益古衍段 卷下
弧矢算術細草
貞

益古演段卷下

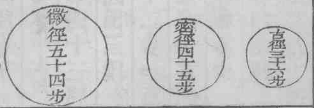
翰林學士知　制誥同修　國史欒城李冶撰

第四十三問

今有圓田三段一依古法一依密率一依徽率共計地二十畝五十二步一百七十五分步之二十三只云密徑多于古徑九步徽徑多于密徑九步問三徑各多少

荅曰古徑三十六步　密徑四十五步

徽徑五十四步



法曰立天元一爲古徑加多九步得𝍨太𝍠爲密徑以自之得下𝍰𝍠太𝍩𝍧𝍠爲密徑冪又以十一乘之得𝍧𝍱𝍠𝍠𝍱𝍧𝍩𝍠爲十四段密圓積於頭又立天元古徑加二之多步一十八步得𝍩𝍧𝍠爲徽徑以自之得𝍢𝍪𝍣𝍫𝍥𝍠爲徽徑冪也又以一百五十七乘之得𝍤〇𝍰𝍥𝍧𝍤𝍮𝍤𝍪𝍠𝍭𝍦爲二百段

徵圓積於中（案徵率周一百五十七徑五十徑乘周四歸為圓冪今以徑冪乘周當以徑五十除之再四歸之為圓冪不除便為五十乘之又四乘之之二百圓冪也）又置天元古徑以自之又三之得元川為四段古圓積於下乃求三積齊同分母而併之先以分母一萬七千五百（案此即十四除二十四萬五千之數）乘十四段密圓積得𝍡𝍣𝍤〇 𝍡𝍣𝍤〇〇 𝍡𝍣𝍤〇〇〇為二十四萬五千段密圓積於頭位次以分母一千二百二十五乘二百段徽積得𝍡𝍣𝍤〇 𝍡𝍣𝍤〇〇 𝍡𝍣𝍤為二十四

萬五千段徽積於中位次以分母六萬一千二百五十乘四段古積得○○為二十四萬五千段古積於下位三位相併得為二十四萬五千段如積數寄左然後列見積通分內子得八十四萬九千一百二十三就分以一千四百乘之得一十一億八千八百七十七萬二千二百與左相消得下式平方開之得三十六步為古徑也各加

多步見徽密二徑也

義曰所以齊同於二十四萬五千段者以元毋一百七十五乘一千四百得此數

依條段求之以一千四百乘田積於頭位置徽徑多古徑自之爲冪又以一千九十九（案置一千四百分以徽圓冪率一百五十七乘之方冪率二百除之即得）乘之減頭位續置密徑多古徑自之爲冪又以一千一百（案置一千四百分以密率圓冪

十一乘之方冪十四除之即得乘之復減頭位餘爲實又倍徽徑多古徑以千九十九乘之爲徽從又倍密徑多古徑以一千一百乘之爲密從併二從得五萬九千三百六十四爲從法廉常置三千二百四十九

義曰以一千四百乘積者取其三率皆可以除之也齊同分母須至于二十四萬五千段者蓋以分母一百七十五元乘積數一千四百此二數相乘得二十

四萬五千也

此問求眞積實數　古徑三十六步得積九百七十二步　密徑四十五步得積一千五百九十一步一十四分步之一　徽徑五十四步得積二千二百八十九步二百分步之一十二

併三積全步四千八百五十二步外密零一十四分步之一徽零二

百分步之一十二以上維乘下位密子得二百分徽子得一百六十八分相併得三百六十八分爲子實又上二位相乘得二千八百分爲母法子母俱以十六約之爲一百七十五分步之二十三一千四百乘田積來歷葢只就密率上定之也置一千四百在地以密率十一之如十四而一爲一千一百積若以古率三之四而一則得一千五十積若以徽率一百五十七

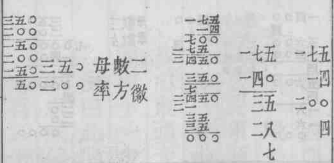
乘之如二百而一得一千九十九積所以用一千四百乘積者緣古法四徽法二百皆可以除之也　求三積齊同分母元分母數一百七十五元乘積數一千四百此二數相乘二十四萬五千即大分母也三積總率皆齊同於此既得此齊同分母乃各以先求到段數約之徽率得一千二百二十五密率得一萬七千五百古率得六萬一千二百五十

故反以乘段數皆齊同於二十四萬五千也

〔案〕條段分母數簡于前法者用舊術也然各分母之數猶有可省者蓋衆數取分母數必得最小者方爲確準其義見秦九韶數學九章大衍術中今附其法於後以發明前法所未盡者

古方率　徽方率　密方率　元母

法列四數先以元母一百七十五與密方率十四相度得



度盡二數之數爲七次以二數相乘以度盡數除之得三百五十爲二數總母又以二數總母與徵方率數相度得度盡二數之數爲五十以二數相乘度盡數除之得一千四百爲三數總母又以三數總母與古方率數相度則古方率四郎爲度盡二數之數

一四〇〇　一四〇〇　一四〇〇
四　一二
五六〇〇　二〇〇
一四〇〇　二〇〇
四　〇〇〇
五六〇〇
四
一六
一六〇〇〇

四

三數母
古數母

三五〇
二〇〇
七〇〇〇〇
一四〇〇
五
七〇〇〇〇
五
三〇
二〇
〇〇〇〇

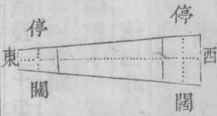
二數相乘度盡數除之仍得一千四百即為四數總母然後以密方率十四除之得一百為密分母以徵方率二百除之得七為徵分母以古方率四除之得三百五十為古分母以元分母一百七十五除之得八為原積分母以此數與各段羃積相乘除較原數所省多矣

第四十四問

今有梯田一段長二百四十步竝不知東西兩闊只云從東頭截長五十步計地三畝從西頭截長三十步計地五畝問二闊各多少

荅曰東頭元闊一十一步二分　西頭元闊四十一步九分二釐

法曰此問先須求見兩頭各截之停廣求東截停廣者置東頭所截三畝之積七百二十步以截長五十步除之得一



十四步四分為東截地之停廣也求西截停廣者置西頭所截五畝之積一千二百步以截長三十步除之得四十步為西頭所截停廣也乃立天元一為每步之差以東頭截長五十步乘之折半得𝍡𝍤元以減東停廣一十四步四分得𝍠𝍫𝍣分𝍡𝍤元為東頭元小闊於上再置天元差步以西頭截長

三十步乘之得𝍫〇元折半得𝍩𝍤元加入西頭

停廣四十步得𝍬〇太𝍩𝍤為西頭大闊也內

減東頭小闊餘𝍡𝍫𝍥步𝍫〇為二闊總差也

寄左再立天元每步差以正長二百四

十步乘之得𝍡𝍬〇元亦為二闊總差與左相

消得𝍪𝍥𝍰𝍧步𝍡𝍩〇下法上實如法而一得一

分二釐八毫為每步之差也置每步之

差以西頭截長三十步乘之得三步八

分四釐折半得一步九分二釐加入西

頭停廣四十步得四十一步九分二釐爲西頭元大闊也又置每步之差以東頭截長五十步乘之得六步四分折半得三步二分以減於東頭停廣一十四步四分餘一十一步二分爲東頭元小闊也此問止求每步之差更不須以條段明之

舊術依法求得東停廣與西停廣數乃以二停廣相減餘以二百而一謂東截長五十

步其停廣當二十五步餘去了二十五
步也西截長三十步其停廣當一十五
步餘去了一十五步也兩頭計去了四
十步以減於正長二百四十步餘二百
步所得爲每步之差乃副置半步之差
左以東截長乘之以減東停廣餘爲東
元闊也右以西截長乘之以加西停廣
併爲西元闊也又法置一步之差以正
長二百四十乘之所得爲都闊差也以
都闊差加於小頭闊則爲大頭闊也

第四十五問

今有方田一段中心有方池水占之外計地一畝只云從外田東南隅至內池西南隅一十三步問內外田方各多少

荅曰內池方七步　外田方一十七步

法曰立天元一爲內池方以自乘倍之得〇元||加入見積得[illegible]||寄左又列至步自之得一百六十九步又倍之得三百三十八步與左相消得[illegible]〇[illegible]開平方得七步卽內池方也池方自之加入

見積再開平方卽外田方面也

依條段求之只據前式便是更不須重畫也只是將見積打作四段小直田以池面爲較以外田方面爲和以斜至步爲弦然此問惟是其池正在方田中心可依此法求之若稍有偏側則不能用也

舊術列去角步自乘爲二位頭位減半

田積開平方見內池面下位加半田積開平方見外田面也

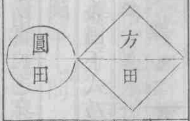
第四十六問

今有方圓田各一段共計積一百二十七步只云其方面大如圓徑圓徑穿方斜共得二十步問面徑各多少

荅曰方面一十步　圓徑六步

法曰立天元一爲圓徑減穹步得二〇太十為方斜以自之得亖〇玊〇丨爲方斜冪於

頭再置天元圓徑以自之又以一步四分七釐乘之得〇元步爲展起圓田也



併入頭位得〇〇步爲展數如積一段寄左然後列見積一百二十七步兩度下加四兩度下加四止是以一步九分六釐乘之也以一步九分六釐乘之者變方田爲斜田也得二百四十八步九分二釐與左相消得下式〇開平方得六步即圓

徑也以徑減穿步卽方斜也

依條段求之穿步冪內減去展起見積

爲實二之穿步爲從二步四分七釐虛

隅

義曰下式乃展起之圓積也亦俱是減

數也此數該一

步四分七釐之

方又從步內疊

出一步虛隅計

得二步四分七釐常法也

舊術曰以一步九分六釐乘田積爲頭位又列穿步自乘內減去頭位餘爲實倍穿步爲從廉常置二步四分七釐減從開方

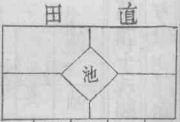
第四十七問

今有直田一段中心有小方池結角占之外計地二千七十九步只云從田二頭至池角二十一步半兩邊至池角七步半問三事各多

少

荅曰長六十四步　闊三十六步　池方一十五步

法曰立天元一爲內方面身外加四又加二之頭至步四十三得𝍬𝍢太𝍠𝍬爲田長也又置池方面身外加四又加入二之邊至步一十五得𝍩𝍤太𝍠𝍬爲田闊也長闊相乘得下式𝍥𝍬𝍤𝍰𝍠𝍪𝍠𝍱𝍥爲直田積於頭又置天元池方面以自之得〇元𝍠爲內方

池以減頭位得𦬒非吋為如積一段寄
左然後列見積二千七十九步與左相
消得䏿非𠂇吙開平方得一十五步即內


池方面也方面外加四副二
位若加兩頭至池步見長若
加兩邊至池步即見闊也
依條段求之積步內減四段
邊至與頭至步相乘數為實
併邊至頭至步倍之又身外加四為從

九分六釐常法

義曰水池外有九分六釐常法從步皆加四者蓋於斜上求方面也

第四十八問

今有方田一段內有直池水占之外有地三百四十步只云其池廣不及長四步又云從田楞通池長一十五步問三事各多少

荅曰田方二十步　內池長一十步　廣

六步

法曰立天元一為池長減於倍通步得(銳案元本脫得字今增)𝍪〇太 𝍮為田方面以自之得𝍧〇 𝍥 一為田方積於頭再置天元池長內減較四步得(銳案元本脫得字今增)𝍫太 一為池闊以天元乘之得𝍫元 一為直池積以減頭位得

𝍧〇 𝍪𝍥 〇為如積一段寄左然後列直積三百四

十步與左相消得𝍤太𝍫𝍥下法上實如法而一得一十步即池長也以長減於倍通步即方田面也

依條段求之四段通步冪內減田積爲實四之通步內減池較爲法如法得池長

義曰四之通步爲法內欠一个池長冪

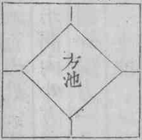
却用所漏之池補之猶差一池較爲法
合除之數也旣於實積內虛了此數故
作法時於四之通步內減去一數也

第四十九問

今有方田一段內有小方池結角占之外計地
一萬八百步只云從外田楞至內池角各一
十八步問內外方各多少

荅曰外田方一百二十步　內池方六十
步

方田



法曰立天元一爲內方面身外加四又加倍至步三十六得爲田方面以自乘得爲外方積於頭再置天元內方面以自之得元爲內池積也以減頭位得爲如積一段寄左然後列眞積一萬八百步與左相消得開平方得六十步爲內池方面也內方面身

外加四又加倍至步卽方面也

依條段求之見積內減四段至步冪為實四之至步身外加四為從九分六釐常法

減	從	減
從	池	從
減	從	減

義曰從步內加四者是於一个方面上求

第五十問

今有方田一段內有小方池結角占之外計地九千三百七十五步只云從外方角至內池面各五十七步半問內外方各多少

荅曰外田方一百步　內池方二十五步

法曰立天元一為內方面加倍至步一百一十五步得𝍠𝍩𝍤𝍠為外田斜以自之得[illegible]𝍠為所展方積於頭再置天元內池面以自之得元𝍠為內池積又就分以一步九分六釐乘之得下元[illegible]亦

方田

爲所展之池積也以減頭位得　　爲一段所展如積寄左然後列眞積九千三百七十五步以一步九分六釐乘之得一萬八千三百七十五與左相消得　　開平方得二十五步卽內方面也

依條段求之展積內減四段至步冪爲實四之至步爲從九分六釐虛常法

義曰展積畴其池亦展得虛了九分六釐也

第五十一問

今有方田一段內有小方池結角占之外計地四十五畝只云從外田南邊斜通池北角一百二步問內外方各多少

荅曰外田方一百二十步　內池方六十

步

法曰立天元一為內方面身外加四為池斜以減於倍通步二百四步得𝍡〇𝍣太𝍠𝍣元為外方面以自之得𝍣𝍩𝍥𝍩𝍥太𝍭𝍦𝍩𝍡元𝍠𝍱𝍥為方田積於頭又置天元內池面以自之得下元𝍠為內方池也以內方池減頭位得𝍣𝍩𝍥𝍩𝍥太𝍭𝍦𝍩𝍡元𝍱𝍥為如積一段寄左然後列眞積一萬八百步與左

相消得平方開之得六十步爲池方面也

依條段求之四段通步冪內減見積爲實四之通步加四爲從九分六釐虛隅法

義曰從步身外加四者葢是於池斜上求池面也

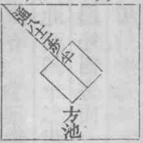
舊術曰倍通步自乘以田積減之餘折半爲實倍通步加四爲從廉常置四分八釐減從開方見內方面

第五十二問

今有方田一段內有方池結角占之外計地三十九畝零一十五步只云從田東南角至內池西北面八十二步半問內外方面各多少

荅曰外田方面一百步　內池方面二十五步

方田



法曰立天元一爲內方面減於倍通步一百六十五步得爲外田斜也以自之得爲所展外田積於頭再置天元池方面以自之爲方池積又就分以一步九分六釐乘之得爲所展方池積也以減頭位得爲展起底如積一段寄左然後列眞積三十九畝一十五步

通納得九千三百七十五步又就所展分母一步九分六釐乘之得一萬八千三百七十五步與左相消得平方開之得二十五步即內池面也以池面減於倍通步又身外去四即外方面也

依條段求之四段通步羃內減展積為實四之通步為從九分六釐常法

義曰元以展積減四段通步羃時漏下

一步九分六釐池積今

來於從步內疊用了一

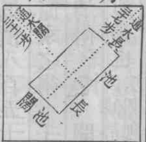
个方外剩九分六釐

第五十三問

今有方田一段內有直池結角占之外計地八百五十步只云從田角通水長三十七步通水闊三十二步問三事各數

荅曰池長二十五步　闊一十五步　外

田方三十五步



法曰立天元一爲內池長減於倍通步七十四步得𝍯𝍣太𝍠爲外田斜也以自之得𝍤𝍭𝍦𝍥太𝍩𝍫𝍧𝍠爲所展外田積於頭再置倍通長七十四步內減倍通闊六十四步餘一十步乃池長闊差也或直以通長通闊相減餘者倍之亦爲長闊差也置天元池長內減長闊差得𝍩太𝍠爲闊

也以天元長乘之得元為直池積也

又就分以一步九分六釐乘之得元步太

為展起底直池積也以減頭位得下式

太為所展如積一段寄左然後列

眞積八百五十步就分以一步九分六

釐乘之得一千六百六十六步與左相

消得太開平方得二十五步為內

池長也以減倍通長步又身外去四即外田方面也

依條段求之四段通長冪內減展積為

實四之通長於頭以一步九分六釐乘
長闊差以減頭位爲從九分六釐常法

義曰據從步
合用之積於
壘起處少了
一方今將減
積時漏下所
展水池補了一甲之地若更得一乙之
地則共補成一步九分六釐之方也（案原

圖仍用正方今易為直方庶為簡明今不可補故於從步內減去所展差步便是於從法合用之積內借了一乙之地恰補就一步九分六釐之方也除補了壘起的一步方外猶剩九分六釐故以之為常法也

第五十四問

今有方田一段內有直池結角占之外計地一千一百五十步只云從田角至水兩頭各一十四步至水兩邊各一十九步問三事各多

少

荅曰方四十五步　池長三十五步　闊

二十五步

法曰立天元一爲池闊

加二之邊至步三十八

得　爲外田斜以自

之得　爲所展外

田積於頭二之邊至步內減二之頭至

步餘一十步爲池長闊差也再置天元

池闊加差一十步得一太一為池長也用
天元池闊乘之得一元一為直池積也又
就分以一步九分六釐乘之得一𝍦元𝍨𝍮步
為所展之池積也以減頭位得𝍨𝍪𝍢𝍮𝍫太
為所展如積一段寄左然後列眞積一
千一百五十步以一步九分六釐乘之
得二千二百五十四步與左相消得
𝍧太𝍢𝍮𝍫開平方得二十五步為池闊也
又加二之邊至步又身外去四即外方面也

依條段求之展積內減四段邊至步冪爲實四之邊至步於頭以一步九分六釐乘長闊差減頭位餘爲從九分六釐虛常法

銳案此圖有脫誤義稱四段紅積亦未審何指闕疑可也

義曰所展池積內將四段紅案原圖應減者以紅

色別之積恰補作九分六釐虛常法其兩个所占半差於減從時又以一步九分六釐乘之者蓋欲合身外加四所乘積也

案展積義多未備此條尤略今另具圖說以詳之

方田展積

義曰外四隅方所減之四至羃也中十字積爲實則池闊爲隅四之至

步為從也附直池外斜方展池積也平分上下二尖形附於左右二尖形外成一原池闊乘展池正長之直方展池正長為原池長之一步九分六釐十字積與展池積之較為實是前從隅內應少原池長之一步九分六釐又為少原池長闊較之一步九分六釐故展較減前從以為從展隅反減前隅為虛隅也

第五十五問

今有圓田一段內有圓池水占之外計地二十三畝一分只云內外周與實鈗案元本脫與實二字今增徑共相和得四百二十四步問內外周徑各多少圓依密率

荅曰外周二百八十六步　徑九十一步

內周一百一十步　徑三十五步　實徑二十八步

法曰立天元一爲實徑以減相和步四百二十四得𝍣𝍪𝍣太𝍠̸爲內外周共步用天元

實徑乘之得爲如積兩段寄左然

圓田

後列二之眞積一萬一千八十八步與左相消得開平方得二十八步爲實徑也以徑步除田積於頭位又二十二乘徑步如七而一得數若加頭位卽外周若減頭位卽內周也

義曰以徑步除田積所得乃半內周半

外周共步也又據古率三个實徑卽是半个外內周差步也緣此問係是密率故以二十二乘徑以七約之也既得半差以加共步卽是外周以減共步卽是內周也又據古率三之實徑以加減共步者緣共步便三空徑三實徑共數也於此共數內加三實徑則恰是三个大圓徑故爲一个外周也若共數內減去三實徑則正有三个小圓徑故爲一个

內周也今是密率故先以二十二之七而一所以附就此數以求內外周也

依條段求之倍積步爲實和步爲從一益隅

內外周實徑和

實徑 田 積 虛

義曰以和步爲從是於內外周數外又引出一步虛常法也

第五十六問

今有圓田一段內有圓池水占之外計地二十

三畝一分只云從外田通內池徑六十三步

問同前

荅同前

法曰立天元一爲實徑加通步六十三得　爲外田徑以自之得下　爲外圓徑冪又十一之得下式　爲十四段外圓積於頭再置天元實徑以減通步得

爲內圓徑以自之得[illegible]爲內圓徑
冪又十一之得[illegible]爲十四段內圓
積也以減頭位得下式[illegible]步爲十四段
如積寄左然後列眞積二十三畝一分
法通得五千五百四十四又就分一十
四之得七萬七千六百一十六與左相
消得[illegible]下法上實如法而一得二十
八步爲實徑也以實徑加通步卽外徑
若減通步卽內池徑也

依條段求之十四之積爲實四十四之通步爲法求得實徑

此十四个眞積便是實徑爲平七个內外周爲長一段直田也

此問難以爲式强立此式以推之每積之長乃三个通步今十四之積合以四十二个通步除之今用四十四之通步爲法者緣密率之周稍多於古率之周也假令古率七个積卽合用二十一个

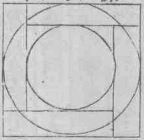
通步爲法若依密率七个積卽合用二十二个通步爲法此問乃併十四之積爲實是合用四十四个通步爲法也

舊術曰二十二之通步如七而一爲法除田積見徑又法併通步自之又十一之於上以十四之積減上餘爲實四十四之通步爲法見池徑

案條段皆於立天元一內取出而於方圓變積之義或未暇深思故謂難以爲

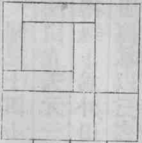
式若以方環圓環解之固易易耳今增一圖義於後而舊術又法先求池徑更可互相發明因竝附焉

條段圖



義曰圓羃率十一方羃率十四以十四乘圓環積便爲十一方環積每環爲實徑乘通步之直方四故以十一方環積爲實四十四通步爲法卽得實徑也

舊術又法圖



義曰倍通步卽大小徑併其冪內有大小徑冪各一大小徑相乘直方二內減圓環積所變之方環積餘小徑冪二大小徑相乘之直方二又爲小徑乘大小徑併之直方二又爲小徑乘通步之直方四故以十一倍之積較爲實四十四之通步爲法卽得小徑也

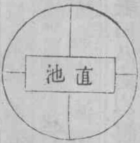
第五十七問

今有圓田一段內有直池水占之外計地八千七百四十四步只云兩頭至田楞各二十一步兩畔至田楞各四十五步問三事各數

荅曰田徑一百二十四步　池長八十二步　闊三十四步

法曰立天元一爲池闊加二之畔至步得𝍱〇太𝍠爲外田徑以自之得𝍧𝍩〇〇𝍠𝍰〇𝍠爲田徑冪以三之得𝍡𝍬𝍢〇〇𝍤𝍬〇𝍢爲四段圓田

圓田



積於頭二一至步相減餘二十四步又倍之得四十八步為池長闊差也再立天元池闊加差得𝍬𝍧太𝍠為池長以天元闊乘之得𝍬𝍧元𝍠為池積又就分四之得𝍠𝍲𝍡元𝍣為四段直池積以減頭位得𝍣𝍦〇𝍢𝍫𝍣𝍠為如積四段寄左然後列眞積八千七百四十四步就分四之得三萬四千九百七十六步減

頭位(銳案此滅頭位三字當作與左相消得五字)𠦂卌十平

方開之得三十四步爲池闊也

依條段求之四之見積內減十二段畔至步冪爲實十二之畔至步內減四个長闊差餘爲從一步虛常法

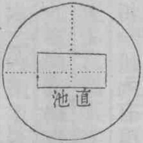
義曰八處以紅誌之者(銳案今以紅字誌之)共是

從內所減之數也
舊術曰四之積步於上又倍一畔步自乘三之減上餘爲實又併一頭一畔步六之內減了長闊之差餘爲從廉常置一步減從開方見池闊也

第五十八問

今有圓田一段內有直池水占之外計地一千五百八十七步只云從田楞通池長四十二步通池闊三十七步問三事各數

荅曰田徑五十四步　池長三十步　闊二十步



法曰立天元一爲內池長以減倍通長八十四步得[illegible]爲田徑以自之得[illegible]爲田徑冪以三之得[illegible]爲四段圓田於頭再立天元一爲池長內減長闊差得[illegible]爲池闊以天元一乘之得[illegible]元[illegible]又就分

四之得𝍬元𝍢為四段池積求長闊差者倍通長內減倍通闊即是也以減頭位得下式𝍣𝍢𝍣𝍭〇十為四段如積寄左然後列四之眞積六千三百四十八步與左相消得𝍥〇𝍣𝍭〇十開平方得三十步為內池長也以長減倍通長即田徑也

依條段求之十二之通步冪銳案此及下通步並謂通長步也內減四之見積為實十二之通步內減四差為從一步常法

義曰十二之從步内減去了三个差又以三个漏下池積補了疊起底三个虛方外猶剩一池更用一差減從併上所剩之一池恰補成一步常法也

第五十九問

今有二方夾一圓失却圓水占外有田積一十

一畝五分五釐其方圓相去重重徑等問方圓各多少

荅曰內方面一十二步　圓徑三十六步

外方面六十步

法曰立天元一爲等數五之得|||||元爲外方面自之得〇元 =|||||爲外方積於頭一（銳案此及下文次位下兩一字當是欲區別頭位次位故作一畫以次立天截之展轉傳寫乃誤爲一字耳）

元一爲等數以三之得𝍢元爲中圓徑以
自之得元𝍨爲圓徑冪又三之四而一
得元𝍥𝍶𝍤爲池積以減頭位得元𝍡𝍩𝍤爲外
田積內減了中圓積之數於次位一再
立天元等數便爲內方面以自之得元𝍠
爲內方積却加入次位得下𝍡𝍤步爲如
積一段寄左然後列眞積一十一畝五
分五釐以畝法通得二千七百七十二
步與左相消得𝍥𝍰𝍡𝍡步下法上實如法

而一得一百四十四步再開平方得一十二步爲等數也〔銳案此下法乃天元自乘冪之積數故除實所得須再開方若以此下法爲常法無從開平方則徑得等數矣下問放此〕便是內方面也三之爲中圓徑五之爲外方面　此問更無條段舊法以十九步二分半除積步得內方冪只是以一步推之也假令內方一步則圓徑三步外方面五步也於外方積二十五步之內減了中圓積六步七分半却加入內

方積一步計得十九步二分半也

第六十問

今有二圓夾一方失却中方水占外有田積一十四畝一分七釐半其方圓相去重重徑等問方圓各幾何

荅曰內圓徑一十八步　方面五十四步

外圓徑九十步

法曰立天元一爲等數以五之爲外圓徑以自之得〇元=|||||爲外徑冪又三之四

而一得一𝍨𝍣步為外田積於頭再立天元

等數以三之為中方面又自之得元𝍢

為中方冪以減頭位得

元𝍨𝍣為外圓積內減了

中方冪之數於次位又

置天元等數便為內圓

徑以自之得元𝍠為內徑冪又三之四

而一得元〇𝍣為內圓積也却加入頭位

得元一〇𝍪為如積一段寄左然後列眞積

一十四畝一分七釐半以畝法通得三千四百二步與左相消得𝍣𝍪〇元下法上實如法而一得三百二十四步再開平方得一十八步爲等數便是內圓徑也副置之三因爲中方面五因爲外圓徑也　此問與前問意同更無條段舊法以十步半除積步得內徑羃亦只是以一步推之假令內圓徑一步則是中方面三步外圓徑五步先置外圓積一十

八步七分半內減了中方積九步却加

內圓積七分半共得一十步半也

第六十一問

今有方田一段𨽻西北隅有圓池水占之外計

地九百二十五步只云從外田東南隅至池

楞二十五步問面徑各多少

荅曰外田方面三十五步　內池徑二十

步

法曰立天元一爲內池徑身外加二得

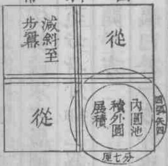
玩步爲池東南楞至田西北角也又加斜至步二十五步得[illegible]太[illegible]爲外田斜以

方田

自之得[illegible] [illegible]爲田斜冪於頭再立天元圓徑以自之爲冪又以一步四分七釐乘之得[illegible]元[illegible]爲所展圓池積以減頭位得[illegible] [illegible]爲所展如積一段寄左祠立天元身外加二者以方求斜合加四今求一半故加二也案加二係以方求半方半斜和之數也然後

列眞積九百二十五步就分以一步九
分六釐乘之得一千八百一十三步與
左相消得𝍠𝍣上〇〇𝍢平方開得二十步爲
池徑也池徑外加二叉添入斜至步却
身外除四卽外方面也
依條段求之展積內減斜至冪爲實倍
至步身外加二爲從三釐虛常法減從
開平方
義曰於一方外虛了四分七釐從上帶

田斜冪



了四分外虛七釐又於從上乘起四釐外猶虛三釐故以三釐爲常法（銳案此文有舛誤蓋展池一方外所虛之四分七釐每分以圓徑爲長十分圓徑之一爲闊每釐爲十分圓徑之一之自乘冪兩个從步上所帶之四分每分以圓徑爲長以十分至步之一爲闊與所虛之分不相等從上本不得有乘起之四釐即使有之其每釐亦竝爲十分至步之一之自乘冪與所虛之釐亦不相等分釐既不相等卽不得以從上所加之數消去所虛之數也從

上所以加二者緣田斜冪內減去至步冪又少御一步四分四釐一个虛方外有圓徑加二乘至步底二段直積此直積與至步加二乘圓徑底二段直積等今求圓徑故倍至步加二為從非因虛御四分四釐乃有所加也三釐為虛常法者展池應虛一步四分七釐所少之虛方止有一步四分四釐猶虛三釐故以為虛常法亦非因加入四分四釐乃只虛得三釐也

此圖內二分合畫作極細形狀與四分七釐外圓邊正自相應今不應者但二分差闊耳所以畫作差闊之狀者正欲易辯二分之數也

案原圖式有附斜至羃外磬折形無附池徑羃外磬折形且二形相離皆傳本之誤也故義中所論亦不知其何指今訂補此圖二分不必加闊未嘗不易辨也

第六十二問

今有方田一段靠西北隅有方池結角占之外計地四畝一十五步只云從外田東南隅斜至水方面一十九步問內外各多少

荅曰外方面四十步　內方面二十五步

法曰立天元一爲池方面身外加四八又加八斜至步一十九步得𝍠𝍨太𝍠𝍣爲外田斜也先將池斜變爲方故加四後又將池方變爲斜復合加四兩度加四於一步上合得一步九分六釐今求一半故身外止加四八也案方一步求斜身外加四又以斜爲方求斜再身外加四是原方求再斜爲身外加九六今求以自半方半再斜之和數故加四八也

以自之得𝍢𝍥𝍠太𝍤𝍢𝍡𝍠𝍨𝍥爲外田斜冪於上再立天元一爲池方面以自之又以四十九乘

之如二十五而一得元爲展起方池
積以減上得太爲所展如積一段
寄左然後列眞積四畝一十五步以畝
法通得九百七十五步又隨分以一
步九分六釐乘之得一千九百一十一
步與左相消得平方開得二十
五步爲內池方面也於此方面上兩次
求斜合得一步九分六釐以除元方一
步外有九分六釐半之則得四分八釐

故此方面上加四八更加入斜至步為大方斜也

以條段求之展積內減至步冪為實二之至步以一步四分八釐乘之為從二分三釐四絲為常法

義曰此一問其展起積時於一池之外虛了九分六釐却於一个從步內加四分八釐二个從

步計加了九分六釐恰就了所展虛數銳案此文舛誤與上問正同蓋展池所虛之九分六釐與兩个從步所加之九分六釐元不相等不得云恰就了所展虛數也從步加四分八釐之故緣見積內有方面加四八乘至步底二段直積此直積與至步加四八乘方面底二段直積等今求方面須於二之至步上各加四八為從乃合見積之數非因虛卻九分六釐有所加也而除外有一段四分自乘數該一分六釐於上又有兩段四分乘八釐數案附自乘方外該六釐四毫於次又有一段八釐自乘數案小方隅該六毫四絲於下

三位併得二分三釐四絲此數係是於
展積內實有之數故以為常法也
舊術以四十九乘田積如二十五而一
於頭位以至水步自乘減頭位為實餘
與條段同
案原圖式四分八釐方內按分釐數細分
之因其數甚微又以分數釐數作等數分
之終不免混淆今以廉隅線易之
第六十三問

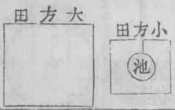
今有大圓田一段大小方田二段其小方田內有圓池水占之外共計積六萬一千三百步只云小方田面至池楞三十步大方田面多於小方田面五十步其圓田徑又多於大方田面五十步問三事各多少

荅曰小方田面一百步　池徑四十步

大方田面一百五十步　圓田徑二百步

法曰立天元一爲內池徑加二之至水

六十步為小方面於小方面上又加入大小方面差五十步卽大方面也於大方面上又加入大圓徑大方面差五十步卽大圓徑也具圖於左



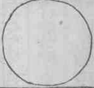
一內圓徑 〇太 𝍠　一小方面 𝍮〇太 𝍠

一大方面 𝍠𝍩〇太 𝍠　一大圓徑 𝍠𝍮〇太 𝍠

乃先置天元內圓徑以自之又三之得 〇元 𝍢 為四段圓池積於上又置小方面 𝍮〇太 𝍠 以自之得 𝍫𝍥〇〇太 𝍠𝍪〇元 𝍠

爲小方積以四之得下式 𝍫〇 𝍪〇 𝍢 爲四段小方積於次又置大方面以自之得 𝍫〇 𝍪〇 𝍠 爲大方積四之

大圓田



得 𝍬〇 𝍫〇 𝍢 爲四段大方積於下又置大圓徑下式 𝍮 𝍠 以自之得 𝍫〇 𝍪〇 𝍠 爲大圓徑冪以三之得下式 𝍫〇 𝍬〇 𝍢 爲四段大圓積於下位之次併下三位得下式 𝍭〇 𝍫〇 𝍦 於右以四池積 𝍤𝍢 減於右得 𝍭〇 𝍫〇 𝍤 爲如積四段寄左然後列眞積

六萬一千三百步就分四之得二十四

萬五千二百步與左相消得一丅〇〇 川〇 开平

方開之得四十步爲內池徑也各加差

步卽各得方面與圓徑也

依條段求之四之田積於頭位內減三

段（案落大圓徑三字）多池徑冪又減四段大方

面多池徑冪又減十六段至水步冪爲

實六之圓田多池徑步又八之大方田

面多池徑步又十六之至水步三位併

之得二千三百二十步爲從法廉常置八步開平方

三段圓徑冪

從	減	從	減	從	減
方	從	方	從	方	從

四段大方田積

從	減	從	減	從	減	從	減
方	從	方	從	方	從	方	從

四段小方田積

減	從	減	減	從	減	減	從	減	減	從	減
從	〇	從	從	〇	從	從	〇	從	從	〇	從
減	從	減	減	從	減	減	從	減	減	從	減

義曰三段圓徑羃乃四个圓田積此數內有三个方也其四段大方田積內有四个方也其四段小方積每个圓池外餘二分半四池計餘一步方也三位上併帶八步方

第六十四問

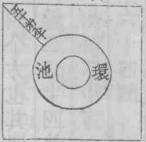
今有方田一段中心有環池水占之外計地四十七畝二百一十七步只云其（銳案元本環作共誤）環水內周不及外周七十二步又從田四角至

水各五十步半問內外周及田方面各多少

荅曰外周一百八十步　內周一百八步

田方一百一十五步

方田



法曰立天元一爲池內徑先以六除內外周差七十二步得一十二步爲水徑倍之得二十四步加入天元池內徑得𝍠𝍪𝍣太
𝍠爲池外徑又加倍至步一百一步得下式𝍠𝍪𝍣太
𝍠爲

外田斜以自之得𝍧𝍣𝍤〇丨為田斜冪於
頭位再立天元池內徑加入二之水徑
得𝍢𝍠𝍥太丨為池外徑以自之得𝍥𝍤𝍢𝍨元丨為
外徑冪又以一步四分七釐乘之得下
式𝍩𝍢𝍤𝍣𝍣𝍡步為展起底外圓積於次上
再立天元一池內徑以自之元丨亦以
一步四分七釐乘之得元𝍣步為展起
底內圓積以減次上得𝍩𝍢步𝍤𝍣〇為所
展池積也以此池積減頭位得下式

步丨爲展起如積一段寄左然後列眞積四十七畝二百一十七步以畝法通納之得一萬一千四百九十七步又就分以一步九分六釐乘之得二萬二千五百三十四步一分二釐與左相消得下式步開平方得三十六步卽池內徑也三之爲內周又加差爲外周置內徑加二之水徑又加倍至步爲外方斜也置外方斜身外去四卽外

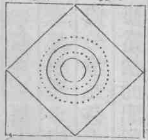
田方面也

依條段求之以一步九分六釐乘田積於頭位以水徑加至步以自之爲冪又四之以減頭位又倍水徑自乘又以一步四分七釐乘之却加入頭位爲實又水徑加至步四之於頭位又三之水徑以一步九分六釐乘之減頭位爲從一步常法此問圖式有三第一式卽所畫原樣是也以一步九分六釐乘之變爲

斜冪其式如後

右第二式也黑者爲元問點者盡是展數恐糢糊難辯再具加減圖式於下更不見舊式也

展積



展積

右第三式也【銳案】據下方環四分之三加減各有三段則此式虛環內當作三段加三段減今作四段加兩段減與下文不相應蓋其圓環以傳寫之誤

條段命之只是一个方環內取四分之三也却加入三段展起底水徑羃外只有三段展起底水徑乘內圓徑直田積也此係展環之虛數也今以至步竝水徑共爲從故於內却除去水徑之虛步也必須以一步九分六釐乘水徑而去從者緣二停虛環竝是展起之積故減從時將水徑亦展起而減之也案展水徑展內圓徑皆於原數身外加四今以內圓徑爲不動則水徑必兩度加四故以一步

九分六釐乘之也

元和李銳算校

錢塘厲鍔覆校

桐鄉馬以良再校

益古演段卷下

是書所稱某氏益古集今已亾佚不傳楊輝摘奇載元豐紹興淳熙以來刊刻算書有益古算法一種當卽此書也某書以方田圓田爲問於徑圍方斜相與之率能反復變化而爲術之意猶引而未發敬齋先生恐學者難曉于是有演段之作所謂演者演立天元段者以條段求之也蓋敬齋晚年得洞淵九容之說日夕玩繹所得甚深故所著海鏡演段二書並以立天元術爲根本銳受業嘉定錢

少詹之門究心數學十年於今於天元如積之術尤所篤好以爲斯術者算家至精之詣縱使隸首商高復生今日亦當無以過之者也唐王孝通輯古算經世稱難讀太史造仰觀臺以下十九問術文隱祕未易鑽尋而以立天元一御之則其中條理固自秩然無可疑惑由是愈歎立天元術之妙嘗倣演段之例爲輯古算經衍一書急欲刋以問世匆匆猶未暇也知不足齋主人刻海鏡既成復以

演段介錢唐何君夢華元錫屬鋭算校而梓之其表揚古人之心眞足尚已校畢因書此于簡末以見是書之可寶願當代明算君子毋忽視焉

嘉慶二年歲次丁巳冬十一月廿二日元和李鋭跋

弧矢算術細艸

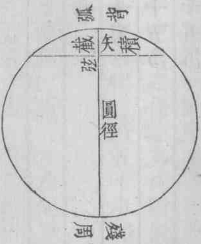
心算術略說

說弧矢者肇於九章方田自是以後北宋沈括以兩矢冪求弧背元代李冶用三乘方取矢度引信觸類厥法綦詳矣明顧箬溪應祥作弧矢算術既如積之未明徒開方之是衍務末遺本不亦傎乎銳受學師門泛觀古籍硏九數者十年冀千慮之一得爰集弧矢之問入以天元之法凡十三術都爲一卷願與海內游藝之士共審正焉元和李銳

弧矢算術細草

元和李鋭學

弧矢圖式



今問正數

矢二十五步

弦一百五十步

圓徑二百五十步

弧背一百五十五步

殘周五百九十五步

截積二千一百八十七步半

今有矢二十五步弦一百五十步問圓徑幾何

荅曰圓徑二百五十步

術曰矢自乘于上又以半弦自之加上位爲實矢爲法得圓徑

草曰立天元一爲圓徑以矢減之得𝍠元𝍪𝍤爲矢徑差又以矢乘之得𝍪𝍤元𝍥𝍪𝍤爲一段半弦冪寄左然後以半弦自之得𝍭𝍥𝍪𝍤太爲同數與左相消得𝍪𝍤𝍮𝍡𝍭〇上法下實得二百五十步卽圓徑也合問

今有矢二十五步圓徑二百五十步問弦幾何

荅曰弦一百五十步

術曰以矢減圓徑餘以矢乘之爲實開平方得半弦

草曰立天元一爲半弦自之爲半弦冪寄左然後以矢減圓徑餘||||太爲矢徑差以矢乘之得||||||太爲同數與寄左相消得卜。||||≡|開平方得七十五步倍之得一百五十步卽弦也合問

今有弦一百五十步圓徑二百五十步問矢幾何

荅曰矢二十五步

術曰半弦自之爲實圓徑爲益從一常法開平方得矢

草曰立天元一爲矢以減圓徑得𝍠元𝍡𝍤〇爲矢徑差又以天元乘之得𝍠𝍡𝍤〇元爲半弦冪寄左然後以半弦自之得𝍤𝍮𝍡𝍤太爲同數與左相消得𝍠𝍡𝍤〇𝍤𝍮𝍡𝍤開平方得二十五步卽矢也合問

今有矢二十五步弦一百五十步問弧背幾何

荅曰弧背一百五十五步

術曰倍矢加弦又以矢再乘之于上半弦自之又以弦乘之加上位爲實矢冪半弦冪相幷爲法得弧背

草曰立天元一爲弧背以弦減之得〡元〡〇爲弦背差又以矢自之又倍之得〣〇太爲兩段矢冪合以弦背差除之今不受除便以爲圓徑內寄弦背差爲母又以弦背差乘矢得〢元〦〇爲帶分矢以減圓徑得〡〇〢〇〇爲矢徑差內寄弦背差爲母以矢乘之得〦〇〣〇〇爲半弦冪內寄弦背差爲母寄左然

後以弦半之又自之得𝍤𝍮太為半弦冪又以分

母弦背差乘之得𝍤𝍮元𝍬𝍮元為同數與左相消得

𝍧𝍣〇𝍬𝍮〇上法下實得一百五十五步即弧背也

合問

今有矢二十五步弧背一百五十五步問弦幾

何

荅曰弦一百五十步

術曰倍矢減弧背餘以矢冪乘之又四之為

實四之矢冪為從弧背為益廉一常法益積

開立方得弦

草曰立天元一爲弦以減弧背得[illegible]爲弦背差又以矢自之又倍之得[illegible]爲兩段矢冪合以弦背差除之不除便爲圓徑內寄弦背差爲母又以弦背差乘矢得[illegible]爲帶分矢以減圓徑得[illegible]爲矢徑差內寄弦背差爲母以矢乘之得[illegible]又四之得[illegible]爲弦冪內寄弦背差爲母寄左然後以天元自之爲冪又以分母弦背差乘之得[illegible]爲同數與寄左相消得[illegible]

益積開立方得一百五十步卽弦也合問

今有弦一百五十步弧背一百五十五步問矢幾何

荅曰矢二十五步

術曰半之弦自乘又以二數相減餘乘之爲實從宎二數相減餘爲益廉二步爲隅翻法開立方得矢

草曰立天元一爲矢自之又倍之得‖〇元爲兩段矢冪合以弦減弧背餘五步爲弦背差

除之不除便爲圓徑內寄弦背差爲母又以弦背差乘矢得𝍢𝍧元爲帶分矢以減圓徑餘𝍡𝍧元爲矢徑差內寄弦背差爲母以天元乘之得𝍡𝍧元爲半弦冪內寄弦背差爲母寄左然後以半弦自之得五千六百二十五步又以分母弦背差乘之得元𝍥𝍣爲同數與左相消得𝍡𝍧〇𝍥𝍧倒積開立方得二十五步即矢也合問

今有圓徑二百五十步弧背一百五十五步問矢幾何

荅曰矢二十五步

術曰二數相乘得數又自之為實圓徑再自之又四之為益從圓徑自之又四之于上又以二數相乘四之以減上位為第一廉若不足減反減之餘為第一益廉第二廉空四步為隅開三乘方得矢

草曰立天元一為矢自之又倍之得||〇元為兩段矢冪合以圓徑除之不除便為弦背差內寄圓徑為母又以圓徑乘弧背得||||太為帶分弧背

以弦背差減之得卄卜元〇‖‖丅〇爲弦內寄圓徑爲母自之

得|||〇‖‖丅〇元‖‖丅〇爲弦冪內寄圓徑冪爲母寄左然後

以天元減圓徑得下式卜元‖丅〇爲矢徑差又以

天元乘之得卜‖元又四之得下式‖‖丅元爲弦

冪以分母圓徑冪六萬二千五百步乘之得

‖丅〇‖丅〇爲同數與左相消得|||〇‖丅〇‖丅〇開三

乘方得二十五步卽矢也合問

今有矢二十五步殘周五百九十五步問弦幾

何

荅曰弦一百五十步

術曰二之矢羃以矢步乘之又以矢羃乘殘周加之于上矢羃自之又三之減上位爲實二之矢羃以矢步乘之爲從矢步乘殘周內減六之矢羃爲第一廉若不足減反減之餘爲第一益廉二之矢步爲第二廉三步虛隅益積開三乘方得半弦

草曰立天元一爲半弦自之爲半弦羃合以矢除之不除便爲矢徑差內寄矢步爲母以矢自之

得[illegible]爲帶分矢以加矢徑差得[illegible]爲圓
徑內寄矢步爲母自之得[illegible]爲徑冪內寄矢步
爲母三之得[illegible]爲三段圓徑冪寄左
然後以矢自之又倍之得[illegible]合以圓徑除之
緣圓徑內先帶有矢步分母今不受除更以
矢乘之得[illegible]爲弦背差內寄圓徑爲母圓徑內又寄矢步爲母
又倍天元以圓徑乘之得[illegible]爲帶分弦
以弦背差加之得[illegible]爲帶分弧背又
以圓徑乘幾周五百九十五步得[illegible]爲

帶分殘周以加弧背得[illegible]為圓周內寄圓徑為母圓徑內又寄矢步為母合以圓徑乘之緣此數內已帶有圓徑分母更不須乘便為三段徑冪又合以分母矢冪乘之緣此數內已帶有矢步分母今只以矢步乘之得[illegible]為同數與左相消得[illegible]開三乘方得七十五步倍之得一百五十步卽弦也合問

今有弦一百五十步殘周五百九十五步問矢幾何

荅曰矢二十五步

術曰半弦冪自乘又三之爲實二數相併又以半弦冪乘之爲益從四之半弦冪爲第一廉二數併爲第二益廉一常法開三乘方得矢

草曰立天元一爲矢以弦半之又自之得〢𝍫太爲半弦冪以天元除之得太〢𝍫爲矢徑差以加天元得𝍠元〇〢𝍫爲圓徑自之得下式

〡元𝍢〇〇𝍫𝍫爲徑冪又三之得〣元𝍫〇〇𝍫𝍫

為三段徑羃寄左然後以天元自之又倍之

得‖元為兩矢羃合以圓徑除不除便為弦

背差內寄圓徑為母又以圓徑乘弦得[illegible]元〇[illegible]為帶

分弦以加弦背差得‖[illegible]元〇[illegible]為帶分弧背

又以圓徑乘殘周五百九十五步得下式

[illegible]元〇[illegible]為帶分殘周以弧背加之得‖[illegible]元〇[illegible]

為圓周內寄圓徑為母合以圓徑乘之為三段徑羃

緣此數內已帶有圓徑分母更不須乘便為

同數與左相消得丨[illegible]〇[illegible]開三乘方得

二十五步卽矢也合問

今有矢二十五步弦一百五十步問截積幾何

荅曰截積二千一百八十七步半

術曰以矢加弦又以矢乘之爲實二爲法得

截積

此術無草

今有矢二十五步截積二千一百八十七步半

問弦幾何

荅曰弦一百五十步

術曰二之截積內減矢冪爲實矢爲法得弦

草曰立天元一爲弦以矢加之得丨元〣爲矢

弦并又以矢乘之得‖元丅〣寄左 然後以截積

倍之得‖‖太爲同數與寄左相消得〢‖‖‖〣〇上法

下實得一百五十步卽弦也合問

今有弦一百五十步截積二千一百八十七步

半問矢幾何

荅曰矢二十五步

術曰倍截積爲實弦爲從一步常法開平方

得矢

草曰立天元一爲矢以弦加之得丨元 𝍡〇爲矢

弦幷又以矢乘之得丨元 𝍡〇寄左 然後以截積

倍之得下𝍣太爲同數與左相消得丨 𝍡〇 𝍣太開

平方得二十五步卽矢也合問

今有圓徑二百五十步截積二千一百八十七

步半問矢幾何

荅曰矢二十五步

術曰倍截積自之爲實從空四之截積爲第

一廉四之圓徑爲第二廉五虛隅開三乘方得矢

草曰立天元一爲矢倍截積得太以天元除之得太爲矢弦幷以天元減之得下太爲弦自之得元。爲弦冪寄左然後以天元減圓徑二百五十步得元。爲矢徑差又以天元乘之得元又四之得下式爲同數與寄左相消得下式。開三乘方得二十五步卽矢也合問