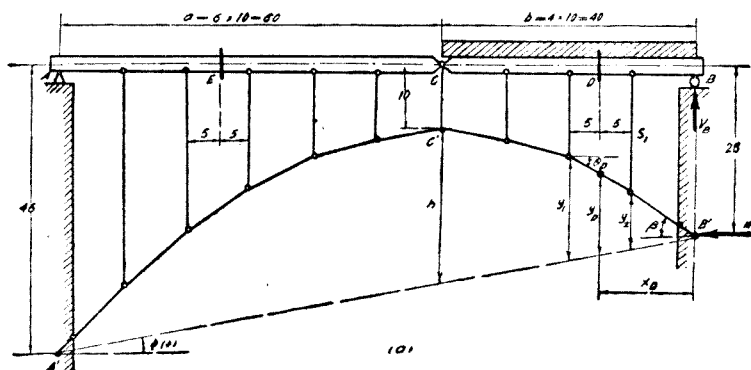


圖 10-19. 三鉸加勁鏈桿拱之感應圖(三)

例題 10-5. 某三鉸加勁鏈桿拱如附圖所示，其鏈桿拱之諸節點均在以 C' 為頂點之拋物線上，設加勁梁之右部 BC 段受有均佈荷重 w /公尺，求 D 點之彎矩及剪力。



例題 10-5.

解答：由附圖(a)之幾何性，可求得下列諸項：

$$h=24, \quad y_1=9, \quad y_2=16, \quad y_D = \frac{9+16}{2} = 12.5,$$

$$\tan \phi = 0.2, \quad \tan \theta_D = -0.5, \quad \tan \beta = 0.7$$

將此拱視作一簡單梁，得其兩端之反力 V'_A 及 V'_B 如下：

$$V'_A = 40w \times \frac{1}{5} = 8w, \quad V'_B = 40w \times \frac{4}{5} = 32w$$

用方程(10-12)得,

$$H = \frac{8w \times 60}{24} = 20w$$

由附圖(b)得 $S_1 = -4w$, 用方程(10-54)得,

$$V_B = 32w - 20(0.7 + 0.2) = 14w$$

如附圖(c)所示得,

$$V_D = 15w - (4w + 14w) = -8w$$

$$M_D = 14w \times 15 + 4w \times 5 - 15w \times 7.5 = +117.5w$$

V_D 及 M_D 之值亦可各用方程(10-57)及(10-18)直接求之, 但須先求得 V'_D 及 M'_D 之值。

$$V'_D = V'_B - 15w = 32w - 15w = -17w$$

$$M'_D = V'_B \times 15 - 15w \times 7.5 = +367.5w$$

用方程(10-57),

$$V_D = -17w - 20w(-0.5 - 0.2) = -3w$$

用方程(10-18),

$$M_D = 367.5w - 20w \times 12.5 = +117.5w$$

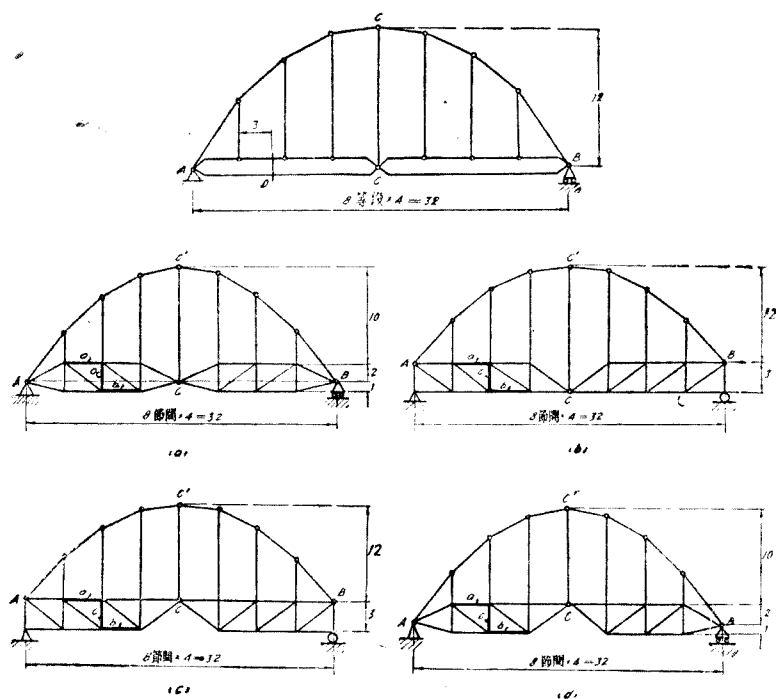
與前所得之值正相符。

習題 10-32. 用感應圖校核例題 10-5 之答案。

習題 10-33. 求例題 10-5 中加勁梁截面 E 之切力及彎矩, 並用感應圖校核所得之答案。

習題 10-34. 此鏈桿拱之諸節點均在以 C' 為頂點之拋物線上。求其加勁梁截面 D 之切力及彎矩感應圖, 並用代梁法校核之。

習題 10-35. 附圖所示鏈桿拱之諸節點均在以 C' 為頂點之拋物線上, 求其加勁桁架中 a, b 及 c 三桿之應力感應圖, 並用代桁架法校核之。



習題 10—35.

10—8. 三鉸拱橋在側力及縱力下之應力 圖 10—20 中之虛線示三鉸拱橋側支撐之各種佈置，圖 (a) 示桁架拱骨橋之側支撐。橋面系 ab 有側支撐，其側力由兩端之豎支架 aA 及 bB 傳達於橋之支座，但亦可使橋面系之側力由 a 端直接傳達於支座之 a' 點，如圖 (b)。如鉸 C 在桁架拱骨之下弦，則下弦應有側支撐，並於各節點處置一豎支架，使上弦各節點之側力，可以傳達於其下弦之節點，再由下弦之側支撐而傳達於橋之支座。

圖 (c) 示拱桁架之側支撐，其上弦之 c_1 及 c_2 二點，因必須

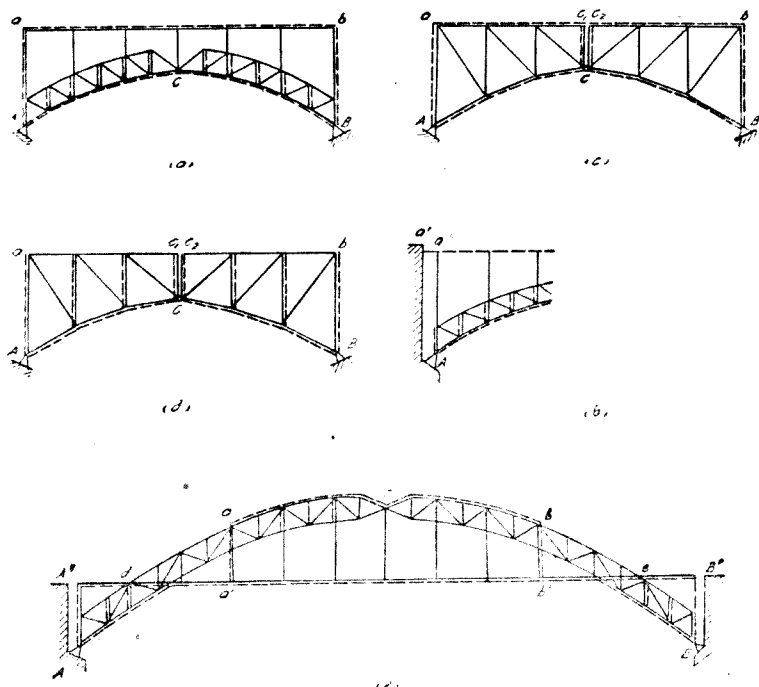


圖 10—20. 三鉸拱橋之側支撐

隔開，庶鉸 C 能有轉動之自由，故上弦 ac_1 段之側力經由豎支架 aA 及 c_1C 傳達於支座 A 及鉸 C ，後者再由下弦之側支撐而傳達於支座 A 及 B 。上弦 bc_2 段側力之傳達方法亦同。故 ac_1 及 bc_2 側支撐應力之計算，與兩端支承之單簡跨相同。但 a 及 b 端之側力亦可直接傳達於橋之支座，如圖 (b)，如是則 ac_1 及 bc_2 亦可各視作一固定於 a 及 b 端之懸臂梁而其上之側力一部必藉此懸臂作用而傳達於橋之支座，若將上弦之側支撐略去，而於每一節點置豎支架，如圖 (d)，則上弦之側力必由豎支架而傳達於下弦之側支撐再傳達於 A 及 B 二支座。

圖 10—20 (c) 及 (d) 雖各自成一側支撐之完全統系，但爲增加拱橋在側力下之剛勁起見，圖 (c) 之上弦側支撐及圖 (d) 之節點豎支架，常聯合採用，如是，則上弦之側力將分別由上述之二路而傳達於支座，其各路所傳遞側力之多寡，約與其剛勁成正比。因拱橋下弦之截面常較大，而上弦之側力經節點豎支架而傳達於支座之路程較短，故設計時可將上弦側力之大部分或全部視作係由此路程而傳達於支座，至上弦之側支撐，可視作係增加拱橋在側力下之剛勁，其設計常以能傳遞上弦側力三分之一至二分之一爲準。

圖 10—20 (c) 示穿越式拱橋側支撐之佈置。ab 段之側力經由橋門架 aa' 及 bb' 而傳達於橋面系之側支撐，Ad 及 Be 段之側力之一部分亦傳達於橋面系之側支撐，而橋面系所受側力均由豎支架 AA' 及 BB' 傳達於支座 A 及 B，或如圖 (b) 所示，直接傳達於支座亦可。至 ad 及 be 二段因不能有任何支撐，故其上之側力必經 a, d, b, e 四點而傳達於支座。

拱橋側支撐及豎支架之型式，均與 9—4 節所述者相同。若將側力之「應力歷程」決定後，其側支撐應力之計算，亦與 9—4 節所述者相同。

在側力之作用下，拱橋本身亦有應力，其情形與 9—7 及 9—8 節中所述者相似。試以拱桁架爲例，第一，活荷重上之側力傳達於上弦時，必因傾覆效應而使拱橋受有豎力。第二，如採用圖 10—20 (d) 之佈置，則活荷重上及上弦之側力，藉豎支

架而傳達於下弦時，亦必因傾覆效應而使拱橋受有豎力。第三，拱橋之下弦及其側支撐不在一平面之內，故亦使拱橋受有豎力及平力，其理由與 9—8 節所述者同，第一及第二二項，因傾覆效應所發生之豎力與圖 9—11 (a) 所示之 V 相同，惟其指向應相反。此三項豎力及平力，均使拱橋本身發生應力，其計算法均與 9—7 及 9—8 節所述者相似。

拱橋上之縱力支撐及其應力之計算，亦與 9—9 節所述者相似，其在縱力下反力之計算，如圖 10—21 所示，其中係假設縱力在拱橋之右部。如縱力在拱橋之左部，則 BD 線應經過 C 鉸，由此而定其反力 R_A 之作用線，如拱橋之左右二部均有縱力，可分別計算而後相加。

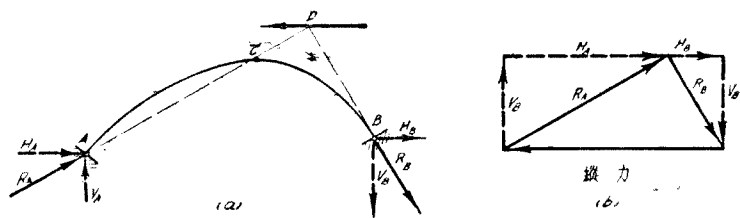
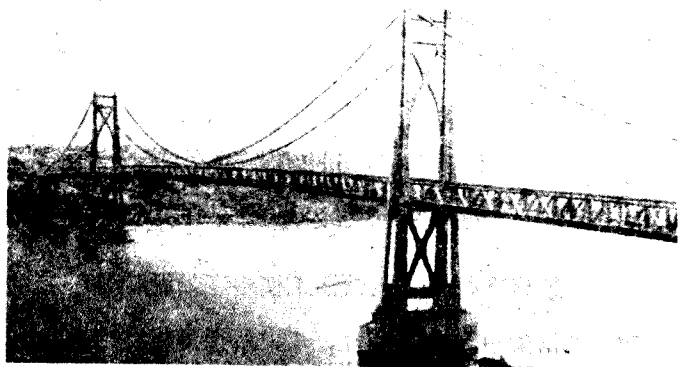


圖 10—21. 拱橋在縱力下之反力

10—9. 懸橋之型式 於結構工程中，如欲使材料之利用，極其經濟，則結構中之主要應力，須與所採用材料之性質，確切相宜。就鋼料而論，用作拉桿較用作壓桿為經濟，故鋼橋之主要應力如係拉力則最為經濟，而於長跨橋梁為尤然。懸橋之最大優點，即在其主要部份為鋼索，而鋼索之全部應力全係拉力。影片 XVIII 示加勁懸橋之例。

懸橋可分為不加勁及加勁兩大類，於不加勁之懸橋橋面系，係直接吊於懸索之上。於加勁之懸橋，有一加勁桁架吊於懸索之上，橋面系則支於加勁桁架之上。懸橋不加勁則懸索必因活荷重之集中或改變而變形，致橋面之坡度亦隨之改變，故此項橋梁之剛勁極微，祇可用之於不重要之橋梁（如行人橋）或活荷重較呆荷重甚輕之橋梁（如美國紐約最著名之華盛頓懸橋，其中跨長為 1,037 公尺，因其呆荷重較活荷重為大，故刻下暫時係一不加勁懸橋）。於加勁之懸橋，任何活荷重之集中或改變，因加勁桁架之作用，使活荷重仍係相當均佈於懸索，故懸索之形狀及橋面之坡度，均不致有較大之改變，因此，加勁懸橋可以用作鐵路橋梁。



影片 XVIII 加勁懸橋

懸橋通常有三跨，其中跨必係吊於懸索之上，至其兩旁跨亦可吊於懸索之上，如圖 10-22 (b), (c) 及 (e)，或不吊於懸索之上，如圖 10-22 (a), (d) 及 (f) 二跨及多跨之懸橋因不經濟，

故甚少採用。

懸橋之加勁方法甚多，最著者有二種：其一係用桁架以加勁橋面系，如圖 10—22 (a)(b)及(c)。圖(a)及(b)兩旁跨及中跨之加勁桁架均係簡單支承，惟圖(a)中跨加勁桁架有一中心鉸，故圖(a)稱三鉸加勁懸橋。圖(b)稱為二鉸加勁懸橋。圖(c)之中跨及兩旁跨之加勁桁架，係連續不斷（即無鉸），故稱為連續加勁懸橋。其二，係用桁架以加勁懸索，如圖 10—22 (d)及(e)。圖(d)為三鉸，圖(e)為二鉸，圖(f)加勁桁架之深度與懸索及橋面系間之距離相同，故係同時加勁橋面系及懸索，實即一倒懸之三鉸拱桁架橋也。

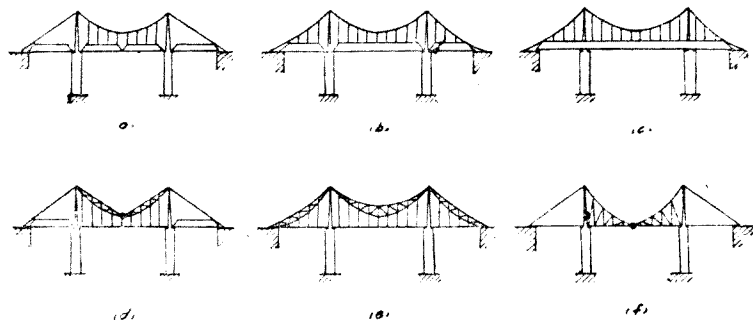


圖 10—22. 加勁懸橋之型式

於圖 10—22(a), (b)及(c)之懸橋，其懸索可用鋼絲所製之索，或鋼料之眼桿（即鏈桿）。於圖 10—22(d), (e)及(f)之懸橋，其懸索則以用鋼料之眼桿為宜。

圖 10—22(a), (d), 及(f)均屬於三鉸加勁懸橋，故均係靜定式。圖 10—22(b)及(e)均屬於二鉸加勁懸橋，故均係一次

靜不定式。至圖(c)之懸橋，則係三次靜不定式^①。本書之範圍既只限於靜定之結構，故以下論之加勁懸橋，亦只限於三鉸之靜定式，祇其中跨係吊於懸索上者，因旁跨如亦吊於懸索之上，並無甚優點，故不論及。

就加勁懸橋之剛勁而論，則無鉸者最大，二鉸者次之，三鉸者又次之，但懸橋雖有加勁，其剛勁常較任何他種橋梁為小，實乃懸橋之唯一最大之缺點。即以美國紐約著名之孟哈屯(Manhattan)懸橋為例，此橋為二鉸加勁式，其中跨之長度約440公尺，依計算之結果，則其中跨中線之最大向下變位約為4.6公尺，而其最大向上變位約為2.6公尺。如此橋採用三鉸加勁式，則上述之變位當增大約三分之一。雖結構之實際變位常較計算所得者為小，但懸橋之剛勁甚小，於此可見。

10—10. **懸索之形式及應力** 以一柔軟之繩，持其兩端而懸之，則在任何力系之作用下，其平衡形係一索線多邊形（參閱圖2—10）。若此力系係該繩本身之重量，勻均分佈其全長，其平衡形為一懸繩線 (catenary)。若此力系係一荷重，勻均分佈該繩兩端間之水平距離上，則其平衡形為一拋物線。懸橋橋面上之荷重，由若干距離較小之吊索而加於懸索之上，且橋面上之荷重常較懸索本身之重量為大，故橋面上之荷重，如係均佈於水平線，則懸索之平衡形，實際亦係一拋物線。以下所論，全以懸索係一拋物線為根據。

① 參閱習題 4—31 (e), (f) 及 (g)。

圖 10-23(a) 示一柔軟之索，懸於 A 及 B 二端， A 端較 B 端高 h' ， A 及 B 間之平距離為 L 。若此索受有一荷重 P /公尺，均佈於 L 之水平距離上，則此索之平衡形為一拋物線。若以 A 點為坐標之原點，以經過 A 點之豎線及 AB 線為坐標軸，則此拋物線之方程為

$$y = \frac{4h \times (L-x)}{L^2} \quad (10-62)$$

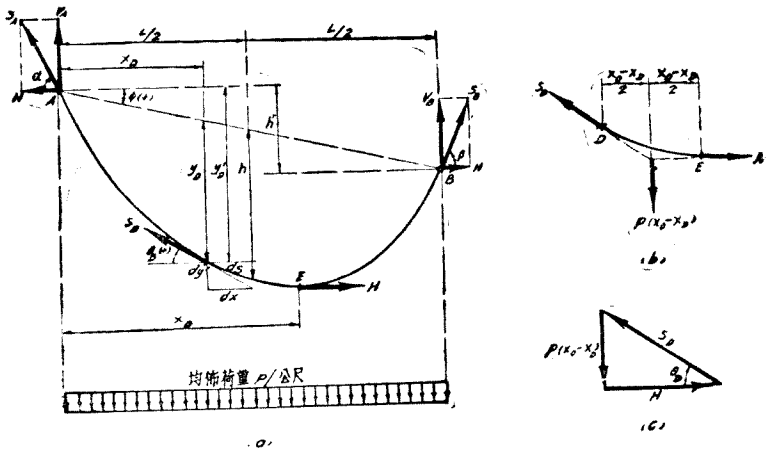


圖 10-23. 拋物線形懸索

若以經過 A 點之平豎線為坐標軸，則此拋物線之方程為

$$y' = y + x \tan \phi = \frac{4h \times (L-x)}{L^2} + x \tan \phi \quad (10-63)$$

其中 $\tan \phi = h'/L$ ，而 h 為此索於 AB 間中線量自 AB 線之下垂度，此索最低之點為 E ，其切線之傾度（即 dy'/dx ）為零，求方程(10-63)之微數 dy'/dx ，得

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{4h(L-2x)}{L^2} + \tan \phi \quad (10-64)$$

使方程(10-64)等於零，即可求得 E 點與 A 點之平距離 x 。如

下：

$$x_0 = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{h'}{4h} \right) \quad (10-65)$$

若 $h' = 0$ 則 $x_0 = L/2$ 。若 $h' > \pm 4h$ ，由方程 (10-65)，各得 $x_0 > L$ 及 $x_0 < 0$ ，即最低點 E 在 B 點之右，或 A 點之左，亦即此索實際無切線傾度為零之點。

此索之任何正截面既只能有拉應力，而不能有切力及彎矩，則此索任何點之拉應力之傾度，必與該點切線之傾度相同。設 E 點之拉應力為 H ，其傾度為水平。於此索上取任何一點如 D ，考慮此索 ED 段之平衡，如圖 10-23 (b)，並作力多邊形如圖 10-23 (c)，則

$$\frac{P(x_0 - x_D)}{H} = \tan \theta_D \quad (10-66)$$

於方程 (10-64) 中，使 $x = x_D$ ，則

$$\tan \theta_D = \frac{4h(L - 2x_D)}{L^2} + \tan \phi \quad (10-67)$$

以方程 (10-65) 中 x_0 之值及方程 (10-67) 中 $\tan \theta_D$ 代入方程 (10-66) 中，並化簡，可得

$$H = \frac{pL^2}{8h} \quad (10-68)$$

上得 H 之值，係此索中之最小拉應力，亦即此索任何點拉應力之平分應力，故任何 D 點之拉應力 S_D 為

$$S_D = H \frac{ds}{dx} = H \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-69)$$

於方程 (10-64)，使 $x = x_D$ ，並代入方程 (10-69) 中，得

$$S_D = H \left\{ 1 + \left[4h \left(\frac{1}{L} - \frac{2x_D}{L^2} \right) + \tan \phi \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10-70)$$

於方程 (10-70), 先後使 $x_D = 0$ 及 $x_D = L$ 各得此索 B 及 A 點之拉應力 S_B 及 S_A 如下:

$$S_A = H \left[1 + \left(\frac{4h}{L} + \tan \phi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-71)$$

$$S_B = H \left[1 + \left(\frac{4h}{L} - \tan \phi \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-72)$$

由是可知: 此索之最大拉應力在其最高之 A 點, 而其最小拉應力在其最低之 B 點。 注意圖 10-23 中之 AB 線之傾度為 ϕ , 而 ϕ 假定係正號, 故採用上列諸方程時, 如 B 點高於 A 點, 則 h' 及 ϕ 均為負號。此外懸索之切線於任何 D 點之傾度為 θ_D , θ_D 假定係正號, 如切線之傾斜度為 \angle 時 θ_D 假定係負號。注意上述 ϕ 及 θ_D 之正負號, 與前論三鉸拱時所採用者正相反。

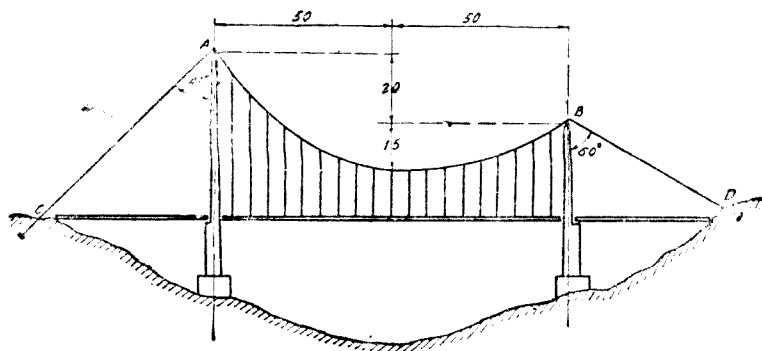
用 $\Sigma V = 0$ 於圖 10-23 (a) 中之 AE 段, 可得

$$V_A = px_0 = p \frac{L}{2} \left(1 + \frac{h'}{4h} \right) = p \frac{L}{2} + H \tan \phi \quad (10-73)$$

$$V_B = pL - V_A = p \frac{L}{2} \left(1 - \frac{h'}{4h} \right) = p \frac{L}{2} - H \tan \phi \quad (10-74)$$

注意於圖 10-23 (a) 中, S_B 為 H 及 V_B 之合力, S_A 為 H 及 V_A 之合力。並 $S_B = H \cos \beta$, $S_A = H \cos \alpha$, 而 $\tan \alpha$ 及 $\tan \beta$ 之值, 可用方程 (10-64) 求之。

習題 10-36. 附圖示一不加勁懸橋, 祇其中跨係吊於懸索之上。設每一索所受之呆荷重為 $w'/$ 公尺, 活荷重為 $w/$ 公尺, 皆係均佈荷重。求 (a) 懸索之最大與最小之拉應力及其所在之點。 (b) 塔頂 A 及 B 二點之最大豎反力 V_A 及 V_B 。



習題 10—36.

提示：求懸索之最大拉應力時，活荷重之位置應如何？求塔頂之反力時，注意懸索 AC 及 BD 亦有拉應力，而全索任何點拉應力之半應力 H 係一恆數。

10—11. 懸橋三鉸加勁梁之反力，切力，與彎矩及其感應圖

懸橋適為拱橋之反，其主要不同之點，即拱橋之主要應力為壓力，而懸橋之主要應力為拉力。此外拱橋之拱骨可為任何形式，而懸橋之採用橋面系加勁法者，常使其懸索之形式成一拋物線。但懸橋之採用懸索加勁法者，其懸索可採用任何合理之形式。故三鉸加勁懸橋之計算，與三鉸拱橋相似之點極多。以下所述之方法，係根據二項假定：第一，在任何荷重情形之下，懸索之形式均係一拋物線，故所有吊索之距離極小，而且相等，其應力可視作係一均佈荷重。第二，所有呆荷重皆全由懸索承受，加勁梁或桁架無呆應力，祇有活應力。第一假定完全根據 10—10 節懸索之理論，第二假定可由建造之方法實現之。

三鉸加勁懸橋雖有靜定之優點，但因剛勁較小，故採用者甚

少，據著者所知，三鉸懸橋之採用懸索加勁法者已不多見，至其採用橋面系加勁法者，恐祇有美國紐約之布魯克林 (Brooklyn) 懸橋。

圖 10-24 示三鉸加勁懸橋受有一集中荷重 P 其與支點 A' 之距離為 kL 。因加勁梁之作用，根據前述之第一項假定，此荷重 P 使所有之吊索發生相等之應力，其數量可以一向上之均佈荷重 p /公尺代替之。故此加勁梁 $A'B'$ 中雖有一鉸，但仍係一穩定之簡單梁。此簡單梁兩端之二反力 $V_{A'}$ 及 $V_{B'}$ ，可各分為二部：一部係由於荷重 P 之向上反力 $V'_{A'}$ 及 $V'_{B'}$ ；一部分係由於 p /公尺之向上反力 $pL/2$ ，故

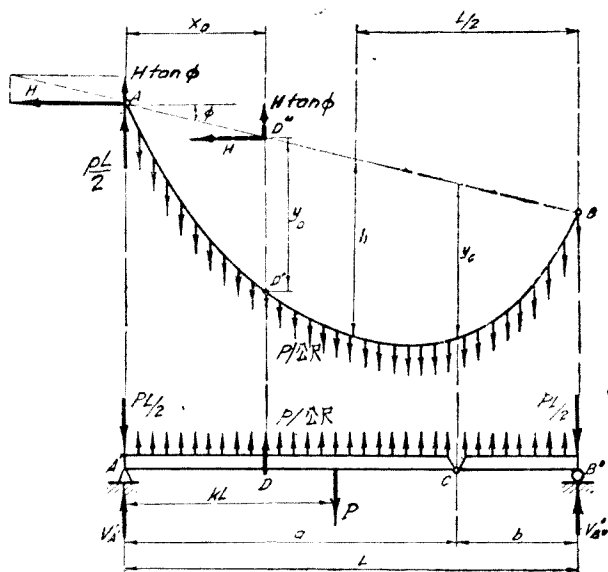


圖 10-24. 懸橋三鉸加勁梁之反力剪力及彎矩

$$V_{A'} = V'_{A'} - p \frac{L}{2} \quad (10-75)$$

$$V_{B'} = V'_{B'} - p \frac{L}{2} \quad (10-76)$$

故此加勁梁 $A'B'$ 任何截面 D 之切力 V_D 及彎矩 M_D 各為

$$V_D = V'_D - p \frac{L}{2} + px_D \quad (10-77)$$

$$M_D = M'_D - p \frac{Lx_D}{2} + p \frac{x_D^2}{2} \quad (10-78)$$

其中 V_D 及 M_D 各係將加勁梁視作簡單梁時截面 D 在荷重 P 下之切力及彎矩。

由方程(10-73)可知懸索 A 端之豎反力可分為二部：一部為 $pL/2$ ；一部為 $+H \tan \phi$ 。而 $+H \tan \phi$ 與該端平反力 H 合力之作用線係 AB 線。將此合力於其作用線 AB 上之 D' 點仍分解為二分力，因懸索不能抵抗彎矩，故 D' 點之彎矩為零，如是，則

$$M_{D'} = p \frac{Lx_D}{2} - p \frac{x_D^2}{2} - Hy_D = 0$$

$$\text{或} \quad -Hy_D = -p \frac{Lx_D}{2} + p \frac{x_D^2}{2} \quad (10-79)$$

以方程(10-79)之 $-Hy_D$ 之值代入方程(10-78)中，得

$$M_D = M'_D - Hy_D \quad (10-80)$$

注意方程(10-80)與前述三鉸拱橋時所得之方程(10-18)完全相同。但此加勁梁之 C 點有一鉸，其與 A' 點之距離為 a ，故

$$M_C = 0 = M'_C - Hy_C$$

或
$$H = \frac{M_c}{y_c} \quad (10-81)$$

其中 M_c 係將加勁梁視作簡單梁時截面 C 在荷重 P 下之彎矩， y_c 之值可用方程(10—62)求之。

$$y_c = \frac{4ha(L-a)}{L^2} \quad (10-82)$$

故

$$H = M_c \left(\frac{L^2}{4hab} \right) \quad (10-83)$$

既知 H 之後， p 之值可由方程(10—68)求之，

$$p = \frac{8h}{L^2} H \quad (10-84)$$

或以方程(10—83)之值代入，得

$$p = \frac{2M_c}{ab} \quad (10-85)$$

以方程(10—84)中 p 之值及方程(10—77)中， $\tan \theta_D$ 之值並由方程(10—67)中之關係，可得

$$V_D = V'_D - H(\tan \theta_D - \tan \phi) \quad (10-86)$$

注意方程(10—86)與前述三鉸加勁鏈桿時所得之方程(10—57)完全相同。惟方程(10—86)中 θ_D 及 ϕ 正負號之定法，恰與方程(10—57)者相反。

以方程(10—84)中 p 之值及方程(10—83)中 H 之值，代入方程(10—75)及(10—76)中，可得，

$$V_{A'} = V'_{A'} - \frac{4h}{L} H = V'_{A'} - \frac{M_c L}{ab} \quad (10-87)$$

$$V_{B'} = V_{B'}^0 - \frac{4h}{L}H = V_{B'}^0 - \frac{M_c L}{ab} \quad (10-88)$$

故計算懸橋之三鉸加勁梁之反力，切力及彎矩時，須先用方程(10-83)求得 H 之值，而後分別採用方程(10-87)，(10-88)，(10-86) 及 (10-80)。

若圖 10-24 中加勁梁 $A'B'$ 之全跨受有均佈荷重 w 公尺，則

$$M_c = \frac{wLa}{2} - \frac{wa^2}{2} = \frac{wab}{2} \quad (10-89)$$

代入方程(10-85)中，得，

$$p = w \quad (10-90)$$

如是則加勁梁所受之吊索之向上均佈荷重 p ，等於加於其上之向下均佈荷重 w 。故加勁梁之全跨受有均佈荷重時，其反力及任何截面之切力與彎矩均等於零。此項原則亦可由方程(10-87)，(10-88)，(10-86)，(10-80)，或圖 10-25 之感應圖證明之^①。前此曾假定加勁梁在呆荷重下無應力，若呆荷重係一加於全跨之均佈荷重，則此項假定正與實際相符。

懸橋加勁梁反力，切力，及彎矩感應圖之作法，全以方程(10-87)，(10-88)，(10-86) 及 (10-80) 為根據。圖 10-25 (a) 示一任何三鉸加勁懸橋，圖 (b) 示加勁梁左端豎反力 V_A 之感應圖，其作法係根據方程(10-87)，即由 V_A 之感應圖，減去 $4hH/L$ 或 $M_c L/ab$ 之感應圖。 M_c 之感應圖係一三角

① 其證明列為習題 10-37。

形,其最大豎距在鉸 C 之處,其值為 ab/L ,故 $M'_c L/ab$ 感應圖於鉸 C 處之豎距為 1。

圖 10-25 (c) 加勁梁任何截面 D 彎矩 M_D 之感應圖,其作法係根據方程(10-80),該方程可寫成

$$\frac{M_D}{y_D} = \frac{M'_D}{y_D} - H \quad (10-91)$$

由方程(10-83),可知 H 之感應圖為一三角形,其最大豎距在鉸 C 之處,其值如下:

$$M'_c \left(\frac{L^2}{4hab} \right) = \left(\frac{ab}{L} \right) \left(\frac{L^2}{4hab} \right) = \frac{L}{4h} \quad (10-92)$$

M_D/y_D 之感應圖亦為一三角形,其最大豎距在截面 D 之處,由方程(10-62)得該豎距之值如下:

$$\frac{M'_D}{y_D} = \frac{\frac{x_D (L-x_D)}{L}}{4h \left(\frac{x_D}{L} - \frac{x_D^2}{L^2} \right)} = \frac{L}{4h} \quad (10-93)$$

故 H 及 M'_D/y_D 二感應圖之最大豎距相等。自後者減去前者,即得 M_D/y_D 之感應圖。故採用此感應圖以求 M_D 時,其豎距及面積須乘以 y_D 之值。

圖 10-25 (d) 示加勁梁任何截面 D 切力 V_D 之感應圖,其作法係根據方程(10-86)。 H 之感應圖既係一三角形。根據方程(10-92),其鉸 C 處之最大豎距為 $L/4h$ 。根據方程(10-67) $\tan \theta_D - \tan \phi = 4h (L - 2x_D)/L^2$ 故 $H(\tan \theta_D + \tan \phi)$ 鉸 C 處之最大豎距為

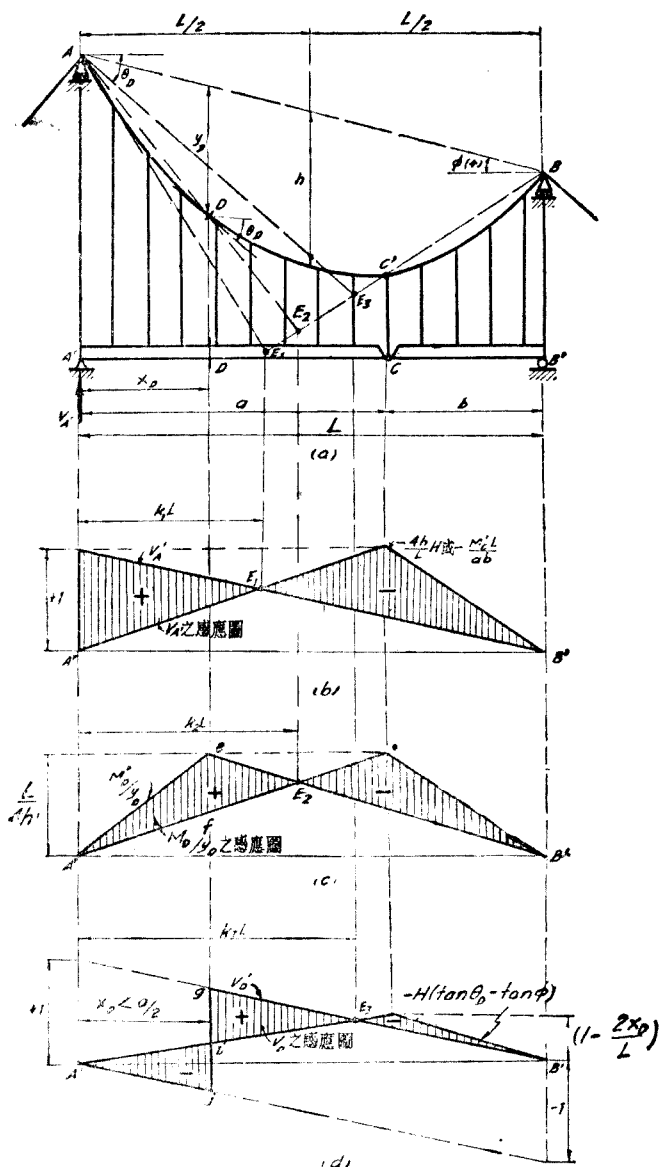


圖 10-25. 懸橋三鉸加勁梁之感應圖

$$\frac{L}{4h} \cdot \frac{4h(L-2x_D)}{L^2} = 1 - \frac{2x_D}{L} \quad (10-94)$$

圖 10—25(b), (c) 及 (d) 三感應圖豎距為零之點 E_1 E_2 及 E_3 亦可如圖 10—25 (a) 所示之法定之。即經過鉸 C 作一豎線得 C' 點。作 BC' 線並延長之, 作 AE_1 線與懸索於 A 點相切, AE_1 與 BC' 相交得 E_1 點。作 AD' 線與 BC' 相交得 E_2 點。作 AE_3 與懸索 D' 點之切線平行, AE_3 與 BC' 相交得 E_3 點。此三點定法及解釋均與圖 10—17 (a) 三鉸加勁鏈桿拱者極其相似, 故不再證明^①。

圖 10—25 (d) 中之 E_3 點亦可實際不存在, 與圖 10—17 (e) 中之 E_3 點相似。如是, 則 $H(\tan \theta_D - \tan \phi)$ 感應圖於鉸 C 處之豎距, 必小於 b/L 。由方程 (10—94), 則

$$1 - \frac{2x_D}{L} < \frac{b}{L} \quad (10-95)$$

由是得

$$x_D > \frac{a}{2} \quad (10-96)$$

故截面 D 與 A' 點之距離 $x_D > a/2$ 時, 則該截面切力感應圖之 E_3 點, 即實際不存在。反是, 若 $x_D < a/2$ 時, 則 E_3 即實際存在, 故於圖 10—25(d) 中, $x_D < a/2$ 。

E_1, E_2 及 E_3 之點與 A' 點之平距離 k_1L, k_2L , 及 k_3L 亦可各由其感應圖, 用幾何學求之。如是, 則得結果如下:

① 其證明列為習題 10—8。

$$k_1 = \frac{a}{L+a} \quad (10-97)$$

$$k_2 = \frac{a}{L+a-x_D} \quad (10-98)$$

$$k_3 = \frac{a}{L+a-2x_D} \quad (10-99)$$

注意以上 k_1, k_2 及 k_3 之值, 均與 ϕ 之值無關。

既知 E_1, E_2 及 E_3 三點與 A' 點之平距離後, 所有 V_A , M_D 及 V_D 之感應圖, 均可用代梁法求之。其方法與前述關於三鉸拱橋者相似。

若懸橋之橋面系加勁係採用桁架, 其中各桿應力之計算, 必採用彎矩法或切力法, 故方法與上述求加勁梁之彎矩及切力之方法相似。

若懸橋採用懸索加勁法, 如圖 10-22 (d), 則此加勁懸索之三鉸桁架, 即成一倒置之三鉸桁架拱骨。若懸橋之型式如圖 10-22 (f), 即成一倒置之三鉸拱桁架, 二者應力之計算, 均與前述三鉸拱橋者完全相似。

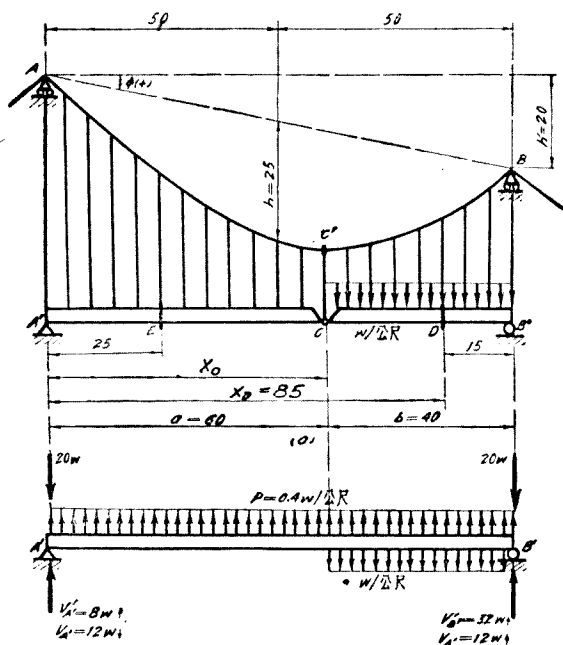
習題 10-37. 用下列二法證明懸橋加勁之全跨受有均佈荷重時, 其反力及任何截面之切力與彎矩均為零。

(a) 分別用方程 (10-87), (10-88), (10-86) 及 (10-80)。

(b) 用圖 10-25 中加勁梁之反力、切力及彎矩感應圖。

習題 10-38. 以最簡捷之方法, 證明圖 10-25 (a) 中定 E_1, E_2 及 E_3 三點之方法係正確無誤。

例題 10-6. 某三鉸加勁懸橋及其荷重, 如附圖 (a) 所示。求 (a) 懸索之最小及最大拉應力, 及其所在點。及 (b) 加勁梁兩端之豎反力 V_A 及 V_B , 離截面 D 之切力 V_D 及彎矩 M_D 。



例題 10-6.

解答: (a) 先將加勁梁視作一簡單梁, 求 A' 及 B' 端之豎反力 V'_A 及 V'_B , 得,

$$V'_A = 40w \times \frac{1}{5} = 8w$$

$$V'_B = 40w \times \frac{4}{5} = 32w$$

$$M'_C = 60V'_A = 60 \times 8w = 480w$$

用方程(10-83), 得,

$$H = \frac{480w \times 100 \times 100}{4 \times 25 \times 60 \times 40} = 20w$$

即懸索之最小拉應力, 其所在點係懸索最低之 C' 點, 用方程(10-65), 得 C' 點與 A 或 A' 之平距離 x_0 如下:

$$x_0 = \frac{100}{2} \left(1 - \frac{-20}{4 \times 25} \right) = 60$$

懸索之最大拉應力在其最高之 A 點, 注意 $\tan \phi = 0.2$, 用方程(10-71), 得,

$$S_A = 20w \left[1 + \left(\frac{4 \times 25}{100} + 0.2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{31.24w}}$$

(b) 用方程(10-85), 得,

$$p = \frac{2 \times 480}{60 \times 40} = 0.4w/\text{公尺}$$

如附圖(b)所示得

$$V_A = \underline{\underline{12w}} \downarrow$$

$$V_B = \underline{\underline{12w}} \uparrow$$

$$V_D = -12w + (1 - 0.4)w \times 15 = \underline{\underline{-3w}}$$

$$M_D = 12w \times 15 - 15(1 - 0.4)w \times 7.5 = \underline{\underline{+112.5w}}$$

如用方程(10-86)及(10-80)計算 V_D 及 M_D , 則須先求 V'_D 及 M'_D 之值如下:

$$V'_D = -32w + 15w = -17w$$

$$M'_D = 15 \times 32w - 7.5 \times 15w = +367.5w$$

$$\tan \phi = -0.2 \quad x_D = 85$$

用方程(10-67), 得,

$$\tan \theta_D = \frac{4 \times 25(100 - 2 \times 85)}{100 \times 100} + 0.2 = -0.5$$

用方程(10-62), 得,

$$y_D = \frac{4 \times 25 \times 85 \times 15}{100 \times 100} = 12.75$$

用方程(10-86), 得,

$$V_D = -17w - 20w(-0.5 - 0.2) = \underline{\underline{-3w}}$$

用方程(10-80), 得,

$$M_D = +367.5w - 20w \times 12.75 = \underline{\underline{+112.5w}}$$

與前所得之答案正相符。

習題 10-39. 作例題 10-6 三鉸加勁梁在所示荷重下切力圖及彎矩圖。

提示: 如例題 10-16 附圖(b)所示, 將加勁梁視作一簡單梁, 分別求 p 及 w 之切力圖及彎矩圖而後相加(代數加法), 即得所求之切力圖及彎矩

圖。

習題 10-40. 懸橋與例題 10-6 相同，惟荷重 w /公尺在加勁梁之 $A'C$ 段。求 (a) 懸索之最小及最大拉應力及其所在點，及 (b) 加勁梁兩端之豎反力 V_A 及 V_B 並截面 E 之切力 V_E 及彎矩 M_E 。

習題 10-41. 用感應圖校核例題 10-6 (b) 之答案。

習題 10-42. 用代梁法求例題 10-6 懸橋加勁梁 V_A , V_B , 及 M_D 之感應圖。

10-12. 懸橋三鉸加勁梁之最大反力，切力及彎矩 前論三鉸拱橋時，因拱軸之形式不定之故，無法求得公式或作圖以表示其所有截面之最大切力及最大彎矩。懸橋之懸索既概係一拋物線形，若活荷重係一簡單荷重如單個集中荷重或均佈荷重，則其三鉸加勁梁之最大反力，及其所有截面之最大切力及彎矩，均可用公式或圖表之。此項最大切力及最大彎矩圖，可供設計加勁梁時參考之用。

懸橋加勁梁之最大反力，切力，及彎矩之公式，可由前得之各項公式或感應圖求之。茲以活荷重係均佈荷重 w /公尺為例^①，由其感應圖分別求之如下。

(1) 最大反力 由圖 10-25 (b) 可知 V_A 之正號 (即指向向上) 值為最大時，則荷重 w 必置於 $A'E_1$ 段； V_A 之負號 (即指向向下) 值為最大時，則荷重 w 必置於 E_1B' 段，如圖 10-26 (b) 所示。由圖 10-25 (b) 感應圖之面積，可得，

$$\text{最大正號} \quad V_A = \frac{wk_1L}{2} = \frac{waL}{2(L+a)} \uparrow \quad (10-100)$$

① 單個集中荷重之例，列為習題 10-44。

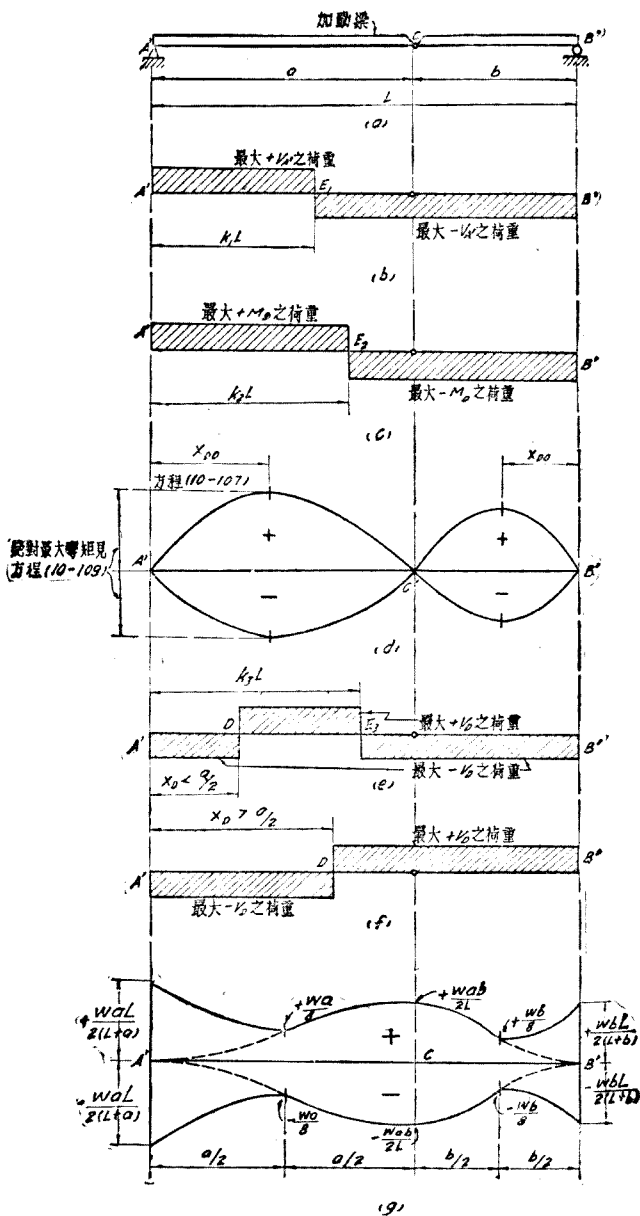


圖 10-26. 懸橋三鉸加動梁之最大反力最大切力及最大彎矩

前已述明，加勁梁之全跨有均佈荷重時，則其兩端之反力均爲零，故圖 10-26 (b) 中 E_1B' 段有荷重時 V_A 之最大負號值必等於 $A'E_1$ 段有荷重時 V_A 之最大正號值。因此，

$$\text{最大負號 } V_A = -\frac{wk_1L}{2} = -\frac{waL}{2(L+a)} \downarrow \quad (10-101)$$

(2) 最大彎矩 由圖 10-25 (c) 可知 M_D 之正號值爲最大時，荷重 w 必置於 $A'E_2$ 段； M_D 之負號值爲最大時，荷重 w 必置於 E_2B' 段，如圖 10-26 (c) 所示。由 M_D 之感應圖，則

$$\text{最大正號 } M_D = \frac{wk_2L(ef)y_D}{2} \quad (10-102)$$

$$ef = \frac{L}{4h} - \frac{x_D}{a} \cdot \frac{L}{4h} = \frac{L}{4h} \left(1 - \frac{x_D}{L}\right) \quad (10-103)$$

以上列 ef 之值，方程 (10-62) 中 y_D (或 y) 之值，及方程 (10-98) 中 k_2 之值代入方程 (10-102) 中，並化簡，可得，

$$\text{最大正號 } M_D = \frac{wx_D(L-x_D)(a-x_D)}{2(L+a-x_D)} \quad (10-104)$$

前已述明，加勁梁之全跨有均佈荷重時，則其任何截面之彎矩均爲零，故圖 10-26 (c) 中 E_2B' 段有荷重時 M_D 之最大負號值必等於 $A'E_2$ 段有荷重時 M_D 之最大正號值，因此，

$$\text{最大負號 } M_D = -\frac{wx_D(L-x_D)(a-x_D)}{2(L+a-x_D)} \quad (10-105)$$

方程 (10-104) 及 (10-105) 祇限於截面 D 在 $A'C$ 段，即 $x_D < a$ 。若截面 D 在 CB' 段，可將上列二方程之 a 改爲 b ，並使 x_D

量自右支點 B' ，則上列諸方程均可採用上列二方程所表示者為一三次曲線，於 $x_D=0$ 及 $x_D=a$ （即鉸 C 之處）， M_D 之值均為零，故加勁梁全長之最大正負號彎矩圖如圖 10-26(d) 所示。如欲求其絕對最大正負號彎矩，可由方程 (10-104) 求得紀數 dM_D/dx_D 之值如下：

$$\frac{dM_D}{dx_D} = w \left[\frac{La(L+a)}{2(L+a-x_D)^2} - x_D \right] \quad (10-106)$$

使方程 (10-106) 等於零，即可求得絕對最大正負號彎矩所在截面與 A' 之距離 x_{D0} 如下^①：

$$x_{D0} = -\frac{2}{3}(L+a) [1 + \cos(\theta + 120^\circ)] \quad (10-107)$$

其中 θ 之值可用下列方程求之，

$$\cos 3\theta = \frac{27La}{4(L+a)^2} - 1 \quad (10-108)$$

以方程 (10-107) 中 x_{D0} 之值代入方程 (10-104) 及 (10-105) 中，並化簡，得，

$$\begin{aligned} \text{絕對最大正負彎矩 } M_D = \pm w \left\{ \frac{La [1 + \cos(\theta + 120^\circ)]}{3 - 2[1 + \cos(\theta + 120^\circ)]} \right. \\ \left. - \frac{2}{9}(L+a)^2 [1 + \cos(\theta + 120^\circ)] \right\} \quad (10-109) \end{aligned}$$

上列之解法，殊為繁瑣，若 a 及 L 之值為已知，則解法較簡易。若將方程 (10-104) 至 (10-109) 中之 a 改為 b ，則諸方程均可

① 方程 (10-107) 係友人傅君承義代求得，著者至深感謝。

用於 CB' 段，惟 x_D 及 x_{D0} 之值須量自右支點 B' 。若 $a=b=L/2$ ，即鉸 C 在橋跨之中線，則依上述之方法，可得下列之結果：

$$\text{最大正負號 } M_D = \pm \frac{wx_D(L-x_D)(L-2x_D)}{2(3L-2x_D)} \quad (10-110)$$

$$x_{D0} = 0.234L \quad (10-111)$$

$$\text{絕對最大正負號 } M_D = 0.01883wL^2 \simeq \frac{wL^2}{53} \quad (10-112)$$

使方程(10-98)中 $x_D = 0.34L$ 得

$$k_2 = 0.395 \quad (10-113)$$

即加勁梁 $A'C$ 段中發生絕對最大正號彎矩時，其荷重長度為 $0.395L$ ，在該梁之左端。加勁梁 $A'C$ 段中發生絕對最大負號彎矩時，其活重長度為 $0.605L$ ，在該梁之右端。

(3) 最大切力 由圖 10-25(d) 可知，若 $x_D < a/2$ ， V_D 之正號值為最大時，荷重 w 必置於 DE_3 段， V_D 之負號值為最大時，荷重 w 必置於 $A'D$ 及 E_3B' 二段，如圖 10-26(e) 所示。由 V_D 之感應圖，則 $x_D < a/2$ 時，

$$\text{最大正號 } V_D = \frac{w(\bar{m})(k_3L - x_D)}{2} \quad (10-114)$$

$$\bar{m} = \frac{a(L-x_D) - x_D(L-2x_D)}{aL} \quad (10-115)$$

以上列 \bar{m} 之值及方程(10-99)中 k_3 之值代入方程(10-114)中，並化簡，得，

$$\text{最大正號 } V_D = \frac{w[a(L-x_D) - x_D(L-2x_D)]^2}{2aL(L+a-2x_D)} \quad (10-116)$$

前已述明，加勁梁之全跨有均佈荷重時，其任何截面之切力為零。故圖 10-26 (e) 中 $A'D$ 及 E_3B' 二段有荷重時 V_D 之最大負號值，必等於 DE_3 段有荷重時 V_D 之最大正號值，因此，

$$\text{最大負號 } V_D = - \frac{w[a(L-x_D) - x_D(L-2x_D)]^2}{2aL(L+a-2x_D)} \quad (10-117)$$

觀察方程 (10-116) 及 (10-117)，可知 $x_D=0$ 時，即得絕對最大正負號切力 (即端切力) 如下：

$$\text{絕對最大正負號 } V_D = \pm \frac{waL}{2(L+a)} \quad (10-118)$$

使方程 (10-99) 中 $x_D=0$ ，得

$$k_3 = \frac{a}{L+a} \quad (10-119)$$

即加勁梁 $A'C$ 段中發生絕對正號切力時，其荷重長度為 $aL/(L+a)$ ，在該梁之左端， $A'C$ 段中發生絕對最大負號切力時，其荷重長度為 $L^2/(L+a)$ 在該梁之右端。

若 $x_D=a/2$ ，則方程 (10-116) 及 (10-117) 均變為

$$\text{最大正負號 } V_D = \pm \frac{wa}{8} \quad (10-120)$$

若 $x_D > a/2$ 則圖 10-25 (d) 之 E_3 點實際不存在，而 V_D 之感應圖變為與圖 10-17 (e) 相似，故 V_D 正負值為最大時之荷重位置如圖 10-26 (f) 所示。用以上之相同之方法，由感

應圖可得當 $a/2 < x_D < a$ 時, V_D 之最大正負號值如下:

$$\text{最大正負號 } V_D = \pm \frac{wx_D^2(L+a-2x_D)}{2aL} \quad (10-121)$$

觀察方程(10-121), 可知 $x_D=0$ 時, 則 $V_D=0$ 。若 $x_D=a/2$, 則方程(10-121)變為

$$\text{最大正負號 } V_D = \pm \frac{wa}{8} \quad (10-122)$$

與方程(10-120)恰相符。

若 $x_D=a$, 則方程(10-121)變為

$$\text{最大正負號 } V_D = \pm \frac{wab}{2L} \quad (10-123)$$

上列之方程(10-116)至(10-123)祇於截面 D 在 $A'C$ 段, 即 $x_D < a$ 。若截面 D 在 CB' 段, 即將上述諸方程中之 a 改為 b , 並使 x_D 量自右支點 B' , 則諸方程均可採用。方程(10-116), (10-117) 及(10-121)所表示者, 均為一三次曲線, 故加勁梁之最大正負號切力圖如圖 10-26 (g) 所示。

若 $a=b=L/2$, 則方程(10-116)及(10-117)均變為,

$$\text{最大正負號 } V_D = \pm \frac{wL \left(1 - 3\frac{x_D}{L} + \frac{x_D^2}{L^2}\right)^2}{2\left(3 - 4\frac{x_D}{L}\right)} \quad (10-124)$$

方程(10-121)變為,

$$\text{最大正負號 } V_D = \pm \frac{wx_D^2}{2L} \left(3 - 4\frac{x_D}{L}\right) \quad (10-125)$$

方程(10-117)及(10-119)各變爲,

$$\text{絕對最大正負號} \quad V_D = \pm \frac{wL}{6} \quad (10-126)$$

$$k_2 = \frac{1}{3} \quad (10-127)$$

方程(10-120)及(10-121)均變爲

$$\text{最大正負號} \quad V_D = \pm \frac{wL}{16} \quad (10-128)$$

方程(10-123)變爲

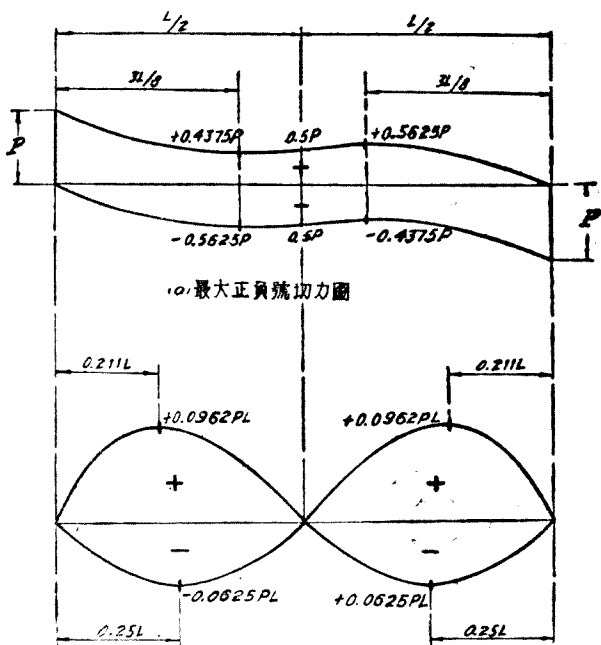
$$\text{最大正負號} \quad V_D = \pm \frac{wL}{8} \quad (10-129)$$

注意以上所得關於最大反力,最大切力及最大彎矩之結果,均與 ϕ 之值無關。

習題 10-43. 設懸橋三鉸加勁梁之鉸 C , 在橋跨之中線, 即於圖 10-25 中 $a=b=L/2$, 活荷重爲一均佈荷重 w /公尺。(a)由方程(10-80) $M_D = M'_D - Hy_D$ 校核表示加勁梁任何截面 D 最大正負號彎矩之方程(10-110), 及(b)作加勁梁全長之最大正負號彎矩圖。

提示: (a)使均佈荷重置於自左端至 k_2L 之距離而 $k_2 < 1/2$ 。由方程(10-83)中求得 H 。於加勁梁之右取任一截面 D 其與左端之距離爲 x_D , 並設 $x_D < k_2L$ 。求得 M'_D , 由方程(10-62)得 y_D 之值。將以上所得之諸值代入方程(10-80)中, 得一表示 M_D 之方程。此方程含有二變數 x_D 及 k_2 , 求絕數 dM_D/dk_2 , 並使其等於零, 求 M_D 爲最大時 k_2 之值。以 k_2 之值代入表示 M_D 之方程中, 即可求得(10-110)。

習題 10-44. 設懸橋三鉸加勁梁之鉸 C 在橋跨之中線, 即於圖 10-25 中 $a=b=L/2$, 活荷重爲一單個集中荷重 P 。(a)由感應圖求表示加勁梁任何截面最大切力及彎矩之方程。(b)求絕對最大正負號切力及彎矩與其所在之截面。(c)作加勁梁全長之最大正負號切力及彎矩圖。



(b) 最大正負號彎矩圖

習題 10-44.

提示：(c) 加勁梁全長之最大正負號切力及彎矩圖，如附圖所示。

習題 10-45. 某公路所用之懸橋與習題 10-36 相同，惟其中跨橋面之兩邊各有一懸索及三鉸加勁梁，中鉸 C 在中跨之中線，設活荷重為 10 公噸標準貨車之代替荷重，而每一主梁承受一車道之荷重，求每一主梁之

- 懸索拉應力之最大平分應力 H ,
- 懸索之最大拉應力,
- 塔頂 A 及 B 二點之最大豎反力 V_A 及 V_B ,
- 三鉸加勁梁兩端之最大反力,
- 表示三鉸加勁梁最大切力及彎矩之方程,
- 三鉸加勁梁之最大切力及彎矩圖,

(g) 三鉸加勁梁之絕對最大切力與彎矩及其所在之截面。

提示：公路標準貨車之代替荷重見圖 7—27(c)。

第十一章 長跨橋梁(二)——懸臂橋 及威氏桁架橋

11-1. 懸臂橋之原理及型式^① 所謂懸臂橋者，即有若干鉸之連續橋。連續橋係靜不定之結構，但加入若干適宜之鉸後，即變為靜定式（但懸臂橋亦有係靜不定者解釋見下）。連續橋常較簡單跨之橋為經濟，但前此工程師以其係靜不定式，多不願採用，因之加入若干鉸使其變為靜定式。故懸臂橋實即靜定之連續橋，既係由連續橋蛻化而來，亦可視作近代所採用連續橋之先驅。

設某橋採用三簡單跨橋梁，如其跨長皆為 L ，全跨均有均佈荷重 w /公尺，如圖 11-1 (a) 所示，則此橋梁之最大正號彎矩為 $\frac{1}{8}wL^2$ ，負號彎矩為零，如圖 (b)。若使此三簡單跨橋成為一連續橋梁，荷重不變，如圖 11-1 (c) 所示，則其彎矩圖如圖 (d)，其最大正號彎矩為 $\frac{8}{100}wL^2$ 而最大負號彎矩為 $\frac{1}{10}wL^2$ ，故此橋梁之最大正號彎矩減少百分之二十。此外中間二支點因祇有一支座，故橋墩於橋跨方向之寬度，亦因之減少，故圖 (c) 之

① 關於懸臂橋之計算，以孔 (Kunz) 氏所著之鋼橋設計及胡金 (Hool and Kinne) 二氏所著之可動及長跨鋼橋二書，敘述較詳，讀者應參閱。

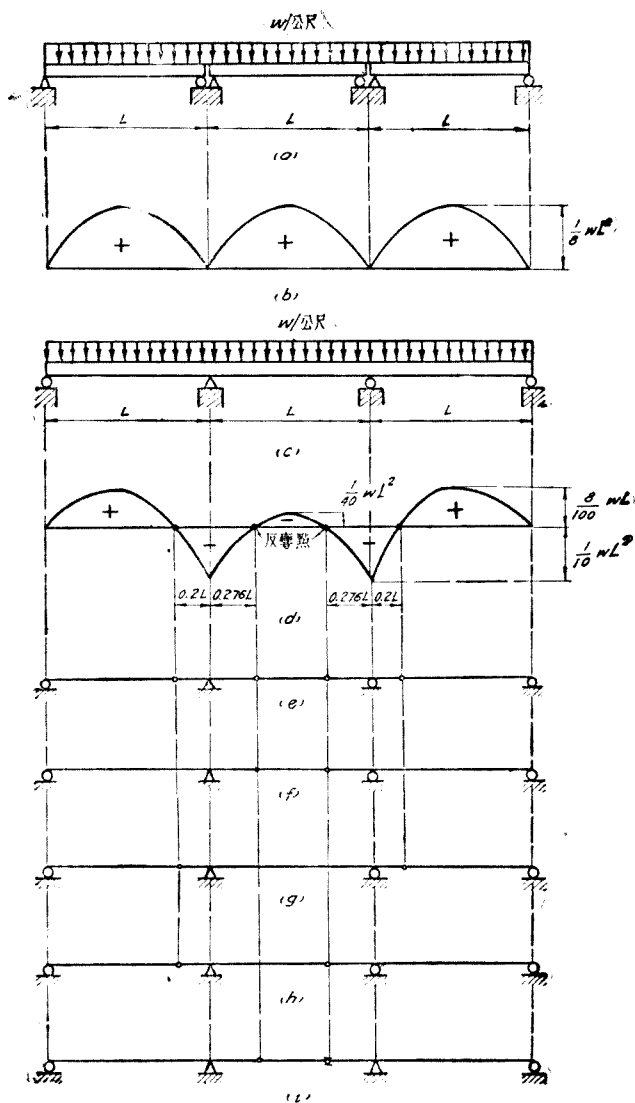


圖 11-1. 懸臂橋之原理

橋梁遠較圖(a)者為經濟。但連續橋之劣點^①，即在其係靜不定式，不但計算較為繁難，且地基如不十分堅實，致所有橋墩之下沉，稍有差異，則全橋應力之改變甚大。為保持連續橋之優點，同時去其靜不定式之劣點起見，1860年立(August Ritter)氏建議於圖11—1(d)中之四反彎點（即彎矩為零之點），裝置鉸節，如圖11—1(e)所示。但圖11—1(c)之連續橋為二次靜不定式，如裝置四鉸，即變為不穩定。但於四反彎點中擇任何二點裝置鉸節，如圖11—1(f)(g)及(h)，即成為既靜定而又穩定之結構。於圖(f)(g)及(h)之橋梁，祇有一定位支座，故橋之右端如有縱力，則右跨及中跨均有應力，於極長之橋，殊不適宜。為使任何一跨之縱力不致傳達於他跨，可將右邊內支點之輓軸支座亦改為定位支座，如圖11—1(i)。但如此則又成為靜不定式，且不能於其他二鉸節之直線上另加一鉸節，使其成為靜定。於此可將已有之一鉸節改為所謂滑動鉸節 (sliding hinge) 其符號為 \square 。此項滑動鉸節，既不傳遞彎矩，亦不傳遞平力，以公式表之，即 $M=0$ 及 $H=0$ ，其原理與搖擺支座相同。圖11—2示滑動鉸節之實例，其左部均支承於右部之上。(a)及(b)用於鉸梁橋，(c)及(d)用於桁架橋。(a)及(c)中反力之傳遞藉拉力，(b)及(d)中反力之傳遞藉壓力，與搖擺支座實際

① 近年來連續橋之採用日益增多，因此項劣點可採用能上下移動之支座，使其不存在。此外連續橋之剛勁，遠非懸臂橋所及，故地基如相當堅實，則連續橋常較懸臂橋為優。

相同。

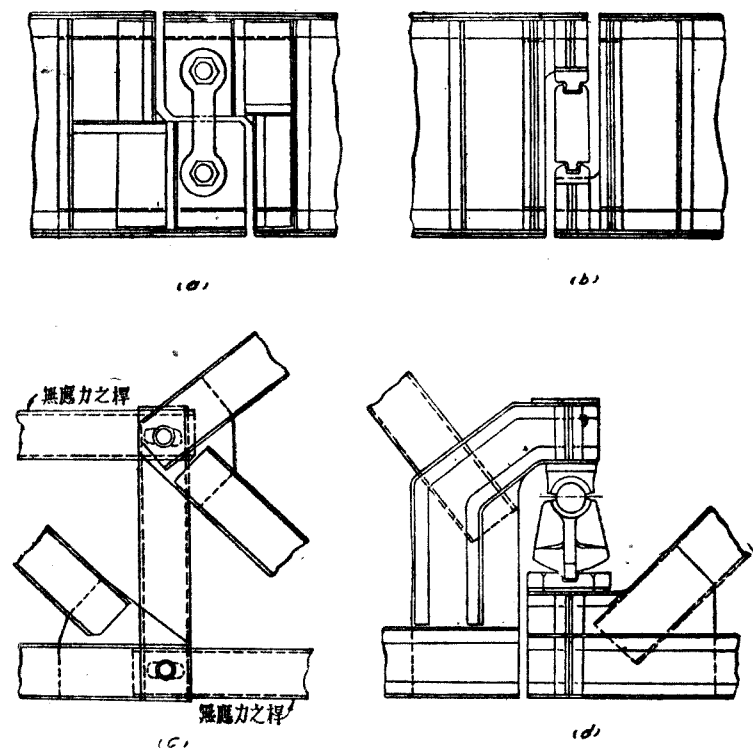


圖 11-2. 滑動鉸節之實例(左部支承於右部)

1867 年奧人革(Geber 卒於 1912 年生年不詳) 氏設計並建造一跨長 37.8 公尺之公路懸臂橋於歐洲 Hassfurt 地方之梅因(Main) 河上, 懸臂橋之採用, 允以此橋為嚆矢。故德國亦稱懸臂橋為革氏橋(Geber brücken)。

圖 11-3 示懸臂橋之通常佈置, 其中(a)以二錨臂與懸臂及一懸跨所組成, 於中跨須極長而端跨可以較短時採用之。(b)

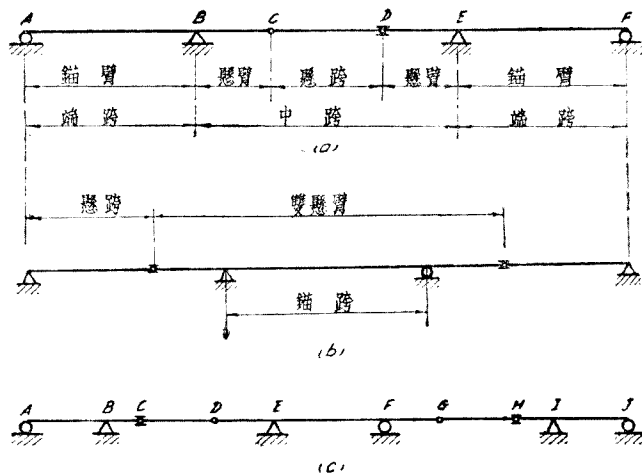


圖 11—3. 懸臂橋之通常佈置

以二懸跨及一雙懸臂所組成，於中跨及端跨之長度約略相等時採用之。(c)以二錨臂二懸跨及一雙懸臂所組成，於較長之懸臂橋採用之。上列之三種佈置，皆係對稱式，當然可以加以適宜之改變或延長，以求適於當地之情形。圖 11—4 示世界最著名之懸臂橋。圖(a)示加拿大之 Quebec 橋，其佈置如圖 11—3 (a)式，此係第二次建造者，第一次建造者未完成即遭傾覆(1907 年 8 月 29 日)已於 1—4 節中述及之。圖(b)示美國紐約城之 Queensborough 橋，其佈置係採用圖 11—3 之(c)式，而將其二懸跨 CD 及 GH 略去，使懸臂之二端以滑動鉸相接合。圖(c)為美國意省 (Illinois) Thebes 橋，其佈置係兩旁採用圖 11—3 (b)中之 AE 段，並於其中加一懸跨。圖(d)為蘇格蘭之 Firth of Forth 橋，其中部係一雙懸臂，其兩端之佈

置與圖 11—3 所示者根本不同。我國祇津浦鐵路之黃河橋爲懸臂橋，在山東濟南之附近，其佈置如圖 11—3 (a)，其中跨長爲 164.6 公尺，端跨長爲 128 公尺，爲德國工程師所設計。

懸臂橋多係穿越式，如採用下承式，常使其下弦成拱形，如圖 11—5 所示。其中 (a) 與 11—1 (f) 之佈置相同。(b) 係將 (a) 之懸跨略去。(c) 與圖 11—1 (g) 相同，(d) 之中跨爲一三鉸拱形桁架，其兩端跨各有一懸臂及一懸跨，稱爲三鉸拱懸臂橋。圖 11—5 中之 (a) (b) 及 (c) 三橋均無拱之作用，不能稱爲拱橋。同此，圖 10—13 (b) 之拱形連續橋亦可採用三鉸拱懸臂橋，如圖 11—5 (e) 所示。懸臂橋亦可採用懸橋式，如圖 11—5 (f) 所示，稱爲懸橋式懸臂橋。

懸臂橋之主要特點，固在其係靜定式，但懸臂橋多有係靜不定者。如圖 11—4 (a) Quebec 橋之支點 B 及 B' 均係定位支座，但 C 或 D 點並無一滑動鉸，故此橋在縱力下成爲靜不定式，圖 11—4 (b) 之 Queensborough 橋 共有九個獨立分反力，但除去靜平衡之三方程外，祇有四個特別方程：即 $M_C=0$ ， $H_C=0$ ， $M_F=0$ ， $H_F=0$ ，故此橋在豎向荷重下成爲二次靜不定式，但在縱力下成爲靜定式。圖 11—4 (c) 之 Thebes 橋 完全係靜定式。圖 11—4 (d) Firth of Forth 橋 兩端之懸臂均有三支點，故此橋係二次靜不定式。如欲使其成爲靜定，必將 BC 節間及右半相對 JK (未示出) 中之交叉斜桿略去，使其不能傳遞豎切力，即得 $V_{BC}=0$ (即 $M_B=M_C$) 及 $V_{JK}=0$ (即 $M_J=M_K$) 二

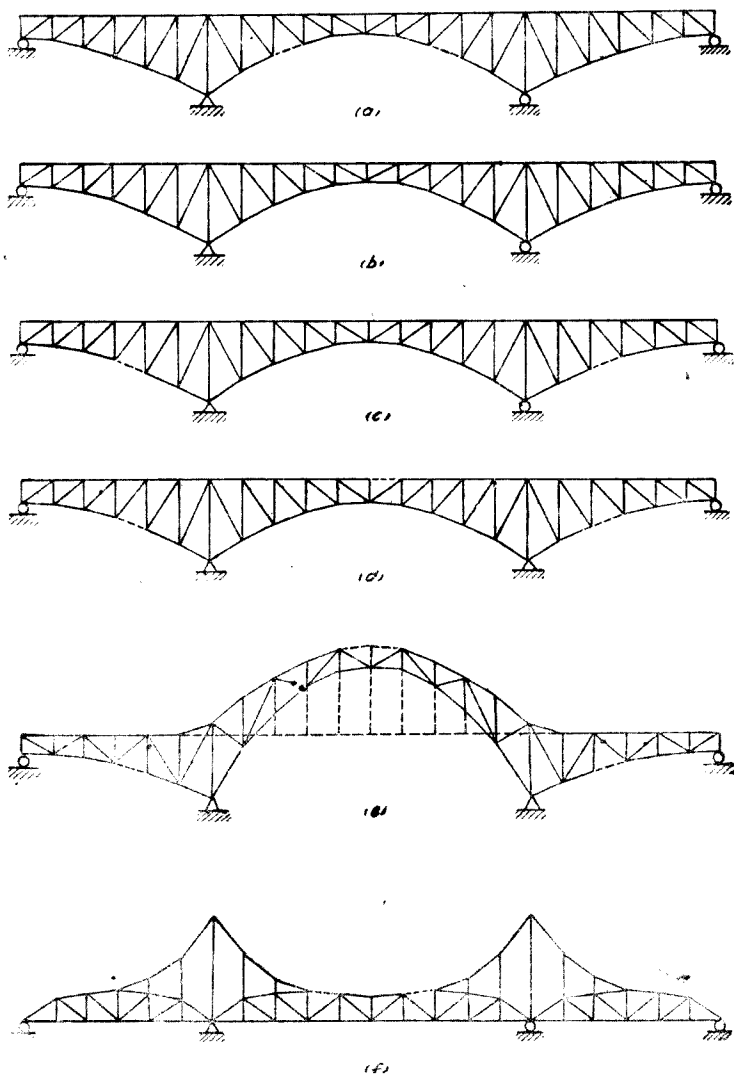


圖 11—5. 拱橋式及懸橋式之懸臂橋

方。實際上該二節間中之二交叉斜桿，常採用細長之桿，故可將其視作祇有支撐之功用。至 FG 節間中之二交叉斜桿，則不能略去，因此雙懸臂祇有二支點，若將節間 FG 中之交叉斜桿略去，則兩邊荷重不平衡時，該雙懸臂即不穩定矣。此外圖 11-5(b) 亦係靜不定式。

注意圖 11-3 中之輾軸支座均須承受向下之反力。此項支座常採用較長之眼桿，一端與桁架以樞相接合，一端以樞與深埋於橋座或橋墩中之若干鋼梁相接合，庶橋座或橋墩之重量，可以抵抗此項負號反力，其形式與第三章表 1 中之 III (c) 相同。

依經驗及估計，懸臂橋各部之長短須合乎相當之比例，則於材料方面始稱經濟。若懸臂桁架橋採用圖 11-3(a) 之佈置，如圖 11-6(a) 所示，若干工程所求得其各部之經濟比例，及

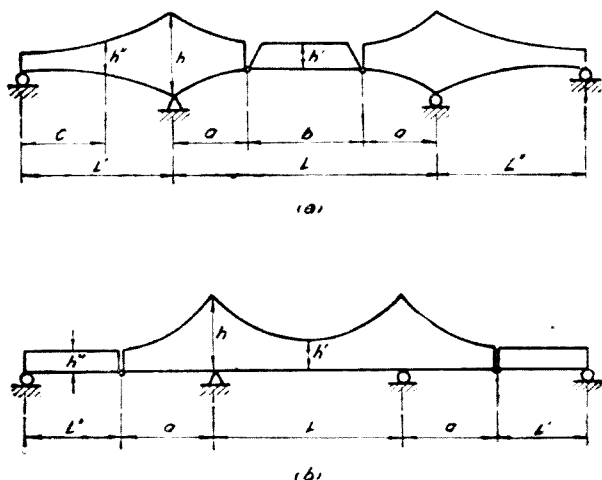


圖 11-6. 懸臂橋之經濟比例

現有懸臂橋者如表 XXI^①。

表 XXI. 懸臂桁架橋之經濟比例

	$\frac{L'}{L}$	$\frac{a}{L}$	$\frac{b}{L}$	$\frac{h}{L}$
瓦 (Waddell) 氏	0.31	0.38	0.15
吉 (Jacoby) 氏	0.37	0.16	0.68
馬 (Marbury) 氏	0.15至0.20	0.6至0.7
柏 (Burr) 氏	0.42至0.50	0.225至0.25	0.5至0.55
史 (Steinman) 氏	0.40	0.20	0.60
拜 (Beyer) 氏	0.30	0.12	0.76
張潤田 { 最少材料 經濟限度	0.53	0.18	0.64	0.15
	0.43至0.66	0.09至0.225	0.49至0.82	0.138至0.163
加拿大 (Quebec (1917))	0.286	0.323	0.356	0.173
蘇格蘭 (Forth (1889))	0.403	0.398	0.264
美國 (Carguinez (1927))	0.455	0.304	0.394	0.153
美國 (Beaver (1910))	0.406	0.319	0.361	0.185
44 懸臂橋之平均	0.4	0.3	0.4	0.163
44 懸臂橋之限度	0.20至0.78	0.17至0.40	0.18至0.67	0.10至0.23

依米 (J. Melan) 氏^② 之研究，若懸臂桁架橋之佈置如圖 11—6(a) 所示，得下列桁架深度之經濟比例：

① 參閱張潤田 (Y. T. Chang) 所著懸臂橋之經濟學，載世界工程大會 (1929 年在日本東京舉行) 會刊，第 10 卷 292 頁。

② 見所著橋梁建造學 (Der Brückenbau)，第 3 卷，1917 年第 2 版，436 頁。

$$\left. \begin{aligned} \frac{h'}{h} &= \frac{(1-2A)^2}{4A(1-A)} \\ \frac{h''}{h} &= \frac{[1-AC(1-A)B^2]^2}{4A(1-A)B^2} \\ C &= L \sqrt{A(1-A) \frac{h''}{h}} \end{aligned} \right\} \quad (11-1)$$

若懸臂桁架橋之佈置如圖 11-6 (b) 所示，得下列桁架深度之經濟比例：

$$\left. \begin{aligned} \frac{h'}{h} &= \frac{B^2 - 4AC}{4A} \quad \text{若 } B^2 > 4A \\ \frac{h'}{h} &= \frac{4A - CB^2}{4A} \quad \text{若 } B^2 < 4A \\ \frac{h''}{h} &= \frac{(1-A)^2}{4A} \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

於上列二組方程中，

$$A = \frac{a}{L}, \quad B = \frac{L}{L}, \quad C = \frac{\text{均佈呆荷重}}{\text{均佈呆荷重} + \text{均佈活荷重}} \quad (11-3)$$

懸臂橋之優點甚多，其最主要者如下：

(1) 在呆荷重下其彎矩圖與連續橋者相同，故有連續橋經濟之優點，於長跨橋梁，此點尤為重要。

(2) 懸臂橋可採用靜定式(至少在豎向荷重下為靜定式，如 Quebec 橋，其用靜不定式者，於理殊不合，不可取法)。故設計較連續橋為簡便。

(3) 懸臂橋之架設時，祇其錨臂須用支架，其懸臂之架設，可用懸臂法。其懸跨可於造成後置於船上而後吊起或浮起，與

兩懸臂相接合。故架設較為經濟省事。

懸臂橋之唯一劣點，即在其剛勁不及連續橋，但設計適當之懸臂橋，其剛勁亦常甚充足，故不可祇以剛勁不足而絕不考慮懸臂橋之採用也。

11-2. 懸臂橋之反力，切力，與彎矩及其感應圖 懸臂橋如係靜定式，其在任何荷重下之反力，切力，與彎矩，均可用第三章之方法求得 無須贅述。試以圖 11-7 (a) 之懸臂橋為例。既求得各支點之反力 V_A, V_B, \dots 等之後，其切力及彎矩圖如圖 11-7 (b) 及 (c)。注意節間 BC 及 FG 之切力為零，故每跨

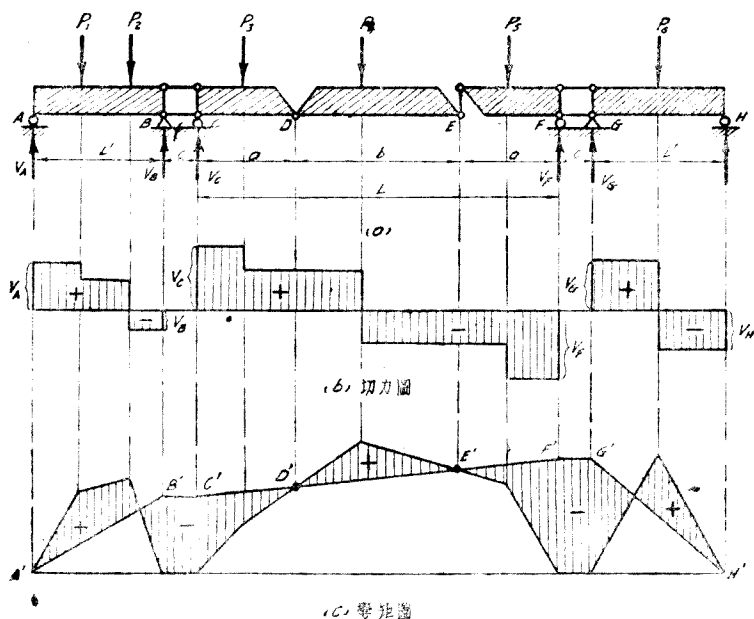


圖 11-7. 懸臂橋之切力與彎矩圖

兩端反力之和，必等於其間荷重之和，因此切力圖如圖 11—7 (b)。求彎矩圖時，可先將 AB ， CF ，及 GH 三跨視作簡單跨，而求得其彎矩圖，由圖 11—7 (a) 之二鉸 D 及 E ，作二豎線與中跨之簡單梁彎矩圖相交，得 D' 及 E' 作 $D'E'$ 線，得 C' 及 F' 二點，作平線 $B'C'$ 及 $F'G'$ ，再作 $A'B'$ 及 $G'H'$ 線。因 D 及 E 二點之彎矩必為零，故 $A'B'C'D'E'F'G'H'$ 折線，為彎矩圖之底線，因此，彎矩圖如圖 11—7 (c) 所示，與連續梁者相似。於懸臂橋之無 BC 及 FG 二節間者，即等於使支點 C 及 F 各與支點 B 及 G 相合，故其切力及彎矩圖無 BC 及 FG 二段，此二圖之其餘部分，均無改變。

圖 11—8 示懸臂橋之反力，切力，與彎矩之感應圖。其方法無須解釋，但下列諸點，須加以注意：

(1) 反力 V_A 可向上 (正號) 或向下 (負號)，但反力 V_B 及 V_C 必常係向上，不能向下。

(2) 祇錨臂 AB 有活荷重時，懸臂橋之其他部分均無應力，而其兩端之反力與其中之切力及彎矩，均與將其視作一簡單跨者同。

(3) 祇懸臂 CD 有活荷重時，則其 C 端之反力與其中之切力及彎矩，均與將其視作一懸臂梁者同，故其中之切力必常係正號，彎矩必常係負號。

(4) 懸跨 DE 無活荷重時，即無應力。懸跨 DE 有活荷重時，則其中之切力及彎矩，必與將其視作一簡單跨者同。

(5) 活荷重在懸跨 DE 時, 則其兩端之二懸臂及二錨臂均有反力, 切力及彎矩。

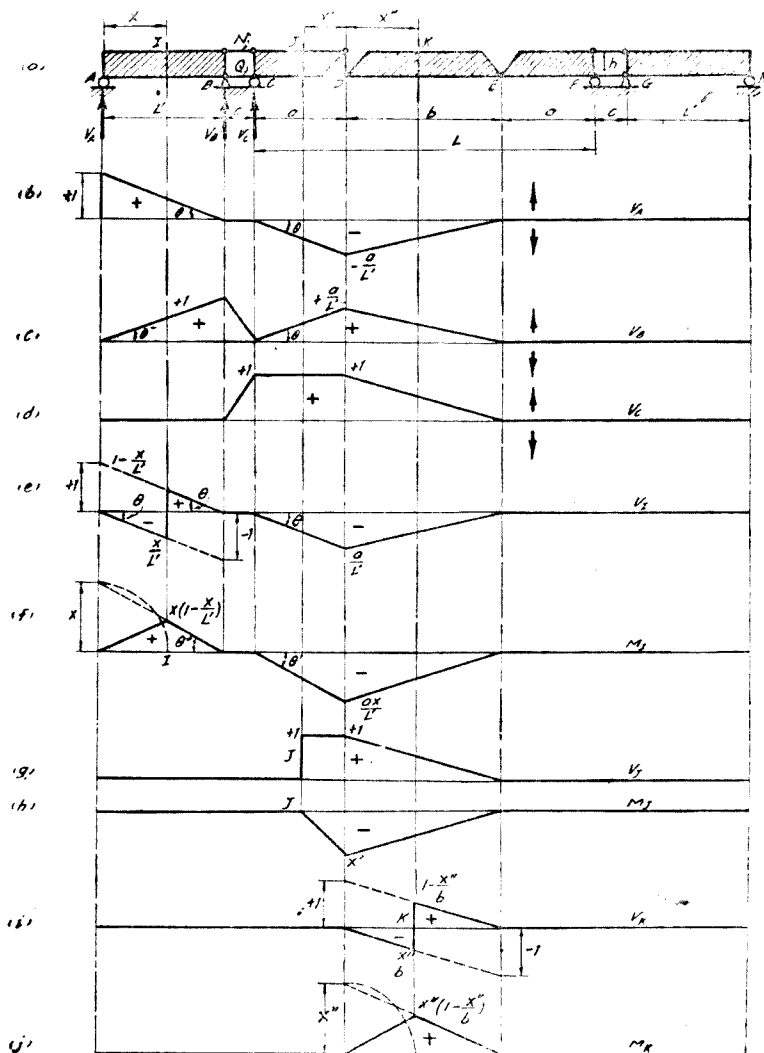


圖 11-8. 懸臂橋之反力切力與彎矩感應圖

(6) 活荷重在懸臂橋一端之懸臂 EF 及錨臂 GH 時，則其懸跨 DE 及其他一端之懸臂 CD 及錨臂 AB 均無應力。

(7) 活荷重位置對於 N 及 Q 二桿應力之影響，與其對於 M_B 及 M_C 者相同。

由上列之諸點，可將圖 11—8 (a) 懸臂橋各部分之反力及應力與活荷重位置之關係，列表如下：

表 XXII. 活荷重位置與圖 11—8 (a) 懸臂橋各部分之反力及應力之關係 (活荷重在 EH 段時所有 AB 間各部之反力及應力均為零)

		活 荷 重 在			
		錨臂 AB	節間 BC	懸臂 CD	懸跨 DE
反 力	V_A	↑ 與 AB 簡	零	↓ 二者之數量	↓ 二者之數量相
	V_B	↑ 單跨同	↑ 與 BC 簡	↑ 相等	↑ 等
	V_C	零	↑ 單跨同	↑ 與懸臂梁同	↑ 與 DE 簡單跨 D 點之反力同
切 力 及 彎 矩	錨臂 AB	± V 與 AB 簡 ± M 單跨同	無應力	$-V$ $-M$	$-V$ $-M$
	懸臂 CD	無應力	無應力	+ V 與懸臂梁同 $-M$	+ V $-M$
	懸跨 DE	無應力	無應力	無應力	± V 與 DE 簡單 + M 跨同
N 及 Q 桿之應力		無應力	無應力	N 為拉力，Q 為壓力，其數量為 M_C/h 或 M_B/h 。	

於第 3—8 節中，曾述及用虛功法以求結構之應力圖，甚為簡便，於懸臂橋為尤然。觀察圖 3—27，更知其不謬。試以圖 11—8 中之反力 V_A 彎矩 M_A 及切力 V_B 為例。懸臂橋之 EH 段既係支承於 F, G 及 H 三點，

故 AE 間任何部分有移動時, EH 段不能移動, 因此懸跨 DE 之 E 點, 可視作不能移動, 如圖 11-9(a) 所示。如欲求反力 V_A 之感應圖, 可使支點 A 有向上之虛移位等於 1, 得懸臂橋之虛移位圖如圖 11-9(b) 所示, 即 V_A 之感應圖。注意此圖中之四個角度 θ 均相等其值為 $\theta = \tan^{-1} 1/L'$, 即圖

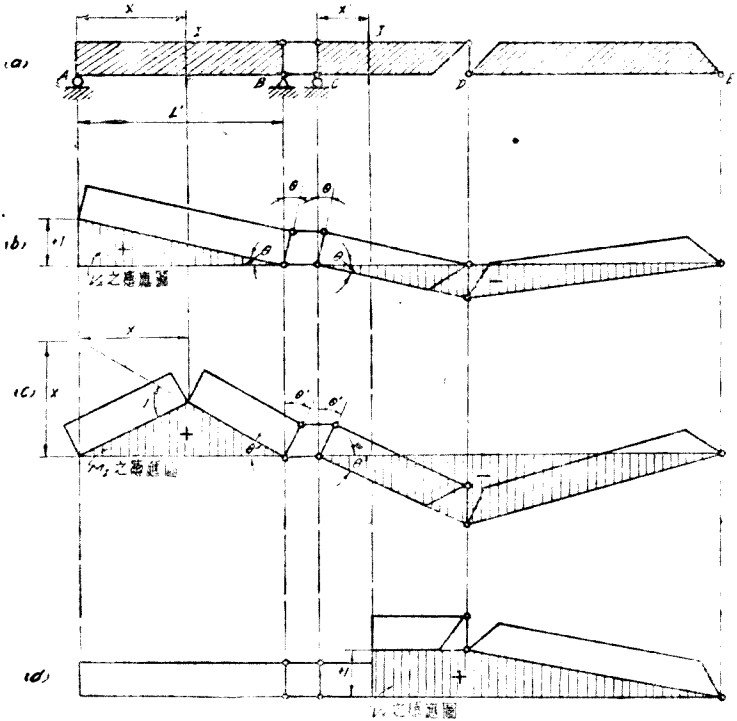


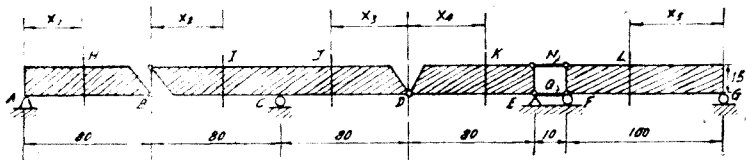
圖 11-9. 用虛功法求懸臂橋之反力切力及彎矩感應圖

11-9(b), (c) 及 (d) 中設所示之 θ 角度。如欲求彎矩 M_1 之感應圖, 使截面 I 有轉動之虛移位等於 1, 得懸臂橋之虛移位圖如圖 11-9(c) 所示, 即 M_1 之感應圖。注意此圖中之四個角度 θ' 均相等, 其值為 $\theta' = \tan^{-1} x/L'$ 即 11-9(d) 中所示之 θ' 角也。如欲求切力 V_1 之感應圖, 使截面 I 有向上之虛移位等於 1, 而 AE 段不致有移動, 得懸臂橋之虛移位圖如圖 11-9(d) 所示, 即 V_1 之感應圖。

習題 11-1. 附圖示某懸臂橋之佈置，設活荷重為一均佈荷重 w /公尺，

求

- 所有各支點之反力，
- 全橋長之切力圖，
- 全橋長之彎矩圖，
- N 及 Q 二桿之應力。



習題 11-1. 至 11-5.

習題 11-2. 求 (a) 支點 A, C, E, F 及 G 之反力感應圖，(b) 截面 H, I, J, K 及 L 之切力及彎矩感應圖，及 (c) N 與 Q 二桿之應力感應圖。

習題 11-3. 由習題 11-2 所得之感應圖，作一表與表 XXII 相似，表示活荷重位置與此懸臂橋各部分之反力及應力之關係。

習題 11-4. 用習題 11-2 所得之感應圖，校核習題 11-1 之答案。

習題 11-5. 用虛功法校核習題 11-2 之答案。

11-3. 懸臂桁架橋之應力及其感應圖 懸臂桁架橋應力之計算，既可用切力法或彎矩法，故其中任何桿應力感應圖之求法，與上述切力或彎矩者相似。

圖 11-10 (a) 示一懸臂桁架橋，其懸跨之右端 B 點可視作係有一鉸支座，與圖 11-9 相同。圖 11-10 (b) 至 (g) 所示之應力感應圖，均係縮減感應圖 (詳見第 8-3 節)。前已述及，若活荷重在錨臂，則其中任何截面之切力及彎矩均與將其視作一簡單跨者相同。故圖 11-10 (b), (c) 及 (d) 中 a, b 及 c 三

桿應力感應圖之 AB 段,與將錨臂 AB 視作一簡單跨相同,其作法詳見圖 8-5 及 8-6,其感應係數皆等於左端 A 點之反

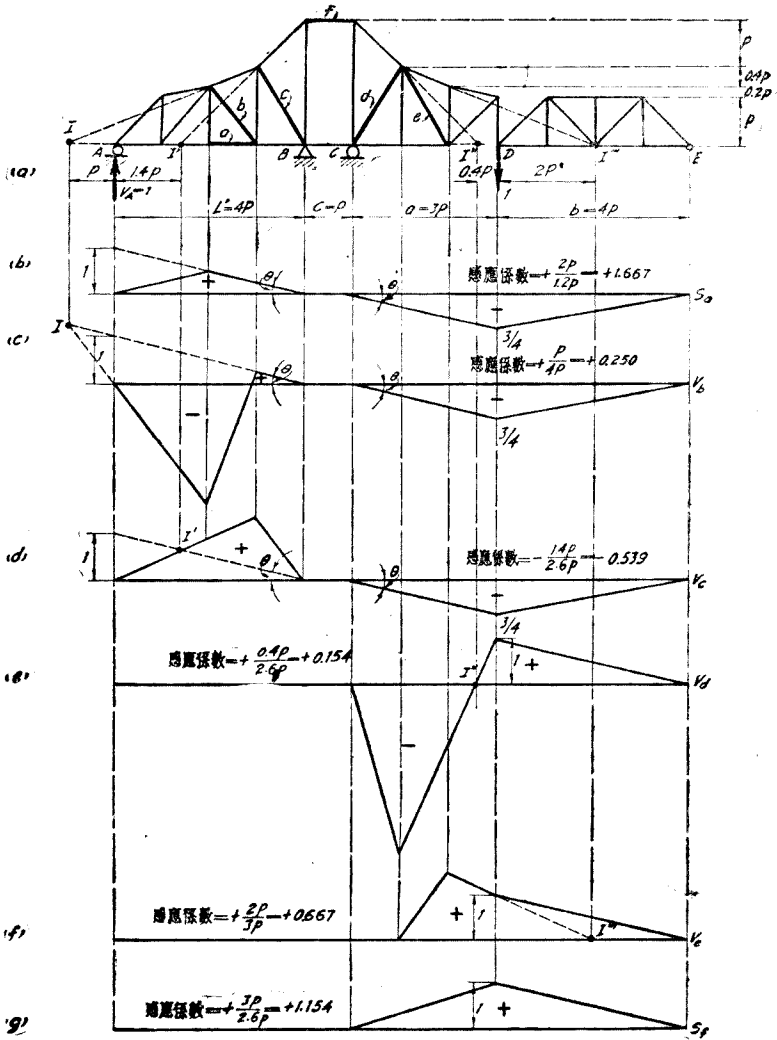


圖 11-10. 懸臂桁架橋之應力感應圖(一)

力 $V_A = 1 \uparrow$ 時該桿之應力。活荷重在 CE 段時， S_e 、 V_e 及 V_c 之值均等於 V_A 之值，各乘以其感應係數，故該三桿應力感應圖之 CE 段，與 V_A 之感應圖相同〔參閱圖 11-8(b)〕。

懸臂桁架橋之懸臂，即係一懸臂桁架，故活荷重在該懸臂時，其中各桿之應力感應圖與懸臂梁之切力或彎矩之感應圖相似。試以 d 桿為例，其矩心為 I'' 。設 D 點有一向下之單位荷重，則 d 桿之豎分應力為 $+0.4p/2.6p = +0.154$ ，若使其縮減感應圖於 D 點之豎距為 $+1$ ，則其感應係數 $+0.154$ 即向下單位荷重在 D 點時 d 桿之豎分應力。於 D 點之左，其感應線必經過 d 桿之矩心 I'' 點。於 DE 段其感應線必係直線。同此，可得 e 桿豎分應力及 f 桿應力之縮減感應圖，各如圖 (f) 及 (g) (注意 S_f 之感應圖與 M_c 者完全相似)，其於 D 點之豎距均為 I 。若圖 11-10 (e) 之 I 點或 (d) 之 I' 點距支點 A 太近，或 (e) 之 I'' 點或 (f) 之 I''' 點距 D 點太近，則用上法所求得之縮減感應圖，不易精確，於是可用第 8-3 節所述及圖 8-5 與圖 8-6 所示之方法，以資校核。

懸臂橋中懸跨兩端與懸臂接合之鉸，亦可採用四邊形之虛鉸。如圖 11-11(a) 所示，懸跨 BC 左右之虛鉸各為 E 及 F ，故該懸跨等於 E 及 F 二點支承於左右二懸臂之上，其情形如圖 11-11(b) 所示，相當於左右二懸臂各有一虛線所示之臂 AB 及 FD ， AB 及 CD 二桿僅係縱梁。圖 (c) 示 E 點之反力 V_E 之感應圖，其豎距於 E 點為 $+1$ ，於 F 點為零，其作法極為顯明。

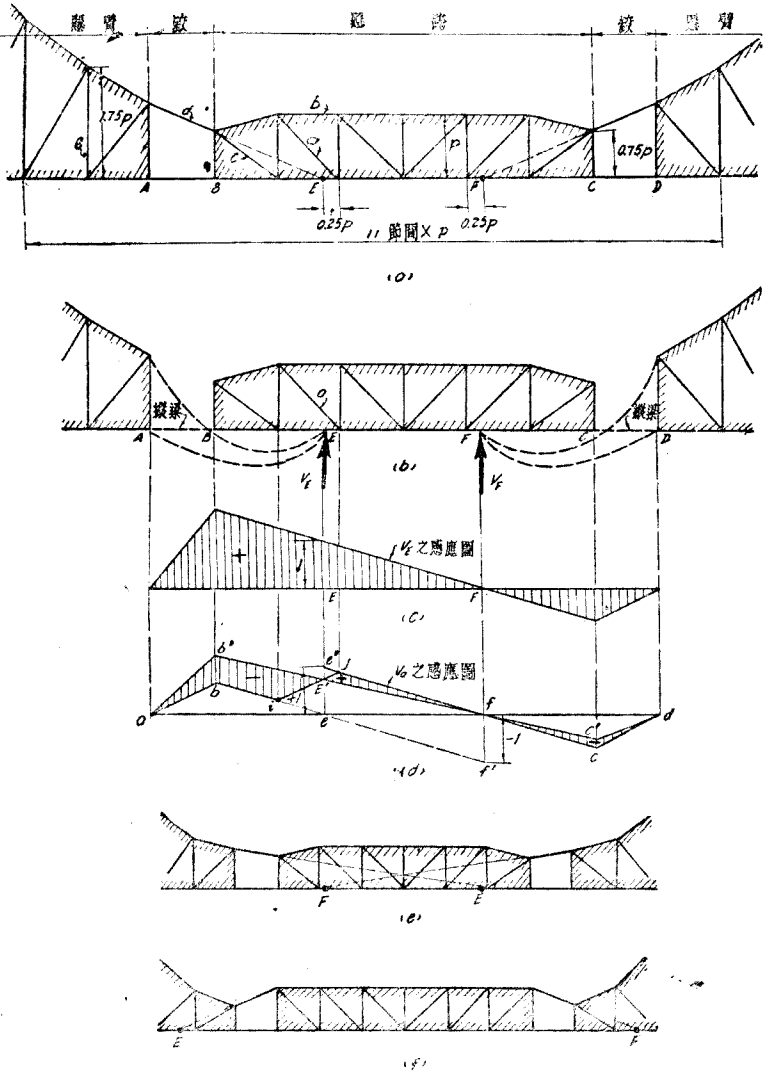


圖 11-11. 懸臂桁架橋之應力感應圖(二)

圖(d)示懸跨中斜桿 a 之豎分應力 V_a 之感應圖。先將 EF 視

作一簡單跨，作其兩端反力 V_E 及 $-V_F$ 之感應圖，如 ef 及 ef' ，並各延長至 c 及 b 。聯 ab 及 cd ，又聯 ij 得 E' 點，單位集中荷重在 E 及 F 二點時， V_a 之值必為零，故作 $E'f$ 為 V_a 之感應圖之底線，並延長其左右二端各至 b' 及 c' 。聯 ab' 及 $c'd$ 二線，即 a 桿所在節間之節間切力感應圖，亦即 V_a 之感應圖，二者之正負號亦相同。虛鉸 E 及 F 之位置亦可如圖 (c) 及 (f) 所示，其應力感應圖，可用與圖 (c) 及 (d) 相似之方法求之。

懸臂桁架橋中任何桿之應力感應圖，亦可用虛功法求之，其方法與第 8—4 所述者相同。

習題 11—6. 求英文字母所指定諸桿之應力（或豎分應力）感應圖或縮減感應圖。

習題 11—7. 用虛功法校核圖 11—10 中 a, c, d 及 f 桿應力之縮減感應圖

提示： 參閱習題 8—9。

習題 11—8. 求圖 11—11(a) 中 b, c, d 及 e 桿之應力（或豎分應力）感應圖。

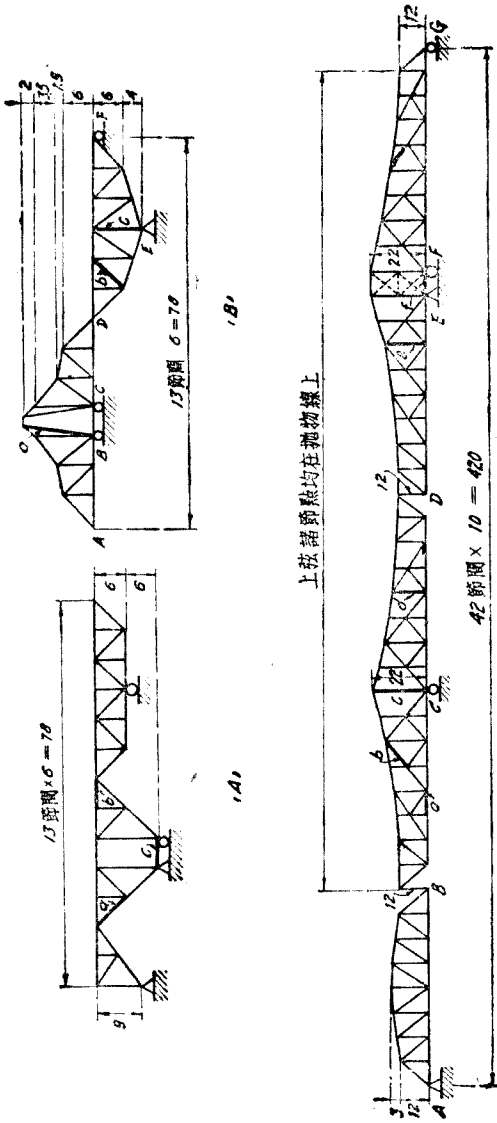
11—4. 拱橋式與懸橋式懸臂桁架橋之應力及其感應圖 圖 11—12 (a) 示一拱橋式之懸臂橋，其中豎桿 3 之應力感應圖，須加以注意。設桿 1, 2 及 3 之應力均為拉力，用 $\Sigma V = 0$ 於節點 B ，如圖 (b) 所示，得

$$V_B + V_1 + V_2 + S_3 = 0 \quad (11-4)$$

以截面 (a) 及 (b) 用 $\Sigma M = 0$ 於節點 G ，設截面 (a) 以左或截面 (b) 以右所有外力對於節點 G 之彎矩為 M_G ，則，

$$H_1 = \frac{M_G}{h'} \quad (11-5)$$

$$H_2 = \frac{M_G}{h'} \quad (11-6)$$



習題 11—6.

但

$$V_1 = H_1 \tan \alpha_1 = \frac{M_G}{h'} \tan \alpha_1 \quad (11-7)$$

$$V_2 = H_2 \tan \alpha_2 = \frac{M_{G'}}{h'} \tan \alpha_2 \quad (11-8)$$

代入方程(11-4)中,得

$$S_3 = -\frac{M_{G'}}{h'} (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) - V_B \quad (11-9)$$

設

$$K = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{h'} \quad (11-10)$$

則

$$S_3 = -KM_G - V_B \quad (11-11)$$

由是可知 S_3 之感應圖等於 $-KM_G$ 及 $-V_B$ 二感應圖之代數和。若懸臂橋之佈置如圖 11-12(a), 則 M_G 感應圖之豎距, 於鉸 E 之處為最大。設以一向下單位荷重置於 E 點, 則 $M_G = -a$ 。設 $-V_B$ 感應圖於 E 點之豎距為 $-V_{B(E)}$, S_3 感應圖於 E 點之豎距為 $S_{3(E)}$, 則

$$S_{3(E)} = Ka - V_{B(E)} \quad (11-12)$$

於佈置如圖 11-12(a)之懸臂橋, 則

$$V_{B(E)} = \frac{a+L'}{L'} \quad (11-13)$$

因此,

$$S_{3(B)} = a \left(K - \frac{a+L'}{aL'} \right) \quad (11-14)$$

由方程(11-14)可知, 若 $K > (a+L')/aL'$, 則 $S_{3(B)}$ 為拉力(正號), 反是 $S_{3(E)}$ 為壓力(負號), 故 S_3 之感應圖各如圖(c)及(d)所示。

若懸臂橋之佈置如圖 11-12(e)所示, 方程(11-12)仍可採用, 惟 $V_{B(B)}$ 之值為

$$V_{B(B)} = \frac{a+L}{L} \quad (11-15)$$

因此,

$$S_{3(B)} = a \left(K - \frac{a+L}{aL} \right) \quad (11-16)$$

由方程(11-16)可知,若 $K > (a+L)/aL$, 則 $S_{3(B)}$ 爲拉力(正號), 反是, $S_{3(B)}$ 爲壓力(負號), 故 S_3 之感應圖各如圖(f)及(g)所示。

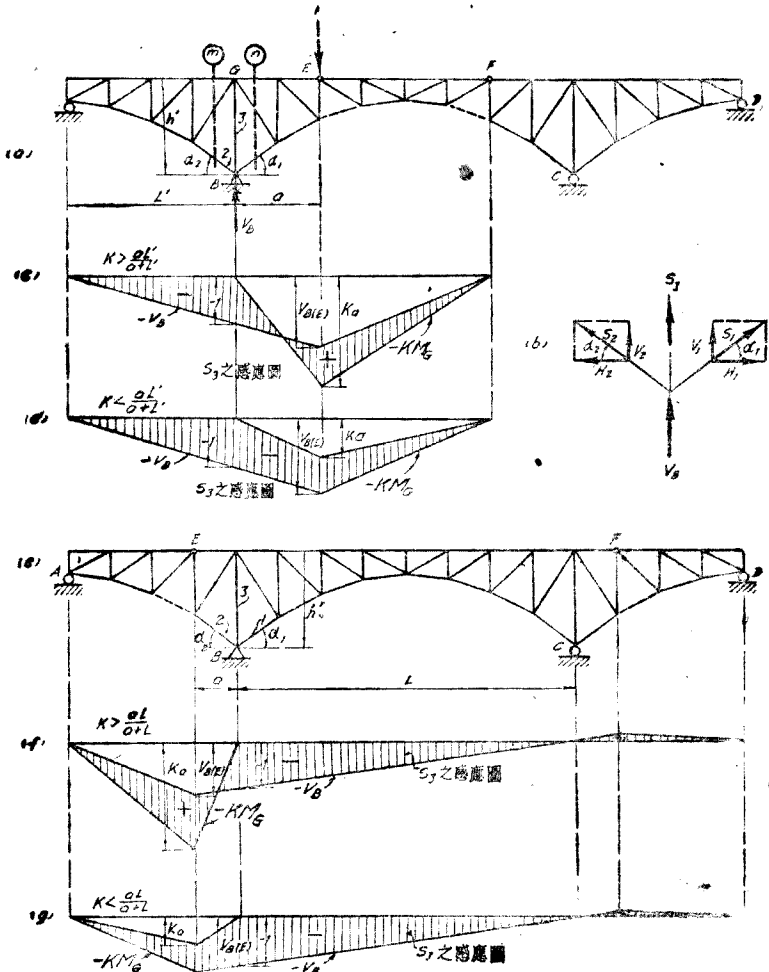


圖 11-12. 拱橋式懸臂橋應力感應圖

圖 11—13(a) 示三鉸拱懸臂橋，其與圖 11—12(e) 之拱橋式懸臂橋不同之點，即在前者之支點 C 爲一定支座，而其中跨並有一鉸 I 。若活荷重在其兩端懸跨 AE 及 FD ，則其中諸桿之應力，各與將 AE 及 FD 視作簡單跨者相同。若活荷重不在該二懸跨，則其中之桿皆無應力，二懸臂 EB 及 CF 中任何桿之應力與活荷重位置之關係，與圖 11—10(a) 懸臂 GD 之情形完全相同。若活荷重在中跨 BC 則 AB 及 CD 二段均無應力，而其 BC 段二

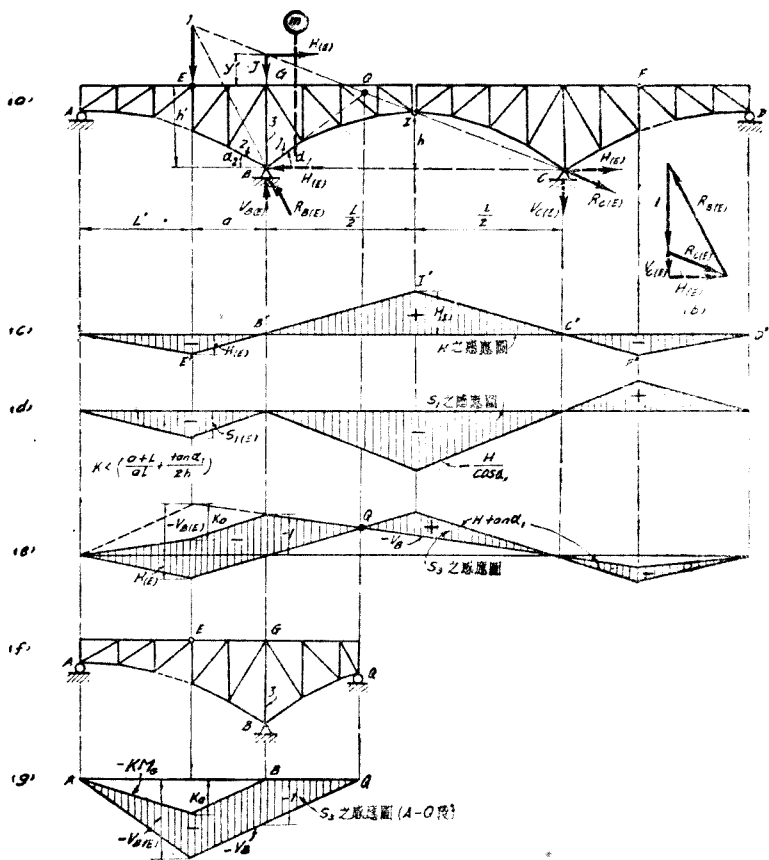


圖 11—13. 三鉸拱懸臂橋之水平反力及應力感應圖

端之平反力 H 及該段中任何桿之應力，與前述三鉸拱者完全相同。以上諸點，均無須贅述。此處須說明者，祇活荷重在 AB 及 CD 二段時，其中跨 BC 段兩端平反力及該段中任何桿應力之求法。以一單位向下荷重置於 E 點，則 B 及 C 二支點之反力，如圖(a)及(b)所示。由此二圖

$$H_{(E)} = \frac{L}{2h} V_{C(B)} \quad (11-17)$$

但

$$V_{C(B)} = -\frac{a}{L} \downarrow \quad (11-18)$$

故

$$H_{(E)} = -\frac{a}{2h} \quad (11-19)$$

若單位向下荷重在中跨，則 H 之感應圖係一三角形，其於 I 點之豎距 $H_{(I)}$ 為

$$H_{(I)} = -\frac{L}{4h} \quad (11-20)$$

由是

$$H_{(E)} = -H_{(I)} \frac{a}{L} \quad (11-21)$$

故 H 感應圖中之 $H'E'$ 為一直線。若單位向下荷重在 F 點，其情形相同。故先作中跨三鉸拱之 H 感應圖 $B'C'I'$ ，將 $B'I'$ 及 $F'C'$ 線延長得 E' 及 F'' 二點，聯 $A'E'$ 及 $F''D'$ ，即得此三鉸拱懸臂橋 B 及 C 二支點平反力 H 之感應圖

茲以圖 11-13(a)之桿 1 為例，若單位向下荷重在 BD 段，則 AB 段中之桿 2 無應力，用 $\Sigma H=0$ 於節點 B ，得桿 1 之應力 $S_{1(BD)}$ 如下：

$$S_{1(BD)} \cos \alpha_1 + H = 0 \quad (11-22)$$

或

$$S_{1(BD)} = -\frac{H}{\cos \alpha_1} \quad (11-23)$$

故 S_1 感應圖之 BD 段如圖 11-13(d) 所示，若將一單位向下荷重置於圖(a)之 E 點，將 R_C 於 J 點分解為平豎二分力，以一截面③，用 $\Sigma M=0$ 於 J 點，考慮③截面以右隔離體之平衡，並設 $S_{1(E)}$ 為拉力，得

$$h'S_{1(E)} \cos a_1 - H_{(E)}y' = 0 \quad (11-24)$$

以方程(11-19)中 H_E 之值代入上列方程中,即得,

$$S_{1(E)} = -\frac{ay'}{2hh' \cos a_1} \quad (11-25)$$

故 S_1 感應圖之 AB 段如圖(d)所示。

再以圖 11-13 (a) 之桿 3 為例。設支點 B 之平反力 H 爲正號 (即指向向右) 用 $\Sigma H = 0$ 於節點 B , 得

$$H + S_1 \cos a_1 - S_2 \cos a_2 = 0$$

故

$$S_1 = S_2 \frac{\cos a_2}{\cos a_1} - H \frac{1}{\cos a_1} \quad (11-26)$$

方程(11-4)可寫成

$$S_2 = -V_B - S_1 \sin a_1 - S_2 \sin a_2 \quad (11-27)$$

以方程(11-26)中 S_1 之值代入方程(11-27)中,並化簡,得,

$$S_2 = H \tan a_1 - V_B - S_2 (\tan a_1 \cos a_2 + \sin a_2) \quad (11-28)$$

若單位向下荷重在 BD 段,則 $S_2 = 0$, 故

$$S_{x(BD)} = H \tan a_1 - V_B \quad (11-29)$$

設單位向下荷重在 E 點,則

$$S_{x(E)} = \frac{H_{2(E)}}{\cos a_2} = -\frac{\alpha}{h' \cos a_2} \quad (11-30)$$

以上列方程 $S_{x(B)}$ 之值代入方程(11-28)中,並化簡,得,

$$S_{3(E)} = K - V_{B(E)} + H_{(E)} \tan a_1 \quad (11-31)$$

其中 K 之值與方程(11-10)相同。注意方程(11-31)與(11-12)相似,惟前者多 $H_{(E)} \tan a_1$ 一項。故 S_3 之感應圖如圖 11-13(e)所示,其 AB 段之作法係根據方程(11-31)段, BD 段之作法係根據方程(11-29)。

若以方程(11-15)中 $V_{B(E)}$ 之值及方程(11-19)中 $H_{(E)}$ 之值代入方程(11-31)中,則該方程變爲,

$$S_{3(E)} = a \left[K - \left(\frac{a+L}{aL} + \frac{\tan a_1}{2h} \right) \right] \quad (11-32)$$

由方程(11-32)可知,若 $K > \left(\frac{a+L}{aL} + \frac{\tan a_1}{2h} \right)$ 則 $S_{3(E)}$ 爲拉力(正號),

反是, $S_{3(B)}$ 爲壓力(負號), 於圖 11—13(e) 中, 係假定 $K < \left(\frac{a+L}{aL} + \frac{\tan \alpha_1}{2h} \right)$ 。

由方程(11—29)可知, 當荷重在 BL 段時, 若 $H \tan \alpha_1 = V_B$, 即 R_B 之傾度與桿 1 相同, 則 $S_3 = 0$, 故圖 11—13(e) 中 $S_3 = 0$ 之 Q 點在圖 11—13(a) 中 CI 及桿 1 延長之相交點。既知 Q 點之後, 則 S_3 之感應圖, 亦可用前述之代桁架法求之, 其代桁架如圖 11—13(f) 所示。此桁架既非一三鉸拱, 故支點 B 無平反力 H , 因此 S_3 感應圖如圖 11—13(g), 其作法與圖 11—12(g) 相似。

圖 11—14(a) 示一懸橋式之懸臂橋, 與習題 4—28 (i) 所示者相似。無論活荷重之位置如何, 欲求其反力及錨臂或懸臂中任何桿之應力時, 須先求得懸索或懸鏈桿之平分應力 H 。求 H 時又須先將懸跨 CD 所受荷重之一部分, 依求簡單跨兩端反力之法, 傳達於 C 鉸。設 M_B 爲此項荷重及懸臂 BC 所受荷重對於支點 B 之彎矩, 則

$$H = -\frac{M_B}{h} \quad (11-33)$$

既知 H 之後, 則所有懸鏈桿及吊桿等之應力, 均可用節點法求得。如用圖解法, 可以 H 爲極距作力多邊形如圖 11—14(b), 即得 S_1, S_2, \dots 及 V_1, V_2, \dots 等之應力。將 H 視作錨臂所受之外力, 即可求得其兩端 A 及 B 支點之反力及其中任何桿之應力。同此, 將 H 視作懸臂所受之外力, 即可求得其支點 B 之反力及其中任何桿之應力。將支點 B 所受之上述二項反力與 V_4 之值相加, 即得支點 B 之總反力。

祇二端錨臂有荷重時, 懸鏈桿之應力皆爲零, 故祇懸跨及某端懸臂有荷重時, 該端懸鏈桿始有應力。由方程(11—33)可知 M_B 爲最大時, H 之值亦係最大, 而單位荷重在 C 鉸之處時, M_B 之值爲最大, 故 H 感應圖之豎距以 C 鉸之處爲最大, 其值 $H_{(c)}$ 爲

$$H_{(c)} = \frac{a}{h} \quad (11-34)$$

如圖 11—14(c) 所示, H 之感應圖爲一三角形

單位荷重在錨臂時, H 之值既爲零, 故錨臂之反力及其中任何桿之應力, 皆與簡單跨相同。錨臂中任何 a 桿應力感應圖之 AB 段, 如圖(c) 所示, 若單

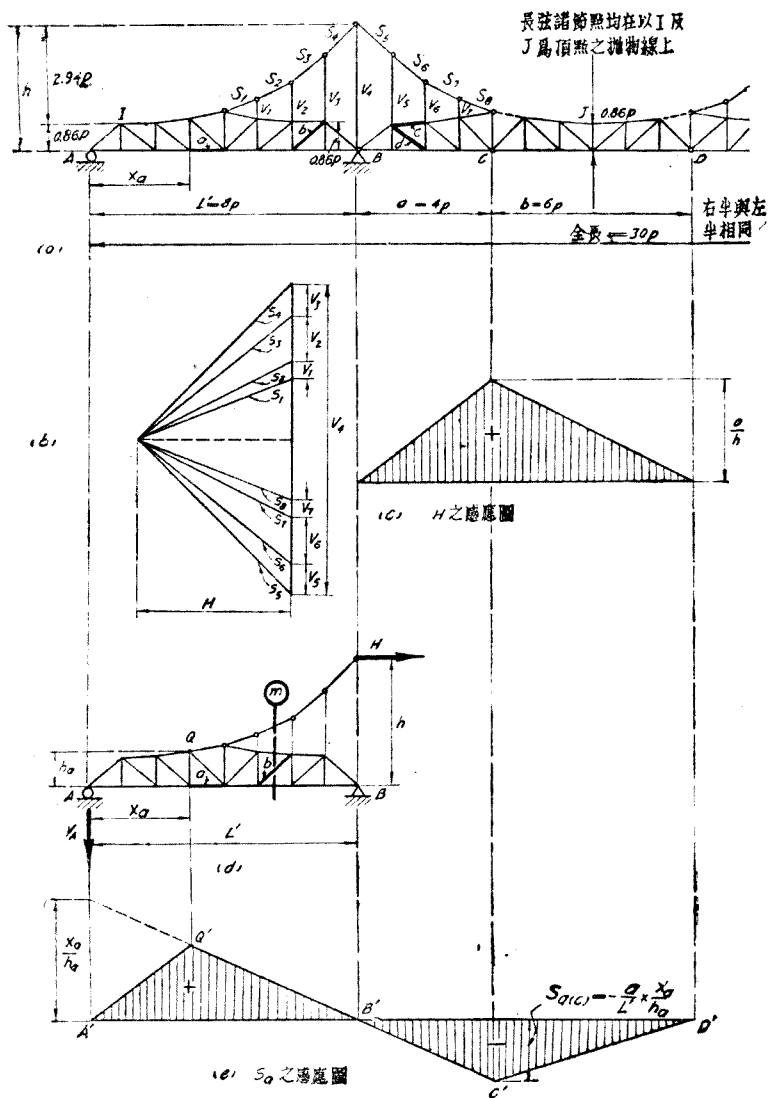


圖 11-14. 懸橋式懸臂橋之應力感應圖(一)

位荷重在 BD 段，則於圖(d)中用彎矩法，以 Q 為矩心，可得

$$S_a = V_A \frac{x_a}{h_a} = -H \times \frac{h}{h_a} \times \frac{x_a}{L'} \quad (11-35)$$

故 a 桿應力感應圖之 BD 段亦為一三角形，與 H 之感應圖相同，其於鉸 C 處之最大豎距為 $S_{a(c)}$ ，故，

$$S_{a(c)} = -H_{(c)} \times \frac{h}{h_a} \times \frac{x_a}{L'} = -\frac{a}{L'} \times \frac{x_a}{h_a} \quad (11-36)$$

故 S_a 之感應圖如圖 11-14 (e) 所示。注意其中 $Q'B'C'$ 係一直線。若欲求 b 桿之應力，可知圖 11-14 (d) 所示，用一截面 m ，用彎矩法，考慮該截面以左隔離體之平衡以求之。

圖 11-15 (a) 示圖 11-14 (a) 懸橋式懸臂橋之懸臂 BC 及懸跨 CD 。設欲求下弦桿 e 應力 S_e 之感應圖，以截面 m ，則 S_e 等於 E 點之彎矩 M_E 除以 h_E ，故

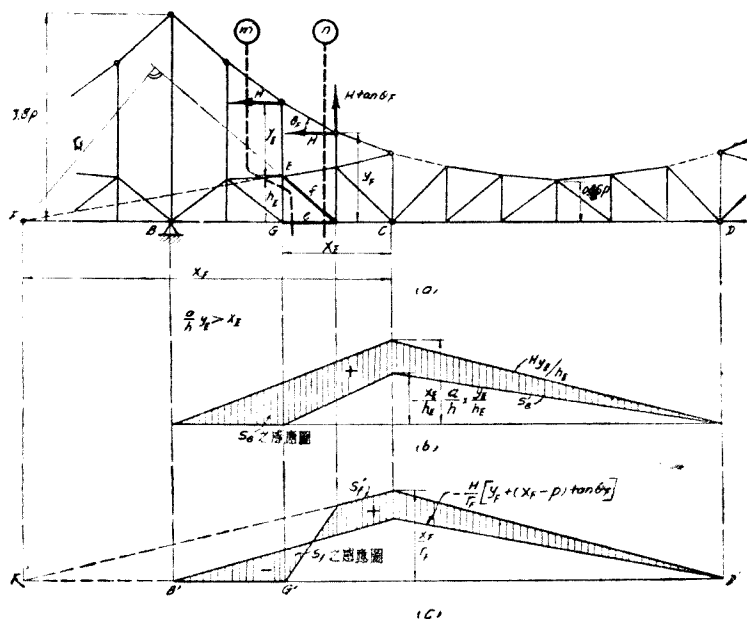


圖 11-15. 懸橋式懸臂橋之應力感應圖(二)

$$S_e = \frac{M_E}{h_B} \quad (11-37)$$

但

$$M_B = M'_E + Hy_B \quad (11-38)$$

其中 M'_E 為將懸臂 BC 視作一固定於 B 端之懸臂梁時 E 點之彎矩，故

$$S_e = \frac{M'_E}{h_B} + H \frac{y_B}{h_B} = S'_e + H \frac{y_E}{h_E} \quad (11-39)$$

其中 S'_e 為將懸臂 BC 視作一固定於 B 端之懸臂桁架時 e 桿之應力 S'_e 之值以單位向下荷重在 C 鉸時為最大，其值 $S'_{e(c)}$ 為

$$S'_{e(c)} = - \frac{x_E}{h_E} \quad (11-40)$$

以方程(11-34)中 $H_{(c)}$ 之值及方程(11-40)中 $S'_{e(c)}$ 之值代入方程(11-39)中，即得

$$S_{e(c)} = \frac{\alpha}{h} \times \frac{y_E}{h_E} - \frac{x_E}{h_E} = \frac{1}{h_E} \left(\frac{\alpha}{h} y_E - x_E \right) \quad (11-41)$$

由方程(11-41)可知，若 $\alpha y_E/h > x_E$ ，則 S_e 為拉力（正號），反是， S_e 為壓力（負號）。故 S_e 之感應圖如圖 11-15 (b) 所示，其作法係根據方程(11-39)，並假設 $\alpha y_E/h > x_E$ 。方程(11-39)，(11-40)，及(11-41)如用於求上弦桿之應力，則其中正負號均應互改。

如欲求斜桿 f 應力 S_f 之感應圖，可用圖 11-15 (a) 之截面⑥及與上述相似之方法，得，

$$\begin{aligned} S_f &= S'_f - H \frac{y_F}{r_F} - H \tan \theta_F \left(\frac{x_F - p}{r_F} \right) \\ &= S'_f - \frac{H}{r_F} [y_F + (x_F - p) \tan \theta_F] \end{aligned} \quad (11-42)$$

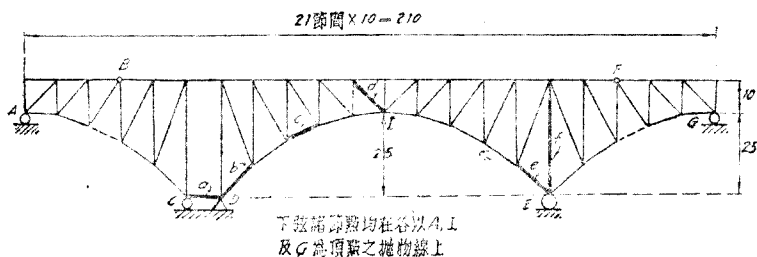
其中 S'_f 為將懸臂 BC 視作一固定於 B 端之懸臂桁架時 f 桿之應力， S'_f 之值以單位向下荷重在 C 鉸時為最大，其值 $S'_{f(c)}$ 為

$$S'_{f(c)} = + \frac{x_F}{r_F} \quad (11-43)$$

若荷重在懸臂之 BG 段，則 $S'_{f(BG)} = 0$ ，故 S'_f 之感應圖如圖 11-15 (c) 所示。由此減去 $(H/r_F) [y_F + (x_F - p) \tan \theta_F]$ 之感應圖，即得 S_f 之感應圖，如圖 11-15 (c) 所示。

習題 11—9. 設此拱形懸臂橋上弦之全長受有均佈荷重 w /公尺, 求其中英文字母指定諸桿之應力或其分應力

習題 11—10. 求此拱形懸臂橋中英文字母所指定諸桿之應力 (或其分



習題 11—9. 及 11—10.

應力) 感應圖, 並用所得之感應圖, 校核習題 11—9 之答案。

習題 11—11. 將習題 11—9 懸臂橋之支點 E 改為一定位支座, 並於 I 點加一鉸, 即得三鉸拱懸臂橋。設此橋上弦之全長受有均佈荷重 w /公尺, 求其中英文字母所指定諸桿之應力或其分應力。

習題 11—12. 求習題 11—11 三鉸拱懸臂橋中英文字母所指定諸桿之應力 (或其分應力) 感應圖, 並用所得之感應圖, 校核習題 11—11 之答案。

習題 11—13. 設圖 11—14 (a) 所示之懸橋式懸臂橋之節間長度 p 為 10 公尺, 其下弦之全長受有均佈荷重 w /公尺, 求 A 與 B 二支點之反力, 及此橋中 b, c 與 d 三桿之應力, 或其分應力。

習題 11—14. 求習題 11—13 中 A 與 B 二支點之反力感應圖, 及 b, c 與 d 三桿之應力 (或其分應力) 感應圖, 並用所得之感應圖, 校核習題 11—13 之答案。

11—5. 懸臂橋之最大反力, 切力及彎矩 懸臂橋在某活荷重下之最大反力, 切力及彎矩, 可由其感應圖求之。於較簡單之活荷重, 如均佈荷重或單個集中荷重, 並可求得其最大切力與彎矩圖, 及其絕對最大值。茲以圖 11—8(a) 所示之懸臂橋為

例。設活荷重爲一均佈荷重 w /公尺，由圖 11-8 之感應圖，可得：

最大反力：

$$\text{正號} \quad V_A = w \frac{L'}{2} \uparrow \quad (11-44)$$

$$\text{負號} \quad V_A = - \frac{w}{2} \frac{a(a+b)}{L'} \downarrow \quad (11-45)$$

$$\text{正號} \quad V_B = \frac{w}{2} \left(L' + c + \frac{a(a+b)}{L'} \right) \uparrow \quad (11-46)$$

$$\text{負號} \quad V_B = 0 \quad (11-47)$$

$$\text{正號} \quad V_C = \frac{w}{2} (2a + b + c) \uparrow \quad (11-48)$$

$$\text{負號} \quad V_C = 0 \quad (11-49)$$

最大切力：

$$\text{正號} \quad V_I = \frac{w}{2} \frac{(L' - x)^2}{L'} \quad (11-50)$$

$$\text{負號} \quad V_I = - \frac{w}{2} \left(\frac{x^2}{L'} + \frac{a(a+b)}{L'} \right) \quad (11-51)$$

$$\text{正號} \quad V_J = \frac{w}{2} (2x' + b) \quad (11-52)$$

$$\text{負號} \quad V_J = 0 \quad (11-53)$$

$$\text{正號} \quad V_K = \frac{w}{2} \frac{(b - x'')^2}{b} \quad (11-54)$$

$$\text{負號} \quad V_K = - \frac{w}{2} \frac{x''^2}{b} \quad (11-55)$$

最大彎矩：

$$\text{正號} \quad M_I = \frac{w}{2} x(L' - x) \quad (11-56)$$

$$\text{負號} \quad M_I = -\frac{w}{2} \frac{ax(a+b)}{L'} \quad (11-57)$$

$$\text{正號} \quad M_J = 0 \quad (11-58)$$

$$\text{負號} \quad M_J = -\frac{w}{2} x'(x' + b) \quad (11-59)$$

$$\text{正號} \quad M_K = \frac{w}{2} x''(b - x'') \quad (11-60)$$

$$\text{負號} \quad M_K = 0 \quad (11-61)$$

由上列諸方程即可得此懸臂橋 AE 段之最大正負號切力及彎矩圖如圖 11-16(b) 及 (c) 所示，其中之曲線均係拋物線。至此橋 EH 段之最大正負號彎矩圖與 AD 段者相同，惟最大正負號切力圖與 AE 段者相反。由此二圖得絕對最大正負號切力及彎矩如下：

絕對最大切力：

$$\text{正號} \quad V_I = +\frac{wL'}{2} \quad (11-62)$$

$$\text{負號} \quad V_I = -\frac{w}{2} \left[L' + \frac{a(a+b)}{L'} \right] \quad (11-63)$$

$$\text{正號} \quad V_J = +\frac{w}{2} (2a+b) \quad (11-64)$$

$$\text{正號} \quad V_K = +\frac{wb}{2} \quad (11-65)$$

負號
$$V_K = -\frac{wb}{2} \quad (11-67)$$

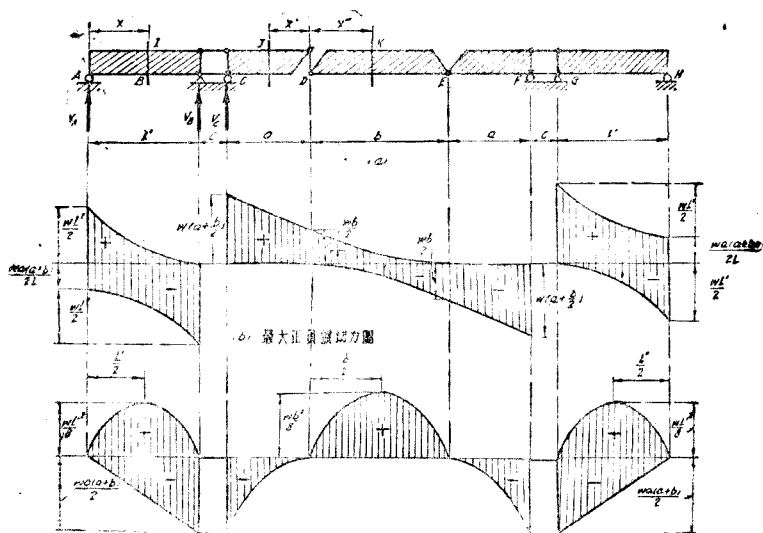


圖 11-16. 懸臂橋之最大剪力及彎矩圖

絕對最大彎矩:

正號
$$M_I = +\frac{wL'^2}{8} \quad (11-68)$$

負號
$$M_L = -\frac{wa(a+b)}{2} \quad (11-69)$$

負號
$$M_J = -\frac{wa(a+b)}{2} \quad (11-70)$$

正號
$$M_K = +\frac{wb^2}{8} \quad (11-71)$$

習題 11—15. 設活荷重爲單個集中荷重 P , 求圖 11—16(a) 懸臂橋之

- 最大正負號反力,
- 表示任何截面最大正負號切力及彎矩之方程,
- 最大正負號切力及彎矩圖,
- 絕對最大正負號切力及彎矩。

習題 11—16. 設活荷重爲 10 公噸標準貨車之代替荷重〔見圖 7—27

(c)〕, 求習題 11—1 懸臂橋每一主梁承受一車道荷重時之

- 最大正負號反力,
- 表示任何截面最大正負號切力及彎矩之方程,
- 最大正負號切力及彎矩圖,
- 絕對最大正負號切力及彎矩。

提示: 此橋之反力感應圖及各截面之切力及彎矩感應圖, 見習題 11—2

(a) 及 (b)。

11—6. 懸臂橋在側力下之應力 懸臂橋在側力之作用下, 亦常假設係一懸臂橋, 至少其懸臂之上下弦側, 支撐架在側力下之作用係如此。圖 11—17 (a) 示非平行桁架懸臂橋之左半, 其錨臂上弦 U_1U_4 之側力, 藉以 L_0U_1 及 L_6U_4 爲柱之橋門架而分別傳達於支點 L_0 及 L_6 , 與簡單跨相同。上弦 U_4U_9 之側力藉以 L_6U_4 , L_6U_6 , L_7U_7 及 L_7U_9 爲柱之橋門架或豎支撐而分別傳達於支點 L_6 及 L_7 。懸跨之側力作用與簡單跨相同, 其上下弦之側力由其兩端之橋門架而傳達於該端懸臂之下弦端節點, 由此再藉懸臂與錨臂之底支撐架而傳達於支點 L_7 , L_6 及 L_0 。但懸跨上弦之側力亦可經由節間 $U_{14}U_{15}$, 上弦 U_9U_{14} 之側支撐架, 及橋門架 L_7U_9 而傳達於支點 L_7 , L_6 及 L_0 。因此, 懸跨兩端之橋門架可以略去, 惟節間 $U_{14}U_{15}$ 中側支撐架之弦桿兩端之接合, 須特別設計, 使其可以傳遞側力而不能傳遞任何豎向荷重。此種方法, 祇上承式之懸臂橋有時採用之, 穿越式之懸臂橋多採用前法。惟橋中如有擺擺接合時, 懸跨一端與懸臂間之下弦桿, 亦須有上述能傳遞側力而不能傳遞縱力之特別設計。

以下須特別討論者, 祇錨臂下弦側支撐架之應力, 懸臂上下弦支撐架之應力, 及側力對於主桁架應力之影響。

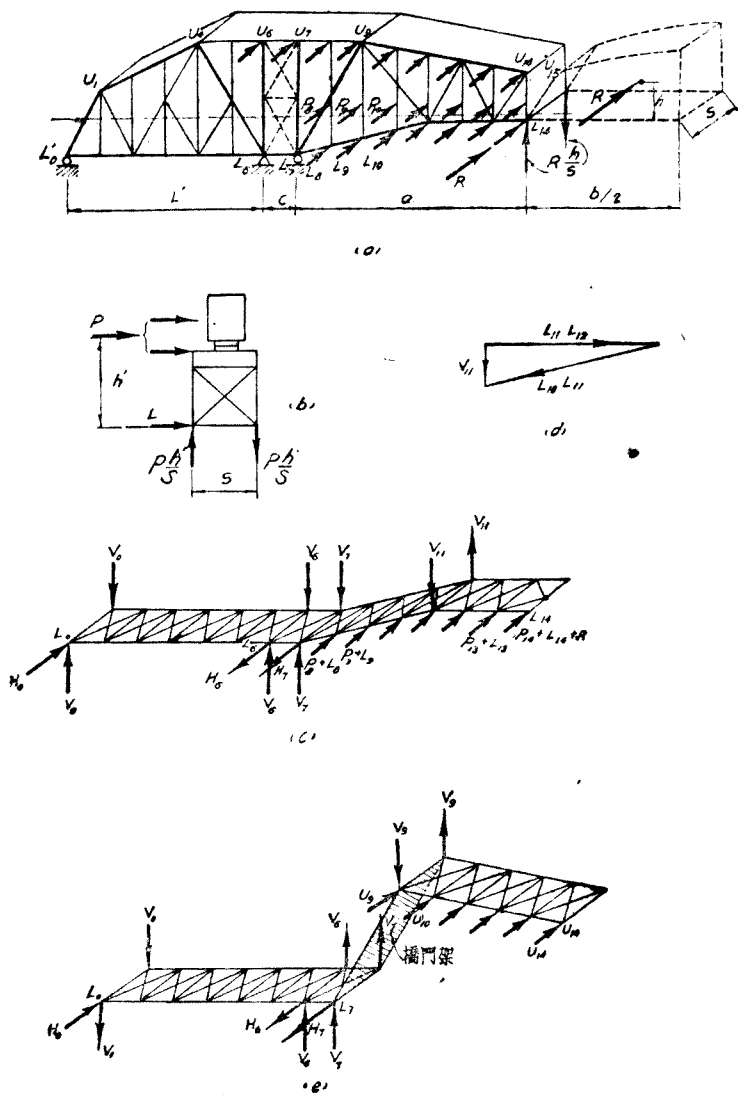


圖 11—17. 懸臂橋在側力下之應力

錨臂下弦及懸臂上下弦之側支撐架之作用，既假定係與其主桁架相同，故如圖 11—17(c)所示，其與懸跨下弦側支撐架之接合，亦採用一鉸。節間 L_6 L_7 中之交叉斜桿，亦不能傳遞任何切力。支點 L_6 及 L_7 之橋墩，係高而且細，可稍有扭轉作用，庶下弦側支撐架於其平面內，可以轉動，則上述側支撐架與其主桁架作用相同之假定，並無不合理之處。若支點 L_6 及 L_7 之橋墩係低而且粗，不能稍有扭轉作用，則懸臂上下弦之側支撐架應假定係於其平面內固定於支點 L_7 。同時錨臂之下弦側支撐架，應假定係一簡單跨，此二種不同之假設，祇與錨臂下弦側支撐架之應力有關。

若下弦側支撐架之作用如圖 11—17 (c)所示，而側力又常假定係一行動荷重，故其中任何桿應力為最大時之側力位置，可由其主桁架之切力及彎矩感應圖定之。由圖 11—8 中 V_I, M_I, V_J 及 M_J 之感應圖，可知：

- (1) 懸跨，懸臂，及錨臂之左部有側力時，則錨臂中與該左部相鄰節間中側支撐架斜桿之應力為最大。
- (2) 懸跨及懸臂有側力時，則錨臂中側支撐架弦桿之應力為最大。
- (8) 懸跨及懸臂有側力時，則懸臂中側支撐架斜桿與弦桿之應力均為最大。

茲假定懸跨與懸臂均有側力，如圖 11—17(a) 及 (c)所示。設懸跨左半所受之側力總量為 R ，其作用點與其下弦之高度為 h 。若將側力 R 傳達於懸臂右端之節點 L_{14} ，則二主桁架於該節點必受有二數量相等指向相反之豎力 Rh/S ，其中 S 為二主桁架之距離。節點 L_7 與 L_{14} 間橋面系及其荷重之側力 P_8, P_9, \dots 等，亦必各藉其豎支架而傳達於下弦之節點。因此，如圖 11—17 (b) 所示，二主桁架之諸節點亦必各受有二數量相等指向相反之豎力 Ph'/S ，其中 h' 為橋面系及活荷重所受側力合力與各下弦節點之距離。此二種豎力，均使二主桁架發生應力，惟與側支撐架之應力無關。

設 L_8, L_9, \dots 等為該節點所受之側力，則下弦側支撐架所受之側力如圖 11—17(c) 所示。其反力 H_0, H_6 與 H_7 之求法，與其主桁架相同。由此即求得此側支撐架中任何桿之應力，其方法與圖 9—4 及圖 9—8 所述者相

同。因下弦桿於節點 L_{11} 改變其傾度，下弦桿 $L_{10}L_{11}$ 及 $L_{11}L_{12}$ 之合力為一豎力 V_{11} ，其數量及指向可用 $\Sigma V=0$ 於節點 L_{11} ，如圖 11—17(d) 作一力三角形求之。此豎力 V_{11} 可視二主桁架之外力，此外力使支點 L_0, L_6 及 L_7 發生豎反力，並使 U_9L_{11} 以左所有之主桿發生應力。同此，下弦桿於節點 L_7 亦改變傾度，但其合力祇使支點 L_7 之豎反力 V_7 有改變，其改變之數量等於下弦桿 L_7L_8 之豎分反力。而指向相反。同此，懸臂上弦側支撐架 U_9U_{11} ，橋門架 U_9L_7 ，及錨臂下弦側支撐架 L_0L_7 亦成一懸臂桁架，如圖 11—17(e)，使懸臂上弦之節點側力 U_9, U_{10}, \dots 等傳達於支點 L_0, L_6 及 L_7 其應力之計算及其對於二主桁架應力之影響，與圖 11—17(c) 之懸臂桁架同。

由圖 11—17 可知：

(1) 此懸橋側力之使二主桁架發生應力者有三項：即圖(a)之 Rh/S ，圖(c)之 V_{11} 及圖(e)之 V_9 。注意 Rh/S 與 V_{11} 及 V_9 之指向相反。若主桁架上下弦桿有其他改變傾度之節點，則該點亦有相似之豎力。

(2) 圖(c) L_7L_{14} 及圖(e) U_9U_{14} 側支撐架之應力，即懸臂上下弦側支撐架之最大應力（根據圖 11—8(g) 及 (h) 之感應圖）。

(3) 將圖(c) 與 (e) 側支撐架 L_0L_7 弦桿之應力相加，即得錨臂側支撐架弦桿之最大應力〔根據圖 11—8(f) 之感應圖〕。

(4) 將圖(c) 與 (e) 側支撐架 L_0L_7 斜桿之應力相加，並加入將 L_0L_6 側支撐架視作簡單跨時節間負載切力為最大時之桿斜應力，即得錨臂側支撐架斜桿之最大應力〔根據圖 11—8(e) 之感應圖〕。

上述懸臂橋在側力下之應力分析，雖較複雜，讀者若澈底明瞭側力傳達於橋梁支點之「應力歷程」，則亦不致因誤解而發生訛誤。側支撐架之弦桿既係主桁架之弦桿，故二者之應力必須相加，以求其最大之應力。計算時應特別注意其正負號，為避免錯誤起見，宜先計算一主桁架（例如向風之桁架）之應力，在同一指向之側力下，其他一主桁架相同桿之應力正負號必相反。

側力常使主桁架發生相當之應力，此項應力設計時必須顧及之。若主桁架某桿在側力下之應力太大，並應設法以避之。

11-7. 威氏桁架橋之型式及特點^① 威氏桁架橋亦係靜定之連續橋，與懸臂橋相同，其不同之點即威氏桁架橋中不用鉸或搖擺接合，於其兩端間之諸支點處，採用一斜方形。因斜方形係一不穩定之形，故此項橋梁兩端之間，雖有若干贅餘之力，與連續橋同，但仍係靜定式。影片 XIX 示威氏桁架橋之斜方形，其中之豎桿祇架設時用之，架設完成後即當除去。



影片 XIX. 威氏桁架橋之斜方形

① 關於威氏桁架橋之專籍，刻下祇有史 (D. B. Steinman) 氏所著威氏桁架一書，讀者可參閱。惟本書所論，有若干點為該書所未提及者。

威氏桁架橋之簡單型式已見習題 4—28(c) 與 (j), 圖 4—30 及例題 4—14。此種型式之橋梁, 歐洲之工程學者^① 雖早已論及, 惟工程師未嘗注意其優點, 更未有實際採用其型式以建一橋梁者。迄至最近美國之威 (Ernest E. Wichert) 氏始發現其優點及其可以實用之處, 並於 1932 年在美國得有此項橋梁之專利權^②, 故美國稱此種橋為威氏桁架 (The Wichert Truss) 橋。

圖 11—18 示威氏桁架橋之各種型式。其中: (a) 為鉸梁橋; (b) 為桁架橋, 二者均係上承式; (c) 之兩端跨為上承式而中跨為下承式; (d) 為拱橋式, 其外表與圖 10—13 所示之連續橋, 與三鉸拉桿拱橋, 及圖 11—5 (e) 所示之三鉸懸臂拱橋均相同; (e) 為懸橋式, 其外表與圖 11—5 (f) 之懸橋式懸臂橋相同。注意此橋中間之二支點, 雖各有一六邊形, 但實際各祇四鉸, 故其作用與斜方形之四角各有一鉸相同。桁架之接合, 於理論須用樞接, 但實際常用鉚接。於威氏桁架橋, 斜方形四角之接合, 於理論及實際均應採用樞接, 蓋必如此始真有鉸之作用也。

威氏桁架橋之優點, 除包含 11—1 節所述關於懸臂橋之三項外, 並較懸臂橋為剛勁。且其反力及應力, 視其斜方形之尺寸而定, 故設計者對於其反力及應力之分佈, 有相當之控制, 此

① 例如彌 (Müller-Breslau) 氏及奧 (Ostenfeld) 氏等。

② 美國專利證 1,842,136 號。

則非任何其他型式之長跨橋梁所可及也。

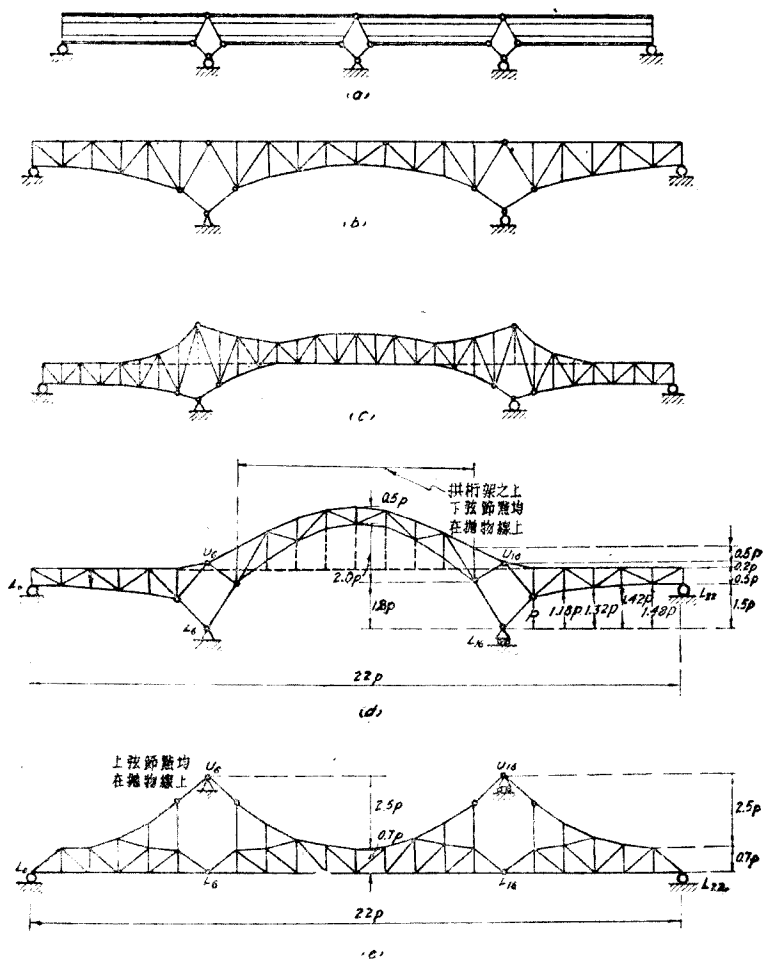


圖 11-18. 威氏桁架橋之型式

11-8. 威氏桁架橋之反力, 切力及彎矩 威氏桁架既係靜定, 故其反力可以靜力學求之。計算之主要方法有二: 其一即

4—14 節所述之代替法^①；其二即斜方形恆數法^②。茲分別述之如下：

(1) 代替法 代替法已詳見 4—14 節，其用以求威氏桁架反力之方法，又已詳見例題 4—14 及習題 4—28 與 4—32。其方法係將兩端或任何二支點以外所有支點之反力移去，而於斜方形中各添置一桿以代替之。因代替桿在荷重及所有反力之作用下之應力必為零，故威氏桁架橋有 n 數斜方形時，即有 n 數與方程(4—16)相同之聯立方程。由此項聯立方程，即可求得其所有被代替之反力，再用 $\Sigma M=0$ 及 $\Sigma V=0$ ，即可求得其餘二支點之反力。

(2) 斜方形恆數法 威氏桁架橋所受外力對於斜方形頂鉸之彎矩，藉其下半二桿之壓力以資抵抗，而此項抵抗力矩，可以斜方形下之反力，乘以所謂斜方形恆數 (rhomboid constant) 表之。圖 11—19(a) 示一威氏桁架橋之左端及其支點 B 上之任何斜方形。將其下半之二桿 1 及 2 向上延長，各與經過其頂鉸 C 之平線相交於 D 及 E 二點，得 t_1, t_2, p_1 及 p_2 諸距離。於 C 鉸及支點 B 之左，取一截面③，如圖所示。設 M_L 等於該面以左所有任何豎向荷重 ΣP 對於 C 鉸之彎矩，並設桿 1 之應力為拉力，將其於 D 點分解為平豎二分力 H_1 及 V_1 。鉸 C 之彎

① 代替法可以用之以求威氏桁架橋之反力，係本書著者所發現。見國立清華大學理科報告甲種第 2 卷(1934 年)，第 6 期，365 至 378 頁。

② 此法係史 (D. B. Steinman) 氏所創，見 131 頁註。

矩 M_C 既等於零，故考慮截面 $@$ 以左隔離體之平衡，可得，

$$M_C = V_A x_A - M_L - V_1 t_1 = 0$$

故

$$V_A x_A - M_L = V_1 t_1 \quad (11-71)$$

設桿 2 亦為拉力，用 $\Sigma H=0$ 於支點 B ，可得

$$H_1 - H_2 = V_1 \times \frac{P_1}{k} - V_2 \times \frac{P_2}{k'} = 0$$

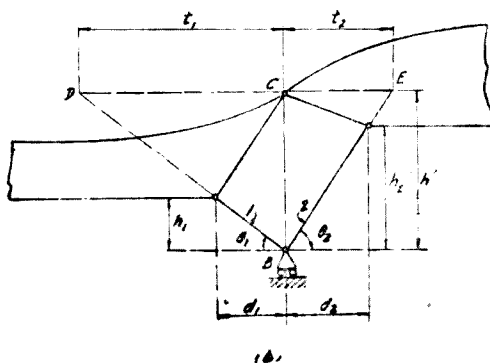
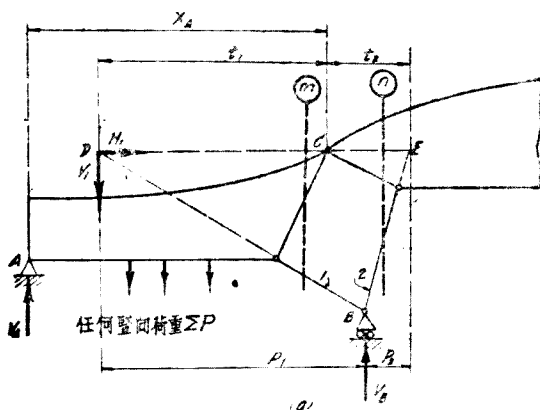


圖 11-19. 威氏桁架橋之斜方形恆數

或

$$V_2 = V_1 \frac{P_1}{P_2} \quad (11-72)$$

再用 $\Sigma V=0$ 於支點 B , 可得,

$$V_1 + V_2 + V_B = 0 \quad (11-73)$$

由方程(11-72)及(11-73), 可得

$$V_1 = -V_B \frac{P_2}{P_1 + P_2} \quad (11-74)$$

代入方程(11-71)中, 得,

$$V_A x_A - M_L = -V_B \frac{P_2 t_1}{P_1 + P_2} = -V_B \frac{P_2 t_1}{t_1 + t_2} = -V_B \Delta_{BL} \quad (11-75)$$

其中

$$\Delta_{BL} = \frac{P_2 t_1}{t_1 + t_2} \quad (11-76)$$

Δ_{BL} 即考慮截面⑩以左隔離體平衡時所得之斜方形恆數。同此, 若於 C 鉸及支點 B 之右取一截面⑪, 用 $M_C=0$, 考慮該截面以左隔離體之平衡, 可得

$$V_A x_A - M_L = -V_B \frac{P_1 t_2}{P_1 + P_2} = -V_B \frac{P_1 t_2}{t_1 + t_2} = -V_B \Delta_{BR} \quad (11-77)$$

其中

$$\Delta_{BR} = \frac{P_1 t_2}{t_1 + t_2} \quad (11-78)$$

由方程(11-75)及(11-77)可知, 所謂斜方形恆數者, 即其下有向上單位反力時, 截面以左諸力對於其頂鉸之彎矩。 Δ_{BL} 及 Δ_{BR} 之值所以不同者, 因考慮截面⑩以左隔離體之平衡時, 尚

須計及反力 V_B 對於鉸 C 之彎矩，其值為 $-V_B(P_1-t_1)$ 故

$$\Delta_{BR} - \Delta_{BL} = P_1 - t_1 \quad (11-79)$$

注意 $P_1 + P_2 = t_1 + t_2$ ，則方程(11-79)亦可由方程(11-78)減去方程(11-76)求得之。

若鉸 C 與支點 B 同在一豎線上，如圖 11-19(b)，則 $P_1 = t_1, P_2 = t_2$ ，故

$$\Delta_{BL} = \Delta_{BR} = \Delta_B = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} \quad (11-80)$$

由圖 11-19(b)之幾何關係，可得下列諸方程。

$$\Delta_B = h' \frac{d_1 d_2}{d_1 h_2 + d_2 h_1} = \frac{h'}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2} \quad (11-81)$$

實際上威氏桁架橋中 d_1 及 d_2 之值常相等，設其值為 d ，則

$$\Delta_B = \frac{dh'}{h_1 + h_2} \quad (11-82)$$

若 $d_1 = d_2 = d$ ，並 $h_1 = h_2 = h$ ，則 $\theta_1 = \theta_2 = \theta, t_1 = t_2 = t$ ，

$$\Delta_B = \frac{h'd}{2h} = \frac{h'}{2 \tan \theta} = \frac{t}{2} \quad (11-83)$$

威氏桁架橋有 $n+2$ 數之反力時，即有 n 數之斜方形，因此即有 n 數與方程(11-75)或(11-77)相似之方程，再加 $\Sigma M=0$ 及 $\Sigma V=0$ 二方程，即可求得 $n+2$ 數之反力。

既求得其反力之後，威氏桁架橋之切力及彎矩，可用通常之法求之。圖 11-20(a)示一威氏桁架橋及其所受之荷重。其反力 V_A 及 V_C 係向上，為正號。 V_B 及 V_D 係向下，為負號。圖 11-20(b)及(d)各示其切力及彎矩圖，彎矩圖之作法，係先

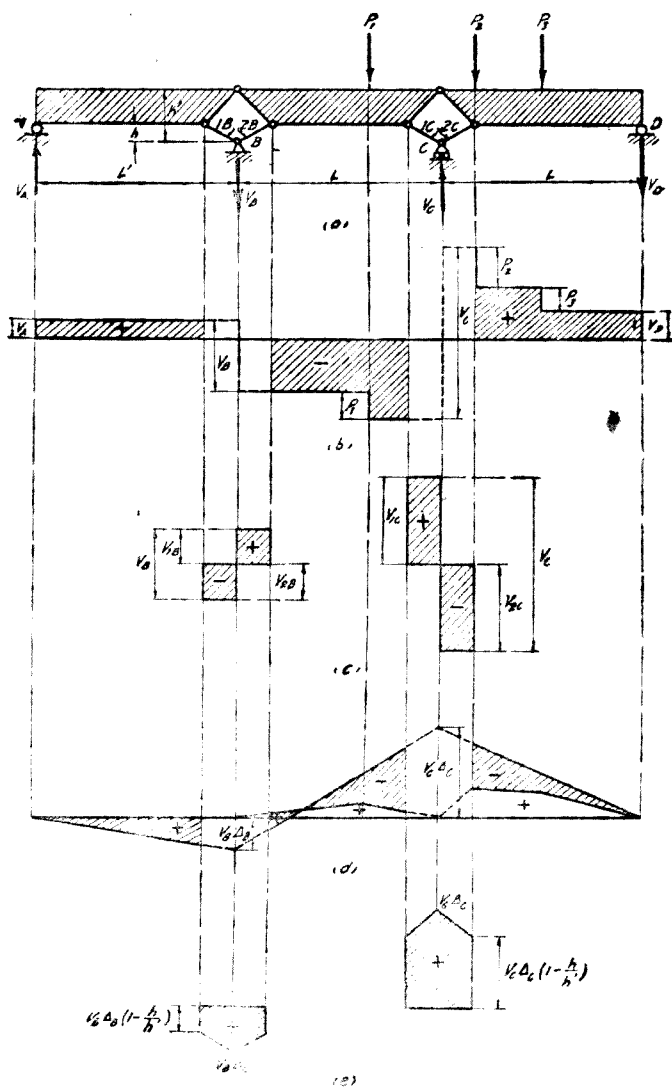


圖 11-20. 威氏桁架橋之切力及彎矩圖

作其各跨之簡單梁彎矩圖，再加（代數加法）其兩端間各支點

之彎矩圖，其方法與作連續梁彎矩圖者完全相同。由方程(11—75)或(11—77)可知，威氏桁架橋兩端間各支點之彎矩，各等於其斜方形恆數乘以反力。若反力係向上（正號），則該支點之彎矩為負號，反是為正號。作圖 11—20(b)及(d)之切力及彎矩圖時，未曾將各支點斜方形下部二桿對於桁架或鈹梁之切力及彎矩計入，故此二圖祇表示斜方形以外桁架或鈹梁之切力及彎矩圖。因此，圖(b)及(d)中斜方形以內之部分，均以虛線表之。如欲求桁架或鈹梁斜方形以內部分切力及彎矩圖，須將由於斜方形下部二桿應力之切力及彎矩圖加入（代數加法），此項切力及彎矩圖之作法如下：

圖 11—21 (a)示威氏桁架橋某支點 B 之斜方形，為簡明起見，設上下二鉸 C 及 B 同在一豎線上，而 $d_1 = d_2 = d$ 。設其下之反力 V_B 係向上（正號），用節點法考慮節點 B 之平衡。假設其下部二桿 1 及 2 之應力為拉力，可得其平豎分應力如下：

$$V_1 = -V_B \frac{h_1}{h_1 + h_2} = -V_B \frac{\Delta_B h_1}{dh'} \quad (11-84)$$

$$V_2 = -V_B \frac{h_2}{h_1 + h_2} = -V_B \frac{\Delta_B h_2}{dh'} \quad (11-85)$$

$$H_1 = H_2 = -V_B \frac{\Delta_B}{h'} \quad (11-86)$$

因此， V_1, V_2, \dots 等之指向如圖 11—21(b)所示。因斜方形下部二桿有平分應力，故求斜方形以內橋梁任何截面於該二桿應力之彎矩時，應先確定該截面中彎矩軸之高度。茲設斜方形以

內橋梁所有截面中彎矩軸之高度與斜方形頂鉸者相同，即可得橋梁由於桿 1 及 2 應力之切力及彎矩圖各如圖 11—21 (c) 及 (d) 所示。此二圖係假定反力 V_B 係向上（正號），如反力係向下（負號），則此二圖之正負號恰相反。

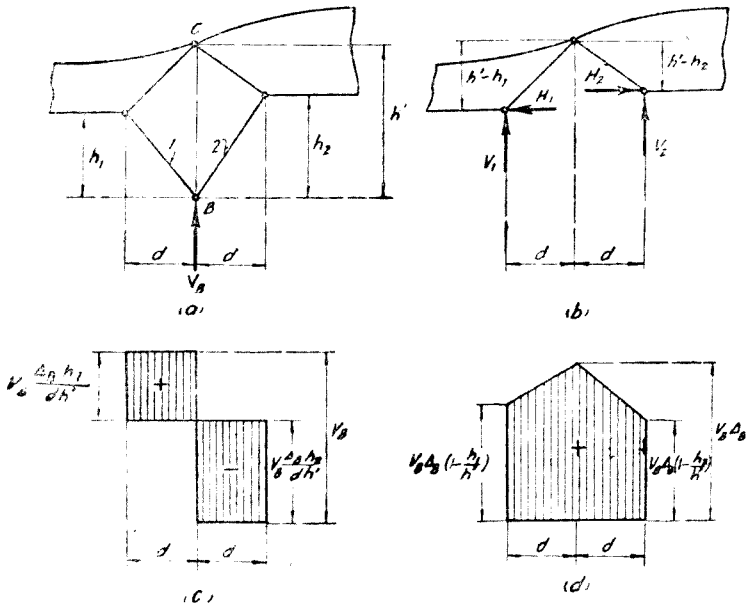


圖 11—21. 由於斜方形下部二桿應力之切力及彎矩圖

圖 11—20 (c) 及 (e) 各示支點 B 及 C 斜方形下部二桿之切力及彎矩圖，將此二圖與圖 (b) 及 (d) 相加（代數加法），即各得威氏桁架橋斜方形以內部分之切力及彎矩圖。注意於此項彎矩圖中，斜方形頂鉸處之彎矩必等於零。

例題 11—1. 求此威氏桁架橋在所示荷重 P 下各支點之反力。(a) 用代替法 (b) 用斜方形恆數法。

解答:

(a) 用代替法 此例題與習題 4-28(j) (2) 完全相同。以桿 1 及 2 代替 V_6 及 V_{12} , 所有之計算如下:

使 $V_6 = V_{12} = 0$:

$$S_1 = +\frac{1}{3} \times \frac{6 \times 4}{4} = +2$$

$$S_2 = +\frac{2}{3} \times \frac{6 \times 4}{4} = +4$$

使 $P = 0, V_3 = 1 \uparrow$,

$$a_1 = -2.5, \quad a_2 = -2$$

使 $F = 0, V_{12} = 1 \uparrow$

$$\beta_1 = -2, \quad \beta_2 = -2.5$$

用方程(4-17)得,

$$V_6 = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2.5 & -2 \\ -2 & -2.5 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{9} \downarrow$$

$$V_{12} = -\frac{\begin{vmatrix} -2.5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2.5 & -2 \\ -2 & -2.5 \end{vmatrix}} = +\frac{8}{3} \uparrow$$

用 $\Sigma M = 0$ 與 $\Sigma V = 0$, 得,

$$V_0 = +\frac{1}{3} \uparrow \quad V_{18} = -\frac{2}{3} \downarrow$$

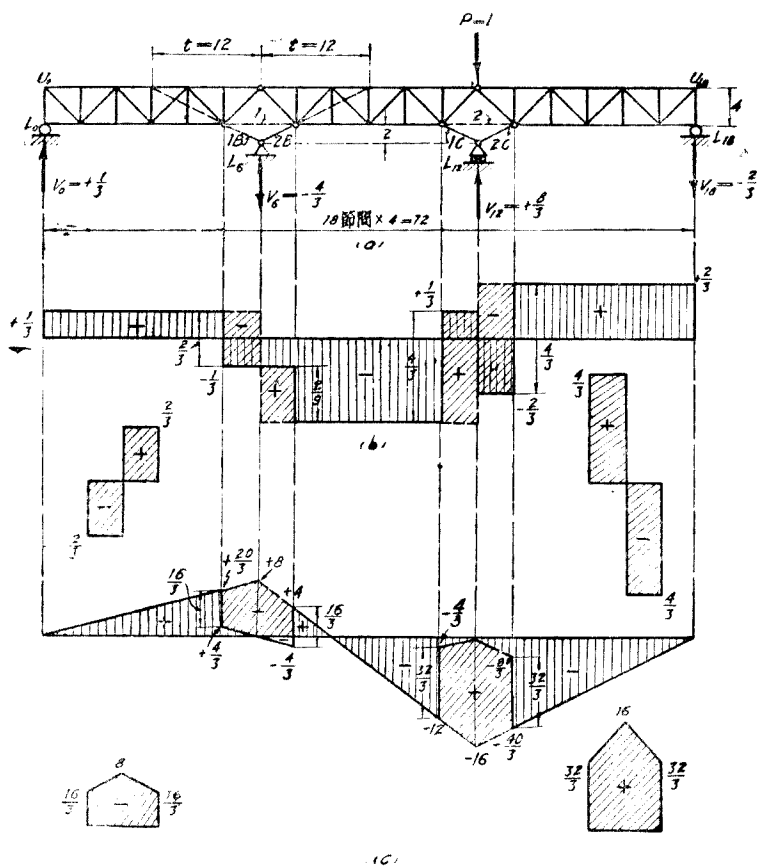
(b) 用斜方形恆數法 l 之值為 12, 故 $\Delta_6 = \Delta_{12} = l/2 = 6$, 於是可得下列四聯立方程:

$$M_{T_6} = 0: \quad 24V_0 + 6V_6 = 0$$

$$M_{U_{12}} = 0: \quad 48V_0 + 24V_6 + 6V_{12} = 0$$

$$\Sigma M_{U_{18}} = 0: \quad 72V_0 + 48V_6 + 24V_{12} - 24 \times 1 = 0$$

$$\Sigma V = 0: \quad V_0 + V_6 + V_{12} + V_{18} - 1 = 0$$



例題 11-1 與 11-2.

解上列之四聯立方程,即可得,

$$V_0 = +\frac{1}{3} \uparrow$$

$$V_6 = -\frac{4}{3} \downarrow$$

$$V_{12} = +\frac{8}{3} \uparrow$$

$$V_{18} = -\frac{2}{3} \downarrow$$

習題 11-17. 用(1)代替法與(2)斜方形恆數法, 求下列威氏桁架橋之反力:

(a) 圖 11-18(d) 所示之拱橋式威氏桁架橋, 其中 $P=4$ 。 U_6 至 U_{16} 受有均佈荷重 2/公尺, 節點 U_6 並有一集中荷重 32。

(b) 圖 11-18(e) 所示之懸橋式威氏桁架橋, 其中 $P=4$ 。 L_6 至 L_{16} 受有均佈荷重 2/公尺, 節點 L_6 並有一集中荷重 32。

例題 11-2. 求例題 11-1 中威氏桁架橋在所示荷重下之切力及彎矩圖

解答: 先將斜方形下部二桿之應力略去, 用通常方法, 得切力及彎矩圖如附圖(b)及(c)所示。因荷重 P 在支點 L_{12} 之上, 故各跨之簡單梁彎矩圖均為零。注意 $\Delta_6 = \Delta_{12} = 6$, 故支點 6 及 12 之彎矩如下:

$$M_6 = -V_6 \Delta_6 = - \left(-\frac{4}{3} \right) (6) = +8$$

$$M_{12} = -V_{12} \Delta_{12} = - \left(\frac{8}{3} \right) (6) = -16$$

注意 $d=4$, $h=6$, $h_1=h_2=2$, 用方程(11-84)至(11-86), 可得,

$$V_{1B} = V_{2B} = - \left(-\frac{4}{3} \right) \left(\frac{6 \times 2}{4 \times 6} \right) = +\frac{2}{3}$$

$$H_{1B} = H_{2B} = - \left(-\frac{4}{3} \right) \left(\frac{6}{6} \right) = +\frac{4}{3}$$

$$V_{1C} = V_{2C} = - \left(\frac{8}{3} \right) \left(\frac{6 \times 2}{4 \times 6} \right) = -\frac{4}{3}$$

$$H_{1C} = H_{2C} = - \left(\frac{8}{3} \right) \left(\frac{6}{6} \right) = -\frac{8}{3}$$

依圖 11-21 所示之法, 得橋梁由於斜方形下部二桿應力之切力及彎矩圖如附圖所示。再與前得之切力及彎矩圖相加(代數加法), 即得所求之切力及彎矩圖, 如附圖中之有豎線部分者。

習題 11-18. 求習題 11-17 中二威氏桁架橋之切力及彎矩圖。

11-9. 威氏桁架橋之反力、切力及彎矩感應圖 求威氏桁架橋之反力感應圖時, 可用代替法或定點(fixed points 法, 茲分述如下:

(1) 代替法 求威氏桁架橋之反力感應圖時，如用代替法，甚為簡易，因方程(4-17)分母中之 α, β, \dots 之值，皆與荷重之位置無關。於兩跨之威氏桁架橋，計算時祇須以一桿代替一反力，其中任何反力感應圖之形狀，與其代替該反力之桿應力 S 感應圖者相同。由方程(4-15)， $X = -S/\alpha$ ，則此點自極明顯。圖 11-21(a) 示一兩跨之威氏桁架橋，圖(b)示其中支點 C 反力 V_C 之感應圖，其形狀與該支點移去後，其代替桿應力 S 感應圖相同，即均係三角形 $A'B'C'$ 。此感應圖係假設荷重能直接加於頂鉸 D 點（如此橋係下承式，即 E 及 F 之間有一橫梁吊於鉸 D ）。若荷重不能直接加於頂鉸 D 點，則 V_C 之感應圖為梯形 $A'EFB'$ 。

於三跨或多跨之威氏桁架橋，其反力感應圖之形狀，常不與其代替桿應力感應圖者相同。因威氏桁架橋係靜定結構，於任何跨中任何反力感應圖必係一直線。圖 11-22(c) 示三跨之威氏桁架橋。求其反力 V_B 及 V_C 之感應圖時，可先作其代替反力 V_B 及 V_C 之桿 1 及 2 之應力感應圖，如圖(d)所示，再依前法分別計算反力 V_B 及 V_C 感應圖於各支點之豎距。荷重在橋之兩端 A 及 D 時， V_B 及 V_C 之值當然為零。故須計算者，祇 B 及 C 二支點 V_B 及 V_C 之值。由此得 V_B 及 V_C 感應圖如圖(e)及(f)所示。再用 $\sum M=0$ 及 $\sum V=0$ ，計算荷重在 B 及 C 二支點時 V_A 及 V_D 之值，即可得其感應圖如圖(g)及(h)所示。

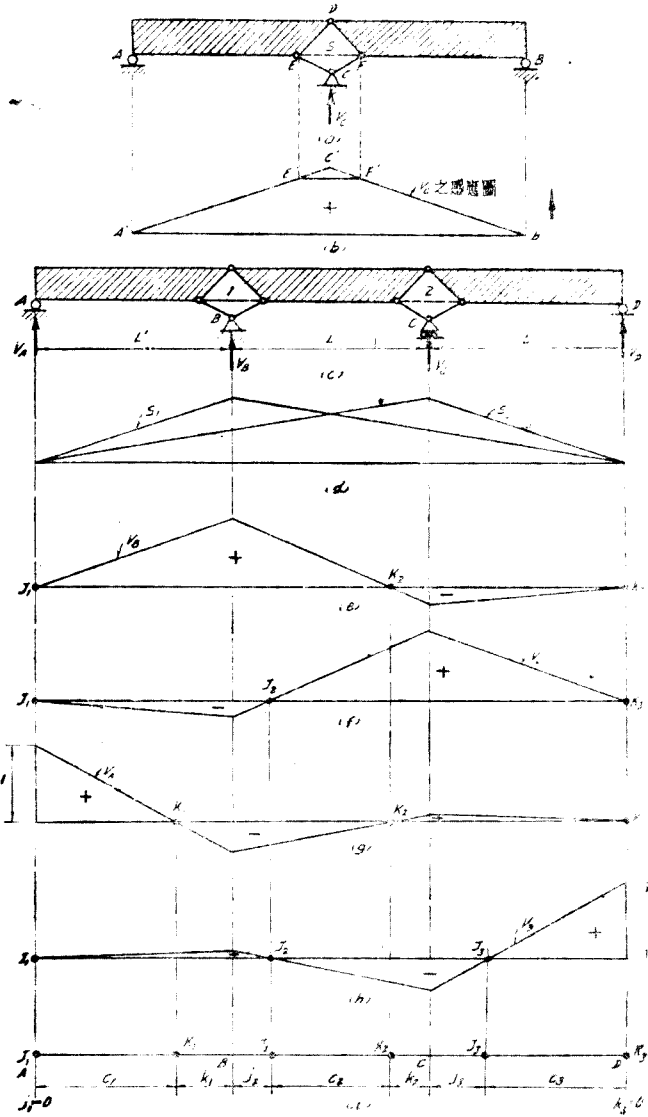


圖 11-22. 威氏桁架橋之反力感應圖

(2) 定點法① 圖 11-22(e) 至 (h) 反力感應圖中反力爲零之諸點 J_1, J_2, \dots 與 K_1, K_2, \dots 等稱爲定點，因其位置祇與威氏桁架橋之跨長與斜方形板數有關，而與荷重之情形無關。 J_1, J_2, \dots 等稱爲左定點， K_1, K_2, \dots 等稱爲右定點。如圖 11-22 (i) 所示，每跨中均有左右二定點各一，將該跨分爲 j, c 及 k 三段。 j, c 及 k 各示左定點 J 與左支點間，左右二定點 J 與 K 間，及右定點 K 與右支點間之距離。於左右兩端跨中，因左右二定點 J_1 及 K_2 各與支點 A 及 D 相合，故 j_1 及 k_2 均爲零。

於圖 11-22(e) 至 (h) 中，設以一豎向集中荷重置於 K_2 點，則該點以左所有支點之反力如 V_A 及 V_B 均爲零〔圖(e)及(g)〕。因此， K_2 點之彎矩亦爲零，亦即 K_2 點以右所有支點之反力 V_C 及 V_D 對於 K_2 點之彎矩爲零。若該荷重置於 K_2 點之左之任何點，則 K_2 點以右所有支點反力 V_C 及 V_D 之值，與該荷重在 K_2 點時之值相比較，其改變率相同，因圖(f)及(h)中反力 V_C 及 V_D 之感應圖於 K_2 點以左係相似，且均經過 J_2 點。該荷重在 K_2 點時，反力 V_C 及 V_D 對於 K_2 點之彎矩既爲零，故該荷重在 K_2 點以左之任何點時，反力 V_C 及 V_D 對於 K_2 點之彎矩亦爲零，亦即 K_2 點之彎矩爲零。由是可知：若將任

① 「定點」係立 (W. Ritter) 氏研究連續梁之圖解法時所發現。德文爲 Die Festpunkte。威氏桁架橋定點特性及其圖解法（即虛功法）分別見 131 頁註所舉參考書中之第 24 與第 7 章。

何豎向荷重置於任何右定點 K 以左時，該定點 K 之彎矩必爲零。同此，若將任何豎向荷重置於任何左定點 J 以右時，該定點之彎矩亦必爲零。

圖 11-23 (a) 示任何二跨間之斜方形及其支點 B 。設右

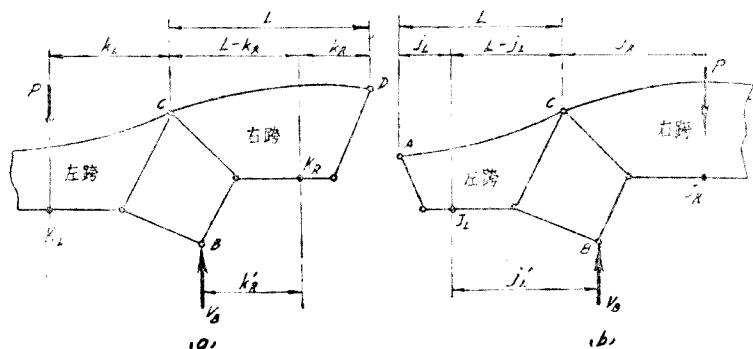


圖 11-23. 左右二定點 K 及 J 之計算法

跨中之 K_R 點爲已知，其與鉸 C 及 B 之平距離名爲 $L - K_R$ 及 K_R ，所欲求得者爲左跨中 K_L 點與鉸 C 之平距離 K_L 。設以一豎向集中荷重 P 置於 K_L 點，則 K_L 點以左所有之反力皆爲零，由方程 (11-75)，則

$$-PK_L = -V_B \Delta_{BL} \quad (11-87)$$

又 K_R 點之彎矩亦爲零，故

$$P(L + K_L - K_R) = V_B K_R \quad (11-88)$$

解上列二聯立方程式可得

$$K_L = \frac{L - K_R}{\frac{K_R}{\Delta_{BL}} - 1} \quad (11-89)$$

如圖 11—23(b) 所示，設左跨中 J_L 點爲已知，其與鉸 C 及 B 之平距離各爲 $L - j_L$ 及 j'_L 所欲求得者爲右跨中 J_R 點與鉸 C 之平距離 j_R ，用以上相似之方法，可得

$$j_R = \frac{L - j_L}{\frac{j'_L}{\Delta_{BR}} - 1} \quad (11-90)$$

若斜方形之頂底二鉸 C 及 B 同在一豎線上，則 $\Delta_{BL} = \Delta_{BR} = \Delta_B$ ， $K'_R = L - K_R$ ， $j'_L = L - j_L$ ，故方程 (11-89) 及 (11-90) 各變爲，

$$K_L = \frac{L - K_R}{\frac{L - K_R}{\Delta_B} - 1} \quad (11-91)$$

$$j_R = \frac{L - j_L}{\frac{L - j_L}{\Delta_B} - 1} \quad (11-92)$$

故威氏桁架橋各跨中右定點 K 之定法，須自其右端跨起首，依次至其左端跨，其右端跨之右定點 K 與其右支點相合。各跨中左定點 J 之定法，須自其左端跨起首，依次至其右端跨，其左端跨之左定點 J 與其左支點相合。於對稱式之橋梁，則各跨中左右二定點之位置，對於橋梁之中線，亦成對稱。

觀察圖 11—22(e) 至 (h) 可知：任何支點之反力感應綫，必經過該支點以右各跨中之右定點 K ，及該支點以左各跨中之左定點 J 。其最大之豎距在該支點斜方形之頂鉸處。兩端支點反力感應圖之最大豎距爲 1。中間任何支點反力感應圖之最大豎距可用下法求之：

圖 11—24(a) 示任何支點 B ，其斜方形頂底二鉸 C 及 B 不

同在一豎線。若單位豎向荷重在 K_L 點，則該點以左所有支點之反力均為零。由方程 (11-75)，則支點 B 之反力 $V_{B(K_L)}$ 如下：

$$-1 \times K_L = -V_{B(K_L)} \Delta_{BB}$$

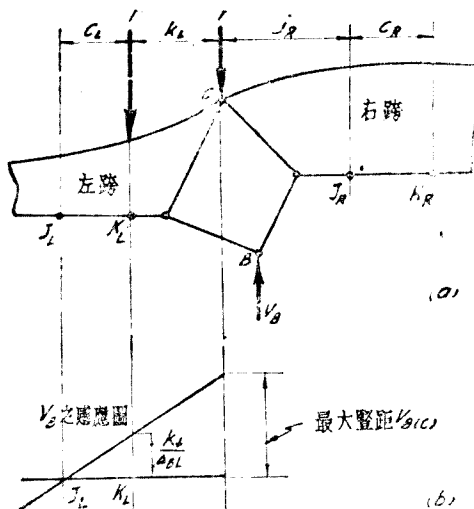


圖 11-24. 中間支點反力感應圖之最大豎距

故

$$V_{B(K_L)} = \frac{K_L}{\Delta_{BL}} \quad (11-93)$$

圖 11-24(b) 示反力 V_B 感應圖之一部，此感應線既必經過左跨之左定點 J_L ，故其最大豎距 $V_{B(C)}$ 為

$$V_{B(C)} = \frac{K_L}{\Delta_{BL}} \times \frac{K_L + C_L}{C_L} = \frac{K_L}{\Delta_{BL}} \left(1 + \frac{K_L}{C_L} \right) \quad (11-94)$$

若斜方形之頂底二鉸 C 及 B 同在一豎線上，則方程 (11-93) 及

(11-94) 中之 Δ_{BL} 均變為 Δ_B , 反力 V_B 感應圖之最大豎距 $V_{B(c)}$ 亦可用下列方程計算之^①。

$$V_{B(c)} = 1 + \frac{K_L}{C_L} + \frac{j_R}{C_{R_1}} \quad (11-95)$$

威氏桁架橋任何截面之切力及彎矩感應圖，可由其反力感應圖求之。設欲求圖 11-25 (a) 威氏桁架橋左端跨中截面 E 之切力 V_E 及彎矩 M_E 之感應圖，若單位荷重在該截面之右，則該截面之切力 V_E 等於支點 A 之反力 V_A ，即 $V_E = V_A$ 。該截面之彎矩 M_E 等於支點 A 之反力 V_A 乘 x_E ，即 $M_E = V_A x_E$ 。故 V_E 感應圖之 ED 段等於 V_A 感應圖， M_E 感應圖之 ED 段等於 V_A 感應圖乘以 x_E 。於 AB 段， V_E 之感應圖必與 EB 段者平行， M_E 之感應圖必係一直線。故得 V_E 及 M_E 之感應圖如圖 11-35 (b) 及 (c) 所示。觀此二圖可知： V_E 及 M_E 之感應圖，與圖 11-25 (d) 所示之懸臂橋截面 E 者完全相同。 V_E 及 M_E 感應圖之 $J_1 K_1$ 段，與將該段視作一簡單跨時 V_E 及 M_E 感應圖相同。故 M_E 感應圖於 $J_1 K_1$ 段之豎距常在一拋物線上，其中線之最大豎距為 $c_1/4$ 。圖 11-25 (d) 之懸臂橋，可視作係求 V_E 及 M_E 時該威氏桁架橋之代橋，與前述之代梁法相似。同此，欲求中跨中截面 F 之切力 V_F 及彎矩 M_F 感應圖，其代替懸臂橋如圖 11-25 (e) 所示。先將 $J_2 K_2$ 視作一簡單跨，求 V_F 及 M_F 之感應圖，再依懸臂橋感應圖之作法，即得其

① 其證明列為習題 11-21。

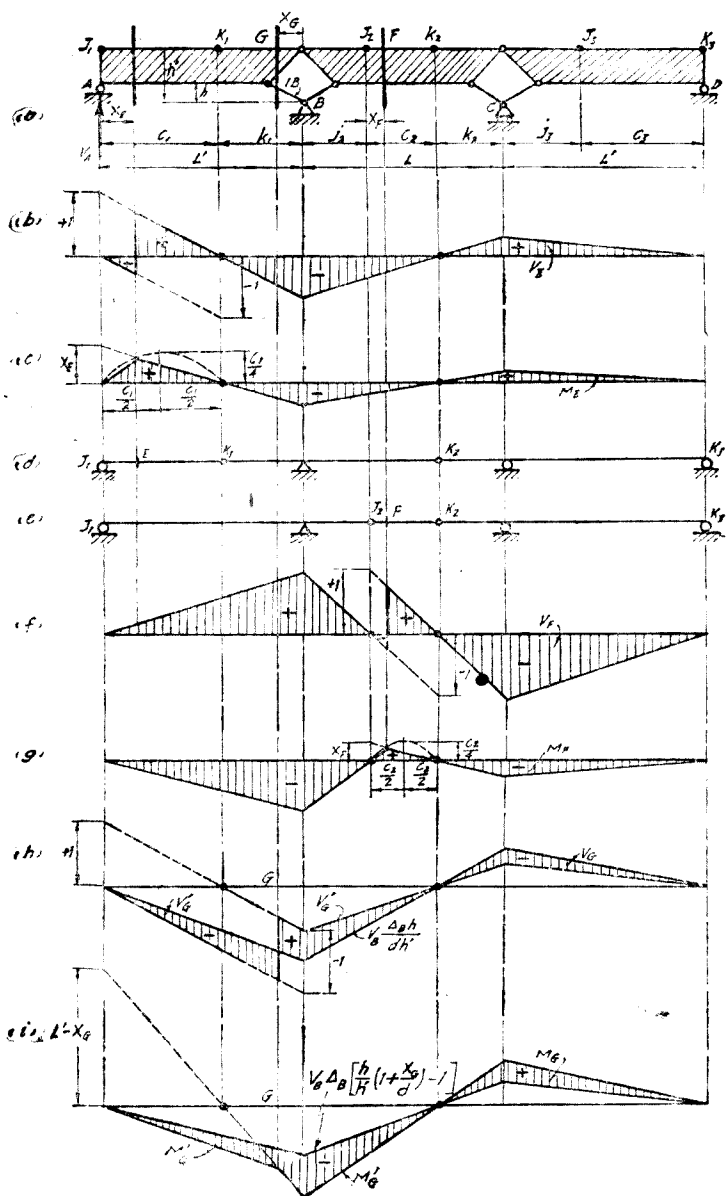


圖 11-25. 威氏桁架橋切力及彎矩之感應圖

感應圖如圖 11—25(f)及(g)所示。由是可知：威氏桁架實與懸臂橋極其相似，惟後者中鉸之位置係固定，而前者中鉸之位置非固定耳。

上述用代替懸臂橋求感應圖之方法，係根據下列定點關於切力及彎矩圖之理論，即任何跨中任何截面之切力及彎矩感應線，必經過(1)其以左諸跨中之所有左定點 J ，(2)其以右諸跨中之所有右定點 K ，及(3)該跨中之左右二定點 J 與 K ，其理由係根據前述關於定點之理論，無須贅述。

上述之切力及彎矩感應圖之作法，祇可用於截面之在斜方形以外者。如截面在斜方形以內，則依上述方法所得之切力及彎矩感應圖，尚須加入(代數加法)斜方形下部桿應力對於該截面之切力及彎矩感應圖。設欲求圖 11—25(a)斜方形內截面 G 之切力 V_G 及彎矩 M_G 之感應圖。先依上法作 V_G 及 M_G 之感應圖，因未將斜方形下部之桿應力計入，故此感應圖稱為 V'_G 及 M'_G 感應圖。如圖 11—25(h)與(i)所示，於 V'_G 感應圖須加入桿 $1B$ 豎分應力 V_{1B} 之感應圖。依方程 11—84)，則，

$$V_{1B} = -V_B \frac{\Delta_B h}{dh'} \quad (11-96)$$

V_{1B} 為壓力，但使截面 G 發生正號切力，故 $V'_B \frac{\Delta_B h}{dh'}$ 與 V'_G 二感應圖相加，得 V_G 之感應圖如圖 11—25(h)有豎線之部分。與 11—8 節所述者相同，設截面 G 中彎矩軸之高度與斜方形

頂鉸者相同，則 IB 應力對於截面 G 之彎矩為

$$\begin{aligned} V_{1B}x_G - H_{1B}(h' - h) &= V_B \frac{\Delta_B h}{dh'} x_G - V_B(h' - h) \frac{\Delta_B}{h'} \\ &= V_B \Delta_B \left[\frac{h}{h'} \left(1 + \frac{x_G}{d} \right) - 1 \right] \quad (11-97) \end{aligned}$$

故方程 (11-97) 與 M'_G 二感應圖相加，即得 M_G 之感應圖，如圖 11-25(i) 有豎線之部分。

例題 11-3. 求例題 11-1 威氏桁架橋所有支點之反力感應圖，(a) 用代替法，(b) 用定點法。

解答：

(a) 用代替法 如例題 11-1 之方法，仍以桿 1 及 2 代替反力 V_0 及 V_{12} ，單位豎向荷重在節點 U_{12} 時，所有各支點之反力，已於例題 11-1 中求得如下：

$$V_0 = +\frac{1}{3} \uparrow$$

$$V_6 = -\frac{4}{3} \downarrow$$

$$V_{12} = +\frac{8}{3} \uparrow$$

$$V_{18} = -\frac{2}{3} \downarrow$$

因該橋是對稱式，故單位豎向荷重在節點 U_6 時，則

$$V_0 = -\frac{2}{3} \downarrow$$

$$V_6 = +\frac{8}{3} \uparrow$$

$$V_{12} = -\frac{4}{3} \downarrow$$

$$V_{18} = +\frac{1}{3} \uparrow$$

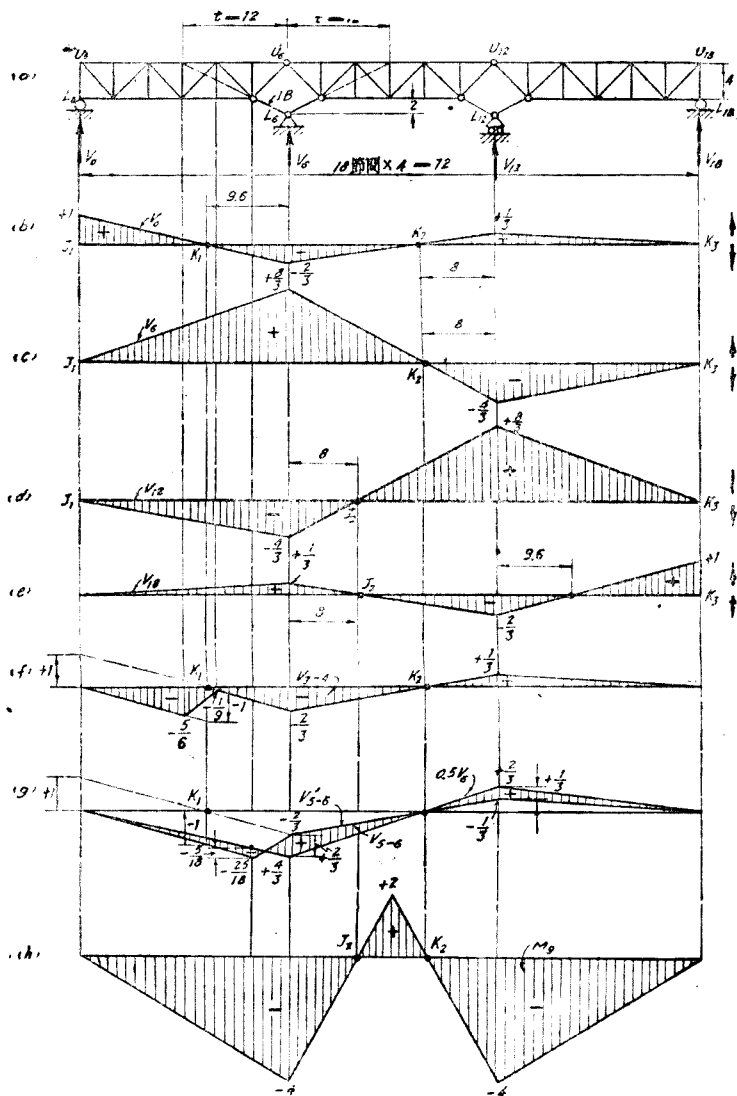
若荷重在節點 U_0 ，則

$$V_0 = 1 \uparrow, \quad V_6 = V_{12} = V_{18} = 0$$

若荷重在節點 U_{18} ，則

$$V_{18} = 1 \uparrow, \quad V_0 = V_6 = V_{12} = 0$$

由以上所得之反力，即可作感應圖如附圖(b)至(e)所示。



例題 11-3 與 11-4.

(b) 用定點法 先用方程(11-91)及(11-92)定各跨中定點 J 及 K 之位置, 注意 $\Delta_6 = \Delta_{12} = 6$ 。

$$K_3 = 0$$

$$K_2 = \frac{24-0}{\frac{24-0}{6} - 1} = 8$$

$$K_1 = \frac{24-8}{\frac{24-8}{6} - 1} = 9.6$$

$$j_1 = 0$$

$$j_2 = \frac{24-0}{\frac{24-0}{6} - 1} = 8$$

$$j_3 = \frac{24-8}{\frac{24-8}{6} - 1} = 9.6$$

定點 K 及 J 之位置既定之後, 即可作 V_6 及 V_{12} 之感應圖, 其最大豎距各在其支點, 其值為 $+1$ 。 V_6 及 V_{12} 於其各支點之最大豎距 $V_{6(6)}$ 及 $V_{12(12)}$, 可用方程(11-94)或(11-95)計算。

$$V_{6(6)} = \frac{9.6}{6} \left(1 + \frac{9.6}{24-9.6} \right) = +\frac{8}{3}$$

或

$$V_{6(6)} = 1 + \frac{9.6}{24-9.6} + \frac{8}{24-2 \times 3} = +\frac{8}{3}$$

因此橋係對稱式, 故 $V_{12(12)}$ 之值與上列 $V_{6(6)}$ 之值相同。由此即可作 V_6 及 V_{12} 之感應圖。所得之答案, 當然與(a)用代替法所得者相同。

例題 11-4. 求例題 11-1 威氏桁架橋節間 3-4 及 5-6 之切力 (V_{3-4} 及 V_{5-6}) 感應圖, 節點 L_9 之彎矩 (M_9) 感應圖。

解答: 此橋各跨中左右二定點之位置已見例題 11-3。用與圖 11-25 (b) 相似之作法, 可得 V_{3-4} 之感應圖如附圖(f)所示。求 V_{5-6} 之感應圖時, 先不計入桿 1B 之應力, 依前法得 V'_{5-6} 之感應圖。依方程(11-96), 得

$$\frac{\Delta_B h}{dh} = \frac{6 \times 2}{4 \times 6} = \frac{1}{2}$$

故作 $0.5V_6$ 之感應圖與 V'_{5-6} 之感應圖相加, 即得 V_{5-6} 之感應圖, 如附圖

(g)所示。 M_9 之感應圖如附圖(h)所示,其作法與圖 11-25(g)相似。

習題 11-19. 用(1)代替法(以 V_0 及 V_{16} 為被代替之反力)及(2)定點法,求圖 11-18 (d) 及 (e) 二威氏桁架橋所有支點之反力感應圖 設 $p=4$ 。

習題 11-20. 求圖 11-18 (d)及(e)二威氏桁架橋中下列諸項之感應圖。

- (1)節間 3—4 之切力,
- (2)節間 5—6 之切力,
- (3)節點 L_7 之彎矩,
- (4)節點 U_9 之彎矩。

習題 11-21. 以最簡捷之方法,證明方程(11-95)之正確。

11-10. 威氏桁架橋之桿應力及其感應圖 於平行弦之威氏桁架橋,其腹桿豎分應力及弦桿應力之感應圖各等於節間切力及節點彎矩之感應圖,後二者之作法已詳於 11-9 節,無須再述。如欲求非平行弦之威氏桁架橋中任何桿之應力(或分應力)感應圖,可先定其各跨中左右二定點 J 及 K 之位置,再依該桿所在之跨,而以相當之懸臂橋代替之,再依懸臂桁架中桿應力感應圖之法以求之。計算時如用縮減感應圖之法,較為簡便。

圖 11-26 (a) 示一威氏桁架橋。先定其各跨左右二定點 J 及 K 之位置。上弦桿 a 之應力 S_a 之縮減感應圖與節點 L_1 之彎矩感應圖相同,其感應係數為 -1 ,即 $V_0=1 \uparrow$ 時 S_a 之值。圖(b)示下弦桿 b 之平分應力 H_b 之縮減感應圖,其感應係數為 $+5/3$,即 $V_0=1 \uparrow$ 時 H_b 之值。圖(c)示斜桿 c 之豎分應力 V_c 之縮減感應圖,其作法係先將桁架 L_1K_1 段視作一簡單跨,

依圖 8-5(b)及(c)之方法得該段之縮減感應圖,再向右延長使經過 K_2 及 K_3 二點,其感應係數為 $+1/3$, 即 $V_0=1\uparrow$ 時 V_c 之值。圖(d)示斜桿 d 之豎分應力 V_d 之縮減感應圖,其作法與例題 11-4 附圖(g)之節間切力感應圖完全相同,其感應係數為 -1 , 即 K_1 點之切力為 $+1$ 時 V_d 之值。圖(e)示中跨斜桿 e 之豎分應力 V_e 之縮減感應圖,其作法係先將中跨桁架 J_2

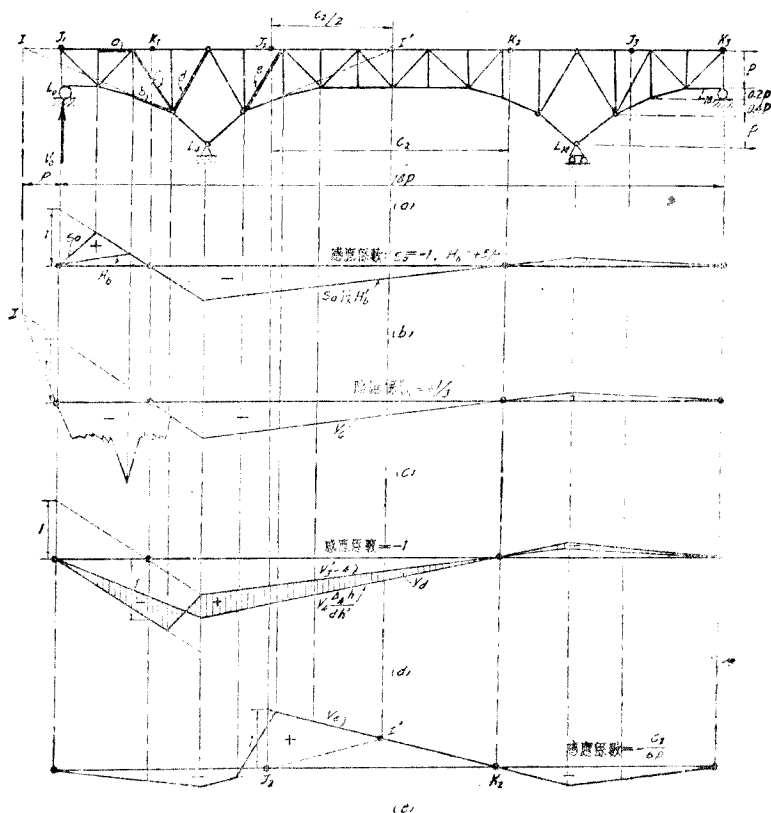


圖 11--26. 威氏桁架橋之桿應力感應圖

K_2 段視作一簡單跨，依圖 8-5(b) 與 (c) 及圖 8-6 (b) 之方法，求該段之縮減感應圖，再向左右延長，其感應係數為 $-c_2/6p$ ，即 J_2 點之切力為 +1 時 V_1 之值。

觀察圖 11-26 所示之桿應力感應圖，可得下列之理論。威氏桁架橋左半任何桿應力之縮減感應圖，於該桿所在之跨中，該桿以右之部分，必於 J 點經過豎距為 1 之點，而於 K 點經過豎距為零之點。該桿以左之部分，必於 J 點經過豎距為零之點。此二部分延長之相交點，必與該桿之重心在同一豎線上。又此感應圖於其以右之跨中必經過所有之 K 點，於其以左之跨中必經過所有之 J 點。

習題 11-22. 求圖 11-18(d) 及 (e) 二威氏桁架橋中下列諸桿之縮減感應圖及其感應係數。

(a) 圖 11-18 (d) 之威氏桁架橋：

- (1) L_3L_4 之平分應力，
- (2) U_3L_5 之豎分應力，
- (3) U_6L_7 之豎分應力，
- (4) U_5L_7 之平分應力。

(b) 圖 11-18 (e) 之威氏桁架橋：

- (1) U_4U_5 之平分應力，
- (2) 節點 U_5 吊桿之應力，
- (3) L_4U_5 之豎分應力，
- (4) L_6U_7 之豎分應力。

11-11. 威氏桁架橋之最大反力，切力及彎矩 威氏桁架橋之最大反力，切力及彎矩，可各由其感應圖求之。茲取一對稱式兩跨威氏桁架橋，設活荷重為一均佈荷重 w /公尺，舉例如下：

圖 11—27(a) 示一對稱式兩跨威氏桁架橋，其中右定點 K_1 之位置可用方程(11—91)計算如下：

$$K_1 = \frac{L}{\frac{L}{\Delta} - 1} = L \left(\frac{r}{1-r} \right) \quad (11-98)$$

其中

$$r = \frac{\Delta}{L} \quad (11-99)$$

圖 11—27(b) 及 (c) 示反力 V_A 及 V_B 之感應圖。反力 V_C 之感應圖與 V_A 者對稱。由此二感應圖之面積^① 可得最大正負號反力如下：

$$\text{正號 } V_A = \text{正號 } V_C = + \frac{wL}{2} \cdot \frac{1-2r}{1-r} \quad (11-100)$$

$$\text{負號 } V_A = \text{負號 } V_C = - \frac{wL}{2} \cdot \frac{r}{(1-2r)(1-r)} \quad (11-101)$$

$$\text{正號 } V_B = + \frac{wL}{2} \cdot \frac{2}{1-2r} \quad (11-102)$$

$$\text{負號 } V_B = 0 \quad (11-103)$$

於圖 11—27 (a) 之左半，取任一截面 D ，其與左支點之距離為 x_D 。若 $0 < x_D < L(1-2r)/(1-r)$ (即截面 D 在右定點 K_1 以左)，則該截面切力 V_D 與彎矩 M_D 之感應圖各如圖 (d) 與 (e) 所示。若 $L(1-2r)/(1-r) < x_D < L$ (即截面 D 在右定點 K_1 以右)，則 V_D 及 M_D 之感應圖各如圖 (f) 及 (g) 所示，其中所有豎距之值均不難以幾何學求之。由該四感應圖之

① 方程(11—100)至(11—101)之求法例為習題 11—23。

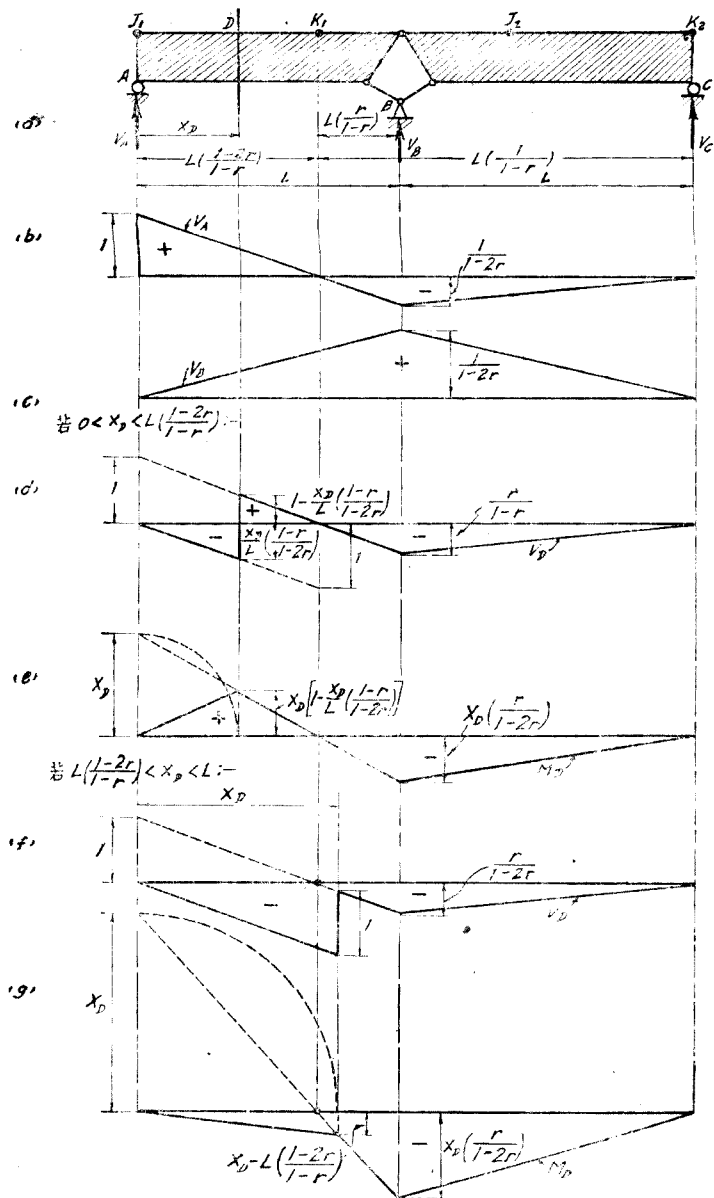


圖 11-27. 對稱式兩跨威氏桁架橋之反力剪力及彎矩感應圖

面積,可得 V_D 與 M_D 之最大正負號值如下:

$$0 < x_D < L \left(\frac{1-2r}{1-r} \right):$$

$$\text{最大正號 } V_D = + \frac{wL}{2} \cdot \frac{[(1-2r) - \frac{x_D}{L}(1-r)]^2}{(1-2r)(1-r)} \quad (11-104)$$

$$\text{最大負號 } V_D = - \frac{wL}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x_D}{L}\right)^2(1-r)^2 + r}{(1-2r)(1-r)} \quad (11-105)$$

$$\text{最大正號 } M_D = + \frac{wL^2}{2} \cdot \left[\frac{x_D}{L} \left(\frac{1-2r}{1-r} \right) - \left(\frac{x_D}{L} \right)^2 \right] \quad (11-106)$$

$$\text{最大負號 } M_D = - \frac{wL^2}{2} \cdot \frac{r \left(\frac{x_D}{L} \right)}{(1-2r)(1-r)} \quad (11-107)$$

若 $L(1-2r)/(1-r) < x_D < L$, 由圖 11-27(f) 與 (g) V_D 及 M_D 之感應圖, 可知其正號值均為零。 V_D 感應圖之面積可由其二個三角形及一個平行四邊形計算之。 M_D 感應圖之面積可由其二個三角形計算之。 $L \left(\frac{1-2r}{1-r} \right) < x_D < L$:

$$\text{最大正號 } V_D = 0 \quad (11-108)$$

$$\text{最大負號 } V_D = - \frac{wL}{2} \left(2 \frac{x_D}{L} - \frac{1-4r}{1-2r} \right) \quad (11-109)$$

$$\text{最大正號 } M_D = 0 \quad (11-110)$$

$$\text{最大負號 } M_D = - \frac{wL^2}{2} \left[\left(\frac{x_D}{L} \right)^2 - \frac{x_D}{L} \left(\frac{1-4r}{1-2r} \right) \right] \quad (11-111)$$

若將各支點斜方形下部二桿視作係橋梁之一部, 則該桿應

力對橋梁斜方形以內部分之切力及彎矩，無須計入，故上列方程(11-109)及(11-111)仍可採用，否則該二方程須另求之。

以 x_D 之相當值代入上列方程(11-104)至(11-111)中，即可得截面 D 在左端支點 A ，右定點 K_1 ，及中支點 B 時之最大正負號切力及彎矩如下表：

表 N XIII. 對稱式兩跨威氏桁架橋在均佈活荷重下
各主要截面之最大正負號切力及彎矩

			截面 D 在橋梁左半之位置		
			左支點 A	右定點 K_1	中支點 B
			$x_D=0$	$x_D=L\left(\frac{1-2r}{1-r}\right)$	$x_D=L$
最大切力 V_D	正 號	方 程 (11-1(4) 與 (11-108)	$+\frac{wL}{2} \cdot \frac{1-2r}{1-r}$	0	0
	負 號	方 程 (11-105) 與 11-109)	$-\frac{wL}{2} \cdot \frac{r}{(1-2r)(1-r)}$	$-\frac{wL}{2} \cdot \frac{(1-2r)^2+r}{(1-2r)(1-r)}$	$-\frac{wL}{2} \cdot \frac{1}{1-2r}$
最大彎矩 M_D	正 號	方 程 (11-1(6) 與 (11-110)	0	0	0
	負 號	方 程 (11-107) 與 (11-111)	0	$-\frac{wL^2}{2} \cdot \frac{r}{(1-r)^2}$	$-\frac{wL^2}{2} \cdot \frac{2r}{1-2r}$

若截面在橋梁之右半，上列方程(11-104)至(11-111)仍可採用，惟 x_D 應量自右支點 C ，而正負號切力之方程應互換。

圖 11—28(a) 及 (b) 中之實線各示此橋之最大正負號切力及彎矩圖 (假設 $r=0.1$)。由此可知絕對最大正負號切力 V_D 及絕對最大負號彎矩 M_D 均在中支點 B 處, 其值如下:

$$\text{絕對最大正負號 } V_D = \pm \frac{wL}{2} \cdot \frac{1}{1-2r} \quad (11-112)$$

$$\text{絕對最大負號 } M_D = -\frac{wL^2}{2} \cdot \frac{2}{1-2r} \quad (11-113)$$

求方程 (11—106) 之微數 dM_D/dx_D 使其等於零, 即得絕對最大正號彎矩 M_D 所在截面 x_D 之值。再以此 x_D 之值代入方程 (11—106) 中, 即得絕對最大正號彎矩 M_D 之值, 其計算如下:

$$\frac{dM_D}{dx_D} = \frac{wL^2}{2} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{1-2r}{1-r} \right) - 2 \frac{x_D}{L^2} \right] = 0$$

故

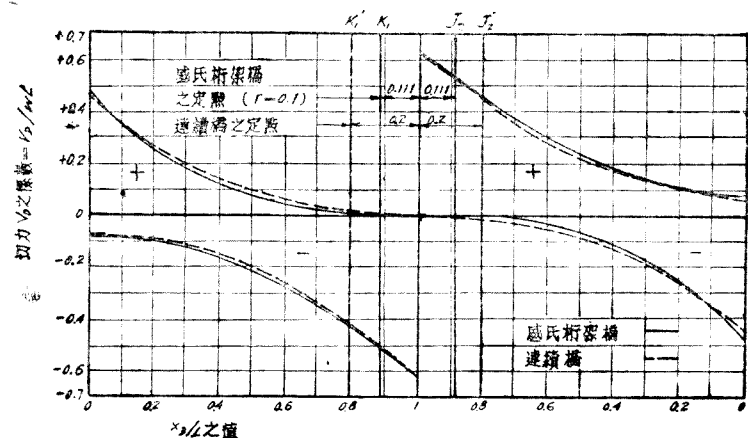
$$x_D = \frac{L}{2} \cdot \frac{1-2r}{1-r} \quad (11-114)$$

代入方程 (11—106) 中, 可得

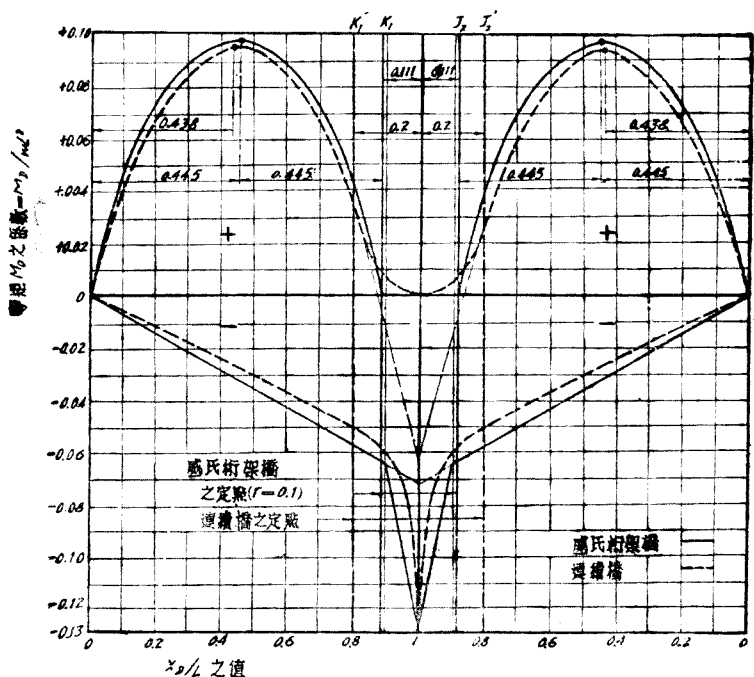
$$\text{絕對最大正號 } M_D = +\frac{wL^2}{8} \left(\frac{1-2r}{1-r} \right)^2 \quad (11-115)$$

由方程 (11—114) 及 (11—115) 可知 x_D 之值恰在圖 11—27(a) J_1K_1 段之中線, 而絕對最大正號 M_D 即等於簡單跨 J_1K_1 在均佈活荷重下之絕對最大正號彎矩。

前已提及威氏桁架橋可視作係靜定之連續橋, 茲設威氏桁架橋之 r 為 0.1, 其在均佈荷重下之最大正負號切力及彎矩圖與型式及跨長相同連續橋者之比較, 見圖 11—28 (a) 及 (b)。



(a) 最大正負號剪力圖



(b) 最大正負號彎矩圖

圖 11-28. 威氏桁架橋 ($r=0.1$) 與連續橋最大剪力及彎矩圖之比較

觀此圖可知二者之形式所差甚微，其主要截面之值如下表。

表 XXIV. 對稱式兩跨威氏桁架橋($r=0.1$)與連續橋
在均佈活荷重下最大切力及彎矩之比較

				威氏桁架橋	連續橋
最大切力	正號	左支點		$+0.444 wL$	$+0.437 wL$
	負號	左支點		$-0.069 wL$	$-0.062 wL$
		中支點(絕對最大)		$-0.625 wL$	$-0.625 wL$
最大彎矩	正號	絕對最大	M_D	$+0.099 wL^2$	$+0.096 wL^2$
			x_D	$0.445 L$	$0.438 L$
	負號	絕對最大(中支點)		$-0.125 wL^2$	$-0.125 wL^2$

由上表可知該二橋梁之絕對最大負號切力及彎矩均相等，此種巧合，蓋由於威氏桁架橋中 $r=0.1$ 之故。若 r 或 Δ 之值增大，則負號切力及彎矩均增大，正號切力及彎矩均減小，若 r 或 Δ 之值減小，其結果恰相反。根據威氏桁架橋在呆荷重下彎矩圖面積以最小為經濟之原則，則於對稱式兩跨橋梁，以 $r=0.1133$ 為最經濟，而實際採用時 r 之值以不超過 0.2 為宜，下節當申論之。

習題 11-23. 校核圖 11-27 中之感應圖，並用此項感應圖校核方程 (11-100) 至 (11-111)。

習題 11-24. 設活荷重為一單個集中荷重 P 求對稱式兩跨威氏桁架橋之：

- 最大正負號反力，
- 表示任何截面最大正負號切力及彎矩之方程，
- 最大正負號切力及彎矩圖，

(d) 絕對最大正負號切力及彎矩。

習題 11—25. 設活荷重為 10 公噸標貨車之代替荷重(見圖 7—27(c)), 求對稱式兩跨威氏桁架橋每一主梁承受一車道荷重時之:

(a) 最大正負反力,

(b) 表示任何截面最大正負號切力及彎矩之方程,

(c) 最大正負號切力及彎矩圖,

(d) 絕對最大正負號切力及彎矩。

習題 11—26. 設對稱式兩跨威氏桁架橋中定點 K_1 及 J_2 之位置與同樣連續橋中定點 K'_1 及 J'_2 之位置相同, 比較此二橋梁在均佈活荷重 w /公尺下之最大正負號切力及彎矩感應圖。

提示: 參閱圖 11—28。先求得 r 之值, 以 r 之值代入方程 (11—104) 至 (11—111) 中, 再根據所得之方程作該威氏桁架橋之最大正負號切力及彎矩圖。至同樣連續橋最大正負號切力及彎矩圖, 與圖 11—28 中虛線所示者同。

11—12. 威氏桁架橋之穩定條件及經濟比例 結構之穩定情形, 已於 4—18 節中詳細說明, 而威氏桁架橋之是否穩定, 亦於該節中略為述及之〔參閱習題 4—28 (c) 與 (j), 習題 4—32, 例題 4—14, 及圖 4—30〕。威氏桁架橋在某一定荷重下, 其中任一支點之反力視其中所有斜方形恆數而定。故威氏桁架橋如採用某一特殊之斜方形恆數時, 其反力皆可變為無窮, 即該橋可變為不穩定之結構。故計劃威氏桁架橋之型式及尺寸時, 此點須加以注意。

若欲知某威氏桁架橋在某荷重下是否穩定, 或能否維持平衡, 用 4—18 節所述之代替法, 極為簡便。若威氏桁架係對稱式之兩跨或三跨橋, 則其穩定條件, 不難求得, 茲分述如下:

圖 11—29 (a) 示一對稱式兩跨威氏桁架橋, 受有一集中荷

重 P ，茲求其支點 A 之反力 V_A 如下：

$$V_A L + V_B \Delta = 0 \quad (11-116)$$

$$2V_A L + V_B L - P_x = 0 \quad (11-117)$$

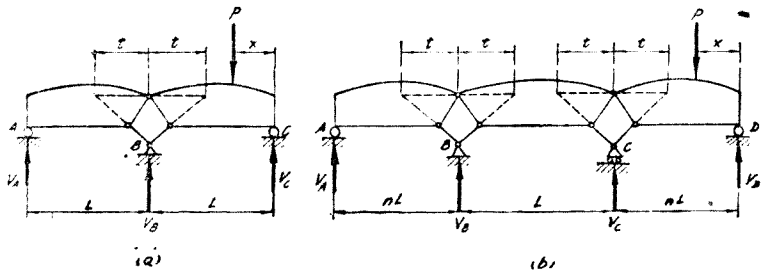


圖 11-29. 威氏桁架橋之穩定條件

解上列二方程即可得，

$$V_A = -\frac{P_x}{L(L-2\Delta)} \quad (11-118)$$

若 $\Delta = L/2$ ，或 $t = L$ ，或 $r = 0.5$ ，則方程 (11-118) 之分母變為零，而反力 V_A 變為無窮，即此橋變為不穩定之結構。若荷重 P 置於該橋全長之任何點，方程 (11-118) 之分母仍不變，故於對稱式兩跨之威氏桁架橋，若 $\Delta = L/2$ ，或 $t = L$ ，或 $r = 0.5$ 時，則該橋係不穩定，且在任何荷重情形下，不能維持平衡。

圖 11-29 (b) 一對稱式三跨之威氏桁架橋，受有一集中荷重 P ，茲求其支點 A 之反力 V_A 如下：

$$V_A nL + V_B \Delta = 0 \quad (11-119)$$

$$V_A L(n+1) + V_B L + V_C \Delta = 0 \quad (11-120)$$

$$V_A L(2n+1) + V_B L(n+1) + V_C nL - P_x = 0 \quad (11-121)$$

解上列三方程即可得，

$$V_A = \frac{P_X \Delta^2}{\Delta^2 L(2n+1) - 2\Delta L^2(n+1) + n^2 L^3} \quad (11-122)$$

若方程(11-122)之分母爲零，則反力 V_A 係無窮，即此橋亦係不穩定之結構。使

$$\Delta^2 L(2n+1) - 2\Delta L^2(n+1) + n^2 L^3 = 0 \quad (11-123)$$

解上列方程，得

$$\Delta = nL \quad (11-124)$$

$$\Delta = \frac{nL}{2n+1} \quad (11-125)$$

方程(11-124)亦可寫成

$$t = 2nL \quad (11-126)$$

$$t = \frac{2nL}{2n+1} \quad (11-127)$$

或

$$r = n \quad (11-128)$$

$$r = \frac{n}{2n+1} \quad (11-129)$$

再將圖 11-29(b) 之荷重 P 置於橋梁之中線，成爲對稱式，求其支點 A 之反力 V_A 如下：

$$V_A nL + V_B \Delta = 0 \quad (11-130)$$

$$V_A + V_B - \frac{P}{2} = 0 \quad (11-131)$$

解上列二方程可得，

$$V_A = \frac{P\Delta}{2(\Delta - nL)} \quad (11-132)$$

若方程(11—129)之分母爲零，則反力 V_A 係無窮，即此橋亦係不穩定之結構。使 $2(\Delta - nL) = 0$ ，得，

$$\Delta = nL \quad 11-134$$

上列方程與方程(11—124)相同。由是可知： $\Delta = nL/(2n+1)$ 時，該橋雖不穩定，但在對稱式之荷重下能維持平衡。故對稱式三跨之威氏桁架橋與方程(11—124)至(11—129)中任一方程相符者，皆不穩定，但此橋梁之僅與方程(11—124)或(11—126)或(11—128)相符者，在任何對稱式之荷重下，能維持平衡。

計劃威氏桁架橋之型式及尺寸時， Δ 或 r 之選擇，不但須合乎上述之穩定條件，且須合乎下述之經濟比例。根據橋梁在呆荷重下彎矩圖面積以最小爲經濟之原則，史(D. B. Steinman)氏^①求得於對稱式兩跨之威氏桁架橋，以斜方形恆數 Δ 與跨長 L 之比 r 等於 0.1133 時爲最經濟。於對稱式三跨之威氏桁架橋，則最經濟之 r 值視橋梁旁跨與中跨長度之比 n 之值而定，可由圖 11—30 求之，其中 r 爲斜方形恆數 Δ 與中跨長度 L 之比。若中跨之長度已定，旁跨之長跨以 $0.58L$ (即 $n=0.58$) 爲最經濟。三跨之總長度已定，則 n 之值約以 0.8 爲最經濟。計劃時先定 n 之值，再由圖 11—30 定 r 之值。

於跨數多於三之威氏桁架橋，若使其所有中間跨長均相等，

① 參閱 131 頁註所舉參考書之第 15, 19 及 20 三章。

兩端跨長約為中間跨長之 $5/6$ ，即得其最經濟之比例。

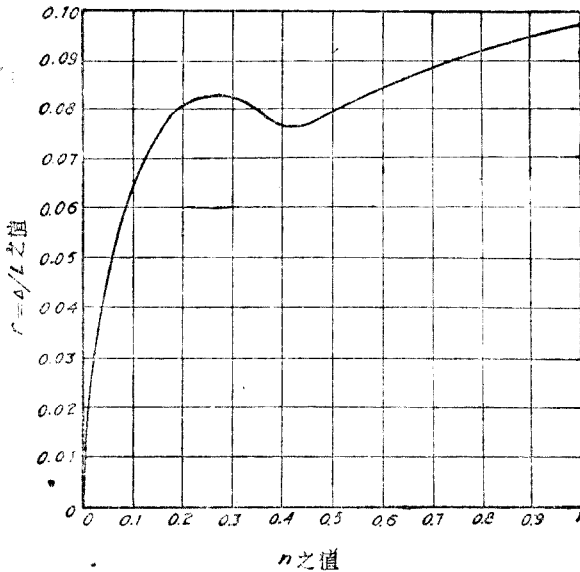


圖 11-30. 對稱式三跨威氏桁架橋之經濟比例

應用上述之經濟比例時，須注意下列三點：

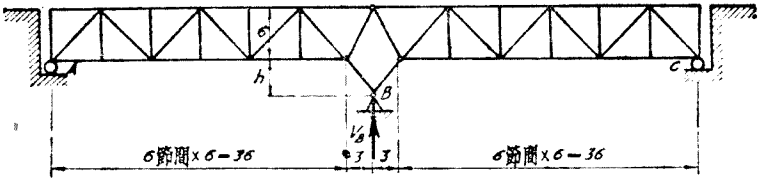
(1) r 之最經濟值與活荷重與呆荷重之比有關。大約活荷重與呆荷重之比愈大，則 r 之最經濟值愈小。但前者對於後者之影響甚小，故可略去不計。上述 r 之最經濟值，係根據無活荷重時之計算。

(2) 若將上述 r 之最經濟值加以相當之改變，其影響於橋梁之經濟者，並不甚大。

(3) 活荷重與呆荷重之比愈小，則威氏桁架橋與跨長相同之簡單跨橋比較，愈為經濟。

習題 11-27. 附圖示一對稱式二跨威氏桁架上承橋，該橋之全長受有

均佈荷重 w /公尺。求表示中支點之反力 V_B 與斜方形下部高度 h 之方程，並以 V_B 為縱軸， h 為橫軸，作一曲線以表之。 V_B 及 h 之值均有正負號。 h 如在 AC 平線之上為負號。 h 為負號時對於反力 V_B 有何影響？並指明該橋不穩定時及最經濟時 h 之值。



習題 11-27.

習題 11-28. 試研究對稱式四跨威氏桁架橋之穩定條件 並作一曲線表示此橋不穩定時 r 與 n 之關係。以 r 計於豎軸， n 計於橫軸。

11-13. 威氏桁架橋在側力下之應力 威氏桁架橋在側力下之應力，視其側支撐之佈置而定。若側支撐之佈置已定，則該各部在側力下之應力，可依照「應力歷程」而計算之，其方法與第九章所論簡單跨橋梁，10-8 節所論三鉸拱橋，及 11-6 節所論懸臂橋者相似。茲舉一例，略加說明如下：

圖 11-31(a) 示某對稱式威氏桁架橋之左半，其旁跨為上承式，而中跨為下承式。如圖 11-31(b) 所示，旁跨上弦節點 U_1 與 U_5 之間有側支撐架，其所受側力之反力，各由平面 L_0U_1 及 U_5L_6 中之豎支架分別傳達於左支點 L_0 及下弦之節點 L_6 。中跨上弦節點 U_{15} 與 U_{27} (未示出) 之間亦有側支撐架，其所受側力之反力各由平面 $L_{14}U_{15}$ 及 $U_{27}L_{28}$ (未示出) 中之豎支架分別傳達於下弦之節點 L_{14} 及 L_{28} (未示出)。上弦節點 U_0, U_7, U_8, U_9 及 U_{13} 之側力，各由豎桿 $U_0L_0, U_7L_7, U_8L_8, U_9L_9$ 及 $U_{13}L_{13}$ 平面內之豎支架而分別傳達於下弦之節點 L_0, L_7, L_8, L_9 及 L_{13} 。同時節點 7 與 15 間橋面系所受之側力，亦由上述之豎支架及節點 L_{10} 與 L_{12} 之豎支架而傳達於下弦節點。上弦節點 U_{11} 之側力，則由斜桿 $U_{11}L_{10}$ 及 $U_{11}L_{12}$ 平面中之支撐架而分別傳達於下弦之節點 L_{10} 及 L_{12} 。

計算側支撐架 $L_0U_1, U_5L_6, L_{14}U_{15}$ 及 $U_{27}L_{28}$ 之應力時，桁架 L_0L_6 及 $L_{14}L_{28}$ 二段可視作各係一簡單跨桁架。

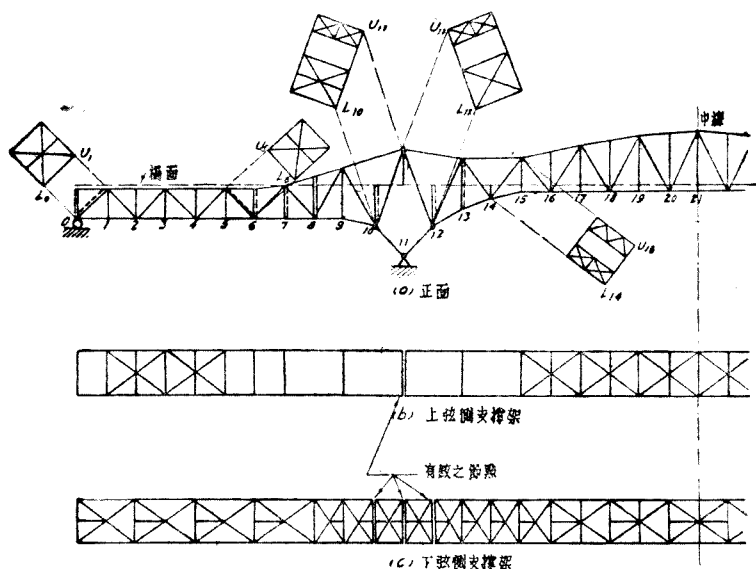


圖 11—31. 威氏桁架橋之側支撐

圖 11—31 (c) 所示下弦之側支撐架，實際係一在平面內之連續桁架，如此，則計算其應力殊為繁瑣。為簡便起見，可假定此平面內之桁架亦係一威氏桁架橋，其中某桿應力為最大時之側力位置，可由平行弦威氏桁架橋桿應力之感應圖定之。凡上弦及橋面系之側力須傳達於下弦者，其使下弦某桿發生最大應力之側力位置，應由此感應圖定之。

凡上弦及橋面系之側力，由豎支架而傳達於下弦時，必因傾覆效應而使主桁架受有豎力。若主桁架之弦桿於某節點改變傾度時，亦使主桁架之該節點受有豎力。此二項豎力均使主桁架發生應力，其計算方法與 9—8 節，10—8 節，及 11—6 節中所述者相同。

如圖 11—31 (b) 及 (c) 所示，上弦側支撐架節點 U_{11} 處及下弦側支撐架之節點 L_{10} , L_{11} 與 L_{12} 處，均有二側撐。因主桁架於該四節點處均各有一鉸節，非用二側撐，使該節點兩旁之側支撐架分開，則主桁架之鉸節即不能自由轉動也。

第十二章 結構之變位

12—1. 結構變位之原因及應用 結構變位之原因有三：
(1)荷重所發生之應力；(2)溫度之升降；及(3)製造時各部長短之不甚精確與其間鉸節之鬆動。(1)及(2)二項稱為彈性變位，蓋溫度還原及荷重移去後，其變位亦不存在。(3)項稱為非彈性變位，因其永久存在也。

應力有直接應力，彎應力及切應力三項。於桁架之合乎理想情形者，各桿祇有直接應力，故其在荷重下之變位，亦祇有由於直接應力者一項。但實際上桁架之桿縱有彎應力及切應力，其數量常比較甚為微小而可以略去不計^①。直梁在荷重下之變位有由於彎應力及切應力二項，但於通常跨度不甚短之梁，其由於切應力之變位亦比較甚為微小（見第12—3節）而可以略去。於曲梁之用於拱骨橋者，其在荷重下之變位，亦含有彎應力，直接應力及切應力三項，但後二者亦比較微小，而可以略去不計。因此，於桁架常祇計算其由於直接應力之變位，於直梁或曲梁常祇計算其由於彎應力之變位。

若結構祇有一點係固定於支座，其各部分採用同一材料，其溫度之升降，亦係全部一律，則結構各部之大小，依一定之比例

① 參閱第4—4節。

而改變，但其形狀仍與其原來形狀成爲幾何學中之相似形，因此其各部之變位自極易求得。若結構固定於支座之點不祇一，其各部採用不同之材料，或各部溫度之升降不一律，則其各部之變位，須由其各部之伸縮用下述方法計算之。

若製造時各部之長短與設計時所算得者稍有差別，則造成後結構之形狀與設計時之原來形狀比較，亦有變位，又如於樞接橋梁，樞孔常較樞稍大，俾各桿可以自由旋轉，架設時如用支架，則架設完成時將支架移去後，此項橋梁即發生永久存在之非彈性變位。

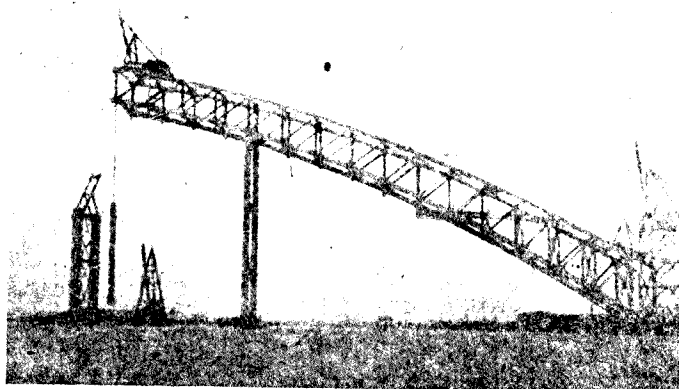
結構變位之應用甚多，其最重要者，有下列四項：

(1) 結構不但須有充足之強度，且須有充足剛勁。如某橋梁有二種或多種不同型式之設計，則比較其優劣時，剛勁常係一重要之點。欲知其剛勁是否充足，必須計算其變位。又如房屋中梁之最大向下變位，常限制不能超過其跨長四百或三百分之一，否則其下所懸之灰頂棚，必發生裂痕，致不雅觀。欲知梁之最大向下變位是否在上述限度之內，必須加以計算。

(2) 建造屋頂或橋梁桁架時，常使其下弦或橋面系略向上升起稱爲加拱 (camber)，庶支架移去及荷重加上後，下弦或橋面系，不致有過於向下彎曲之象。此項向上升起之多寡，常依其最大向下變位之多寡而定。影片 XVII 示拱橋橋面系之加拱。

(3) 橋梁之架設時，如採取懸臂法（見影片 XX），自

兩端分別架設，使其於中部相接合，則必由其在呆荷重下中部變位之多寡，以決定起首架設時其兩端應如何佈置，庶其中部易於接合。



影片 XX. 懸臂架設法

(4) 靜不定結構之計算法，幾全以靜定結構變位之計算法為根據。故結構變位之計算，實係計算靜不定結構之基本方法。因此欲澈底明瞭靜不定結構之計算法，必先了解靜定結構變位之各種計算法。

結構之變位有線變位及角變位二項。線變位即結構中某點位置之改變，角變位即梁軸或桁架桿傾度之改變。線變位又有絕對線變位與分線變位之別。如結構中某點原在 A 之位置後改變至 A' 之位置，則 A 與 A' 之距離 AA' 為該點之絕對線變位，此絕對線變位 AA' 可分解為二分線變位，與某一力可分解為二分力之原理相同。

因結構之實際情形與其理想情形多少稍有差別，故依其理

想情形所算得之變位與其實際之變位，亦稍有差別。於鉚接桁架則依理想情形所算得之節點變位，常較其實際變位為略大，蓋因其節點均係剛節致各桿不能自由轉動也。

12-2. 直梁變位之基本理論(五圖之關係) 於平直之梁，無論其所受之豎向荷重若何，其材料之彈性係數 E 及其截面對中軸之慣性矩 I 是否全長一律^①，其由彎應力變位之所有計算方法，均以其五圖之關係為基本。所謂五圖者，即：(1)荷重圖，(2)切力圖，(3)彎矩圖，(4)角變位圖，及(5)線變位圖。前三圖之關係已於 3-12 中論及之，茲將此項關係擴充而及於最後二圖，圖 12-1 示某平直梁中某一段 AB 之五圖， AB 段中梁之 E 及 I 均係一律不變，其前三圖與圖 3-32 幾完全相同，其各圖之正負號亦與圖 3-32 (e) 所示者相同。由材料力學可得此五圖之微分關係如下：

直梁五圖之微分關係

線變位： y

$$\text{角變位：} \quad \theta = \frac{dy}{dx} \quad (12-1)$$

$$\text{彎矩：} \quad M = EI \frac{d\theta}{dx} = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-2)$$

$$\text{切力：} \quad V = \frac{dM}{dx} = EI \frac{d^2\theta}{dx^2} = EI \frac{d^3y}{dx^3} \quad (12-3)$$

^① E 與 I 二項之乘積，常稱為梁之抗彎剛度 (flexural rigidity)，因此乘積如愈大，則梁在彎矩之變位愈小。

$$\text{荷重: } W = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^3\theta}{dx^3} = EI \frac{d^4y}{dx^4} \quad (12-4)$$

由上列之諸方程，又可得此五圖之積分關係如下：

直梁五圖之積分關係

$$\text{荷重: } W$$

$$\text{切力: } V = \int w dx \quad (12-5)$$

$$\text{彎矩: } M = \int V dx = \iint w dx dx \quad (12-6)$$

$$\text{角變位: } \theta = \int \frac{M}{EI} dx = \iint \frac{V}{EI} dx dx = \iiint \frac{W}{EI} dx dx dx \quad (12-7)$$

$$\begin{aligned} \text{線變位: } y &= \int \theta dx = \iint \frac{M}{EI} dx dx = \iiint \frac{V}{EI} dx dx dx \\ &= \iiint \frac{W}{EI} dx dx dx dx \quad (12-8) \end{aligned}$$

採用上列四方程時，當然須有求積分時必需之極限或恆數。

若由方程(12-1)至(12-4)中選出下列諸方程：

$$W = \frac{dV}{dx} \quad (12-9)$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (12-10)$$

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} \quad (12-11)$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (12-12)$$

即可得直梁五圖之關係(1)如下：

(1) 任何圖中於任何點之豎距，等於其下一圖於同一點

之傾度 (即該下一圖於同一點對於 x 之紀數)。

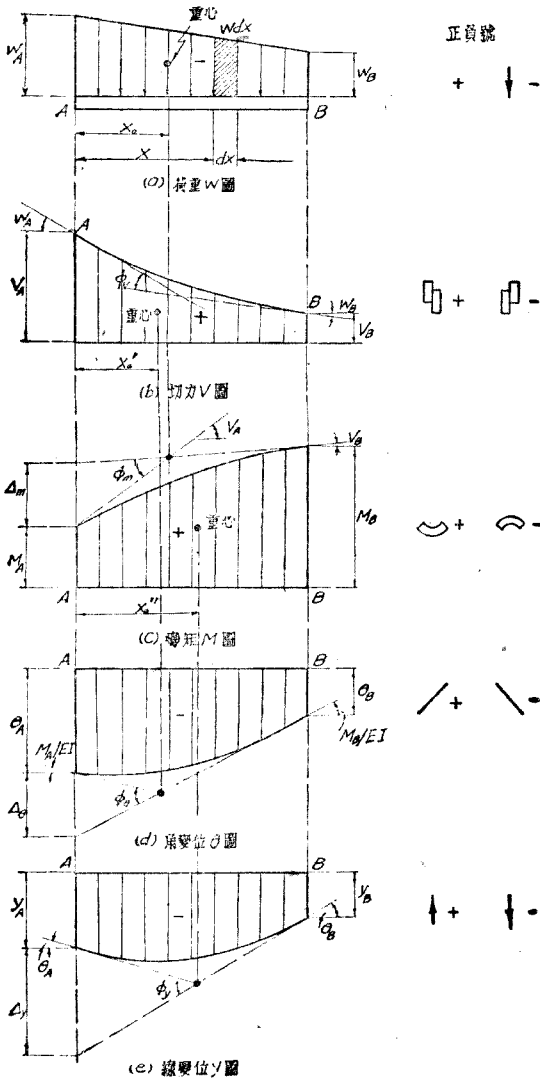


圖 12-1. 直梁五圖之關係

若由方程(12—5)至(12—8)中選出若干方程,並以 A 及 B 二點爲極限,即可得下列諸方程:

$$V_B - V_A = \int_A^B w dx \quad (12-13)$$

$$M_B - M_A = \int_A^B V dx \quad (12-14)$$

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (12-15)$$

$$y_B - y_A = \int_A^B \theta dx \quad (12-16)$$

注意方程(12—13)與(12—14)即各係方程(3—11)與(3—12)。

由是得直梁五圖之關係(2)如下:

(2) 任何圖中任何二點豎距之差(或改變),等於其上一圖於該二點間之面積(即該上一圖於該二點間之積分)。

由圖 12—1 及方程(12—13)至(12—16),可得下列諸方程:

$$\phi_v = w_B - w_A \quad (12-17)$$

$$\phi_m = V_B - V_A = \int_A^B w dx \quad (12-18)$$

$$\phi_\theta = \frac{M_B - M_A}{EI} = \int_A^B \frac{V}{EI} dx \quad (12-19)$$

$$\phi_y = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (12-20)$$

注意方程(12—17)與(12—18)即各係方程(3—13)與(3—14)。

由是可得直梁五圖之關係(3)如下:

(3) 若於任何圖之任何二點作二切線,則此二切線間之

角度 ϕ (以弧度計), 等於其上一圖中該二點豎距之差, 亦等於其再上一圖中該二點之間之面積。

由圖 3—82(d) 曾求得下列方程 [即方程 (3—15)]:

$$\Delta_m = \int_A^B w x dx \quad (12-21)$$

以相似之方法可得下列二方程:

$$\Delta_\theta = \int_A^B \frac{V}{EI} x dx \quad (12-22)$$

$$\Delta_y = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx \quad (12-23)$$

由是得直梁五圖之關係(4)如下:

(4) 若於任何圖上之任何一點 B 作一切線, 則該圖上任何其他一點 A 與 B 點切線之豎距 Δ , 等於其再上一圖中 A 與 B 二點間之面積, 對於 A 點之靜矩。

由圖 12—1(c), (d), 及(e) 及方程 (12—18) 至 (12—23), 因 ϕ 角度均極小, 可得下列諸方程:

$$x_0 = \frac{\Delta_m}{\phi_m} = \frac{\int_A^B w x dx}{\int_A^B w dx} \quad (12-24)$$

$$x'_0 = \frac{\Delta_\theta}{\phi_\theta} = \frac{\int_A^B \frac{V}{EI} x dx}{\int_A^B \frac{V}{EI} dx} \quad (12-25)$$

$$x''_0 = \frac{\Delta_y}{\phi_y} = \frac{\int_A^B \frac{M}{EI} x dx}{\int_A^B \frac{M}{EI} dx} \quad (12-26)$$

注意方程(12—24)即方程(3—16)。由是可得直梁五圖之關係(5)如下：

(5) 於任何圖上之任何二點作二切線，其相交點與其再上一圖中該二點間面積之重心，係同在一豎線上。

上列五項關係，僅係將 3—12 節中荷重圖，切力圖與彎矩圖之五項關係擴充而及於角變位圖與線變位圖而已。由方程(12—11)，(12—15)，(12—19)，(12—20)，(12—22)及(12—23)可知：採用上列五條中於 M 與 θ ， ϕ_y 及 Δ_y 之關係，並 V 與 ϕ_x 及 Δ_x 之關係時， M 與 V 二圖，均應以梁之抗彎剛度 EI 除之（即 M/EI 及 V/EI 圖）。由方程(12—25)與(12—26)又可知：若梁之抗彎剛度 EI 係變數時，則 x'_0 及 x''_0 各係 V/EI 圖及 M/EI 圖之重心。

上述五條之關係中，第(1)及第(2)兩條，早已發現，第(3)及第(4)兩條係下述顧臨(C. E. Greene)氏求直梁變位方法之擴充。惟第(5)條係最近始行發現，而西文書籍中論及者亦甚少^①，此五條關係甚為重要，下節所述求直梁變位之方法，大半以之為根據。

習題 12—1. (a)校核方程(12—13)至(12—23)等號前後之單位是否相符。(b)依圖 12—1 所示之正負號，並設 ϕ 角之增加為正號， Δ 在切線之上者為正號，校核上述方程等號前後之正負號是否相符。

① 據著者所知，西文書籍之論及此條者，祇有英國薩(Salmon)氏之材料與結構上卷 103 頁，及美國司徒(R. W. Stewart)氏之求梁變位之改良法，載美國土木工程師會出版之土木工程，1934 年二月號 88 頁。

12-3. 用角變法求直梁之變位 求直梁變位之最早方法，即採用下列歐勒 (Leonhard Euler) 氏之變位線方程^① (即方程(12-2)):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI} \quad (12-27)$$

注意此方程右部 M/EI 可為正號或負號。若 M, y , 及 dy/dx (即 θ) 之正負號均與圖 12-1 所示者相同，則 M/EI 應為正號。若 M 之正負號與圖 12-1 所示者相同，而 y 及 dy/dx 之正負號與該圖所示者相反，則 M/EI 應為負號^②。將方程(12-27)求積分即得角變位 dy/dx 或 θ 之方程，再求積分，即得線變位 y 之方程，故計算頗為繁瑣。若梁之抗彎剛度 EI 非一恆數時，則應用更為困難，或竟不可能。

下述之四法，不但係求直梁變位最簡易之方法，且梁之抗彎剛度 EI 為變數時，亦易採用。此四法通常稱為彎矩面積 (moment-area) 法。因計算時須採用 M/EI 圖之面積。有時又稱為彈性荷重 (elastic load) 法或共軛梁 (conjugate beam) 法，因計算時係將 M/EI 圖視作一種荷重。

圖 12-2(a) 示某直梁 AB 段所受之 M/EI 圖， AB 之長為 dx 。此段因彎矩 M 之作用而有彎曲，使 A 與 B 二截面間有角變 (angle change) $d\theta$ 。由方程(12-20)及 12-2 節所述

① 此方程係歐勒氏於 1744 年所發表。

② 此點屬於材料力學之範圍，讀者應切實明瞭其所以然。

之關係(3)，故直梁 A 與 B 二截面間之角變 $d\theta$ 即等於 A 與 B 間 M/EI 圖之面積。或將方程(12-11)寫成 $d\theta/dx = M/EI$ ，即直梁任何點角變之率 $d\theta/dx$ 等於該點 M/EI 圖之豎距，因

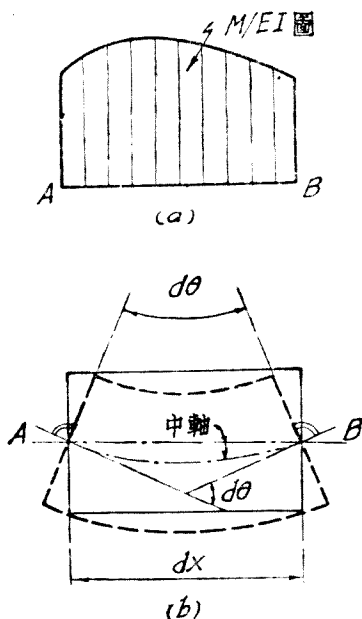


圖 12—2. 梁之角變

直梁之變曲不必皆由於彎矩 M 或荷重，故稱爲角變法較爲普遍適宜。凡此項名稱亦可用於後述求桁架變位之法。茲將角變法於求直梁變位之各種不同之應用，分條述之如下：

(1) 顧臨 (C. E. Greene) 氏法^① 顧臨氏求直梁變位之法，係應用 12—2 節中之第(3)及第(4)兩項關係。由方程(12-20)及(12-25)得所謂彎矩面積之兩條理論如下：

① 顧臨氏係美國 Michigan 大學之教授，此法係彼於 1873 年所發明。

(a) 若直梁因荷重而彎曲，其變位線上任何二點切線間之角度 ϕ (即變位線於該二點間傾度之改變)，等於該二點間 M/EI 圖之面積。

(b) 若直梁因荷重而彎曲，其變位線上任何一點 A 與該變位線上任何其他一點 B 之切線間之豎距 Δ ，等於 A 與 B 二點間 M/EI 圖之面積，對於 A 點之靜矩。

應用上列二條理論，以求直梁之任何點之角變位及線變位時，常須先將該梁之變位線大約畫出，而後始可計算，其正負號亦須以觀察定之。

如荷重係均佈，用此法計算時，必須知拋物線形之各種面積及重心。圖 12-3 示此種面積及重心，以便計算時之用。

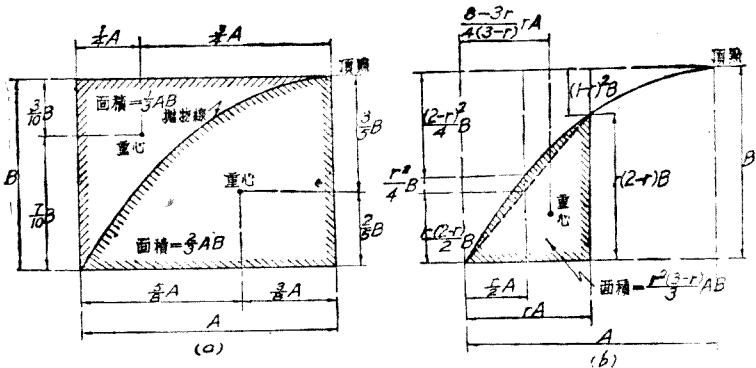
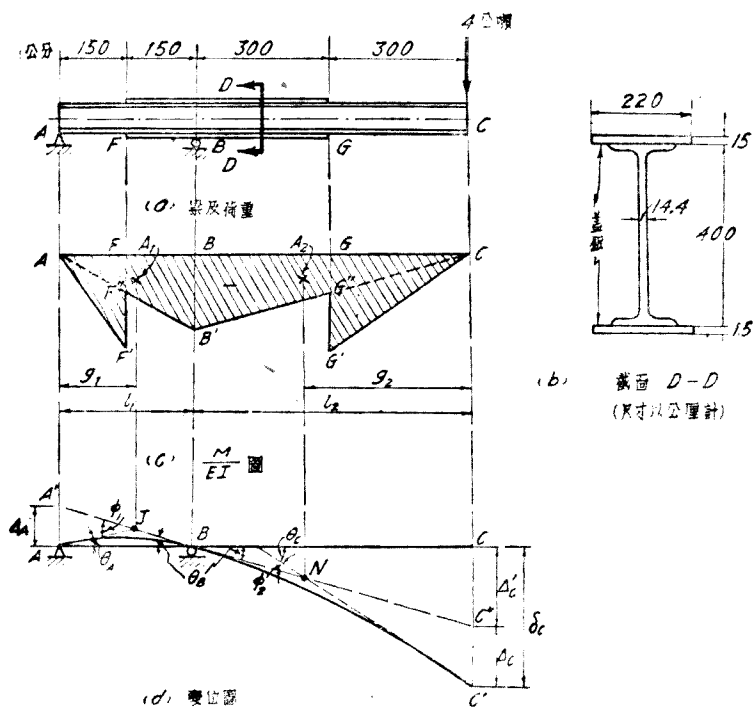


圖 12-3. 拋物線形之面積及重心

例題 12-1. 附圖示一輻梁，其中段上下各有一蓋板，用顯臨氏法求該梁中軸 C 端在所示荷重下之角變位 θ_c 及豎向線變位 δ_c 。梁本身之重量可以略去不計，輻梁之 I 為 29,210 (公分)⁴，輻梁加二蓋板之 I 為 57,640 (公

分) A, E 爲 2,100 公噸/平方公分。



例題 12-1.

解答：附圖(c)示 M/EI 圖，其主要豎距如下：

$$FF' = GG' = \frac{300 \times 4}{29,210 \times 2,100} = \frac{1}{51,100} \text{ 公分}$$

$$FF'' = GG'' = \frac{300 \times 4}{57,640 \times 2,100} = \frac{1}{100,800} \text{ 公分}$$

$$\therefore FF'' = GG'' = \frac{1}{51,100} - \frac{1}{100,800} = \frac{1}{103,500} \text{ 公分}$$

$$BB' = \frac{600 \times 4}{57,640 \times 2,100} = \frac{1}{50,400} \text{ 公分}$$

$$A_1 = \frac{150}{50,400} + \frac{75}{103,500} = 0.00297 + 0.000725 = 0.003695$$

$$A_2 = \frac{300}{50,400} + \frac{150}{103,500} = 0.00594 + 0.00145 = 0.00739$$

附圖(d)示該梁中軸 ABC' 及其變位線 $A'B'C'$ 之大略情形。於此變位線之 A, B 及 C 點, 各作一切線 $AJ, A'B'C''$ 及 KC' 其傾度各為 θ_A, θ_B 及 θ_C , 而 θ_C 即 C 端之角變位。

由上述之理論(2)得,

$$\Delta_A = 0.00297 \times 200 + 0.000725 \times 100 = 0.6665 \text{ 公分}$$

故
$$\Delta_C = 0.6665 \times \frac{60}{300} = 1.333 \text{ 公分}$$

$$\theta_B = \frac{\Delta_A}{300} = \frac{0.6665}{300} = 0.002222$$

由上述之理論(1)得,

$$\phi_2 = A_2 = 0.00739$$

$$\therefore \theta_C = \theta_B + \phi_2 = 0.002222 + 0.00739 = 0.009612 \text{ 弧度 (即 } C \text{ 端之角變位)}$$

由上述之理論(2)得,

$$\Delta_C = 0.00594 \times 400 + 0.00145 \times 200 = 2.666 \text{ 公分}$$

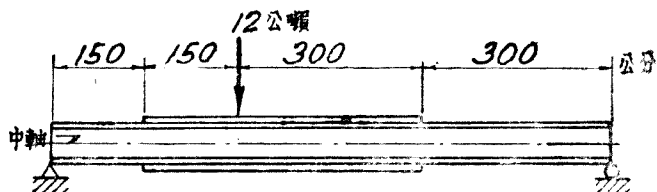
$$\delta_C = \Delta'_C + \Delta_C = 1.333 + 2.666 = 3.999 \text{ 公分 (即 } C \text{ 端之豎向線變位)}$$

習題 12-2. 梁及荷重與例題 12-1 相同。用方程 (12-27) 及求積分法求表示該梁 AF, FB, BG 及 GC 四段角變位與線變位之方程。由是求得 C 點之角變位 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_C$ 或 θ_C 及豎向線變位 y_C 或 δ_C 。

提示: 用方程(12-27)於該梁之四段時, 各須求積分二次, 故須定之積分恆數共有八個, 定此恆數之八個條件何在? 注意 A 點有一條件, F 及 G 二點各有二條件, B 點有三條件, 總共合有八個條件。

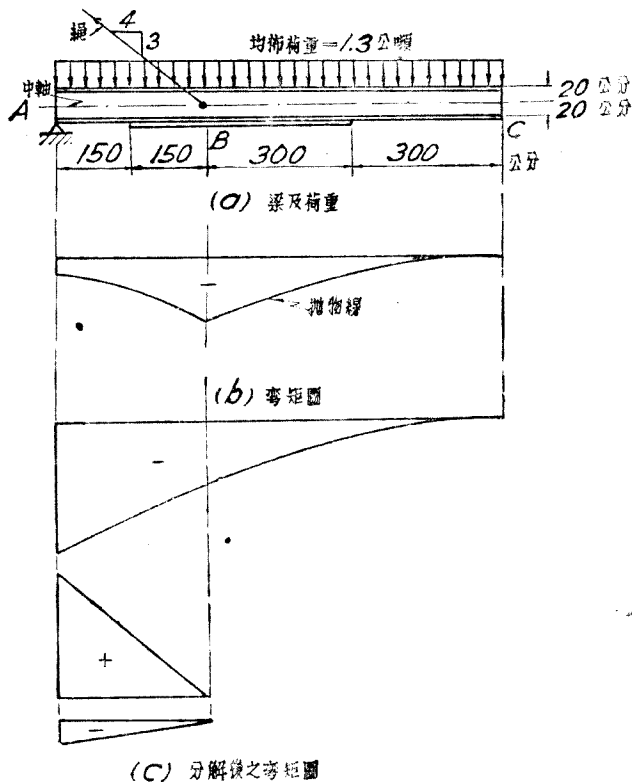
習題 12-3. 梁及荷重與例題 12-1 相同。設 g_1 及 g_2 各係 A_1 及 A_2 之重心各與 A 及 C 點之平距離。 l_1 與 l_2 各係 A_1 及 A_2 底邊之長度, 如例題 12-1 之附圖(c)所示。求表示 C 點之角變位 θ_C 及豎向線變位 δ_C 與 A_1, A_2, l_1, l_2, g_1 及 g_2 之關係之方程。

習題 12-4. 梁與例題 12-1 相同。樁支承及荷重如附圖所示。用顧臨氏法求此梁中軸之最大豎向線變位及其所在之點。梁本身之重量可以略去不計。



習題 12—4.

習題 12—5. 梁與例題 12—1 相同, 惟支承及荷重如附圖 (a) 所示, 用題 12—1 之法求此梁中軸 C 端在所示荷重下之角變位 θ_C 及豎向線變位 δ_C , 梁本身之重量可以略去不計。



習題 12—5.

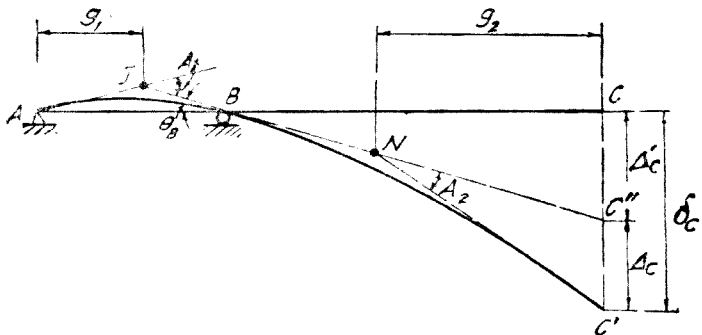
提示：附圖(b)示此梁彎矩圖之大概情狀，若將此彎矩圖分解為三個彎矩圖，如附圖(c)所示，則計算時較為簡易。求拋物線之豎距時，可參閱圖 4—14，求拋物線形之面積及重心時可參閱圖 12—3。

(2) 司徒(R. W. Stewart)氏法^① 司徒氏求直梁變位之法，係根據顧臨氏關於彎矩面積之理論(1)及下列之理論(3)：

(3) 若直梁因荷重而彎曲，其變位線上任何二點切線之相交點，與該二點間 M/EI 圖面積之重心同在一豎線上。

此理論可稱為彎矩面積之第(3)理論，即 12—2 節所述直梁五圖之關係(5)之特例。故司徒氏求角變位之法與顧臨氏者相同，惟求線變位時不必求某二點間 M/EI 圖面積對於某點之靜矩，但必須求得某二點間 M/EI 圖面積之重心。二者之計算實際常相同。惟某二點間 M/EI 圖面積之重心為已知或極易求得時，用此法以求線變位之計算，全用幾何學，非如顧臨氏法必採用力學中靜矩之計算也。

例題 12—2. 用司徒氏法解答例題 12—1。



例題 12—2.

① 參閱 182 頁註①。

解答： θ_C 之求法與例題 12—1 相同，故不贅 求 δ_C 之時，亦須先將該梁之變位線 ABC' 及切線 AJ, JN ，與 NC' 大概畫出，如附圖所示，得相交點 J 及 N ，與 A_1 及 A_2 之重心同在一豎線上。由例題 12—1 之計算，得 g_1 及 g_2 之值如下：

$$g_1 = \frac{0.00297 \times 200 + 0.000725 \times 100}{0.00297 + 0.000725} = 180.38$$

$$g_2 = \frac{0.00594 \times 400 + 0.00145 \times 200}{0.00594 + 0.00145} = 360.76$$

由是可得，

$$\theta_B = A_1 \times \frac{g_1}{300} = \frac{0.003695 \times 180.38}{300} = 0.002222$$

故

$$\Delta'_C = 600 \times \theta_B = 600 \times 0.002222 = 1.333 \text{ 公分}$$

$$\Delta_C = A_2 \times g_2 = 0.00739 \times 360.76 = 2.666 \text{ 公分}$$

$$\delta_C = \Delta'_C + \Delta_C = 1.333 + 2.666 = 3.999 \downarrow \text{公分}$$

注意附圖中之三切線與測量學中之導線 (traverse) 相似，故此法亦可稱為導線法。

習題 12—6. 用司徒氏法解答習題 12—4。

習題 12—7. 用司徒氏法解答習題 12—5。

(3) 摩爾 (Otto Mohr) 氏法^① 由方程 (12—2) 及 (12—4)

可得下列方程：

$$w = \frac{dV}{dx} \quad w = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (12-28)$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} \quad \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12-29)$$

① 此法係摩爾氏於 1868 年所創，上列之證明法係本書著者所創，其簡潔顯明，非其他任何證明法所及。此證明法曾由本書著者發表於美國土木工程師會專刊 1936 年 1006 頁。

比較上列二方程，可知 θ 及 y 與 M/EI 之算學關係，與 V 及 M 與 w 之算學關係相似。由是可知：若以 M/EI 圖當作直梁之分佈荷重 (w)，則任何點之切力 V 即等於該梁該點之角變位 θ ，任何點之彎矩 M 即等於該梁該點之線變位 y 或 δ 。故用此法以求直梁之角變位及線變位，其簡便與求梁之切力及彎矩相同。此法以 M/EI 圖為荷重，故常稱為彈性荷重法，其實 M/EI 圖即直梁角變率 $d\theta/dx$ 之圖。以 M/EI 圖為荷重之梁，常稱為共軛梁。

梁之豎向線變位普通多係向下，為方便起見，以後當以線變位之向下者為正號，向上者為負號。又以時針轉動之指向定角變位之正負號，亦較方便。故以後當以角變位之順時針轉向者為正號，逆時針轉向者為負號。注意上述定角變位及線變位正負號之方法，與圖 12—1 (d) 及 (e) 所示者正相反。如是，用此法求直梁之變位時，若將正號 M/EI 圖視作向下之荷重，負號 M/EI 圖視作向上之荷重，加於共軛梁，則任何點之切力 V 及彎矩 M 之正負號（依通常之規定如圖 12—1 (b) 及 (c) 所示者）各與原來梁該點角變位及線變位如上法規定之正負號恰相符合。

用此法求直梁之變位時，又須注意共軛梁之支承及接合，必與原來梁者相配合，庶於同一支點或接合點，共軛梁之切力及彎矩之值，可各與原來梁之角變位及線變位之已知值相符合。圖 12—4 (a) 示一兩端支承之簡單梁 AB ，受有一豎向集中荷重 P 。於其 A 及 B 二支點，必係 $\theta=0, y=0$ 。如圖 12—4 (b) 所示，

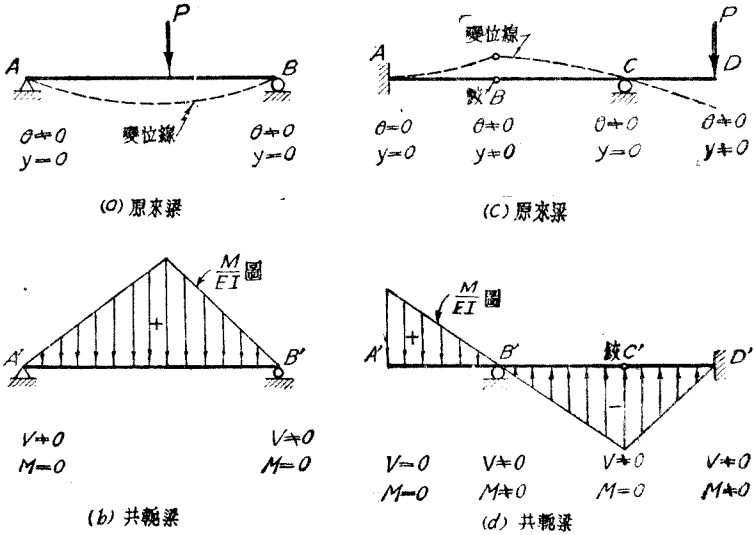


圖 12-4. 共軛梁與原來梁之支承與接合之配合

共軛梁 $A'B'$ 之荷重為一向下之三角形 M/EI 圖，其 A' 及 B' 二點，必須 $V \neq 0, M = 0$ 。因此， A' 及 B' 二點亦必係簡單支承，與原來梁相同。圖(c)示一原來梁 $ABCD$ ，其 D 端受有一集中荷重 P ，故如圖 12-4(d)所示，其共軛梁 $A'B'C'D'$ 之荷重為二個三角形之 M/EI 圖。 $A'B'$ 段之 M/EI 圖為正號，故向下， $B'C'D'$ 段之 M/EI 圖為負號，故向上。於原來梁之固定端 A ，必係 $\theta = 0, y = 0$ ，故於共軛梁之 A' 端，必須 $V = 0, M = 0$ 。因此 A' 端必須係無任何支承之端。於原來梁之鉸接點 B ，必係 $\theta \neq 0, y \neq 0$ ，故於共軛梁之 B' 點，必須 $V \neq 0, M \neq 0$ 。因此 B' 點必須係中間支承。於原來梁之中間支承 C 點，必係 $\theta \neq 0, y = 0$ ，故於共軛梁之 C' 點，必須 $V \neq 0, M = 0$ 。因此 C' 必須係鉸接，

蓋鉸接祇能傳遞切力不能傳遞彎矩。於原來梁之 D 端必係 $\theta \neq 0, y \neq 0$, 故於共軛梁之 D' 端必須 $V \neq 0, M \neq 0$, 因此 D' 端必須係固定。故共軛梁 $A'B'C'D'$ 之支承及接合必須如圖 12—4 (d) 所示。因此共軛梁與原來梁之支承與接合之配合如下列之表 XXV。

注意於表 XXV. 中, 除簡單支承端外, 其餘各種支承及接合, 均係共軛梁與原來梁交互配合。

由圖 12—4 可知如原來梁係靜定而且穩定, 則其共軛梁亦係靜定而且穩定。若原來梁係靜不定, 則共軛梁之本身變為不穩定。但如將正號之 M/EI 圖視作向下之荷重, 負號之 M/EI 圖視作向上之支力或反力, 則此項本身不穩定之共軛梁, 在正負號 M/EI 圖之作用下, 仍係穩定而且靜定。故無論原來梁係靜定或靜不定, 求其變位時之共軛梁, 概係穩定而且靜定。

例題 12—3. 用摩爾氏法解答例題 12—1。

解答: 附圖示所需之共軛梁, 因 M/EI 圖全係負號, 故共軛梁之荷重均係向上。計算時可將此 M/EI 圖分為四個三角形, 由例題 12—1 得此四個三角形之面積 W_1, W_2, W_3 及 W_4 之值如下:

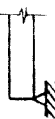



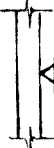
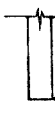

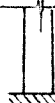
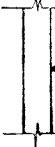

$$W_1 = \frac{75}{103,500} = 0.000725$$

$$W_2 = \frac{150}{50,400} = 0.00297$$

$$W_3 = 2W_2 = 0.00594$$

$$W_4 = 2W_1 = 0.00145$$

表 XXV. 共軛梁與原來梁之支承及接合之配合^①

原來梁	簡單支承端  $\theta \neq 0$ $y = 0$	固定端  $\theta = 0$ $y \neq 0$	無支承端  $\theta \neq 0$ $y \neq 0$	銜接  $\theta \neq 0$ $y \neq 0$	中間支承  $\theta \neq 0$ $y = 0$
共軛梁	簡單支承端  $V \neq 0$ $M = 0$	無支承端  $V = 0$ $M = 0$	固定端  $V \neq 0$ $M \neq 0$	中間支承  $V \neq 0$ $M \neq 0$	銜接  $V \neq 0$ $M = 0$

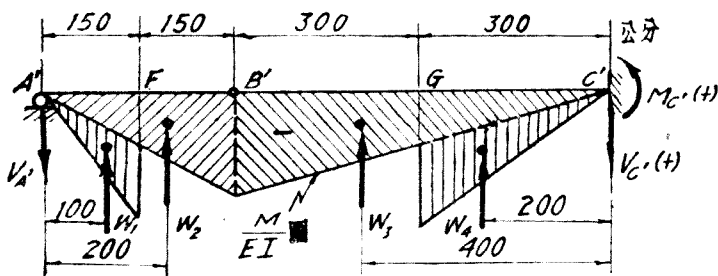
① 此表係美國魏 (H. M. Westergaard) 氏所發表，見美國西方工程師會 (Western Society of Engineer)

期刊 1921 年 11 月號。美國之康 (H. B. Compton) 與多 (C. O. Bohrenwend) 二氏，曾發表以切力

圖求直梁變位之法，與上述之法比較，缺點甚多，其最重者即共軛梁之支承及接合與原來梁者相配合，實際上

非全係可能，康多二氏之原文及本書著者之討論，均見 189 頁註所舉之參考書。

求原來梁 C 端之角變位 θ_C 及豎向線變位 δ_C ，即各等於求共軛梁 C' 端之切力 $V_{C'}$ 及彎矩 $M_{C'}$ ，而 $V_{C'}$ 及 $M_{C'}$ 即各係共軛梁 C' 端反力之豎分力及轉分力，注意附圖所之 $M_{C'}$ 及 $V_{C'}$ 皆係正號。



例題 12-3

以 B' 為矩心，用 $M_{B'}=0$ ，考慮 B' 點以左所有諸力之平衡，得，

$$V_{A'} = \frac{0.000725 \times 200 + 0.00297 \times 100}{300} = 0.001473 \downarrow$$

用 $\Sigma V=0$ ，得，

$$\begin{aligned} V_{C'} &= 0.000725 + 0.00297 + 0.00594 + 0.00145 - 0.001473 \\ &= +0.009612 \downarrow \end{aligned}$$

故 $\theta_C = +0.009612$ 弧度

以 B' 為矩心，用 $M_{B'}=0$ ，考慮 B' 點以右所有諸力之平衡，得，

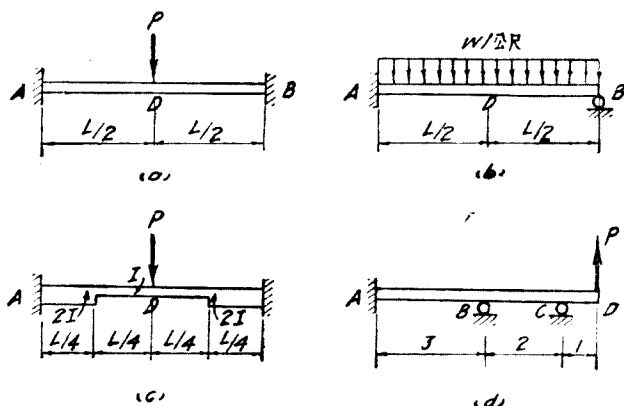
$$\begin{aligned} M_{C'} &= 0.009612 \times 600 - 0.00594 \times 200 - 0.00145 \times 400 \\ &= +3.999 \end{aligned}$$

故 $\delta_C = +3.999$ 公分

習題 12-8. 用摩爾氏法解答習題 12-4。

習題 12-9. 用摩爾氏法解答習題 12-5。

習題 12-10. 用摩爾氏法求附圖諸靜不定梁在所示荷重下 D 點之角變位 θ_D 及豎向線變位 δ_D 。 B 之值均係恆數，除(c)外， I 之值均係恆數。



習題 12—10.

(4) 圖解法 採用上述摩爾氏法時，於其軛梁之支承接合及彈性荷重 M/EI 圖既定之後，其任何一點之切力及彎矩，或其切力圖及彎矩圖，均可以 3—13 節之圖解法求之。由是即得直梁角變位及線變位之圖解法，若梁慣性矩 I 之值非一恆數，且其改變係一曲線，則採用此法以求其變位，非但適宜，抑且別無其他代替之法^①。若梁全長中 I 之值係一恆數，自無採用此法之必要。

若所求者為直梁全長之角變位圖及線變位圖（即變位線），或所求者係角變位為零時之最大豎向線變位，則計算時可將其軛梁之彈性荷重 M/EI 圖，以豎線分為若干等段，每段長 Δx ，並將每段之面積視作係一集中荷重，然後依圖 3—35 之法，得其軛梁之切力圖及彎矩圖（須乘以極距 H ）。前者即原來梁之

① 亦可採用數解求積分法，但其意義與此圖解法相同。

角變位圖，後者即原來梁之線變位圖。於角變位為零之點，即得原來梁之最大線變位。

圖 12-5 (a) 示一簡單梁 AB ，其 I 值之改變係一曲線。 E 為一恆數。 B 端受有一彎矩 M_B ，其彎矩圖為一三角形。圖 (b) 示 M/I 圖（因 E 係一恆數）及其軛梁。設將全跨長分為 8 等段，每段長為 Δx 。設此 M/I 圖於分段點 $1, 2, 3, \dots$ 等之豎距為 y_1, y_2, y_3, \dots 等，其單位為公噸/(公尺)³。設 M/I 圖於 y_1, y_2, y_3, \dots 之間係一直線，作若干斜線，將 M/I 圖每段之梯形各分為二個三角形。再自左端起，將每二個三角形相聯，其面積為 $y_1 \Delta x, y_2 \Delta x, \dots$ 等，其重心即在 $1, 2, \dots$ 等點。惟最左三角形之面積為 $y_8 \Delta x / 2$ ，其作用點與該三角形之重心相同。因 Δx 係一恆數，故計算時可以 $y_1, y_2, \dots, y_8 / 2$ ，代表其軛梁之彈性荷重。以任何極距 H 作力圖如圖 (c)， H 之單位為公噸/(公尺)³。再作索線多邊形如圖 (d)，及切力圖如圖 (e) 作一圓婉之曲線與圖 (d) 之索線多邊形相切即得代表線變位圖之曲線（即變位線）。經過圖 (e) 各段平線之大約中點，作圓婉之曲線，即得代表角變位圖之曲線。於圖 (d) 中，任何 C 點之豎距 d_c 之單位為公尺，其比例尺以梁之跨度相同，故 C 點之豎向線變位 δ 為，

$$\delta_c = d_c \left(\frac{H \Delta x}{EI} \right) \quad (12-30)$$

其單位為，

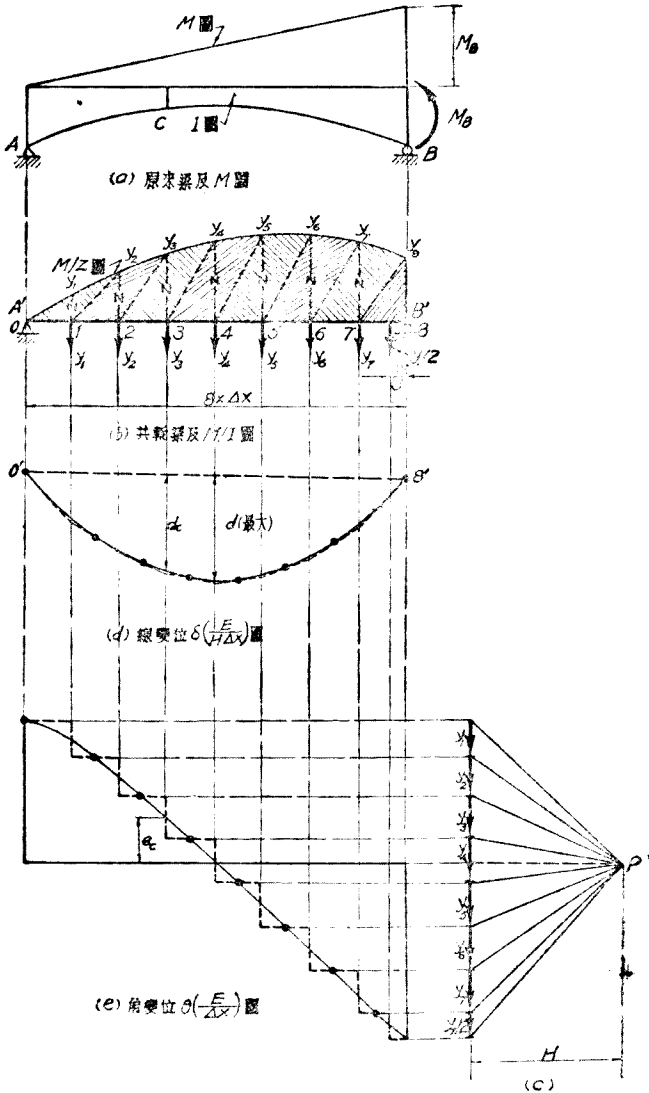


圖 12-5. 直梁變位之圖解法

$$\text{公尺} \left(\frac{\text{公噸} \text{公尺}}{(\text{公尺})^3} \frac{\text{公尺}}{\text{公噸}} \right) = \text{公尺}$$

故圖(d)之圖實係 $E\delta/H\Delta x$ 圖。

於圖(e)中任何C點之豎距 e_c 之單位為公噸/(公尺)³，其比例尺與圖(c) y_1, y_2, \dots 等者相同。故C點之角變位 θ_c 為，

$$\theta_c = e_c \left(\frac{\Delta x}{E} \right) \quad (12-31)$$

其單位為，

$$\frac{\text{公噸}}{(\text{公尺})^3} \left(\frac{\text{公尺}}{\text{公噸}} \right) = \text{不名數} = \text{弧度}$$

於角變位為零之點，即最大豎向線變位所在之點。若於圖(d)曲線之該點，作一切線，應與 $0'-S'$ 線平行。因 $0'-S'$ 代表梁中軸在未變位以前之位置，故用此法可以校核所得之結果是否精確。

若其輓梁之支承及接合如圖 12-4 (d)，作線變位圖時，可先假設該輓梁係支承於 A' 及 D' 二端之簡單梁，惟線變位圖之底線（即索線多邊形之閉合線）必須於 A' 及 C' 二點，與前所作之線變位圖相交，因該二點之線變位必為零。其角變位圖之作法須參照例題 3-5 之附圖(d)及(e)。

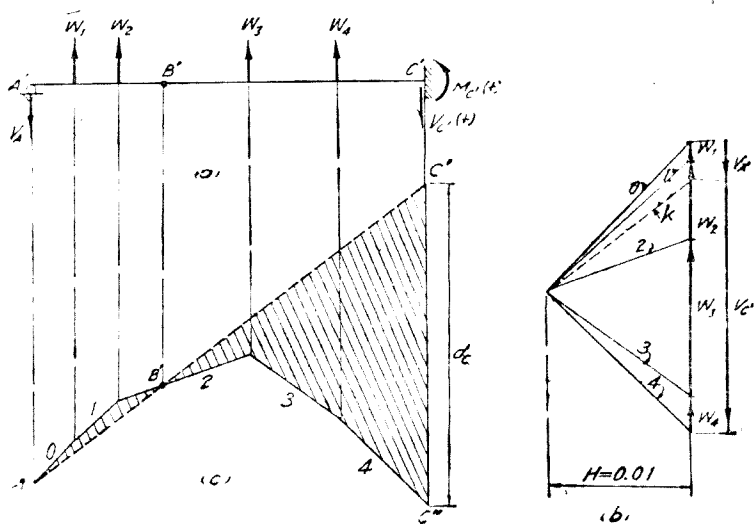
若所求者祇係任何一點之線變位及角變位，其圖解法可參照圖 3-36 所示之法。

例題 12—4. 用圖解法解答例題 12—1。

解答：因所求者祇係 θ_C 及 δ_C ，即共軛梁 C' 端之 $V_{C'}$ 及 $M_{C'}$ ，故共軛梁之彈性荷重可採用例題 12—3 附圖之 W_1, W_2, \dots 等，不必將 M/EI 圖分為若干等段，附圖 (a) 示共軛梁及彈性荷重。作力圖如附圖 (b)，使 $H = 0.01$ ，其比例尺與 W_1, W_2, \dots 等相同，又作索線多邊形如附圖 (c)。因 A' 及 B' 二點之彎矩為零，故經該二點作一直線 $A'B'C'$ ，即彎矩圖之底線，於 C' 點量定 d_C 豎距等於 399.9 公分，其比例尺與梁之跨度同，故

$$\delta_C = M_{C'} = Hd_C = 0.01 \times 399.9 = 3.999 \text{ 公分}$$

於圖 (b) 作一線 k 與圖 (c) 之 $A'B'C'$ 線平行，得 $V_{C'} = +0.009612$ ，其比例尺與 H 者相同，



例題 12—4.

故

$$\theta_C = +0.009612 \text{ 弧度}$$

注意附圖 (c) 之有斜線部分，示該梁豎向線變位圖之大概。

習題 12—11. 用圖解法解答習題 12—4。

習題 12—12. 用圖解法解答習題 12—5。

習題 12-13. 用圖解法求習題 3-25 鋼圓軸在其自身重量及所示荷重下之線變位圖及角變位圖。由此並求其最大豎向線變位及其所在之點，鋼料之 E 為 2,100 公噸/平方公分。

提示：計算彎矩圖及線變位圖時，可將此軸分為八等段而後採用圖 12-5 之法，計算時須力求精確。

12-4. 用虛功法求直梁之變位^① 圖 12-6(a) 示一懸臂

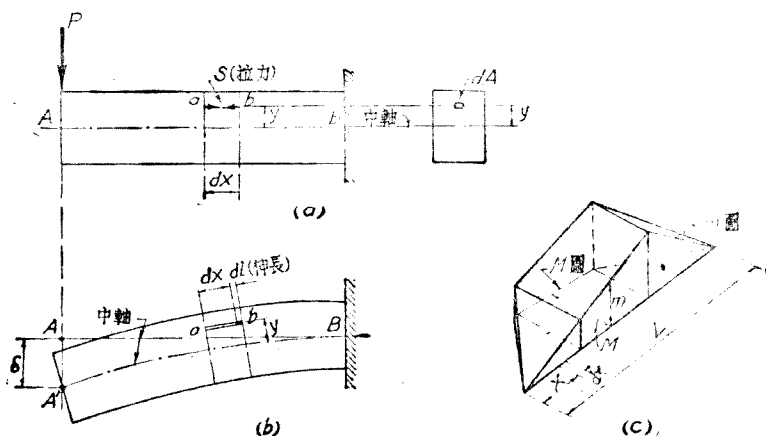


圖 12-6. 用虛功原理求直梁之變位

梁，其左端 A 受有一豎向集中荷重 P 。若祇考慮彎應力，則此梁所有之纖維均有拉應力或壓應力 s ，與荷重 P 維持平衡。又如圖 12-6(b) 所示，設此梁之左端 A 有向下極小虛移位 δ ，則此梁所有之纖維均有與控制情形相符之極小虛移位，^① 即所有之

① 此法之發現，應歸功於英國之麥 (J. C. Maxwell) 氏及德國之摩爾 (O. Mohr) 氏。故常以二氏之名名之。至採用單位虛荷重以求線變位之法，應歸功於德國之弗蘭克爾 (Fränkel) 氏。注意本書對於此法之表述，與任何英文書籍所用者均不同。

纖維必拉長或壓短。設以圖(a)之纖維 ab 為例，其長度為 dx ，截面面積為 dA ，其與梁中軸之豎距為 y 。此纖維因荷重 P 而有拉力 S 。因虛移位 δ 而有伸長 dl 。根據 3—8, 4—15, 7—4, 及 8—4 諸節所述之虛功原理，則此梁之因虛移位所作之總功必等於零，故

$$\begin{array}{c}
 \text{實在} \\
 \boxed{P\delta - \sum S dl} = 0 \\
 \text{虛設}
 \end{array}
 \quad (12-32)$$

注意圖 12—6(a) 中纖維 ab 之應力係與荷重 P 維持平衡，即係將左右二邊之梁拉攏，故其拉力 S 之指向如圖所示。此指向與 dl 之指向正相反，故方程 (12—32) 中 $\sum S dl$ 為負號。又注意方程 (12—32) 中 P 與 S 係實在之力系，而 δ 與 dl 係虛設之移位，與實在之力系 P 及 S 係完全獨立而無關係。此乃虛功理論之基本概念，讀者須澈底明瞭。

前此於 3—8, 4—15, 7—4 及 8—4 諸節中應用虛功理論時，所知者均相當於 P ，所求者均相當於 S 。故 P 及 S 為實在，而 δ 及 dl 為虛設。如方程 (12—32) 所示，若所知者為 dl ，所求者為 δ ，則亦未嘗不可應用虛功原理，使方程 (12—32) 中之 δ 及 dl 為實在，而 P 及 S 為虛設。如是，則方程 (12—32) 變為，

$$\begin{array}{c}
 \text{實在} \\
 \boxed{P\delta - \sum S dl} = 0 \\
 \text{虛設}
 \end{array}
 \quad (12-33)$$

注意方程 (12—33) 中力系 P 及 S 仍與移位 δ 及 dl 係完全獨立而無關係。

設 u 為 P 為單位荷重時 S 之值，即 S 與 P 之比，則，

$$u = \frac{S}{P} \quad (12-34)$$

故方程 (12—33) 可寫成，

$$\delta = \Sigma u dl \quad (12-35)$$

u 係不名數，常稱為變位係數，因以 u 乘纖維 ab 之伸長 dl ，即得 A 端由於 dl 之變位，其變位之傾度與荷重 P 之傾度相同。由是可知，如欲求直梁中軸上任何點之線變位時，可以一單位集中荷重置於該點，而後採用方程 (12—35) 計算，所得線變位之傾度，與該單位集中荷重者相同。此單位集中荷重常稱為虛荷重。由是可知纖維 ab 中 u 之值為，

$$u = \frac{my}{I} dA \quad (12-36)$$

其中 m 為梁任何截面由於單位荷重之彎矩， I 為梁截面對於其中軸之惰性矩。

方程 (12—33) 及 (12—35) 中 dl 之發生，可由於任何原因。若 dl 係由於荷重所生之彎應力 $f = My/I$ ，則

$$dl = \frac{f dx}{E} = \frac{My}{EI} dx \quad (12-37)$$

其中 M 為梁任何截面由於荷重之彎矩， E 為梁材料之彈性係數。以方程 (12—36) 及 (12—37) 代入方程 (12—35) 中，並將 Σ 號改為積分號，則

$$\delta = \iint \left(\frac{my}{I} \right) dA \left(\frac{My}{EI} dx \right) = \iint \frac{Mmy^2}{EI^2} dA dx \quad (12-38)$$

但 $\int y^2 dA = I$, 故

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (12-39)$$

同此, 如欲求直梁中軸任何點之角變位 θ , 可以一單位虛彎矩置於該點, 而 m 即變為梁任何截面由於單位虛彎矩之彎矩。故^①,

$$\theta = \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (12-40)$$

用此法所得線變位 δ 及角變位 θ 之指向, 可依所得之正負號而定。如所得之結果係正號, 則 δ 及 θ 之指向各與所用之單位虛荷重及單位虛彎矩之指向相同, 如係負號, 則其指向正相反。

用此法時必先定所欲求變位之截面, 故用此法以求某一定截面之變位, 雖甚簡便, 但不易用之以求其變位之最大值。惟此法亦可以用之以求直梁全長, 或各段之線變位, 或角變位之方程。

例題 12-5. 一簡單梁之全跨受有均佈荷重 w /公尺。用虛功法求其中軸豎向線變位及角變位之方程, EI 係恆數。

解答: 附圖(a)示梁及荷重, 附圖(b)及(c)各示求線變位及角變位時之虛荷重及虛彎矩。其中 a 係一變數, 於梁之任何截面,

^① 前此或已有人曾暗示此以單位虛彎矩求角變位之法, 但首次明白指出此法者, 係美國之史 (G. F. Swain) 氏, 見美國土木工程師會專刊 1911—1920 年, 622 頁。

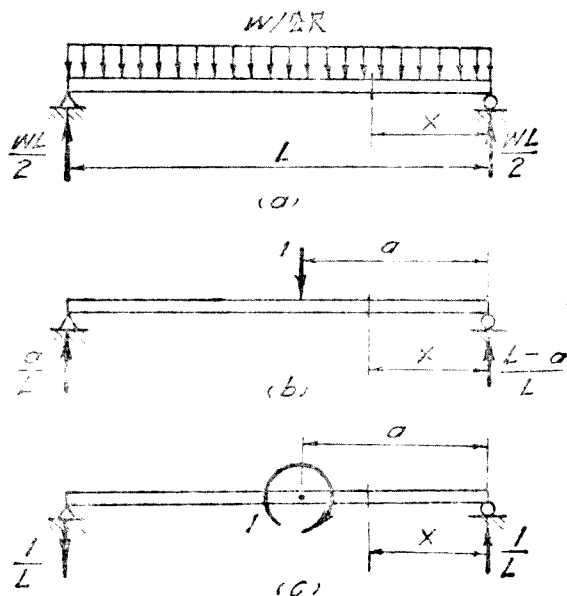
$$M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

如附圖(b)所示,若 $x < a$,

$$m = \frac{L-a}{L} x = x - \frac{ax}{L}$$

若 $x > a$,

$$m = \frac{L-a}{L} x - (x-a) = a - \frac{ax}{L}$$



例題 12-5.

$$\begin{aligned} EI\delta &= \int_{x=0}^{x=a} \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) \left(x - \frac{ax}{L} \right) dx + \int_{x=a}^{x=L} \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) \left(a - \frac{ax}{L} \right) dx \\ &= \frac{w}{24} (L^3a - 2La^3 + a^4) \end{aligned}$$

無論 a 之值如何, 所得 δ 之值, 均係正號, 即 δ 之指向與虛荷重者相同, 即向下。

如附圖(c)所示,

$$\text{若 } x < a, \quad m = \frac{x}{L}$$

$$\text{若 } x > a, \quad m = \frac{x}{L} - 1$$

$$\begin{aligned} EI\theta &= \int_{x=0}^{x=a} \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right) dx + \int_{x=a}^{x=L} \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) \left(\frac{x}{L} - 1 \right) dx \\ &= \frac{w}{24} (6La^2 - 4a^3 - L^3) \end{aligned}$$

若 $a < L/2$, 則 θ 之值為負號, 即其指向與其虛彎矩者相反, 即 \swarrow 。若 $a > L/2$, 則 θ 之值為正號, 即其指向與虛彎矩者相同, 即 \searrow 。

習題 12—14. 用虛功法解答例題 12—1

習題 12—15. 用虛功法解答習題 12—5。

習題 12—16. 用虛功法解答習題 12—2。

採用上述之虛功法時, 亦可不用求積分法而用已經求得之值。但此項值, 即係用求積分法或求體積法解 $\int_0^L Mm dx$ 而得。設以任一 M 圖為底, 任一 m 圖為高度, 及 L 為長度, 得一立體如圖 12—6'c 所示, 此立體之體積, 即係 $\int_0^L Mm dx$ 之值, 故其值全視 M 及 m 圖之形狀而定。下列之表 XXVI 中將各種普通 M 及 m 圖之此項值列出, 俾便計算, 注意此表中 M 及 m 圖底線之長度 L , 既可係梁之跨長, 亦可為梁某段之長度。梁之 EI 之值雖未計入, 此項之值中, 但梁之 EI 雖於全跨中非於一恆數, 惟其各段中 EI 或 I 之值仍係一恆數時 (例題 12—1 之梁), 祇須其各段之 M 及 m 圖與該表中所示者相同, 則此項值仍可採用, 茲舉例如下:

表 XXVI. $\int_0^L M m dx$ 之值

	M 圖	m 圖	$\int_0^L M m dx$ 之值
1			LMm
2			$\frac{L}{6} [M_1(2m_1+m_2)+M_2(m_1+2m_2)]$
3			$\frac{m}{6} [L(M_1+M_2)+bM_1+aM_2]$
4			$\frac{LM}{3} (m_1+m_2)$
5			$\frac{Mm}{3} [L+\frac{a+b}{2}]$
6			$\frac{LM}{4} [m_1+\frac{m_2}{3}]$
7			$\frac{Mm}{12L} [L^2+Lb+b^2]$
8			$\frac{LM}{4} (\frac{5}{3}m_1+m_2)$

例題 12-3. 用表 XXVI 中之值求例題 12-1 中彎向線變位之方程。

解答：此題之 M 及 m 與圖表 XXVI 中第 5 行所示者正相符。於該行之值中

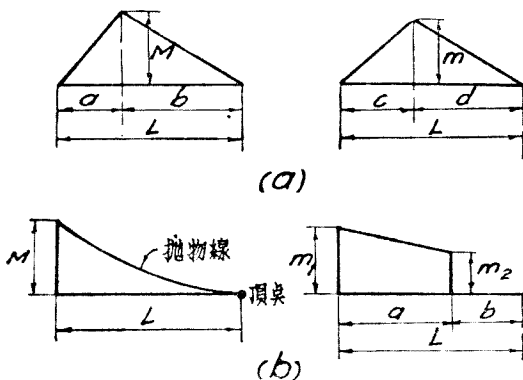
$$M = \frac{vL^2}{8}, \quad m = \frac{u(L-a)}{L}$$

$$\begin{aligned}
 EI\delta &= \int Mm \, dx = \frac{Mm}{3} \left[L - \frac{a(L-a)}{L} \right] \\
 &= \frac{wL^2}{24} \left[\frac{a(L-a)}{L} \right] \left[L + \frac{a(L-a)}{L} \right] \\
 &= \frac{w}{24} (L^3a - 2La^3 + a^4)
 \end{aligned}$$

習題 12-17. 用表 XXVI 中之值解答例題 12-1。

提示: 因梁全長中 l 之值非一恆數, 故須先將 M 及 m 圖分爲四段分別計算而後相加, 以求 δ_c 及 θ_c 之值。

習題 12-18. 設 M 及 m 圖各如附圖所示, 求 $\int Mm \, dx$ 之值。



習題 12-18.

12-5. 直梁由於切力及扭力之變位 以上所述求直梁變位之方法, 祇計及彎矩應力, 未嘗計及其由於切應力及扭應力之變位。於跨度較長深度較小之直梁, 其變位之由於切應力者甚微, 常略去不計。惟直梁之跨度甚短或深度甚大者, 其由於切應力之變位與由於彎應力者比較, 並非微小而可略去。此外, 直梁有時受有扭力, 其變位亦常須計算, 茲將該二項變位之求法, 分述如下:

(1) 由於切力之變位 求直梁切應力變位之方法, 仍以虛功法較為簡便。圖 12-7(a) 示直梁之一段, 其長度為 dx 。此段受有正號切力 V 。取任何纖維 ab , 其截面面積為 dA , 其單位切應力為 V , 纖維 ab 因切應力 V 之作

用面有切力變形 γ 。 γ 為一角度，其值為，

$$\gamma = \frac{V}{G} \quad (12-41)$$

其中 G 為剛勁係數（亦稱為切力彈性係數）。因此，纖維 ab 之 b 端對 a 端有相對之向下線變位 γdx ，而該段亦有向下線變位 dy 。故 $dy = \gamma dx$ 如圖 12-7(c) 所示，以正號虛切力 V' 加於該段，則該段之左右二部必有與 V' 指向相反之單位切應力 $v'dA$ 加於纖維 ab 之兩端，庶該段可以維持平衡。根據虛功之原理，則

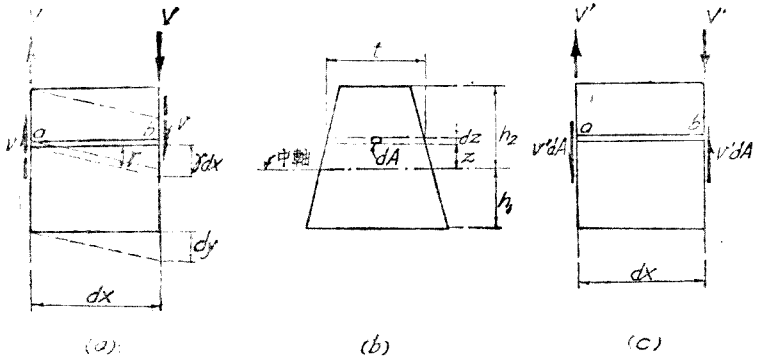


圖 12-7. 由於切應力之變位

$$\underbrace{V'dy}_{\text{虛設}} - \underbrace{\int_0^A (v'dA)}_{\text{實在}} \left(\frac{v}{G} dx \right) = 0 \quad (12-42)$$

其中 A 為梁截面之面積，切力 V' 及 $v'dA$ 為虛設，變位 dy 及 $(v/G)dx$ 為實在。二者係完全獨立，其意義與方程(12-33)完全相同。由是，

$$dy = \int_0^A \left(\frac{v'}{V'} dA \right) \left(\frac{v}{G} \right) dx \quad (12-43)$$

由材料力學或方程(6-1)，可知

$$v' = \frac{V'Q}{tI}, \quad v = \frac{VQ}{tI}$$

以上列 v' 及 v 之值代入方程(12-43)中，可得，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{GI^2} \int_0^A \frac{Q^2}{t^2} dA \quad (12-44)$$

或

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{KV}{GA} \quad (12-45)$$

$$\delta = y = \frac{K}{GA} \int V dx = \frac{KM}{GA} \quad (12-46)$$

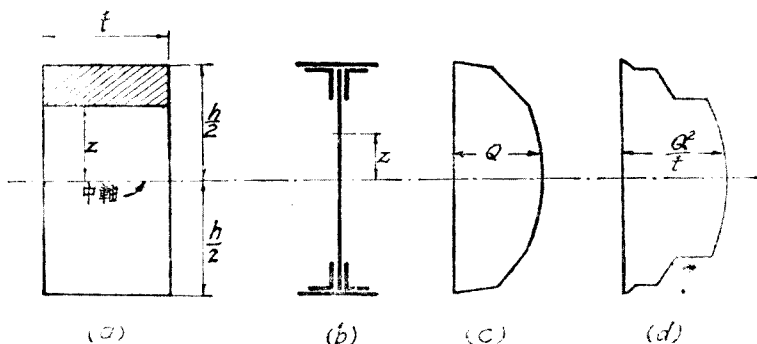
上列之方程(12-45)及(12-46)，各係求直梁由於切力角變位及線變位之方程。由是可知直梁由於切力之角變位 θ 及線變位 δ 圖，各等於該梁在荷重下之切力 V 及彎矩 M 圖乘以 K/GA 於簡單梁，此項方法可以直接採用，於非簡單梁，尚須依其支承及接合情形，加以改正。於上列之方程(12-45)及(12-46)中，

$$K = \frac{A}{I^2} \int_0^A \frac{Q^2}{t^2} dA \quad (12-47)$$

於梁之寬度 t 中，切應力 v 之數量，如係相同，則 dA 可改用 $t dz$ (圖 12-7(b))，故，

$$K = \frac{A}{I^2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{Q^2}{t} dz \quad (12-48)$$

方程(12-47)及(12-48)中之 K 係一係數，其值視梁之截面而定。若梁之截面係長方形，其深度為 h ，寬度為 t ，如圖 12-8(a) 所示，則

圖 12-8. K 之求法

$$Q = t \left(\frac{h}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) = \frac{t}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (12-49)$$

$$\begin{aligned} \int_{h/4}^{3h/4} \frac{Q^2}{t} dz &= \frac{t}{4} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 z^2}{2} + z^4 \right) dz \\ &= \frac{t}{4} \left[\frac{h^4}{16} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) - \frac{h^2}{6} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{h^5}{32} + \frac{h^5}{32} \right) \right] \\ &= \frac{th^5}{4} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80} \right) = \frac{th^5}{120} = \frac{h^2 I}{10} \end{aligned} \quad (12-50)$$

$$\text{但} \quad \frac{A}{I^2} = \frac{th}{\frac{th^3}{12} I} = \frac{12}{h^2 I} \quad (12-51)$$

由是

$$K = \left(\frac{12}{h^2 I} \right) \left(\frac{h^2 I}{10} \right) = \frac{6}{5} = 1.2 \quad (12-52)$$

故於長方形之截面， $K=1.2$ ，用同法可求得於圓形之截面^① $K = \frac{10}{9} = 1.11$ 。於其他畸形之截面，如 I 字形，其 K 之值不能用上列之求積分法求得者，可用圖 12-8 所示之法，先求得 Q 圖如圖 (c)，再求得 Q^2/t 如圖 (d)，故 $\int \frac{Q^2}{t} dz$ 即等於圖 (d) 之面積。再乘以 A/I^2 ，即得 K 之值。惟 A 祇係腹板之面積，因所有之切應力，幾全由腹板承受，用此法可求得 I 字形韌梁 K 之值均在 1 之左右。

由方程 (12-9) 可知方程 (12-45) 及 (12-46) 可各寫成，

$$\frac{K}{GA} w = \frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{K}{GA} w = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (12-53)$$

以上列之方程 (12-53) 與方程 (11-28) 比較，可知若以荷重 w (或力系) 乘以 K/GA ，則任何點之切力 V 即等於該梁該點由於切力之角變位 θ ，任何點之彎矩 M 即等於該梁該點之線變位 y 或 δ 。故直梁由於切力之變位，亦可用共軛梁法求之，其支承及接合仍須照表 XXV 與原來梁者相配合。若使共軛梁之荷重 (或力系) $(K/GA)w$ 之指向，與原來梁之荷重 (或力系) w 相同，用此法所求得切力 V 及彎矩 M 之正負號，與 12-3 節第 (3) 條所規定角變位及線變位之正負號恰相符合。

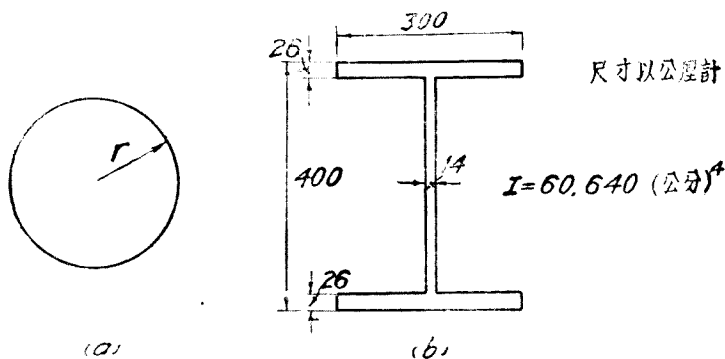
① 其求法列為習題 12-19。

直梁由於彎應力及切應力之變位，亦可合併計算。由方程(12—29)及(12—53)，可得，

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} + \frac{K}{GA} w = \frac{1}{EI} \left(M + \frac{KEI}{GA} w \right) \\ &= \frac{1}{EI} [M + 2(1+\mu) \rho^2 Kw] \end{aligned} \quad (12-54)$$

其中 $I/A = \rho^2$ ， ρ 為梁截面面積之旋動半徑，係假設梁截面之全面積承受切應力， $E/G = 2(1+\mu)$ ， μ 為材料之柏氏(S. D. Poisson, 1781—1840)係數 μ 之值最大不能超過 0.50 於結構鋼 (structural steel) $\mu = 0.30$ 於混凝土 $\mu = 0.083$ 至 0.125。方程(12—54)即表示求直梁由於彎應力及切應力之合併變位時共應梁之彈性荷重。

習題 12—19. 求下列圓形截面及 I 字形截面 K 之值。



習題 12—19.

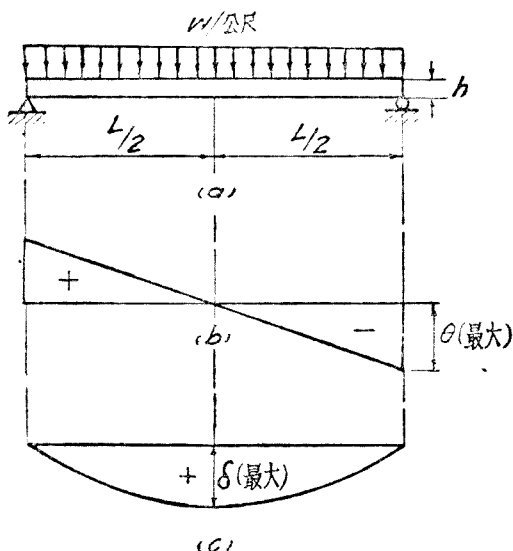
例題 12—7. 設一簡單梁其跨長為 L ，其截面為長方形，深度為 h ，寬度為 t ，其全跨受有均佈荷重 w /公尺 $\mu = 0.3$ ，(a) 求該梁由於切力之角變位圖及線變位圖，(b) 求該梁由於切力及彎矩最大線變位之比。

解答：(a) 簡單梁由於切力之角變位圖及線變位圖，各等於該梁在荷重下之切力圖及彎矩圖乘以 K/GA ，其值為，

$$\frac{K}{GA} = \frac{1.2 \times 2(1+\mu)}{Eth} = \frac{3.12}{Eth}$$

該梁在荷重 w /公尺下之切力圖及彎矩圖各如附圖(b)及(c)所示。其切力圖

兩端之最大值為 $wL/2$ ，故其角變位圖兩端之最大值為，



例題 12-7.

$$\theta_{(最大)} = \frac{3.12}{Eth} \times \frac{wL}{2} = \frac{1.56wL}{Eth}$$

其彎矩圖中線之最大值为 $wL^2/8$ ，故其線變位圖中線之最大值为，

$$\delta_{(最大)} = \frac{3.12}{Eth} \times \frac{wL^2}{8} \times \frac{th^3}{I} = \frac{0.6325 wL^2 h^2}{EI}$$

(b) 該梁由於彎矩之最大線變位為 $(5/384)(wL^4/EI)$ ，與上得由於切力之最大線變位比較，其比值為，

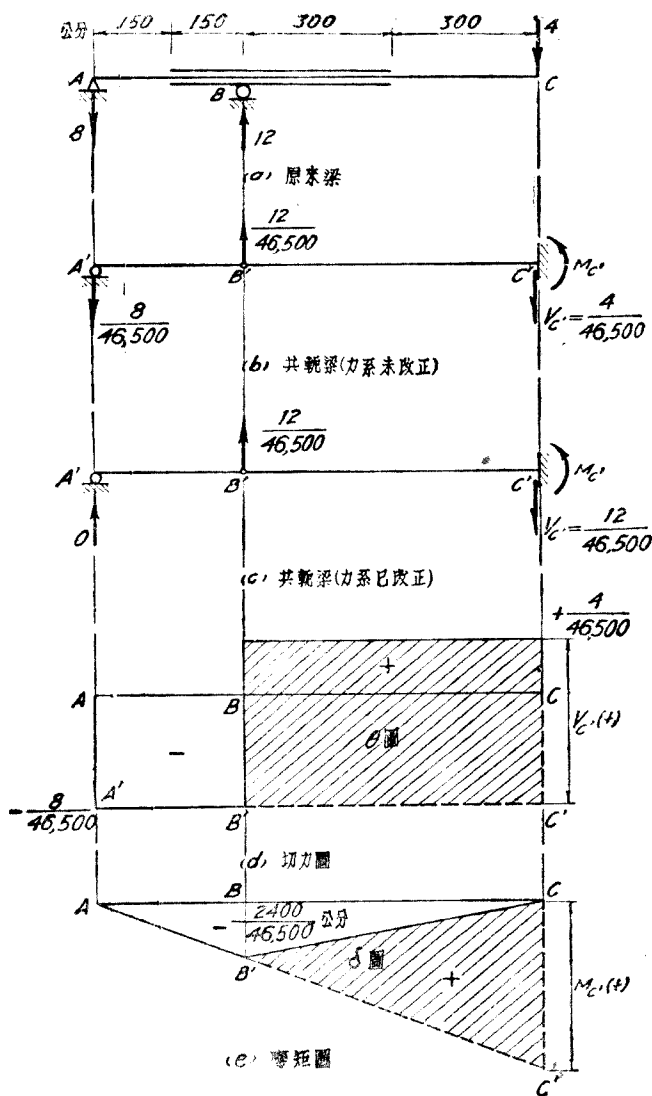
$$\frac{0.6325 wL^2 h^2}{EI} \times \frac{384}{5} \frac{EI}{wL^4} = 2.5 \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

若 $L/h=10$ ，則此梁由於切力之最大線變位約為其由於彎矩之最大線變位之 2.5%。若 L/h 愈大，則上述之百分數愈小。

習題 12-20. 與例題 12-6 相同，惟梁之截面係圓形，直徑為 d 。荷重改為一集中荷重 P ，置於梁跨之中線。

例題 12-8. 求例題 12-1 梁中軸 C' 端由於切力之角變位及線變位，

並求其與由於彎矩變位之比值， $\mu=0.3$ 。



例題 12-8.

解答：此梁之截面係 I 字形，故 K 之值約為 1，由例題 12-1 得，

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2,100}{2.6} = 808 \text{ 公噸/平方公分}$$

$$A = 400 \times 14.4 = 5760 \text{ 平方公厘} = 57.60 \text{ 平方公分}$$

故
$$\frac{K}{GA} = \frac{1}{808 \times 57.60} = \frac{1}{46,500} \text{ 公噸}$$

原來梁如附圖 (a) 所示，其共軛梁如附圖 (b) 所示。以原來梁之力系各乘以 $1/46,500$ ，則得共軛梁之彈性荷重。惟此共軛梁係一不穩定之結構，即 $A'B'$ 段不穩定，故其力系必改正如附圖 (c) 所示，由是得該 C 端由於切力之變位如下：

$$\theta_C = V_{C'} = + \frac{12}{46,500} = +0.000258 \text{ 弧度}$$

$$\delta_C = M_{C'} = + \frac{12 \times 600}{46,500} = +0.155 \text{ 公分}$$

以上得之變位與例題 12-1 所得由於彎矩之變位比較，其比值如下：

$$\text{角變位：} \quad \frac{0.000258}{0.009612} = 0.0268 = 2.68\%$$

$$\text{線變位：} \quad \frac{0.155}{3.999} = 0.0388 = 3.88\%$$

此題亦可以例題 12-4 所示之法解之。即先假設原來梁係一兩端支承之簡單梁，其 B 點有向上之彈性荷重 $12/46,500$ ，作此簡單梁之切力圖及彎矩圖，各如附圖 (d) 及 (e) 所示。惟原來梁之 AB 段兩端皆有支承，故該段中雖有切應力，但不能有由於切力之變位。因此於附圖 (d) 中改用 $A'B'C'$ 為底線，即得由於切力之角變位 θ 圖。於附圖 (e) 中改用 $A'B'C'$ 為底線，即得由於切力之線變位 δ 圖。二者皆係正號，用此法所得之答案，與前得者相同。

習題 12-21. 梁及荷重與習題 12-4 相同，求此梁中軸在切力及彎矩合併作用下之最大角變位及線變位，並指出其所在之點， $\mu = 0.30$ 。

提示：可用共軛梁法，應將其切力及彎矩變位之彈性荷重合併計算。

習題 12-22. 求習題 12-5 梁中軸 C 端由於切力之角變位及線變位，並求其與由於彎矩變位之比值， $\mu = 0.30$ 。

(2) 由於扭力之變位 圖 12-9 示一長度為 L 之軸，其兩端有數量相同

指向相反之扭矩 T ，則其兩端相對之扭轉角 θ 即係扭力之變位。根據材料力學，則，

$$\theta = \frac{TL}{FG} \quad (12-55)$$

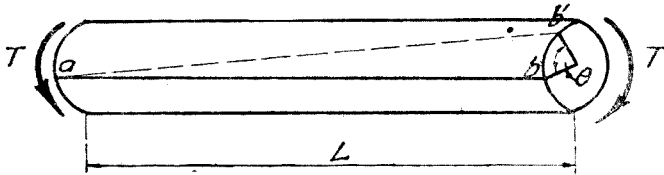


圖 12-9. 扭力之變位

FG 稱為扭力剛度， F 稱為扭力係數，其值視截面之形狀而定。下列之表 XXVII 示通常截面 F 之值：

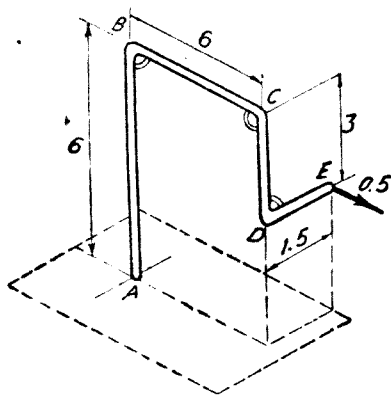
表 XXVII. 扭力係數 F 之值

截 面	F 之 值
圓形(直徑為 a)	$0.098 a^4$
橢圓形(直徑為 a 與 b)	$0.196 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
正方形(邊長為 a)	$0.1406 a^4$
長方形(邊長為 a 及 b , a 與 b 相差不大)	$0.279 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
長條形(長為 a 寬為 b , a 與 b 相差甚大)	$0.333 ab^3$
等邊三角形(邊長為 a)	$0.0217 a^4$

注意於圓形截面， F 即截面面積對於其重心之極慣性矩 J ，於其他對稱式之實截面， F 約為 $0.025 A^4/J$ ，其中 A 為截面之面積， J 為截面面積對於其重心之極慣性矩。於 I 字形及 L 形截面，可將其分開視作一長條形而計算其 F 之近似值。

習題 12-23. 一圓鋼管彎曲如附圖所示。其 A 端係固定， B 端受有

一平向荷重。鋼管截面之慣性矩為 $6,000$ (公分)⁴。其極慣性矩為 $12,000$ (公分)⁴。 $E=2,100$ 公噸/平方公分，求在彎矩及扭力下 (a) E 端於荷重傾度之線變位，及 (b) E 端之絕對線變位及其傾度。



習題 12—23.

12—6. 曲梁之變位 結構中常有曲梁，設 R 為曲梁中軸之曲率半徑， h 為其荷重平面內之深度，依 h 與 R 比值之大小，可將曲梁分為三類：

- (a) R 與 h 之值相差無幾；
- (b) R 之值相當大於 h ；
- (c) R 之值遠較 h 者為大。

鈎及鏈環等物，屬於 (a) 類曲梁，其變位之精確計算，殊為繁雜。結構工程中所採用之曲梁，其 R 與 h 之比常在 10 與 30 之間，故屬於 (b) 或 (c) 類。計算 (c) 類曲線之變位，如將其視作一直梁，採用前述之方法（惟須將各方程中之直線長 dx ，改為曲線長 ds ）則所得之結果，相差甚微。故以下所述求曲梁變位之方法，祇以 (b) 類為限，即其 R 與 h 之比值至少在 10 以上者。

圖 12—10(a) 示一 A 端固定之曲梁 AB ，其中軸長為 S ，受有任何荷重，於其中取一任何極短之段，其截面面積為 A ，其於中軸之長度為 ds 。如圖 (b) 所示，設該短段受有正號彎矩 M 及正號軸向正壓力（即拉力） N ，於 (b) 及 (c) 類之曲梁，其由於切力之變位極小，可以略去，故未將該截面之切力示出，於該短段中又取一纖維 ab ，其與中軸之正距為 z ，其截面面積為 dA ，其長度

爲 $ds(R+z)/R$ 。假設該段截面彎應力之分佈與直梁者相同，則纖維 ab 長度之改變 dl 爲，

$$dl = \left(\frac{N}{EA} - \frac{Mz}{EI} \right) \left(\frac{R+z}{R} \right) ds \quad (12-56)$$

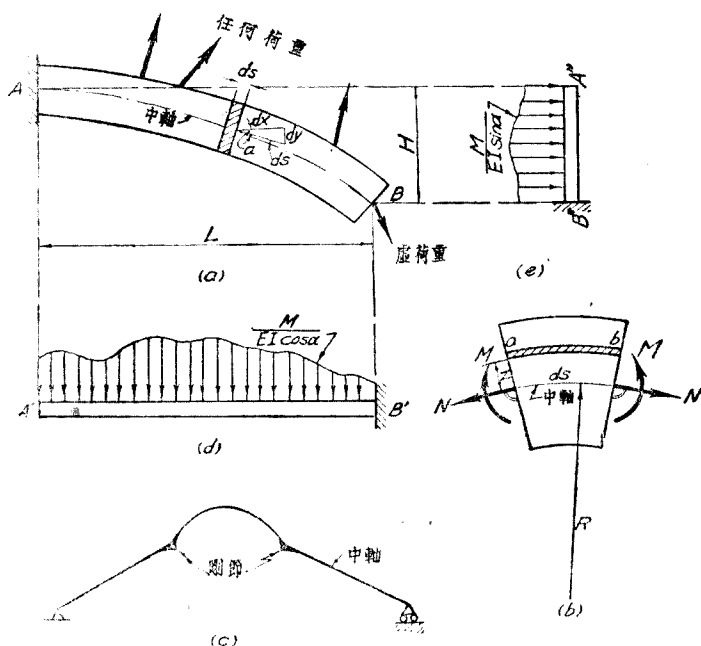


圖 12-10. 曲梁之變位

設欲求者爲其中軸 B 端於任何傾度之線變位 δ ，可採用虛功法，以一單位虛荷重加於 B 端，其傾度與 δ 者相同，如圖 12-10(a) 所示。設此單位虛荷重使圖 12-10(b) 之短段有正號彎矩 m 及正號軸向正應力 n ，故纖維 ab 所受之應力 u 爲，

$$u = \left(\frac{n}{A} - \frac{mz}{I} \right) dA \quad (12-57)$$

以方程(12-56)及(12-57)中 dl 及 u 之值代入方程(12-35)中，並將 Σ 號改爲積分號而求該截面全面積 A 及該梁全長 S 之積分，則中軸 B 端之線變位 δ 爲，

$$\delta = \int_0^A \int_0^S \left(\frac{N}{EA} - \frac{Mz}{EI} \right) \left(\frac{n}{A} - \frac{mz}{I} \right) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dA ds \quad (12-58)$$

因 $\int_0^A dA = A$, $\int_0^A z dA = 0$, $\int_0^A z^2 dA = I$

故方程(12-58)可化簡為,

$$\delta = \int_0^S \left(\frac{Mm}{EI} + \frac{Nn}{EA} - \frac{Mn + Nm}{EAR} + \int_0^A \frac{Mms^2}{EI^2 R} dA \right) ds \quad (12-59)$$

若曲梁之截面對於中軸係對稱形,則

$$\int_0^A z^3 dA = 0$$

故方程(12-59)又可化簡為,

$$\delta = \int_0^S \left(\frac{Mm}{EI} + \frac{Nn}{EA} - \frac{Mn + Nm}{EAR} \right) ds \quad (12-60)$$

如欲求中軸 B 端之角變位 θ , 可以一單位虛彎矩加於 B 端, 如是則 $m=1$, $n=0$, 由方程(12-60), 可得,

$$\theta = \int_0^S \left(\frac{M}{EI} - \frac{N}{EAR} \right) ds \quad \bullet(12-61)$$

應用方程(12-59)至(12-61)時, 須注意 M, N, m 及 n 之正負號。所得之結果如係正號, 則其指向與虛荷重或虛彎矩者相同, 如係負號, 則其指向與之相反。若曲梁之 A, I , 或 R 非一恆數, 或其任何截面之 M 及 N 之值不能以一或數方程表之, 則應用上列諸方程時, 可將其積分號改為總合號 Σ , ds 改為 Δs , 並將曲梁於其中軸分為若干等長之短段 Δs , 而後用數解或圖解總合法以計算之。

上列之諸方程亦可用以求圖 12-10(c) 所示之剛節折梁之變位, 惟於其中之直段 $R=a$, 故該方程中有 R 之項, 均可略去。

曲梁由於彎矩之豎向線變位亦可用共軌梁法求之, 其彈性荷重 $d\theta/dx$ 可由方程(12-61)求得, 因 $ds = dx/\cos a$, a 為曲梁中軸任何點之傾度, 故,

$$\theta = \int_0^S \frac{M}{EI} ds = \int_0^L \frac{M}{EI \cos a} dx$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI \cos a} \quad (12-62)$$

同此, 求曲梁由彎矩之平向線變位時, 其彈性荷重為 $d\theta/dy$, 因 $ds = dy \sin a$,

故,

$$\theta = \int_0^S \frac{M}{EI} ds = \int_0^H \frac{M}{EI \sin \alpha} dy$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{M}{EI \sin \alpha} \quad (12-63)$$

求豎向及平向線變位之共軛梁, 各如圖 12-10 (d) 及 (e)。其計算可用數解法或圖 12-5 之圖解法。

曲梁由於彎矩之變位, 亦可用下列之圖解法求之, 求豎向線變位時, 則於方程(12-60)中, $m=x$ 。如用總合法, 則 $\delta_V = \Sigma Mx \Delta s / EI$ 。如圖 12-11 (a) 所示, 將曲梁分為若干 Δs 短段, 其每段之 $M\Delta s / EI$, 即彈性荷重。將 $M\Delta s / EI$ 視作豎向荷重, 以任何橋距 H , 作力多邊形, 如圖 (b), 及索線多邊

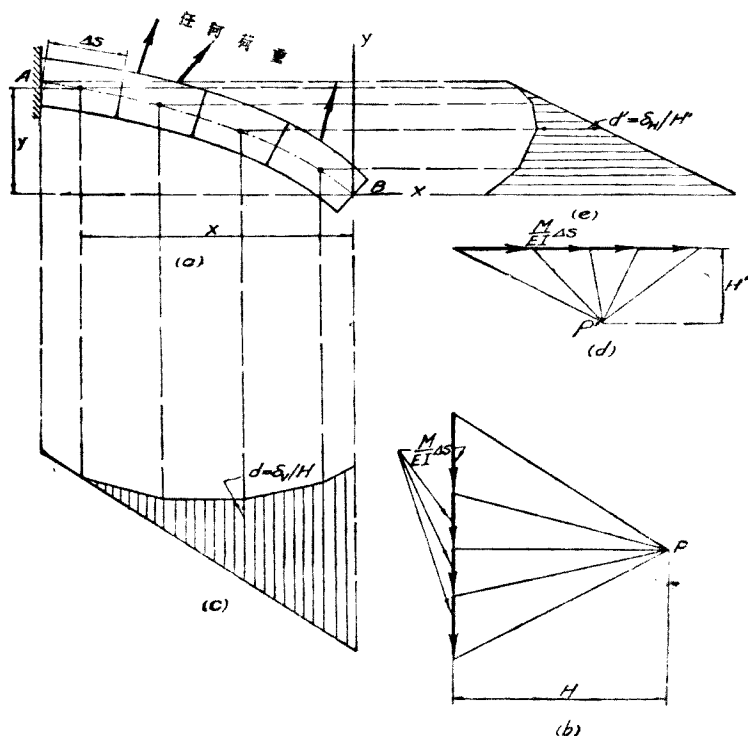
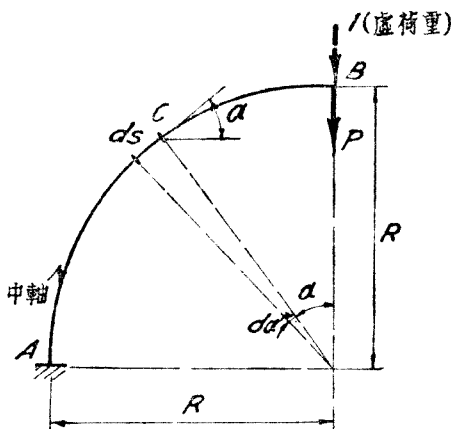


圖 12-11. 曲梁變位之圖解法

形，如圖(c)，即得此曲梁之豎向線變位圖，其豎距 $d = \delta_V/H$ 。同此，求平向線變位時，則 $m = y$ ，故 $\delta_H = \Sigma My \Delta s/EI$ 。將 $M \Delta s/EI$ 視作平向荷重，以任何極距 H' 作力多邊形及索線多邊形各如圖(d)及(e)。圖(e)即此曲梁之平向變位圖，其豎距 $d' = \delta_{H'}/H'$ 。因此此曲梁之左端係固定，故任何點之角變位即等於該點以左彈性荷重 $M \Delta s/EI$ 之總量，若曲梁係兩端支承，則祇須將索線多邊形之閉合線，加以改正，其餘作圖法均相同，至任何點之角變位，即等於其轉梁在彈性荷重下之切力。用圖解法分析靜不定式之拱橋時，常採用此法。

例題 12—9. 附圖示一曲梁 AB ，其中軸為圓形之四分之一。 A 端係固定， B 端受有一向下之荷重 P 。設圓形之半徑為 R ，梁截面之 I 及 A 係一恆數， E 亦係一恆數，求 B 端之豎向線變位 δ_V 。



例題 12—9.

解答： 以一單位向下虛荷重置於 B 端，則梁中軸任何點 C 在荷重 P 及虛荷重下之彎矩及正應力各如下：

$$M = -PR \sin \alpha, \quad N = -P \sin \alpha$$

$$m = -R \sin \alpha, \quad n = -\sin \alpha$$

注意 $ds = R da$ ，代入方程(12—60)中，得

$$\delta_V = \frac{PR}{E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^2 \sin^2 \alpha}{I} + \frac{\sin^2 \alpha}{A} - \frac{2 \sin^2 \alpha}{A} \right) ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{PR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{I}{AR^2}\right) \sin^2 a \, da \\
 &= \frac{PR^3}{EI} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right] \left[\frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4} \frac{PR^3}{EI} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]
 \end{aligned}$$

其中 $\rho^2 = I/A$ ，若曲梁之截面為長方形，其深度為 h ，則 $\rho^2 = h^2/12$ ，故，

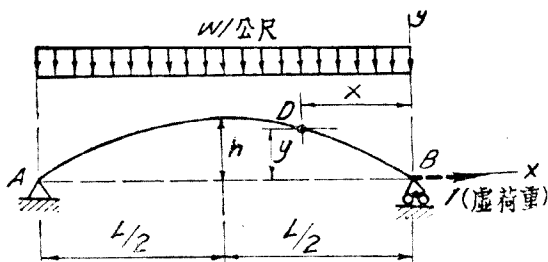
$$\delta_V = \frac{\pi}{4} \frac{PR^3}{EI} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2\right]$$

若 h 遠較 R 為小，則上列方程括弧中第二項之值極小，可以略去，如是則，

$$\delta_V = \frac{\pi}{4} \frac{PR^3}{EI}$$

上列 δ_V 之值，祇係由於彎矩之變位。故 h/R 之值為甚小時，則曲梁由於正應力 N 之變位，亦常甚小而可略去。

例題 12—10. 附圖示一曲梁 AB ，其中軸係一曲率不大之拋物線，其全跨受有均佈荷重 w /公尺，其 E, I 及 A 均係恆數！求此曲梁 B 端由於彎矩之角變位及平向線變位，因此曲梁之曲率不大，故計算時可假設 $ds = dx$ 。



例題 12—10.

解答： 所求之變位祇係由於彎矩者，並設 $ds = dx$ ，則方程(12—50)及(12—61)各變為，

$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} \, dx$$

$$\theta = \int_0^L \frac{M}{EI} \, dx$$

以坐標置於 B 點，則拋物線梁中軸之方程爲，

$$y = \frac{4hx}{L^2}(L-x)$$

以一指向向右之平向單位虛荷重置於 B 點，則中軸上任何 C 點之 m 及 M 如下：

$$m = y = \frac{4hx}{L^2}(L-x)$$

$$M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

故

$$\begin{aligned} \delta_H &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) \frac{4hx}{L^2} (L-x) dx \\ &= \frac{2wh}{EIL^2} \int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4) dx \\ &= \frac{2wh}{EIL^2} \left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{Lx^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^L \\ &= \frac{2whL^2}{EI} \left[\frac{10-15+6}{30} \right] = + \frac{whL^2}{15EI} \rightarrow \end{aligned}$$

以一順時針向之單位虛彎矩置於 B 點，則 $m = -1$ ，

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) dx = -\frac{w}{2EI} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L \\ &= -\frac{wL}{2EI} \left[\frac{3-2}{6} \right] = -\frac{wL}{12EI} \checkmark \end{aligned}$$

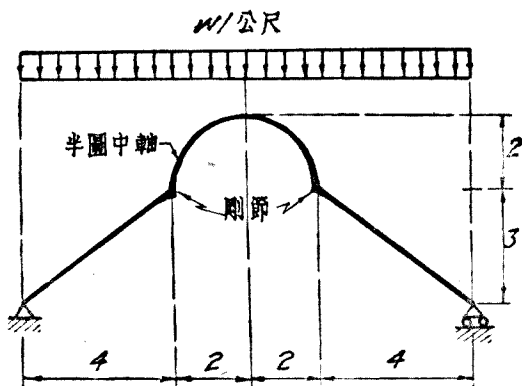
習題 12-24. 求例題 12-9 曲梁 B 端之平向線變位及角變位。

習題 12-25. 與例題 12-10 相同，惟荷重改爲一向下之集中荷重 P ，其與曲梁 A 端之平距爲 kL ，而 k 係一變數。

習題 12-26. 與例題 12-10 相同，惟曲梁中軸係一半圓弧(即 $h=L/2=R$)，計算時用 $ds=Rda$ ，並(a)不將 N 及 n 略去，(b)將 N 及 n 略去。

習題 12-27. 附圖示一剛節之折梁，其中部之 BC 段爲一半圓形，求在所示之荷重下 D 端之平向線變位。 E, I 及 A 均係恆數，計算時不可將 N 及 n 略去。

提示：習題 12—26 之答案可否採用？



習題 12—27.

12—7. 用虛功法求桁架之線變位 桁架任何節點於任何傾度之線變位，可用方程(12—35)求之，其中 u 為任何桿在虛荷重下之應力， dl 為該任何桿由於任何原因之長度改變。此項桿長度之改變，可由應力，溫度之升降，工作之不精確，或鉸節之鬆動。若桿長度之改變 dl 係由於其中之單位應力 s ，則

$$dl = \frac{sl}{E}$$

故

$$\delta = \sum \frac{sul}{E} \quad (12-64)$$

用此法時亦須先定所欲求線變位之節點及線變位之傾度。於圖 12—12(a) 中， A 示某節點之原來位置， A' 示該節點因任何原因變位後之位置， AA' 常稱為該節點之絕對線變位。設欲求該節點之線變位時，虛荷重之傾度為 AA'' ，則求得者實僅係

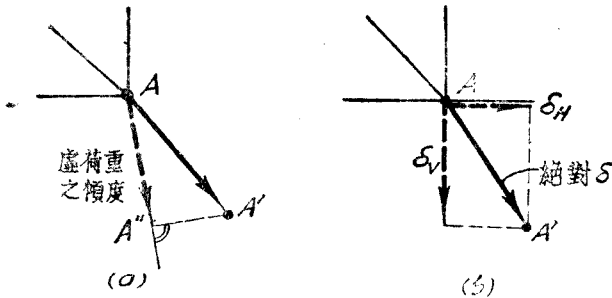


圖 12—12. 絕對線變位及分線變位

線變位 AA' 於該傾度之分線變位 AA'' 。故用此法所求得者，實係某節點於虛荷重傾度之分線變位，而非該節點之絕對線變位。如須求某節點之絕對線變位（絕對 δ ），可先後求得該節點之豎分線變位 δ_V ，及平分線變位 δ_H ，而後求其總合線變位，即得絕對線變位〔圖 12—12(b)〕^①，故，

$$\text{絕對 } \delta = \sqrt{\delta_V^2 + \delta_H^2}$$

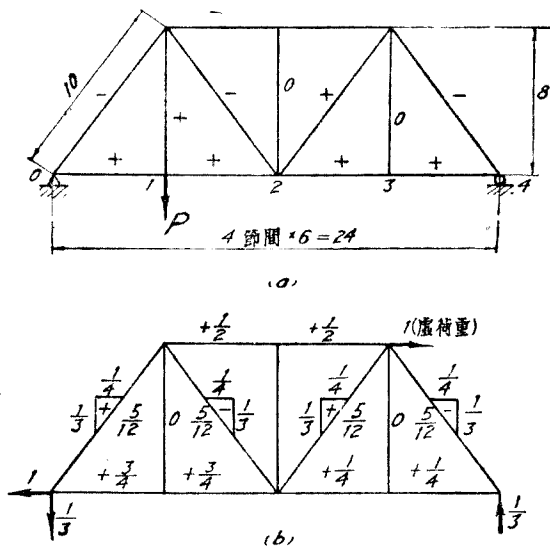
由方程(12—64)可知：若桁架中某桿之 s 或 u 為零時，則該桿對於所求某節點於該傾度之線變位絕無影響。

用方程(12—64)時，必須注意 s 及 u 之正負號。如所得之結果係正號，則線變位之指向與虛荷重者相同，否則與之相反。

例題 12—11. 附圖 (a) 示一桁架，其節點 I_1 受有一向下之集中荷重 P ，因此桁架中之拉桿有單位應力 1.2，壓桿有單位應力 0.8， $E=2,100$ ，均

① 前所述求直梁變位之方法，祇限於其中軸之變位。在彎矩之作用下，直梁中軸之長度既不能改變，而其變位之數量又常極小，故直梁中軸由於彎矩之絕對線變位，實際上即係其豎向線變位。此直梁變位與桁架變位不同之點。

以公噸/平方公分計，求節點 U_3 之水平線變位之數量及指向。



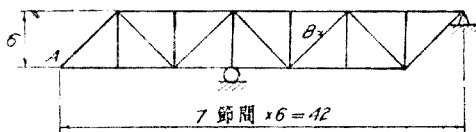
例題 12-11.

解答：附圖(a)示在荷重 P 下桁架中拉桿壓桿及無應力桿之區別 以一向右之單位虛荷重置於節點 U_3 ，則桁架中諸桿之應力 u 如附圖(b)所示，所有算計可列表如下，凡桿之 s 或 u 為零者，均未列入。

桿		l (公尺)	u	ul (公尺)	Σul (公尺)
拉	L_0L_2	12	$+\frac{3}{4}$	+9	$+\frac{97}{6}$
	L_2L_3	12	$+\frac{1}{4}$	+3	
桿	U_3L_2	10	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{25}{6}$	$+\frac{11}{6}$
壓	U_1L_0	10	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{25}{6}$	
	U_3L_1	10	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{25}{6}$	
	U_1U_3	12	$+\frac{1}{2}$	+6	
桿	U_1L_2	10	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{25}{6}$	

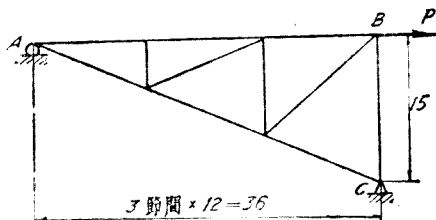
$$\begin{aligned}\delta_{H(V_0)} &= \Sigma \frac{su l}{E} = \frac{(+1.2) \left(+\frac{97}{6} \right) + (-0.8) \left(+\frac{11}{6} \right)}{2,100} \\ &= \frac{+19.40 - 1.47}{2,100} = +\frac{17.93}{2,100} = \underline{\underline{+0.00854}} \rightarrow \text{公尺}\end{aligned}$$

習題 12—28. 設欲將 B 桿之長度加以改變庶節點 A 可向上升起 1 公分。問 A 桿長度之改變應如何?



習題 12—28.

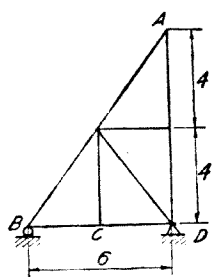
習題 12—29. 此桁架之節點 B 受有一向右之集中荷重 P , 其中拉桿之單位應力為 1.2, 壓桿之單位應力為 0.8, $E=2,100$, 均以公噸/平方公分計, 求節點 A 之平向線變位。



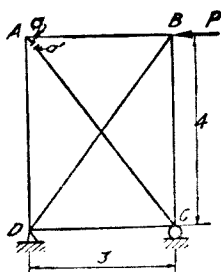
習題 12—29.

習題 12—30. (a) 若此桁架 AB 桿之長度因溫度下降 40 度而有改變, 求節點 A 之平向及豎向線變位。設材料之膨脹係數為 0.0000065, (b) 若節點 C 有一集中荷重 P , 使拉桿有單位應力 1.2, 壓桿有單位應力 0.8, $E=2,100$, 均以公噸/平方公分計, 求節點 A 之平向及豎向線變位。

習題 12—31. 設將此桁架之 AC 桿於其上端 $a-a'$ 處截斷, 故在所示之荷重 P 下, 該桿無應力。其餘拉桿之單位應力為 1.2, 壓桿之單位應力為 0.8, $E=2,100$, 均以公噸/平方公分計。問在所示之荷重下, a 與 a' 二點間之距離為若干?

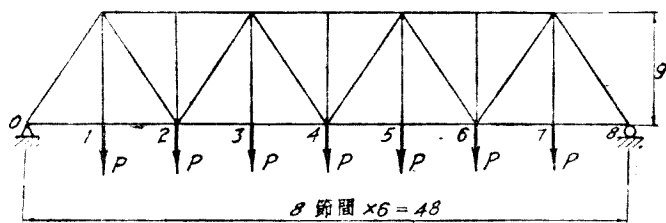


習題 12-30.

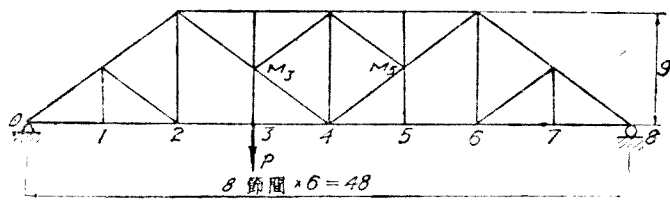


習題 12-31.

習題 12-32. 設此桁架在所示之荷重下，其拉桿之單位應力為 1.2，壓桿之單位應力為 0.8， $E=2,100$ ，均以公噸/平方公分計。求節點 L_2 之豎向及平向線變位。



(a)



(b)

習題 12-32.

關於桁架之計算，不外求應力及變位。二者比較之，學者每覺計算桁架之應力極易，而計算桁架之變位稍難。其實二者之計算方法極相似，圖 12-13 (a) 示一桁架，節點 b 受有一向下集中荷重 P_b 。設欲求斜桿 a 之應力 S_a ，可

用彎矩法，以 I 點為矩心，得，

$$P_b e - S_a r = 0 \quad (12-65)$$

$$S_a = \frac{e}{r} P_b \quad (12-66)$$

又如圖 12-13(b) 所示，設斜桿 a 之長度伸長 dl_a ，則節點 b 之絕對線變位為 bb' ，而其豎向線變位為 δ_b 。設 dl_a 及 δ_b 係虛移位，則 S_a 可用虛功法由下列方程求之：

$$\begin{array}{c} \text{虛設} \\ \boxed{P_b \delta_b - S_a dl_a} = 0 \\ \text{實在} \end{array} \quad (12-67)$$

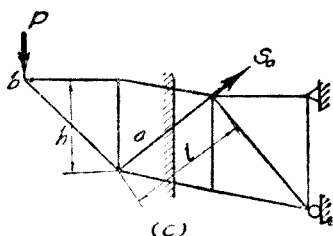
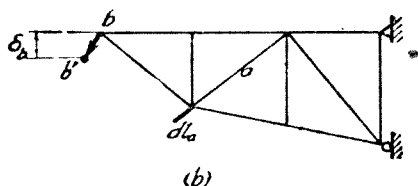
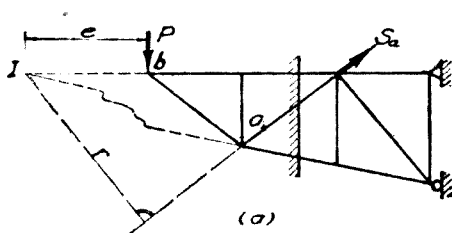


圖 12-13 桁架變位計算與應力計算之比較

故
$$S_a = \frac{\delta_b}{dl_a} P_b \quad (12-68)$$

可知應力 S_a 之求法有二：於方程(12-66)用平衡之原理，於方程(12-68)用虛移位之原理。前者係力學方法，而後者可稱為幾何學方法，因移位之關係屬於幾何學之範圍

設欲求節點 b 由於斜桿 a 伸長 dl_a 之豎向線變位 δ_b ，亦可採用方程(12-67)，惟 δ_b 及 dl_a 變為實在，而 P_b 及 S_a 變為虛設，如是，則

$$\delta_b = \frac{S_a}{P_b} dl_a \quad (12-69)$$

由方程(12-66)，

$$\frac{S_a}{P_b} = \frac{e}{r} \quad (12-70)$$

代入方程(12-69)中，得，

$$\delta_b = \frac{e}{r} dl_a \quad (12-71)$$

設斜桿 a 所在節間之上下弦桿係平行，如圖 12-13(c)，則方程(12-66)及(12-71)中之 e 為無窮，故該二方程不能採用，於此， S_a 可用切方法求之。

$$S_a = \frac{l}{h} P_b \quad (12-72)$$

故

$$\delta_b = \frac{l}{h} dl_a \quad (12-73)$$

由是可知 δ_b 之求法亦有二：於方程(12-69)用力學方法，於方程(12-71)及(12-73)用幾何學方法。因前者須採用荷重及應力，即上述之虛功法。後者祇須用距離。注意，

$$\frac{S_a}{P_b} = \frac{e}{r} = u, \quad \frac{S_a}{P_b} = \frac{l}{h} = u$$

u 即 P_a 為 1 時 S_a 之值，與前此虛功法中之 u 完全相同。故方程(12-67)與(12-71)及(12-73)之概念雖異，但其意義則同。

將方程(12-71)及(12-73)與方程(12-66)及(12-72)比較，可知求節點 b 由於 a 桿有長度改變 dl_a 時之豎向線變位 δ_b 之方法，與求 a 桿由於節點 b 有一豎向荷重 P_b 時之應力 S_a 完全相同，讀者須澈底明瞭此點，

12—8. 桁架之相對線變位 若計算桁架節點之線變位時，假設桁架中另一節點之位置不變，及經過該節點之任桿（此桿不一定必係桁架中實有之桿，亦可為經過該節點之任一虛設之桿）之傾度不變，而此種假設並與該桁架變位之實際情形不符，則所得之線變位稱為相對線變位。其與該桁架變位之實際情形相符之線變位稱為實際線變位。

圖12—14(a)示一桁架及其荷重與反力。設欲求 B 與 d 二節點間之相對線變位 δ_{B-d} 。即假設任一節點之位置不變，而求其他一節點於 B_d 傾度（即於 B 與 d 二節點間置一虛設桿，並假定其傾度不變）之線變位，亦即該桁架變位後該二節點間距離之改變。如圖12—14(b)所示，設以一鉸支座置於節點 B ，使

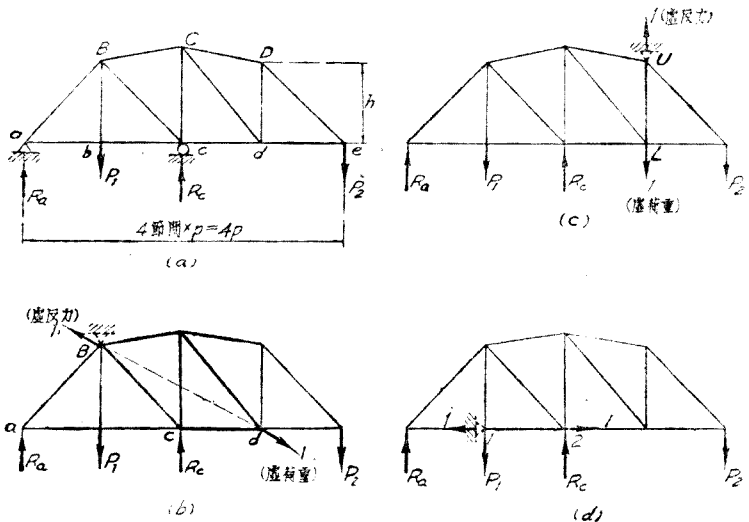


圖 12—14. 桁架之相對線變位

其位置不能改變。注意此桁架既在所示之荷重及反力下維持平衡，故節點 B 另加鉸支座之反力必為零，而該桁架之變位情形亦不因節點 B 另加一鉸支座而有改變，以一單位虛荷重置於節點 d ，其傾度與聯 B 與 d 二節點之直線相同，其指向與節點 B 相背，則節點 B 之鉸支座必有與其傾度相同指向相反之虛反力，如是則該桁架有應力 u 之桿，如圖 12—14 (b) 之粗線所示。用方程 (12—63)，則，

$$\delta_{B-d} = \sum \frac{sul}{E} \quad (12-74)$$

若所得之結果係正號，則 δ_{B-d} 之指向與節點 d 虛荷重之指向相同，即該桁架變位後 B 與 d 二節點間之距離加長。如係負號，則該二節間之距離係縮短。

同此，設欲求桁架中任一豎桿兩端上下弦二節點 U 及 L 間之相對線變位 δ_{U-L} ，則虛荷重及虛反力如圖 12—14 (c) 所示，祇豎桿 UL 有應力 u ，故

$$\delta_{U-L} = \left(\frac{sul}{E} \right)_{UL} = dl_{UL} \quad (12-75)$$

設上弦節點 U 有豎向線變位 $\delta_{V(U)}$ ，則下弦節點 L 之豎向線變位 $\delta_{V(L)}$ 必係，

$$\delta_{V(L)} = \delta_{V(U)} + dl_{UL} \quad (12-76)$$

故於有豎桿之桁架，無論其上下弦是否平行，若其任一弦某節點之豎向線變位為已知，則其他一弦同一節點之豎向線變位可用方程 (12—76) 求之。惟計算時須注意：凡向下之線變位 δ_V 為

桿		l(公尺)	u	ul(公尺)	Σul (公尺)
拉 桿	U_3L_2	10	-0.693	-6.93	- 1.93
	L_2L_3	6	+0.833	+5.00	
壓 桿	U_1U_3	12	+0.416	+5.00	+11.93
	U_1L_2	10	+0.693	+6.93	

解答：虛荷重及虛反力如附圖所示 所有之計算詳見該圖及附表，注意豎桿 U_3L_3 在荷重下之應力為零，故未列入附表中。

$$\delta_{U_1-L_3} = \frac{(+1.2)(-1.93) + (-0.8)(+11.93)}{2,100} = -\frac{11.86}{2,100}$$

$$= -0.00565 \text{ 公尺 (即該二節點間之距離縮短)}$$

習題 12—33. 桁架及荷重與習題 12—32(b) 相同。求 L_2 與 M_3 及 L_6 與 M_6 二節點間之相對線變位，其傾度與聯該二節點之直線相同。

例題 12—13. 桁架及荷重與例題 12—11 相同。求上下弦所有諸節點之平向線變位。

解答：上弦節點 U_2 之平向線變位已於例題 12—11 中求得，故計算時須自右至左，因此方程(12—78)應改 $\delta_{H(U_1)} = \delta_{H(U_2)} - dl_{12}$ 。因所有上弦桿之縮短均等於 $-6 \times 0.8/2,100 = -0.00229$ 公尺，故所有之計算如下：

由例題 12—11 得， $\delta_{H(U_2)} = +0.00854$ 公尺 →

$$\delta_{H(U_3)} = +0.00854 + 0.00229 = +0.01083 \text{ 公尺} \rightarrow$$

$$\delta_{H(U_1)} = +0.01083 + 0.00229 = +0.01312 \text{ 公尺} \rightarrow$$

因鉸支座在桁架之左端，故計算下弦節點之平向線變位時，須自左至右。方程(12—78)可以直接採用。因所有下弦桿之伸長均等於 $+6 \times 1.2/2100 = +0.00343$ 公尺，故所有之計算如下：

$$\delta_{H(L_6)} = \pm 0, \quad \delta_{H(L_1)} = +0.00343 \text{ 公尺} \rightarrow$$

$$\delta_{H(L_2)} = +2 \times 0.00343 = +0.00686 \text{ 公尺} \rightarrow$$

$$\delta_{H(L_3)} = +3 \times 0.00343 = +0.01029 \text{ 公尺} \rightarrow$$

$$\delta_{H(L_4)} = +4 \times 0.00343 = +0.01372 \text{ 公尺} \rightarrow$$

習題 12—34. 桁架及荷重與習題 12—32 相同。(a) 求桁架 (a) 中節點 U_3 之豎向線變位及所有下弦諸節點之平向線變位。(b) 求桁架 (b) 中節點 U_3 及 M_3 之豎向線變位及所有下弦諸節點之平向線變位。

提示：該二桁架節點 L_3 之豎向線變位已於習題 12—32 中求得。

試研究桁架相對線變位與實際線變位之關係，圖 12—15(a) 示桁架之任何二節點 A 及 B 。設節點 A 之位置係固定不變，節點 B 之相對線變位為 BB' ，其平豎分線變位各為 δ'_{BH} 及 δ'_{BV} 。若實際上節點 A 亦有線變位 AA' ，其平豎分線變位各為 δ_{AH} 及 δ_{AV} ，則節點 B 必移至 B'' ，而線變位 BB'' 與 AA' 完全相同。故節點 B 之實際線變位為 $B''B'$ ，其平豎分線變位 δ_{BH} 及 δ_{BV} 必各為，

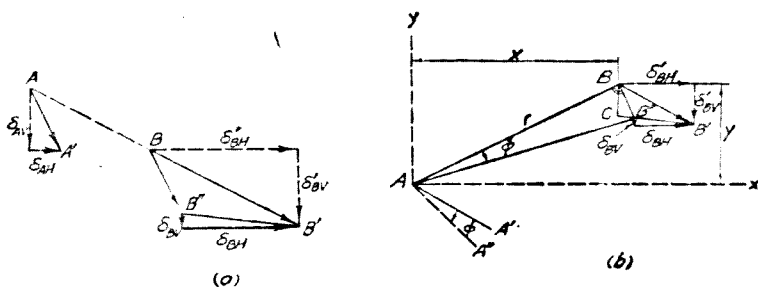


圖 12—15. 由桁架之相對線變位求其實際線變位

$$\delta_{BH} = \delta'_{BH} - \delta_{AH} \quad (12-79)$$

$$\delta_{BV} = \delta'_{BV} - \delta_{AV} \quad (12-80)$$

用上列方程由桁架之相對線變位而求其實際線變位之法，常稱為移動改正法，因桁架祇須向上下及左右移動，即可由其相對線變位求其實際線變位。

如圖 12-15(b) 所示，設桁架中任何桿 AA' 之位置及傾度均係固定不變，則任何節點 B 之相對線變位為 BB' ，其平豎分線變位各為 δ'_{BH} 及 δ'_{BV} 。若實際上節點 A 之位置係固定不變，但 AA' 繞其 A 端轉動一角度 ϕ 至 AA'' ，則節點 B 必移至 B'' ，因 ϕ 之值常極小，故

$$BB'' = r\phi$$

$$CB'' = BB'' \frac{y}{r} = y\phi$$

$$BC = BB'' \frac{x}{r} = x\phi$$

因此節點 B 之實際線變位為 $B''B'$ ，其平豎分線變位 δ_{BH} 及 δ_{BV} 必各為，

$$\delta_{BH} = \delta'_{BH} - y\phi \quad (12-81)$$

$$\delta_{BV} = \delta'_{BV} - x\phi \quad (12-82)$$

用上列方程由桁架之相對線變位而求其實際線變位之法，常稱為轉動改正法，因桁架祇須轉動一極小角度 ϕ 即可由其相對線變位求得其實際線變位。

若將上述二種改正法合併，即可得方程如下：

$$\delta_{BH} = \delta'_{BH} - \delta_{AH} - y\phi \quad (12-83)$$

$$\delta_{BV} = \delta'_{BV} - \delta_{AV} - x\phi \quad (12-84)$$

採用方程(12-79)至(12-84)時，須注意平向線變位之向右者，豎向線變位之向下者，及轉動角度 ϕ 之順時計針向者（即如圖 12-15 所示者）均為正號，反是均為負號。

於第 12—7 節所述之虛功法，每一次計算祇能求得某一節點於某一傾度之線變位。於結構學中，常須求桁架某一弦所有節點之豎向線變位，如是則所需計算之次數，與該弦所有無支承之節點數相同。其原因即在求某弦所有節點先後有虛荷重時之桿應力 u 不甚簡易。下述之方法，先求得桁架某一弦所有節點之相對豎向線變位，再加以所需之改正，即可以一次之計算求得其實際豎向線變位 ①。

圖 12—16(a) 示一懸臂式之平行弦桁架，支承於 a （桁架之固定端）及 C 二節點，荷重 P_1 及 P_2 各置於節點 b 及 e 。求其下弦諸節點之實際豎向線變位 δ_{bv} , δ_{dv} 及 δ_{ev} 等。假定節點 a 之位置不變，端壓桿之傾度不變，於實際上此種假定即等於節點 a 有一鉸支座，節點 B 有一輻軸支座，如圖 12—16(b) 所示。前已說明，荷重 P_1 及 P_2 與 a 及 c 二支點之反力 R_a 及 R_c 維持平衡，故新置之二支座在荷重 P_1 及 P_2 下之反力為零，而該桁架之變位亦不因之而有任何改變。故於所有諸桿長度改

① 武漢大學教授俞忽氏曾採用此法，惟計算仍嫌太長，見所著之靜不定結構中之應力（英文本，俞氏自印行）一書。最近壽（L. H. Shoemaker）氏發表以節間變位法求桁架之變位，載美國土木工程師會專刊，1937 年 195 頁，何（D. B. Hall）氏亦發表以幾何學方法求變位，載美國土木工程師會專刊，1938 年，275 頁（此法並見工程新聞紀錄 1934 年 6 月 7 日刊，746 頁）。壽氏之法須用「節間變位」之概念，何氏之法則不甚詳明。本書所述之法，係取俞、壽、何三氏方法之長，故較上述之三法為簡明使用。

變 dl 或其中單位應力 s 既已如圖 12-16 (a) 之支承情形算得之後，即可依圖 12-16 (b) 之支承情形，計算其下弦諸節點之相對線變位 $\delta'_{bV}, \delta'_{cV}, \dots$ 等。

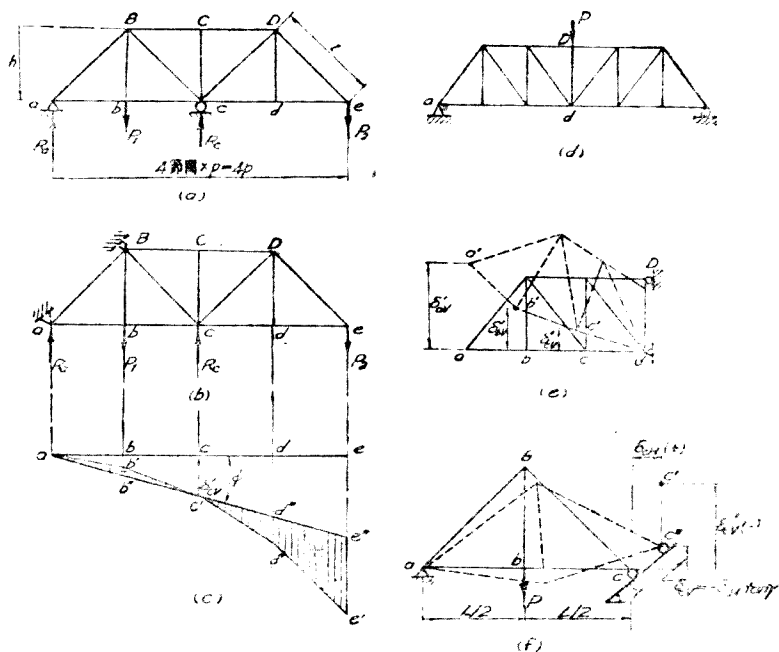


圖 12-16. 桁架相對線變位之應用

若桁架之支承如圖 12-16 (b) 所示，則豎向單位虛荷重先後置於下弦節點 b, c, d 及 e 時，各桿之應力 u 極易依下法求得。因圖 12-16 (b) 之支承點在桁架之左端，故，

(a) 弦桿：於虛荷重在某弦桿矩心之左時，該弦桿之 u 爲零。計算某弦桿之 u 時，可先以虛荷重置於該弦桿矩心之

最近之右鄰節點，得 u 之值為 $\pm p/h$ 。然後將虛荷重逐一向右移置於其他節點，得 u 之值如 $\pm 2p/h, \pm 3p/h$ 等。故 $\pm p/h$ 可稱為弦桿應力 u 之基本值。

(b) 斜桿：於虛荷重在某斜桿之左時，該斜桿之 u 為零，於虛荷重在斜桿以右任何節點時，該斜桿 u 之值均為 $\pm l/h$ ，係一恆數。惟斜桿 aB 中 u 之改變情形，與下弦桿 ac 者相似。

(c) 豎桿：求某主豎桿之應力時，必用一斜截面。於虛荷重在該截面之左時，則該主豎桿之 u 為零，於虛荷重在該截面以右之任何節點時，該主豎桿之值均為 ± 1 ，副豎桿之 u 是否為零，視其副節點有無虛荷重而定，如有，則其 u 之值為 ± 1 ，亦係一恆數。

虛荷重先後在下弦諸節點時之桿應力 u 既可依上述之法以一次計算求得，故下弦諸節點之相對豎向線變位亦可以一次計算求得。其所以須先求相對線變位而求實際線變位之理由即在此，而此法之簡便，亦在此。如是可得下弦諸節點之相對豎向線變位圖如圖 12—16(c) 之 $ab'c'd'e'e$ ，其底線為 ae ，即圖 12—16(b) 中桁架下弦未變位以前之位置，前此所假定節點 a 之位置不變，此與圖 12—16(a) 之實際支承情形相符。惟前此所假定端壓桿之傾度不變，與實際情形不符，蓋節點 c 之實際豎向線變位必為零。因此必採用轉動改正法，將已變位之桁架繞節點 a 向上轉動一角度 ϕ ，迄至其支承於節點 c 之輓軸支座之上為止。亦即等於將未變形之桁架，繞節點 a 向下轉一角度 ϕ ，迄

至節點 c 之豎向線變位爲零爲止，因所有運動均有相對性，而 ϕ 之值又極小也。故於圖 12—16 (c) 作直線 $ac'e''$ 即得實際豎向線變位圖，如圖 12—16 (c) 之有斜線部分，直線 $ac'e''$ 即其底線。 ϕ 之值如下：

$$\phi = + \frac{\delta'_{cV}}{2p}$$

用方程 (12—82) 得下弦諸節點之實際豎向線變位如下：

$$\delta_{aV} = 0$$

$$\delta_{bV} = bb' - bb'' = \delta'_{bV} - p \frac{\delta'_{cV}}{2p} = \delta'_{bV} - \frac{1}{2} \delta'_{cV}$$

$$\delta_{cV} = 0$$

$$\delta_{dV} = dd' - dd'' = \delta'_{dV} - 3p \frac{\delta'_{cV}}{2p} = \delta'_{dV} - 1\frac{1}{2} \delta'_{cV}$$

$$\delta_{eV} = ee' - ee'' = \delta'_{eV} - 4p \frac{\delta'_{cV}}{2p} = \delta'_{eV} - 2 \delta'_{cV}$$

若桁架及其桿長度之改變均係對於其中線成對稱式，如圖 12—16 (d)，則計算任一弦桿諸節點之相對豎向線變位時，可假定豎桿 Dd 之傾度不變，即以一輓軸支座及一鉸支座各置於節點 D 及 d ，如圖 12—16 (e) 所示（該二節點之二種支座亦可互換，於所得之實際線變位毫無影響，惟以鉸支座置於主節點 d ；則計算時較爲簡便），同時即係假定節點 d 之位置不變。如是得桁架下弦諸節點之相對豎向線變位 δ'_{aV} ， δ'_{bV} 及 δ'_{cV} ，如圖 12—16 (e) 之虛線所示。因桁架及其桿長度之改變均有對稱性，故豎桿 Dd 之傾度實際上係不改變，此與前所假定者相符。惟

實際上節點 d 有豎向線變位而節點 a 則無，此與前所假定者不符，因此祇須採用移動改正法，將未變位之桁架向上移（即相當於將已變位之桁架向下移）迄至節點 a 與 a' 在同一平線上為止。如是，節點 d 之實際豎向線變位 δ_{dV} 為，

$$\delta_{dV} = \delta'_{aV}$$

用方程(12—80)得其他下弦節點之實際豎向線變位如下：

$$\delta_{cV} = \delta'_{cV} - \delta_{dV} = \delta'_{cV} - \delta'_{aV}$$

$$\delta_{bV} = \delta'_{bV} - \delta_{dV} = \delta'_{bV} - \delta'_{aV}$$

$$\delta_{aV} = \delta'_{aV} - \delta_{dV} = \delta'_{aV} - \delta'_{aV} = 0$$

因該桁架及其桿長度之改變成對稱式，故其右半下弦諸節點之實際豎向線變位亦係與其左半諸節點者成對稱式。

如圖 12—16 (f) 所示，若桁架節點 c 之輾軸支座係置於一坡面上，其傾度為 γ ，則桁架變位後節點 c 之豎向線變位不等於零，故採用轉動改正法時，須加以注意。設假定 aB 桿之傾度不變，節點 c 之位置移至 c' ， c 與 c' 之豎距為節點 c 之相對線變位 δ'_{cV} 。將已變位之桁架繞節點 a 轉動一角度 ϕ 迄至 c' 至 c'' 之位置為止。故 c 與 c'' 之平距為 δ_{cH} ，而其豎距為 $\delta_{cH} \tan \gamma$ ，即節點 c 之豎向線變位，故 ϕ 之值為，

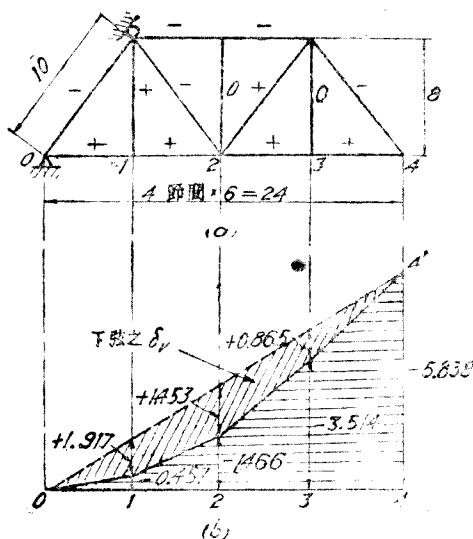
$$\phi = \frac{\delta'_{cV} + \delta_{cH} \tan \gamma}{L} \quad (12-85)$$

其中 δ'_{cV} 係負號，而 δ_{cH} 係正號。因改正時桁架所轉動之角度 ϕ 係極小，故 c'' 與 c' 二點實際係同在一豎線上。又因下弦桿

ac 係平直，故節點 c 之平向線變位即等於該弦桿長度之改變。

以上雖僅以平行弦桁架為例，但此法亦可用於通常型式之非平行弦桁架。於特殊畸形桁架，則此法不宜或不易採用。

例題 12—14. 桁架及荷重與例題 12—11 相同，用相對線變位法，求此桁架上下弦所有諸節點之豎向線變位。



例題 12—14.

解答：解答時以假定節點 L_0 之位置及下弦桿 L_0L_1 之傾度均不變最為簡便（採用此項假定之解答列為習題 12—35），若假定節點 L_0 之位置及端壓桿 L_0U_1 之傾度均不變（即桁架之支承如圖 12—16(b)），則解答較繁，因端壓桿 L_0U_1 中 u 之計算不能採用前述基本值之方法。茲於桁架之左端置平豎二虛設桿 L_0U_1 及 L_0U_0 ，並假設節點 U_0 之位置及該桿 U_0U_1 之傾度均不變（節點 U_0 位置不變與桁架變位之實際情形不符，對於下弦諸節點之豎向線變位有無影響？），則該桁架之支承如圖 (a) 所示。先求下弦諸節點之相對豎向線變位，而後用轉動改正法求得下弦諸節點之實際豎向線變位，如附

圖(b)所示,然後再用方程(12-76)求上弦諸節點之豎向線變位,所有之計算見附表,其中第(2)行示諸桿長度之改變 $dl=sl/E$, s 於拉桿為 1.2, 壓桿為 0.8, $E=2,100$, 均以公噸/平方公分計。第(3)行示 u 之基本值,其虛荷重所在之節點,則記於第(4)行。於第(5)至(8)行中,其最左之數係各桿之 dl 乘其 u 之基本值,而其所在之最左節點即第(4)行中之節點,採用轉動改正法時, ϕ 之值為

$$\phi = -\frac{5.838}{2,100} = -0.00278 \text{ 弧度}$$

其負號即表示改正時未變位之桁架應繞節點 L_0 依逆時針方向轉動,附圖(b)中之有平線部分示下弦諸節點之相對豎向線變位圖,其底線為 0—4'。將該底線繞 0 點向上轉動 $\phi = -0.00278$ 弧度之角,得 0—4'' 線,即得下弦諸節點之實際豎向線變位圖如附圖中之有斜線部分,其底線為 0—4'。

桿	dl (公分)		u 之基本值		ndl (公分) 所 在 之 節 點			
	(1)	(2)	值	荷重節點	L_1	L_2	L_3	L_4
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
腹 桿	L_0L_1	-0.381	$+\frac{1}{4}$	L_2	0	-0.476	-0.952	-1.429
	L_1L_2	-0.381	$+\frac{1}{4}$	L_2	0	-0.476	-0.476	-0.476
	L_2L_3	+0.571	$-\frac{1}{4}$	L_3	0	0	-0.714	-0.714
	L_3L_4	-0.381	$+\frac{1}{4}$	L_4	0	0	0	-0.476
腹 桿	L_1L_1	+0.457	+1	L_1	+0.457	0	0	0
弦 桿	L_0L_2	+0.686	$-\frac{1}{4}$	L_2	0	-0.514	-1.029	-1.543
	L_1L_3	-0.457	$+\frac{1}{4}$	L_3	0	0	-0.343	-0.686
	L_2L_1	+0.686	$-\frac{1}{4}$	L_1	0	0	0	-0.514
各節點之 $\delta'v = \Sigma udl$ (公分)					+0.457	-1.466	-3.514	-5.838
轉動改正 (減去)					-1.460	-2.919	-4.379	-5.838
下弦節點之 $\delta v(L)$ (公分)					+1.917 ↓	+1.453 ↓	+0.865 ↓	± 0
副豎桿長度之改變 (減去)					+0.457	± 0	± 0
上弦節點之 $\delta v(v)$ (公分)					+1.460 ↓	+1.453 ↓	+0.865 ↓	± 0

習題 12—35. 與例題 12—14 相同。惟求下弦諸節點之相對豎向線變位時,假定節點 L_1 之位置及下弦桿 L_0L_1 之傾度均不變。

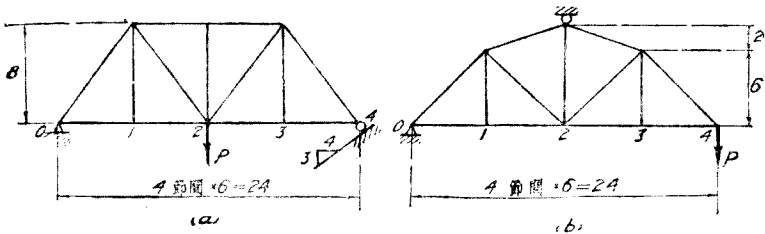
提示: 注意副豎桿 U_1L_1 應力 u 之值與例題 12—14 不同,其他諸桿應力 u 之值有無改變?假定節點 L_1 之位置不變時之計算,與假定節點 L_0 之位置不變者有無不同?

習題 12—36. 用相對線變位法求習題 12—32 (a)及(b) 二桁架上下弦所有諸節點之豎向線變位。

提示: 注意桁架(a)及其荷重均係對稱式,故可採用圖 12—16(c) 所示之法,求其一半之線變位即已足。

習題 12—37. 用相對線變位法求附圖所示桁架所有諸節點之豎向線變位。桁架拉桿之單位應力為 1.2, 壓桿之單位應力為 0.8, $E=2,100$, 均以公噸/平方公分計。

提示: 此二桁架中何者之變位係對稱式,計算時用最簡捷之方法。



習題 12—37.

12—9. 桁架中桿之角變位及二桿間之角變 桁架變位後其中桿之轉動,稱為桿之角變位。如圖 12—17 (a) 所示,設任何桿 ab 兩端與桿成垂直之分線變位各為 δ_a 及 δ_b , 則該桿之角變位 θ 為,

$$\theta = \frac{\delta_a + \delta_b}{l} \quad (12-86)$$

求 δ_a 及 δ_b 時可各以一單位虛荷重置於該桿之兩端,其傾度與

桿成垂直，其指向使二虛荷重成一順時計針向之力偶。設 u_a 及 u_b 各係虛荷重置於該桿之 a 及 b 二端時任何桿之應力，則

$$\theta = \frac{\Sigma u_a dl + \Sigma u_b dl}{l}$$

或

$$\theta = \Sigma dl \left(\frac{u_a + u_b}{l} \right) = \Sigma \frac{\delta l}{E} \left(\frac{u_a + u_b}{l} \right)$$

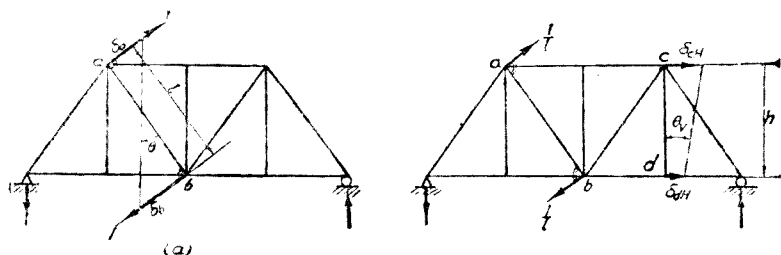


圖 12—17. 桁架中桿之角變位

由圖 12—17(a) 可知該桿之 a 與 b 二端之虛荷重成一力偶，其值為 1，故 $(u_a + u_b)/l$ 之值，可各以 $1/l$ 虛荷重置於 a 及 b 二端，如圖 12—17(b) 以求之，而其所成力偶或力矩之值為 1。設 u 為桁架中任何桿在此項單位虛力矩下之應力，則

$$\theta = \Sigma u dl = \Sigma u \frac{\delta l}{E} \quad (12-87)$$

計算時可採用一順時計針向之正號單位虛力矩。如所算得 θ 之值係正號，則該桿之角變位亦係順時計針向者，反是則為逆時計針向者。

由是可知：如圖 12—17(b) 所示，若桁架中某豎桿 cd 之角

變位 θ_V 及其任一端 d 之平向線變位 δ_{dH} 為已知，則其他端 c 之平向線變位 δ_{cH} 可由下列方程求之。由圖 12—17(b)，可得

$$\frac{\delta_{cH} - \delta_{dH}}{h} = \theta_V$$

故

$$\delta_{cH} = \delta_{dH} + h\theta_V \quad (12-88)$$

若計算桁架中某桿 cd 之角變位時，假定任何另一桿 ab 之傾度不變，則所得 cd 桿之角變位 θ' 稱為 cd 桿對於 ab 桿之相對角變位。計算時須以一鉸支座及一輓軸支座分別置於 a 及 b 二端，如圖 12—18(a) 所示。

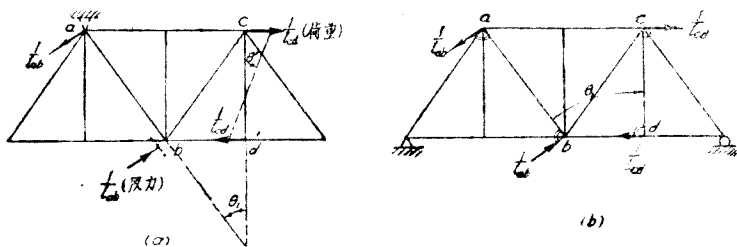


圖 12—18. 桁架中二桿間之角變(一)

注意，假定 ab 桿之傾度不變時所求得 cd 桿之相對角變位 θ' ，即等於該二桿間角度 θ_1 之角變 $d\theta_1$ ，故

$$d\theta_1 = \theta' \quad (12-89)$$

注意圖 12—18(a) 中 a 及 b 二端之虛反力亦係一力矩，其值為 1，故求桁架中任何二桿間之角變 $d\theta_1$ 時，可各以一單位虛力矩加於該二桿，其指向應使該二桿之角度有擴大之趨勢，如

圖 12-18(b) 所示, 如是若所得 $d\theta_1$ 之值為正號, 則角度 θ_1 係擴大, 反是為縮小。設 u 為圖 12-18(b) 中任何桿在所示之二單位虛力矩下之應力, 則,

$$d\theta_1 = \sum u dl = \sum u \frac{sl}{E} \quad (12-90)$$

桁架中任何二桿間之角變亦可由該二桿之角變位求之。圖 12-19(a) 示任何二桿 AC 及 BC 及其間之內角 θ_1 。設 AC 桿之角變位為 θ_a , BC 桿之角變位為 θ_b , 均係正號, 且 $\theta_a > \theta_b$, 則該二桿間之角變 $d\theta_1$ 為,

$$d\theta_1 = \theta_a - \theta_b \quad (12-91)$$

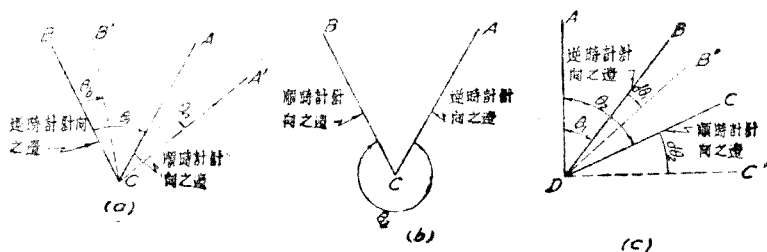


圖 12-19. 桁架中二桿間之角變(二)

所得之結果係正號, 故 $d\theta_1$ 係擴大。若所求係 AC 及 BC 二桿間之外角 θ_2 , 則內角擴大時外角必縮小, 故 $d\theta_2$ 必係負號, 如是, 則

$$d\theta_2 = \theta_b - \theta_a \quad (12-92)$$

由上列二方程可知: 如欲由二桿之角變位而定, 該二桿間之角變係擴大(正號)抑係縮小(負號), 應先決定所求者係內角抑

係外角，然後於該角中作一順時計針向之矢，以決定何桿係該角之始邊？何桿係其終邊？方程(12—91)及(12—92)均係由其終邊之角變位減去其始邊之角變位，故，

$$d\theta = \theta \text{ (順時計針向之邊)} - \theta \text{ (逆時計針向之邊)} \quad (12-93)$$

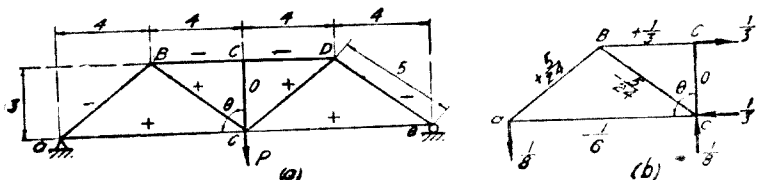
若所得 $d\theta$ 之值係正號，則該角係擴大，否則係縮小，同此，桁架中任何二桿間之角變 $d\theta$ ，亦可由其相對角變位 θ' 以同法求之，故

$$d\theta = \theta' \text{ (終邊)} - \theta' \text{ (始邊)} \quad (12-94)$$

如圖 12—19(c)所示，若桁架任何二桿 BD 及 CD 與另一桿 AD 間之角變 $d\theta_1$ 及 $d\theta_2$ 為已知，則 BD 與 CD 二桿間銳角 BDC' 之角變 $d\theta$ 為 $d\theta_2 - d\theta_1$ ，即

$$d\theta = d\theta \text{ (順時計針向之邊)} - d\theta \text{ (始邊)} \quad (12-95)$$

例題 12—15. 附圖(a)示一桁架及荷重，其拉桿之單位應力為 1.2 壓，桿之單位應力為 0.8， $E=2,100$ ，均以公噸/平方公分計。用虛功法求：(a) ac 桿之角變位，(b)假定 ac 桿之傾度不變時 Cc 桿之相對角變位，及 (c) ac 及 Cc 二桿間之角變。



例題 12—15.

解答： 例題 12—15(c) 先求 ac 及 Cc 二桿間之角變，單位虛力矩及有應力 u 之桿，如附圖(b)所示，所有之計算如下表：

桿		l (公尺)	u	ul (公尺)	Σul (公尺)
拉 桿	ac	8	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{57}{24}$
	Bc	5	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{25}{24}$	
壓 桿	aB	5	$+\frac{5}{24}$	$+\frac{25}{24}$	$+\frac{57}{24}$
	BC	4	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{4}{3}$	

故 ac 及 Cc 二豎桿間之角變 $d\theta$ 爲,

$$d\theta = \frac{(+1.2) \left(-\frac{57}{24}\right) + (-0.8) \left(+\frac{57}{24}\right)}{2,100}$$

$$= \frac{\frac{57}{12}}{2,100} = \underline{\underline{-0.002262}} \text{ 弧度 (縮小)}$$

因桁架及荷重係對稱式,故豎桿 Cc 之角變位爲零,用方程(12-93),則

$$-0.002262 = 0 - \theta_{ac}$$

故 ac 桿之角變位 θ_{ac} 爲,

$$\theta_{ac} = \underline{\underline{+0.002262}} \text{ 弧度}$$

若假設 ac 桿之傾度不變,則用方程(12-94),得 Cc 桿之相對角變位 θ'_{Cc}

爲

$$-0.002262 = \theta'_{Cc} - 0$$

故

$$\theta'_{Cc} = \underline{\underline{-0.002262}} \text{ 弧度}$$

習題 12-38. 桁架及荷重與習題 12-32(b)相同。

(a) 求豎桿 U_3M_3 及 M_3L_3 之角變位。

(b) 由習題 12-32(b)之答案及上列(a)之答案,求節點 U_3 及 M_3 之平向線變位。

(c) 由上列(a)之答案求 $L_3M_3U_3$ 角(豎桿 $U_3M_3L_3$ 左邊之角)之角變。

(d) 設豎桿 U_3M_3 之傾度不變,求豎桿 M_3L_3 之相對角變位。

(e) 求 $L_2L_3M_3$ 及 $U_2L_2L_3$ 角之角變。

提示：(b)用方程(12-88)，(c)用方程(12-93)，(d)答案與(c)之答案是否不同？(e)計算時可利用習題 12-32(b)及上列(a)之答案， U_2L_2 之角變位可由其兩端節點之平向線變位求之。

計算桁架中二桿間角變之法共有四：(1)用虛功法，(2)用幾何學，(3)用公式及(4)用圖解法。上述之虛功法，可以求任何型式桁架中任何二桿間之角變，惟計算常不甚簡便。若所欲求角變之角係桁架中三角形之一角，則採用幾何學或採用公式，或較為簡便，至圖解法當於 12-12 節中述之。

茲先述用幾何學之法。圖 12-20 (a) 示桁架中之某一三角形 1-2-3，其相對於頂 1, 2 及 3 之三邊之桿長，各為 l_1, l_2 及 l_3 。設此三桿中祇桿 2-3 之長度伸長 dl_1 ，其他二桿之長度無改變。求其中三角度 θ_1, θ_2 及 θ_3 之角變。

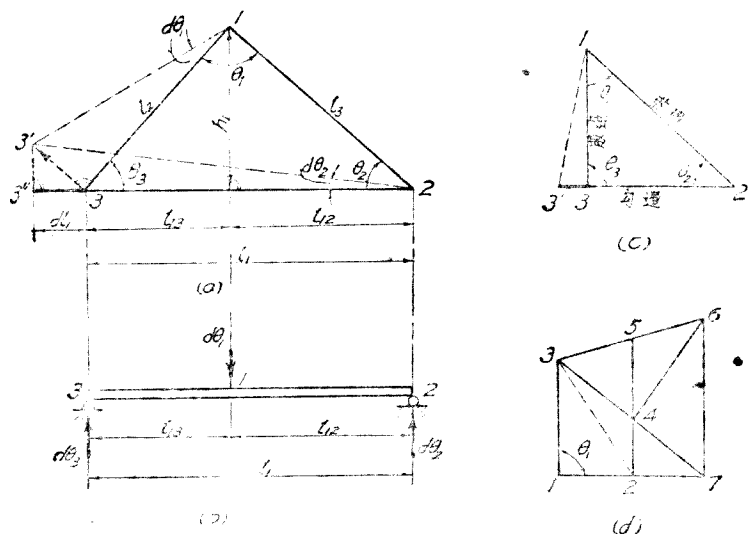


圖 12-20. 用幾何學求三角形之角變

之位置不變，依圖 8—8 (a) 之方法，則頂點 3 之相對線變位為 3—3'。故該三角形變為 1—2—3'。由圖 12—20(a) 之若干相似三角形，可得，

$$\frac{3-3'}{dl_1} = \frac{l_2}{h_1}$$

故
$$d\theta_1 = \frac{3-3'}{l_2} = \frac{dl_1}{h_1} \text{ (擴大)} \quad (12-96)$$

由方程 (12—96) 可知：於三角形中其與長度有改變一邊 (l_1) 相對角之角變 ($d\theta_1$)，即等於該邊長度之改變 (dl_1)，除以該三角形對於該邊之高度 (h_1)。

又
$$\frac{3'-3''}{dl_1} = \frac{l_{13}}{h_1}$$

$$d\theta_2 = -\frac{3'-3''}{l_1} = -\frac{dl_1}{h_1} \times \frac{l_{13}}{l_1}$$

故，
$$d\theta_2 = -\frac{l_{13}}{l_1} d\theta_1 \text{ (縮小)} \quad (12-97)$$

同此，
$$d\theta_3 = -\frac{l_{12}}{l_1} d\theta_1 \text{ (縮小)} \quad (12-98)$$

觀察方程 (12—97) 及 (12—98) 及圖 12—20(b)，可知：若以 $d\theta_1$ 視作係一集中荷重，置於一長度為 l_1 之簡單梁 2—3 之 1 點，則 2 及 3 二端之反力，即各等於 θ_2 及 θ_3 因 dl_1 所致之角變 $d\theta_2$ 及 $d\theta_3$ ，視反力之指向是否與荷重相同，並可定 $d\theta_2$ 及 $d\theta_3$ 之改變性質 (擴大或縮小) 是否與 $d\theta_1$ 者相同。故採用此法時，須先用方程 (12—96) 求得與長度有改變一邊相對角之角變，再依圖 12—20(b) 之法，求其他二角之角變。

若圖 12—20(a)中之 θ_3 角係一直角，則 $l_{13}=0$ ，故 $d\theta_2=0$ 。由是可知：於正三角形中，其勾邊或股邊之長度改變，對於該邊與弦邊所夾角之角變毫無影響。 圖 12—20(c) 示一正三角形，若祇其勾邊 2—3 有長度改變，則變位後之三角形為 1—2—3'，其 θ_2 角之角變為零。

於任何三角形中，其三個角度改變之代數和必為零，故，

$$d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3 = 0 \quad (12-99)$$

上列方程可用之以校核所得三個角變之數量及正負號。

若三角形中三邊之長度均有改變，可用上法分別計算，而後相加，即可得其中某角因三邊長度均有改變時之角變。

如圖 12—20 (d) 所示，若所求角變之角係桁架中四邊形 1—2—4—3 中之角度 1，則必先以一虛桿聯 2 及 3 二節點，再用前述之虛功法，求此二節點間之相對線變位。再將此相對線變位視作虛桿 2—3 長度之改變，而後始能採用上述之法以計算角度 1 之角變。若圖 12—20 (d) 中 2—4—7，7—4—6，6—4—5，及 5—4—3 四角之角變為已知，則 2—4—3 角之角變必與該四角角變之代數和數量相同，而正負號相反。既知 2—4—3 角之角變，則 2 與 3 二節點間之相對線變位即可求得。

例題 12—16. 桁架及荷重與例題 12—15 相同，用幾何學求其中 $\angle acB$ 及 BcC 二角度之角變

解答：

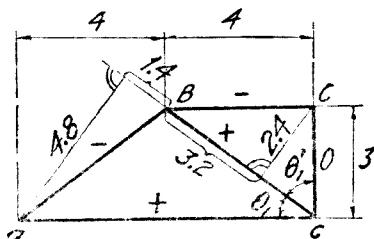
三角形 acB ：

$$\angle acB \text{ 桿: } -\frac{0.8 \times 5}{2,100} \times \frac{1}{4.8} = -0.000397$$

$$ac \text{ 桿: } -\frac{1.2 \times 8}{2,100} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = -0.000762$$

$$Bc \text{ 桿: } +\frac{12 \times 5}{2,100} \times \frac{1}{4.8} \times \frac{1.4}{5} = +0.000167$$

$$d\theta_1 = -0.000992 \text{ 弧度}$$



例題 12-16.

三角形 BcC :

$$BC \text{ 桿: } -\frac{0.8 \times 4}{2,100} \times \frac{1}{3} = -0.000508$$

$$Bc \text{ 桿: } -\frac{1.2 \times 5}{2,100} \times \frac{1}{2.4} \times \frac{3.2}{5} = -0.000762$$

$$d\theta'_1 = -0.001270 \text{ 弧度}$$

$d\theta_1 + d\theta'_1 = -0.002262$, 與例題 12-15 所得 acC 角度之角變相符。

習題 12-39. 用幾何學解答習題 12-38(c)。

提示: L_2 與 M_3 二點間之相對線變位已於習題 12-38 中求得。若將 $L_2L_3L_3$ 角分為 $L_2L_2M_3$ 及 $M_3L_2L_3$ 二角, 而計算其角變, 較為簡便。

次述求三角形中角變之公式, 此項公式可用虛功法求之^①。

圖 12-21 示某桁架中之一三角形 1-2-3, 與圖 12-20(a) 相同。其與三頂點 1, 2 及 3 相對諸桿之長度改變, 各為 dl_1, dl_2 及 dl_3 。設欲求角度 θ_1 之角變, 則桿 1-2 及 1-3 之單位虛

① 亦可用微分法求之, 但不如用虛功法之簡便。

力矩如圖所示。將頂點 2 及 3 所受之力各分解為二分力，其一與桿 2—3 平行，其另一各與桿 1—2 及 1—3 平行，考慮三角形之相似性，得各桿中之虛應力 u 如下：

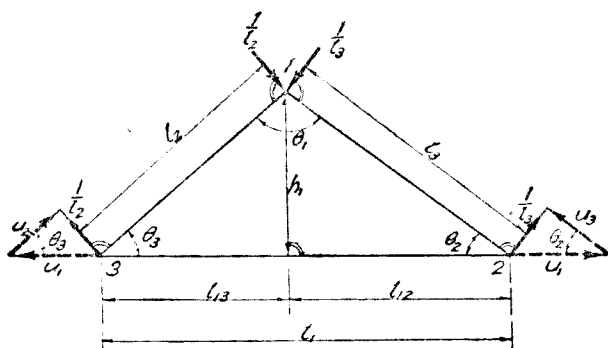


圖 12-21. 三角形角變之公式

$$u_1 = +\frac{1}{h_1}$$

$$u_2 = -u_1 \frac{l_{13}}{l_2} = -\frac{1}{h_1} \frac{l_{13}}{l_2}$$

$$u_3 = -u_1 \frac{l_{12}}{l_3} = -\frac{1}{h_1} \frac{l_{12}}{l_3}$$

用方程(12-90), 可得,

$$d\theta_1 = \frac{1}{h_1} \left[dl_1 - \left(\frac{dl_2}{l_2} l_{13} + \frac{dl_3}{l_3} l_{12} \right) \right] \quad (12-100)$$

因 $dl_1 = \frac{s_1 l_1}{E}$, $dl_2 = \frac{s_2 l_2}{E}$, $dl_3 = \frac{s_3 l_3}{E}$, 故方程(12-100)亦可寫成,

$$d\theta_1 = \frac{1}{E h_1} [s_1 l_1 - (s_2 l_{13} + s_3 l_{12})] \quad (12-101)$$

同此，

$$d\theta_2 = \frac{1}{Eh_2} [s_2 l_2 - (s_1 l_{23} + s_3 l_{12})] \quad (12-102)$$

$$d\theta_3 = \frac{1}{Eh_3} [s_3 l_3 - (s_1 l_{23} + s_2 l_{13})] \quad (12-103)$$

注意： $\frac{l_{12}}{h_1} = \cot \theta_2$ ， $\frac{l_{13}}{h_1} = \cot \theta_3$ ， $l_1 = l_{12} + l_{13}$ ，

故方程(12-100)又可寫成，

$$d\theta_1 = \left[\frac{dl_1}{l_1} (\cot \theta_2 + \cot \theta_3) - \left(\frac{dl_2}{l_2} \cot \theta_3 + \frac{dl_3}{l_3} \cot \theta_2 \right) \right]$$

或

$$d\theta_1 = \left(\frac{dl_1}{l_1} - \frac{dl_2}{l_2} \right) \cot \theta_3 + \left(\frac{dl_1}{l_1} - \frac{dl_3}{l_3} \right) \cot \theta_2 \quad (12-104)$$

方程(12-104)，又可寫成，

$$Ed\theta_1 = (s_1 - s_2) \cot \theta_3 + (s_1 - s_3) \cot \theta_2 \quad (12-105)$$

同此，

$$Ed\theta_2 = (s_2 - s_1) \cot \theta_3 + (s_2 - s_3) \cot \theta_1 \quad (12-106)$$

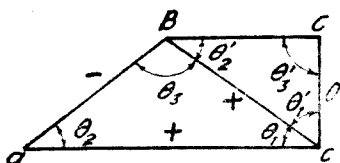
$$Ed\theta_3 = (s_3 - s_1) \cot \theta_2 + (s_3 - s_2) \cot \theta_1 \quad (12-107)$$

採用上列諸方程時，須注意 s ， l 及 $\cot \theta$ 之正負號，若所求角變之角 θ_1 係屬於一四邊形 1-2-3-4，如圖 12-20(d) 所示，亦須先求得 2 與 3 二節點間之相對線變位，而後始能採用上述之諸方程，觀察上列諸方程均有交錯性，且求三角形中某角之角變時，方程(12-105)至(12-107)中諸項，均等於與該角相對桿之應力，減去該三角形中另一桿之應力，乘以該二桿所夾角

之餘切。故方程(12-105)至(12-107)所表示之計算，並不難記憶。若該二桿之應力完全相同，或其所夾之角為直角（因直角之餘切為零），則該項之值為零〔參閱圖 12-20(c)〕。

既知桁架中若干二桿間之角變後，則其某弦諸節點之豎向線變位極易求得，其方法見以下之第 12-10, 12-11 及 12-13 諸節。此外於桁架中之次應力，亦可由其所有每二桿間之角變求之。

例題 12-17. 用方程(12-105)解答例題 12-16。



例題 12-17.

解答：設 $\theta_1, \theta_2, \dots$ 等角如附圖所示，則由例題 12-16 之附圖，可得，

$$\cot \theta_2 = +\frac{4}{3}, \quad \cot \theta_3 = -\frac{1.4}{4.8} = -\frac{7}{24},$$

$$\cot \theta'_2 = +\frac{4}{3}, \quad \cot \theta'_3 = 0,$$

計算時可列一有系統之表如下。若所算之角變甚多，尤須如此，以免訛誤。

	$\cot \theta_3$ 之係數	$\cot \theta_2$ 之係數	$(S_1 - S_2)$	$(S_1 - S_3)$	$E d \theta_1$
	$\cot \theta_3 = -\frac{7}{24}, \cot \theta'_3 = 0$	$\cot \theta_2 = \cot \theta'_2 = +\frac{4}{3}$	$\cot \theta_3$	$\cot \theta_2$	
acB	$-0.8 - 1.2 = -2.0$	$-0.8 - 1.2 = -2.0$	$+\frac{7}{12}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{25}{12}$
BcC	$-0.8 - 1.2 = -2.0$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$

故
$$d\theta_1 = -\frac{25}{12} \times \frac{1}{2,100} = -0.000992 \text{ 弧度}$$

$$d\theta_1 = -\frac{8}{3} \times \frac{1}{2,100} = -0.001270 \text{ 弧度}$$

與例題 12-16 中所得之答案相同。

習題 12-40. 用方程(12-105)解答習題 12-39,並用方程(12-101)校核。

12-10. 用角變法求桁架之變位(一)^① 前此第 12-3 節所述以角變求直梁變位之法,極易加以擴充而用之以求桁架之變位。如圖 12-22(a)所示,設有一簡單直梁,其中祇 1, 2 及 3 三點,各有一極短之 dx 段係有彈性之材料〔圖 12-22(a)中之黑色部分〕,梁之其餘部分,係剛性之材料,不能有任何彎曲。故該梁在任何荷重之作用下,祇其中軸於 1, 2 及 3 三點之角度 θ_1, θ_2 及 θ_3 有角變 $d\theta_1, d\theta_2$ 及 $d\theta_3$ 。將此項角變置於 1, 2 及 3 三點,即得求該梁變位時之彈性荷重及共軛梁,如圖 12-22(b)所示。梁之彈性荷重原係分佈荷重 $d\theta/dx$,但乘以各短段之長度 dx ,得集中荷重 $d\theta$ 。設 W_E 為彈性荷重,故

$$W_E = d\theta \quad (12-108)$$

圖 12-22(c) 示一簡單跨桁架,其下弦係平直,當該桁架有變位時,該平直之下弦亦祇於其 1, 2 及 3 三節點之角度 θ_1, θ_2 及 θ_3 有角變 $d\theta_1, d\theta_2$ 及 $d\theta_3$ 。於該三節點之間,該下弦不能有任何彎曲。因此,該平直下弦之變位情形,與圖(a)梁之中軸完全相同(所不同者即桁架之弦桿有直接應力,而梁之中軸則無,

^① 此法大約係南(Land)氏所創,但亦有歸功彌(Müller-Breslau)氏者,見 287 頁註所舉之參考。

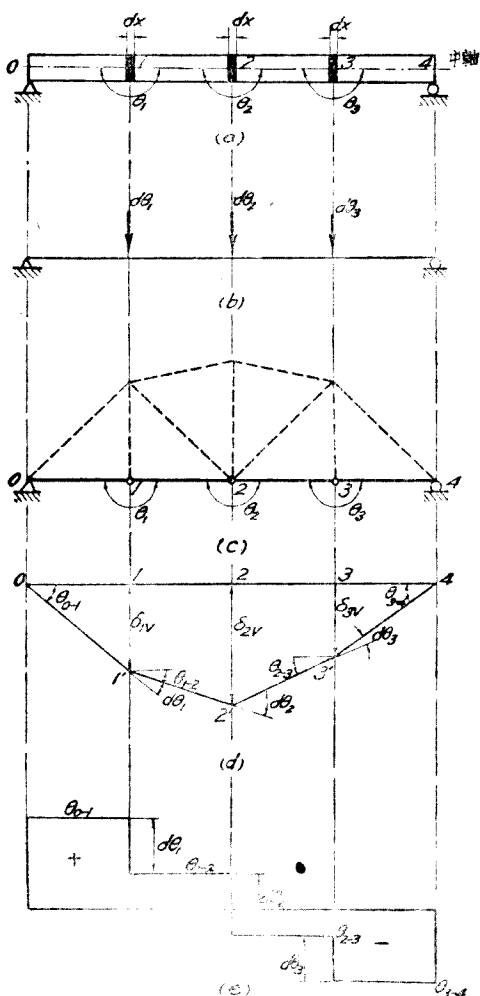


圖 12-22. 用角變法求桁架之線變位

但於平直之弦，此項直接應力除與其各節點之角變有關外，對於該弦之豎向線變位並無影響，其解釋見後。故求該下弦所有節

點之豎向線變位時所採用之彈性荷重及其軛梁，亦與圖 12—22 (b) 所示者完全相同。因此，該共軛梁之彎矩圖即等於該下弦之豎向線變位圖，其切力圖即等於該下弦諸弦桿之角變位圖，各如圖 12—22 (d) 及 (e) 所示。該二圖並示出變位線於任何節點之角變，即等於該節點之彈性荷重，而任何段之切力即等於該段中變位線之角變位，此與 12—2 節所述之五圖之關係正相符。

故採用此法以計算桁架某弦之變位時，所需知者祇該弦節間之長度及其於諸節點之角變，桁架他部之情形如何，可置之不問。根據桁架中桿之接合均係鉸接之假定，即桁架某一弦之諸桿成一桿鏈 (bar-chain)，故此法亦稱為桿鏈法。

計算時若一律以桿鏈以下之角變（其數量與桿鏈以上之角變相同，惟正負號相反。）為彈性荷重，則角變擴大時荷重係正號而向下，角變縮小時荷重係負號而向上，如是則所得彎矩，切力，線變位，及角變位之正負號，完全與前此所規定者相符。

上述用角變求桁架之變位時，雖曾採用共軛梁法，惟除簡單跨之桁架外，求他種支承及接合之桁架之變位時，如欲採用表 XXV 中所示共軛梁之支承及接合，期其與原來桁架相配合，則計算極其複雜，不可詰究^①。蓋桁架與梁究有不同之點，決不可一概牽強比附也。

圖 12—23 (a) 示一懸臂式桁架 abc 及一懸跨 cd ，受有荷

① 讀者如參閱薩 (Sutherland) 鮑 (Bowman) 二氏之結構理論，175 至 178 頁，即知著者所言之不謬。

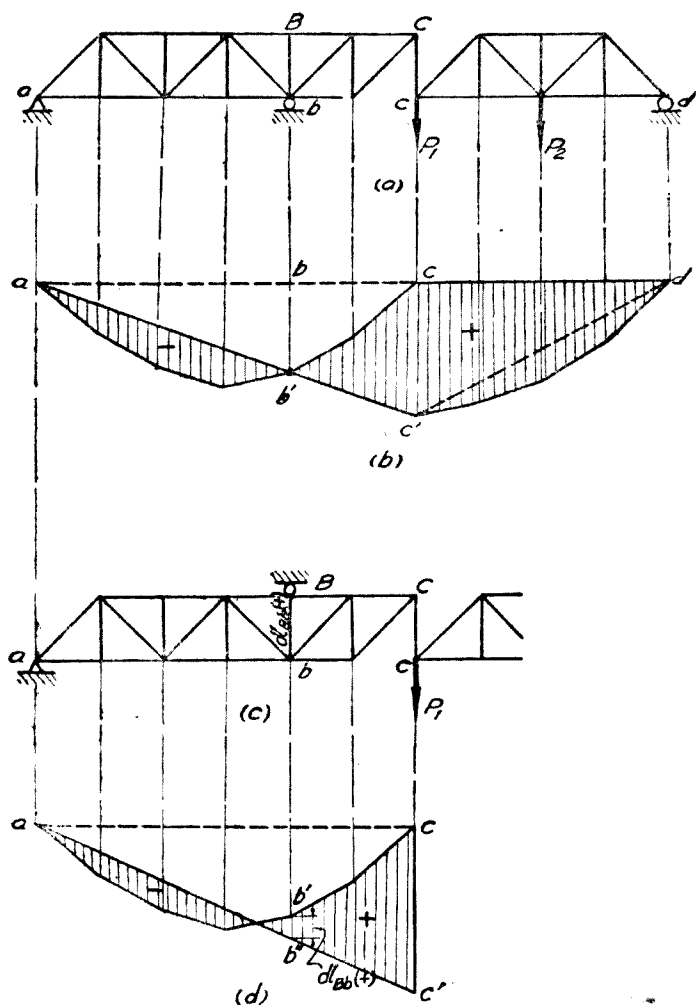


圖 12-23. 懸臂式桁架之豎向線變位圖

重 P_1 及 P_2 ，計算桁架 abc 下弦之豎向線變位時，可用相對線變位法，先依荷重 P_1 及 P_2 求諸桿長度之改變，再假設該桁架係

簡單跨支承於 a 及 c 二端，求得其下弦之豎向線變位如圖 12—23(b) 之折線 $ab'c$ ，其底線為 abc 。但支點 b 之豎向線變位為零，故採用轉動改正法將底線 abc 轉動至 $ab''c'$ 之位置，即該桁架實際豎向線變位圖之底線。若懸跨 cd 無荷重，則其下弦之豎向線變位圖必係三角形 $ce'd$ 。再以 $c'd$ 虛線為底線，作該桁架由於荷重 P_2 之豎向線變位圖，故圖 12—23(b) 中之有豎線部分示此結構下弦之豎向線變位圖。若下弦節點 b 之支座移至上弦節點 B ，如圖 12—23(c) 所示，則計算桁架 abc 下弦之豎向線變位時，仍可先假設該桁架係一簡單跨，支承於 a 及 c 端。惟實際上節點 b 有向下之線變位，其值等於豎桿 Bb 之伸長 dl_{Bb} ，故如圖 12—23(d) 所示，改正時之底線為 $ab''c'$ ，庶下弦節點 b 有向下之線變位 dl_{Bb} 。若所求者為上弦之豎向線變位，則改正時之底線與圖 12—23(b) 所示者相同。

於有副桿及副桁架之桁架，計算其變位時可將副桿及副桁架與主桁架之變位分開計算而後相加，即得原來桁架之變位。此法常較不分開計算時為簡便。

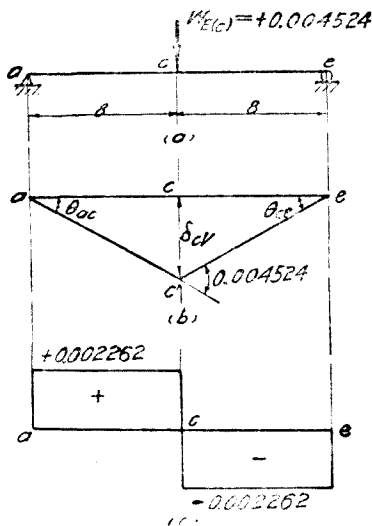
例題 12—18. 用角變法求例題 12—15 桁架下弦節點 C 之豎向線變位。

解答：此桁架中 acC 角之角變，已於例題 12—15 中算得，其值為 -0.002262 。故弦桿以下角度之改變為 $+0.004524$ 。以之為彈性荷重，如附圖 (a) 所示，得此桁架下弦之豎向線變位圖及角變位圖各如附圖 (b) 及 (c) 所示。並得

$$\delta_v = +0.004524 \times \frac{16}{4} = +0.01810 \text{ 公尺} \downarrow$$

$$= +1.810 \text{ 公分} \downarrow$$

$$\theta_{ao} = -\theta_{ce} = +0.002262 \text{ 弧度}$$



例題 12-18.

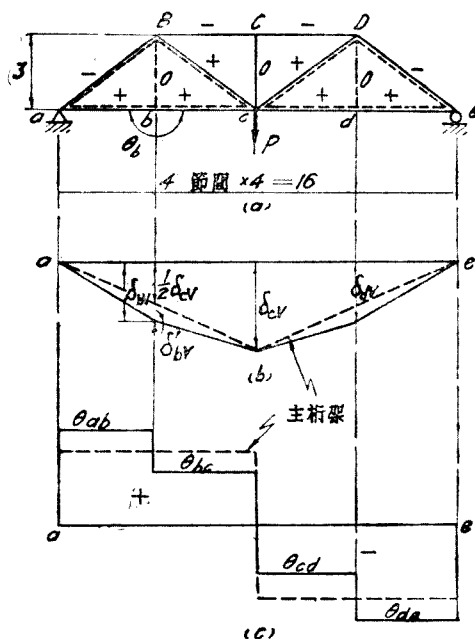
習題 12-41. 用角變法求例題 12-11 桁架下弦諸節點之豎向線變位及諸桿之角變位。

提示：該桁架所有之三角形均相等。求下弦各節點之角變時，採用方程 (12-105), (12-106) 及 (12-107)。計算時可列表如例題 12-17 所示者，並將所得之答案與例題 12-14 者相校核。

習題 12-42. 設將習題 12-32(b) 桁架中應力為零之桿除去，用角變法求其下弦所剩諸節點之豎向線變位及諸桿之角變。

提示：此桁架中 $L_2L_3M_3$ 角之角變已於習題 12-38 (e), 12-39 及 12-40 中算得。所須計算角變之角，祇 $M_3L_3L_4$ 及節點 L_4 之諸角，計算角變時用任何方法。

例題 12-19. 若於例題 12-15 桁架之節點 B 及 D 各加一應力為零之豎桿 Bb 及 Dd ，用角變法求其下弦諸節點之豎向線變位及諸桿之角變位，副桁架及主桁架須分開計算。



例題 12-19.

解答：附圖 (a) 示副桁架，其節點 b 之角變可用方程 (12-105) 計算如下：

下：

$$abB \text{ 角} : (-0.8 - 1.2) \left(\frac{4}{3} \right) + (-0.8 - 0) \frac{3}{4} = -\frac{49}{15}$$

$$Bbc \text{ 角} : (+1.2 - 1.2) \left(\frac{4}{3} \right) + (+1.2 - 0) \frac{3}{4} = +\frac{9}{10}$$

$$W_{B(b)} = d\theta_b = -\frac{-\frac{49}{15} + \frac{9}{10}}{2,100} = \frac{71}{30 \times 2,100} = +0.001127 \downarrow \text{弧度}$$

故

$$\delta_{bV} = +\frac{71}{30 \times 2,100} \times \frac{8}{4} = +0.00225 \text{ 公尺} \downarrow = \underline{0.225} \text{ 公分} \downarrow$$

$$\delta_{bV} = \delta_{dV} = 0.225 + \frac{1}{2} \times 1.810 = \underline{1.180} \text{ 公分} \downarrow$$

$$\theta_{ab} = -\theta_{de} = 0.002262 + \frac{1}{2} \times 0.001127 = +0.002826 \text{ 弧度}$$

$$\theta_{bc} = -\theta_{cd} = 0.002262 - \frac{1}{2} \times 0.001127 = +0.001698 \text{ 弧度}$$

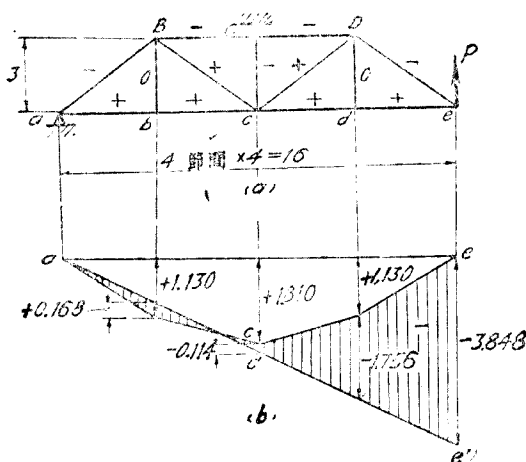
其下弦節點之豎向線變位圖及下弦桿之角變位圖各如附圖(b)及(c)所示。

習題 12-43. 與習題 12-41 相同, 惟副桁架與主桁架須分開計算。

習題 12-44. 與習題 12-42 相同, 惟副桁架與主桁架須分開計算。

提示: 研究習題 12-42 之豎向線變位圖, 即可得副桁架之跨長及其形式。

例題 12-20 附圖示一桁架及其荷重, 設單位應力於拉桿為 1.2, 於壓桿為 0.8, $E=2,100$, 均以公噸/平方公分計。求其上下弦諸節點之豎向線變位。



例題 12-20.

解答: 先假設該桁架係支承於其 a 及 e 二端, 如是則此桁架下弦之豎向線變位圖如附圖之 ace , 與例題 12-19 者完全相同。惟實際上此桁架係支承於上弦節點 c , 故其下弦節點 c 之豎向線變位等於豎桿 Cc 之縮短, 故

$$\delta_{cV} = -\frac{0.8 \times 3}{2,100} = -0.00114 \uparrow \text{公尺} = -0.114 \uparrow \text{公分}$$

依圖 12-23 (d) 所示之法, 加以改正, 即於附圖(b)中作底線 $ac'e'$, 使 $cc' =$

-0.114 公分，即得此桁架上下弦之實際豎向線變位如附圖(b)之有豎線部分。

其各節點之值如下：

$$\delta_{L_1V} = \delta_{B_1V} = +1.130 - \frac{1}{2}(1.810 + 0.114) = \underline{+0.168} \downarrow \text{公分}$$

$$\delta_{L_2V} = \underline{-0.114} \uparrow \text{公分}$$

$$\delta_{L_3V} = \delta_{D_3V} = +1.130 - \frac{3}{2}(1.810 + 0.114) = \underline{-1.756} \uparrow \text{公分}$$

$$\delta_{L_4V} = 0 - 2(1.810 + 0.114) = \underline{-3.848} \uparrow \text{公分}$$

習題 12—45. 桁架與習題 12—42 相同，惟節點 L_3 之輻軸支座移置於節點 L_4 ，而節點 L_3 之向下荷重 P 移置於節點 L_2 ，並將其指向改為向上，求其下弦諸節點之豎向線變位。

提示：可否採用習題 12—42 之答案而加以改正以求此題之答案？

習題 12—46. 桁架與習題 12—37 (b) 相同。用角變法求其下弦所有諸節點之豎向線變位。

提示：先假設此桁架係兩端支承，而後將所得之結果加以改正。

若所計算變位之桁架弦或桿鏈並非平直，則該桿鏈中斜桿之長度改變，除間接影響其節點之角變外，並直接影響其節點之豎向線變位（於平向線變位亦有影響，但不在本節討論範圍之內）。圖 12—24(a) 示某斜桿 AB ，其傾度為 ϕ 。設此斜桿有長度之改變 $BB' = dl$ ，則 B 端由此 dl 而增減豎向線變位 δ_V 為，

$$\delta_V = dl \sin \phi$$

若 $\phi = 0$ ，則 $\delta_V = 0$ ，即 AB 桿之長度改變 dl ，並不使 B 端之豎向線變位增加。圖 12—24(b) 示一桁架，其上弦 $aBCDEf$ 非平直，故用角變法求其上弦諸節點之豎向線變位時，該弦即成為桿鏈，其諸節點之彈性荷重，並不各等於諸節點之角變 $d\theta_B, d\theta_C,$

$d\theta_D$ 及 $d\theta_E$ 。因此上述之法，必加以擴充，始能採用。

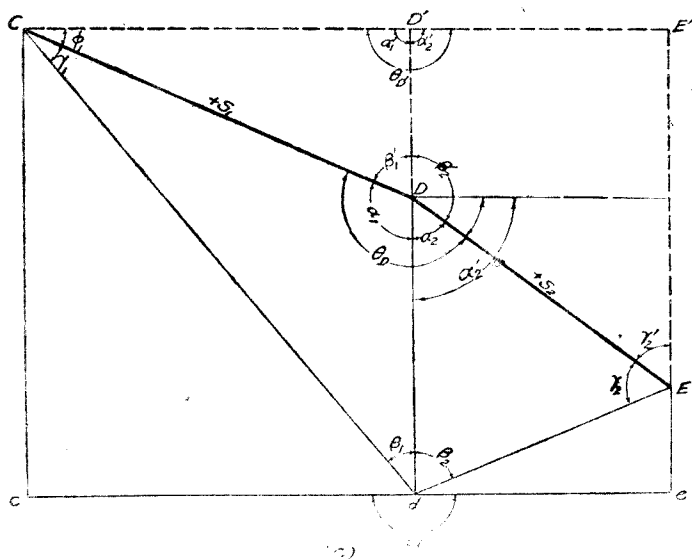
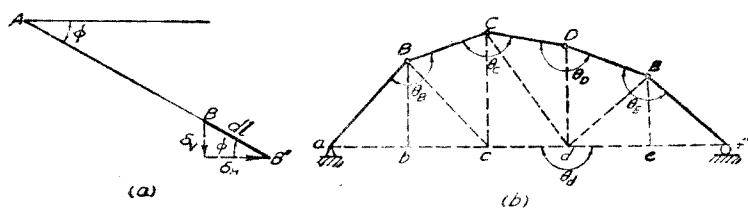


圖 12-24. 桿鏈中有斜桿時之彈性荷重(一)

豎向線變位之增減，既祇由於桿鏈中斜桿之長度改變，而與桁架所有其他桿之長度改變無關，故可假設於圖 12-24 (b) 之桁架中，祇其上弦 $aBCDEf$ 中之諸桿有長度改變，如是，則該桁架上下弦同一節點之豎向線變位，完全相同。而計算其上下

弦之豎向線變位時，彈性荷重亦完全相同。試以上弦之節點 D 為例，其彈性荷重 $W_{E(D)}$ 等於下弦節點 d 之 θ_d 角之角變 $d\theta_d$ ，並不等於上弦節點 D 之 θ_D 角之角變 $d\theta_D$ ，故，

$$W_{E(D)} = d\theta_d \quad (12-109)$$

試求 $d\theta_d$ 與 $d\theta_D$ 之關係。圖 12-24(c) 示圖 (b) 桁架 ed 及 de 二相鄰節間，其中祇弦桿 CD 及 DE 有長度改變，且均假設係伸長，故二弦桿各有單位拉應力 $+s_1$ 及 $+s_2$ ，其餘諸桿均無任何長度改變或應力。因 cdC 及 edE 二角不能有角變，而 β_1, β_2 及 θ_d 三角角變之代數和必為零，故

$$-(d\beta_1 + d\beta_2) = d\theta_d \quad (12-110)$$

用方程 (12-105) 及 (12-106) 可得，

$$d\beta_1 = \frac{s_1}{E} (\cot \alpha_1 + \cot \gamma_1) \quad (12-111)$$

$$d\beta_2 = \frac{s_2}{E} (\cot \alpha_2 + \cot \gamma_2) \quad (12-112)$$

$$d\alpha_1 = -\frac{s_1}{E} \cot \gamma_1 \quad (12-113)$$

$$d\alpha_2 = -\frac{s_2}{E} \cot \gamma_2 \quad (12-114)$$

由圖 12-24(c)，則

$$\alpha_1 = 90^\circ + \phi_1, \quad \text{故 } \cot \alpha_1 = -\tan \phi_1 \quad (12-115)$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - \phi_2, \quad \text{故 } \cot \alpha_2 = +\tan \phi_2 \quad (12-116)$$

將方程 (12-113) 至 (12-116) 之值代入方程 (12-111) 及 (12-112) 中，並將該二方程相加，可得

$$-(d\beta_1 + d\beta_2) = (da_1 + da_2) + \frac{s_1}{E} \tan \phi_1 - \frac{s_2}{E} \tan \phi_2 \quad (12-117)$$

由圖 12-24(c), 則,

$$da_1 + da_2 = d\theta_D \quad (12-118)$$

將方程 (12-110) 及 (12-118) 之值代入方程 (12-117) 中, 則上弦節點 D 之彈性荷重 $W_{E(D)}$ 如下:

$$W_{E(D)} = d\theta_d = d\theta_D + \frac{s_1}{E} \tan \phi_1 - \frac{s_2}{E} \tan \phi_2 \quad (12-119)$$

故用角變法求桁架之豎向線變位時, 無論桿鏈是否平直, 其任何節點彈性荷重 W_E 之普通方程爲^①,

$$W_E = d\theta + \frac{s_1}{E} \tan \phi_1 - \frac{s_2}{E} \tan \phi_2 \quad (12-120)$$

採用上列方程時, 必須注意 $d\theta$, s 及 ϕ 之正負號。 $d\theta$ 並係桿鏈下方角之角變。如斜桿係由平桿順時計針向轉動而有 ϕ 角之傾度者 (如圖 12-24(c) 所示者), 則 ϕ 爲正號, 反是 ϕ 爲負號。

若某節點左右兩鄰之桿係平向, 則 $\phi_1 = \phi_2 = 0$, 故方程 (12-120) 變成與方程 (12-108) 相同, 即該節點之彈性荷重等於其左右兩鄰桿間之角變。

用此法時所選定之桿鏈, 並不祇限於桁架某一弦中之所有弦桿。祇須所得之桿鏈係連續不斷, 其他一弦之弦桿及腹桿均可任意聯合採用。故求圖 12-24(b) 桁架之上下弦諸節點之豎

① 方程 (12-120) 係德國 繆勒-布萊斯勞 (Müller-Breslau) 氏 所求得, 見所著之 結構之圖解力學 第 2 卷, 第 1 冊, 93 至 97 頁, 本書上列該方程之求法, 係著者所創, 較 繆氏 及任何西文書所舉之求法爲簡明而易於了解。讀者可參閱原書, 及 258 頁註所舉 薩鮑二氏 之書, 178 至 183 頁。

向線變位時，可採圖 12—25 (a) 至 (d) 中任何一種形式之桿鏈，惟其計算之繁簡，自不盡相同。

如圖 12—25 所示，桿鏈中均有豎桿，其傾度 ϕ_2 為 90° ，而 $\tan 90^\circ = \infty$ ，故方程 (12—120) 不能採用，但可另採改正之法。圖 12—26 (a) 示一桿鏈，其中 Bb 係一豎桿，設 Bb 桿之長度改變 dl_{Bb} 為伸長，因 dl_{Bb} 等於 B 與 b 二節點間之相對豎向線變位，故計算彈性荷重時，可以暫時將其略去，故節點 B 或 b 之彈性荷重 $W_{E(B)(b)}$ 為，

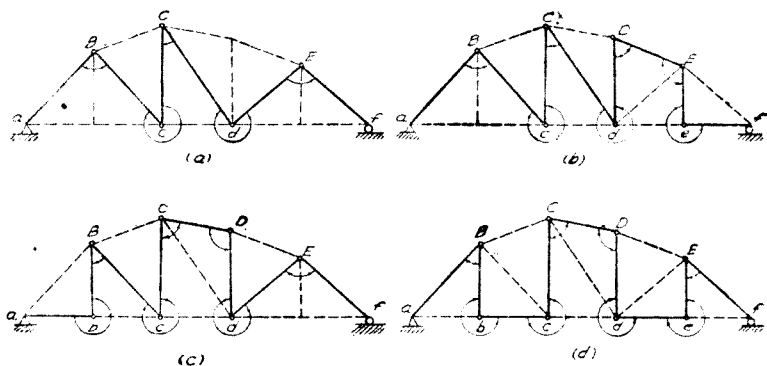


圖 12—25. 角變法中桿鏈之選擇

$$W_{E(B)(b)} = d\theta_B + \frac{s_1}{E} \tan \phi_1 + d\theta_b - \frac{s_3}{E} \tan \phi_3 \quad (12-121)$$

以上列之彈性荷重求彎矩圖，得此桿鏈之豎向線變位圖，如圖 12—26 (b) 之三角形 aBc' ，但豎桿 Bb 之長度改變尚未計入。若以該三角形之頂點為節點 B 之線變位，則 bc 桿必因豎桿 Bb 之伸長而再有向下之線變位 dl_{Bb} 。故於圖 12—26 (b) 中作 bc 線與 Bc' 平行，得節點 c 之豎向線變位 $cc' = dl_{Bb}$ 。但

節點 C 有一支座，其豎向線變位必為零，故作 ac 底線，得此桿鏈之豎向線變位圖如圖 12—26(b) 之實線所示。亦可以三角形 aBc' 之頂點為節點 b 之線變位，如是則因豎桿 Bb 之伸長， aB 桿及 a 點必有向上之線變位 $aa' = dlBb$ (圖中未示出)，由此可得此桿鏈以 $a'c'$ 為底線之豎向線變位圖。若豎桿 Bb 無長度改變，則上述之改正，自無需要。

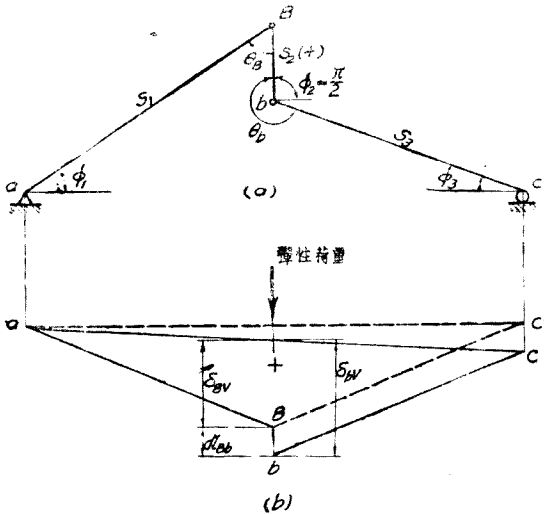


圖 12—26. 桿鏈有豎桿時之計算法

若桿鏈中有斜桿，其彈性荷重之計算，除採用方程(12—120)外，尚有下列一法^①，於圖 12—24 (c) 中加應力為零之平弦桿 CD' 與 $D'E'$ 及豎桿 DD'

① 此法係本書著者所創，尚未在他處發表。此外尚有二改正法：一係史(D. B. Steinman)氏之圖解法，見所著以角變及彈性荷重精確計算桁架之變位一文，載工程紀錄(Engineering Record)，1916年5月13日號，644頁，及賴(A. S. Niles)牛(J. S. Newell)二氏之力偶法，見所著飛機結構一書，第2版，上卷405至409頁，1938年出版。

與 $E'E$ 。此四桿之增加與原來桁架之變位及靜定，均無任何影響。試求 $\theta_{D'}$ 角之角變與節點 D 之彈性荷重 $W_{E(D)}$ 之關係，用方程(12-105)，得，

$$da'_1 = \frac{S_1}{E} (\cot \beta'_1 + \cot \phi_1) \quad (12-122)$$

$$d\beta'_1 = -\frac{S_1}{E} \cot \phi_1 \quad (12-123)$$

但 $\beta'_1 = 90^\circ - \phi_1$ ，故 $\cot \beta'_1 = \tan \phi_1$ (12-124)

以方程(12-123)及(12-124)之值代入方程(12-122)中，可得，

$$da'_1 = -\left(d\beta'_1 - \frac{S_1}{E} \tan \phi_1 \right) \quad (12-125)$$

由圖 12-24(c) 可得，

$$\alpha'_2 - \phi_2 + \beta'_2 = 180^\circ$$

故 $da'_2 = -d\beta'_2 + d\phi_2$ (12-126)

因 $\gamma'_2 = 90^\circ - \phi_2$

故 $d\phi_2 = -\frac{S_2}{E} \cot \gamma'_2 = -\frac{S_2}{E} \tan \phi_2$ (12-127)

以方程(12-127)之值代入方程(12-126)中，可得，

$$da'_2 = -\left(d\beta'_2 + \frac{S_2}{E} \tan \phi_2 \right) \quad (12-128)$$

因 $da'_1 + da'_2 = d\theta_{D'}$ (12-129)

$$-(d\beta'_1 + d\beta'_2) = d\theta_{D'} \quad (12-130)$$

故由方程(12-125)及(12-128)可得，

$$d\theta_{D'} = d\theta_D + \frac{S_1}{E} \tan \phi_1 - \frac{S_2}{E} \tan \phi_2 \quad (12-131)$$

以上列方程與方程(12-119)比較，即得，

$$d\theta_{D'} = d\theta_D \quad (12-132)$$

故

$$W_{E(D)} = d\theta_{D'} \quad (12-133)$$

由是可知：若於有斜桿之桿鏈增加若干應力為零之平桿及豎桿，使其變為一平直之桿鏈，則其下半於某節點之角變，即等於該節點之彈性荷重。 圖 12-27

(a) 與 (b) 示求該二桁架上弦變位時所加之桿。(c) 與 (d) 示求該二桁架下弦變位時所加之桿。如圖(e)所示，若求 $\theta_{D'}$ 時採用虛功法，則所加之單位虛力

矩必由豎桿而傳達於桁架，如是即等於求圖 12-27(f) 中 θ_D 角之角變時，所採用單位虛力矩之二力，係豎向而不與斜桿成垂直。

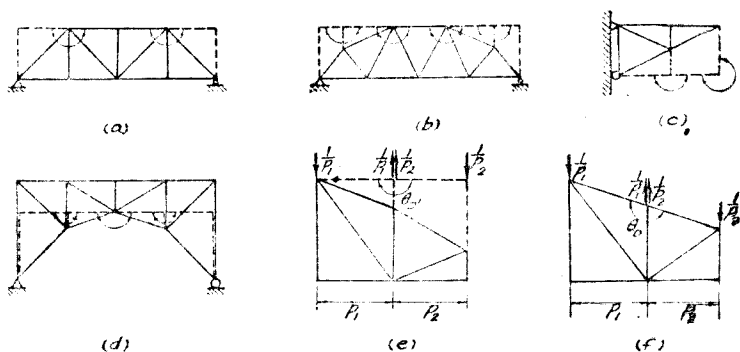


圖 12-27. 桿鏈有斜桿時之彈性荷重(二)

例題 12-21. 桁架及荷重與例題 12-19 相同。以 $a-B-c-d-D$ 爲桿鏈，求其上下弦所有節點之豎向線變位。

解答：附圖(a)示所有之角變 $E d\theta$ ，其計算無須列出。桿鏈如附圖(b)，其上各節點之彈性荷重 EW_E 之值如下：

節點 B:

$$\begin{aligned}
 E d\theta &= +2.667 \\
 + (-0.8) \left(-\frac{3}{4} \right) &= +0.600 \\
 - (+1.2) \left(+\frac{3}{4} \right) &= -0.900 \\
 EW_{E(B)} &= \underline{+2.367} \downarrow
 \end{aligned}$$

節點 c:

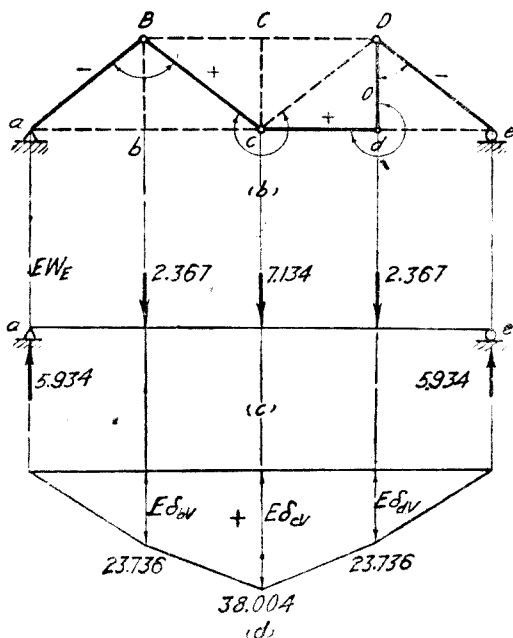
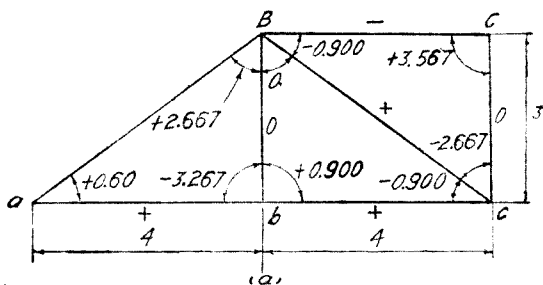
$$\begin{aligned}
 E d\theta &= +6.234 \\
 + (+1.2) \left(+\frac{3}{4} \right) &= +0.900 \\
 EW_{E(C)} &= \underline{+7.134} \downarrow
 \end{aligned}$$

節點 d 及 D:

$$E d\theta = \begin{cases} -0.900 \\ +2.667 \end{cases}$$

$$-(-0.8)\left(+\frac{3}{4}\right)=+0.600$$

$$EW_{B(a)(D)} = +2.367 \downarrow$$



例題 12-21.

彈性荷重及其彎矩圖各如附圖(c)及(d)所示。因所有之三層桿均無長度改變，故不但不需因桿鏈有豎桿 Dd 而加以改正，且所有上下弦同一節點之豎向

線變位均相等,故,

$$\delta_{BV} = \delta_{bV} = \delta_{DV} = \delta_{dV} = + \frac{23.736}{2,100} = +0.01130 \downarrow \text{公尺} = \underline{+1.130 \downarrow \text{公分}}$$

$$\delta_{CV} = \delta_{cV} = + \frac{38.004}{2,100} = +0.01810 \downarrow \text{公尺} = \underline{+1.810 \downarrow \text{公分}}$$

上所得之答案與例題 12-18 及 12-19 所得之答案相符。

習題 12-47. 桁架與荷重與例題 12-11 相同。以 $L_0-U_1-L_2-U_3-I_4$ 為桿鏈, 求其上下弦所有節點之豎向線變位, 並以所得之答案與習題 12-41 及 12-43 者相校核。

習題 12-48. 桁架及荷重與習題 12-42 相同。以 $L_0-U_2-M_3-L_4-L_5-I_6-L_8$ 為桿鏈, 求其上下弦所有諸節點之豎向線變位, 並將所得之答案與習題 12-42 或 12-44 者相校核。

習題 12-49. 桁架與例題 12-19 相同, 惟荷重 P 由下弦節點 c 移置於上弦節點 C , 故豎桿 Cc 有單位壓應力 0.8 公噸/平方公分。以 $a-B-C-c-D-e$ 為桿鏈, 求其上下弦所有節點之豎向線變位。

例題 12-22. 桁架及荷重與例題 12-20 相同, 以 $a-B-C-c-l-l-e$ 為桿鏈, 求其上下弦所有節點之豎向線變位。

解答: 附圖(a)示所有之角變 $Ed\theta$, 其計算無須列出。因豎桿 Cc 有壓應力, 故三角形 BCc 中之角變與例題 12-21 中所示者不同。桿鏈如附圖(b), 其上各節點之彈性荷重 EW_E 之值如下:

節點 B :

$$Ed\theta = \begin{cases} +2.667 \\ -1.500 \end{cases}$$

$$+ (-0.8) \left(+\frac{3}{4} \right) = \underline{+0.600}$$

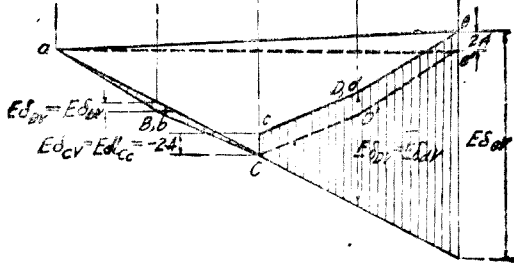
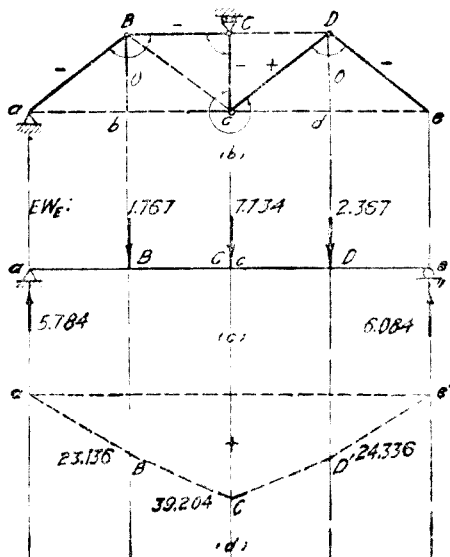
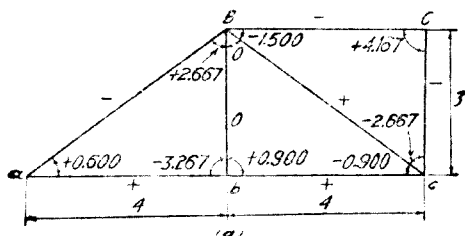
$$EW_{E(B)} = \underline{+1.767 \downarrow}$$

節點 c 及 C :

$$Ed\theta = \begin{cases} +4.167 \\ +2.667 \end{cases}$$

$$- (+1.2) \left(-\frac{3}{4} \right) = \underline{+0.900}$$

$$EW_{E(C)(6)} = +7.734 \downarrow$$



例題 12-22.

節點 D :

$$\begin{aligned} Ed\theta &= +2.667 \\ + (+1.2) \left(-\frac{3}{4} \right) &= -0.900 \\ - (-0.8) \left(+\frac{3}{4} \right) &= +0.600 \\ EW_{E'D} &= +2.367 \downarrow \end{aligned}$$

假設此桁架係兩端支承，故彈性荷重及其彎矩圖各如附圖(c)及(d)所示，其中線之最大豎距為上弦節點 C 之豎向線變位乘 E 。但豎桿 Cc 有縮短 $2.4/E$ ，故附圖(d)之右半 $CD'e'$ 須向上移動 2.4 ，得圖(e)之 $cDde$ 。惟實際上弦節點 c 之豎向線變位為零，故改正時作 $aC'e''$ 直線，即實際豎向線變位圖之底線。由附圖(d)及(e)可得各節點之豎向線變位如下：

$$\begin{aligned} \delta_{BV} = \delta_{bV} &= \frac{23.136 - 0.5 \times 39.204}{2,100} = +\frac{3.534}{2,100} \\ &= +0.00168 \downarrow \text{公尺} = +0.168 \downarrow \text{公分} \\ \delta_{cV} &= -\frac{2.4}{2,100} = -0.00114 \uparrow \text{公尺} = 0.114 \uparrow \text{公分} \\ \delta_{DV} = \delta_{dV} &= \frac{24.336 - 2.4 - 1.5 \times 39.204}{2,100} = -\frac{36.870}{2,100} \\ &= -0.01756 \uparrow \text{公尺} = -1.756 \uparrow \text{公分} \\ \delta_{eV} &= \frac{0 - 2.4 - 2 \times 39.204}{2,100} = -\frac{80.808}{2,100} \\ &= -0.03848 \uparrow \text{公尺} = -3.848 \uparrow \text{公分} \end{aligned}$$

以上所得之答案，與例題 12-20 所得之答案相符。

習題 12-50. 以 $L_0-U_2-M_3-L_3-L_4-U_6-L_8$ 為桿鏈解答習題 12-45。

習題 12-51. 以 $L_0-U_1-U_2-L_2-U_3-L_4$ 為桿鏈解答習題 12-37 (b)。

例題 12-28. 桁架及荷重與例題 12-19 相同。用加桿及角變法求上弦諸節點之豎向線變位。

解答：所加之桿如附圖(a)所示，庶其上弦成為平直。 ABa 及 EDe 二角之角變 $\times E$ 之值如下：

$$(0 - (-0.8))\left(-\frac{3}{4}\right) = +0.600$$

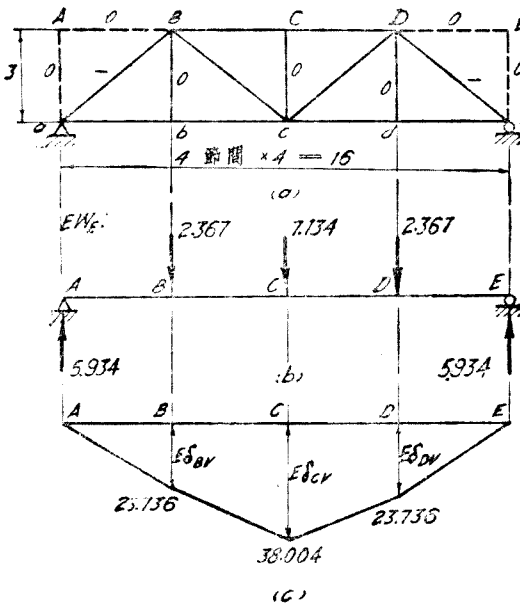
其餘諸角之角變 $\times E$ 之值見例題 12-21，其上弦諸節點之彈性荷重 $\times E$ 之值如下：

節點 B 及 D:

$$+0.600 + 2.667 - 0.900 = +2.367 \downarrow$$

節點 C:

$$+3.567 \times 2 = +7.134 \downarrow$$



例題 12-23.

彈性荷重及其彎矩圖各如附圖(b)及(c)所示，故

$$\begin{aligned} \delta_{BV} = \delta_{DV} &= + \frac{23.736}{2,100} = +0.01130 \downarrow \text{公尺} \\ &= +1.130 \downarrow \text{公分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{CV} &= + \frac{38.004}{2,100} = +0.01810 \downarrow \text{公尺} \\ &= +1.810 \downarrow \text{公分} \end{aligned}$$

因豎桿 Bb, Cc 及 Dd 之應力均爲零 故以上所得之答案,與例題 12-19 及 12-21 中所得者相同。

習題 12-52. 桁架及荷重與習題 12-37 (b) 相同。用加桿及角變法求其上弦諸節點之豎向線變位。

12-11. 用角變法求桁架之變位(二)① 於上述求桁架變位之角變法中,其角變係依桁架三角形之每一角計算,而各節點之彈性荷重則視所選擇之桿鏈形式而定。但角變及彈性荷重亦可按桁架中之每一桿之長度改變計算。惟桁架中某一桿長度之改變,與其中何角之角變有影響,有時不易確定,於再分桁架爲尤然。若彈性荷重按桁架中每一桿之長度改變直接計算,則必以桁架之某一弦所有之弦桿,組成桿鏈,不可有腹桿及其他弦桿參加其中。故此法不如前法之簡明便用,極其顯然。近日美國出版之結構學書籍,多將此法摒而不論。本書爲求全計,仍以極簡明之方法,述此種求角變及彈性荷重之法如下。至由彈性荷重而求豎向線變位之法,則與前法完全相同,故不贅述。

圖 12-28(a) 示某桁架上弦之平弦桿 AB 。若該弦桿有長度改變,則紙三角形 ABC 之三頂角有角變 $d\theta_A, d\theta_B$ 及 $d\theta_C$, 其值之計算,見圖 12-20 及 12-21。設平弦桿 AB 之長度改變爲伸長,求下弦豎向線變位時節點 C 之彈性荷重 $W_{E(C)}$ 爲,

$$W_{E(C)} = d\theta_C = - \frac{dl}{r} \uparrow \quad (12-134)$$

因弦桿 AB 係平直,根據方程(12-120),則求上弦豎向線變位時節點 A 及 B 之彈性荷重 $W_{E(A)}$ 及 $W_{E(B)}$ 各爲,

$$W_{E(A)} = d\theta_A = - \frac{b}{p} \frac{dl}{r} \uparrow \quad (12-135)$$

$$W_{E(B)} = d\theta_B = - \frac{a}{p} \frac{dl}{r} \uparrow \quad (12-136)$$

同此,若 AB 係下弦桿,如圖 12-28(b) 所示,則求上弦豎向線變位時節點 C 之彈性荷重 $W_{E(C)}$ 之數量與方程(12-134)所表示者相同,求下弦豎向線變位時節點 A 及 B 之彈性荷重 $W_{E(A)}$ 及 $W_{E(B)}$ 之數量亦各與方程(12-135)

① 此法爲摩爾 (Mohr) 氏所創,但經彌 (Müller-Breslau) 氏加以改良。

及(12-136)所表示者相同。若 AB 弦桿長度之改變係縮短,則其彈性荷重之正負號及指向,均與圖 12-28 (a)及(b)所示者相反。

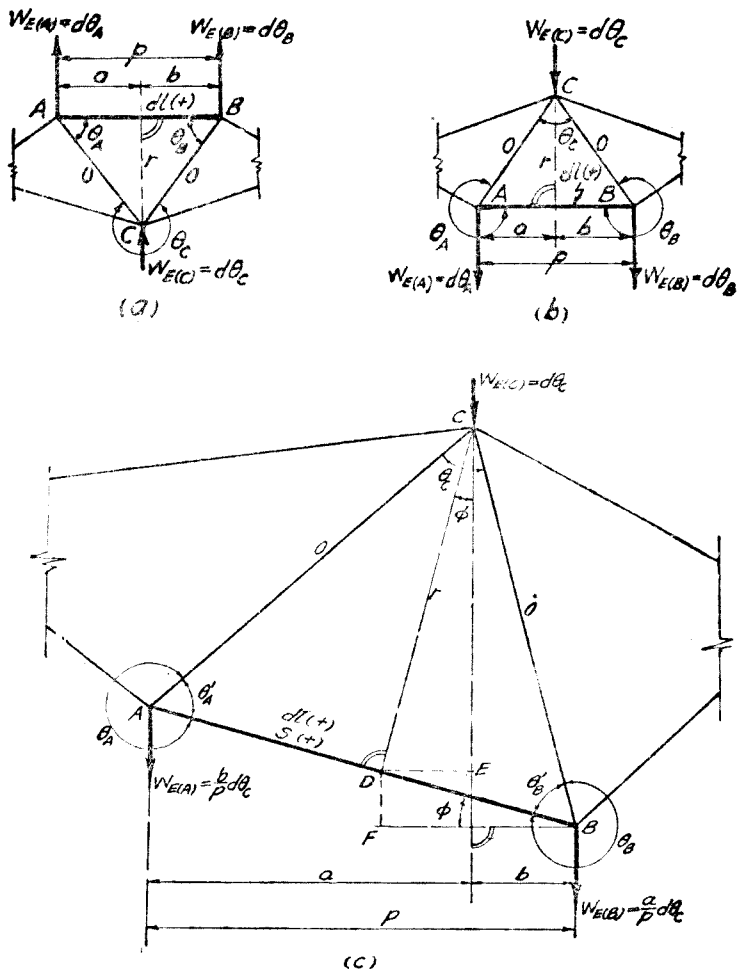


圖 12-28. 角變及彈性荷重依桿計算(弦桿)

於第 12-10 節之角變法曾述及若桁架之弦桿及桿鏈非平直時,其長度之改變與其兩端節點之豎向線變位有直接影響〔參閱圖 12-24 (a)〕,故其

兩端節點之彈性荷重亦不各等於該二節點之角變，於此亦然。圖 12-28 (c) 示一非平直之下弦 AB ，設其長度改變為伸長，則求其上弦豎向線變位時節點 C 之彈性荷重 $W_{E(C)}$ 即等於 ACB 角之角變 $d\theta_C$ ，故

$$W_{E(C)} = d\theta_C = + \frac{dl}{r} \downarrow \quad (12-137)$$

注意上弦桿是否平直，並不影響方程(12-137)所表之值。根據圖 12-20，則下弦 A 節點 θ_A 角之角變 $d\theta_A$ 為，

$$d\theta_A = \frac{DE}{AB} d\theta_C \quad (12-138)$$

根據方程(12-120)，則下弦節點 A 之彈性荷重 $W_{E(A)}$ 為，

$$W_{E(A)} = d\theta_A - \frac{s}{E} \tan \phi \quad (12-139)$$

但

$$-\frac{s}{E} = -\frac{r}{l} d\theta_C = \frac{r}{AB} d\theta_C \quad (12-140)$$

因圖 12-28(c) 中之 CDE 與 BDF 係相似之三角形，故，

$$\tan \phi = \frac{DF}{BF} = \frac{DE}{CE} \quad (12-141)$$

以方程(12-138)，(12-140)及(12-141)之值代入方程(12-139)中，可得，

$$\begin{aligned} W_{E(A)} &= d\theta_C \left[\frac{DB}{AB} - \frac{(DE)r}{(AB)(CE)} \right] \\ &= d\theta_C \left[\frac{r}{(AB)(CE)} \right] \left[\frac{(DB)(CE)}{r} - DE \right] \end{aligned}$$

由 CDE 與 BDF 二相似之三角形，則，

$$\frac{r}{(AB)(CE)} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{(DB)(CE)}{r} = BF$$

並

$$BF - DE = b$$

故

$$W_{E(A)} = + \frac{b}{p} d\theta_C = + \frac{b}{p} \frac{dl}{r} \downarrow \quad (12-142)$$

同此，下弦節點 B 之彈性荷重 $W_{E(B)}$ 為，

$$W_{E(B)} = +\frac{a}{p} d\theta_C = +\frac{a}{p} \frac{dl}{r} \downarrow \quad (12-143)$$

故求下弦由於 AB 桿長度改變之豎向線變位時，節點 A 與 B 之彈性荷重 $W_{E(A)}$ 及 $W_{E(B)}$ 並不等於該二節點之角變 $d\theta_A$ 及 $d\theta_B$ ，但等於上弦彈性荷重 $d\theta_C$ 於下弦 A 及 B 二節點之分力或分荷重。

圖 12-29(a) 示某桁架之一節間 $ACBD$ 。 BC 爲上弦桿， AD 爲下弦桿，其餘三桿均係腹桿。設腹桿 AB 之長度改變爲伸長，則節點 A 及 B 之角 θ_A 及 θ_B 之角變，均係縮小。節點 C 及 D 之角 θ_C 及 θ_D 之角變均係擴大。故求其下弦豎向線變位時節點 D 及 A 之彈性荷重 $W_{E(D)}$ 及 $W_{E(A)}$ 各如下：

$$W_{E(D)} = d\theta_D = -d\theta'_D = -\frac{dl}{r_D} \uparrow \quad (12-144)$$

依圖 12-20 之計算法，

$$\begin{aligned} W_{E(A)} &= d\theta_A = -d\theta'_A = \left(\frac{b}{l} d\theta_C + \frac{b'}{l} d\theta'_D \right) \\ &= \frac{b}{l} \frac{dl}{r_C} + \frac{b'}{l} \frac{dl}{r_D} = \frac{dl}{l} \left(\frac{b}{r_C} + \frac{b'}{r_D} \right) \downarrow \quad (12-145) \end{aligned}$$

同此，求上弦豎向線變位時節點 C 及 B 之彈性荷重 $W_{E(C)}$ 及 $W_{E(B)}$ 各如下：

$$W_{E(C)} = d\theta_C = \frac{dl}{r_C} \downarrow \quad (12-146)$$

$$\begin{aligned} W_{E(B)} &= d\theta_B = -\left(\frac{a}{l} d\theta_C + \frac{a'}{l} d\theta'_D \right) = -\left(\frac{a}{l} \frac{dl}{r_C} + \frac{a'}{l} \frac{dl}{r_D} \right) \\ &= -\frac{dl}{l} \left(\frac{a}{r_C} + \frac{a'}{r_D} \right) \uparrow \quad (12-147) \end{aligned}$$

若由腹桿 AB 之下弦 A 端作 AC' 與 BD 平行，得 C' 點及 r'_C ，如圖 12-29(a) 所示，則，

$$\frac{b}{r_C} = \frac{b''}{r'_C}, \quad \frac{b'}{r_D} = \frac{a''}{r'_C}$$

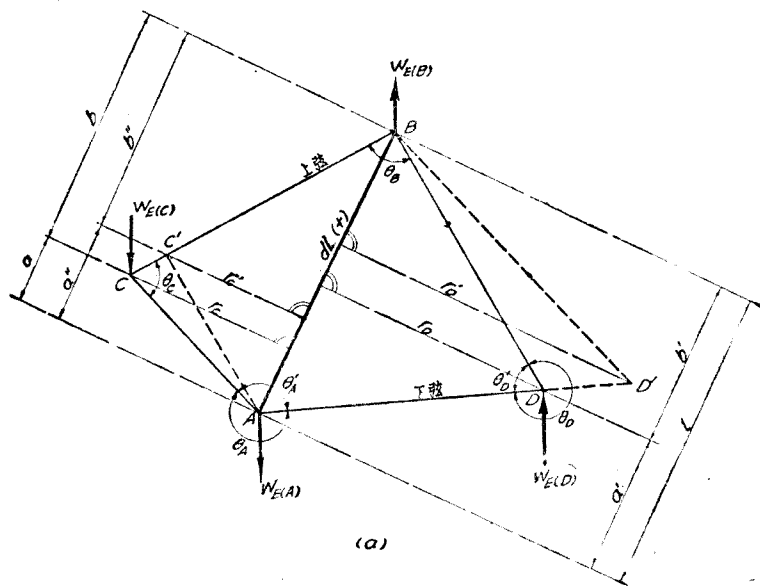
$$\text{故} \quad \frac{b}{r_C} + \frac{b'}{r_D} = \frac{a'' + b''}{r'_C} = \frac{l}{r'_C}$$

代入方程(12-145)中，則，

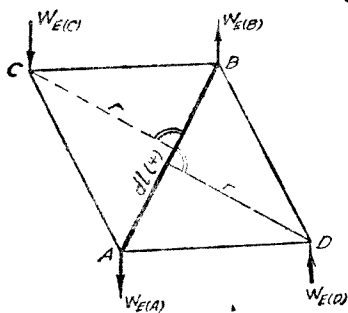
$$W_{E(A)} = \frac{dl}{r'_C} \downarrow \quad (12-148)$$

同此,若由腹桿 AB 之上弦 B 端作 BD' 與 AC 平行,得 D' 點及 r'_D ,並可得

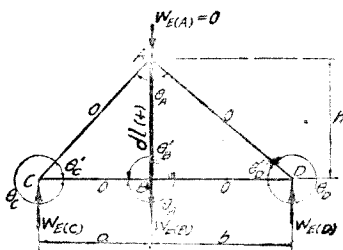
$$W_{E(B)} = -\frac{dl}{r'_D} \uparrow \quad (12-149)$$



(a)



(b)



(c)

圖 12-29. 角變及彈性荷重依桿計算(腹桿及副豎桿)

方程(12-148)及(12-149)或各較(12-145)及(12-147)爲簡便。若腹桿 AC 及 BD 係平行, 則 $r'_C = r'_D$, $r'_D = r'_D$, 方程(12-149)與(12-144)相同,

方程(12-148)與(12-146)相同, 故,

$$W_{E(B)} = W_{E(D)} \uparrow \quad (12-150)$$

$$W_{E(A)} = W_{E(C)} \downarrow \quad (12-151)$$

若弦桿 AD 及 BC 亦係平行, 如斜方形(圖 12-29(b))或長方形之節間, 則 $r'_C = r'_D = r$, 故,

$$W_{E(A)} = W_{E(C)} = -W_{E(B)} = -W_{E(D)} = -\frac{dl}{r} \downarrow \quad (12-152)$$

圖 12-29(c)示副豎桿 AB 之彈性荷重。設該副豎桿之長度改變爲伸長, 用圖 12-20 之法, 可得,

$$W_{E(A)} = d\theta_A = 0$$

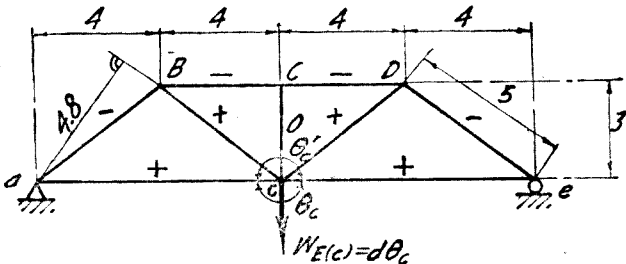
$$W_{E(C)} = -d\theta'_C = d\theta_C = -\frac{dl}{a} \uparrow \quad (12-153)$$

$$W_{E(D)} = -d\theta'_D = d\theta_D = -\frac{dl}{b} \uparrow \quad (12-154)$$

$$W_{E(B)} = -d\theta'_B = d\theta_B = dl \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \downarrow \quad (12-155)$$

如角變係正號或 θ (非圖 12-28 及 12-29 中之 θ') 係擴大, 則彈性荷重 W_E 之指向係向下, 如角變係負號或 θ 係縮小, 則彈性荷重之指向係向上, 如是則所得之正號彎矩即向下之正號豎向線變位, 與前此所規定者相符。

例題 12-24. 桁架及荷重與例題 12-15 相同。求下弦節點 C 之彈性荷重, 角變依每一桿計算。



例題 12-24.

解答：每桿之彈性荷重均依 dl/r 計算，豎桿 Cc 與節點 c 之變位無關，故未列入下表中。

	$E dl = sl$	r	係 數	節點 c 之 $E d\theta'_c$
aB	$5(-0.8) = -4.0$	4.8	1	$-\frac{5}{6}$
Dc	$5(-0.8) = -4.0$	4.8	1	$-\frac{5}{6}$
Bc	$5(+1.2) = +6.0$	4.8	1	$-\frac{5}{4}$
cD	$5(+1.2) = +6.0$	4.8	1	$-\frac{5}{4}$
ac	$8(+1.2) = +9.6$	3.0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{5}$
ce	$8(+1.2) = +9.6$	3.0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{5}$
BD	$8(-0.8) = -6.4$	3.0	1	$-\frac{32}{15}$
				$E d\theta'_c = -\frac{57}{6}$

$$W_{B(C)} = d\theta_c = -d\theta'_c = -\frac{\frac{57}{6}}{2,100} = +0.004524 \downarrow \text{弧度}$$

上得之答案，與例題 12-15 及 12-18 中所得者均相符。

習題 12-53。桁架及荷重與例題 12-19 相同。求上下弦諸節點之彈性荷重，角變依每一桿計算。

提示：上下弦同一節點之彈性荷重是否應相同？應力為零之三豎桿與上弦節點之彈性荷重是否有影響？將所得之答案與例題 12-21 或 12-23 者相校核。

例題 12-25。桁架及荷重與習題 12-32(b) 相同。求 M_3U_4 桿於上下弦節點之彈性荷重。

解答：因 M_3U_4 係一副桿，其長度之改變祇與節間 L_2L_3 及 L_3L_4 中之角度有影響。附圖示該二節間其中二個三角形 $U_2M_3U_3$ 及 $M_3L_3L_4$ (附

圖中之有斜線部分)均無改變,其餘所有角變之角均以 $\theta_1, \theta_2, \dots$ 等記之。計算所有之角度時,用圖 12-20 之幾何學法或較為簡便。其所需之尺寸,均如附圖所示,其計算無須列出, $M_3 U_4$ 桿 $E d l$ 及 $E d \theta$ 之值如下:

$$E d l = + 1.2 \sqrt{6^2 + 4.5^2} = + 1.2 \times 7.5 = + 9$$

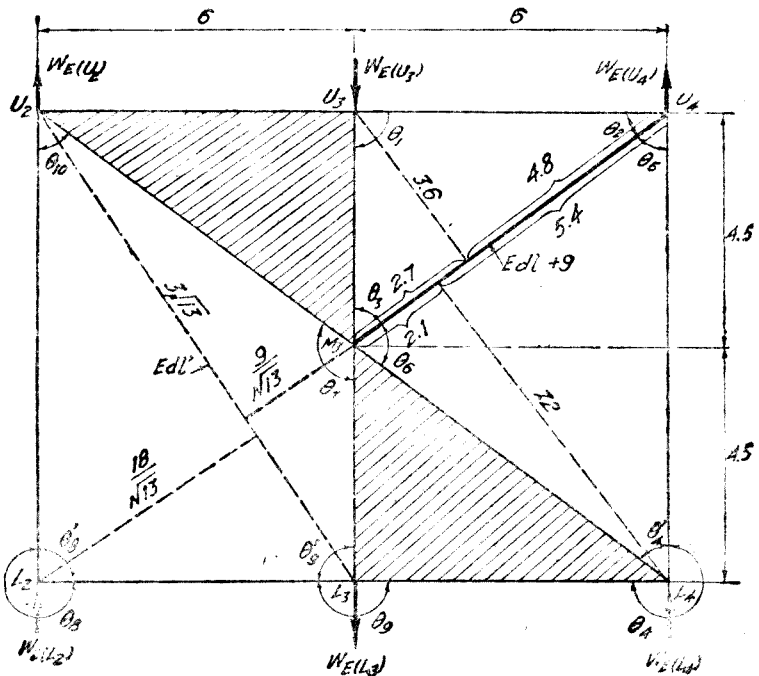
$$E d \theta_1 = + \frac{9}{3.6} = + 2.50$$

$$E d \theta_2 = + 2.50 \left(- \frac{2.7}{7.5} \right) = - 0.90$$

$$E d \theta_3 = + 2.50 \left(- \frac{4.8}{7.5} \right) = - 1.60$$

$$E d \theta'_4 = + \frac{9}{7.2} = + 1.25$$

$$E d \theta_5 = + 1.25 \left(- \frac{2.1}{7.5} \right) = - 0.35$$



例題 12-25.

$$Ed\theta_6 = +1.25\left(-\frac{5.4}{7.5}\right) = -0.90$$

$$Ed\theta_7 = -(Ed\theta_3 + Ed\theta_6) = +2.50$$

由是得虛桿 U_2L_3 之伸長 Edd' 爲

$$Edd' = +2.5 \times \frac{9}{\sqrt{13}} = +\frac{2.5 \times 9}{\sqrt{13}}$$

$$Ed\theta'_8 = +\frac{2.5 \times 9}{\sqrt{13}} \div \frac{18}{\sqrt{13}} = +1.25$$

由圖 12-29(a) 及方程 (12-150) 與 (12-151), 可知,

$$Ed\theta'_9 = -Ed\theta_7 = -2.50$$

$$Ed\theta_{10} = -Ed\theta'_8 = -1.25$$

故上下弦諸節點之彈性荷重如下:

$$EW_{E(U_1)} = Ed\theta_{10} = -1.25 \uparrow$$

$$EW_{E(U_2)} = Ed\theta_1 = +2.50 \downarrow$$

$$EW_{E(U_3)} = Ed\theta_2 + Ed\theta_5 = -0.90 - 0.35 = -1.25 \uparrow$$

$$EW_{E(L_1)} = Ed\theta_8 = -Ed\theta'_8 = -1.25 \uparrow$$

$$EW_{E(L_2)} = Ed\theta_9 = -Ed\theta'_9 = +2.50 \downarrow$$

$$EW_{E(L_3)} = Ed\theta_4 = -Ed\theta'_4 = -1.25 \uparrow$$

由上得之答案, 可知上下弦同一節點之彈性荷重相同。因如用虛功法, 無任何虛荷重在節點 U_3 或 L_3 , 該斜桿 M_3U_4 中應力 u 之值係相同。

習題 12-54. 桁架及荷重與習題 12-32(b) 相同求下列諸桿於上下弦節點之彈性荷重 (a) 斜桿 U_2M_3 (b) 斜桿 M_3L_4 (c) 副豎桿 M_3L_3 (e) 副豎桿 U_2L_4 及 (c) 弦桿 U_2U_4 。

桁架中某桿之彈性荷重, 亦可由其應力感應圖求之。於複雜之桁架, 如再分析桁架, 此法或較前法爲簡便。由虛功法可知桁架中某一桿有長度改變時, 其任一弦某節點之豎向線變位等於一豎向單位荷重在該節點時該桿之應力 u 乘以該桿之長度改變 dl 。若以一豎向單位虛荷重先後置於該弦之所有節點, 即得該桿之應力感應圖, 再乘以該桿之長度改變 dl , 當然得該桿有長度改變時該弦之豎向線變位圖。若該桁架係兩端支承, 則此豎向線變位圖當然即係桁架在彈性荷重下之彎矩圖, 故於兩端支承之桁架, 下列諸項於數量上係相

等。

$$\begin{aligned}
 & (\text{單位荷重在某弦時某桿之應力感應圖}) \times (\text{該桿之長度改變}) \\
 & = (\text{該桿長度改變時該弦之豎向線變位圖}) \\
 & = (\text{桁架在該桿之彈性荷重下之彎矩圖}) \quad (12-156)
 \end{aligned}$$

故由某桿之應力感應圖即可得桁架在該桿之彈性荷重下之彎矩圖，由此項彎矩圖即可求得該桿之彈性荷重。

圖 12—30(a) 示一兩端支承之桁架。設欲求其上弦之豎向線變位圖 圖 (b) 示荷重在上弦時 BD 時之應力感應圖，乘以其長度改變 dl ，即得該桁架上弦在該桿之彈性荷重下之彎矩圖，其於節點 B 及 D 之豎距各為 $u_B dl$ 及 $u_D dl$ 。 u_B 及 u_D 各係豎向單位荷重置於節點 B 及 D 時該弦桿 BD 之應力。此項彎矩圖於節點 B 及 D 之一折斷點，必各有一該桿之彈性荷重 $W_{E(B)}$ 及 $W_{E(D)}$ ，二者之指向且必相同，其數量可由此項彎矩圖及靜平衡之定律求得。圖(c) 示斜桿 CD 之應力感應圖乘以其長度改變 dl ，即得該桁架上弦在該桿之彈性荷重下之彎矩圖。由此項彎矩圖可知節點 B 及 D 各有一該桿之彈性荷重 $W_{E(B)}$ 及 $W_{E(D)}$ ，二者之指向且必相反，其數量亦可由彎矩圖及靜平衡之定律求得。注意，如圖(d) 所示，設以一彈性荷重 $W_{E(D)}$ ，其數量等於斜桿 CD 之長度改變 dl 除以該桿與其矩心 I 之正距 r ，其作用線與該桿之矩心同在一豎線上。再假設一梁將此彈性荷重傳達於節點 B 及 D ，即得該二節點之彈性荷重①。

圖(c) 示副整桿 Ee 在其彈性荷重下之彎矩圖 由此圖可知節點 DE 及 F 必各有一該桿之彈性荷重，且 D 及 F 二節點者之指向必與節點 E 者相反。由此項彎矩圖即可求得該桿之三彈性荷重之數量。

用此法時，彈性荷重之指向，若以觀察定之，較為簡便。設上弦桿之長度改變為縮短，則 B 及 D 二點之豎向線變位必係正號（即向下），故彎矩圖亦必係正號，因此該桿之二彈性荷重亦必係向下。設斜桿之長度改變亦係縮短，則節點 D 之豎向線變位為正號（即向下），而節點 B 之豎向線變位為負號（即向上）。故前者之彈性荷重向下，而後者之彈性荷重向上。同此，副整

① 其證明列為習題 12—56。

桿 Ee 於節點 E 之彈性荷重必向下，其於節點 D 及 F 者必向上，蓋後者之二彈性荷重即前者彈性荷重之反力。

於非兩端支承之桁架，如懸臂式之桁架，可於各桿長度改變既定之後，假

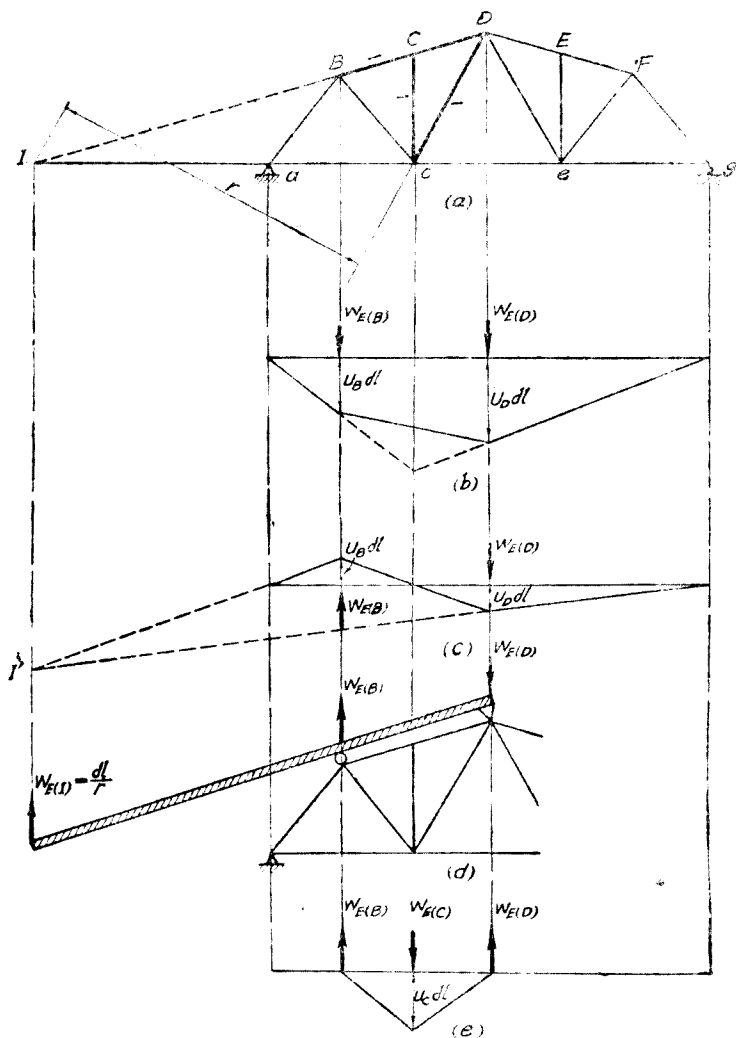
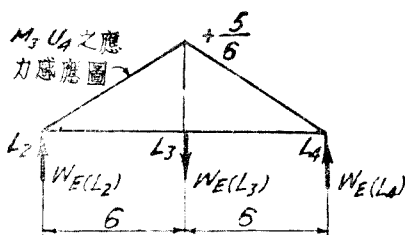


圖 12-30. 由桿之應力感應圖求其彈性荷重

設該桁架係兩端支承而計算其相對豎向線變位圖，再依圖 12—16 所示之法，加以改正，而求其實際豎向線變位圖。

用此法求彈性荷重時，將角變之觀念完全摒棄，故已失去角變法之意義，但既已分別求得桁架中所有諸桿，有長度改變時桁架某弦之豎向線變位圖，即可用疊加法求得桁架中所有諸桿，同時有長度改變時該弦之總合豎向線變位圖，絕無由其豎向線變位圖分別求得所有諸桿之彈性荷重而後相加再求其總合豎向線變位圖之必要，此法之最大缺點即在此。惟於較複雜之桁架，某桿對於桁架中角變之影響不易明瞭時或角變不易求得時，採用此法以求某一桿之彈性荷重，有時較前法為簡便而少詭誤之機會。

例題 12—26. 用應力感應圖解答例題 12—25。



例題 12—26.

解答：無論荷重在上弦或下弦，斜桿 M_3U_4 之應力感應圖，如附圖所示，其最大豎距為 $+5/6$ ，乘以該桿之長度改變 $\times E$ ，即 $+9$ ，得 $+15/2$ ，即在所示之三個彈性荷重 $\times E$ 下節點 L_3 之彎矩，故，

$$\frac{EW_{E(L_3)}}{2} \times 6 = + \frac{15}{2}$$

故

$$EW_{E(L_3)} = +2.50 \downarrow$$

$$EW_{E(L_4)} = EW_{E(L_3)} = -1.25 \uparrow$$

其上弦同一節點之彈性荷重與上列者相同，因斜桿 M_3U_4 伸長時節點 U_3 及 L_3 之豎向線變位均係向下，故彈性荷重之指向，如附圖所示。以上所得之答案與例圖 12—25 中所得者相同，但計算之簡便，遠非例題 12—25 所及

習題 12—55. 用應力感應圖解答習題 12—54。

習題 12—56. 試舉一普遍之例，證明圖 12—30 (d) 所示非平行弦桁架中腹桿彈性荷重之計算，係正確無誤

12—12. 桁架變位之圖解法 (一) 桁架之變形及變位，全由其中諸桿長度之改變，故桁架變位之求法，根本係一幾何學問

題，其解答自以圖解法為最適當。若桁架全係由若干三角形組成，既知其中諸桿長度改變之後，即可以桁架中之任一桿及該桿中之任何一點為起首，用幾何學中已知三邊之長度作一三角形之法，依次將變形之桁架畫出，由是並可得該桁架在某種支承情形下之變位，其原則至為簡易。惟於鋼料桁架，桿長度改變與桿長度之比，平均約在二千分之一左右^①，故依上項原則作圖時，如比例尺以桿之長度 l 為準，則桿長度之改變 dl 太小，如比例尺以桿之長度改變 dl 為準，則桿之長度 l 太大，故上述原則雖極簡易，但應用時則極困難，且實際上幾不可能。下述之法，係法國軍事工程師維 (Williot) 氏於 1877 年所發明，常稱為維氏移位圖，其特點即在利用上述之困難，將桿長度 l 及其改變 dl 之比例尺分開，各自獨立。即用桿長度改變 dl 作移位圖時，不必知桿之長度 l 。由維氏移位圖常祇可得桁架之相對變位圖，必再用前述移動改正或轉動改正之圖解法，始能求得其實際變位圖，轉動改正之圖解法係摩爾 (Mohr) 氏所發明，故常稱為摩爾轉動圖或摩爾改正圖。

維氏移位圖之性質及作法均極其簡易。由此圖不但可得桁架所有諸節點之絕對線變位（由是即可得其於任何傾度之分線變位），抑且可得其中所有諸桿之相對角變位（由是即可得任何二桿間之角變）。故維氏移位圖中絕無任一線虛靡而無實際意

① 即 $dl/l = s/E$ ， s 之最大値於拉桿為 1.2 公噸/平方公分，於壓桿較小，故 s/E 之平均値約為 $1/2,000$ 。

義者，其簡賅精巧，實非圖解法中任何他法所能比擬。

維氏移位圖之原則，已略見第 8—4 節及圖 8—8。茲再詳述之。圖 12—31(a) 示某桁架中之任何二桿 AC 及 BC 。因桁架中該二桿以左諸桿之長度改變，致使節點 A 移至 A' ，節點 B 移至 B' 。假設節點 C 該二桿之接合除去，因此該二桿之 C 端各移至 a 及 b ， Ca 及 Cb 各與 AA' 及 BB' 平行。設 AC 桿之長度改變為縮短 aa' ， BC 桿之長度改變為伸長 bb' 。如欲求節點 C 因上述諸項原因移位後之位置（以下簡稱移位點），可以 A' 及 B' 為圓心， $A'a'$ 及 $B'b'$ 為半徑，各作圓弧 $a'C''$ 及 $b'C''$ 。此二圓弧之相交點 C'' ，即節點之移位點。前已說明，桿長度改變與桿長度之比係極小，因此圓弧 $a'C''$ 及 $b'C''$ 所表之弧度，亦係極小，於極小之角度，切線即實際等於其弧度，故定節點 C 之移位點時，可作二直線 $a'C'$ 及 $b'C'$ ，各與桿 AC 及 BC 之原來傾度成垂直，以代替前所作之二圓弧 $a'C''$ 及 $b'C''$ 。此二垂直線之相交點 C' ，即節點 C 之移位點。如圖 12—31(a) 所示， C' 與 C'' 之位置，相差頗巨，此係因作圖時桿長度改變 aa' 及 bb' 之比例尺與桿長 AC 及 BC 者不同之故。設作圖時將 aa' 及 bb' 比例尺縮短約一半，如圖 12—31(b) 所示，則依上法所得 C' 與 C'' 之位置，相差即較小，由是可知：若桿之長度改變 aa' 及 bb' 之比例尺縮小至與桿長度 AC 及 BC 者相同，即作圖時前者之長度約為後者二千分之一，則圖 12—31(a) 及 (b) 中之 C' 與 C'' 之位置，實際係同在一點上。故上述以垂直線代替圓弧，實際

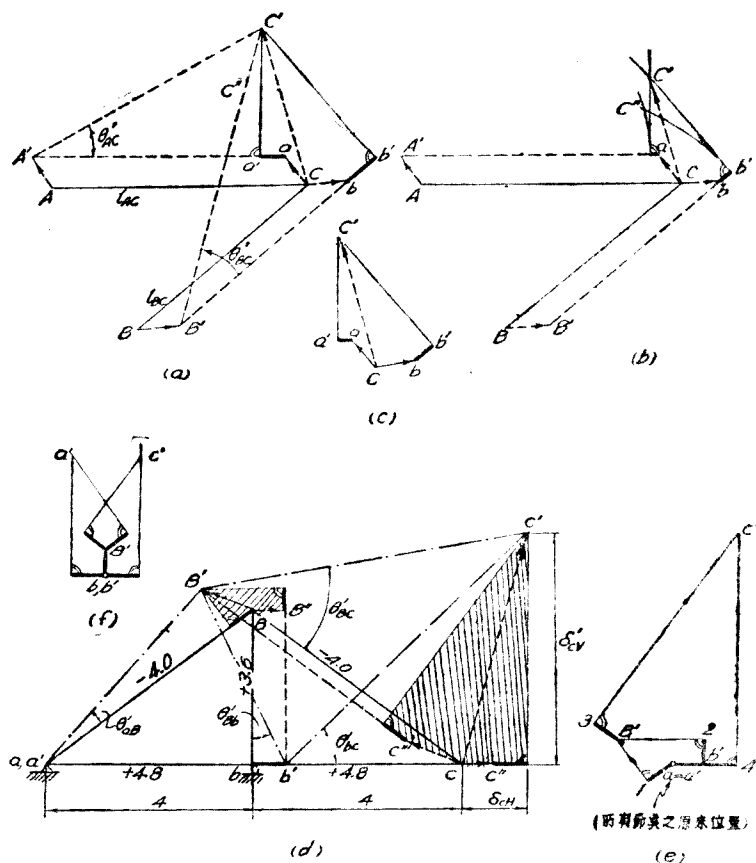


圖 12—31. 維氏移位圖之原理

上並非一近似之法。因作垂直線不須有圓心，故求節點 C 之移位點 C' 時，亦不須知 AC 及 BC 二桿之長度，而作圖時移位 Ca 與 Cb 及該二點之長度改變 aa' 及 bb' ，亦可採用較大之同一比例尺。因此，節點 C 之移位點 C' 之求法，可如圖 12—31 (e) 所示，即以一定之比例尺，作 A 及 B 二端之移位 Ca 及 Cb ，再

由 a 及 b 二點，依該二桿長度改變時 C 端伸長及縮短之傾度及指向，各作該二桿之長度改變 aa' 及 bb' ，再由 a' 及 b' 二點各作垂直線 $a'C'$ 及 $b'C'$ ，其相交點 C' 即節點 C 之移位點，而節點 C 之移位即 CC' 。設 θ'_{AC} 及 θ'_{BC} 各係 AC 及 BC 二桿之相對角變位。由圖 12—31 (a) 可得，

$$\left. \begin{aligned} a'C' &= \theta'_{AC} l_{AC} \\ b'C' &= \theta'_{BC} l_{BC} \end{aligned} \right\} (12-157)$$

故由圖 12—31 (c) 之維氏移位圖，並可求得 AC 及 BC 二桿之相對角變位 θ'_{AC} 及 θ'_{BC} 。由是可知：因桿之長度改變通常較桿之長度係極小，致使用通常作圓弧之法有困難或不可能，而維氏即利用其所以有困難或不可能之原因，發明此以垂直線代替圓弧之法，使桁架變位之圖解法，不但成爲可能，抑且極其簡賅，維氏之智巧誠有足多者。

桁架之維氏移位圖，即若干與圖 12—31 (c) 相似之小移位圖聯合組成。試以圖 12—31 (d) 之極簡單之桁架爲例，其各桿之數字，係指各桿之長度改變 $E\delta l$ 之值。既知其各桿 $E\delta l$ 之數量及性質之後，則該桁架之支承若何，祇與以後所述之改正法有關，與維氏圖之作法毫無關係。作維氏移位圖時，須先假定某一桿之傾度及其上之某一點之位置，均係固定不變。如此項假定與桁架變位之實際情形相符，則所得之維氏移位圖即表示桁架之實際變位。否則所得之維氏移位圖祇表示桁架之相對變位，必須加以改正，始可由之而得桁架之實際變位圖。於圖

12—31(d) 中，試假定節點 a 之位置及下弦 ab 之傾度係固定不變，如是自該下弦桿 b 端之右作 bb' 粗線，等於其伸長，得 b' 點，即節點 b 之移位點。假定節點 B 之接合除去，則豎桿 Bb 與其下端之節點 b 向右移動至圖(d)之虛線 $b'B''$ 之位置。因節點 a 假定係固定，故 aB 桿無移動。於該二桿之 B 端，各作其長度之改變。 aB 桿係縮短，故其長度改變之指向係向 a 點。 Bb 桿係伸長，故其長度改變之指向係向上。由此二桿長度改變後之 B 端，各作垂直線，其相交點 B' 即節點 B 之移位點。再假定節點 c 之接合除去，則下弦桿 bc 之 c 端因其 b 端之移位而移至 c'' ，斜桿 Bc 之 c 端因其 B 端之移位而移至 c''' 。自 c'' 及 c''' 二端依該二端於桿長度改變時伸縮之指向，各作其長度改變，並由該二桿長度改變後之 c 端，各作垂直線，其相交點 c' 即節點 c 之移位點。圖 12—31(d) 中之 $ab'B'c'$ 虛線，即係下弦桿 ab 之傾度及節點 a 之位置均不變時，該桁架變位後之位置。觀察圖 12—31(d) 可知：此圖共含有三個小維氏移位圖，即粗線 bb' ，及二個有斜線部分。若將此三小維氏移位圖聯合，並移至假定位置係固定之 a 點，使各圖中表示各節點原來位置之 b, B 及 c 三點均與 a 點相合，即可得維氏移位圖如圖 12—31(e) 所示，其中之 a 點即係桁架所有節點之原來位置。因節點 a 之位置假定係固定不變，故其移位點 a' 亦在 a 點。此圖中之距離 ab', aB' 及 ac' 即各係下弦桿 ab 之傾度及節點 a 之位置均不變時節點 b, B 及 c 之絕對線變位。距離 $1B', 2B', 3c'$ 及 $4c'$ 即各等於下弦桿 ab

之傾度不變時， aB 、 bB 、 Bc 及 bc 桿之相對角變位 θ' ，乘以各桿之原來長度。故，

$$\left. \begin{aligned} 1B' &= \theta'_{aB} l_{aB} \\ 2B' &= \theta'_{bB} l_{bB} \\ 3c' &= \theta'_{Bc} l_{Bc} \\ 4c' &= \theta'_{bc} l_{bc} \end{aligned} \right\} (12-158)$$

圖 12-31 (e) 中細線上之箭頭示作 $1-B'$ 、 $2-B'$ 、……等線之指向，即桁架中某桿位置後定之端，繞其位置先定之端轉動之指向。如 Bb 桿 b 端之位置係先定， B 端之位置係後定，由 $2B'$ 線之指向，可知於桁架中 B 端繞 b 端之轉動，為逆時計針向，故 Bb 桿之相對角變位為負號。由是可知圖 12-31 (d) 中所有桿之相對角變位均係負號。

圖 12-31 (e) 中諸線之比例尺，與所用作各桿長度改變之比例尺相同。由是可知：圖 12-31 (e) 之維氏移位圖既簡單而又完備，且其中絕無一線係虛靡而無實際意義者。

觀察圖 12-31 (d) 可知圖 (e) 維氏移位圖作法之步驟如下：

(1) 假定下弦桿 ab 之傾度及其左端 a 之位置均係固定不變。

(2) 自所有節點之原來位置之 a 點，作 ab 桿之長度改變，與 ab 桿平行，其指向與該桿長度改變時 b 端移動之指向相同，得節點 b 之移位點 b' 。

(3) 選定與 ab 桿成一三角形之 aB 及 bB 二桿，其一

端 a 及 b 二節點之移位點 a' 與 b' 係已定。自 a' 及 b' 二節點，各作該二桿之長度改變，各與該二桿平行，其指向各與該二桿長度改變時 B 端移動之指向相同。自該二桿長度改變之端，各作垂直線，其相交點即該二桿他端節點 B 之移位點 B' 。

(4) 再選定一鄰近三角形中之二桿 bc 及 Bc ，其一端 b 及 B 二節點之移位點 b' 及 B' 係已定。以與上述相同之法，定該二桿之他端節點 c 之移位點 c' 。依此作法，每次取一三角形，由其已定二節點之移位點，定其第三節點之移位點，迄至求得桁架所有節點之移位點為止。

故維氏移位圖作法之步驟，與第 4—5 節中所述簡單桁架組成之步驟極其相似。如桁架有四邊形（如再分桁架），或多邊形〔如圖 4—9(c) 聯合桁架及圖 4—10(b) 之複雜桁架〕，或有一鉸（如三鉸拱桁架），則常須先加入適當之虛桿，使桁架成為全由三角形所連續組成，而後始可作其維氏移位圖。至虛桿之長度改變，即其所聯二節點間之相對線變位。

若作圖 12—31(d) 桁架之維氏移位圖時，假定豎桿 Bb 之傾度及其下端 b 點之位置，均係固定不變，則所得之維氏移位圖如圖 12—31(f) 所示。注意該圖之比例尺與圖 12—31(e) 者相同，但前者所佔之面積較後者為小。故作維氏移位圖時，若假定桁架中部之一桿（如中線豎桿或中部弦桿）之傾度及其上之任一點之位置均係固定不變，則所得之維氏移位圖較小，因此其比例尺及圖解答案之精確可以增大。於桁架之形式及其變位均

係對稱式者，如所選定桿之傾度實際係固定不變，則採用上述假定時，不但祇須作該桁架任一半之維氏移位圖，抑且求實際線變位時祇須採用下述極簡易之移動改正法。即於桁架或其變位非對稱式者，如採用上述之假定，雖求實際線變位時須採用移動及轉動二種改正法，但因比例尺及圖解答案之精確可以增大，仍較採用任何其他假定為便利適宜。由上列之討論，可知維氏移位圖亦係採用第 12—8 節中先求相對變位而後求實際變位之原則，故維氏移位圖可視作係 12—8 節所述相對變位法之圖解法。觀察圖 12—31(e)，可知由假定位置不變之節點，依次求其他節點變位之位置時，如所經過桁架中之三角形愈多，則維氏移位圖亦愈大，且其增大之率極速。維氏移位圖若太大，則所作之垂直線及其交點均不易準確，因此所得之答案亦不易十分準確，此係維氏移位圖之唯一缺點。

習題 12—57. 桁架，荷重及其支承情形均與例題 12—15 相同，用下列之諸假定，作此桁架之維氏移位圖，並指明由此圖求實際變位時所須用之改正法。

- (a) 端豎桿 aB 之傾度及其 B 端之位置均係固定不變，
- (b) 上弦桿 BC 之傾度及其 C 端之位置均係固定不變，
- (c) 副豎桿 Cc 之傾度及其 c 端之位置均係固定不變。

習題 12—58. 由習題 12—57(a)，(b) 及 (c) 之三個維氏移位圖，求端豎桿 aB ，上弦桿 BC ，及副豎桿 Cc 各與斜桿 Bc 間之角變之弧度及正負號。

圖 12—32(a) 示一形式及變位均係對稱式之桁架，故桁架變位後，豎桿 Bb 之傾度實際係固定不變如作維氏移位圖時，亦作

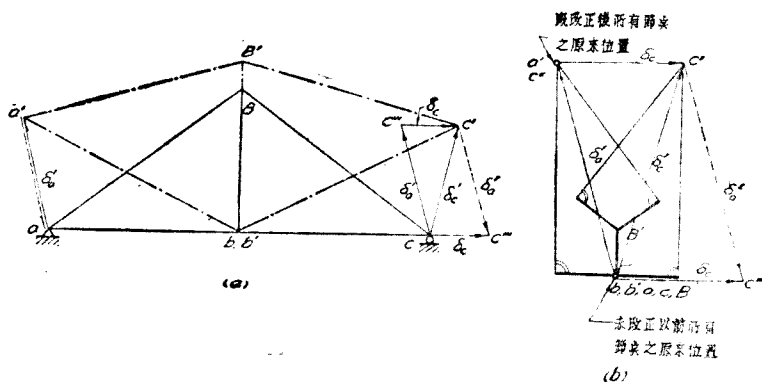


圖 12—32 移動改正之圖解法

此假定，並假定豎桿 Bb 下端節點 b 之位置係固定不變，得維氏移位圖如圖 12—32(b) 所示，及桁架之相對變位圖如圖 12—32(a) 之虛線所示。因前所作之二假定中，祇節點 b 之位置係固定一項與實際情形不符，故求桁架之實際變位時，祇須採用第 12—8 節所述之移動改正法。試以節點 c 為例，其相對線變位為 δ'_c ，依理應將圖 12—32(a) 之變位桁架（虛線）依節點 a 之相對線變位 δ'_a 向右下移動，使已移位之節點 a' 與未移位之節點 a 相合，因該 a 點係桁架之固定端，其線變位必為零。如是，則已移位之節點 C' 亦移至 C'' 。故節點 C 之實際線變位 $CC'' = \delta_c$ 係平向向右。圖 12—32(a) 及 (b) 之虛線矢示上述之第一種移動，及所得之線變位。但所有之運動均有相對性。設圖 12—32(a) 所示變位桁架（虛線）之位置不動，將原來桁架（實線）依節點 a 之相對線變位 δ'_a 向左上移動，使未移位之節點 a 與已移位之節點 a' 相合，如是則未移位之節點 c 亦移至 c'' ，而節

點 c 之實際線變位 $c''c' = \delta_c$ ，仍係平向向右。圖 12—32(a) 及 (b) 之實線矢示上述第二種之移動及所得之線變位。因圖 12—32(a) 及 (b) 中之 $cc''c'e''$ 係平行四邊形，故無論採用上述二種移動中之任一種，所得之結果均完全相同，但如圖 12—32(b) 所示，桁架已移位後諸節點 a', b', \dots 等位置不同，而桁架未移位前諸節點 a, b, \dots 等位置均在一點。故採用上述第一種移動時，圖 12—32(b) 中之 a', B', \dots 等諸點均須有與 δ_a 相等之向右上移動，而採用上述第二種移動時，祇使圖 12—32(b) 中之 b 點（前假定位置係固定不變者）一點有與 δ_a 相等之向左上移動至 a' 點，則所有諸節點之位置，均已改正，至為簡易。故移動改正之圖解法無他，祇須於維氏移位圖中，將實際上位置不變之節點 a 之移位點 a' ，用作所有節點之原來位置而已。自此點至任何節點移位點之距離，即係該節點之實際絕對線變位。

設圖 12—32(a) 桁架之實際支承，如圖 12—33(a) 所示，其左端係鉸支座，其右端係輓軸支座置於一坡面之上，則前所假定節點 a 之位置不變與實際情形相符，但下弦桿 ab 之傾度不變，與實際情形不符。故由圖 12—33(c) 之維氏移位圖求該桁架諸節點之實際變位時，須採用轉動改正之圖解法，其原理與圖 12—16(f) 所示者完全相同。茲先論節點 c ，依理應將圖 12—33(a) 之變位桁架（虛線）繞節點 a 向下轉動，使已移位之節點 c' 至坡面上之輓軸支座 c''' 為止。因所移動之 ϕ 角係極小，故轉動時節點 c' 移動之傾度可視作係豎向，其程距為 $\delta'_{c'} + \delta_{c''}$

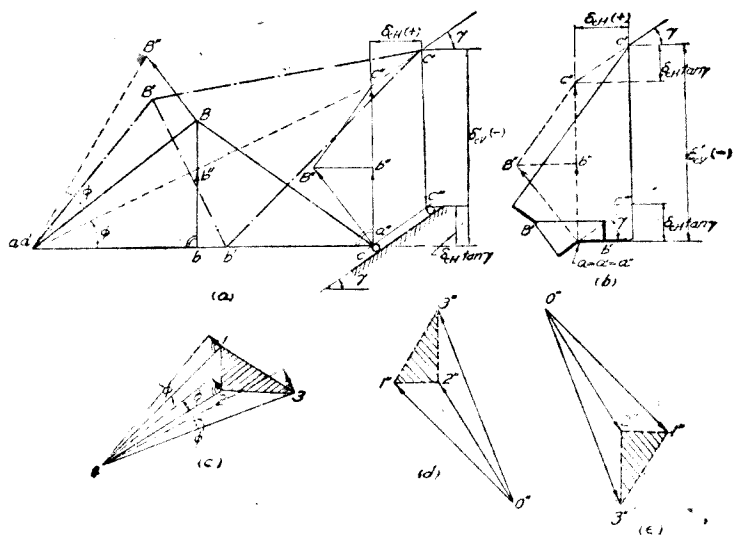


圖 12—33. 轉動改正之圖解法

$\tan \gamma$ 。故於圖 12—33(b) 中節點 c 之原來位置 a 點，作傾度為 γ 之斜線得 c'' 點， $c'c''$ 即已移位之節點 c' 所需移動之傾度及程距。前此論移動改正之圖解法時，曾說明移動未移位之節點較移動已移位之節點為簡易，於轉動之圖解法亦然。於圖 12—33(a) 及 (b) 之節點 c' ，作一傾度為 γ 之斜線，與經過節點 c 原來位置之豎線相交於 c'' 點。於圖 12—33(a) 中設變位桁架（虛線）之位置不動，將原來桁架（實線）繞節點 a 向上轉動使未移位之節點 c 與 c'' 點相合，其效果與上述將已移位之節點 c' 繞節點 a 轉動使其與 c'' 點相合者實際相同。因此，於圖 12—33(b) 中，節點 c 之原來位置由 a 點向上移至 c'' ， ac'' 即係節點 c 之移動，其傾度與圖 12—33(a) 之 ac 直線成垂直，其程距為 $\delta'_{cV} +$

$3_{cB} \tan \gamma$ 。茲進而研究 b 及 B 二節點原來位置繞節點 a 轉動時所需移動之傾度及程距。於此，須採用摩爾氏轉動圖，其原則如下：

設圖 12—33(c) 之三角形 123 繞任一 O 點轉動一極小之角度 ϕ ，因 ϕ 係極小，故轉動時 1, 2 及 3 三點之移動傾度，可視作係各與 $O1$, $O2$ 及 $O3$ 線垂直，而其移動程距各等於 $O1$, $O2$ 及 $O3$ 乘以 ϕ 角之弧度數。於圖 12—33(d) 中，自 O'' 點作三矢線 $O''1''$, $O''2''$ 及 $O''3''$ ，各表示 1, 2 及 3 點之移動傾度及程距。聯 $1''2''$, $2''3''$ 及 $1''3''$ ，得三角形 $O''1''2''$ 及 $O''2''3''$ 。因 $O''1''$ 及 $O''2''$ 各與 $O1$ 及 $O2$ 成垂直，故角度 $1O2$ 與 $1''O''2''$ 係相等。又因 $O''1'' = \phi(O1)$, $O''2'' = \phi(O2)$ ，及 $O''3'' = \phi(O3)$ ，故

$$\frac{O''1''}{O''3''} = \frac{O1}{O3}, \text{ 或 } O''1'' = \frac{O1}{O3} O''3''$$

$$\frac{O''2''}{O''3''} = \frac{O2}{O3}, \text{ 或 } O''2'' = \frac{O2}{O3} O''3''$$

由是可知：圖(d)之三角形 $O''1''3''$ 與圖(c)之三角形 $O13$ 係相似形，且其相同之邊係各成垂直。設圖(c) 3 點繞 O 點轉動之傾度及程距 $O''3''$ 為已知，以 $O''3''$ 為標準，作三角形 $O''2''3''$ 及 $O''1''2''$ ，其諸邊各與圖(c)之三角形 $O23$ 及 $O12$ 之相同邊成垂直，如圖(d)，則其中之 $O''1''$ 及 $O''2''$ 各等於圖(c)中 1 及 2 二點繞 O 點轉動時所移動之傾度及程距。圖(d)即係圖(c)之摩爾轉動圖。因圖(c)之移動係逆時計針向，故圖(d)相當於圖(c)逆時計針向轉 90 度者。若圖 12—33(c)之轉動係順時計針向，

則所得之摩爾轉動圖如圖(e)，相當於圖(c)順時計針向轉 90 度者。於圖(a)中原來桁架(實線)繞節點 a 逆時計針向轉動時，節點 c 所移動之傾度及程距為 cc'' 或 $a''c''$ 。依上述摩爾轉動圖之作法，以 $a''c''$ 為跨長，作一小桁架 $a''b''B''c''$ ，其各桿與原來桁架相同桿成垂直，並相當於原來桁架逆時計針向轉 90 度者，得 $a''b''$ 及 $a''B''$ ，各係節點 b 及 B 移動之傾度及程距。故於圖(b)中，以 $a''c''$ 為跨長，亦作一與圖(a)中相似之小桁架，則 b 及 B 二節點之原來位置，各由 a 點移至 b'' 及 B'' 二點。故圖(a)桁架諸節點 b, B 及 c 之實際絕對線變位，各如圖(b)中之 $b'b'$, $B''B'$ 及 $c''c'$ 。

前已說明，由維氏移位圖可得桁架所有諸桿之相對角變位 θ' 乘以各桿之原來長度之弧度及其正負號。若加以摩爾轉動圖，並可得所有諸桿之實際角變位 θ 之弧度及其正負號。圖 12-34 (a) 示圖 12-33 (b) 之維氏移位圖及摩爾轉動圖。前已

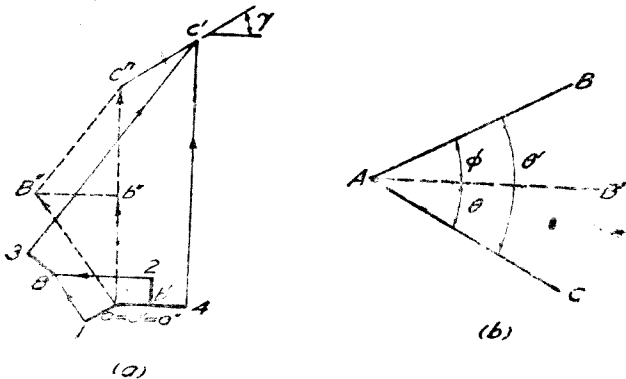


圖 12-34 桁架桿絕對角變位之圖解法

說明，圖 12—34 (a) 中之 $1B'$, $2B'$, $3c'$ 及 $4c'$, 各等於 aB , bB , Bc 及 bc 四桿之相對角變位 θ' 乘以各桿之原來長度。觀察圖 12—33 (a) 及 (b), 可知圖 12—34 (a) 中之 $a''b''$, $a''B''$ ……等各係原來桁架轉動之角 ϕ , 乘以 ab , aB , ……等桿之長度, 故,

$$\left. \begin{aligned} a''b'' &= \phi l_{ab} \\ a''B'' &= \phi l_{aB} \\ b''B'' &= \phi l_{bB} \\ B''c'' &= \phi l_{Bc} \\ b''c'' &= \phi l_{bc} \end{aligned} \right\} (12-159)$$

上列諸項之正負號, 視 ϕ 角之正負號而定。如圖 12—34 (b) 所示, θ' 為假設 AB 桿之傾度係固定不變時 AC 桿之相對角變位。若 AB 桿實際上須轉動一 ϕ 角至 AB' , 則 AB 桿之實際角變位 θ 為,

$$\theta = \theta' - \phi \quad (12-160)$$

採用上列方程時, 必須注意 θ' 及 ϕ 之正負號。由方程 (12—158), (12—159) 及 (12—160), 可得諸桿之實際角變位如下:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ab} &= 0 - \frac{a''b''}{l_{ab}} \\ \theta_{aB} &= \frac{1B' - a''B''}{l_{aB}} \\ \theta_{bB} &= \frac{2B' - b''B''}{l_{bB}} \end{aligned} \right\} (12-161)$$

$$\theta_{Bc} = \frac{3c' - B''c''}{l_{Bc}}$$

$$\theta_{bc} = \frac{4c' - b''c''}{l_{bc}}$$

採用上列方程時，亦須注意 $a''b''$, $a''B''$, …… 等及 $1B'$, $2B'$, …… 等之正負號。由是可知，桁架之所有變位情形，均可由一極其明瞭之維氏移位圖及摩爾轉動圖求得，此二圖之巧妙，誠非結構學中之任何其他圖解法所可比擬。

例題 12-27. 桁架荷重，及支承均與例題 12-19 相同。用圖解法求上下弦所有節點之豎向線變位圖，作維氏移位圖時，假設下弦桿 ab 之傾度及其左端節點 a 之位置，係固定不變。

解答：桁架及其中諸桿之長度改變，見附圖(a)維氏移位圖及摩爾轉動圖，均見附圖(b)。其作法與圖 12-31 及 12-33 相同，無須解釋，自此圖中各節點之原來位置及其移位後之位置，作平線各與經過附圖(a)相同節點之豎線相交，即可得此桁架上下弦所有節點之豎向線變位圖，如附圖(c)所示，注意以附圖(c)中之 $abcde$ 直線為豎向線變位圖之底線，亦係轉動改正之圖解法。參閱圖 12-16(c)及例題 12-14 之附圖(b)。

例題 12-28. 由例題 12-27 之附圖(b)，求該例題中桁架左半諸桿之實際角變位。

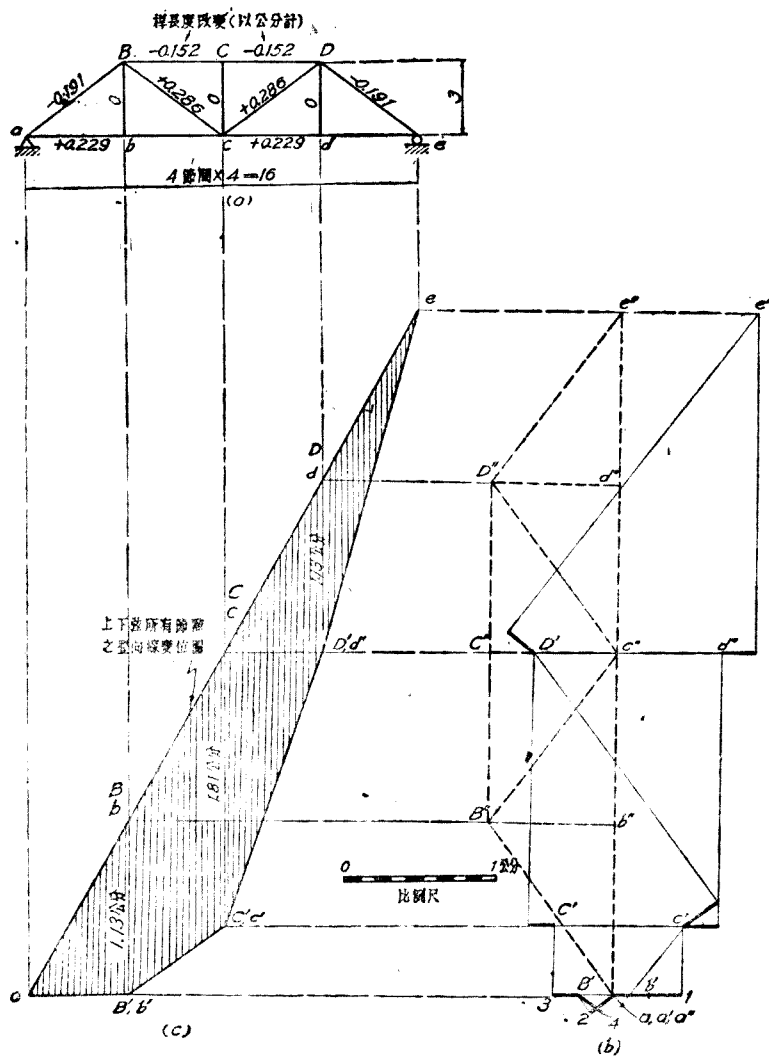
解答：所有之值多係由例題 12-27 之附圖(b)中量得，故答案不能十分精確。

$$\theta_{ab} = \frac{\theta - a''b''}{l_{ab}} = \frac{-(-1.13)}{400} = +0.00283 \text{ 弧度}$$

$$\theta_{bc} = \frac{1c' - b''c''}{l_{bc}} = \frac{(-0.45) - (-1.13)}{400} = +0.00170 \text{ 弧度}$$

$$\theta_{aB} = \frac{2B' - a''B''}{l_{aB}} = \frac{(-0.13) - (-1.4)}{500} = +0.00254 \text{ 弧度}$$

$$\theta_{BC} = \frac{3C' - B''C''}{l_{BC}} = \frac{(-0.45) - (-1.13)}{400} = +0.00170 \text{ 弧度}$$

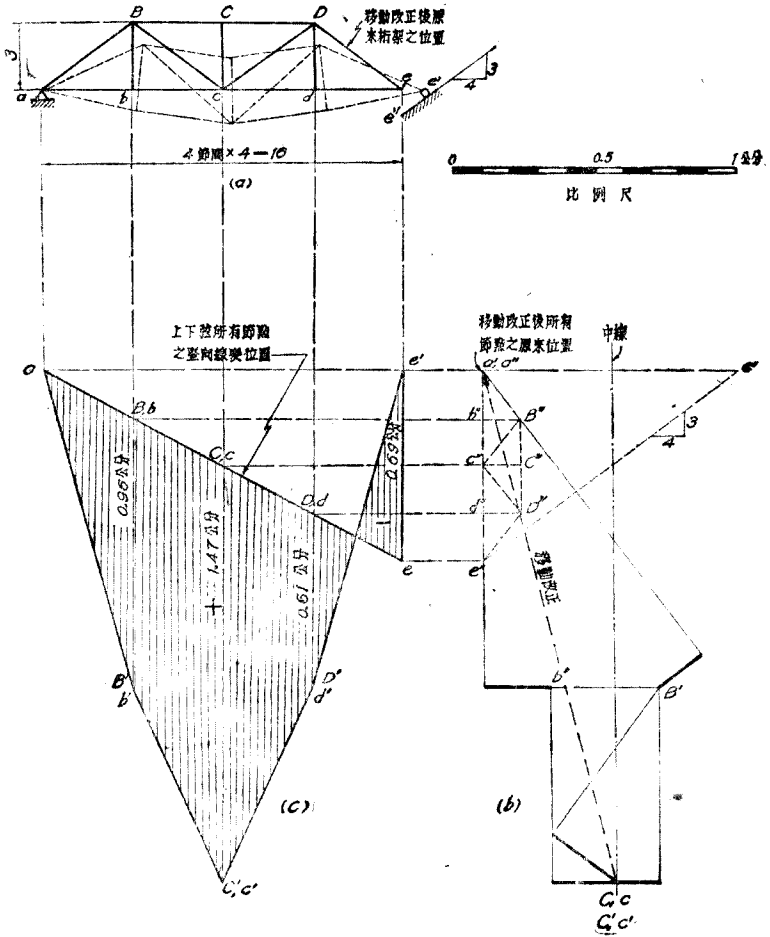


例題 12-27.

$$\theta_{bB} = \frac{b'B' - b''B''}{l_{bB}} = \frac{(-0.47) - (-0.85)}{300} = +0.00127 \text{ 弧度}$$

$$\theta_{Bc} = \frac{4c' - B''c''}{l_{Bc}} = \frac{(-0.77) - (-1.41)}{500} = +0.00127 \text{ 弧度}$$

例題 12-29. 桁架及其桿長度之改變與例題 12-27 相同, 惟其右端



例題 12-29.

之輻軸支座係置於傾度為「平 4 豎 3」之坡面上。用圖解法求其上下弦所有節點之豎向線變位圖。作維氏移位圖時，假設中線豎桿 Cc 之傾度及其任何一端之節點 C 或 c 之位置係固定不變。

解答：此桁架中諸桿之長度改變如例圖 12—27 之附圖 (a)。因桿長度之改變係對稱式，故依此題中之二假定，祇須作此桁架左半之維氏移位圖如附圖 (b) 即已足。此圖之比例尺為例圖 12—27 中維氏圖之二倍，而所佔之面積反較小。因此桁架之 e 端係支承於坡面上，故有向上之豎向線變位。因此，該桁架之變位非對稱式，而求實際線變位時，須採用移動及轉動二種改正法。先採用移動改正法，則所有節點之原來位置均移至節點 a 之移位點 a' 。如附圖 (a) 所示，採用轉動改正法時，須將未變位之桁架繞節點 a 向下轉動（順時計針向）使其未移位之節點 e 支承於坡面上之輻軸支座 e'' 點為止。故於附圖 (b) 中，自與 a' 點成對稱之 e' 點作一「平 4 豎 3」之斜線，與經過 a' 點之豎線相交於 e'' 點。以 $a'e''$ 為跨長，作摩爾轉動圖，得一與原來桁架相似之小桁架，並相當於原來桁架之順時計針向轉動 90° 度者，故此題中之摩爾轉動圖與圖 12—33 及例題 12—27 中所示者恰相反。至上下弦節點之豎向線變位圖之作法，與例圖 12—27 相同。

習題 12—59. 用圖解法解答習題 12—41，並作上下弦所有節點之豎向線變位圖。作維氏移位圖時假設下弦桿 L_0L_1 之傾度及節點 L_0 之位置均不變。

習題 12—60. 與習題 12—59 相同，惟作維氏移位圖時，假設中線豎桿 U_2L_2 之傾度及節點 L_2 之位置均不變。

習題 12—61. 用圖解法解答習題 12—37 (a)，並作上下弦所有節點之豎向線變位圖。作維氏移位圖時假設中線豎桿 U_2L_2 之傾度及節點 U_2 之位置均不變。

習題 12—62. 用圖解法解答習題 12—37 (b)，並作上下弦所有節點之豎向線變位圖。作維氏移位圖時假設中線豎桿 U_2L_2 之傾度及節點 U_2 之位置均不變。

習題 12—63. 用圖解法解答習題 12—42，並作所有節點之豎向線變位圖。作維氏移位圖時可採用任何適宜之假定。

12-13. 桁架變位之圖解法(二)① 桁架中諸桿之相對或實際角變位,既可由維氏移位圖求得,若前者係已知,則後者之作法可略加改變。如圖 12-31(e) 所示,若下弦桿 ab 之傾度假設係固定不變,則 $2B'$ 及 $3c'$ 各係 bB 及 Bc 之相對角變位 θ' ,各乘以該桿之長度 l 。設 $2B'$ 及 $3c'$ 係已知,則求桁架各節點之相對移位時,可作移位圖 $a-b'-2-B'-3-c'$ 如圖 12-35(b)。作此移位圖時祇須知 ab , bB 及 Bc 三桿之長度改變 dl ,及相對角變位 θ' 。故此移位圖即係圖 12-35(a) 所示桿鏈 $a-b-B-c$ 之移位圖,而此法即係桿鏈圖解法。作圖 12-35(b) 時,係假定 ab 桿之傾度不變(即 $\theta'_{ab}=0$) 及節點 a 之位置不變。若仍採用此假定,但桿鏈如圖(c),則其移位圖如圖(d)。若桿鏈仍用圖(c),但假定 aB 桿之傾度不變(即 $\theta'_{aB}=0$),節點 a 之位置仍假定不變,則所得之移位圖如圖(e)。於圖(d)中,傾度假定不變之桿 ab 不在所選定桿鏈之中,故不如圖(b)及(e)之簡便,不可取法。觀察圖 12-35(b)及(e),可得桿鏈移位圖之作法如下:

(1) 假定桿鏈中之某一桿之傾度及其上任一點之位置均係固定不變。

(2) 由每相鄰二桿間之角變 $d\theta$, 自傾度假設係固定之桿,各向左右依次用下列方程計算其餘諸桿之相對角變位 θ' 。

① 此法係彌 (Müller-Breslau) 氏於 1888 年所發表。

若計算係自左向右，即係由某角順時計針向之邊（左邊）求其逆時計針向之邊（右邊），故由方程(12-94)可得，

$$\text{計算自左向右：} \quad \theta'(\text{右}) = \theta'(\text{左}) - d\theta \quad (12-162)$$

同此可得，

$$\text{計算自右向左：} \quad \theta'(\text{左}) = \theta'(\text{右}) + d\theta \quad (12-163)$$

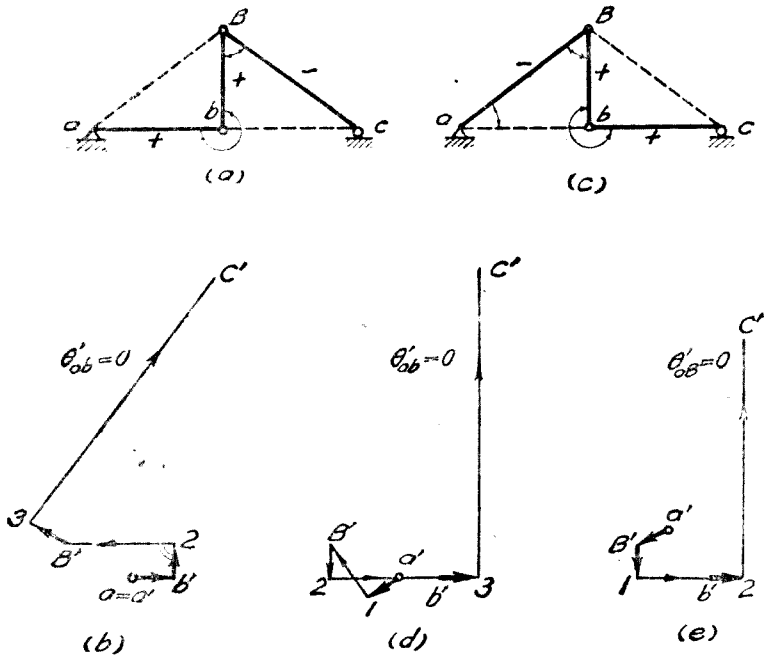


圖 12-35 用桿鏈圖解法求桁架之線變位

(3) 自假定位置不變之點，依假定傾度不變之桿長度改變時其兩端或一端移動之指向，並依該桿之傾度，作其長度改變 dl ，即得該桿兩端節點之移位點。自該桿之移位位置已定之一端，作與該端相聯某鄰桿之長度改變 dl ，其傾度與該鄰

桿相同，其指向與該鄰桿長度改變 dl 時其他一端移動之指向相同。再自所得該鄰桿長度改變 dl 之端，作一垂直線，其長度等於該鄰桿之相對角變位 θ' 乘以該鄰桿之長度 l 。此垂直線之指向與該鄰桿之未定端因有相對角變位 θ' 時繞其已定端轉動之指向相同。如是即得該鄰桿其他一端節點之移位點。依此法各向左右進行，即可定該桿鏈上所有節點之移位點。注意於圖 12-37(b), (d) 及 (e) 中所有諸線之指向均係順同一之次序。

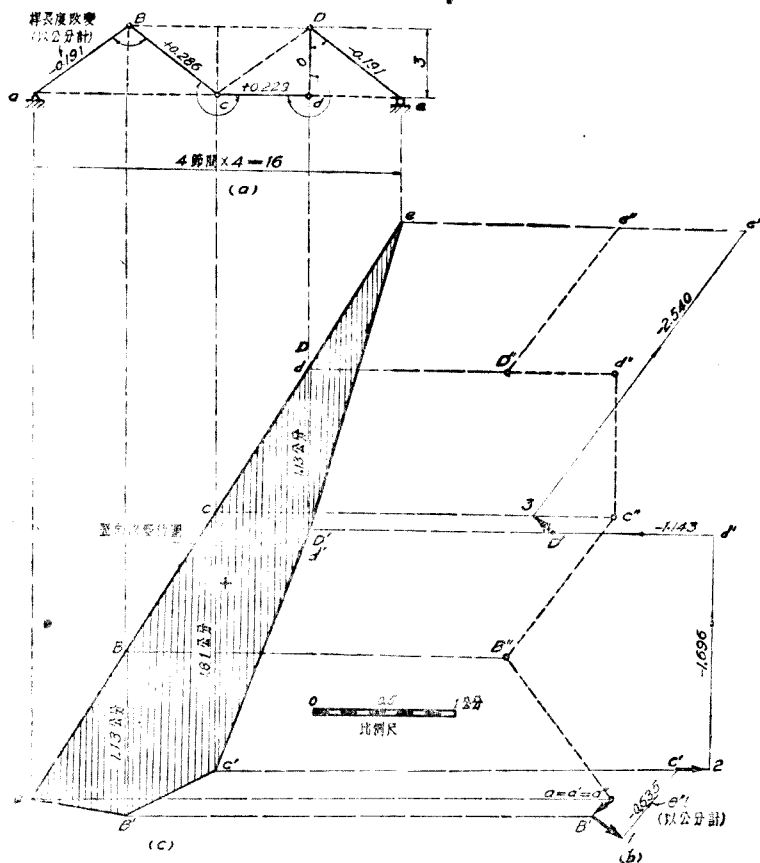
用此法所得桁架變位，係實際抑係相對，亦視作圖時之假定是否與桁架實際變位情形相符而定。如所得者係相對變位，其移動及轉動改正方法，亦完全與前述用於維氏移位圖者相同，無須贅述。

上述之桿鏈移位圖與維氏移位圖比較，則前者之應用必須知桿鏈中所有桿之相對角變位，故比後者之應用多一步驟。但於節間數較多之桁架，維氏移位圖逐漸增大，定節點移位點之垂直線之相交點，因之不易準確。於桿鏈移位圖，則節點移位點以垂直線之長度而定，較為準確，此桿鏈移位圖優於維氏移位圖之點。

例題 12-30. 用圖解法解答例題 12-21，並作桿鏈上所有諸節點之豎向線變位圖，作桿鏈移位圖時，假設 aE 桿之傾度及節點 a 之位置均不變。

解答：桿鏈及其中諸桿之長度改變（以公分計）如附圖(a)所示。後者係抄自例題 12-27 之附圖(a)。由例題 12-21 附圖(a)中之角變 $Ed\theta$ ，採用方程(12-162)，可得諸桿之相對角變位 θ' 及 θ'' 之值。所有之計算見下表：

桿	dl (公分)	$d\theta$ (弧度)	θ' (弧度)	l (公分)	$\theta' l$ (公分)
aB	-0.191	+0.00127	± 0	500	± 0
Bc	+0.286		-0.00127	500	-0.635
cd	+0.229		+0.00297	400	-1.696
dD	± 0		-0.00043	300	-1.143
Ds	-0.191		+0.00127	-0.00508	500



例題 12-30.

桿鏈移位圖見附圖(b)。因所假定節點 a 之位置不變與實際相符，故只須採用轉動改正法，以求實際變位。摩爾轉動圖亦見附圖(b)，相當於原來桿鏈之逆時針計向轉動 90 度者。附圖(c)示桿鏈所有諸節點之豎向線變位圖，所得諸節點之豎向線變位，與例題 12-21 及 12-27 中所得者相符。

例題 12-31. 用圖解法解答例題 12-22，並作桿鏈上所有諸節點之豎向線變位圖，作桿鏈移位圖時假設豎桿 Cc 之傾度及上弦節點 C 之位置均不變。

解答：桿鏈及其中諸桿之長度改變（以公分計）如附圖(a)所示，後者之值，除中線豎桿外概係抄自例題 12-27 之附圖(a)。由例題 12-22 附圖(a)中之角變 $E d\theta$ ，採用方程 (12-162) 及 (12-168)，可得諸桿之相對角變位 θ' 及 θ'' 之值。所有之計算見下表。

桿	dl (公分)	$d\theta$ (弧度)	θ' (弧度)	l (公分)	θ'' (公分)
aB	-0.191	} +0.00056	+0.00254	500	+1.270
BC	-0.152		+0.00118	400	+0.792
Cc	-0.114	} +0.00198	± 0	300	± 0
cD	+0.286	} +0.00127	-0.00127	500	-0.635
De	-0.191	} +0.00127	-0.00354	500	-1.270

桿鏈移位圖如附圖(b)，因二項假定均與實際不符，故須採用移動及轉動改正法。先將所有節點之原來位置由假定位置不變之節點 C 移至實際位置不變之節點 a 。如是，如附圖(b)所示，節點 c 有向下之線變位，此與實際不符，故必將已變位之桁架繞節點 a 向上轉動，使節點 c 無豎向線變位。或將原來桁架繞節點 a 向下轉動，使節點 c 之原來位置由附圖(b)之 $a=a'$ 點移至與其變位後之位置 c' 點在同一水平線上。故採用轉動改正法時，原來桁架係繞節點 a 順時針計向轉動。因此摩爾轉動圖如附圖(b)所示，相當於原來桁架之順時針計向轉動 90 度者，附圖(c)示桿鏈所有節點之豎向線變位圖，所得諸節點之豎向線變位與例題 12-22 中所得者相同。

習題 12-64. 用圖解法解答習題 12-47。作桿鏈上所有節點之豎向線變位圖，並將所得之答案與習題 12-41, 12-43, 12-47, 12-59, 及 12-60 者相校核。作桿鏈移位圖時假設端壓桿 L_0U_1 之傾度及節點 L_0 之位置均不變。

習題 12-65. 用圖解法解答習題 12-48。作桿鏈上所有節點之豎向線變位圖，並將所得答案與習題 12-42, 12-48, 及 12-63 者相校核。作桿鏈移位圖時假設端壓桿 U_6L_8 之傾度及節點 L_8 之位置均不變。

習題 12-66. 用圖解法解答習題 12-49。作桿鏈上所有節點之豎向線變位圖，並將所得答案與習題 12-49 者相校核。作桿鏈移位圖時假設中線豎桿 Cc 之傾度及其中心點之位置均不變。

習題 12-67. 用圖解法解答習題 12-50。作桿鏈上所有節點之豎向線變位圖，並將所得答案與習題 12-45 及 12-50 者相校核。作桿鏈移位圖時假設下弦桿 L_3L_4 之傾度及節點 L_3 之位置均不變。

習題 12-68. 用圖解法解答習題 12-51。作桿鏈上所有節點之豎向線變位圖，並將所得答案與習題 12-37(b), 12-51, 及 12-62 者相校核。作桿鏈移位圖時假設中線豎桿 U_2L_2 之傾度及節點 L_2 之位置均不變。

12-14. 用卡氏定理求結構之變位 圖 12-36(a) 示一桁架，其節點 1, 2 及 3 各有一集中荷重 P_1, P_2 及 P_3 。在此荷重下該三節點之絕對線變位各為 1-1', 2-2' 及 3-3'。其於荷重 P_1, P_2 , 及 P_3 傾度之分線變位各為 δ_1, δ_2 及 δ_3 。設 u_1 為 $P_1=1$ 時某桿中之應力， u_2 為 $P_2=1$ 時該桿之應力， u_3 為 $P_3=1$ 時該桿之應力。若桁架之變形係極小，不致影響荷重之作用及應力之分佈（參閱第 4-4 節），則計算該桿在 P_1, P_2 及 P_3 作用下之應力 S 時，可採用疊加法，故，

$$S = u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3 \quad (12-164)$$

由材料力學，可知桁架中諸桿因荷重 P_1, P_2 及 P_3 之作用所作

之總內功 (internal work) W , 可求得如下。設某一桿之總應力為 S , 其長度改變 $dl = Sl/AE$ 。若荷重係逐漸加於結構, 則 S 及 dl 必皆由零而逐漸增至其最後之值, 故其所作之內功為 $Sdl/2$ 。如是, 則所有桿所作之總內功 W 為,

$$W = \sum \frac{S^2 l}{2AE} = \sum \frac{(u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3)^2 l}{2AE} \quad (12-165)$$

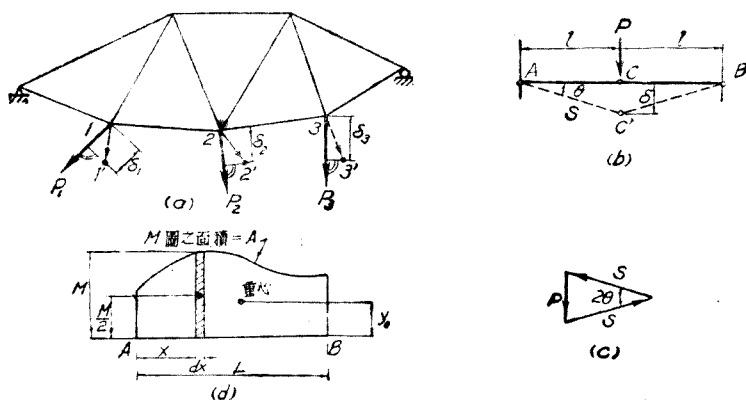


圖 12-36. 用卡氏定理求變位

求 W 對於任一荷重如 P_1 之偏紀數, 得,

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} = \sum \left(\frac{\partial S}{\partial P_1} \right) \frac{Sl}{AE} \quad (12-166)$$

注意 $S/A = s$; 由方程(12-164), 得,

$$\frac{\partial S}{\partial P_1} = u_1 \quad (12-167)$$

故由方程(12-64),

$$\frac{\partial W}{\partial P_1} = \sum \frac{u_1 s l}{E} = \delta_1 \quad (12-168)$$

或普遍言之，

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \sum \frac{Sl}{AE} \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right) \quad (12-169)$$

方程(12-169)即表示意國卡 (Alberto Castigliano) 氏^①之定理。若以文字表之，可述之如下：

於在任何荷重作用下維持平衡之結構，其中任一荷重作用點於該荷重傾度之分線變位，等於該結構中為荷重函數之總內功對於該荷重之偏紀數。

上述定理之應用，有下列三項限制：

(a) 結構之材料必符合胡 (Hooke) 氏定律，即應變與應力成正比例，故可採用方程(12-165)。

(b) 結構之變形或變位係極小，不致影響荷重之作用及桿應力之分佈，故求結構在若干荷重下某桿之應力時，可用疊加法而得方程(12-164) (參閱第 4—4 節中之討論)。

(c) 結構支承之位置無任何移動，故方程(12-165)所表示之總內功，祇包含荷重而不包含反力。

根據上列之三項限制，則結構之彈性變位必與荷重之數量成比例，而其總內功亦可以包含荷重之二次齊次函數表之，否則卡氏定理不能採用。

圖 12-36(b) 示圖 3—4 之危形結構。設欲求其中心鉸 C

① 此定理係卡氏於 1875 年所發表，常稱卡氏第一定理 其第二定理係最著名之「最少功」(least work) 定理，即以此第一定理為根據。

由於向下集中荷重 P 置於該點時之豎向線變位，由圖 (b)，

$$\frac{dl}{l} = \frac{l \cos \theta - l}{l} = \frac{1}{\cos \theta} - 1$$

因 θ 之角度係極小，則 $1/\cos \theta = 1 + \frac{\theta^2}{2}$ ，故，

$$\frac{dl}{l} = \frac{\theta^2}{2}$$

故二桿中之應力 S 為，

$$S = AE \frac{dl}{l} = \frac{AE\theta^2}{2}$$

由圖 (c)

$$P = 2\theta S = AE\theta^3$$

故

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}$$

$$\delta = \theta l = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \quad (12-170)$$

由上列方程可知雖材料與胡氏定律相符，但 C 點之豎向線變位不與荷重 P 成正比例，因計算此二桿之應力時，必須考慮其變形之故。如是，則其內功不能以荷重之二次齊次函數表之，而卡氏之定理亦不能採用。

以上僅就直接應力及線變位而論。但卡氏定理亦可用之以求彎矩之線變位。直梁由於彎矩之內功可由方程 (12-165) 求得之。如圖 12-6(a) 所示，於梁中取一面積為 dA 長度為 dx

之纖維 ab ，則此纖維中之單位應力 f 相當於方程 (12—165) 中之 S/A ，而其總應力 $f dA$ 相當於該方程中之 S ，其長度 dx 相當於方程 (12—165) 之 l ，因 $f = My/I$ ，故，

$$\frac{S^2 l}{2AE} = \frac{f^2}{2E} dA dx = \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx$$

代入方程 (12—165) 中，並將 Σ 號改爲 \iint 號，則，

$$W = \iint \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx$$

因
$$\int y^2 dA = I$$

故
$$W = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (12-171)$$

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) dx \quad (12-172)$$

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M_1} = \int \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial M_1} \right) dx \quad (12-173)$$

注意方程 (12—172) 及 (12—173) 之 $\partial M/\partial P$ 及 $\partial M/\partial M_1$ 均等於方程 (12—39) 及 (12—40) 中之 m 。故前者之二方程與後者之二方程相符。故採用卡氏定理求結構之變位時，若先求微分後求積分，則其計算法與前述之虛功法者實際完全相同。且用此法時所欲求線變位或角變位之點，必須各有集中荷重 P 或一彎矩 M_1 ，前者之傾度且必須與所欲求線變位之傾度相同，否則必暫時另加一此項集中荷重 P 或彎矩 M_1 ，俟求得此項結果後，再使此 P 或 M_1 爲零。如是，則方程 (12—169) 亦可用之以求桁架桿之角變及桁架二節點間之相對線變位。即使所欲求

變位之點有一某數量之此項 P 或 M_1 ，但計算時，仍須暫時以 P 或 M_1 代替其數量，俾可求偏紀數。俟已求得結果後，再將 P 或 M_1 改為原來之數量。故用此法求變位遠不如虛功法之簡便，通常採用之極少。惟計算靜不定結構之應力時，常採用之。且最著名之「最少功」定理，即以此為根據，故不可不述及之。

採用方程 (12—172) 及 (12—173) 時，亦可不用求積分法，與前述之虛功法相同。若直梁某一段中之 EI 係一恆數，則方程 (12—171) 可寫成，

$$W = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int M \left(\frac{M}{2} \right) dx = \frac{Ay_0}{EI} \quad (12-174)$$

圖 12—36 (d) 示直梁某段之 M 圖，其中有斜線長條之面積為 Mdx 。此長條面積對於其底線 AB 之靜矩為 $(Mdx)(M/2)$ ，故直梁該段之內功 W 即等於其彎矩圖之面積乘其重心與底線 AB 之豎距 y_0 ，再除以恆數之 EI 。若直梁全長或某段之 M 圖係由二種或多種荷重之 M 圖相加而成，則 y_0 之值常不易求得。設 M 圖為 M_1 及 M_2 圖相加而成，則由方程 (12—171)，可得，

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{EI} \int \frac{(M_1 + M_2)^2}{2} dx = \frac{1}{EI} \int \frac{M_1^2}{2} dx + \\ &\quad \frac{1}{EI} \int \frac{M_2^2}{2} dx + \frac{1}{EI} \int M_1 M_2 dx \\ &= \frac{A_1 y_{01}}{EI} + \frac{A_2 y_{02}}{EI} + \frac{1}{EI} \int M_1 M_2 dx \quad (12-175) \end{aligned}$$

上列方程中末項中之 $\int M_1 M_2 dx$ ，可用表 XXVI 中之值或用圖 12—6 (c) 所示求體積之法求之。

例題 11-32. 設一 EI 為恆數跨長為 L 之簡單梁, 有中線受有一集中荷重 P 。用卡氏定理求該梁中線之豎向線變位及其一端之角變位。

解答: 設 x 為其右端與梁某截面之平距離, 若 $x < L/2$, 則,

$$M = \frac{P}{2} x$$

故

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2 x^2}{4} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left| \frac{P^2 x^3}{12} \right|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{P^2 L^3}{96EI} \end{aligned}$$

故

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

求梁一端之角變位須暫時以一彎矩 M_1 加於該端, 俟求得結果後, 再使 M_1 為零。設一順時計針向之彎矩 M_1 加於梁之左端, 則,

x 量自右端而小於 $L/2$ 時,

$$M = \frac{P}{2} x + \frac{M_1}{L} x$$

x 量自左端而小於 $L/2$ 時,

$$M = \frac{P}{2} x + M_1 - \frac{M_1}{L} x$$

故

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P}{2} x + \frac{M_1 x}{L} \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P}{2} x + M_1 - \frac{M_1}{L} x \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P^2 x^2}{4} + \frac{M_1^2 x^2}{L^2} + \frac{PM_1 x^2}{L} \right) dx + \\ &\quad \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P^2 x^2}{4} + M_1^2 + \frac{M_1^2 x^2}{L^2} + PM_1 x - \frac{PM_1 x^2}{L} - \frac{2M_1^2 x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left| \frac{P^2 x^3}{12} + \frac{M_1^2 x^3}{3L^2} + \frac{PM_1 x^3}{3L} \right|_0^{\frac{L}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 x^3}{12} + M_1^2 x + \frac{M_1^2 x^3}{3L^2} + \frac{PM_1 x^2}{2} - \frac{PM_1 x^3}{3L} - \frac{M_1^2 x^2}{L} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 L^3}{96} + \frac{M_1^2 L}{24} + \frac{PM_1 L^2}{24} + \frac{P^2 L^3}{96} + \frac{M_1^2 L}{2} + \frac{M_1^2 L}{24} \right. \\ & \quad \left. + \frac{PM_1 L^2}{8} - \frac{PM_1 L^2}{24} - \frac{M_1^2 L}{4} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P^2 L^3}{96} + \frac{PM_1 L^2}{16} + \frac{M_1^2 L}{6} \right) \end{aligned}$$

故

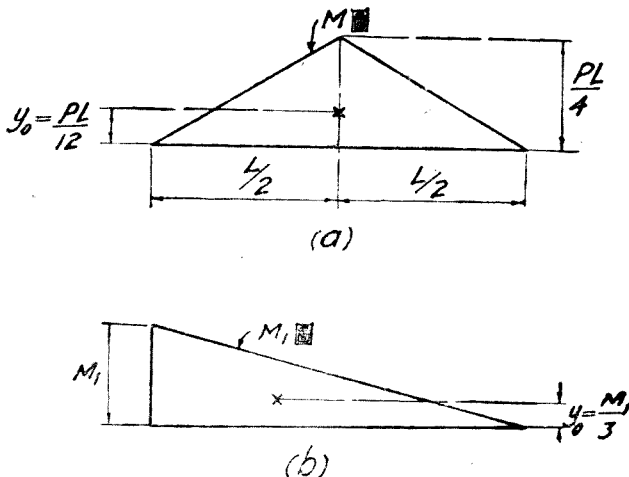
$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M_1} = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_1 L}{3}$$

使 $M_1 = 0$, 故,

$$\theta = + \frac{PL^2}{16EI}$$

可知上列內功 W 之方程中之諸項，祇其中含有 M_1 之一次方者，實際有用。故上列之計算，包含不需要之計算殊多。此法之不如虛功法之簡便，於此可見。若先求微分而後求積分，則計算較為簡易，但如是則與虛功法實際相同。

例題 12-33. 與例題 12-32 相同，惟計算內功時不用求積分而用彎矩圖之面積。



例題 12-33

解答：求 δ 時 M 圖如附圖(a)所示，其面積 A 為 $PL^2/8$, y_0 為 $PL/12$ ，故，

$$W = \frac{Ay_0}{EI} = \frac{P^2L^3}{96EI}$$

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI} \downarrow$$

求 θ 時 M_1 圖如附圖(b)所示，其面積 A 為 $M_1L/2$, y_0 為 $M_1/3$ ，故，

$$W = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL^2}{8} \cdot \frac{PL}{12} + \frac{M_1L}{2} \cdot \frac{M_1}{3} + \int MM_1 dx \right]$$

由表 XXVI 中之第 3 行，得，

$$\int MM_1 dx = \frac{PL}{4 \times 6} \left(LM_1 + \frac{L}{2} M_1 \right) = \frac{PM_1L^2}{18}$$

故

$$W = \frac{1}{EI} \left(\frac{P^2L^3}{96} + \frac{M_1^2L}{6} + \frac{PM_1L^2}{18} \right)$$

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M_1} = \frac{PL^2}{18EI} + \frac{M_1L}{3}$$

使 $M_1=0$ ，得，

$$\theta = + \frac{PL^2}{18EI} \searrow$$

習題 12-69. 用卡氏定理解答例題 12-1，計算時用先求積分而後求微分法。

習題 12-70. 與習題 12-69 相同，惟計算內功時不用求積分法而用彎矩圖之面積。

習題 12-71. 用卡氏定理解答例題 12-11。

習題 12-72. 用卡氏定理求圖 12-36(b) 結構鉸 c 之豎向線變位，將所得之結果與方程(12-170)相校核。卡氏定理可否用於此種結構？

12-15. 用富氏級數求結構之變位^① 結構之變位，亦可用富(Fourier)

① 見富氏所著熱之分析理論，1822 年出版。參閱貝(Byerly)氏所著富氏級數及球函數，1893 年出版。丁(S. Timoshenko)氏於 1908 年首次採用此方法以解答桿及鉸之彎曲問題。1924 年陰(C. E. Inglis)氏亦採用此法。1929 年皮(G. C. Priestler)氏及丁氏並用此法以分析靜不定之懸橋，所得結果較以其他方法所得者為簡便。

氏級數求之。富氏因研究熱之傳導發明變數 x 之任何①週期函數，其週期為 2π 者皆可用包含 x 倍數之正弦及餘弦級數表之。此項級數即三角術級數，亦稱為富氏級數。而求某週期函數之此項級數之方法，於算學中稱為和諧分析 (harmonic analysis)。

富氏級數之形式如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots \\ &\quad + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \end{aligned} \quad (12-176)$$

其 a_0, a_1, \dots 及 b_1, b_2, \dots 皆係恆數，試舉簡單之例以明上列級數之應用。設函數 $f(x)$ 為，

$$f(x) = y = \frac{\pi}{4} \quad (12-177)$$

於 $x=0$ 及 $x=\pi$ 之間，上列函數可以下列富氏級數表之，

$$\begin{aligned} y &= \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n} \sin nx \end{aligned} \quad (12-178)$$

其中 n 為奇整數。如圖 12-37 (a) 所示，若祇取上列級數之首一項，則 $y = \sin x$ ，與 $y = \frac{\pi}{4}$ 之值相差頗鉅。若取上列級數之首二項或三項，則各如圖 (b) 及 (c) 所示所得之結果與 $y = \frac{\pi}{4}$ 者相差較少，由是可知：如上所列級數之項數愈多，則所得之結果與 $y = \frac{\pi}{4}$ 者相差愈少。若所取之項數為無窮，則上列級數與 $y = \frac{\pi}{4}$ 之值實際完全相同。

方程 (12-176) 級數之週期為 2π ，但於圖 12-37 中所需者祇其 $x=0$

① 但亦有限制，即此項函數在 $x=0$ 及 $x=2\pi$ 之間，必係單值而且非無窮。例如 $1/(1-x)$ 係單值之函數，但於 $x=1$ 時，其值為無窮。 $\tan^{-1}x$ 非無窮，但又非單值。故二者皆不能用富氏級數表之。

至 $x=\pi$ 之間之一段，故方程(12-176)如用於跨長為 L 之結構，則所需亦祇 $x=0$ 至 $x=L$ 一段。故方程(12-176)中之 $x, 2x, \dots$ 等應各乘以 π/L ，因此方程(12-176)變為，

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12-179)$$

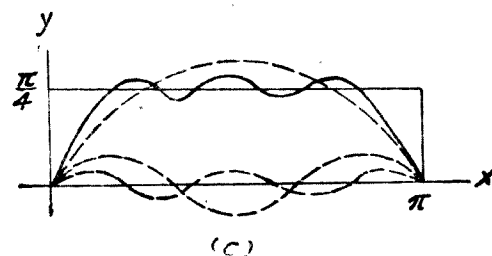
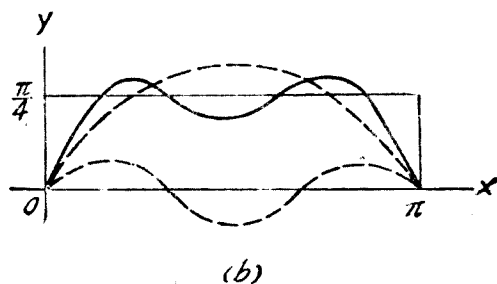
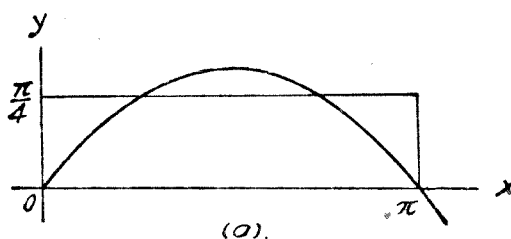


圖 12-37. 富氏級數應用之例

富氏級數所表述者原為週期函數，若其所表述函數之程限為 $x=0$ 與 $x=L$ (或 $x=\pi$)，則該函數可祇以方程 (12-179) 中之正弦項或餘弦項加一恆數項 a_0 表述之。故求結構之變位時，常可採用下列二方程之一：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12-180)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (12-181)$$

採用上列之方程時，無論其所表述者為結構之何種函數，該項級數必與結構之支承情形相符。試以兩端支承之簡單梁為例，如 $f(x)$ 表述荷重，彎矩，或線變位，當 $x=0$ 及 $x=L$ 時， $f(x)=0$ (即 $f(x)$ 之曲線經過 $x=0$ 及 $x=L$ 二點)，故於方程 (12-180) 中 $a_0=0$ ，於方程 (12-181) 中， $a_0 \neq 0$ 。如以 $f(x)$ 表述切力或角變位，則當 $x=0$ 及 $x=L$ 時， $f(x) \neq 0$ (即 $f(x)$ 之曲線不經過 $x=0$ 及 $x=L$ 二點)。故於方程 (12-180) 中 $a_0 \neq 0$ ，於方程 (12-181) 中 $a_0=0$ 。惟所採用之級數如無恆數 a_0 之項，計算常較簡便。

採用方程 (12-180) 之級數以求簡單梁之變位時，可以該項級數表述荷重，彎矩，或變位線。如用之以表述荷重或彎矩，則方程 (12-180) 中之恆數 a_0 為零，恆數 a_n 之值，可依荷重或彎矩之值定之。設 $f(x)$ 為荷重或彎矩之函數，若於 $x=0$ 與 $x=x_1$ 之間， $f(x)$ 之值為 $f_1(x)$ ，於 $x=x_1$ 與 $x=x_2$ 之間， $f(x)$ 之值為 $f_2(x)$ ，於 $x=x_2$ 與 $x=x_3$ 之間， $f(x)$ 之值為 $f_3(x)$ 等，而 $f(x)$ 之應用在 $x=0$ 與 $x=L$ 之間，則方程 (12-180) 中任何項之恆數 a_n 可用下列方程計算之 (將下列方程中之正弦改為餘弦即可用之以求 b_n 之值)。

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^{x_1} f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{x_2}^{x_3} f_3(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \dots \right] \quad (12-182)$$

於簡單梁若荷重係分佈荷重 w ，因表示 w 之曲線過 $x=0$ 及 $x=L$ 二點，故可用方程 (12-180) 表述之，其中 $a_0=0$ ，設如圖 12-1 所示，以荷重 w 之向下者為負號，則

$$f(x) = w = - \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12-183)$$

因

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w$$

故將方程 (12-183) 求積分三次及四次，並依結構之支承等情形而定其積分恆數，即可各得表示該結構角變位及線變位之方程。

若荷重係集中荷重，則求簡單梁之變位時，可用方程 (12-180) 之級數 ($a_0=0$) 表述彎矩，較為簡便，如是，則

$$f(x) = M = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12-184)$$

因

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

故將方程 (12-184) 求積分一次或二次，並定其積分恆數，即可各得表示該結構變位及線變位之方程。

無論荷重之情形如何，若用方程 (12-180)，($a_0=0$) 表述線變位，則不須求積分即可得表示簡單梁線變位之方程，較上述二法為直接而簡便，設圖 12-1 所示以線變位 y 之向下者為負號，則

$$f(x) = y = - \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12-185)$$

惟線變位 y 之值係未知項，故恆數 a_n 之值不能採用方程 (12-182) 以定之，但可採用總內功與總外功相等之定理①或用變分法 (calculus of variation) 使總內功與總外功之變分相等②以求之。若結構之 EI 為恆數，其由於彎矩之總內功 w 為，

① 此定理係克 (Clapeyron) 氏於 1833 年所創。

② 此法係力 (W. Ritz) 氏所創，常稱為力氏法。丁 (Timoshenko) 氏即採用此法，見所著材料力學第 1 冊 347 頁及第 2 冊 418 頁。

$$w = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (12-186)$$

若將方程(12-185)求微分二次得 d^2y/dx^2 之值如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} = & a_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{2\pi x}{L} + a_3 \left(\frac{3\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{3\pi x}{L} \\ & + \dots + a_n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (12-187)$$

方程(12-187)之平方所包含之項計有下列二種,即

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{n\pi x}{L}$$

及
$$2a_n a_m \frac{n^2 m^2 \pi^4}{L^4} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}$$

其中 $n \neq m$

用求積分法,可得,

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \cdot \frac{L}{2} = a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{2L^3}$$

及
$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

故以方程(12-187)之平方代入方程(12-186)中,求積分後所有含有 $a_n a_m$ 之項均為零,所餘者僅含有 a_n^2 之項,其係數且均係 $n^4 \pi^4 / 2L^3$,故方程(12-186)中 W 之值為,

$$\begin{aligned} W &= \frac{EI \pi^4}{4L^3} (1^4 a_1^2 + 2^4 a_2^2 + 3^4 a_3^2 + \dots + n^4 a_n^2) \\ &= \frac{EI \pi^4}{4L^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2 \end{aligned} \quad (12-188)$$

結構之總外功 W 視荷重之情形而定。設荷重為一向下之集中荷重, P 其所在點 x 之值為 x' , 則,

$$W = \frac{1}{2} (-P)y = \frac{P}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x'}{L} \quad (12-189)$$

使方程(12-189)與(12-188)相等,則二者中 n 為同一整數之項,必各相等,

故，

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} n^4 a_n^2 = \frac{P}{2} a_n \sin \frac{n\pi x'}{L}$$

由是得，

$$a_n = \frac{2PI^3}{\pi^4 EI} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi x'}{L}}{n^3} \quad (12-190)$$

若荷重為一向下之均佈荷重 w /公尺，其位置在 $x=x'$ 與 $x=x''$ 之間，則，

$$\begin{aligned} W &= \frac{(-W)}{2} \int_{x'}^{x''} y dx = \frac{W}{2} \int_{x'}^{x''} \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{W}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n L}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi x'}{L} - \cos \frac{n\pi x''}{L} \right) \end{aligned} \quad (12-191)$$

使方程 (12-191) 與 (12-188) 相等，則二者中 n 為同一整數之項必各相等，

故，

$$\frac{EI\pi^4}{4L^3} n^4 a_n^2 = \frac{W}{2} \cdot \frac{a_n L}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi x'}{L} - \cos \frac{n\pi x''}{L} \right)$$

由是得，

$$a_n = \frac{2wL^4}{\pi^5 EI} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi x'}{L} - \cos \frac{n\pi x''}{L}}{n^5} \quad (12-192)$$

以上列方程 (12-190) 及 (12-192) 中 a_n 之值代入方程 (12-185) 中，即各得簡單梁在一集中荷重 P 及一均佈荷重 w 下之豎向線變位方程。再求方程 (12-185) 對於 x 之紀數，即各得其角變位方程。無論荷重之位置如何，此項線變位及角變位方程，並可用之於 $x=0$ 與 $x=L$ 之任何一點。此其與材料力學中所得相同方程比較之優點。

上述用富氏級數求簡單梁之變位，已較前述之任何方法為複雜。若用之於荷重及支承情形稍為特殊之梁，尤為繁雜。但於結構學中此法有時仍不失為一便利之法。若計算結構之應力時，必將其變形或變位計入，則此法常較他法為便利。例如習題 3-17 附圖所示之梁，其上受有二豎向集中荷重 P_1 及 P_2 ，其兩端並有一壓力 C 。設 M' 為該梁任何截面由 P_1 及 P_2 之彎矩。

則其任何截面之彎矩 M 爲，

$$M = M' + Cy$$

故

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M' + Cy$$

上列微分方程之解答，亦相當複雜，如採用此法，以方程(12-185)表述 y 之值，則解答較爲簡易，且所得之答案亦較爲便用①。因所得答案之富氏級數收斂常極速，祇採其首一項或首二項，則所得之答案已頗爲精確。此外此法亦曾用之以解答靜不定之懸橋，所得之答案亦較用其他方法所得者爲簡便使用②。

例題 12-34。用富氏級數求簡單梁在全跨有均佈荷重 w /公尺時之豎向線變位方程。解答時以富氏級數表述均佈荷重 w /公尺。

解答：用方程(12-183)，

$$f(x) = w = - \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

因荷重係均佈且加於梁之全跨，故於 $x=0$ 與 $x=L$ 之間 $f_1(x) = f(x) = w$ ，用方程(12-182)，則，

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L w \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2w}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

故

$$n=1, \quad a_1 = \frac{4w}{\pi}$$

$$n=2, \quad a_2 = 0$$

$$n=3, \quad a_3 = -\frac{4w}{3\pi}$$

$$n=4, \quad a_4 = 0$$

$$n=5, \quad a_5 = \frac{4w}{5\pi}$$

代入 $f(x) = w$ 之方程中，得，

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = w = -\frac{4w}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

① 見丁 (Timosenko)氏所著材料力學，第2冊，420頁。

② 參閱 321 頁註。

逐次求積分，得，

$$V = EI \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{4wL}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) + A$$

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4wL^2}{\pi^3} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) + Ax + B$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{4wL^3}{\pi^4} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^4} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^4} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$$

$$EIy = -\frac{4wL^4}{\pi^5} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) \\ + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D$$

其中 A, B, C 及 D 為積分恆數，當 $x=0$ 得 $d^2y/dx^2=0$ 及 $y=0$ ，故 $B=D=0$ 。當 $x=L$ ，得 $d^2y/dx^2=0$ ，故 $A=0$ 。又當 $x=L$ ，得 $y=0$ ，故 $C=0$ 。因此，

$$V = \frac{4wL}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

$$M = \frac{4wL^2}{\pi^3} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

$$y = -\frac{4wL^4}{\pi^5 EI} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

試求梁中線 δ 之值，使 $x=L/2$ ，則，

$$\delta = -\frac{4wL^4}{\pi^5 EI} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right)$$

若取上列答案之首一項，則

$$\delta = -0.01311 \frac{wL^4}{EI}$$

若取上列答案之首二項，則

$$\delta = -0.01310 \frac{wL^4}{EI}$$

δ 之正確值為，

$$\delta = -\frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} = -0.01301 \frac{wL^4}{EI}$$

與前所得之答案比較，則所差均不及百分之一。

例題 12-35. 設一簡單梁受有一集中荷重 P ，其與左支點之平距離為 kL (即 $x' = kL$)，以富氏級數表述其彎矩而求其豎向線變位之方程。

解答： 如此例題所規定，則

$$f(x) = M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

於 $x=0$ 至 $x=kL$ 之間，

$$M = P(1-k)x$$

於 $x=kL$ 與 $x=L$ 之間，

$$M = Pk(L-x)$$

用方程(12-182)，則

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \left[\int_0^{kL} P(1-k) \times \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{kL}^L Pk(L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \left[\frac{2PL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} - \frac{2P}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{2PkL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{2Pk}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{kL} \\ &\quad + \left[-\frac{2PkL}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{2PkL}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{2Pk}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{kL}^L \\ &= \frac{2PL}{n^2\pi^2} (\sin nk\pi - k \sin n\pi) \end{aligned}$$

$$n=1, \quad a_1 = \frac{2PL}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1^2} \sin k\pi$$

$$n=2, \quad a_2 = \frac{2PL}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2^2} \sin 2k\pi$$

$$n=3, \quad a_3 = \frac{2PL}{\pi^2} \cdot \frac{1}{3^2} \sin 3k\pi$$

代入 $f(x) = M$ 之方程中，得，

$$\begin{aligned} M &= \frac{2PL}{\pi^2} \left(\sin k\pi \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2^2} \sin 2k\pi \sin \frac{2\pi x}{L} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3^2} \sin 3k\pi \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right) \end{aligned}$$

使 $M = EI (d^2y/dx^2)$ ，求積分二次，並定求積分恆數，即得，

$$y = -\frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \left(\sin k\pi \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2^4} \sin 2k\pi \sin \frac{2\pi x}{L} \right.$$

$$+ \frac{1}{3^4} \sin 3k\pi \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots)$$

因 $w = d^2M/dx^2$, 故求 $f(x) = M$ 對於 x 之微分二次, 即可得

$$P = \frac{2P}{L} \left(\sin k\pi \sin \frac{\pi x}{L} + \sin 2k\pi \sin \frac{2\pi x}{L} + \sin 3k\pi \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$$

試求荷重 P 在梁中線時梁中線 δ 之值, 使 $x/L = k = \frac{1}{2}$, 因 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{3\pi}{2} = \dots = -1$, $\sin \pi = \sin 2\pi = \dots = 0$, 故

$$\delta = -\frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right)$$

若祇取上列答案之首一項, 則,

$$\delta = -0.0205 \frac{PL^3}{EI}$$

若取上列答案之首二項, 則,

$$\delta = -0.0207 \frac{PL^3}{EI}$$

δ 之正確值爲,

$$\delta = -\frac{1}{48} \frac{PL^3}{EI} = -0.0208 \frac{PL^3}{EI}$$

與前所得之二答案比較, 則前者之差約爲 1.5%, 後者之差約爲 0.25%。

例題 12-36. 與例題 12-35 相同, 惟以富氏級數表述其豎向線變位

δ 。

解答: 如此例題所規定, 則,

$$f(x) = y = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

其中恆數 a_n 之值可於方程 (12-190) 使 $x'/L = k$ 求得, 故,

$$a_n = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \cdot \frac{\sin nk\pi}{n^4}$$

代入 $f(x) = y$ 之方程中, 得,

$$y = -\frac{2PI^3}{\pi^4 EI} \left(\sin k\pi \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^4} \sin 2k\pi \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3^4} \sin 3k\pi \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right)$$

與例題 12-35 所得之答案相同，使 $P = w d(kL)$ 代入上列方程中，以 $k=0$ 及 $k=1$ 為極限求積分，得簡單梁全跨有均佈荷重 w /公尺時 y 之值如下：

$$y = -\frac{4wIA}{\pi^5 EI} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^5} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

與例題 12-34 所得之答案相同。若祇簡單梁之 $x' = k'L$ 與 $x'' = k''L$ 之間一段有均佈荷重 w /公尺，則上述求積分之極限為 $k=k'$ 及 $k=k''$ ，可得，

$$y = -\frac{2wIA}{\pi^5 EI} \left[(\cos k'\pi - \cos k''\pi) \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2^5} (\cos 2k'\pi - \cos 2k''\pi) \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3^5} (\cos 3k'\pi - \cos 3k''\pi) \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots \right]$$

其中恆數 a_n 之值為，

$$a_n = \frac{2wIA}{\pi^5 EI} \cdot \frac{\cos nk'\pi - \cos nk''\pi}{n^5}$$

於方程(12-192)中使 $x' = k'L$ ， $x'' = k''L$ ，則所得 a_n 之值與上列者相同。

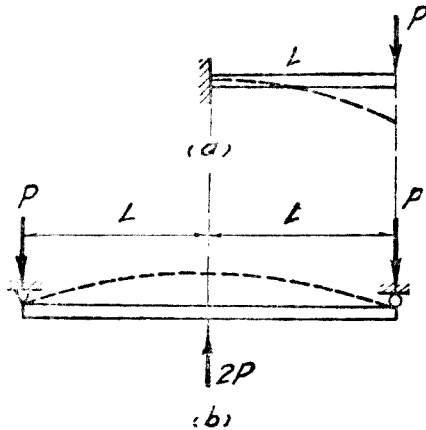
習題 12-73. 設一簡單梁受有分佈荷重 $w = w_0 \sin \frac{n\pi x}{L}$ ，其中 w_0 為一恆數，求表述其切力，彎矩，角變位，及線變位之方程。

習題 12-74. 與例題 12-34 相同，惟解答時以富氏級數表述其彎矩 M 。

習題 12-75. 與例題 12-34 相同，惟解答時以富氏級數表述其豎向線變位 δ 。

習題 12-76. 設一端固定之梁，其他一端受有一集中荷重 P 。以富氏級數表述其豎向線變位 δ 。求 δ 之方程，並以所得荷重點 δ 之值與 δ 之正確值比較。

提示： 注意附圖 (a) 及 (b) 二梁變位線相似之點，則豎向線變位之方程可由例題 12-35 之答案求得，試以此法校核所求得之答案。



習題 12-76.

12-16. 普通橋梁桁架之變位 研究普通橋梁桁架之剛勁及計算其需要之加拱（見 12-16 節）時，常祇計算其全跨有荷重時下弦中線節點之豎向線變位。所用之荷重包括均佈呆荷重及相當均佈活荷重與衝擊力之全部或一部。若桁架中所有節桿之單位應力為已知，普通型式橋梁桁架中線節點在上述荷重下之豎向線變位，可以方程表之。惟腹桿係按最大切節切力計算，故腹桿如離桁架中線愈近，則其在全跨有均佈荷重時之單位應力亦愈較其最大單位應力為小。因橋梁在機車荷重下之最大彎矩圖之靠近兩端部分，較其在均佈荷重下之最大彎矩圖稍大，故弦桿如離桁架中線愈遠，則在均佈荷重下之單位應力亦愈較其最大單位應力為小。由是可知：在任何同一荷重下，橋梁桁架中所有拉桿及壓桿之單位應力，決非同時各自相等，故求下列之方程時，祇可各假設一平均數以便計算。

試以有副豎桿之下承式倭氏桁架為例，其深度為 h ，節間長度為 p ，節間數為 m ，設所有拉桿之平均單位應力為 s_t ，所有壓桿之平均單位應力為 s_c ，求其下弦中線節點之豎向線變位。研究倭氏桁架中腹桿之布置，可知節間數 m 為 4 之倍數時，其中線副豎桿在單位虛荷重下之應力 u 為 0，其拉力及壓力斜桿（包括二端透桿）之數均為 $m/2$ 。若節間數 m 為 2 之倍數而非 4 之倍數，則其中線副豎桿在單位虛荷重下之應力 u 為 +1，其拉力斜桿之數為

$(m-2)/2$ 。壓力斜桿之數為 $(m+2)/2$ 。圖 12-38 示一有副豎桿之傑氏桁架；其深度為 h ，其節間數 m 為4之倍數①，其中諸桿在下弦中線節點有單位虛荷重時之應力 u 各記於該桿之上，所有副豎桿之 u 均為零，所有斜桿之數量均為 $(\sqrt{h^2+p^2})/2h$ ，上下弦桿之 u 各如圖所示。上弦桿之應力 u 為一算術級數，故由是可求得所有上弦桿應力 u 之總和 Σu 為，

$$\text{上弦之} \quad \Sigma u = -\frac{m^2}{8} \frac{p}{h} \quad (12-193)$$

同此，所有下弦桿應力 u 之總和 Σu 亦為，

$$\text{下弦之} \quad \Sigma u = +\frac{m^2}{8} \frac{p}{h} \quad (12-194)$$

$$\text{拉力斜桿之} \quad \Sigma u = +\frac{m}{4h} \sqrt{h^2+p^2} \quad (12-195)$$

$$\text{壓力斜桿之} \quad \Sigma u = -\frac{m}{4h} \sqrt{h^2+p^2} \quad (12-196)$$

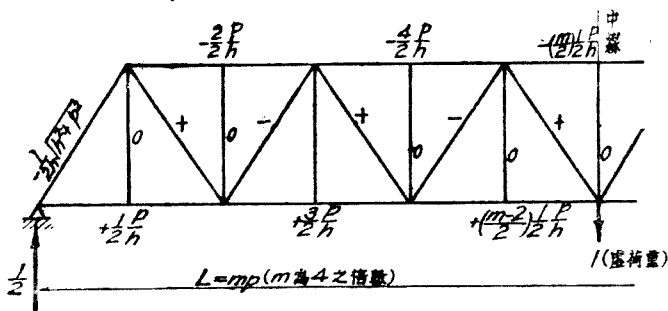


圖 12-38. 傑氏桁架在單位虛荷重下之應力

用方程(12-64)，將上列諸項計入，並化簡，可得，

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{m^2 p^2}{8hE} (s_t + s_c) + \frac{m(h^2 + p^2)}{4hE} (s_t + s_c) \\ &= \frac{(m+2)m p^2 + 2mh^2}{8h} \cdot \frac{s_t + s_c}{E} \quad (12-197) \end{aligned}$$

如欲求豎向線變位為最小時桁架之深度 h 之值，求 δ 對於 h 之偏紀數，使其值為零，即可得所求 h 之值，故，

① 節間數 m 為3之倍數而非4之倍數時之公式求法，列為習題 12-77。

$$\frac{\partial \delta}{\partial h} = -\frac{(m+2)mp^2}{h^2} + 2m = 0$$

$$h = p \sqrt{\frac{m}{2} + 1} \quad (12-198)$$

注意 m 之值必為 4 之倍數。設 m 為 4, 8, 12, 16 及 20 等值, 可得 h 之值各為 $1.73p$, $2.24p$, $2.65p$, $3p$ 及 $3.32p$ 等。

於剛勁最大之桁架, 其所需之材料亦最少, 可證明如下。假設桁架中所有桿之單位應力均為 s , 則其總內功 W 為,

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{sl}{E} \cdot sA = \frac{s^2}{2E} \Sigma Al \quad (12-199)$$

設桁架全跨有均佈荷重 w /公尺, 其節點荷重均為 wP , 其諸節點之豎向線變位各為 δ , 則總外功 w 為,

$$w = \frac{1}{2} \sum wP\delta = \frac{wP}{2} \Sigma \delta \quad (12-200)$$

使上列二方程相等, 得,

$$\Sigma Al = \frac{EwP}{s^2} \Sigma \delta \quad (12-201)$$

因 E, w , 及 p 均係恆數, 而 s 亦假設係恆數, 故 $\Sigma \delta$ 愈小, 則 ΣAl 亦愈小。因 Al 為每一桿之體積, 故 ΣAl 為全桁架之體積, 所以桁架之剛勁愈大, 則所需之材料亦愈小。

方程 (12-197) 中之第一項係桁架由於所有弦桿長度改變之線變位 δ_s , 第二項係桁架由於所有腹桿長度改變之線變位 δ_c , 後者與前者之比為,

$$\frac{\delta_s}{\delta_c} = \frac{2}{m} \left[1 + \left(\frac{h}{p} \right)^2 \right] \quad (12-202)$$

設 $h/p = 1.5$ 並使 m 之值為 4, 8, 12, 16, 20 等, 則 δ_s/δ_c 之值各為 162.5%, 81.3%, 54.2%, 40.6% 及 32.5%。因腹桿承受桁架之切力, 而弦桿承受桁架之彎矩, 故 δ_s 為桁架由於切力之線變位, 而 δ_c 為桁架由於彎矩之線變位。因此, 桁架之深度愈小, 或其節點數愈多, 則其由於切力之變位與其由於彎矩之變位之比亦愈小, 此亦與前此論直梁由於切力之變位時所得之結論, 大致相同。惟桁架中 δ_s/δ_c 之比, 較直梁中者為大, 其主要原因係直梁之腹部係實體, 故承受切力, 綽有餘裕, 而桁架之腹桿適足以承受其最大切力, 並無幾

許餘裕之材料也。

試以上得桁架由於弦桿長度改變之線變位 δ_b 與直梁由於彎矩之線變位 δ_c 比較。設一簡單梁之深度為 h 跨長為 L 或 mp ，全跨受有均佈荷重 w 公尺，其中線之豎向線變位 δ_B 為，

$$\delta_b = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI} \quad (12-203)$$

因

$$s = \frac{My}{I} = \frac{Mh}{2I} \quad \text{及} \quad M = \frac{wL^2}{8}$$

故

$$w = \frac{16Is}{hL^2} \quad (12-204)$$

代入方程(12-203)中，得，

$$\delta_b = \frac{5L^2s}{24hE} \quad (12-205)$$

設 $s_c = s_t = s$ ，由方程(12-197)，得，

$$\delta_c = \frac{I^2s}{4hE} \quad (12-206)$$

故

$$\delta_c = \frac{6}{5} \delta_b \quad (12-207)$$

由是可知桁架由於弦桿之線變位與直梁由於彎矩之線變位約略相等。

因直梁變位之計算，常較桁架變位之計算較為簡易。故工程師常欲將平行弦桁架視作一直梁而計算其線變位。其最大之困難即直梁截面之慣性矩 I ，於桁架中無直接相符之值，多數工程師均以爲桁架中慣性矩 I 之有效值即等於其上下弦桿之截面積乘以其中心距之平方，將腹桿之影響，完全略去，如是則等於祇計算桁架由於彎矩之變位不計算其由於切力之變位，故所得之結果不與實際相符。蓋直梁由切力之變位常係極小，可以略去，而桁架由切力之變位常較大，不可略去。因切力變位之計算法與彎矩變位之計算法根本不同，故欲用直梁之彎矩變位計算法而求桁架之彎矩及切力二項變位之總量，於理實不可能，惟於深度極小而跨度極長之桁架，例如懸橋之加勁桁架，若將其上下弦桿之 I 稍爲改小，以包含腹桿對於變位之影響，則作初步計算而結果不必十分精確時，用直梁之變位方程以計算桁架之變位，亦常稱簡易便利。

習題 12-77. 設一有副豎桿之倭氏桁架，其節間數為 2 之倍數，而非 4 之倍數。求：(a) 表示上弦中線節點之豎向線變位之方程。(b) 桁架剛勁爲最

大時其深度 h 與節間長度 p 之比，(c) 其由於所有弦桿長度改變之線變位 δ_c 與其由於腹桿長度改變之線變位 δ_a 之比，及(d)以 δ_c 之值與直梁由於彎矩之線變位 δ_b 比較。

習題 12-78. 與習題 12-77 相同，惟桁架改為白(Pratt)氏桁架，其節間無須有任何限制。

12-17. 長跨橋梁之變位 上述求結構變位之諸法，多可用之以求第十章及第十一章所述四種長跨橋之變位，如祇求其某一截面或某一節點之變位，自以虛功法為最簡便，且其應用亦無須另加解釋。如須求其全長或所有節點之變位，則採用上述之角變法或圖解法時，尚有須注意之點，其關於懸臂橋者已詳見 12-10 節及圖 12-23，無須贅述外，茲將其關於三鉸拱橋，三鉸加勁懸橋，及威氏桁架橋者，分條述之如下：

(1) 三鉸拱骨橋 三鉸拱骨橋所受之應力有三：即彎應力^①，直接應力，及切應力。故其變位亦可分為三項計算，其由切應力之變位，因係極小，故概行略去，其由於直接應力之變位，常不如其由於彎應力者之重要，亦常略去，且前者計算之步驟頗為繁難^②。故以下所論，祇以三鉸拱骨橋變位之由於彎應力者為

① 惟三鉸拋物線拱骨橋之全跨有均佈荷重時，其任何截面之彎矩為零，故其變位祇有由於直接應力及切應力二項。

② 參閱史 (C. M. Spofford) 氏所著之連續結構及拱橋之理論 (Theory of Continuous Structures and Arches), 173 至 179 頁。此外費 (Bernhard Fritz) 氏所著拱骨橋之理論與計算 (Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger) 一書，論拱骨橋之變位極詳，讀者可參考

限。

圖 12—39 (a) 示一三鉸拱骨及其在一集中荷重 P 下之變位線。該變位線於鉸 C 有一折點，故採用角變法以求其豎向線變位時，鉸 C 處必有一集中彈性荷重，其值等於鉸 C 之角變 $d\theta_c$ 。惟 $d\theta_c$ 之值不易求得，故求三鉸拱骨之豎向線變位圖時，可採用下法^①。既求得三鉸拱骨之彎矩 M 圖之後，可假設鉸 C 之位置係固定，用角變法求三鉸拱骨左右兩部 AC 及 CB 由於彎應力之變位線。如是則 AC 及 CB 可各視成一簡單支承之曲梁，如圖 (b) 所示，其共軛梁各為一簡單梁（參閱圖 12—10），其彈性荷重 $d\theta/dx$ 為 $M/EI \cos \alpha$ [參閱方程 (12—62)]， M/H 圖見圖 (b)， α 為拱軸於任何點之傾度，均如圖 (c) 所示。作圖 (c) 共軛梁之彎矩圖，即得其豎向線變位圖如圖 (d) 之曲線所示。再用虛功法，以單位虛荷重置於鉸 C ，求其豎向線變位 δ_c 。故圖 (c) 之支點 C 亦必因之向下移動 δ_c ，得共軛梁 AC 及 CB 之豎向線變位圖為一三角形。以此三角形與前得之曲線相加，得圖 (d) 之有豎線部分，即此三鉸拱骨橋在荷重 P 下之豎向線變位圖，其底線為 $AC'B$ 。若以一平直線為底線，則此三鉸拱骨橋之豎向線變位圖如圖 (e) 所示。圖 (f) 示荷重 P 在鉸 C 時之豎向線變位圖，係由二曲線及一三角形相加而成。求圖 (d) 及 (f) 之曲線時，可用 12—3 節 (4) 條，所述之圖解法。如拱軸係拋物線圓弧等，並可用數解法求得圖 (d) 及 (f) 中曲線之方程，其計

① 此法係著者所創。

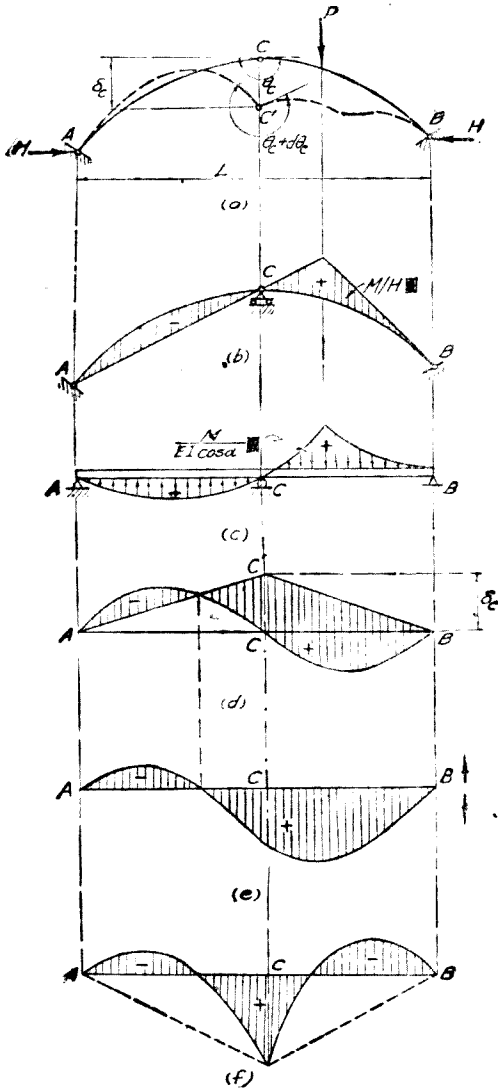


圖 12-39. 三鉸拱骨橋之變位

算或較用虛功法爲簡便^①。

若三鉸拱骨橋係對稱式，拱軸係一拋物線，而其任何正截面之 $I \cos \alpha$ 係一恆數 I_0 。設其右半（即 $0 < k < 1/2$ ）任何點 D （圖 12—40）有一豎向集中荷重 P ，則任何 E 之豎向線變位 δ_{EV} ，可用虛功法求得如下：

$0 < k_1 < k$ [圖 12—40 (a)] :

$$\delta_{EV} = \frac{Pk_1L^3}{30EI_c} [5(1-k)(2k-k^2-k_1^2) + 5k(2k^2-k^3+2k_1^2-k_1^3)-6k] \quad (12-208)$$

$k < k_1 < 1/2$ [圖 12—40 (b)] :

$$\delta_{EV} = \frac{PkL^3}{30EI_c} [5(1-k_1)(2k_1-k_1^2-k^2) + 5k_1(2k_1^2-k_1^3+2k^2-k^3)-6k_1] \quad (12-209)$$

$k_1 > 1/2$ [圖 12—40 (c)] :

$$\delta_{EV} = \frac{PkL^3}{30EI_c} [(1-k_1)(10k_1-5k_1^2+5k^2-5k^3-1) + 5k_1(2k_1^2-k_1^3-1)] \quad (12-210)$$

注意將方程 (12—208) 中 k 與 k_1 之位置互換，即得方程 (12—209)。若荷重 P 之位置改變，但常在拱之右半（即 $0 < k < 1/2$ ），則此三鉸拱骨之 $1/4$ 點， $1/2$ 點，及 $3/4$ 點（圖 12—40 d）之豎向線變位之方程，可由上列三方程求得如下：

$1/4$ 點之 δ_{EV} , ($k_1=1/4, k < 1/4$) :

① 參閱 337 頁註②所舉史 (Spofford) 氏之書。

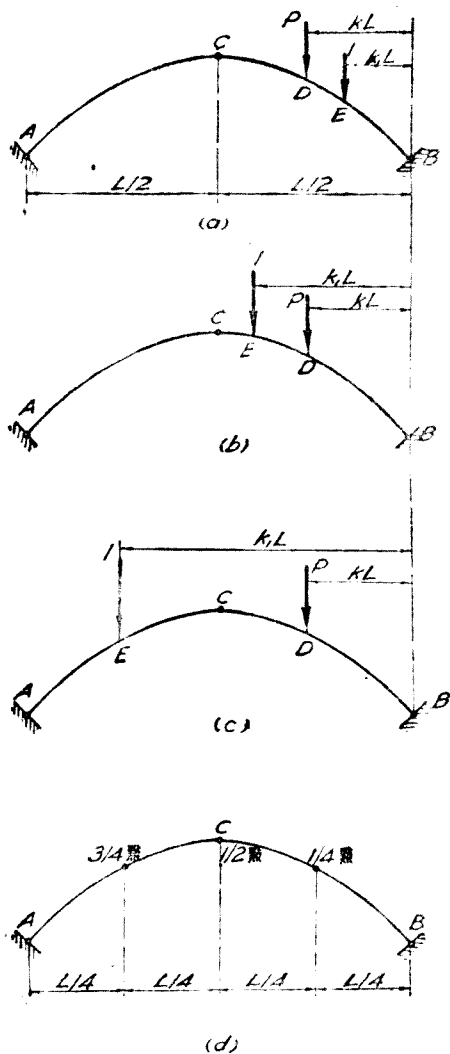


圖 12-40 三鉸拋物線拱之變位

$$\delta_{EV} = \frac{PL^3}{480EI_C} \cdot \frac{K}{16} [71 - 320K^2(1+K)] \quad (12-211)$$

1/4 點之 δ_{EV} , ($k_1=1/4, 1/4 < k < 1/2$):

$$\delta_{EV} = \frac{PL^3}{480EI_C} \cdot \frac{1}{16} [-20 + 311k - 320k^2 (3 - 3k + k^2)] \quad (12-212)$$

1/2 點之 δ_{EV} , ($k_1=1/2, k < 1/2$):

$$\delta_{EV} = \frac{PL^3}{480EI_C} \cdot k [-3 + 40k^2(1-k)] \quad (12-213)$$

3/4 點之 δ_{EV} , ($k_1=3/4, k < 1/2$):

$$\delta_{EV} = \frac{PL^3}{480EI_C} \cdot \frac{k}{1} [-49 + 320k^2(1-k)] \quad (12-214)$$

若荷重 P 置於三鉸拱骨之任何點，則上列四方程中 $PL^3/480EI_C$ 之係數如下表：

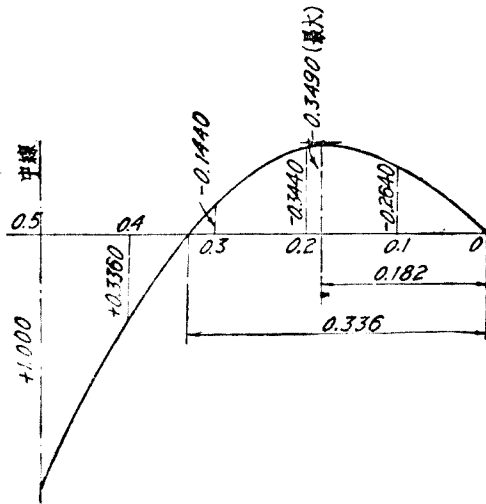
表 XXVIII. $\frac{PL^3}{480EI_C}$ 之係數 (+ 指向下之線變位)

荷重位置 (k)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\delta_{EV} \left(k_1 = \frac{1}{4} \right)$	+0.4218	+0.6955	+0.6393	+0.2530	-0.2813	-0.4570	-0.5408	-0.4845	-0.2883
$\delta_{EV} \left(k_1 = \frac{1}{2} \right)$	-0.2640	-0.3440	-0.1440	+0.3360	+1.0000	+0.3360	-0.1440	-0.3440	-0.2640

若荷重係均佈荷重 w /公尺，可使 $w d(KL) = P$ ，視均佈荷重之位置如何代入上列之適宜方程中，用求積分法求其變位之方程。若拋物線三鉸拱骨全跨有均佈荷重，則拱軸任何點之彎矩為零。因此，其任何點由於彎應力之變位亦為零，試以中線之豎向線變位為例，於方程 12-213) 中，使 $P = wd(KL) = wLdk$ ，則，

$$\begin{aligned}\delta_{EV} &= \frac{2wL^4}{480EI_C} \int_0^{\frac{1}{2}} (-3k + 40k^3 - 40k^4) dk \\ &= \frac{2wL^4}{480EI_C} \left[-\frac{3k^2}{2} + 10k^4 - 8k^5 \right]_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2wL^4}{480EI_C} \left(-\frac{3}{8} + \frac{10}{16} - \frac{8}{32} \right) = 0\end{aligned}$$

例題 12-37. 一對稱式三鉸拱骨橋，跨長為 L ，拱軸係一拋物線，任何截面之 $I \cos \alpha$ 係一恆數 I_C 。設中線鉸有一向下集中荷重 P ，若祇計算其由於彎應力之變位，求表述任何點 E 豎向變位之方程，並作豎向變位圖。



例題 12-37.

解答： 於圖 12-40(a) 中，若 $k=0.5$ ，則與此例題之情形相符，故使方程(12-208)中之 $k=0.5$ ，即得所求表述 δ_{EV} 之方程。

$$\begin{aligned}\delta_{EV} &= \frac{PL^3}{30EI_C} \left[5 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - k^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 5 \times \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 2k^2 - k^3 \right) - 6 \times \frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{Pl^3}{480EI_c} \cdot k_1[-3+40k_1^2(1-k_1)]$$

其中 k_1 之值不能大於 0.5。注意若將上列方程中之 k_1 (變位點) 改為 k (荷重點), 則此中線較變為變位點, 即得方程(12-213), 其理由見以下之第 12-19 節, 故作豎向線變位圖時, 可採用表 XXVIII 中之值。因此拱及荷重均係對稱式, 故附圖祇示其右半之豎向線變位圖, 其豎距係 $Pl^3/480EI_c$ 之係數。

習題 12-79. 拱橋與例題 12-37 相同, 設 $k=0.25$ 點有一向下集中荷重 P , 並祇考慮其由於彎應力之變位, 求表述任何 B 點豎向線變位之方程, 並作豎向線變位圖。

習題 12-80. 用圖 12-39 所示之角變法解答例題 12-37。

(2) 三鉸桁架拱橋 求三鉸桁架拱橋之線變位時, 可採用

下列諸法①:

(A) 用角變法如圖 12-41(a) 所示, 其鉸 C 處之角變, 必先求得。若所求者係下弦之變位, 則圖 (a) 中 θ_c 之角變 $d\theta_c$ 可各用一單位虛彎矩加於 aC 及 bC 桿求之。亦可如圖 (b) 所示, 以一虛桿聯 a 及 b 二節點, 用虛功法求該二節點間之相對線變位, 即得該虛桿長度之改變, 於是可用前述之幾何學或公式以求 $d\theta_c$ 之值。求變位時之桿鏈, 可採用任何形式。

(B) 求下弦之線變位時, 亦可用第 12-11 節所述加桿之法, 如圖 12-41(c) 所示, 並以該圖中所示角度之改變為彈性荷重。

(C) 用圖 12-39 所示之法。先假設中部鉸之位置係固定,

① 尚有另一法, 見薩鮑 (Sutherland and Bowman) 二氏所著 結構理論

188 頁, 惟此法須記憶公式, 故不列入。

將桁架拱之左右二半各視成一簡單跨而求其線變位，再以虛功法求中部鉸之豎向線變位，作三角形豎向線變位圖，與前得桁架拱左右二半之豎向線變位圖相加。

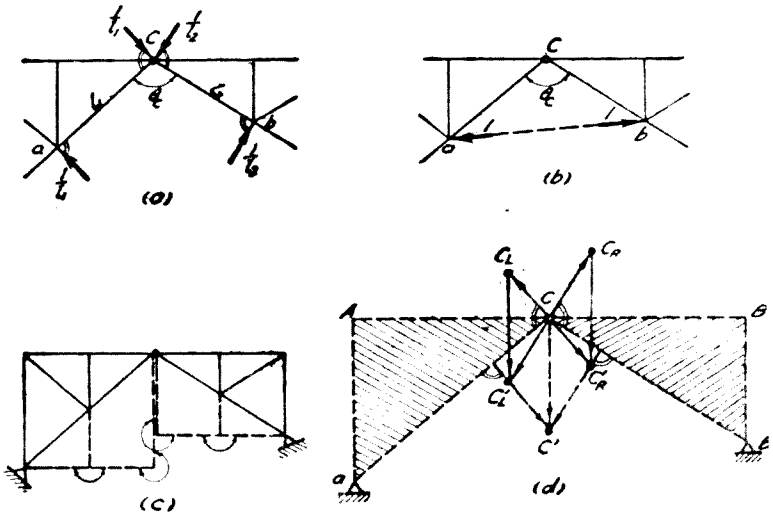


圖 12-41 三鉸桁架拱橋之變位

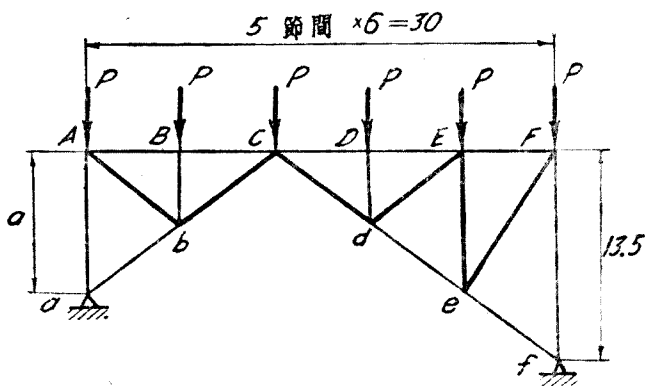
(D) 用桿鏈之圖解法，其鉸 C 處角變位可用圖 12-11 (a) 或 (b) 之法求之。

(E) 用維氏移位圖，如圖 12-41 (b) 所示，先用虛功法求節點 a 及 b 間之相對線變位，庶可為桁架之全部，作一維氏移位圖。作維氏移位圖時，可假設任一端豎桿之傾度及該端支點之位置係不變，因變位時三鉸拱兩端鉸支點間之距離不改變，故採用轉動改正法後，其他一端支點之平向線變位，亦必同時為零，無須再用移動改正法。

(F) 用維氏移位圖，如圖 12-41(d) 所示，先假定桁架之左右二半於鉸 C 處分開，並假定 Aa 與 Bb 二豎桿之傾度及節點 a 與 b 之位置均不變，為桁架之左右二半各作一維氏移位圖。如是，則鉸 C 各移至 C'_L 及 C'_R 。若採轉動改正法，將左右二半之變位桁架各繞支點 a 及 b 向下轉動，使 C'_L 及 C'_R 相交於 C' ，則 CC' 即鉸 C 之絕對線變位。故經過 C'_L 及 C'_R 二點各作一線分別與 aC 及 bC 垂直，其相交點即 C' 。但可以使左右二半之原來桁架各繞支點 a 及 b 向上轉動以代替上述變位桁架之向下轉動。因此，左右二半 C 鉸之原來位置各移至 C_L 及 C_R ，而鉸 C 之絕對線變位為 $C_L C'_L$ 及 $C_R C'_R$ 。注意 $CC' C'_L C_L$ 及 $CC' C'_R C_R$ 各係一平行四邊形，故 $CC_L = C' C'_L$ ， $CC_R = C' C'_R$ ， $C_L C'_L = C_R C'_R = CC'$ 。依前述摩爾轉動圖之作法，各以 CC_L 及 CC_R 為桁架左右二部之下弦，作左右二半之小桁架，其上之節點，即表示桁架諸節點之原來位置。注意左半之摩爾轉動圖相當於原來左半逆時針向之轉動 90 度者，其右半之摩爾轉動圖，相當於原來右半順時針向轉動 90 度者。

上述六種方法中，前三法係圖解法，後三法係數解法，採用均極簡便。

習題 12-81。附圖示一三鉸桁架拱橋，其上弦諸節點均有荷重 P 。因此，其拉桿之單位應力為 1.2，壓桿之單位應力為 0.8， $E=2,100$ ，均以公噸/平方公分計。試以 $A-b-C-d-E-e-F$ 為桿鏈，以數解法求桿鏈上諸節點之豎向線變位。



習題 12—81.

習題 12—82. 桁架及荷重與習題 12—81*相同。用上述(B)法(加桿法),求下弦所有節點之豎向線變位。

例題 12—38. 附圖(a)示一三鉸桁架拱橋,在所示之荷重下,拉桿之單位應力為 1.2,壓桿之單位應力為 0.8, E 為 2,100 均以公噸/平方公分計。用上述之(c)法(圖 12—39 所示之法)求其下弦節點 $C, b,$ 及 d 之豎向線變位。

解答: 先用虛功法求節點 C 之豎向線變位 δ_{CV} 。附圖(b)示節點 C 有一向下單位荷重時各桿之應力 u , 故,

$$\delta_{CV} = \frac{4(-0.8) \left(-\frac{5}{6}\right) (7.5)}{2,100} = +\frac{20}{2,100} = +0.009524 \downarrow \text{公尺}$$

再依圖 12—39 所示之法,以一支點置於鉸 C , 如附圖(c)所示。因祇需計算節點 b 及 d 之豎向線變位 δ'_{bV} 及 δ'_{dV} , 故於此例題可採用虛功法而不必採用角變法。以一向下單位虛荷重分別置於節點 b 及 d , 則各桿之應力 u 如附圖(c)。故,

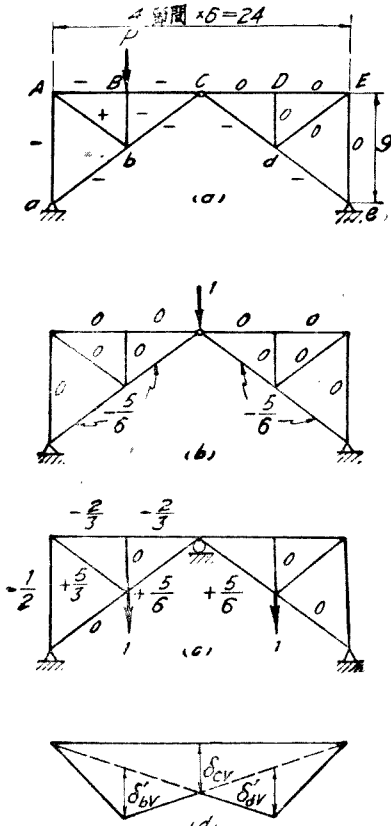
$$\begin{aligned} \delta'_{bV} &= \frac{-0.8 \left[9 \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times 0 \left(-\frac{2}{3}\right) \right] + 7.5 \left(+\frac{5}{6}\right) [(+1.2) + (-0.8)]}{2,100} \\ &= +\frac{12.5}{2,100} = +0.005952 \downarrow \text{公尺} \end{aligned}$$

$$\delta'_{dV} = \frac{-0.8 \times 7.5 \times \left(+\frac{5}{6}\right)}{2,100} = -0.002381 \uparrow \text{公尺}$$

$$\delta_{bV} = \frac{1}{2} \times 0.009524 + 0.005952 = +0.010714 \downarrow \text{公尺}$$

$$\delta_{dV} = \frac{1}{2} \times 0.009524 - 0.002381 = +0.002381 \downarrow \text{公尺}$$

下弦之豎向線變位圖如附圖(d)所示。



例題 12-38.

習題 12-83. 桁架及荷重與習題 12-81 相同 用上述之(c)法(圖 12-39)求上弦所有諸節點之豎向線變位。

習題 12-84. 用桿鏈圖解法解答習題 12-81。

例題 12-39. 桁架及荷重與例題 12-38 相同。用上述之圖解法(E)求其所有節點之線變位。

解答：附圖(a)示諸桿在所示荷重下之 $EI\delta l$ ，附圖(b)示求 b 及 d 二節間之相對線變位 δ_{db} 之虛荷重及諸桿之應力 u ，故，

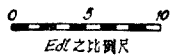
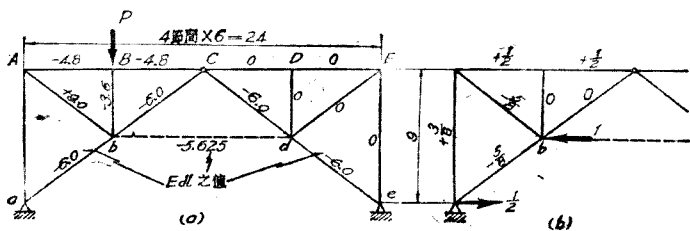
$$E\delta_{db} = 2(-4.8)\left(+\frac{1}{2}\right) + (9.0-6.0)\left(-\frac{5}{8}\right) + (7.2)\left(+\frac{3}{8}\right) \\ + (-6.4)\left(-\frac{5}{8}\right) = -4.8 - 1.875 - 2.7 + 3.75 = -5.625 \text{ (縮短)}$$

依上述之(E)法，假定端豎桿 Aa 之傾度及節點 a 之位置均不變，為桁架之全體作一維氏移位圖如附圖(c)所示。因 bd 虛桿之長度改變，既依節點(e)之平向線變位為零之情形算定，故附圖(c)中節點 e 之移位點 e' 與其原來位置之 a 點，係在同一豎線上，即節點 e 之平向線變位為零，故祇須採用轉動改正法，以 ae' 為跨長，作一摩爾轉動圖，即得所有諸節點之原來位置。注意，由此例題所得 δ_{cV} ， δ_{bV} ，及 δ_{dV} 之值，與例題 12-38 中所得者相同。

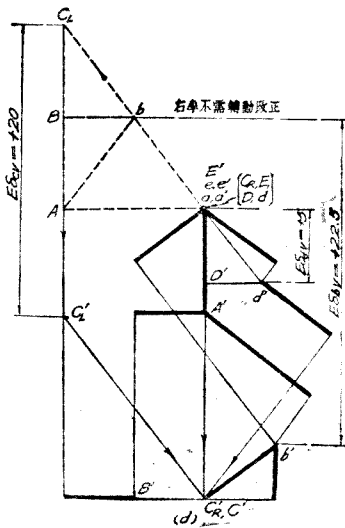
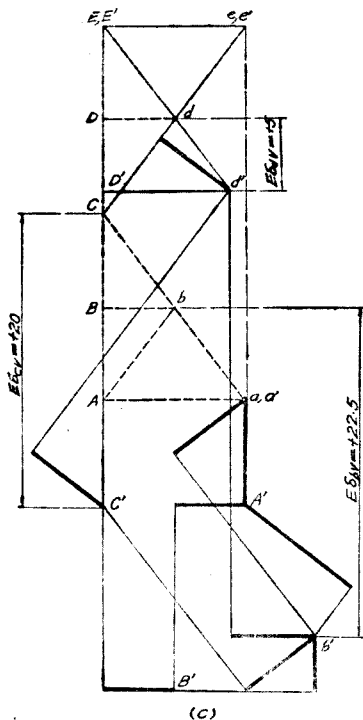
習題 12-85. 桁架及荷重與習題 12-81 相同，用上述之圖解法(E)，求所有節點之線變位。

例題 12-40. 桁架及荷重與例題 12-39 相同，用上述之圖解法(F)，求所有節點之線變位。

解答：解答見附圖(d)，作維氏移位圖時，於桁架之左半假設端豎桿 Aa 之傾度及節點 a 之位置均不變。於桁架之右半，假設端豎桿 Be 之傾度及節點 e 之位置均不變，惟附圖中之 C''_R 點與 C' 點係偶然相合。由圖 12-41(d) 可知鉸 C 之實際線變位 C'' 與桁架右半節點 C'_R 之相對線變位相同。因此，端豎桿 Be 傾度不變之假定，與實際情形相符。故桁架之右半不需轉動改正，其摩爾轉動圖即係 a 點一點，桁架左半之摩爾轉動圖如附圖(d)所示，相當於原來桁架左半之逆時針向轉動 90 度者，此例題所得 δ_{cV} δ_{bV} 及 δ_{dV} 之值，與例題 12-38 及 12-39 者相符。



$\delta_{CV} = +0.0095244$ 公尺
 $\delta_W = +0.010714$ 公尺
 $\delta_{SV} = +0.0023811$ 公尺



例題 12-39 及 12-40.

習題 12-86. 桁架及荷重與習題 12-81 相同，用上述之圖解法(F)，求所有節點之線變位。

(3) 三鉸加勁懸橋 三鉸加勁懸橋之變位有四項，即：(1) 由於加勁梁或桁架之彎應力，(2) 由於懸索之拉應力，(3) 由於兩端支塔之彎應力，(4) 由於吊索之拉應力。第(4)項常一概略去。若懸索可以在其兩端支塔之頂移動，則支塔之彎應力為零，如是則第(3)項可以略去。至第(2)項亦不如第(1)項之重要，惟懸橋全跨有均佈荷重時，加勁梁桁架之彎應力為零（參閱第 10—11 節之討論），故懸橋之變位祇有第(2)項一項，茲祇述第(1)及第(2)二項變位之求法如下：

由第十章之討論，可知三鉸加勁懸橋相當於倒置之三鉸拱骨橋，故前者加勁梁或桁架由於彎應力之變位計算，亦與三鉸拱骨者相同。圖 12—42 (b) 示三鉸加勁梁受有一向下集中荷重 P 及向上之吊索拉應力 p /公尺。由方程 (10—80) 可知此三鉸加勁梁之 M/H 圖，如圖 12—42 (a) 所示，與圖 12—39 (b) 所示三鉸拱骨者相似。既求得三鉸加勁梁之 M 圖之後，其豎向線變位可完全依圖 12—39 所示之法求之。惟加勁梁係平直，故 $\alpha=0$ ， $\cos \alpha=1$ ，而彈性荷重即 M/EI 圖。

因懸橋懸索之形式常假定係一拋物線，若懸橋及其三鉸加勁梁係對稱式，且後者之 I 為一恆數 I_0 ，則求其任何點在一向下集中荷重 P 下之豎向線變位時，可直接用方程 (12—208) 至 (12—214) 及表 XXVIII。

若懸橋之加勁係採用三鉸加勁桁架，其深度極小，跨度極長，則依第 11—16 節之討論，求其變位時可將其視作 EI 為恆

數之梁而計算之。若桁架之深度較大而跨度較短，則求其變位時須先依圖 12—42 所示之荷重，求其中諸桿之長度改變，而後用上述求三鉸桁架拱變位之法以計算之。

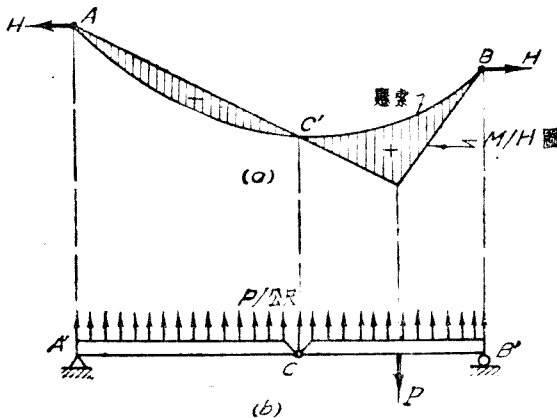


圖 12—42. 懸橋三鉸加勁桁架之變位

若懸索兩端之高度相同，其間之平距離為 L 。其中線之最大下垂度為 h ，則懸索長度 L' 之近似值，可用下列方程計算之。

$$L' = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^4 \right] \quad (12-215)$$

若 L 之值不變，則 L' 因拉應力（或溫度之漲縮）而有改變 dL' 時，其中線下垂度 h 之改變 dh 可用微分法求之。

$$dL' = \frac{16}{15} \left[5 - 24 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] dh \quad (12-216)$$

dh 即係懸索中線之豎向線變位 δ_c ，故

$$\delta_c = \frac{dL'}{\frac{16}{15} \left[5 - 24 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]} \quad (12-217)$$

懸索各點之應力不同，但其平均應力 S (平均) 約為 $H(L'/L)$ ， H 之值可用方程 (10-83) 計算之。設 A 為懸索之截面面積， E 為彈性係數，故，

$$\begin{aligned} dL' &= \frac{S(\text{平均})L'}{AE} = \frac{L'^2}{L} \frac{H}{AE} \approx \frac{HL}{AE} \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]^2 \\ &\approx \frac{HL}{AE} \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12-218)$$

懸橋之懸索係由支塔之頂而錨定於懸橋兩岸之地基。若懸橋中跨之兩旁跨不吊於懸索之上，則懸索自塔頂至地基係一直線，其長度為 L_1 ，其傾度為 β ，故 L_1 之水平投影 L_1 為 $L_1 \sec \beta$ 。懸索於支塔之頂既可以移動，故懸索全長之平分應力均為 H ，而中跨兩旁懸索之長度改變 $2dL_1$ 為，

$$\begin{aligned} 2dL_1 &= \frac{2SL_1}{AE} = \frac{2(H \sec \beta)(L_1 \sec \beta)}{AE} \\ &= \frac{2HL_1}{AE} \sec^2 \beta \end{aligned} \quad (12-219)$$

將方程 (12-218) 與 (12-219) 相加，得對稱式懸橋懸索之全長之長度改變如下：

$$dL' + 2dL_1 = \frac{H}{AE} \left\{ L \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] + 2L_1 \sec^2 \beta \right\} \quad (12-220)$$

以上列 $dL' + 2dL_1$ 之值代替方程 (12-217) 中 dL' 之值，即得懸索全長有拉應力時中線之豎向線變位 δ_c 如下：

$$\delta_c = \frac{H}{AE} \frac{L \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] + 2L_1 \sec^2 \beta}{\frac{16}{15} \left[5 - 24 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]}$$

因懸索假設常係一拋物線，故其豎向變位線亦係一拋物線。因此，其他任何點之豎向線變位，可由方程(12-221)中 δ_0 之值求得之。

習題 12-87. 取一對稱式之三鉸加勁懸橋，其 l 爲一恆數 l_0 。以一向下集中荷重 P 置於其加勁梁之右半任何一點，該點與右支點之距離爲 kL 。以圖 12-39 所示之法，求其中線鉸由於彎應力之豎向線變位，視所得之答案，是否與方程(12-213)者相同？

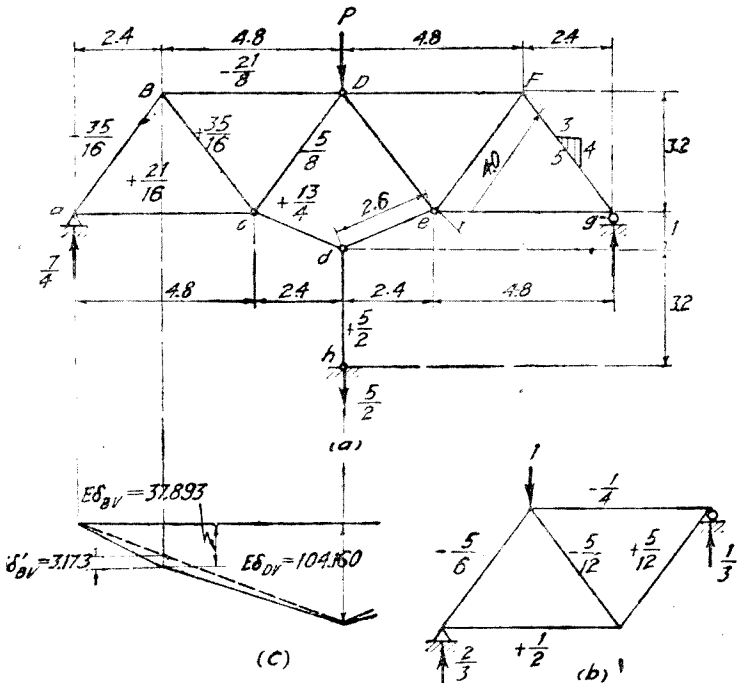
習題 17-88. 懸橋及荷重與例題 10-6 相同。用最簡捷之方法，求此加勁梁由於彎應力之豎向線變位方程。

(4) 威氏桁架橋 威氏桁架橋之中部支點均有一斜方形，其頂有一鉸，故其變位之求法與前述之三鉸拱橋，極其相似。如採用角變法，必先計算中部支點頂鉸之角變 $d\theta$ ，即該點之集中彈性荷重。橋跨他部之彈性荷重，仍係 M/EI 圖。該橋之共軛梁即係一兩端支承之簡單梁，其跨長等於該橋之全長。此外亦可採用圖 12-39 所示之法，即先用虛功法求各支點頂鉸之豎向線變位，作全橋之豎向線變位圖。此變位圖於兩端跨各係一正三角形，於中間跨各係一梯形。再將各跨視作一簡單跨，各求其相對豎向線變位圖，與前得頂鉸之豎向線變位圖相加，即得該橋全跨之實際豎向線變位圖。

於威氏桁架橋之採用桁架者，其變位之計算，除上述之方法外，並可採用桿鏈之數解或圖解法及維氏移位圖法。惟均須先用虛功法求得各中間支點斜方形中之某角變，或某二對角節點間之相對線變位。採用移動或轉動改正法時，其所有諸支點之

豎向線變位，同時均等於零。

例題 12-41. 附圖(a) 示一威氏桁架橋，其上弦節點 D 有一向下集中荷重 P ，其中各桿之單位應力於拉桿為 1.2，於壓桿為 0.8， E 為 2,100，均以公噸/平方公分計。用圖 12-39 所示之法，求上弦諸節點之豎向線變位。



例題 12-41.

解答：先用虛功法求節點 D 之豎向線變位。附圖(a)左半示 P 為單位時各桿之應力 u ，故，

$$\begin{aligned}
 E\delta_{DV} &= 1.2 \left[2 \left(4.8 \times \frac{21}{16} + 4 \times \frac{35}{16} + 2.6 \times \frac{13}{4} \right) + 3.2 \times \frac{5}{2} \right] \\
 &\quad + 2(-0.8) \left[4 \left(-\frac{35}{16} \right) + 4 \left(-\frac{5}{8} \right) + 4.8 \left(-\frac{21}{8} \right) \right] \\
 &= 1.2 [2(6.3 + 8.75 + 8.45) + 8] + 0.8 \times 2(8.75 + 2.5 + 12.6) \\
 &= 1.2 \times 55 + 0.8 \times 47.7 = 66.00 + 38.16 = \underline{+104.160} \downarrow
 \end{aligned}$$

$$\delta_{DV} = +\frac{104.160}{2,100} = +0.04960 \downarrow \text{公尺}$$

將 aD 視作一簡單跨，以向下單位虛荷重置於節點 B ，則各桿之應力 μ 如附圖(b)所示，故，

$$\begin{aligned} E\delta'_{BV} &= 1.2 \left[4.8 \left(+\frac{1}{2} \right) + 4 \left(-\frac{5}{12} \right) \right] + (-0.8) \left[4 \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{6} \right) + 4.8 \left(-\frac{1}{4} \right) \right] \\ &= 1.2 \times \frac{2.2}{3} + 0.8 \times \frac{8.6}{3} = 0.88 + 2.293 = +3.173 \downarrow \end{aligned}$$

所以，

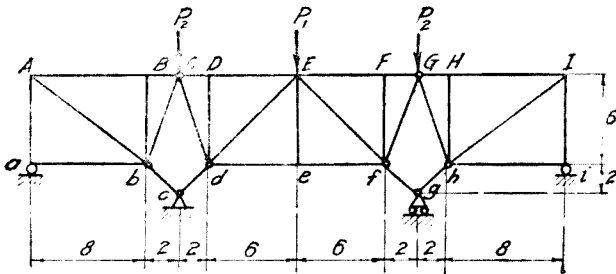
$$E\delta_{FV} = E\delta_{BV} = E\delta'_{BV} + \frac{1}{3} E\delta_{DV} = \frac{104.16}{3} + 3.173 = +37.893 \downarrow$$

故，

$$\delta_{FV} = \delta_{BV} = +\frac{37.893}{2,100} = 0.01804 \downarrow \text{公尺}$$

習題 12-89. 用角變法解答例題 12-41。

習題 12-90. 附圖示一三跨之威氏桁架橋及其荷重，其中各桿之單位應力於拉桿為 1.2，於壓桿為 0.8， E 為 2,100，均以公噸/平方公分計。用圖 12-39 所示之法，求其下弦諸節點之豎向線變位。



習題 12-90.

例題 12-42. 桁架及荷重與例題 12-41 相同，用維氏移位圖求所有諸節點之豎向變位線。

解答：附圖(a)示各桿之 $E\delta l$ 。以一虛桿聯接節點 D 及 d ，由例題 12-41 得節點 D 之 $E\delta_{DV}$ 為 104.160，向下，而節點 d 之 $E\delta_{dV}$ 即支承桿 dh 之伸長，其值為 $1.2 \times 3.2 = 3.84$ ，向上，故虛桿 Dd 之長短改變為

$-(104.16+3.84) = -108.00$ (縮短)。因此桁架及其變位(不計支承桿 dh) 爲對稱式,故作維氏移位圖時,假設虛桿 Dd 之傾度及節點 D 之位置均不變,前者與實際相符,而後者則否。故求實際變位時,祇須加以移動改正,即位置不變之節點應由 D 移至此橋之固定端 a 點。 h 係一鉸支座,不能有任何變位,故其原來位置 h 及變位後位置 h' ,均應在 a 點。注意附圖(b)之維氏移位圖中,節點 a, h , 及 g 均在同一平線上,即此節點無相對之豎向線變位,故改正後其豎向線變位均爲零。

習題 12-91. 桁架及荷重與習題 12-90 相同,用維氏移位圖求所有諸節點之線變位。作圖時假設中線豎桿 Ee 之傾度及節點 E 之位置均不變。

習題 12-92. 桁架及荷重與習題 12-90 相同,用桿鏈圖解法求所有諸節點之線變位。作圖時採用桿鏈 $A-b-C-d-E-f-G-h-I$, 並假設斜桿 dE 之傾度及節點 E 之位置均不變。

12-18. 桁架加拱之計算法 建造桁架時,若使其下弦平直,則完成後必因荷重之作用而有向下之變位,故下弦原應平直者實際上則成一下垂之曲線,不惟有礙觀瞻,且使桁架顯出軟弱不能勝任荷重之象。因此,於建造桁架時,常使其下弦稍爲向上拱起,稱爲加拱,庶其受有荷重時,其下弦不致有下垂之象。桁架之向下變位,係由於其拉桿之伸長及壓桿之縮短。故如圖 12-43(a) 所示,於短跨橋梁,可使其上弦之長度每 10 公尺加長 5 公厘,下弦之長度每 10 公尺縮短 5 公厘,即等於假設弦桿之平均應力約爲 $2,100 \times \frac{0.005}{10} = 1.05$ 公噸/平方公分。其豎桿之長度不變,斜桿之長度則使其適合。若上下弦桿之長度均加以改變,則桁架之跨長亦因之而稍有改變,頗不適宜。故如圖 12-43(b) 所示,常使支點所在之弦桿長度不變,祇將其另一弦桿

每 10 公尺伸長或縮短 10 公厘，視該弦係壓桿抑係拉桿而定。
 於跨度較長之桁架，宜先計算其下弦中線節點之豎向線變位 δ_c ，
 再依 δ_c 之值而使桁架加拱。圖 12-43(c) 示一支承點在下弦
 之桁架，於三角形 ACD 中，可得，

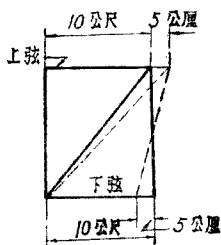
$$\frac{\theta}{2} = \frac{\delta_c}{L}, \text{ 或 } \theta = \frac{4\delta_c}{L}$$

於正三角形 AEF 中，則

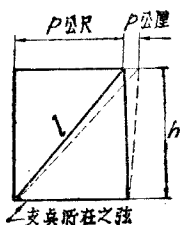
$$\tan \theta = \frac{dL}{2h} = \theta$$

故

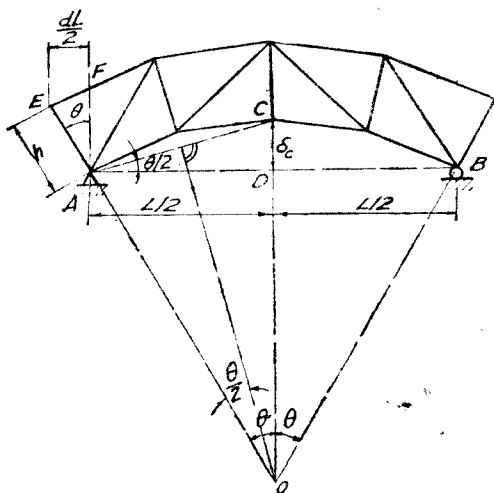
$$dL = \frac{8h\delta_c}{L} \quad (12-222)$$



(a)



(b)



(c)

圖 12-43. 桁架之加拱

其中 dL 爲上弦所應伸長之總值，此桁架共有 4 節間，故每一上弦桿須伸長 $2h\delta_c/L$ 。設 P 爲弦桿之長度， m 爲節間數，故，

$$dp = \frac{dL}{m} = \frac{8h\delta_c}{mL} \quad (12-223)$$

豎桿之長度仍不變，斜桿之長度則使其適合。如圖 12-43 (b) 所示， l 爲斜桿之長度。

$$l^2 = p^2 + h^2$$

求微分，

$$2l dl = 2p dp$$

故

$$dl = \frac{p}{l} dp = \frac{8ph\delta_c}{mlL} \quad (12-224)$$

求 δ_c 時所用之荷重視加拱後桁架須在何種荷重下，其下弦近於平直而定。若干工程師祇採用呆荷重以加拱，亦有工程師採用呆荷重及活荷重之全量（衝擊力不計入）者。於跨度甚長之桁架，其呆荷重較大，故加拱時採用呆荷重或已足。但跨度如不甚長，則加拱時採用呆荷重及活荷重之一半，較爲適中合理。於樞接桁架，加拱時並須顧及因鉸節鬆動所發生之非彈性變位。

習題 12-93. 桁架及其下弦線節點之豎向線變位與習題 12-37(a) 相同，用上述之二法求該桁架加拱時上弦桿及斜桿應伸長之數量。

12-19. 麥氏變位互等之定理^① 圖 12-44(a) 示一直梁。設 b 點有一集中荷重 P ，其傾度爲 O ，因此該梁 a 點於傾度

① 麥氏原著載英國之哲學雜誌，1864 年 4 月刊，294 頁。

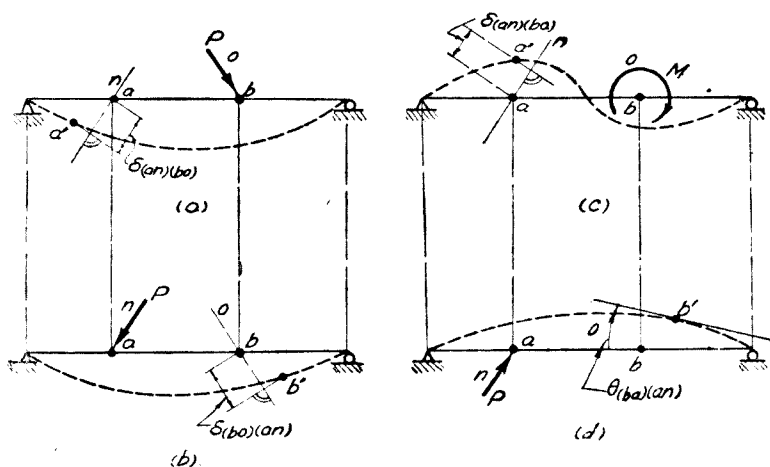


圖 12-44. 麥氏變位互等之定理

n 之線變位為 $\delta_{(an)(bo)}$ 。設 m_{bo} 為 b 點有一傾度為 0 之單位虛集中荷重時該梁任何點之彎矩， m_{an} 為 a 點有傾度為 n 之單位虛集中荷重時該梁任何點之彎矩，由虛功法，則，

$$\delta_{(an)(bo)} = \int \frac{P m_{bo} m_{an}}{EI} dx \quad (12-225)$$

如圖 12-44(b) 所示，又設該梁 a 點有數量相同之集中荷重 P ，其傾度為 n ，因此該梁 b 點於傾度 0 之線變位為 $\delta_{(bo)(an)}$ ，則，

$$\delta_{(bo)(an)} = \int \frac{P m_{an} m_{bo}}{EI} dx \quad (12-226)$$

$$\text{故} \quad \delta_{(an)(bo)} = \delta_{(bo)(an)} \quad (12-227)$$

此即表示麥(J. C. Maxwell) 氏變位互等之方程，可以文字述之如下：

(1) 結構之任何一點 b 有傾度為 0 之集中荷重 P 時，其他

任何一點 a 傾度爲 n 之線變位，等於 a 點有傾度爲 n 之同一荷重 P 時， b 點於傾度 O 之線變位。

麥氏變位互相之定理可推廣如下：

(2) 結構之任何一點 b 有指向爲 O 之彎矩 M 時，其他任何一點 a 指向爲 n 之角變位，等於 a 點有指向爲 n 之同一彎矩 M 時， b 點指向爲 O 之角變位。 或，

$$\theta_{(a)}(b_0) = \theta_{(b_0)}(a_n) \quad (12-228)$$

(3) 結構之任何一點 b 有指向爲 O 之彎矩 M 時，其他任何一點 a 傾度爲 n 之線變位，等於 a 點有傾度爲 n 而數量與 M 相同之集中荷重 P 時， b 點指向爲 O 之角變位 [圖 12-44 (c) 及 (d)]。或①，

$$\delta_{(a)}(b_0) = \theta_{(b_0)}(a_n) \quad (12-229)$$

此項變位互相之定理，並可推廣至於切力及扭力之變位，但結構中二點由於集中荷重之角變位，或二點由於彎矩之線變位，不能互等。

上述證明，係採用虛功法，但麥氏變位之定理，實僅柏(Betti)氏定律中之一特例耳。圖 12-45 示一簡單梁，其 a 及 b 二點各有一向下集中荷重 P_a 及 P_b 。設 δ_{aa} 及 δ_{ba} 各係 $P_a=1$ 及 $P_b=0$ 時 a 及 b 二點之豎向線變位， δ_{ab} 及 δ_{bb} 各係 $P_b=1$ 及 $P_a=0$ 時 a 及 b 二點之豎向線變位。設 P_a 先加於此梁之 a 點，則 a 點之豎向線變位爲 $P_a\delta_{aa}$ ，而外功爲 $P_a^2\delta_{aa}/2$ 。再

① 其證明列爲習題 12-94。

將 P_b 加於此梁之 b 點，則 a 及 b 二點之豎向線變位各增加 $P_b \delta_{ab}$ 及 $P_b \delta_{bb}$ 。因 δ_{ab} 發生時 a 點已有荷重 P_a ，故荷重 P_b 加於此梁後所增加之外功為 $P_a P_b \delta_{ab} + P_b^2 \delta_{bb} / 2$ ，而該梁由 P_a 及 P_b 之總外功 W_{ab} 為，

$$W_{ab} = \frac{1}{2} P_a^2 \delta_{aa} + \frac{1}{2} P_b^2 \delta_{bb} + P_a P_b \delta_{ab} \quad (12-230)$$

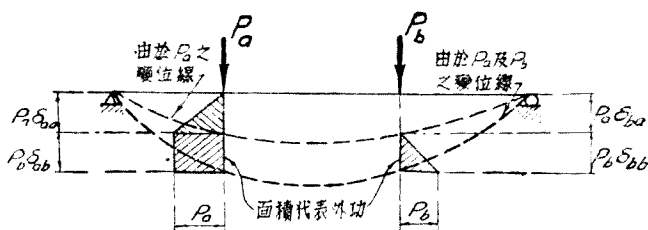


圖 12—45. 柏氏定律之證明

圖 12—45 中有斜線面積，各代表上列方程中之三項外功。若 P_b 先加於該梁之 b 點，而後再將 P_a 加於 a 點，以相同方法，可得該梁由於 P_a 及 P_b 之總外功 W_{ba} 為，

$$W_{ba} = \frac{1}{2} P_a^2 \delta_{aa} + \frac{1}{2} P_b^2 \delta_{bb} + P_a P_b \delta_{ba} \quad (12-231)$$

無論 P_a 及 P_b 加於該梁之先後次序如何，上述二例中之總外功必相等，故，

$$W_{ab} = W_{ba} \quad (12-232)$$

由是
$$P_a P_b \delta_{ab} = P_a P_b \delta_{ba} \quad (12-233)$$

所以
$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (12-234)$$

即麥氏變位互等之定理，於上述之證明中， P_a 及 P_b 可各代表

一力系，故柏氏定律可述之如下：

力系 P_b 加於結構之上時結構上已有力系 P_a 所作之外功，等於力系 P_a 後加於該結構之上時先加於結構上力系 P_b 所作之外功。

麥氏定理及柏氏定律與前述卡氏定理相同，均受 12—14 節中所述之三項限制。麥氏定理之應用，即在計算結構任何函數之感應圖。設圖 12—46 (a) 之曲虛線係 a 點豎向線變位之感應圖，故此曲虛線於任何點 b 之豎距，等於 b 點有一豎向單位集中荷重時 a 點之豎向線變位 δ_{ab} 。圖 12—46 (b) 之曲虛線係 a 點有一豎向單位集中荷重時之豎向線變位圖。故此曲線於 b 點之豎距為 δ_{ba} 。根據上述麥氏變位互等定理之第 (1) 條，則 $\delta_{ba} = \delta_{ab}$ ，即圖 12—46 (a) 及 (b) 曲虛線於任何點之豎距係相等，故

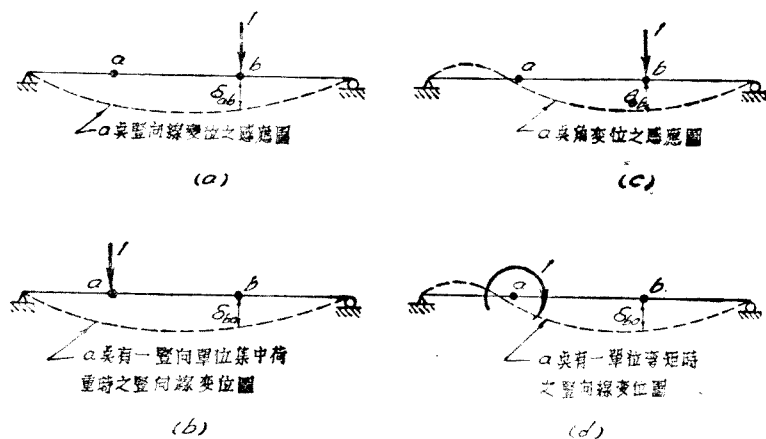


圖 12—46. 結構之線變位及角變位感應圖

(1) 結構任何點有一豎向單位集中荷重時之豎向線變位

圖，即該點豎向線變位之感應圖。同此，如圖 12—44(c)及(d)

所示，根據上述麥氏變位互等定理之第(3)條，得 $\delta_{ba} = \theta_{ab}$ ，

故

(2) 結構任何點有一單位彎矩時之豎向線變位圖，即該點角變位之感應圖。

麥氏變位互相之定理亦可用之以求靜不定結構中任何函數之感應圖。圖 12—47(a)示一連續梁。設欲求支點 c 反力 R_c 之感應圖，將 a 點之支承除去，以一單位豎向集中荷重置於任何點 b ，則 a 點之豎向線變位為 δ_{ab} 。如圖 12—47 (b) 所示，使

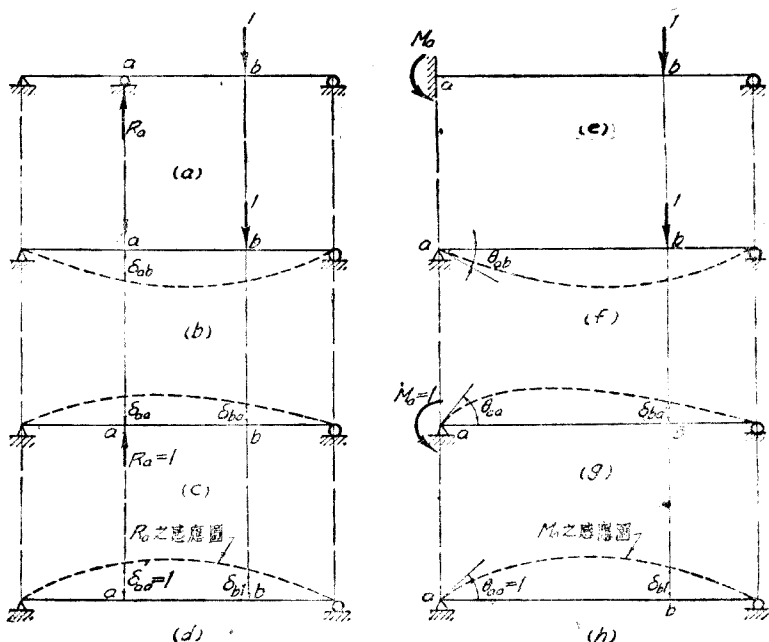


圖 12—47. 靜不定結構之反力感應圖

$R_a=1$ ，則 a 與 b 二點之豎向線變位各如 δ_{aa} 與 δ_{ba} 。若支點 a 之位置不變，則，

$$R_a \delta_{aa} - 1 \times \delta_{ab} = 0 \quad (12-235)$$

$$R_a = + \frac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}} \uparrow \quad (12-236)$$

根據上述麥氏變位互等定理之第(1)條，得 $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ ，

$$R_a = + \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} \uparrow \quad (12-237)$$

如圖 12-47(d) 所示，設 $\delta_{aa}=1$ ，則 $\delta_{ba} \delta_{aa} = \delta_{b1}$ ，代入方程(12-237)中，得，

$$R_a = + \delta_{b1} \quad (12-238)$$

故圖 12-47(d) 之豎向線變圖，即反力 R_a 之感應圖。同此，根據上述麥氏變位互等定理之第(3)條，可得圖 12-47(e) 反力 M_a 之感應圖。若支點 a 之角度不變，由圖 12-47(f) 及 (g)，可得，

$$M_a \theta_{aa} - 1 \times \theta_{ab} = 0 \quad (12-239)$$

$$M_a = + \frac{\theta_{ab}}{\theta_{aa}} \quad (12-240)$$

但 $\theta_{ab} = \delta_{ba}$

$$\text{由是 } M_a = + \frac{\delta_{ba}}{\theta_{aa}} \quad (12-241)$$

如圖 12-47(h) 所示，設 $\theta_{aa}=1$ ，則 $\delta_{ba}/\theta_{aa} = \delta_{b1}$ ，代入方程(12-241)中，得，

$$M_a = + \delta_{b1} \quad (12-242)$$

故圖 12—47 (h) 之豎向線變圖，即反力 M_a 之感應圖。

上列之方程 (12—237) 及 (12—241) 亦可用虛功原理求得之，且較為直接簡便。使圖 12—47 (a) 及 (e) 之 a 點各有一極小之豎向線變位 δ_{aa} 及角變位 θ_{aa} ，因此， b 點均有極小之豎向線變位 δ_{ba} ，此二結構均係平衡，採用虛功原理，得，

$$R_a \delta_{aa} - 1 \times \delta_{ba} = 0 \quad (12-243)$$

$$M_a \theta_{aa} - 1 \times \delta_{ba} = 0 \quad (12-244)$$

由是

$$R_a = + \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} \quad (12-237)$$

$$M_a = + \frac{\delta_{ba}}{\theta_{aa}} \quad (12-241)$$

與前所等之結果相同，以方程 (12—237) 及 (12—241) 為根據，各與方程 (12—236) 及 (12—240) 比較，得 $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ ，及 $\theta_{ab} = \delta_{ba}$ ，即麥氏變位互等定理之又一證明。

由上述之討論，可知：虛功原理，卡氏定理，麥氏定理，及柏氏定律，皆可互相貫通。故此四項之基本概念及其所受之限制，均完全相同。惟因觀點不同，遂各自成一原理定理或定律，其在結構學中之應用，亦各有其便利之點，由以上諸節中之討論，即可了然。

習題 12—94. 用虛功原理及柏氏定律證明方程 (12—229)。

習題 12—95. 用麥氏定理及計算直梁變位之角變法，求表述簡單梁角變位之方程。

習題 12—96. 設一對稱式之三鉸拱骨橋，其 $I \cos a$ 係一恆數。或一

對稱式之三鉸加勁懸橋，其加勁梁之 I 係一恆數。若活荷重為一均佈荷重 w /公尺，求其中點及 $1/4$ 點在活荷重下之最大向下及向上之豎向線變位。

提示：變位為最大時之活荷重位置須由其感應圖決定。作此結構中點及 $1/4$ 點豎向線變位之感應圖，是否可分別採用方程(12-211)至(12-214)。計算時使 $P = wd(kL) = wLdk$ ，並採用積分法。

習題 12-07. 設一兩跨長度相等之連續梁，其 I 係一恆數，用麥氏定理及計算直梁變位之角變法，求表述其中支點及端支點反力感應圖之方程。

習題 12-08. 設一兩端固定之直梁，其 I 係一恆數，用麥氏定理及計算直梁變位之角變法，求表述其一端反力及彎矩感應圖之方程。

12-20. 桁架應力感應圖之圖解法 以第 8-4 節所述之虛功法與維氏移位圖聯合採用，即得桁架應力感應圖之圖解法。圖 12-48(a) 示一桁架。設欲求上弦桿 BC 之應力感應圖，使該桿之長度改變 $dl = -1$ 。若假設該桿之傾度及節點 B 之位置均不變，則桁架左部諸節點 a, B, b 及 c 之位置亦均不變。故祇桁架右部之諸節點 C, D, d ，及 e 之位置有改變，其相對變位可由圖(b)維氏移位圖定之。作此項祇有一桿有長度改變之移位圖時，注意於長度改變為零之桿，自其位置已定之端作一線與該桿成垂直，即可定他端之位置。例如圖(b)中節點 C 及 e 之位置已定，而 CD 及 cD 二桿之長度改變為零，故自 C 及 e 二點各作一直線，分別與 CD 及 cD 二桿成垂直，其相交點即節點 D 之位置。又注意於長度改變為零之桿，其兩端於該桿傾度之相對線變位必為零，例豎桿 Dd 之長度改變為零，則圖(b)中 D 及 d 二節點間之相對豎向線變位必為零。因桁架之左部 $aBbc$ 假設無移動，當 BC 桿之長度縮短時，桁架之右半 $CedeD$ 即有向上之轉動。故圖(b)之維氏移位圖，相當於桁架右半之逆時針向轉動 90 度者，與摩爾轉動圖相同。用此諸法可以校核所作之維氏移位圖是否有誤。由此維氏移位圖得桁架下弦之變位線如圖(c)之 $a'b'b'd'e'$ 。因節點 e 之豎向線變位為零，作底線 $a'e'$ ，即得下弦之豎向線變位圖。因下弦係荷重弦，而直接承受荷重者係縱梁，其豎向線變位圖與下弦者相同，故圖(c)之豎向線變位圖即 BC 桿之應力感應圖，其數量及正負號均相符。

作 BC 桿有長度改變之維氏移位圖時，亦可假設桁架右部係固定，則節點

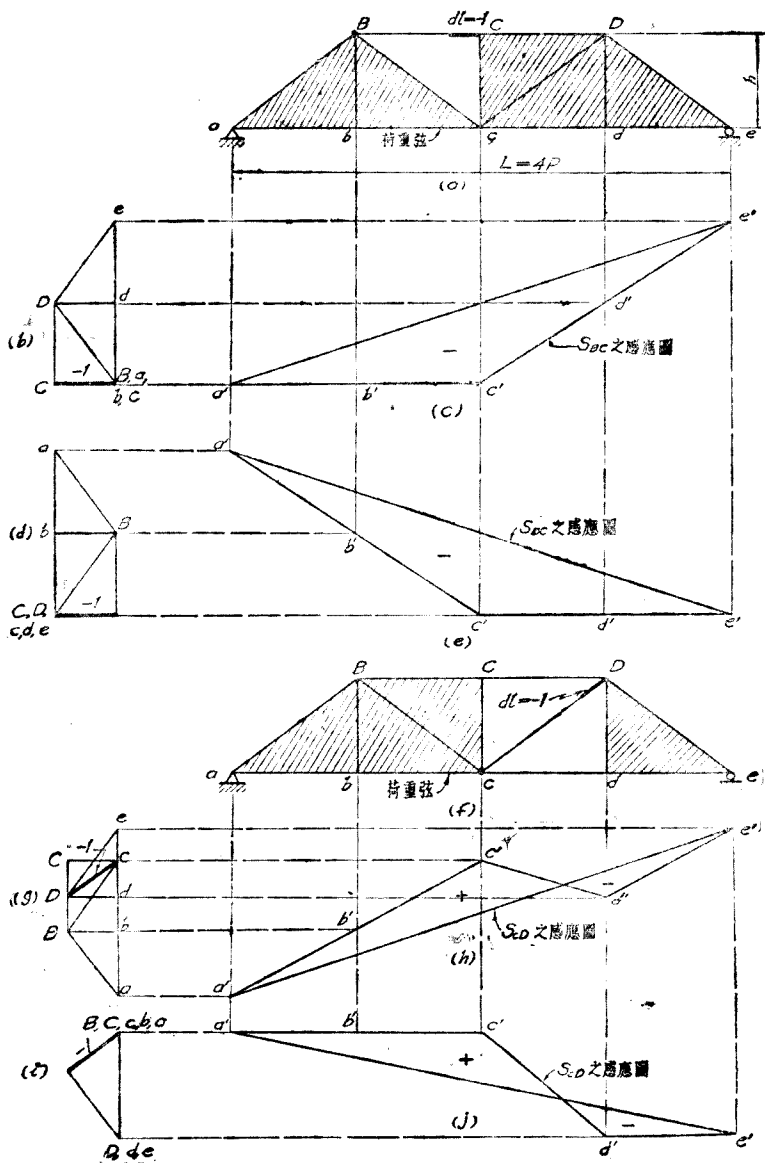


圖 12-48. 桁架應力感應圖之圖解法

C, c, D, d , 及 e 之位置均不變。但 BC 桿之傾度及左部諸節點 a, b , 及 B 之位置均有改變, 如是得維氏移位圖及 BC 桿之應力感應圖各如圖 12-48(d) 及 (e) 所示。注意圖 (d) 之維氏移位圖相當於桁架假設有移動之左部 $aBbc$ 之順時計針向轉動 90° 度者。

如欲求斜桿 cD 之應力感應圖, 使斜桿 cD 之長度改變 $dl = -1$ 。若假設斜桿 cD 之傾度及節點 c 之位置均不變, 則圖 (f) 中節間 cd 之左右二部均有移動, 因此除節點 c 外, 其餘所有諸節點之位置均有改變, 其維氏移位圖及 cD 桿之應力感應圖各如圖 (g) 及 (h) 所示。若假設節點 c 之位置及豎桿 Cc 之傾度均不變, 則桁架之左半無移動而其右半有移動, 故節點 a, B, b , 及 c 諸節點之位置均不變。其維氏移位圖及 cD 桿之應力感應圖各如圖 (i) 及 (j) 所示, 而圖 (i) 之作法較圖 (g) 為簡易。故作桁架中某一桿有長度改變時之移位圖時, 先將桁架無變形之二部 (圖 (a) 及 (f) 中之有斜線部分) 劃出, 再假定其較大部分無移動, 即等於假定該桿與該部相聯節點 (如圖 (f) 中之節點 c) 之位置不變, 及該部與該節點相聯之任一桿之傾度不變。如是, 則維氏移位圖之作法, 常較為簡易。

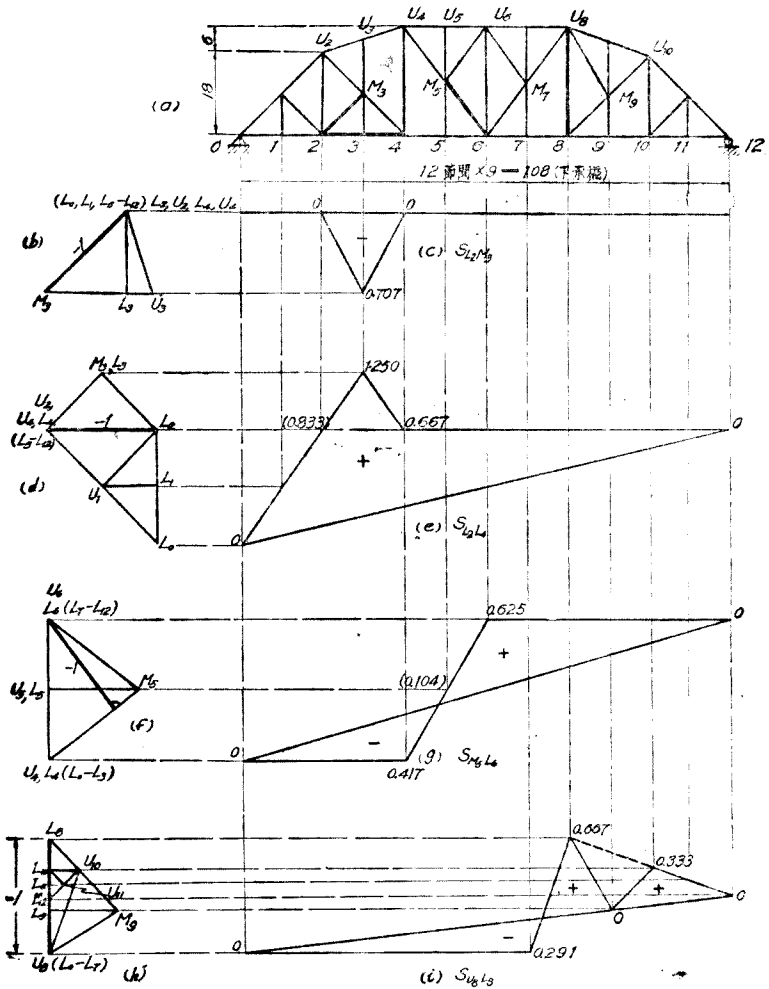
於有四邊形之再分桁架, 作維氏移位圖時, 如有困難, 可暫時將副桿略去, 而後加以改正, 並不必計算四邊形中二節點間之相對線變位, 其方法詳見下列之例題 12-43。

例題 12-43. 用虛功法及維氏移位圖求例題 8-11 桁架中副斜桿 L_2 , M_3 , 下弦桿 L_2L_4 , 主斜桿 M_5L_6 , 及豎桿 U_3L_3 之應力感應圖。

解答: 桁架見附圖 (a), 其中粗線示所須求應力感應圖之桿。所有解答詳見附圖 (b) 至 (i), 茲分別說明如下:

副豎桿 L_2M_3 : 假設 U_2L_2 之傾度及 U_2 之位置均不變 (因此 L_0 及 L_1 之位置亦不變), 自 L_2 作 L_2M_3 之 $dl = -1$ 。自 U_2 作一線與 U_2M_3 成垂直。因此垂直線與 L_2M_3 之 dl 相合, 故 dl 之他一端即 M_3 之位置。再依次定 L_3, L_4, U_3 及 U_4 之位置。於附圖 (b) 中, L_3 及 U_4 均與 L_2 同在一點, 故其位置不變。因此, 其以右所有節點之位置亦均不變。由圖 (b) 之維氏移位圖得桁架下弦之豎向線變位圖如附圖 (c), 即副豎桿 L_2M_3 之應力感應圖。

下弦桿 L_2L_4 : 假設豎桿 U_4L_4 之傾度及節點 L_4 之位置不變 (因此



例題 12-43.

L_8 至 L_{12} 之位置亦不變) 並暫時將副豎桿 $U_3 L_3$ 及副斜桿 $L_2 M_3$ 略去, 則 U_2 之位置亦不變。自 L_4 作 $L_2 L_4$ 之 $dl = -1$ 。自 U_2 作一線與 $U_2 L_2$ 成垂直。因此垂直線與 $L_2 L_4$ 之 dl 相合, 故 dl 之他一端即 L_2 之位置, 自

L_2 及 L_4 各作一線分別與 L_2M_3 及 M_3L_4 成垂直，定 M_3 及 L_3 之位置。再依次定 U_1, L_1 及 L_0 之位置，得維氏移位圖如附圖(d)。由此圖得下弦之豎向線變位圖如附圖(e)，即下弦桿 L_2L_4 之應力感應圖。

主斜桿 M_5L_6 ：假設豎桿 U_6L_6 之傾度及節點 L_6 之位置均不變（因此 L_7 至 L_{12} 之位置亦不變）自 L_6 作 M_5L_6 之 $dl = -1$ 。自 dl 之他一端及 U_6 各作一線分別與 M_5L_6 及 M_5U_6 成垂直，其相交點即 M_5 之位置。再依次定 U_5, L_5, U_4 ，及 L_4 之位置。因 U_4 及 L_4 同在一點，故豎桿 U_4L_4 之傾度及其以左諸節點之位置均無改變。得維氏移位圖如附圖(f)，及 M_5L_6 之應力感應圖如附圖(g)。

豎桿 U_8L_8 ：假設 $L_7M_7U_8$ 以左所有節點之位置不變，因此， U_8L_8 之傾度亦不變，自 U_8 作 U_8L_8 之 $dl = -1$ ，其他一端即 L_8 之位置。依次定 $M_9, L_9, U_{10}, L_{10}, U_{11}, L_{11}$ 及 L_{12} 之位置。得維氏移位圖如附圖(h)。由是得豎桿 U_8L_8 之應力感應圖如附圖(i)。

習題 12-99。用虛功法及維氏移位圖求例題 12-43 桁架豎桿 U_4L_4 ， U_6L_6 ， $U_{10}L_{10}$ ，及上弦桿 U_4U_6 之應力感應圖。

習題 12-100。用維氏移位圖解答習題 8-9。

12-21. 由桿之變位求其應力 桁架中某桿之應力，可由其變位求之。圖 12-49 (a) 示一桿 AB ，其傾度為 α ，長度為 l 。設 AA' 及 BB' 各為其 A 及 B 二端之線變位，其平豎分線變位各為 $\delta_{AH}, \delta_{AV}, \delta_{BH}$ ，及 δ_{BV} 。該桿並有長度改變 dl ，由圖(a)可得，

$$l + dl = \sqrt{(l \sin \alpha + \delta_{AV} - \delta_{BV})^2 + (l \cos \alpha + \delta_{AH} - \delta_{BH})^2} \quad (12-245)$$

或

$$\begin{aligned} l^2 + 2ldl + (dl)^2 &= l^2 \sin^2 \alpha + l^2 \cos^2 \alpha \\ &+ 2l \sin \alpha (\delta_{AV} - \delta_{BV}) + 2l \cos \alpha (\delta_{AH} - \delta_{BH}) \\ &+ (\delta_{AV} - \delta_{BV})^2 + (\delta_{AH} - \delta_{BH})^2 \end{aligned} \quad (12-246)$$

因上列方程中之 $(dl)^2$ ， $(\delta_{AV} - \delta_{BV})^2$ ，及 $(\delta_{AH} - \delta_{BH})^2$ 均係極小，故可略去，注意 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，如是，則(12-246)變為，

$$dl = \sin \alpha (\delta_{AV} - \delta_{BV}) + \cos \alpha (\delta_{AH} - \delta_{BH}) \quad (12-247)$$

設桿之截面面積為 A ，則其中之應力 S 為，

$$S = \frac{AE}{l} dl = \frac{AE}{l} [\sin \alpha (\delta_{AV} - \delta_{BV}) + \cos \alpha (\delta_{AH} - \delta_{BH})] \quad (12-248)$$

若該桿之 B 端無變位, 則 $\delta_{BV} = \delta_{BH} = 0$, 因此,

$$S = \frac{AE}{l} (\delta_{AV} \sin \alpha + \delta_{AH} \cos \alpha) \quad (12-249)$$

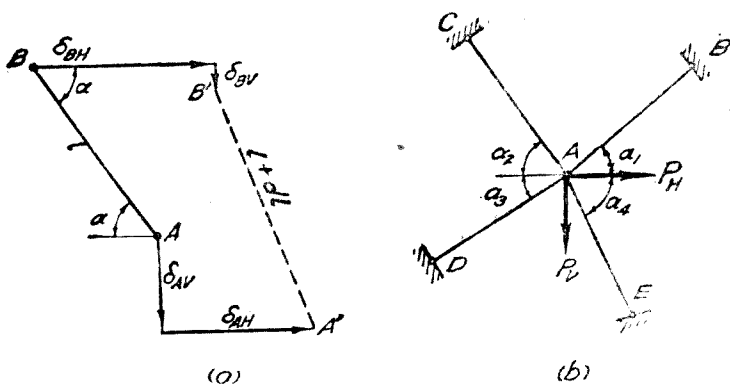


圖 12-49. 由桿之變位求其應力

如圖 12-49(b) 所示, 設有若干桿以鉸節接合於 B 點, 其他一端亦係鉸節, 但其位置均不變。設節點所受荷重合力之平分力為 P_H , 豎分力為 P_V , 用 $\Sigma H = 0$ 及 $\Sigma V = 0$ 於節點 A , 可得,

$$P_H = \sum \frac{AE}{l} (\delta_{AV} \sin \alpha + \delta_{AH} \cos \alpha) \cos \alpha \quad (12-350)$$

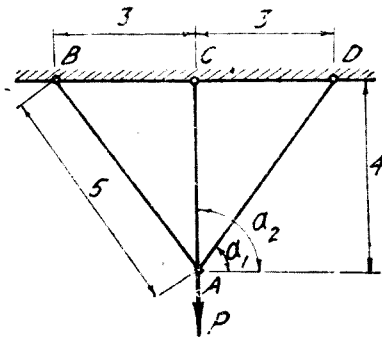
$$P_V = \sum \frac{AE}{l} (\delta_{AV} \sin \alpha + \delta_{AH} \cos \alpha) \sin \alpha \quad (12-351)$$

解上列二聯立方程, 即可得 δ_{AV} 及 δ_{AH} 之值。代入方程 (12-249) 中, 即可得圖 (b) 所有諸桿之應力 S 。注意圖 (b) 有四桿接合於一節點, 係一靜不定之結構, 故上述之方法如加以推廣, 即可用以計算任何靜不定桁架之應力。

例題 12-44. 附圖示一靜不定之平面結構, 其中三桿之截面積均相同。

- ① 英國之薩 (R. V. Southwell) 氏將上述之方法加以推廣及改良, 得計算靜不定桁架應力之分配法, 見英國皇家學會會刊甲種 151 卷 (1934 年), 56 頁及 153 卷 (1936 年), 41 頁。參閱皮 (A. J. S. Pippard) 培 (J. F. Baker) 二氏所著 工程結構之分析 一書, 1936 年版, 99 至 112 頁。

E 亦係恆數。用上述先求變位之方法，求此桿之應力。



例題 12-44.

解答：由此結構之對稱性，可知 $\delta_{AH} = 0$ 。又因無平向荷重，故計算時紙須採用方程(12-250)。因 AE 係一恆數，故該方程可成。

$$P = AE \delta_{AV} \sum \frac{\sin^2 a}{L} = AE \delta_{AV} \left(\frac{2(0.8)^2}{5} + \frac{1}{4} \right)$$

故

$$AE \delta_{AV} = \frac{P}{0.506}$$

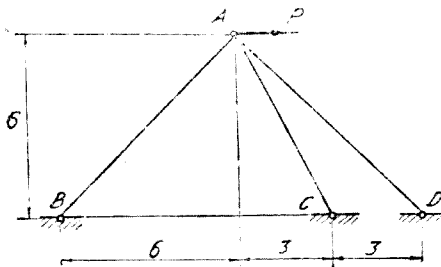
代入方程(12-249)中，得各桿之應力如下：

$$S_{AB} = S_{AD} = \frac{P}{0.506} \times \frac{0.8}{5} = +0.316 P$$

$$S_{AC} = \frac{P}{0.506} \times \frac{1}{4} = +0.494 P$$

習題 12-101. 與例題 12-44 相同，惟節點 A 之集中荷重 P 之傾度

係水平，其指向係向右。



習題 12-102.

習題 12-102. 附圖示一靜不定之平面結構，其 AB ， AC ，及 AD 三桿截面面積之相對值為 1:6:6。 E 係一恆數。用上述先求變位之方法，求此三桿之應力。

後 記

本書於二十九年六月中旬全部脫稿，距二十七年八月中旬起稿之日，歷時共二十有二閱月。惟其間因著者本人及家屬不適而中輟者約一月有半，因家屬疏散下鄉覓房遷徙亦費時約一月半，又因著者承江西省政府主席熊天翼先生電邀，由漢赴贛商議創設中正大學事宜往返計三閱月，故屬稿時間實際祇十六閱月耳。以全書之內容言，則底稿頁數共一千二百三十五，附圖大小共六百零七，影片共二十，附表共二十八，附錄共三，例題共一百三十二，習題共四百零二，以十六閱月之短促時間，完成如此繁多之篇幅，其工作之艱鉅匆忙，不言可喻。著者偶一翻閱已成之稿，雖私心足以自慰，但回顧所耗之心力，不禁心悸。如起稿之初，即知篇幅有如是之繁多，工作有如是之艱鉅，著者縱不搖動寫此書之初志，亦必幡然改圖，縮減篇幅，蓋可斷言。

著者日間忙於課業及校務，鮮有握管之暇。惟晚間八時以後，始能努力工作。夜闌人靜，思路通順，效率既高，興致自豪。因此常繼續至翌晨三時左右而不倦，如是者十六閱月如一日，所謂「夙夜匪懈」，殆非虛語。

寫此書時最繁重之工作，厥為例題之計算及附圖之繪製。例題為習題之例，故計算必力求簡明精確。且因須交互校核，答案之有效數字常須算至四位以上，致計算時算尺亦不能利用。

所有例題之計算，皆著者自任之，未嘗假手他人。附圖之可描自西籍者，百不一二。故皆須著者先畫一草圖，由助教以規矩繪成鉛筆圖，再由繪圖員描成墨筆圖。附圖中之中文仿宋字之書寫，又常係另一人之工作。鉛筆圖有若干幅較複雜者（例如屬於圖解法之附圖），且須著者以規矩自繪。其餘第一至第三章之鉛筆圖，係劉君壽快所繪。第四章之前半者，係茅君榮林所繪。自第四章後半以後至第十二章者。幾全係鄒君承曾所繪。鄒君任事勤謹而有條理，對於結構學既感興趣，且有心得，故於繪圖之工作能努力從事，孳孳不倦，著者至為銘感。設無鄒君之襄助，則此書之脫稿，恐不能如此順利而迅速。墨筆圖之描繪，除一小部分係由張明貴龐瑞二君擔任外，其餘概係李晶女士擔任。附圖中文仿宋字之書寫，則先後由張明貴李紫磨及龔乾一三君擔任。抄寫則先後由張明貴、陳達文、陳其亨、陸雲龍、李紫磨、張仲文諸君擔任。描圖及抄寫諸君，工作俱甚努力，惜多不諳本書之內容，致不免訛誤稍多，其校正必須著者自任之。凡諸君係先後繼續工作，每易一生手，著者又須自示以工作之方法。凡此皆使著者深感不便，否則本書之完成，或尙可提早一二月。

上述襄助諸君，均係國立清華大學及國立西南聯合大學之助教職員或學生，其襄助著者之完成此書，多荷梅校長月涵先生之贊同，著者對於梅校長之提倡學術，鼓勵著述之至意，至為欽佩，固不僅私人銘感已也。

或以本書之篇幅太多，講授時必須加以選擇與刪減，教者學者，將感不便，恐與著者以本書為教本之目的相違背。其實教者如對於其所授之學科如富有研究與經驗，則講授時必不為教本所囿。無論教本之取材如何精當，決不能與教者之見解完全吻合，而講授時毫無增減，故某書之是否適於為教本，在其寫述之方法，與其篇幅之多寡固無關也。勤奮之學者，對於一般教本每多病其內容簡略，語焉不詳，欲求貫通，必須參考他書多種。本書取材力求賅括，解說不厭周詳，正所以矯正一般教本之通病，而為學者謀便利也。

本書上中二冊之大部分，著者於二十九年度在國立西南聯合大學曾用作教本，初稿中不妥或訛誤之處，大約俱已修正。下冊則著者尚未經試用，但其內容經鄒承曾袁隨善二君細心校閱，不妥或訛誤之處亦多已修正。惟校讎工作，最為繁瑣而不易嚴密，疏漏之處恐仍不免，望讀者於此三致意焉。

蔡方蔭，昆明國立西南聯合大學，民國二十九年六月

圖、例題及習題索引

A. 圖之部

圖	頁數	圖	頁數	圖	頁數	圖	頁數
10-1	3	11-2	106	11-28	164	12-23	259
10-2	7	11-3	97	11-29	167	12-24	265
10-3	11	11-4	98	11-30	170	12-25	268
10-4	12	11-5	99	11-31	172	12-26	269
10-5	18	11-6	100	12-1	178	12-27	271
10-6	22	11-7	103	12-2	183	12-28	278
10-7	25	11-8	105	12-3	184	12-29	281
10-8	30	11-9	107	12-4	191	12-30	287
10-9	35	11-10	109	12-5	197	12-31	291
10-10	38	11-11	111	12-6	200	12-32	297
10-11	40	11-12	115	12-7	208	12-33	299
10-12	42	11-13	116	12-8	209	12-34	301
10-13	45	11-14	120	12-9	215	12-35	308
10-14	47	11-15	121	12-10	217	12-36	314
10-15	50	11-16	128	12-11	219	12-37	323
10-16	52	11-17	128	12-12	224	12-38	334
10-17	55	11-18	133	12-13	228	12-39	339
10-18	57	11-19	135	12-14	230	12-40	341
10-19	59	11-20	138	12-15	234	12-41	345
10-20	63	11-21	140	12-16	237	12-42	352
10-21	65	11-22	145	12-17	244	12-43	359
10-22	67	11-23	147	12-18	245	12-44	361
10-23	69	11-24	149	12-19	246	12-45	363
10-24	73	11-25	151	12-20	249	12-46	364
10-25	78	11-26	157	12-21	253	12-47	365
11-1	94	11-27	160	12-22	257	12-48	369

B. 例題之部

例題	頁數	例題	頁數	例題	頁數	例題	頁數
10-1	13	12-5	203	12-19	261	12-32	319
10-2	26	12-6	206	12-20	263	12-33	320
10-3	32	12-7	211	12-21	271	12-34	328
10-4	33	12-8	212	12-22	273	12-35	330
10-5	60	12-9	220	12-23	275	12-36	331
10-6	80	12-10	221	12-24	282	12-37	343
11-1	140	12-11	224	12-25	283	12-38	347
11-2	143	12-12	232	12-26	288	12-39	349
11-3	153	12-13	233	12-27	303	12-40	349
11-4	155	12-14	241	12-28	303	12-41	355
12-1	184	12-15	247	12-29	305	12-42	356
12-2	188	12-16	251	12-30	309	12-43	370
12-3	192	12-17	255	12-31	311	12-44	373
12-4	199	12-18	260				

C. 習題之部

習題	頁數	習題	頁數	習題	頁數	習題	頁數
10-1	9	10-45	91	12-16	205	12-60	306
10-2	10	11-1	108	12-17	207	12-61	306
10-3	15	11-2	108	12-18	207	12-62	306
10-4	15	11-3	108	12-19	211	12-63	306
10-5	16	11-4	108	12-20	212	12-64	313
10-6	16	11-5	108	12-21	214	12-65	313
10-7	19	11-6	112	12-22	214	12-66	313
10-8	20	11-7	112	12-23	215	12-67	313
10-9	20	11-8	112	12-24	222	12-68	313
10-10	28	11-9	123	12-25	222	12-69	321
10-11	28	11-10	123	12-26	222	12-70	321
10-12	28	11-11	123	12-27	222	12-71	321
10-13	28	11-12	123	12-28	226	12-72	321
10-14	29	11-13	123	12-29	226	12-73	332
10-15	34	11-14	123	12-30	226	12-74	332
10-16	34	11-15	127	12-31	226	12-75	332
10-17	34	11-16	127	12-32	227	12-76	332
10-18	43	11-17	143	12-33	233	12-77	336
10-19	43	11-18	143	12-34	234	12-78	337
10-20	43	11-19	156	12-35	243	12-79	344
10-21	43	11-20	156	12-36	243	12-80	344
10-22	43	11-21	156	12-37	243	12-81	346
10-23	43	11-22	158	12-38	248	12-82	347
10-24	43	11-23	165	12-39	252	12-83	349
10-25	44	11-24	165	12-40	256	12-84	349
10-26	49	11-25	166	12-41	261	12-85	349
10-27	49	11-26	166	12-42	261	12-86	350
10-28	49	11-27	170	12-43	263	12-87	354
10-29	49	11-28	171	12-44	263	12-88	354
10-30	50	12-1	181	12-45	264	12-89	356
10-31	50	12-2	186	12-46	264	12-90	356
10-32	61	12-3	186	12-47	273	12-91	358
10-33	61	12-4	186	12-48	273	12-92	358
10-34	61	12-5	187	12-49	273	12-93	360
10-35	61	12-6	189	12-50	275	12-94	367
10-36	71	12-7	189	12-51	275	12-95	367
10-37	80	12-8	194	12-52	277	12-96	367
10-38	80	12-9	194	12-53	283	12-97	368
10-39	82	12-10	194	12-54	285	12-98	368
10-40	83	12-11	199	12-55	288	12-99	372
10-41	83	12-12	199	12-56	288	12-100	372
10-42	83	12-13	200	12-57	296	12-101	374
10-43	90	12-14	205	12-58	296		
10-44	90	12-15	205	12-59	306		

