Bibliotecă pedagogică.

Indreptar teoretic si practic

pentru

Geometria din scoala poporală

in folosul preparanzilor (normaliştilor), a invĕţătorilor, institutorilor şi a altor bărbaţi de scoală

de

V. Gr. Borgovan,

profesor de pedagogie la scoala normală de institutori in Bucuresci.

Carte aprobată de comisiunea scolastică archidiecesană din Blaj, prin decisiunea consistorială cu Nr. 3737 din 24 Noemvre 1888.

Bucuresci—Blaj.

Tipografia Seminarului Archidiecesan.

1889.

PREFAȚĂ.

In intreagă literatura pedagogică românească, ce privește scoala primară, n'avem nici o singură carte de geometrie nici pentru mâna scolarilor, nici pentru a invĕțătorului. Această imprejurare nu prea imbucurătoare pentru poporul nostru, *„care n'are alt meșteșug decât lucrarea pămĕntului, care-'l hrănește"*, m'a indemnat să public ca adaos in „Cartea a Treia de Aritmetică" mai anțerț un curs sistematic din „geometrie" pentru mâna scolarilor, și acuma acest „Indreptar" pentru mâna invĕțătorilor. Am făcut aceasta, pentrucă sum convins, că dacă luminătorii și mlădițele tinere ale poporului român iși vor fi insușit cunoștințele cele mai netrecut de lipsă din „știința mĕsurarei pămĕntului", urmările cele binefăcĕtoare se vor revĕrsa sigur și asupra masselor ce se cuprind prin escelință cu „mĕsurarea și lucrarea pămĕntului".

In cât privește intogmirea acestui „Indreptar" m'am nĕsuit a-'l rădica și a-'l ține la nivelul științei pedagogico-metodice moderne. In scopul acesta am consultat tot ce are mai bine ales in materia aceasta bogata literatură germană, și in deoseb scrierile relative ale lui Dr. C. Kehr, A. Pickel și Fr. Polack.

Aștept și voiu primì cu mulțumită apreciările obiective ale celor competenți, apreciări făcute in scopul luminărei, imbogățirei, indreptărei și sistemisărei acestei nouĕ științe in cadrele cele mărginite ale scoalei primare române.

Dacă şi pe acest drum la noi cu totul neămblat „Indreptarul“ acesta va putè atrage şi conduce pre luminătorii neamului nostru spre inaintarea binelui intelectual, moral şi material al acestuia: mě voiu sěmţì resplătit in obositoarea mea muncă de ziler modest in agrul literaturei noastre metodice.

Bucuresci, Iunie 1889.

Autorul.

Partea ăntăi.

Teoria.

§. 1. Schiță din istoria și literatura geometriei.

Invĕțații grecești, Herodot și Aristotele, cearcă inceputul geometriei la vechii Egipteni și Caldei. Și nu fără cuvĕnt, pentru-că ecsundările cele anuale ale Nilului stergeau de obiceiu metele pămĕnturilor ori chiar le mĕnau cu totul, incăt in fiecare an se ivea trebuința a-le mĕsura și ale impărțì din nou. Imprejurarea aceasta n'a putut să nu silească pre Egipteni la statorirea unor principiii generale relativ la mĕsurare adecă la „geometrie“. Prima mĕsurare regulată și impărțire patrată a parcelelor din ținutul Nilului s'a făcut — după Herodot — sub regele Serostris. Pe timpul acela oamenii știau mĕsura și calcula numai fețe patrate și oblunge; dar trebuința i invĕțâ a urma asemenea și cu celea de trei, cinci, și de mai multe laturi. Sigur este, că dejà Archimede și Appolloniu știeau calcula tot felul de figuri planimetrice din linii drepte și strimbe.

Precum in general cele mai multe științe tot asemene și geometría și a luat inceputul dela preoții egipteni. Alt popor vechiu, la care dăm preste „geometri“ și „măestri bravi“ sunt Fenicienii de lăngă țĕrmurii ostici ai Mediteranei. Scoala acestora se pare a-o fi cercetat Grecii numiți *„Jonici“*, cari locueau in vecinĕtate, pentrucă cel de ăntăi bărbat despre care ne pomenește istoria a-se fi ocupat in adins cu geometria este un atare grec — filosoful Thales din Milet (născ. 639 a. Chr. [1]). El statorì mai ăntăi cercul ca mĕsură pentru unghiu; el trebuì să cunoască legile relativ la asĕmănarea treiunghiurilor, pentrucă mergĕnd in Egipt, pentru de a-se perfecționa in matematică, invĕțâ pre preoții de acolo, cum să determine inălțimea piramidelor din umbra lor. Tot

---

[1]) Dr. Lindner «Encykl. Handb. d. Erziehungskunde». Wien 1884 pag. 317.

dinsul descoperì mai ăntăi acsioma, că fiecare unghiu in semicerc este drept (de 90°). După reintoarcerea sa in Milet intemeiâ aşa numita *„scoală ionică"*.

Filosoful grecesc *Pythagora* (580—471 a. Chr.), un scolar al lui Thales, carele asemene a călĕtorit in Egipt pentru scopuri ştiinţifice, a fost primul, carele dede geometriei bază ştiinţifică. Dinsul aflâ principiul geometric cunoscut pănă astăzi sub numele *„problema pitagoreică"*; el arătâ ăntăi, că intre toate corpurile ce au asemene suprafaţă cu globul, acesta are cel mai mare volum. Pythagora intemeiâ la capĕtul vieţei sale ca şi invĕţătorul sĕu *„scoala pitagoreică"* in oraşul Crotone in Italia de jos.

Hippocrate din insula Chios (450 a. Chr.) adunâ intr'una şi ordinâ cunoştinţele geometrice cunoscute pănă la dinsul in opul „Elementele geometrice". Dela el derivă „lunile ippocratice" — o lege, după care se determină suprafaţa unei figuri mărginite de douĕ arcuri.

Lui *Platone* (429—347 a. Chr.), care asemene călĕtorì prin Egipt şi pre la Crotone, apoi intemeiâ scoala sa in Atena, avem să-'i mulţumim descoperirile celea mai insemnate in obiectul acesta. *Euclid* (pre la a. 285 a. Chr.), un scolar de alui Socrate şi intemeiătorul scoalei alecsandrine, scrise in l. grecă *„Elementele geometrice"* in 13 cărţi, unul din cele mai admirabile monumente ale ingeniului grecesc. Tratarea strins ştiinţifică a materialului la Euclid a rĕmas de model pentru toate timpurile. El consideră teoremele geometrice ca date, şi se mărgineşte singur la dovedirea lor *(metodul euclidian),* precănd metodul mai nou *(genetic)* işi ia de problemă principală aflarea adevĕrurilor geometrice

Englesul *Bath* descoperì opul lui Euclid prin seclul XII. d. Chr. şi-'l traduse in lătineşte.

In Englitera pănă şi astăzi se mai foloseşte cartea aceasta ca manual de scoală. Cei mai distinşi reprezentanţi ai scoalei alecsandrine sunt Archimede, Appolloniu, Papus şi Ptolemeu.

Archimede cel mai mare matematic al anticităţii (287—212 a. Chr.) a făcut multe descoperiri in geometria mai inaltă. El determinâ arealul feţelor mărginite de linii drepte şi strimbe precum şi valoarea lui π (numĕrului proporţional dintre periferia şi diametrul cercului) la $3\,{}^1/_7$ sau ${}^{22}/_7$ sau 3·14. El determinâ volumul conului in raport cu al cilindrului de asemene laturе şi inălţime şi către cela al globului de asemene diametru cu laturea conului. Că a avut o predilecţiune deosebită pentru geometrie, dovedeşte şi finitul sĕu cel tragic la ocuparea Syracusei (212) prin Romani, cănd ostaşului lui Marcell, ce-'l aflâ incordat in cercetările sale geometrice, i strigâ „nu-'mi strica cercurile“ (Noli turbare circulos meos); dar ostaşul sĕtos de răpire il omorì. Pe piatra mormĕntului lui aşezarĕ căte un con, un cilindru şi un glob.

Appolloniu din Perga Pamfiliei, coetanul lui Archimede şi scolar de alui Euclid, işi căştigâ la contimpurani prin cercetările sale geometrice numele de *„marele geometru“*. Dinsul a scris mai multe opuri geometrice, cari insă s'au perdut. Appolloniu aplicâ mai ăntăi geometria la astronomie. Dela timpul acesta nu aflăm alte incercări in materia noastră pănă la *Menelau* (100 d. Chr.) şi *Ptolomeu* (125 d. Chr.), carele din urmă a scris renumitul op „Allmagest“. Invĕţatul *Papus* (375 d. Chr.) asemene se mai ocupă cu cercetări geometrice. In secolii următori ai invălmăşelei popoarĕlor cănd „tac musele“ nu dăm de nici o incercare mai insĕmnată, pănă tărziu la Arabi in Spania, unde aceştia ridicară o impĕrăţie puternică. La a. 900 astronomul arab *Albategnius* perfecţionâ insemnat trigonometria. De aci apoi nu s'a mai făcut nici un pas inainte pănă pre la secl. al XVI. Matematicul Vieta (1504—1603) intregì geometria globului (trigonometria sferică). *Ioan Kepler* (1571—1651) promovâ mult ştiinţa geometriei arătănd noţiunea şi intrebuinţarea „nemărginitului“ de mic. Filosoful *Cavalleri* (1598—1647) scrise in anul 1635 o „geometrie a neimpărţibilului“ in care se incearcă a determina suprafaţa, volumul şi punctul de gravitaţiune al tuturor corpurilor. *Fermat* (1590—1663) arătâ, cum se află volumul corpurilor parabolice; ear renumitul *Descartes* (Cartesius 1595—1650) introduse geometria analitică. Prin impreunarea geometriei cu algebra intreaga ştiinţă matematică făcu progrese mari, anume se formâ matematica sublimioară, şi geometria de aici incepù a se generaliza intr'un mod insemnat. In direcţiunea aceasta lucrarĕ mai mulţi bărbaţi ca *Pascal* (1632—1663) *Huygens* (1629—1695) cultivâ cu mare predilecţiune geometria analitică, ear coetanul sĕu, *De la Hire* (1640—1718) arătâ progresul ce-'l făcurĕ cei vechi in geometrie.

Dintre geometrii cei mai insemnaţi dìn jumĕtatea secolului trecut şi din al nostru inşirăm pre următorii:

Euler (1707—1783) — unul dintre cei mai distinşi matematici — lucrâ la desvoltarea stereometriei. Germanul *Leibnitz* şi anglesul *Taylor* duserĕ cu un pas mai departe incercările lui Euler. Francezul *Monge* (1746—1818) este intemeiătorul *geometriei descriptive*. Compatriotul sĕu *Carnot* (1753—1823) statorì problema geometrică numită după dinsul *„carnotică“*, (care are tot aceeaş insemnătate pentru trigonometria plană ca şi cea pytagoreică pentru planimetrie). *Delambre* şi *Mechain* (cit.

Delambr şi Meşèng) alţi doi francezi intreprind (1792) din mandatul republicei franceze mĕsurarea arcului meridianului Parisian intre Dunkerque şi Montlouy lăngă Barcelona, din care se statorì metrul. Profesorii germani *Steiner* din Berolin, *Wittstein* din Hannovera şi *Bretschneider* din Gotha se făcurĕ renumiţi in materia aceasta prin aflarea, studiarea şi statorirea legilor relativ la *prismatoid* — (un corp, ce in sterereometrie ocupă locul trapezului din planimetrie).

Altcum geometria inainte de Pestalozzi se invĕţa numai la universităţi mai ales după manualul lui Euclid amentit mai sus, care insă fiind menit pentru bărbaţi deja vĕrsaţi in ale matematicei, dela sine se inţelege, că nu mult puteau profita elevii din trĕnsul. Pestalozzi respective scoala sa făcù tinerimei accesibilă geometria alegĕnd, statorind şi sistemizănd elementele acestei discipline schiţată altcum deja de Pascal şi de De la Hire. Dar dintru inceput geometria in forma pestalozziană degenerâ intr'un formalism trivial şi sarbed, care lăsâ un gol simţit in spiritul scolarilor. Aceştia inţelegeau ce făceau, dar spiritul lor nu putea ajunge la o cultură formală, pentrucă se ocupau numai cu jucărei filantropinişte. Metodiştii germani, cari observarĕ şi recunoscurĕ stăruinţele aceste de un ecstrem al metodului Euclidian, se incercarĕ a complana contrastul dintre ambe direcţiunile, alegĕnd şi imbinănd adevĕrul de amĕndouă părţile. Pe aceasta cale apoi păşind in timpul mai nou bărbaţi ca *Gasser, Zizmann, Lorey, Kaselitz, Schramm* şi alţii adaptarĕ cu mult succes ştiinţa aceasta pentru cadrele celea restrinse ale scoalei poporale.

In direcţiunea şi cu scopul acesta au scris manuale de scoale parte pentru măna invĕţătorilor parte pentru a scolarilor o mulţime de bărbaţi de scoală, mai ales la Germani. In fruntea acelora stă *A. Diesterweg*, carele arătâ, el cel dintăi, *ce* este de a se lua şi *cum* trebue să se trateze geometria in scoala poporală. Dinsul scrise a) *Invĕţătura despre spaciu adecă geometria* după cum pretinde pedagogia modernă pentru invĕţători şi invĕţăcei cu 9 tabele [1]; b) Geometria elementară pentru invĕţători [2].

A. Lorey „Invĕţămĕntul intuitiv geometric“ [3]. *E. Zizmann* „Invĕţătura formelor geometrice“ [4]. *F. Kaselitz* „Geometria in scoala

[1]) A. Diesterweg «Die Raumlehre, oder Geometrie nach der jetzigen Anforderungen der Paedagogik». Bonn 1832.

[2]) «Elementare Geometrie für Lehrer» Edit. II. 1864.

[3]) A. Lorey «Der geometrische Anschauungsunterricht». Eisenach 1859.

[4]) E. Zizmann «Geometrische Formenlehre». Jena 1864.

civilă“ [1]. *C. Kehr* „Geometria practică pentru scoalele poporale şi rerepetiţionale“. Gotha 1880 [2]) etc.

In inţelesul planului de invĕţămĕnt de astăzi din scoalele poporale şi civile din Austria au scris: *Cav. de Mocnik. K. Schubert, Villicus* etc. In Germania au apărut şi apar in continuu manuale relative, din cari amintim pre alui Fr. Bartholomei [3], Dr. Fischer [4], A. Grohmann [5], Löhmann [6], A. Pichel [7]. F. Sonnenburg [8] etc.

Literatura germană intreagă a acestui ram din matematică se poate vedè in opul citat a lui Dr. G. A. Lindner (pag. 322 şi 326) şi la Rob. Niedergessaes in „Metodica specială“ (partea a VIII-a pag. 38—40 [9]).

La noi la Romăni ăncă au trebuit să figureze geometria pintre cele dintăi obiecte de invĕţămĕnt ale scoalelor de mijloc (căci numai de acestea aveam). Aceasta o deducem din imprejurarea, că poporul intreg a fost şi este prin escelinţă popor agricol, şi ca atare a avut şi are lipsă mare şi deasă de a-'şi mĕsura şi innoì din cănd in cănd metele sau mejdiile pămĕnturilor sale. Aceasta ne dovedeşte intre altele şi următoarele douĕ imprejurări:

a) Renumitul metropolit Moldovean *Iacob Stamati* (1792—1803) ca prezident al comisiunei instituite sub regimul fanariotic pentru de a cerceta causa rĕului ce coplеşea scoalele greceşti din Moldova, cere să se pună in programa scoalelor printre alte obiecte de invĕţămĕnt şi *geometria* sau *ingineria*, motivănd trebuinţa acesteia aşa: „*că moldovenii nu au alt meşteşug decăt lucrarea pămĕntului care i hrăneşte, din care pricină resar şi celea din toate zilele sfezi şi judecăţi pentru hotarele moşiilor; drept aceea au trebuinţă de hotarnici după meşteşug (geometrii)* [10].

b) *Operele relative,* ce le inşirăm in şir cronologic cu numele autorilor, la cari se află şi cu titula, după cum se vĕd la *Dumitru Jarc* [11])

---

[1]) F. Kaselitz «Die Geometrie in der Bürgerschule». Berlin 1873.

[2]) C. Kehr, «Praktische Geometrie für Volks- und Fortbildungsschuleu». Gotha 1880.

[3]) «Geometrie für die einklassige Volksschule», Langensalza 1876,

[4]) «Leitfaden zum Unterrichte in der Elementargeometrie». Leipzig 1887.

[5]) «Kleine Geometrie für Volks- und Bürgerschulen». Berlin 1876.

[6]) «Raumlehre für die Volksschule in drei Cursen».

[7]) «Die Geometrie in der Volksschule». Kassel 1879.

[8]) «Geometrie für Volks- und Mittelschulen. Berlin 1887.

[9]) R. Niedergessaes «Handbuch der speciellen Methodik. Wien 1813.

[10]) «Spicuire din ist. pedagogiei la noi la Romăni», de autorul, pag. 11 (sub notă).

[11]) Dem. Jarc «Repetoriu biblio-chronologic, sau catalog general de cărţile romăne imprimate dela adoptarea imprimeriei. jumĕt. secl. XVI. şi pănă astăzi». Bucuresci 1865.

„Mĕsurarea buţilor cu cotul". 1824. *G. Asachi* „Elemente de matematică, P. III. Geometria". Iaşi (1836—37). *P. Poenar* „Geometria" din Legendre cu tabele, cu figuri (1838) 8 p. 350. Bucuresci. *A. Marin* „Geometria elementară" cu figuri 8-a p. 80. Bucureşti S. Sava 1839. *I. Ghica* „Mĕsuri şi greutăţi" (rom. mold. fr. etc.) Bucuresci 1848. *D. Pavel* „Elemente de Trigonometrie drept liniată şi sferică". Bucuresci 1850. *A. Orescu* „Geometria discriptivă după Fourcy", şi iarăş altă ediţie: 3 caete cu figuri. Bucuresci 1851. Elemente de Geometrie teoretică şi practică" 12 (1852). *G. Pap* „Prescurtare de geometria practică cu figuri" edit. 2. (1855) 8-a pag. 114. Bucuresci 1857. *Acelaş* „Geometria practică prescurtată Bucuresci 1859. *G. Eustatiu* „Geometria elementară" 12. p. Buc. 1860, apărută in ediţia a 2-a tot acolo 1862. *I. M. Poenar* „Curs elementar de desemn liniar" Bucuresci 1861 aparută in edit. 4 (?) tot acolo in 1865. *D. Jarc* „Mĕsuri şi greutăţi sau aritmetica socială" ed. 2. 16° pag. 98. Bucuresci 1862. *G. Vlassa* „Geometria" pentru gimn. inf. după F. Moçnik. Blaj 1877

Dorit-aş-fi să pot studia barĕm una din cărţile aceste; insă prelăngă toată stăruinţa ce am făcut la locurile competinte n'am put ajunge la nici una.

De crezut este insă, că un G. Lazăr, un A. Gavra şi alţi profesori zeloşi vor fi tratat şi acest obiect in scoalele lor, mai ales. G. Lazăr in prima scoală romănească dela S. Sava, cunoscut fiind, că banul Const. Bălăceanul numai după-ce Lazar i *mĕsurâ* o grădină (in Bucuresci chiar fără unelte măestrite) se intrepuse la eforia scoalelor pentru de a mijlocì deschiderea scoalei romăneşti projectată de G. Lazăr.

Dar toate scrierile inşirate au fost menite precum am aieptat mai sus pentru scoalele de mijloc. Pentru scoala poporală, carea la noi abia datează de pre la inceputul veacului nostru [1]) *nu s'a scris nemic in materia aceasta;* şi nici nu-'i mirare, de-oarăce acest studiu nici nu figura printre celealalte; ba şi astăzi figurează in celea mai multe locuri numai pre hărtie. Un singur tractat din Planimetrie, dar şi acesta defectuos s'a publicat in „Scoala Română" a dlui V. Petri dela Năsĕud a. 1878 şi 1879.

§. 2. **Noţiunea, fiinţa şi impărţirea geometriei.**

1. Geometria este ştiinţa despre mărimile de spaciu şi despre raporturile lor. Ca atare este parte a matematicei. Cuvĕntul „geometrie" este de origine grecesc şi inseamnă *„măestria de a mĕsura pămĕntul"*.

[1]) v. Spicuire din istoria pedagogíei la noi la Romăni. Gherla 1886 p. 14 şi următ.

2. Geometria nu e ştiinţă ecsperimentală; la resultatele ei n'au ajuns pe calea observaţiunei, ci pe cea a cercetărei, a speculaţiunei.

Formele cu care se ocupă geometria parte sunt date in natură, parte produse prin măestrie.

Cugetatorul observător şi scrutător a ştiut insufleţì formele moarte, separănd şi alegĕnd ce a fost conform legei din ceea ce era nepotrivit aceleia, şi combinănd apoi asemene cu asemene. Mărimile geometriei de spaciu — după cum le definim astăzi — sunt abstracte dela corpurile ce ecsistă aevea. Şi chiar acest proces de abstracţiune este ceea, ce a ridicat geometria la gradul ştiinţei. In urmare geometria are de aface *cu mărimi de spaciu,* cu lucruri numai inchipuite (abstracte dela cele concrete). *Corpul* geometric este numai *spaciul,* ce-'l cuprinde respectivul corp fisic de aceeaş formă; *feţele* geometrice sunt numai *marginile* unuì corp fisic, *liniile* geometrice sunt numai marginile *feţelor fisice* şi punctele geometrice sunt *marginile liniilor fisice.*

Corpul geometric deşi un lucru in sine numai inchipuit are cele 3 dimensiuni: *lungimea, lăţimea* şi *grosimea,* adecă este spaciu cu 3 dimensiuni. Faţa geometrică are 2 dimensiuni; dinsa n'are grosime (şi se poate potrivit asĕmĕna cu umbra unui obiect); linia geometrică are numai o singură dimensiune, lungimea; ear punctul geometric n'are nici o dimensiune (pentrucă ceea ce numim in practică „punct“, este numai *semnul* unui punct). Din privirea corpurilor s'a abstras noţiunea de *„faţă“*; din privirea feţei noţiunea de „linie“, şi din privirea acestei noţiunea de „punct“.

In scoala poporală primară, a cărei instrucţiune porneşte şi se razĕmă pe intuiţiune, nu poate fi vorbă de o ştiinţă geometrică abstractă, ci numai de acea parte a acesteia, carea — neavĕnd lipsă de abstracţiune — se ocupă numai cu formele vizibile şi insuşirile, ce se pot primì prin simţurile noastre.

In celea de mai sus se arată invĕţătorului poporal procesul firesc in geometrie (dela cub preste feţe şi linii la puncte).

3. Geometria se imparte in *inferioară* (de jos) şi in *superioară* (mai inaltă). Obiectul celei dintăi este *linia dreaptă, cercul,* feţele şi corpurile formate din acelea, precănd geometria superioară tratează şi despre alte linii strimbe, feţe şi corpuri formate din acestea.

Geodesia (artea mĕsurărei practice) se ocupă cu mĕsurarea efectivă a locurilor aşezate şi ridicate etc. precum şi cu desemnul de planuri.

Geometria *sintetică* determină mărimile de şpaciu şi insuşirile lor prin construcţiune; cea *analitică* prin calcul. Geometria *descriptivă* tratează despre forma şi poziţia mărimilor de spaciu, şi ne invaţă ecspunerea *grafică* a acelora după principii geometrice.

Geometria aşa numită *mai nouă* (de poziţiune) abstrage in general dela noţiunea mĕsurei şi 'şi desvoaltă principiile sale in forma cea mai generală şi mai estinsă.

Geometria inferioară se imparte in *planimetrie, stereometrie* şi *trigonometrie*. Prima tratează despre formele de spaciu ce zac in *plan* (feţe, linii, puncte); a doua despre corpuri — şi trigonometria despre calcularea treiunghirilor. Aceasta se subimparte in trigonometria *plană* şi *sferică* — după cum treiunghiurile zac pe feţe plane sau pe faţa globului.

Şi geometria analitică se imparte in plană şi sferică.

§. 3. Scopul şi poziţia invĕţămĕntului geometric in scoala poporală.

1. Scopul acestui obiect de invĕţămĕnt este ca la ori care altul, duplu: *formal* şi *material*.

Incăt geometria in scola poporală are să pornească şi să se razĕme pururea pe intuiţiunea formei şi mărimei obiectelor, prin privirea atentă şi compararea acestor insuşiri are să agerească mintea scolarului, să-'i desvoalte simţul pentru ce e regulat şi simetric, adecă pentru adever şi frumos, şi mijlocit să contribue şi la formarea caracterului. Şi apoi chiar acesta este scopul *formal* al invĕţămĕntului. Scopul material al geometriei este practic şi priveşţe cunoştinţele geometrice, cu ajutorul cărora scolarul devenit odată membru in societate să-'şi poată ajuta in lipsele şi sĕ-'şi poată indestula trebuinţele vieţei; şi geometria in privinţa acesta aduce omului foloase netăgăduite. „Dacă zidarul voeşte a calcula volumul unui zid, şi de aci cantitatea materialului de lipsă, zice distinsul pedagog *Kehr*; dacă vrè tĕmplarul să clădească o casă şi spre scopul acesta să pregătească planul clădirei cu preliminarul de spese; de vrè mĕsarul să determine volumul unui butuc pentru de a putè calcula aprocsimativ preţul lui; de vrè dogarul sau tinichierul se ştie, căt de mari să facă vasĕle; de vrè fierarul sau lăcătarul, strugarul sau mechanistul să preţuească obiectele făcute, sau ce vrè să facă: toţi aceştia precum şi măestrul ce lucră in lemn, piatră, metal etc. au lipsă neapĕrată să ştie geometria, pentrucă prin incercări nesigure se risipeşte numai la material, bani, timp şi putere scumpă de lucru" [1]). Dar chiar şi plugarul de căte ori nu vine şi el in poziţie de a-'şi renoì şi

[1]) In «Scoala Română» III. de Vas. Petri pag. 19—20.

trage *linia* unei miezuini, a mĕsura suprafaţa unui pămĕnt ori a stătorì măcar aprocsimativ *volumul* unei clăi de fĕn, a unei grămezi de lemne etc. Nu separat, ci impreunate unul cu altul acestea două scopuri trebue urmărite in geometrie, pentrucă mintea scolarului se luminează numai aşa, dacă el e in stare a-şi aplica in practică adevĕrurile recunoscute. In urmare nu-'i destul a ecsplica numai adevĕrul unei legi geometrice, ci trebue să-'l punem pe scolar şi in poziţie de a face deducţiunile posibile, de a aplica legea la casuri singulare, şi de a resolva probleme relative la acea. Ca să-'şi poată ajunge acestea scopuri invĕţămĕntul geometric, trebue să ţinem in vedere următoarele trei momente principale anume:

1. *Căştigarea de intuiţiuni clare despre formele geometrice şi privirea insuşirilor celor mai insemnate a acestora.* 2. *Desemnarea formelor geometrice simple.* 3. *Compararea acestor forme in privinţa mărimei, adecă mĕsurarea şi computarea lor* [1]).

Cănd invĕţămĕntul geometric in scoala poporală va indestulà trebuinţele aici amintite, şi-a ajuns ţinta şi a corespuns scopului sĕu.

2. Poziţia acestui ram nu e clar precisată intre celealalte obiecte de invĕţămĕnt prin planurile de invĕţămĕnt oficioase. Planul de invĕţămĕnt pentru scoalele poporale din *Ungaria* (in inţelesul Art. de lege 38 din 1868) il pune ca un ram latural de invĕţămĕnt (la scoalele cu mai mulţi invĕţători) in ultimii doi ani de scoală, după-ce mai inainte s'a pregătit la invĕţămĕntul intuitiv şi la comput. Planul austriac imbinănd geometria cu desemnul il ia tot in anii ultimi ca un ram deosebit de invĕţămĕnt. Dar in consideraţiunea celor mai sus desfăşurate şi pe baza ecsperienţielor zilnice scoase din organizaţiunea scoalelor noastre pedagogul de profesiune nu poate să treacă numai eată-aşa preste geometrie. Deci invĕţătorul primar o va lua cu desemnul chiar pe *prima* treaptă a invĕţămĕntului (anul 1 şi al 2-le), imbinăndu-o cu invĕţămĕntul intuitiv (unde copii invaţă a cunoaşte şi a desemna corpuri, feţe, dungi şi colţuri) şi cu scriptolegia (puncte, linii drepte şi strimbe, unghiuri); pe a *doua* treaptă (a 3 şi 4) cu aritmetică (computarea feţelor); ear pe treapta ultimă o va putè trata in o oară separată pe sĕptĕmănă in mod sistematic pe baza acestui manual.

§. 4. Metodul şi mijloacele invetămĕntului geometric.

I. *Metodul* este calea cea adevĕrată, care duce la ţinta invĕţămĕntului. Diesterweg zice, că *omul numai prin intuiţiune pĕtrunde*

[1]) Dr. G. A. Lindner o. c. pag. 323.

ființa lucrurilor, și că numai dinsa produce in noi zel pentru invĕțătura și cultura cea adevĕrată, adecă, că baza a ori ce invĕțămĕnt rațional trebue să fie intuițiunea.

1. De aici urmează dară că și metodul geometric trebue să fie inainte de toate *intuitiv.* Geometria in scoala poporală trebue să-'și desvoalte adevĕrurile sale prin *intuițiune* amĕsurat gradului de capacitate a scolarului; despre demustrarea vre-unui adevĕr in ințelesul lui Euclid nu poate, dar nici nu e ertat să fie vorba aici. Ținĕnd seamă de această imprejurare, apoi nicăirea principiul intuițiunei nu se poate aplica mai bine decăt la propunerea geometriei, pentrucă toate adevĕrurile și legile geometrice — in cadrele scoalei primarie — se pot observa parte la corpuri, parte la modele și la figuri geometrice. Ar greșì deci foarte invĕțătorul, carele ar crede că se poate ecsplica cutare adevĕr sau lege geometrică fără de-a pune in vederea scolarilor corpul sau modelul cutare, sau ăncai de a-i construì pe tablă figura corespunzĕtoare. In urmare învĕțătorul nu va zice: „Un treiunghiu este la bază de 6 dm.; in inălțime de 4·5 dm ; căt de mare-'i suprafața?“ — nici: „Un disc rotund are in diametru 45·6 cm.; căt i face suprafața?“ nici „Un glob de lemn are razul de 25 cm. căt de mare i suprafața? volumul“? — *ci va zice*: „Pe tablă este un triunghiu, căt de mare i suprafața? Judecați, mĕsurați, computați“! — Aici aveți plăcintărița aceasta, căt i face suprafața? Judecați, mĕsurați, computați! Aici este globul nostru, căt de mare-i suprafața? volumul? Judecați, mĕsurați, computați! Aceasta va să zică: invĕțămĕntul geometric trebue să fie intuitiv.

2. In geometrie nu ecsistă un ce „unul lăngă altul“ relativ la adevĕruri și legi — bunăoară ca la științele naturale, ci numai un ce „unul după altul“. In geometrie fiecare descoperire este urmarea celei de mai nainte, fără de care nu s'ar fi putut face. In științele naturale uneori s'au descoperit legi mai grele, mai complicate inaintea altora mai ușoare și mai simple; matematica singură procede pretotindenea dela simplu la compus, și dela ușor la mai greu. De aici invĕțătorul poporal trebue să ție cont de aceste principie didactice aici la geometrie, unde principiul așa numit al concentrațiunei invĕțămĕntului intimpină mari greutăți.

3. Privirea corpurilor, respective a modelelor și a figurilor geometrice se face după un plan ficsat și bine precisat, pentrucă numai așa se aduce ordine in mintea scolarilor, ear invĕțătorul din parte-ș ăncă e scutit de incurcare la propunere. Atare plan general poate fi următorul: I. Privirea efectivă a corpurilor și a figurilor desemnate — urmată

de tratarea invĕţĕtorului; II. Resumarea adevĕrurilor şi a legilor geometrice; III. Aplicarea.

Ca plan *special* poate servì următorul:

a) Repeţirea scurtă a celor propuse deja şi pregătirea scolarilor pentru cele următoare;
b) scolarii privesc corpurile de fapt aşezate pentru acest scop intr'un loc potrivit d. e. pe masă, eventual figurile desemnate. Invĕţătorul insuş indeamnă şi conduce privirea prin intrebări potrivite;
c) scolarii ecsprimă scurt şi precis cea ce au observat;
d) intuiţiunile căştigate prin privire se resumă şi se lărgesc după trebuinţă tot in mod şi pe cale intuitivă. Cu această cale se deduc legile şi se constată adevĕrurile geometrice;
e) scolarii ecspun prin desemn ideile căştigate despre formele corpurilor. Ori ce desemn aici se produce numai cu măna liberă;
f) scolarii deprind şi aplică legile şi adevĕrurile geometrice la resolvirea de probleme practice, va să zică, scolarii deseamnă, construează corpurile geometrice din lut, napi, carton, lemn etc. şi calculează cu totdeadinsul.

4. *Metodul didactic* [1]). Acesta poate fi: *intern,* când este cu privire la inşirarea materialului de invĕţat, şi *ecstern,* când se priveşte la modul impărtăşirei aceluia cu elevii. Metodul *intern* formează *procesul,* ear cel ecstern *forma* invĕţămĕntului. Să considerăm mai de aproape aceste douĕ momente didactice sub raportul geometriei.

a) *Procesul.* Cu respect la elev este *dogmatic* (comunicarea de a găta) *sau genetic* (desvoltarea succesivă), ear cu respect la materialul de invăţat este *analitic* (dela intreg la părţi) sau *sintetic* (dela părţi la intreg) sau şi analitico-sintetic.

Că ce proces să se urmeze la invĕţămĕntul geometric, pănă azi metodiştii n'au putut convenì din deplin. In general insĕ putem reduce diversele procese intrebuinţate la *douĕ.* Primul se razĕmă pe *impărţirea geometriei in plani- şi stereometrie.* Dupăce adecă din privirea obiectelor reale şi a celor geometrice s'au desvoltat intuiţiunile de corp, faţă, linie şi punct, se aduc inainte in şir progresiv şi tot in mod intuitiv maiăntăi formele geometrice *plane* şi apoi cele *sferice* (ale corpurilor) după feluritele lor insuşiri şi raporturi imprumutate. — După al 2-le proces intreg invĕţămăntul geometric se grupează pe lăngă *corpurile geometrice,* care după o alegere corespunzĕtoare se pun spre privire unul după altul. La fiecare corp se privesc pe rănd feţe, muchii, linii, colţuri, puncte, unghiuri şi figuri după numĕrul, poziţia, forma şi mărimea lor. Privirea aceasta se poate ecstinde şi la insuşirile formelor singuratice ce stau in raport mai de aproape cu corpul privit. La am-

[1]) Este şi metod logic şi istoric v. Lindner o. c. pag. 528—530.

bele procese ămblă cu geometria mănă in mănă desemnul şi calcularea mărimilor respective. Procesul ăntăi se poate aplica cu succes, cănd cunoştinţele respective se predau numai ca un curs pregătitor pentru invĕţămĕntul geometric ştiinţific următor (ca in scoalele medii). In scoala poporală insă, unde este vorba de un curs geometric inchiat, este de preferit procesul al 2-le, fiindcă după acesta materialul geometric se poate pertrata in cadrele cele ănguste ale scoalei primare pe calea cea mai simplă şi mai scurtă.

Ce corpuri să se iee spre scopul acesta eară diferesc metodiştii; aşa d. e. *Zeller* incepe cu piramida, *Graser* cu un model al casei de locuit, *Tobler* cu linealul, *Wedemann* cu cartea, *Kaselitz* şi alţii cu tabla, *Raumer* cu cristalele, *Lorei, Mocnik, Zizmann* etc. cu cubul.

Fiindcă corpul ce-'l privim mai ăntăi, trebue să fie căt mai simplu — cu puţine elemente felurite — şi apoi acestea să fie foarte uşor de cuprins, noi ăncă recomandăm a incepe cu *cubul*. Le acesta privim feţele, muchile, colţurile şi unghiurile, şi de aici apoi pe rănd in mod sintetic punctul, liniile, unghiurile, figurile şi mai pe urmă celealalte corpuri, precum: prismele, cilindrul, piramidele, conul intreg şi trunchiat şi globul. *Procesul dară este analitico-sintetic.*

b) Forma cea mai potrivită a invĕţămĕntului geometric este *cea arĕtătoare* (deictică), incăt punem elevilor spre privire corpuri, modele, figuri, şi cea *intrebătoare* aflătoare *(erotematică-euristică)*, intrucăt elevii pe baza intuiţiunei au să-'şi de seamă la intrebările potrivite ale invĕţătorului.

II. *Mijloace de invĕţămĕnt.* In invĕţămĕntul geometric *„intuitiv prin escelinţă"* nici un pas nu se poate face fără mijloace de infăţişare. Locul prim il ocupă corpurile de fapt, sau ăncai nişte modele ale acestora; ear in lipsa acestora desemnul clar şi viu al celor de pertratat.

Cele mai necesarie mijloace de infăţişare sunt:

a) Pentru *scoală:* 1 rudă de mĕsurat (de 1 m. cu impărţire in deci şi centimetri); 1 rudă de 1 dm. cu impărţire in cm. şi mm.; 1 sfoară sau fringhie de 10 m. (pentru mĕsurat) pociumbi etc. — 1 dm^2 cu impărţire in cm^2; 1 dm^3 de lemn ce se poate desface; — 1 dm^3 gol deasupra deschis; — *plumbina* şi *libela* (pentru de-a procura scolarilor noţiunea de *vertical* şi de *orizontal*); — circiniu mare de lemn, lineal dreptunghiular, transporter mare (din tinichea negrie măcar de 15 cm. la raz); — corpurile geometrice celea mai insemnate măcar in căte douĕ ecsemplare precum: cubul, prisma trei-, patru-, şi şesălaturală, cilindre, piramide trei- şi patru-laturale, conul, piramida şi conul trunchiat, globul (ce se poate desface in două semiglobluri); apoi vasĕ de tinichea, precum: litru, prismă, cilindru, piramidă şi con de asemene bază şi inălţime.

b) Pentru măna *scolarilor:* lineal cu impărţire metrică, treiunghiul mic dreptunghiular, transporter, circiniu.

O parte din aparatele acestea le poate face invĕţătorul insuş şi poate arĕta şi scolarilor, cum să şi-le pregătească din lemn, pap, argilă etc. [1]).

---

[1]) Scoalele mai bine provĕzute işi pot procura deagata (dela firma: A. Pichlers Witwe u. Sohn. Wien V. Margaretenplatz 2) cu preţuri dela 5—50 fl. Doritorilor le recomandăm a cere mai ăntăi catalog («Lehrmittel-Katalog») ce se trimite gratis ori cui, din care apoi işi pot alege celea trebuincioase.

Partea a doua.

Practica.

Cursul ântâi.

Despre linii, unghiuri și fețe.

I. Introducere.

§. 5. **Cunoștințe fundamentale despre corp, față, linie, și punct căștigate prin privirea cubului.**

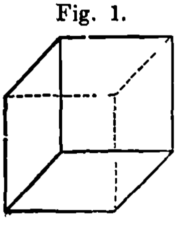
Invĕţătorul pune un cub de carton, hârtie groasă sau şi de lemn d. e. decimetrul cubic intr'un loc potrivit aşa, ca să i se poată vedè şi arăta toaţe feţele şi baza.

Procesul didactic general este cel schiţat mai sus, adecă: I. Privirea. II. Legea sau regula. III. Deprinderea sau aplicarea.

I. Priviţi incoace, ce vedeţi aci? (. . . . un obiect). Bine, *insemnaţi-vĕ*: obiecte ce le putem vedè sau pipăi se numesc *corpuri*. Repeţire! Ce vedeţi dară aci? Arătaţi-mi cum se *intinde lungimea* corpului acestuia? (. . . dela dreapta spre stânga). Arătaţi-mi *lăţimea!* Cum se intinde aceasta? (. . . din inainte indĕrĕt). Care-'i *inălţimea?* (. . . din sus in jos).

Insemnaţi-vĕ: Lungimea, lăţimea şi grosimea (inălţimea) cubului se numesc impreună *ecstensiunile* (dimensiunile lui). Eată aci e metrul, mĕsuraţi-i lungimea! (se face!) . . . lăţimea! . . . inălţimea! Care-'i mai mare? (asemene). *Un corp, ce este asemene de lung, lat (gros) şi inalt (afund) se numeşte cub* (fig. 1). Repeţire!

Fig. 1.



Arătaţi-mi, unde inceată lungimea cubului? unde lăţimea? unde inălţimea?

Insĕmnaţi-vĕ: unde inceată cubul, acolo sunt păreţii sau marginile sale. Păreţii aceştia se numesc *fețele* cubului. Priviți incoace! Numěrați-'i fețele! ... Căte-'s? **Eată** acuma pun cubul pe masă cu fața aceasta; el poate sta insă pe fiecare față. (Se arată!) In cotro privește fața aceasta? (... inainte)... Aceasta? (... inděrět, — in dreapta, — in stănga, — in sus, — in jos). Atențiune! Eu voiu mai numi odată cele 6 fețe, ear voiu mi-le veți arăta!

Să privim mai deaproape fețele acestea! Eată aci am o bucată de hărtie. Ce formă are aceasta? (patrată). Ian, să-o punem pe-o față de acestea d. e. pe ceast dinainte. — Ce vedeți? (.... hartia chiar acopere fața). Așadară hărtia aceasta este acurat căt fața dinainte de mare. (Tot așa se pune și preste celelalte fețe, și mai pe urmă se formulează propusețiunea): *Tus șese fețele sunt asemene de mari.*

Priviți acuma la sobă (dacă e rotundă) sau la țevile sale! Arătați marginile sobei (țevilor)! Căte-'s? Asemenați-le cu ale cubului! Ce observăm? Vedeți, fețele sunt de douě feluri: fețe ca cele dela cub se numesc *drepte* sau *plane,* ear fețe ca cele dela sobă (țevi) sunt *strimbe* sau *curbe!* Vrěnd să știm, căt de mare este o față de acestea dela cub, ăncă o měsurăm — tot cu metrul. Ian, să měsurăm fața dinainte! (Se face!) Căt este de mare? (de 1 dm. de lungă și de lată). Și căt este de *groasă?* (... nu urmează rěspuns). Vedeți, *fața n'are de loc grosime; ci numai lungime și lățime* (inălțime). De acea vrěnd a ști mărimea grădinei noastre, o měsurăm numai dealungul și dea latul (lungiș și curmeziș).

Ian, incercați-vě a desface o față de acestea de cătră cub! (Probează; dar nu merge). Vedeți, fața dela sine singură nu poate sta; ea totdeauna mărginește un corp.

Mai spuneți-mi odată, cu ce se mărginește cubul? — Bine, dar și fețele cubului inceată undeva; ian arătați-'mi marginile feței dinainte! Ce vedeți aci (arătănd spre o muchie)? Cu ce se mărginește dară fața aceasta? (... cu *muchii).* Cu căte muchi se mărginește fața aceasta? (cu patru). Și aceasta? etc. Așa dară ce putem zice despre fiecare față? (... se mărginește cu 4 muchii). Ian, să numěrăm toate muchile, să incepem din sus in jos! (Se face, și se află că sunt: 4 muchi deasupra, 4 dedebsubt și 4 de laturi). *Cubul are 12 muchii.* Repețire! Cum fug aceste 4 muchii ale feței deasupra? Care muchii mai fug *orizontal?* Și cum fug muchile fețelor laturale? (... *vertical).* Căte muchii fug orizontal? (8). Și căte vertical? (4). Să měsurăm d. e. muchia aceasta! (Se face!) Căt e de lungă? (... 1 dm.) Și căt de lată ... de groasă? — *Vedeţi, muchia are numaĭ lungime.* — Care muchiă e mai lungă? .... Priviţi, mĕsuraţi! Toate muchile sunt *asemene de mari.* Acuma priviţi la tablă! Nu vedeţi şi la dinsa muchii? (Scolarul arată muchile tablei şi determină direcţiunea lor ca mai sus). Apoi trăgĕnd invĕţ. o linie perpendiculară pre lăngă muchia stăngă a tablei — zice: Vedeţi, linia aceasta semĕnă cu muchia tablei. *Aşa infăţişăm noi in scris totdeauna muchile unui corp prin linii.* Repeţire.

Marginile cubului sunt feţe; marginile feţelor sunt muchii; dar să vedem, ce sunt marginile muchilor? Ian, arătaţi-'mi o muchie a cubului! Unde se gată aceasta? (scolarul arată). Ce vedeţi aci? (... un colţ). Insemnaţi-vĕ: *marginile muchilor sunt colţuri.* Priviţi, numĕraţi, căte colţuri are cubul — deasupra? (4) şi dedesubt? (4). — De toate? — Cubul are 3 dimensiuni; care-'s acelea? o faţă are 2 dimensiuni; care? o muchie are numai o dimensiune; care? Insemnaţi-vĕ, colţul n'are nici o dimensiune; el este numai marginea unei muchii. — Pe tablă insemnăm colţul prin *un punct.*

Douĕ muchii, cari se intălnesc intr'un punct, formează un unghiu, priviţi aci. Căte unghiuri vedeţi la faţa aceasta? (4). Dar la toate feţele cubului? (24). — Pe tablă vom infăţişa un unghiu de acestea aşa: (Se arată!)

II. 1. Cubul este corp; el are trei dimensiuni. In geometrie nu ne uităm la materia şi coloarea corpurilor, ci numai *la forma şi mărimea lor.*

2. Mărginile cubului sunt şese feţe egale. Faţa are numai douĕ dimensiuni şi se mărgineşte cu muchii. Muchia o infăţişăm prin linie. Douĕ linii imbinate formează unghiu.

3. Linia are numai o singură dimensiune şi se mărgineşte cu douĕ puncte.

4. Punctul e numai un semn in spaciu, fără de nici o dimensiune.

5. Cănd atingem vĕrful condeiului de placă se naşte un punct. Calea unui punct pus in mişcare e linie; calea unei linii pusă curmeziş in mişcare este faţă, şi calea unei feţe pusă in mişcare (bunăoară a unei scăndurițe in lut moale) este corp.

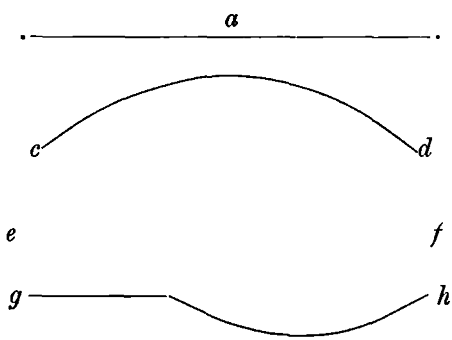
III. Determinaţi la cubul nostru dimensiunea ce o arăt eu (dela dreapta spre stănga etc.) — Arătaţi la cub dimensiunea din sus in jos! Cercaţi toate feţele, muchile şi colţurile cubului şi determinaţi poziţiunea lor! — Incercaţi-vĕ a desemna cubul! — Cercaţi alte corpuri in scoală şi determinaţi-le dimensiunile, feţele, muchile şi colţurile lor. Çe sunt mărginile tablei de scris? Ce fel de feţe? Numiţi-mi corpuri cu fețe strĕmbe, — determinănd poziția lor! — Numĕrați muchile dulapului etc. și le mĕsurați. — Desemnați pre plăcile voastre căte 4 linii de mărimea muchilor dela cubul nostru! — Numĕrați și-'mi spuneți căte colțuri are masa, tabla, mapa, dulapul etc.

II. Linii.

§. 6. **Despre linii in general.**

I. După repețirea resumatului din §-ul de mai nainte (p. II.), invĕț. face in fața scolarilor — provocăndu-'i mereu să privească la tablă — căte o linie dreaptă, strĕmbă, frăntă și mestecată. In desemnarea liniilor pleacă totdeauna dela legea, *că calea unui punct pus in mișcare este o linie.* Spre scopul acesta face mai ăntăi pentru fiecare linie căte o părechie de puncte in direcțiune orizontală in depărtare cam de 5 cm. și apoi merge incepĕnd dela punctul din stănga incet spre cel din dreapta, intrebănd la fiecare, că ce s'a format și formulănd apoi cunoștințele *(teoremele)* următoare:

Fig. 2.



II. 1. Linia se formează, punĕnd un punct in mișcare (vĕrful cerusei, al cretei etc.)

2. Linia o putem numì sau cu o literă mică pusă la mijlocul ei, sau cu două puse la capetele sale, ecsprimănd in casul ăntăi „linia *a*“, in al 2-le „linia *c—d*“.

3. Linia poate fi: a) *dreaptă,* cănd punctul din care se naște, se mișcă in una și aceeaș direcțiune dintru inceput pănă la fine; b) *strĕmbă* (curbă) — cănd punctul mișcător iși schimbă neincetat direcțiunea (linia *c—d*); c) *frăntă,* care este compusă din două sau mai multe linii de direcțiune felurită (linia *e—f*); d) *mestecată* (micstă), care e compusă din linii drepte și strĕmbe (linia *g—h*).

4. Linia dreaptă este calea cea mai scurtă intre douĕ puncte; ori care altă legătură dintre acele — prin linie strĕmbă, frântă sau mestecată este o cale mai lungă.

5. Intre douĕ puncte se poate duce numai o singură linie dreaptă. (Pe tablă stau douĕ puncte in depărtare de 2 dm.) — Impreună-le prin o linie dreaptă N! Mai trage intre dĕnsele o linie dreaptă! (Nu merge).

III. Numiţi liniile de pe tablă! Arătaţi-'mi linia *a, c—d, e—f, g—h!* — Priviţi in scoală şi spuneţi, unde vedeţi linii drepte (la tablă, la masă, la bănci etc.), curbe (la ţevile sobei, la ţiţinile dela uşe etc.) Oamenii zic despre omul, care nu ţine la dreptate, că e drept, ca „funea in sac". Cum e funea in sac? — Unde vedeţi linii frânte? (jur imprejur la tabla mesei, la bancă etc.); dar mestecate? (la cuier, la coridor etc.) — Cugetaţi, şi-'mi spuneţi unde vin inainte linii de aceste afară — in liber? sfoara (frânghie) de intins rufe, sfoara de straturi, cărarea, păriul, drumul, şanţurile de pre lângă dinsul, drotul dela telegraf etc. Ce fel de linii sunt acestea?

Linii *adevĕrate* nu sunt aceste fireşte; pentrucă o sfoară, un drot, o cărare etc. fie cât de subţire şi ingustă, nu are numai lungime, ci şi grosime şi lăţime; insă incât privim numai la lungime (abstragĕnd cu totul dela celelalte dimensiuni) ni infăţişază linii. Linii aevea dela sine stătătoare — ca şi puncte nu ecsistă nicăiurea in lume.

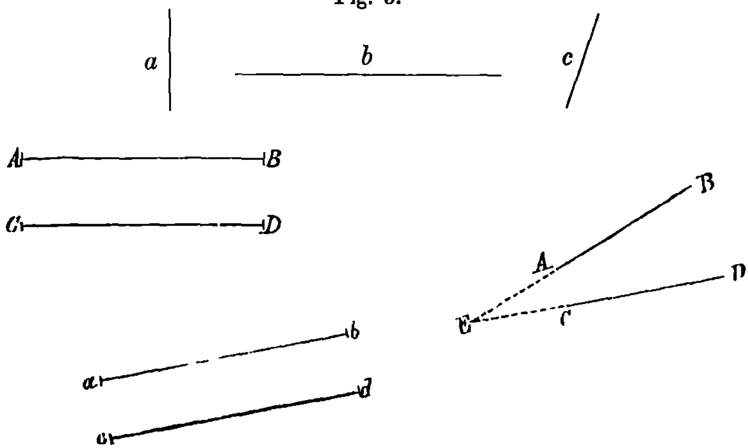
Calea ce o face arĕtătorul dela orologiu, roata pusă in mişcare, o piatră aruncată, calea soarelui dela rĕsărit până la apus ce fel de linii ne infăţişază? — Desemnaţi (cu mâna liberă) câte 4 linii din fiecare fel şi le numiţi! — Spuneţi-'mi, cum trag linii drepte templarul pe lemnele sale, grădinarul in grădină, geometrul pe câmp? Repeţiţi legile (de sub 1—5), şi apoi le scrieţi in caetele voastre.

§. 7. **Despre linii in special.**

I. Invĕţătorul are la indemână plumbina atĕrnată in loc potrivit, o cumpĕnă (balanţă) ce stă in echilibriu, un vas larg la gură plin cu apă — şi decimetrul cubic pus pe masa s'a in faţa scolarilor. Făcĕnd apoi pe tablă in faţa scolarilor câte o linie verticală, orizontală, piezişă şi câte o păreche de linii paralele şi converginte, formulează adevĕruri ca următoarele:

II. 1. O linie, ce fuge din sus drept in jos — ca firul plumbinei — se numeşte *verticală* sau perpendiculară (linia *a* Fig. 3).

Fig. 3.



2. Linia, care fuge dela dreapta *drept* spre stănga — ca şi braţul cumpenei sau ca suprafaţa apei ce stă in linişte — se numeşte *orizontală* (linia *b*).

3. Linia dreaptă, care nu e nici perpendiculară nici orizontală, ci bunăoară ca subprafaţa unei coaste sau ca coperişul casei, — se numeşte *costişă (pezişă* linia *c).*

4. Linii, care stau pe tot locul asemene dedeparte una de alta, şi ori cât le-am prolungì nu s'ar atinge nici odată — ca şi muchiile deasupra şi dedesubt ale cubului nostru se numesc *paralele* (liniile *A—B C—D, a—b, c—d*).

5. Linii, care prolungindu-se, la un capăt se apropie, ear la unul se departă una de alta, bunăoară ca braţele foarfecelor ce se deschid, se numesc *neparalele.* La capătul, unde se apropie se numesc *converginte,* şi la cela unde se despart — *diverginte* (liniile *ABCDE* fig. 3).

III. Căutaţi in scoală corpuri, la cari se află linii verticale, orizontale, piezişe, paralele şi neparalele! (muchiile uşei, a uşciorilor la uşi şi fereştri, a păreţilor; picioarele dela masă, crucile dela fereştri etc.) Ecsaminaţi liniile perpendiculare cu plumbina şi cele orizontale cu libela — dacă sunt intr'adevĕrt aşa, cum le vedem!

Invĕţătorul va arăta modul intrebuinţărei acestor instrumente!

Braţul drept inainte! Formaţi cu dinsul o linie perpendiculară, orizontală, pezişă! Aceeaş cu amĕndouĕ! — Braţele paralel inainte! paralel indĕrĕt! paralel in sus — in jos! in sus converginte! in jos, in laturi diverginte!

Ce linii ne iafăţişază liniile in caetele de scris? urmele carului? brazdele pe arătură? şanţurile de pe lăngă drumuri? Ce direcţiune are suprafaţa păriului? riului? lacului? coperişul şi coama casei?

(Atari probleme au o insemnătate foarte mare in intreg invĕţămĕntul, odată pentrucă prin trĕnsele se lămuresc cum se cade noţiunile, a doua, pentrucă prin trĕnsele se desvĕleşte inaintea scolarului, că ştiinţa geometrică nu e un ce isolat, ci luată şi de aplicat la viaţă. In atari probleme noţiunile abstracte capĕtă viaţă).

Desemnaţi căte douĕ părechi de linii paralele in toate direcţiunile cunoscute! — Cum veţi face atari linii paralele afară in liber? (Ăntăi determinăm capetele liniilor de ambe laturile prin pociumbi, apoi impreunăm capetele de fiecare lature prin o frănghie sau earăş prin pociumbi).

§. 8. Mĕsurarea liniilor (lungimei).

I. Invĕţătorul are la indemănă o rudă metrică sau un lineal cu subimpărţirile relative — in dm., cm. şi mm.; ear scolarii au linialuri micuţe cu impărţiri de dm. cm. şi mm. E foarte de dorit, că in scoală să atĕrne pururea pe cutare părete o tabelă cu metrul impărţit pănă la centimetri, — ca scolarii să aibă ori cănd mĕsura la indemănă. — Decametrul se infăţişază in curtea sau grădina scoalei prin o sfoară de 10 m. de lungă, — asemene şi hectometrul — la cămp afară. Aşa provĕzuţi invĕţătorul pune pe scolari să determine distanţe felurite, precum: lungimea şi lăţimea tablei, a tabelelor, a fereştrilor etc. a cărţilor, a tăbliţelor, a unei coale de hărtie; lungimea, lăţimea şi inălţimea odăiei de scoală, lungimea şi lăţimea curţii şi a grădinei scolare etc.

II. 1. Ca să putem mĕsura lungimea grădinei etc. ne trebue o mĕsură.

2. Mĕsura principală de lungime este astăzi metrul (m.), care e baza tuturor mĕsurilor.

3. A zecea parte din metru se numeşte decimetru (dm.), a suta parte — centimetru (cm.) şi a miia parte milimetru (mm). — Zece metri fac un dekametru (dkm.) sau un lanţ; 100 metri fac un hectometru (hm.) şi 1000 metri — un kilometru (km.)

4. Prospect tabelar preste mĕsurile de lungime.

km.	hm.	dkm.	m.	dm.	cm.	mm.
1 =	10 =	100 =	1000	.	.	.
	1 =	10 =	100	.	.	.
		1 =	10	.	.	.
			1 =	10 =	100 =	1000
				1 =	10 =	100
					1 =	10

Sunt rude de lemn sau de fier anumite, pe cari se inseamnă mĕsurile de lungime cele mai obicĭnuite in viaţă. Atari *„rude de mĕsurat“* numite şi „mĕsuri efective“ avem de 20 m., de 10 m. şi de 5 m. in formă de lanţ, cu cari se mĕsură căile, parcelele etc.; apoi de 2 m. şi de 1 m. ce le intrebuinţază măestri, industriaşii şi comercianţii; pe urmă de 0·5 m. sau 50 cm., 0·2 m. sau 20 cm. şi de 0·1 sau de 10 cm, ce el folosesc architecţii, pictorii etc.

III. Să facă fiecare pe o lature a linealului sĕu 3 dm. cu impărţirea in cm. — după ruda de mĕsurat a noastră! — Pe tablă stau mai multe linii mai mari şi mai mici; preţuiţi-le! Mĕsuraţi-le cu metrul! — Desemnaţi pe tăbliţele voastre linii de 6 cm.; 2·5 dm., 1·7 dm.

Preţuiţi cu ochiul — şi apoi mĕsuraţi cu metrul lungimea tablei, a uşei din scoală, a edificiului, a curţii şi a grădinei scolare etc.! Căt de lungă este o cerusă intreagă, braţul, degetul arătător etc. al vostru? Căt de lată este o schioapă, o palmă, un deget? Căt de gros este un fir de spĕgmă (aţă), de pĕr etc.? Căt de mare este distanţa ambelor măni intinse in direcţie opusă? Stănginul! — Determinaţi pe stradă lungimea unui hm., unui km.

§. 9. Mĕsura redusă sau micşorată transversală.

I. Am mĕsurat lungimea şi lăţimea odăei noastre de scoală in metri. Acuma să o desemnăm pe tablă. Lungimea e de 8·6 m., lăţimea 6·8 m, Atăta putem şti inainte, că aşa de mari după cum sunt aevea distanţiile mĕsurate nu le putem face in desemn; pentrucă atunci ni-ar trebuì o tablă căt chilia de mare. Cum am putè dară totuş să-o desemnăm? Care ştie? Vedeţi, aceasta vom face-o aşa: Tragem o linie pe tablă aci dedesubt, o impărţim d. e. in 10 părţi egale, din care fiecare parte infăţişază 100 de unităţi. Din punctele finale se rădică perpendiculare.

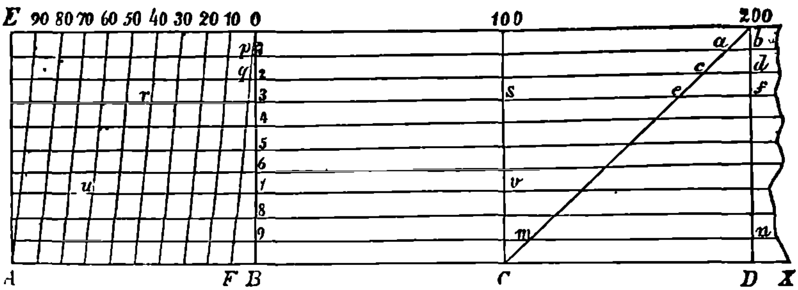
Impărţim apoi una din buncăţile aceste de obicei pe cea din capĕt de-a stănga, earăş in 10 părţi asemene, cari le privim de căte 1 dm.; apoi mai impărţim şi părticelele aceste earăş in căte 10 părticele asemene, ce le privim de căte 1 cm. Acuma ne va fi uşor a desemna pe tablă o linie de 8·6 m. = 8 m. 6 dm, (lungimea odăei). Vom prinde cu circiniul pe linia noastră lungimea de 8 m. 6 dm. şi o vom transpune pe hărtie. Faceţi-o aceasta!

Desemnaţi acuma şi lăţimea de 6·8 m. = 6 m. 8 dm.! Vedeţi, o atare linie cu asemene impărţire, după care putem desemna micşorat lungimi mai mari se numeşte *mĕsură micşorată (redusă).*

Dacă am avè să desemnăm ecstensiuni şi mai mari, d. e. lungimea şi lăţimea unui pămênt, unei păduri etc., atunci am privì cele 10 respective 3 bucăţi ale liniei noastre impărţite *nu* de metru, ci de dekametru (10 m.) sau de hmetru (100 m.) Subimpărţirile ar fi in casul prim metri şi dmetri, in al doile lanţ (dkm.) şi metru.

Cu ajutorul unei atari mĕsuri reduse putem pune uşor pe hărtie ecstensiuni de ori ce mărime. Uşor se poate intrebuinţa de atare mĕsură redusă decimetrul desemnat (fig. 4). Putem privì cm. de m., mm.

(Fig. 4).



de dm., sau la lungimi mai mari cm. de dkm. şi mm. de m.

Mĕsurile comercianţilor, geometrilor şi architecţilor sunt de obicei făcute pe papir, os sau aramă galbĕnă.

Cele 11 linii orizontale paralele stau pe tot locul asemene de departe una de alta şi-'s impărţite prin verticale in 3 părţi egale: AB=BC=CD. Bucata din spre stănga AB e impărţită earăş prin linii curmezişe in 10 părţi egale. Spre scopul acesta tragem intr'o parte careva d. e. in CD diagonala C 200. Dacă vom privì acuma pe CD de metru, atunci *ab* din şirul al 2-le deasupra este $^{1}/_{10}$ m. = 1 dm. (10 cm.), prin urmare şi din bucata AB. Părţile acestę se aplică acum atăt pe AB căt şi pe CD (precum se vede in fig. 4). Prin prima linie curmezişă paralelă din dreapta căpĕtăm pe paralelele orizontale ăncă odată zecimi din aceste părţi mai micuţe, anume in şir incepĕnd din jos in sus $^{10}/_{10}$, $^{9}/_{10}$ . . . $^{1}/_{10}$. Aşa, că dacă inseamnă pe linia cea mai din jos prima parte din BA (BF) = 1 dm. = 10 cm., atunci prima părticică de pe linia următoare (a 9-a) va insemna $^{9}/_{10}$ dm. = 9 cm., cea de pe linia a 8-a = $^{8}/_{10}$ dm. = 8 cm. . . . cea de pe linia 1-ă = $^{1}/_{10}$ dm. = 1 cm.

Tot aşa mai tae şi ultima curmezişe (din stănga) ăncă odată zecimi din paralele, cu osebirea, că aci şirul $^{10}/_{10}$, $^{9}/_{10}$, $^{8}/_{10}$ . . . . . $^{1}/_{10}$ se numĕră din sus in jos. Părţile pe paralelele orizontale *dintre* curmezişe sunt toate egale intre sine anume $^{1}/_{10}$ din AB.

II. 1. La desemnarea distanţelor mari intrebuinţăm mĕsura micşorată sau redusă, ce are de obicei forma din fig. 4.

2. Distanţa AB=BC=CD poate insemna — un metru, un deka- un hecto- un kilometru — după mărimea liniilor de mĕsurat. Dacă vom lua AB de 1 dkm., cele 10 părţi ale sale ne infăţişază 10 m., şi prima linie curmezişă din dreapta ni tae pe paralele orizontale — numĕrănd din jos in sus 10, 9, 8. — 1 dm. — Tot asemene avem şi pe partea opusă din stănga numai in progresiune intoarsă — pre cănd intre curmezişe sunt pe toate paralelele zecimi egale din AB.

3. Cu mĕsura redusă putem transpune pe hărtie micşorat ori ce distanţă mĕsurată.

4. Mĕsura micşorată după care facem cutare desemn trebue alăturată totdeauna acestuia, pentru de a putè determina prin mĕsurare oricănd adevĕrata lungime a ecstensiunilor singuratice.

III. Prindeţi cu circiniul pe mĕsura micşorată (fig. 4) 24·5 m.!

Procesul: AB=BC să valoreze 10 m. Pune circiniul pe linia orizontală 5 in punctul de strătăiere cu verticală D 200. Deschide circiniul mai ăntăi pănă la verticala BO. Aci ai 2×10 m. = 20 m.; apoi il deschizi pănă la prima curmezişă (care bucăţică egalează 5 dm.) Aşa ai 20 m. + 5 dm. In fine dela punctul acesta mai spre stănga iai cu circiniul ăncă 4 părticele cari egalează 4 m.) Aşa ai (20 m. + 5 dm. + 4 m. = 24 m. 5 dm. = 24·5 m.) in circiniu linia cerută.

b) Pregătiţi-vĕ fiecare o atare mĕsură redusă şi apoi vĕ deprindeţi pe aceea in prinderea liniilor orizontale.

c) Intrebuinţaţi ca mĕsură redusă un decimetru impărţit in cm. şi mm. şi pregătiţi cu ajutorul aceluia felurite desemne.

d) Aci am un desemn, ce-'l atĕrn pe tablă. Determinaţi după mĕsura redusă de pe dinsul distanţele liniilor singuratice!

e) Luaţi-vĕ mapa (charta) Austro-Ungariei! Şi pe aceasta vedeţi — dedesubt mĕsura metrică redusă (la km.) după care-'i desemnată. Determinaţi după aceasta cu ajutorul circiniului distanţa dintre Gherla şi Dej, intre Gherla şi Bistriţa, intre Gherla şi Braşov, intre Braşov şi Budapesta, intre Budapesta şi Bucuresci, intre Blaj şi Bucuresci etc.

III. Despre unghiuri.

§. 10. **Formarea, noţiunea şi felurile unghiurilor.**

I. Invĕţ. işi intinde măna dreaptă in direcţiune orizontală ţinĕnd palma in sus, şi apoi işi ridică partea dinainte din cot incetişor ca şi când ar face cuiva semn să meargă la dinsul.

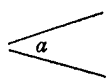
Tot ăsemene se poate face şi cu partea deasupra şi din jos a piciorului. — Apoi ia circiniul şi-'l deschide incetinel, ţinĕnd un braţ (crur) drept nemişcat, ear celalalt făcĕndul să se intoarne in jurul capului pănă cănd ambele vin a sta cu capetele impreună — in direcţie opusă. Deseamnă starea braţĕlor in felurite poziţii — prin douĕ linii, ce pleacă dintr'un punct.

II. 1. Douĕ linii drepte, ce pleacă dintr'un punct, formează un unghiu ($\sphericalangle$).

2. Cele douĕ linii se numesc *braţele* (crurii), ear punctul de plecare *capul* (vĕrful) unghiului.

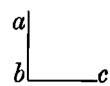
3. Unghiul se poate numì: a) prin o literă mică pusă *in năuntru* la vĕrf (fig. 5); b) prin o literă mare pusă *afară* la vĕrf (fig. 6); c) prin trei litere mici puse la capetele libere ale braţelor li la vĕrf, cari se ecsprimă totdeauna aşa, că litera dela vĕrf să se iee in mijloc (fig. 7). d. e. unghiul *abc*.

(Fig. 5).



(Fig. 6).

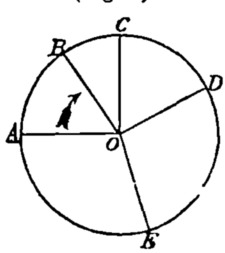
(Fig. 7).



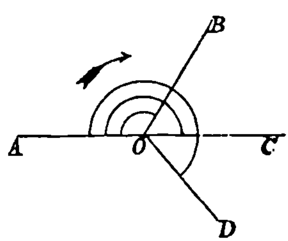
4. Mărimea unghiului nu atĕrnă dela lungimea, ci dela depărtarea unui braţ de altul.

5. Rotirea intreagă a unui braţ (AO) in jurul vĕrfulu (O fig. 8) descrie un cerc şi formează 4 unghiuri drepte sau 360 grade (360^0). — Jumĕtate rotirea — formează un unghiu *intins* sau *plan;* braţele acestuia formează o linie dreaptă (AC fig. 9). — A patra parte din cerc

(Fig. 8).



(Fig. 9).



sau jumĕtate din unghiul intins se numeşte unghiu drept (R), care e de 90^0. Braţele acestuia stau perpendicular (AC şi CO fig. 8). — Unghiurile mai mici decăt cel drept se numesc *ascuţite* (AOB fig. 8). — Cele dintre cel drept şi cel intins (AOB fig. 9) *tĕmpite* sau *concave.* — In urmă unghiurile mai mari decăt cel plan sunt *ridicate* sau *inălţate* (AOD fig. 9).

III. Desemnaţi căte douĕ unghiuri intinse şi drepte in poziţie deosebită. — apoi căte unul ascuţit, tĕmpit şi ridicat şi le insemnaţi pe rănd căte cu o literă mare, mică şi cu trei litere!

Luaţi circiniul şi deschizĕndul formaţi tot felul de unghiuri incepĕnd dela cel ascuţit! — Cercaţi tot felul de unghiuri in scoală (la uşa, la fereastă, la păreţi, la orologiu, podeală, pod, la masă, bănci, tablă, carte, tăbliţe, la sobă etc.)! Arătaţi-mi unghiuri ascuţite, drepte, tĕmpite, deschise.!

Scolarii obsearvă dela sine, că la obiectele din odae predomneşte unghiul drept.

Cercaţi tot asemene unghiuri afară de scoală (la foarfice, la cleşte, la sĕcure, la capra de tăiat lemne, la coasă, la scara răzĕmată de un păriete)!

Scolarii trebue indreptati şi reflectaţi a privì pretutindenea unghiurile; ştiinţa lor trebue să capete viaţă. Şi apoi chiar problemele aceste li-o procură pe aceasta.

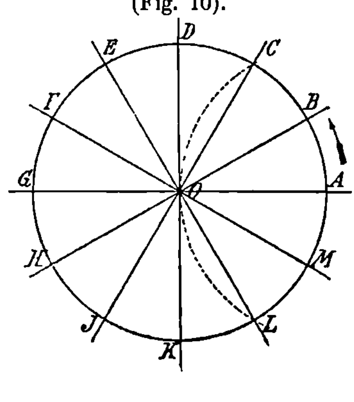
Sunt 12 oare; ce unghiu formează arătătorul cel mare după 5, 10, 15, 20, 30, 40 minute? Arătătorul cel mic la 1, 2, 3 — 11 oare?

Cum vom face afară in liber un unghiu drept? (Punem 3 beţe de căte 3, 4 şi 5 palme cu capetele lor in forma unui treiunghiu. Unghiul drept se află intre beţele cele de 3 şi 4 palme. Sau luăm o sfoară de 12 m., o innodăm pe 2 locuri aşa, că bucăţile cele trei să fie de 3, 4 şi de 5 m. apoi o innodăm la capete. In fine o intindem prin 3 beţe puse la cele 3 noduri in forma unui treiunghiu; unghiul drept il aflăm intre laturile de 3 şi 4 m.) — (Afară). Staţi drept şi formaţi cu braţul drept şi cu corpul un unghiu drept! Cu braţul drept şi cu partea deasupra a corpului unghiu ascuţit etc.

Unghiuri drepte facem — la desemn cu treiunghiul, cu unghiarul, cu transporterul; in liber cu crucea unghiulară şi cu alte instrumente.

§. 11. **Mĕsurarea unghiurilor.**

(Fig. 10).



I. Ştim dejà, că unghiurile pot avè mărime felurită. Dar cum să le determinăm după mărimea lor? Putemu-le oare mĕsura ca şi liniile cu ruda metrică? Incercaţi-vĕ! Nu merge. Deci trebue să aflăm alt mijloc spre a le putè mĕsura. Priviţi la tablă! Ce vedeţi aci (fig. 10)? (Unghiul drept *acb*). Descrieţi in jurul vĕrfului lui un cerc! Vedeţi, că unghiul drept cuprinde acurat a 4-a parte din cerc. — Injumĕtățiți unghiul drept după mĕsura ochiului? Jumĕtățile sale cuprind 1/8 din cerc. Formați un unghiu și mai mic in lontrul cercului! Vedeți, arcul (*af*) ce-'l cuprinde, e mai mic și decăt 1/8 din cerc. Formați un unghiu tĕmpit (*ace*) in cerc. Arcul dintre brațele acestuia este mai mare decăt 1/4 de cerc. — De aci vedeți, că cu căt este mai mare unghiul, cu atăta e mai mare și arcul cercual dintre brațele sale și intors. In urmare, *cercul format in jurul vĕrfului unghiului poate servì de mĕsură pentru unghiu.*

Unghiurile drepte — sunt toate egale. Pentru ce? Nu tot aceasta putem zice și despre celelalte feluri de unghiuri. Pentru de a putè determina și mărimea acelora, impărțim cercul in 360 părticele asemene — numite grade — și ne uităm, căte grade cad pe unghiu. Unghiul drept e totdeauna de 90, cele ascuțite mai mici și cele tĕmpite mai mari de 90 grade. Insă ni-ar custa prea multă osteneală și ar fi și cu intărziare, dacă am vrè ca să facem cercul și să-'l impărțim in cele 360° la fiecare mĕsurare de unghiu. Spre a ușura lucrul in obiectul acesta, s'a impărțit odată pentru totdeauna un semicerc — *raportorul* — descris pe hărtie sau aramă gălbĕnă in 180°, care apoi se intrebuințează ușor și comod la mĕsurarea ori cărui unghiu.

Linia curbă regulată, ce se intoarce in sineș și in care toate punctele sunt asemene depărtate de un punct — centru — se numește *cercuferință* sau scurt cerc. — Linia dreaptă, care trece dela un punct al cercuferinței prin centru pănă de laturea opusă a cercuferinței, se numește *diametru*. Jumĕtate din diametru este *razul*. O parte a cercuferinței se numește *arc*.

II. 1. Unghiurile le mĕsurăm cu ajutorul cercului descris in jurul vĕrfului acelora.

2. Arcul dintre brațele unghiului ne infățișază mĕsura aceluia.

3. Intreg cercul se imparte in 360 grade, și determinăm mărimea unghiului după gradele arcului dintre brațele sale.

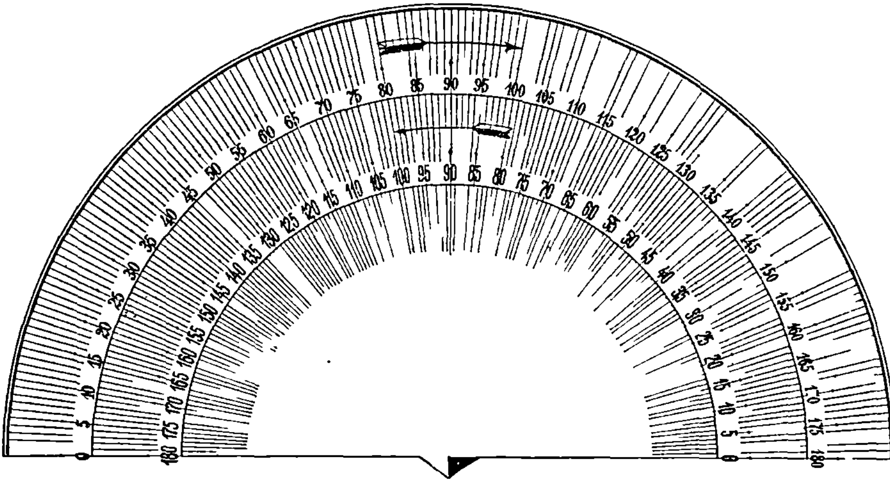
4. Ori ce unghiu drept (R.) este de 90°; ori ce unghiu ascuțit mai mic, și ori ce unghiu tĕmpit mai mare decăt 90°.

Pentru determinarea acurată a mărimei unghiurilor, impărțim fiecare grad earăș in 60 părți egale = minute (60'), și fiecare minută in 60 secunde (60").

5. Instrumĕntul anume menit spre mĕsurarea unghiurilor se numește *raportor* sau *transporter*.

6. Cu raportorul mĕsurăm unghiul așa, că punem diametrul semicercului acurat pe un braț al uunghiului incăt centrul aceluia să vină a sta chiar pe vĕrful unghiului, și apoi citim gradele pe semicerc după cum arată celalalt braț (fig. 11).

(Fig. 11).



III. Pe tablă stau mai multe unghiuri. Preţuiţi-le mărimea după grad . . . . . şi apoi ecsaminaţi cu raportorul mărimea aflată! Formaţi cu raportorul unghiuri de 7, 9, 16, 47, 68, 100, 140 grade! Luaţi circiniul şi formaţi cu braţele sale unghiuri de 90, 75, 60, 45, 30 grade.

După mai multe deprinderi de acestea invĕţătorul poate da teme ca următoarea:

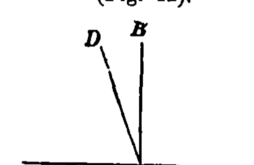
Trageţi in cugetul vostru căte o dreaptă spre vĕrful şi spre rădĕcina mĕrului celui din fundul grădinei noastre, şi preţuiţi mărimea unghiului format de cele două drepte!

La mĕsurarea respective preţuirea unghiurilor după mărime in liber scolarii vor observa, sau dacă nu, i va reflecta invĕţătorul, că unghiul vederei, sub care observăm obiectul, creşte sau scade, după cum ne ăpropiem sau ne depărtăm de acesta.

§. 12. Legi referitoare la unghiuri.

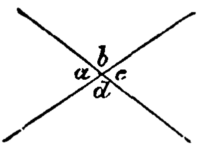
I. Pe tablă stă linia AC (fig. 12). Din punctul O. duc linia OB. Prin aceasta am căpĕtat două unghiuri, care? (AOB şi BOC). Asĕmĕnaţi-le! — (Au acelaş vĕrf (O) şi braţul OB le este comun; ear celelalte două braţe AO şi CO formează o linie orizontală). Insemnaţi-vĕ: Atari unghiuri se numesc *lăturate (vecini* sau şi *contigi)*. — Mai ridicăm din O şi linia pezişă OD! — Ce unghiuri s'au format prin tr'ĕnsa? — Spuneţi părţile lor comune! — Căt de mari sunt impreună ∢ AOD şi DOC. Judecaţi cu ochiul! . . . .

(Fig. 12).



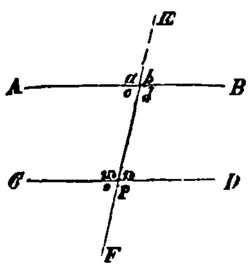
Měsuraţi-le cu circiniul! .... Cu raportorul! Tragem pe tablă douě drepte, ce se strătaie (fig. 13). Căte unghiuri am căpětat? Ce se poate zice despre unghiurile părechiate *b* şi *c*, *c* şi *d*, *d* şi *a*, *a* şi *b*, (sunt unghiuri laturate). Dar şi ∢ *a* şi *c*, *b* şi *d*, un nume deschilinit — unghiuri *convěrve* (verticale). Unghiurile convěrve işi stau făţiş intělnindu-se cu věrfurile. Dar şi altmintrele se pot naşte unghiurile aceste, anume prolungind preste věrf braţele unui unghiu.

(Fig. 13).



Judecaţi după měsura ochiului mărimea ∢ *ac*, *bd*! — Měsuraţi-le cu circiniul, — cu raportorul! Ce aţi aflat? *Unghiurile convěrve sunt intre sine egale.* Invěţătorul trage douě linii orizontale paralele in depărtare ca de 1 dm. şi preste dinsele una pezişă, ca in (fig. 14). — Căte unghiuri s'au format? (8). Insemnaţi-vě: a) unghiurile *c* şi *d*, *m* şi *n* se numesc *interne*, ear ∢ *a* şi *b*, *o* şi *p ecsterne.* Pentru ce?

(Fig. 14).



b) Priviţi la ∢ *a* şi *m*! Unde jace ∢ *a*? şi unde ∢ *m*? Ce fel de unghiu este *a* după mărime? şi ∢ *m*? (asemene). Tot aşa se conversează şi preste unghiurile părechiate: *b* şi *n*, *c* şi *o*, *d* şi *p*). Vedeţi, dacă ne vom cugeta paralela din sus AB lăsată in jos pănă pe CD, unde cade ∢ *a*? ∢ *b*? ∢ *c*? ∢ *d*? Atari unghiuri părechiate — tot unul ecstern şi unul intern, ce au věrfuri felurite, şi zac de aceeaş parte a liniei strătăietoare, se numesc *„corespunzětoare“*.

c) Douě unghiuri interne sau ecsterne cu věrfuri felurite de aceeaş parte a strătăietoarei se num. *suplementare*, precum ungh. *c* şi *m*, *d* şi *n*, *a* şi *o*, *b* şi *p*.

d) Douě unghiuri interne sau ecsterne cu věrvuri felurite de părţi diverse a strătăietoarei, se num. unghiuri *alterne*, precum ungh. *c* şi *n*, *d* şi *m*, *a* şi *p*, *b* şi *o*. Comparaţi căte 2 unghiuri alterne după mărime, cu ochiul liber! .... cu circiniul! .... cu raportorul! ... Resultatul? *Unghiurile alterne sunt intre sine egale!* (Tot aşa se poate procede şi cu celealalte părechi de unghiuri).

II. 1. Cănd ducem din o linie dreaptă altă dreaptă, formăm douě unghiuri laturate.

2. Douě unghiuri laturate au comun věrful şi un braţ, ear celalalte braţe zac intr'o linie dreaptă.

3. Douĕ unghiuri laturate sunt ca 2 R. de mari sau 180°. — Dacă din 2 ungh. laturate unul este drept, celalalt ăncă este drept. Braţul comun este perpendicular.

4. Cănd se strătae douĕ linii drepte, se formează 4 unghiuri, dintre care tot căte douĕ făţişe (vis-à-vis) sunt *convĕrfe.*

5. Cănd se strătae douĕ linii orizontale paralele prin una pezişă, se formează 8 unghiuri, dintre care tot căte douĕ sunt parte corespunzĕtoare, parte suplementare, parte alterne.

6. Unghiurile comune, corespunzĕtoare, suplementare şi alterne sunt intre sine egale.

7. Douĕ unghiuri suplementare interne ca şi douĕ ecsterne la olaltă sunt egale la 2 R.

III. Pe tablă stau felurite figuri; in care vedeţi unghiuri laturate? convĕrfe, corĕspunzĕtoare? suplementare? alterne? — Formaţi din beţişoare unghiurile numite! Un unghiu este de 90, 78, 63, 40 graduri; căt de mare-'i unghiul laturat? Din unghiuri convĕrfe e fiecare de 34 graduri; căt de mare e fiecare unghiu din cealaltă părecha?

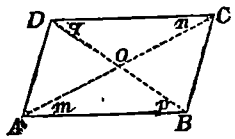
Numiţi obiecte din scoală şi de afară, la cari vin inainte unghiurile aceste! (fereastră, frunza pe cotor, ramul pe creangă; un arbore crescut drept pe şes pe deal; fuştei şi braţele (loitrele) la scară; — foarfice, cruce, drumuri crucişe, capra de tăiet lemne. — Deseinnaţi căte o părechea din toate unghiurile aci pomenite, şi determinaţi mărimeă lor după graduri!

IV. Despre feţe.

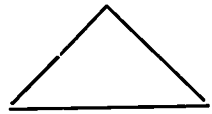
§. 13. **Despre feţe in general.**

I. Numiţi-'mi unele corpuri (tablă, masă, fereastră etc) Cu ce se mărgineşte tabla? (feţe). Cu ce se mărgineşte ori ce corp? (feţe). Priviţi la feţele tablei! Cu ce se mărgineşte faţa dinainte? (. . . dungi). Cu căte? Prin ce infăţiţăm noi dungile pe tablă? (. . . prin linii). Aşadara vrĕnd a desemna faţa dinainte a tablei prin căte linii o vom face aceasta? (. . . prin 4. Se face!) Dar dacă am vrè să desemnăm faţa acestei bucăţi de hărtie (treiunghiu), prin căte linii am trebui se-o facem? (. . . . prin trei. Se face!) Vedeţi, o faţă mărginită de *toate laturile prin linii se numeşte figură.* Pe tablă stau mai multe figuri; priviţi-le! Figurile 15, 16 şi 17 sunt mărginite de linii drepte, fig. 18 de linii curbe şi fig. 19 de una dreaptă şi de una strĕmbă. — In patruunghiu trage invĕţ. douĕ diagonale, şi apoi mĕsură pe rănd lungimea laturilor cu ruda de metru şi mărimea unghiurilor cu transporterul. Pe basa acestora apoi se formulează adevĕrurile următoare:

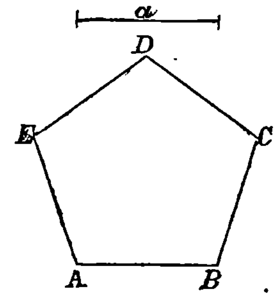
(Fig. 15).



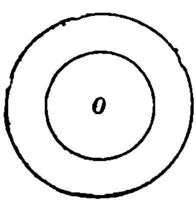
(Fig. 16).



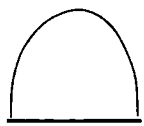
(Fig. 17).



(Fig. 18).



(Fig. 19).



II. 1. O faţă mărginită de toate părţile de linii se numeşte figură.

2. Figurile se pot forma de linii drepte, strĕmbe şi mestecate.

3. Figurile formate de drepte sunt: treiunghiuri, patruunghiuri şi poligoane. Treiunghiul are 3 laturi, 3 unghiuri şi 3 colţuri. Patruunghiul are 4 laturi şi 4 unghiuri sau colţuri. Poligonul are mai mult de 4 laturi şi 4 unghiuri. Poligoanele pot fi: cinci—şese . . . . zeceunghiuri.

4. Suma laturilor unei figuri formează *perimetrul* aceleia.

5. O dreaptă, ce impreună intr'un patruunghiu sau intr'un poligon două unghiuri făţişe se numeşte diagonală. In fig. 15 liniile AC şi BD sunt diagonale.

6. Laturea, pe care ni-se pare, că se razĕmă figura, se numeşte *bază* (AB fig. 15). Care va fi inălţimea acestui patru-unghiu?

III. Numiţi-mi feţe la cari vin inainte trei- patru-unghiuri şi poligoane! (feţele din fund ale coperişului casei, faţa mesei etc. a pietrilor din coridor etc.) — Numiţi-mi corpuri cu feţe de linii strĕmbe! (baza tăierelor, a vaselor de mĕsurat: litru etc. marginea crucerilor etc.) — Determinaţi perimetrul figurilor de pe tablă! — Acuma cela al tablei, al mesei, al chiliei de scoală, al curţii, al grădinei!

Grădina scoalei are formă de patru-unghiu (ca fig. 15); lungimea-i de 112 m., lăţimea de 44 m. Tot la 2 metri se cer 4 pari, la 24 pari un car de nuele. Dacă perechia de pari custă 5 cruceri, un car de nuele 1·25 fl., ingrăditul unui car 25 cr.; căt de scump se vine ingrăditura? — Desemnaţi căte două poligoane de şese, de opt şi de zece laturi!

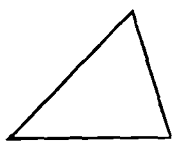
Că invĕţătorul va cere şi ţinè mult la curăţenia caetelor scolarilor, se inţelege dela sine.

a) Feţe mărginite de linii drepte.

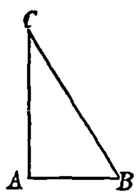
§. 14. Treiunghiul.

I. Ce inţelegeţi sub figură? Priviţi la tablă! Invĕţ. face căte un unghiu ascuţit, drept şi tĕmpit, ăntăi cu braţe egale, apoi neegale). Sunt aceste figuri? (. . . nu). Ci? (unghiuri). Priviţi incoace! (Invĕţ. impreună capetele ambelor braţe la fiecare unghiu prin o dreaptă). Ce am căpĕtat acuma din fiecare unghiu? (. . . căte o figură). Pentru ce? De căte laturi e mărginită figura 20? (. . . de 3). Ce figură va fi? (. . . treiunghiu). Priviţi şi la celelalte figuri pe rănd! Ce figuri sunt şi aceste toate? Pentru ce sunt toate aceste treiunghiuri?

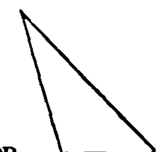
(Fig. 20).



(Fig. 21).



(Fig. 22).

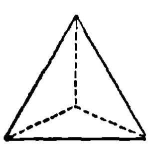


II. 1. Figurile de trei laturi, trei unghiuri şi trei colţuri se numesc trei unghiuri.

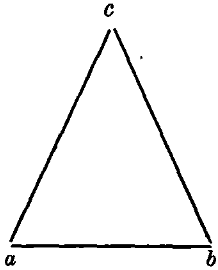
2. Treiunghiul il numim cu trei litere mari sau mici puse la cele trei colţuri.

3. Treiunghiurile le deosebim a) după *laturi* in treiunghiuri cu laturi egale = *ecuilaturale* (fig. 23), numai cu două laturi egale = *ecuicrure* ori *isoscele* (Fig. 24) şi in treiunghiri cu laturi neegale = *scalene* (fig. 22); b) după *unghiuri:* in treiunghiuri *ascuţite* (cu tustrele unghiurile ascuţite (fig. 23), in treiunghiuri *drepte (recte)* cu un unghiu drept şi 2 ascuţite (fig. 21) şi in treiungh. *obtuse* (tĕmpite) cu un unghiu obtus şi cele două ascuţite (fig. 22).

(Fig. 23).



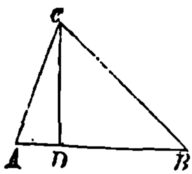
(Fig. 24).



4. Treiunghiurile ecuilaturale sunt totdeauna ascuţite, cele ecuicrure sunt drepte, ascuţite ori şi obtuse, tot asemene şi cele scalene.

5. Laturea pe care ni se pare că jace treiunghiul se numeşte *baza* (AB fig. 25); totuş se poate lua ori care lature de bază. In treiunghiul ecuicrur se ia de bază de obiceiu laturea cea neegală; colţul făţiş (C) este *vĕrful;* ear perpendiculara dusă dela vĕrf la bază (CD) este *inălţimea* treiunghiului.

(Fig. 25).

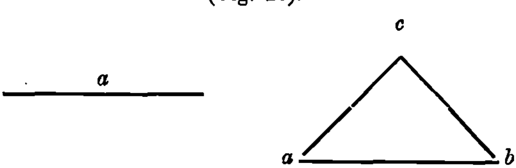


6. In treiunghiul drept, laturile ce formează unghiul drept se numesc *cateţi*; ear laturea făţişă cu unghiul drept — *ipotenusă.* Unul dintre cateţi este baza, celalalt inălţimea treiunghiului.

III. Pe tablă stau felurite treiunghiuri; spuneţi ce fel de treiunghiuri sunt după laturi? după unghiuri? — Mĕsuraţi unghiurile precis! — Desemnaţi şi voi tot felul de treiunghiuri! — Acuma desemnaţi un treiunghiu cu 2 ungh. R! cu 2 ungh. obtuse! . . . nu merge, liniile nu convin; in treiunghiu poate fi numai un unghiu drept ori obtus, celelalte douĕ trebue să fie ascuţite (mai jos)! — *Desemnaţi un △ ecuilateral cu laturea dată a!*

Procedura: Luăm laturea dată intre braţele circiniului şi o străpunem pe o linie oare-care, carea va fi baza treiunghiului cerut; apoi descriem din capetele *a—b* cu aceeaş deschizĕtură de circiniu arcuri in sus, care se strătaie in punctul *c;* impreunăm apoi pe *c* prin drepte cu *a* şi *b.* (fig. 26). —*Desemnaţi un △ ecuicrur!*

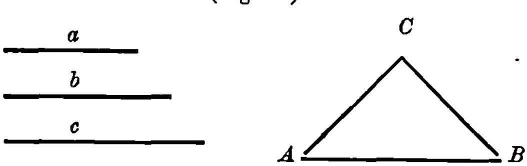
(Fig. 26).



Procedură: Tragem bază *ab* (fig. 24), apoi descriem cu ori ce deschizĕtură a circiniului — mai mare ori mai mică decât baza — arcuri, cari se strătae d. e. in punctul c. de unde ducem drepte la punctele *a—b.*

Desemnaţi un △ scalen cu 3 laturi date: a, b, c!

(Fig. 27).



Procedură: Tragem linia AB, ce o facem egală cu *a* (fig. 27). Luăm pe *b* in circiniu şi descriem cu dinsa din A un arc; apoi procedăm tot aşa şi cu *c* din B; din *C* unde se strătae arcurile se duc drepte la A şi B.

Tragem căte o diagonală preste faţa tablei, a uşei, a ferestrei etc.; ce fel de △ s'au format — după laturi? după unghiuri?

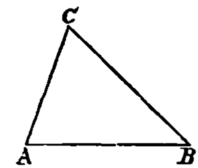
Cât face perimetrul fiecărui treiunghiu de pe tablă? — Laturile unui loc treiunghiular din grădină sunt $a = 42$ m., $b = 30$ m. şi $c = 18$ m. Desemnaţi locul acesta după mĕsura micşorată.

Scrieţi din memorie legile pertratate!

§. 15. Legi referitoare la treiunghiuri.

I. Laturea AB in △ ABC (Fig. 28) ę calea dreaptă dela punctul A la B; dar putem să mergem dela A la B şi preste punctul C. In casul acesta incunjurăm. Pe unde e mai aproape dela A la B? — deadreptul sau doară preste C? Ce urmează de aci? — că AB este mai scurtă decât AC+BC, adecă că suma alor două *laturi intr'un treiunghiu este totdeauna mai mare decât o lature singură.* Aceasta are valoare faţă cu toate trei unghiurile.

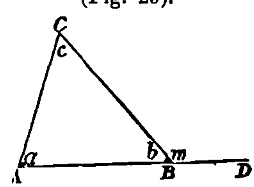
(Fig. 28).



Să mĕsurăm cu raportorul celea trei unghiuri din treiunghiul acesta! — Se sumizăm mărimea lor! — Ce am aflat? Insemnaţi-vĕ: *In ori care treiunghiu suma a tustrele unghiurile face* 180°=2R.

Dacă vom prolungì laturea AB in treiunghiul ABC (fig. 29) d. e. până la D, căpĕtăm unghiul nou m. Acesta este un unghiu *ecstern.* — Pentru ce? (. . . jace afară de treiunghiu). Comparaţi mărimea unghiului ecstern cu cea a celor interne! Care-i mai mare? — Acuma să mĕsurăm cu raportorul ungh. *m*! Se insemnăm mărimea luĭ! Se mĕsurăm şi unghiurile interne făţişe *a* şi *c*. Cât face suma lor? — Comparaţi suma aceasta cu mărimea unghiului ecstern! Ce aţi aflat? *Unghiul ecstern la treiunghiu este chiar aşa de mare ca şi amĕndouĕ unghiurile interne făţişe, adecă ungh. m = ungh. a + ungh. c.*

(Fig. 29).



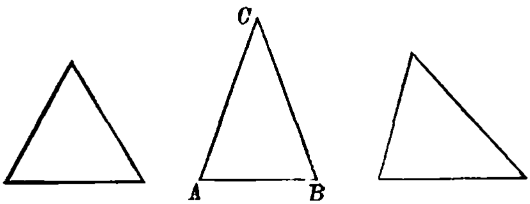
Poate fi aceasta altcum? Dacă punem lăngă ungh. *b* (fig. 29); unghiurile *a* şi *c*, căpĕtăm 2R.; dar şi dacă punem lăngă dinsul pe ungh. *m*, ăncă căpĕtăm tot 2R. Adecă este tot una, ori punem lăngă ungh. *b* pe ungh. *m* ori pe *a* şi *c*; in urmare ungh. *a* şi *c* trebue să fie egale cu ungh. *m*.

Pe tablă avem un treiunghiu ecuilateral (fig. 30 I.) Priviţi-'l bine! Comparaţi-i unghiurile după mărime a) cu ochiul liber! — b) să le mĕsurăm cu raportorul! Ce am aflat? *Tustrele unghiurile sunt intre sine egale, şi fiecare este de 60°.* Desemnaţi fiecare câte 4 treiunghiuri ecuilaturale şi cercaţi, dacă adevĕrul aflat se potrĭveşte la fiecare.

Tot pe această cale intuitivă (mĕsurănd unghiurile) vĕd scolarii, că intr'un treiunghiu ecuicrur (fig. 30 II). *Unghiurile dela bază sunt intre sine egale.* — Apoi se deseamnă pe tablă un treiunghiu scalen (fig. 30 III), se constată cu metru lungimea celor 3 laturi, şi cu raportorul mărimea celor 3 unghiuri, şi prin compararea mărimei fiecărei laturi cu mărimea unghiului, ce-'i corespunde (făţiş), vĕd scolarii; *că in treiunghiu laturei mai mari corespunde unghiul cel mai mare, şi laturei mai mici unghiul cel mai mic.*

(Fig. 30).

I. II. III.



II. In ori care treiunghiu.

1. Suma alor 2 laturi este totdeauna mai mare decăt a treia.
2. Suma toturor unghiurilor este de 180°=2R.
3. Unghiul ecstern este egal sumei ambelor unghiuri interne făţişe.
4. In treiunghiurile echuilaterale sunt unghiurile intre sine egale, — şi fiecare-i de 60°.
5. In treiunghiurile ecuicrure unghiurile dela bază sunt intre sine egale.
6. In treiunghiurile scalene laturei mai mari corespunde unghiul cel mai mare, şi laturei mai mici — unghiul cel mai mic.

III. Pe tablă stau liniile *a, b, c.* Construiţi cu ele treiunghiuri şi determinaţi: a) perimetrul, b) suma gradurilor celor 3 unghiuri! Intr'un treiunghiu drept este un unghiu ascuţit de 30° (42°, 48°, 57° etc.); căt de mare-i celalalt unghiu ascuţit? — Desemnaţi un treiunghiu in care unghiurile la bază sunt de 70° (80°, 90°, 100°, 110°); şi apoi probaţi esactitatea desemnului vostru mĕsurănd cu raportorul unghiul al 3-le! Desemnaţi căte două △ ecuilaturale, ecuicrure şi scalene şi cercaţi la fiecare, dacă se pot aplica cele 6 legi statorite mai sus! Căt de mare este unghiul la vĕrful unui △ ecuicrur, dacă unghiul ecstern dela bază este 90° (100°, 110°, 120°, 130°)?

§. 16. Cunoştinţe relativ la congruinţa şi la asĕmĕnătatea treiunghiurilor.

Invĕţ. pune scolarilor spre privire: a) 2 vasă acurat de mari, după cuprins, insă cu formă felurită, anume: unul patrulatural şi altul rotund; b) 2 icoane ale s. restigniri sau alte 2 potrete, insă unul in format mai mare, ear celalalt in format mai mic; c) 2 mape de asemene mărime ale aceluiaş stat, d. e. a Austro-Ungariei. Pe baza privirei scolarii află adevĕrurile următoare:

a) Două obiecte, ce au acelaş cuprins, dar formă deschilinită, sunt *egale*. Semnul egalităţii este cel cunoscut „=“.

b) Două obiecte ce au aceaş formă dar mărime deschilinită, sunt *asemenea*; bunăoară cele două icoane, semnul asĕmĕnărei este acesta „∽“.

c) Două obiecte de asemene formă şi mărime sunt *cngruente* — ca cele două mape; semnul congruinţei este acesta „≌“.

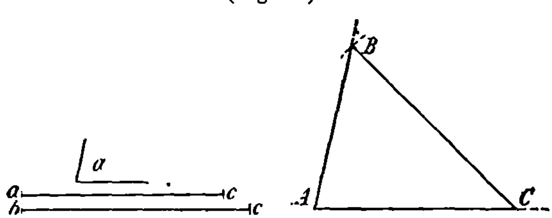
Tot aceasta se poate constata şi la *6* treiunghiuri de carton, dintre cari tot căte două sunt egale, asemene şi congruente. — Mai deamĕnuntul vom privì treiunghiurile după *congruinţa* şi după *asĕmĕnătatea* lor.

a) *Congruinţa treiunghiurilor.*

I. Invĕţ. pune cele 2 treiunghiuri congruinte la olaltă şi le potriveşte in faţa scolarilor aşa, ca să se acopere perfect. Apoi i va lăsa să potrivească şi celelalte două părechi (egale şi asemene); cari insă ori cum se vor intoarce şi sucì, nu se vor acoperì acurat.

Dar nu totdeauna putem pune la olaltă treiunghiurile, ce avem şi trebue să le privim după congruinţa lor. In atare casuri trebue să conchidem la congruinţa lor numai dela unele note ale lor. Iau, priviţi incoace la tablă! Aci am (fig. 31) două laturi *ac* şi *bc*, şi unghiul *a* format de dinsele. Să formăm ăntăi pe tablă din aceste 3 bucăţi treiunghiul ABC. Acuma iau desemnaţi şi voi fiecare pe căte o hărtie căte un atare treiunghiu. (Se face!) Ce putem zice despre toate trei unghiurile acestea?

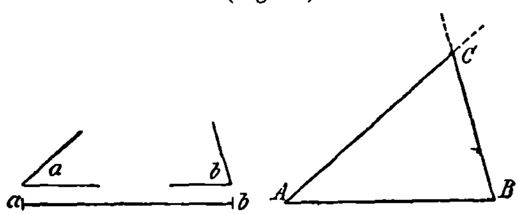
(Fig. 31).



Că toate au comun căte 2 laturi şi unghiul inchis de dinsele. Acum să tăiăm d. e. 5 treiunghiuri de acestea şi să le punem preste olaltă. (Se face!) Ce observaţi? Toate se acoper, adecă sunt *congruinte*. Desemnaţi alt treiunghiu, in care o lature este de 3, a *doua* de 4 cm. şi unghiul inchis de dinsele de 60°. Tăiaţi acuma earăş 4 treiunghiuri de aceste, puneţi-le preste olaltă, potriviţi-le! Ce observaţi? (.... se acoper, sunt congruinte).

Tot pe calea intuiţiunei află scolarii şi aceste două legi de congruinţă, cănd treiunghiurile au egale a) o lature şi unghiurile de pre dinsa (adjacente); b) tustrele laturile. Congruinţa alor 2 treiunghiuri o poate arăta scolarilor şi aşa, dacă le va desemna pe tablă din căte 3 bucăţi egale şi apoi tăiănd o hărtie după unul din acelea, cu aceasta va acoperì pe rănd pe amĕndouĕ.

(Fig. 32).



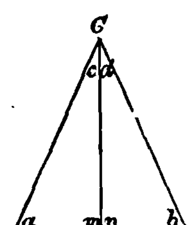
Aşadară vrĕnd a ecsamina douĕ treiunghiuri din punctul congruinţei, avem numai să cercetăm, dacă au egal 2 laturi şi unghiul inchis de dinsele, sau o lature şi unghiurile de pe dinsa, sau tustrele laturile. Şi intors, dacă ni vin inainte 2 treiunghiuri, la cari se potriveşte unul din casurile acestea, putem conchide cu siguritate, că sunt congruente.

II. 1. Douĕ treiunghiuri, ce au aceeaş formă şi mărime, cari adecă se acoper acurat, se numesc *congruente.*

2. Douĕ treiunghiuri sunt congruente, dacă au egal: a) 2 laturi şi unghiul inchis de dinsele; b) o lature şi unghiurile depe dĕnsa; c) tustrele laturile.

3. In treiunghiuri congruente laturilor egale corespund unghiuri egale şi intors, unghiurilor egale corespund laturi egale.

(Fig. 33).



III. Pe tablă stă un treiunghiu. Construiţi lăngă dinsul altul congruent — cu ajutorul celor trei casuri de congruinţă! — Desemnaţi căte douĕ treiunghiuri congruinte drepte, ascuţite şi tĕmpite! In treiunghiul ecuicrur ABC (fig. 33) ducĕnd perpendiculara CD, am căpĕtat 2 treiunghiuri ADC şi BDC. Ce fel de treiunghiuri sunt aceste a) după laturi? b) după unghiuri? Arătaţi, că sunt congruinte.

Demostrarea: AC=AB
AD=BD
CD=CD.
$\triangle$ADC$\cong$BDC.

Demostraţi, că unghiurile la baza treiunghiului ecuicrur sunt egale!

Resolvarea: Treiunghiurile ADC şi BDC (fig. 33) sunt congruinte. In atari treiunghiuri laturilor egale corespund unghiuri egale. Laturei CD insă corespunde in treiunghiul deastănga ungh. *a*, si in cel deadreapta ungh. *b*; in urmare ungh. *a* = ungh. *b*. — Cercetaţi adevĕrul acesta prin mĕsurarea unghiurilor!

Demostraţi, că ungh. *m* = ungh. *n* = 1 R!

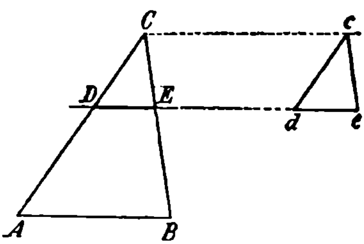
Resolvarea, Ambe unghiurile *m* şi *n* corespund in cele două △ egale laturilor egale AC şi BC, in urmare sunt egale, şi apoi fiind totodată şi unghiuri laturate fiecare din trĕnsele este drept şi linia CD stă perpendicular pre AB. — Cercaţi adevĕrul acesta prin mĕsurarea unghiurilor!

b) *Asĕmĕnătatea* (similitudinea) *treiunghiurilor.*

Tractatul acesta se razĕmă pe cunoştinţele aritmetice despre teoria proporţiunilor.

1. Pe tablă avem 2 treiunghiuri (fig. 34). Să mĕsurăm unghiurile! — Ce am aflat? <A=<*d*. <B=<*e*; <C=<*c*. — Aci am un treiunghiu mare de carton; desemnaţi-l după mĕsura redusă. — Comparaţi desemnul cu treiunghiul! Ce aţi aflat? Nu sunt asemene de mari, dar au tot câte 2 unghiuri egale. Cum am numit două treiunghiuri care au aceeş formă, numai nu-'s tot atâta de mari? (asemenea). Care-'i semnul asemĕnărei? Aşa zicem despre toate figurile, câte-'s făcute după mĕsura micşorată, că sunt asemenea celor după care s'au desemnat.

(Fig. 34).



Tot aşa zicem şi despre prunci, că seamĕnă părinţilor lor, deşi sunt mai mici, numai să aibă aceleaş trăsuri, acelaş temperament etc.

Priviţi earăş la treiunghiurile depe tablă!

Numiţi-'mi 2 unghiuri egale (*A* şi *d*). Cari laturi stau făţiş cu unghiurile acestea? (BC şi *ec*). Numiţi-'mi şi celelalte două părechi de unghiuri egale! Spuneţi-mi şi laturile făţişe cu dinsele! (AC şi *dc*, AB şi *de*.)

Insemnaţi-vĕ: In treiunghiuri asemenea laturile făţişe cu unghiurile egale se numesc *corespunzĕtoare.* — Numiţi-mi două lături corespunzĕtoare! ăncă două! ăncă două.

Despre treiunghiurile asemenea mai putem invĕţa ăncă şi altceva. Băgaţi numai de seamă! Să luăm laturea *ce* intre coarnele circiniului şi să o strapunem pe laturea BC. De câte ori incape pe aceasta? (odată şi mai rĕmâne bucata BE). Să facem tot aceasta şi cu celelalte două laturi! De câte orí incape *cd* pe AC? Ce mai rĕmâne? etc. Ce vedem de aci? Că de câte ori se cuprinde prima lature a unui trei unghiu prima lature a celuíalalt, togmai de atâtea ori se cuprinde şi a doua in a doua, şi a treia in a treia, adecă in treiunghiurile asemene stau laturile corespunzĕtoare in proporţiune dreaptă (directă).

Ce urmează din legea aceasta? Dacă incape *ce* pe BC chiar de atătea ori ca *cd* pe AC, putem forma din ambele părechi de laturi o proporţiune anume:

$ce : BC = cd : AC$. Ci intr'o proporţiune poate să şi lipsească un membru, carele apoi se poate computa din cei cunoscuţi. Chiar aşa putem afla in treiunghiurile asemene din 3 laturi cunoscute pe a patra necunoscută.. Să fie d. e. in treiunghiurile noastre *ce* de 15 mm., BC de 25 mm., *cd* de 17 mm.; in casul acesta uşor putem afla prin computare pe AC — din proporţiunile:

$$ce : BC = cd : AC$$
$$15 : 25 = 17 : AC.$$
$$AC = \frac{25 \times 17}{15} = 28\ {}^1/_3 \text{ mm.}$$

De aci vedem dară:

II. 1. Douĕ treiunghiuri sunt asemenea, cănd cele 3 unghiuri dintr'unul luate căte unul sunt egale celora din celalalt.

2. In treiunghiurile asemenea laturile făţişe cu unghiurile egale sunt corespunzĕtoare (ca şi la treiunghiurile congruente); b) laturile corespunzĕtoare stau in proporţiune dreaptă (asemene); c) din căte 2 părechi de laturi putem forma totdeauna o proporţiune geometrică (din care fiind o lature necunoscută, uşor se poate afla prin resolvarea proporţiunei).

III. Desemnaţi felurite părechi de trei unghiuri asemene! Formaţi proporţiuni din laturile corespunzĕtoare! Să se mĕsure inălţimea pĕrului nostru fără de a se suì in vĕrful aceluia!

Procedura. Aceasta o putem face cu ajutorul *umbrei* aşa: Arborele aruncă o umbră. Implăntăm in pămĕnt un bĕţ vertical d. e. de 2 m. de lung, care asemene aruncă o umbră. Dacă acuma vom trage in cuget 2 linii dela vĕrful umbrelor pănă la vĕrful bĕţului şi a arborului, căpĕtăm 2 treiunghiuri asemenea, (pentru ce-'s asemenea?) In acestea se rapoartă umbra bĕţului cătră ceea a arborelui ca şi inălţimea bĕţuluĭ cătră ceea a arboreluĭ. Dacă acuma este umbra bĕţului d. e. de 2·8 m. şi cea a arborelui de 25·5 m. (cea ce prin mĕsurare uşor şi precis putem constata), ear inalţimea bĕţului — precum am zis — 2 m., avem proporţiunea

$$2{\cdot}8 : 25{\cdot}5 = 2 ; x \ (= \text{inălţimea arborelui})$$
$$x = \frac{25{\cdot}5 \times 2}{2{\cdot}8} = 18{\cdot}2 \text{ m.}$$

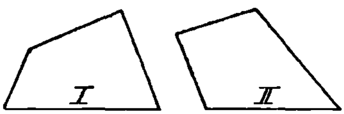
Determinaţi inălţimea feluriţelor clădiri precum: a turnului bisericei, a scoalei, a plopilor, a mĕrului etc. Care e depărtarea dintrĕ doi ţĕrmuri a unui riu?

§. 17. Despre patru-unghiuri.

I. Pe tablă stau mai multe patru-unghiuri (patratul, oblungul, rombul, romboidul, trapezul, trapezoidul si patru-unghiul simetric).

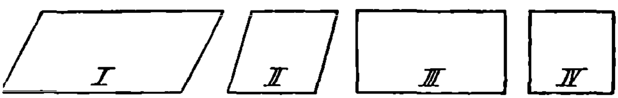
Să le privim pe rănd mai deaproape şi anume mai ăntăi după laturi (care şi căte fug paralel?) Acuma să le privim căte unul. Priviţi patru-unghiul al IV-le (fig. 36). Preţuiţi-i şi mĕsuraţi cele 4 laturi! cele

(Fig. 35).



4 unghiuri!... Ce aţi aflat? (... tuspatru laturile egale şi tuspatru unghiurile drepte). *Vedeţi, acesta este un pătrat.*

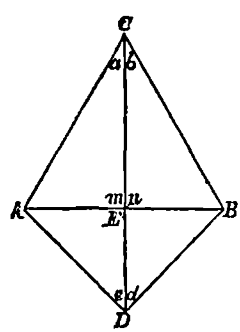
(Fig. 36).



Tot aşa se privesc, se preţuesc şi se mĕsură laturile şi unghiurile şi celoralalte figuri, dăndu-se definiţiuni scurte, care apoi se resumează aşa:

II. 1. Patru-unghiul cu laturile făţişe (vis-à-vis) *paralele* se numeşte *paralelogram* (fig. 36); cel numaicu 2 laturi făţişe paralele, ear celelalte douĕ neparalele, *trapez* (fig. 35 III); cela in care nu e nici o lature paralelă cu alta *trapezoid* (fig. 35 I, II); in sfĕrşit cela cu căte 2 laturi vecine egale *simetric* (fig. 37).

(Fig. 37).



2. Paralelogramul paote fi:

a) *patrat,* in care toate laturile sunt drepte şi egale;

b) *oblung,* cu căte 2 laturi opuse egale şi 4 R. (fig. 36 III).

c) *romb,* cu tuspatru laturile egale şi 4 unghiuri pezişe (fig. 36 II);

d) *romboid,* cu căte 2 laturi opuse egale şi cu 4 unghiuri pezişe (fig 36 I).

III. Repeţiţi a) verbal b) in scris cunoştinţele aceste! — Pe tablă stau felurite patru-unghiuri, — asemene şi pe masă tăiate din hărtie. Arătaţi-'mi patratul; oblungul etc! — Comparaţi patratul cu oblungul! patratul cu rombul! oblongul cu romboidul! rombul cu romboidul! Spuneţi a) in ce semĕnă; b) in ce difereşte! — Priviţi in chilia de scoală şi spuneţi patru-unghiurile ce lė vedeţi! Acuma gănditi-vĕ şi imi spuneţi patru-unghiuri de afară — dela casă, din curte, din grădină! — Desemnaţi şi voi cu măna liberă pe rănd patru-unghiurile invĕţate!... Acasă le tăieţi din hărtie! — Din laturile a = 5 cm. şi b = 8 cm. construiţi a) un oblung! b) un romboid! c) un trapez, in care a şi b să fie paralele!

§. 18. Legi referitoare la patru-ungiuri

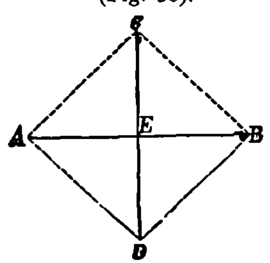
I. Pe tablă stau cele 4 paralelograme, şi altele tăiate din hartie pe masa incĕtătorului. In cele depe tablă se trage in fiecare mai ăntăi căte o diagonală şi apoi şi a doua. Apoi deseamnă şi un trapezoid cu o diagonală — spre a vedè, că cele 4 ungh. sunt egal la 4 R. sau 360°, (pentrucă din fiecare patru-unghiu putem căpĕta 2 treiunghiuri). Pe baza privirei acestora se formulează legile (teoremele) următoare:

II. 1. Diagonala imparte paralelogramul in 2 treiunghiuri congruinte.

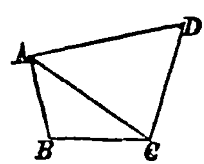
2. Douĕ diagonale trase in paralelogram se injumĕtăţesc şi il impart in 4 treiunghiuri.

3. In paralelogramele echilaterale (patrat fig. 38 şi romb) cele 4 treiunghiuri sunt congruinte; ear in cele cu laturi neegale (oblung

(Fig. 38).



(Fig. 39).



şi romboid) sunt congruinte numai tot căte douĕ cele făţişe.

4. In paralelogramele ecuilaturale cele douĕ diagonale se strătaie sub unghiu drept şi sunt egale, in cele cu laturi neegale insă nu.

5. Tuspatru unghiurile in patru-unghiu sunt de 360° sau 4 R. (fig. 39) — (fiind-că acesta este egalŭ cu 2 treiunghiurĭ).

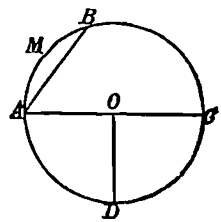
III. Căt de mare-'i un unghiu ascuţit in romb, dacă unul dintrĕ cele tĕmpite este de 120°, 100°, 98°? Desemnaţi căte un paralelogram şi mĕsuraţi cu transporterul căte un unghiu oarecare, şi apoi computaţi mărimea celoralalte unghiuri! Trageţi căte o linie de 35 cm. şi apoi construiţi cu ajutorul aceleia căte un pătrat! — căte un romb cu unghiuri ascuţite de 40, 50, 70°! — căte un romb cu unghiuri tĕmpite de 100, 120, 140°! — Desemnaţi cu ajutorul mĕsurei micşorate grădina scoalei, ce are formă de oblung!

b) Feţe mărginite de linii strĕmbe.

§. 19. **Despre cerc.**

I. Inţepenesc un braţ al circiniului deschis pre tablă, ear celalalt il mişc jur imprejur, pănă ce ajung earăş la punctul de plecare. Sau inţepenesc o sfoară (frănghie) la un capĕt cu un cuiu şi la celalalt leg o bucată de cretă, cu care fiind intinsă sfoara fac o roată in jurul cuiului. Pe urma cretei in ambe casurile a rĕmas o linie strĕmbă, care pe tot locul e asemene de departe dela punctul din mijloc (centru 0 fig. 40).

(Fig. 40).



II. 1. Faţa mărginită de toate părţile de o atare linie cercuală se numeşte cerc. — Linia insaş este *cercuferinţă* sau şi *periferie* (p.)

2. Centrul (0 Fig. 40) se află chiar in mijlocul cercului. Linia dreaptă dusă din centru la periferie se numeşte *razu* (r. = 0A). Tote razele dintr'un cerc sunt intre sine egale.

3. Ori ce linie dreaptă in cerc, care atinge cu capetele sale periferia in 2 puncte, se numeşte *coardă* (AB). Coarda cea mai mare, care trece prin centru se numeşte *diametru* (*d*=AC). — Diametru este egal la 2 raze. — Toate diametrele din acelaş cerc sunt intre sine egale.

4. O coardă prelungită de ambe capetele preste periferie se numeşte *secantă.* Dreapta care atinge periferia numai intr'un punct, se numeşte *tangentă.*

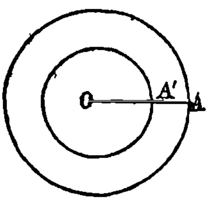
5. Ori ce parte a periferiei se numeşte *arc* (AB). O parte de cerc dintre arc şi coarde, este *segment* (ABM); ear cea dintrĕ un arc şi douĕ raze — *sector* (COD). — O jumĕtate de cerc mărginită de $^1/_2$ periferia şi de diametru este *semicerc;* ear pătrarul de cerc este mărginit de $^1/_4$ din periferie şi 2 raze ce stau perpendicular spre olaltă (AOD).

6. O dreaptă, care trece prin mijlocul arcului şi a coardei spre centrul cercului se numeşte *săgeată.* Săgeata prolungită pănă la partea opusă a periferiei trece prin centru.

III. Desemnaţi căte un cerc a) cu circiniul cu razul de 35 cm., 50 cm., 15 cm., b) cu măna liberă! — Pe acasă in liber cu razul de

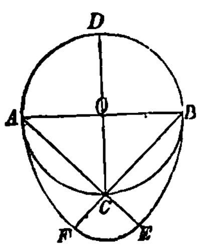
4 m., 8 m., 12 m. (cu rude de asemenea lungime). Cum face grădinarul straturi in formă de cerc? (Leagă la cele 2 capete a unei sferi 2 pari, dintre cari unul il inţepeneşte in pămĕnt şi cu celalalt merge — cu sfoara intinsă in jurul celui alalt). Numiţi obiecte, la care vin inainte cercuri! (tăiere, oale, vasĕ metrice, mese, plăcintăriţa, tăvălucul, soarele, luna plină etc.) Desemnaţi douĕ cercuri cu centru comun (fig. 41). Atari cercuri se numesc *concentrice;* ear spaţiul dintrĕ periferii — *inel.* — Unde se vĕd in natură cercuri concentrice? (Roata la car, roatele de fier dela maşinele de fiert, semnul in care se deprind ostaşii cănd puşcă la ţĕl). Trageţi in cerc căte un raz, un diametru, o coardă, o tangentă, o secantă şi spuneţi care in ce seamănă! şi in ce diferesc de olaltă!

(Fig. 41).

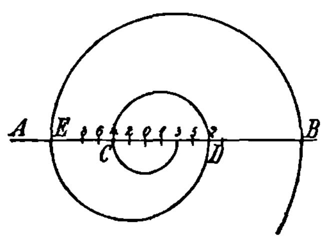


Desemnaţi căte un cerc şi il impărţiţi in cele 4 pătrare. — Căte graduri se vin pe unul? — Căte graduri se vĕd pe raportor? — Desemnaţi căte 3 sectori de căte 50, 70, 90°; tot asemene şi segmente căte de 80, 100, 120°!

(Fig. 42).

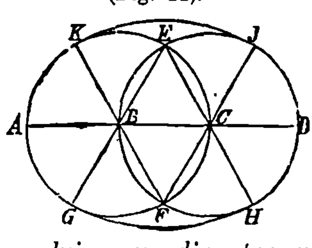


(Fig. 43).



Se pot deprinde şcolarii şi in desemnarea *liniei ovale* şi a *spiralei* după (fig. 42 şi 43) şi mai ales a *elipsei,* carea are o insemnătate practică mai mare. Aceasta aşa: Ia d. e. un morcov mărişor ce-'l taie pe un loc oarecare paralel cu rădĕcina; faţa tăiată este cercuală. Apoi il taie curmeziş in sus, prin ce capĕtă o *faţă eliptică* (o elipsă). Acuma se şi deseamnă aşa, că inţepeneşte in punctele *(focul are)* B şi C (fig. 44) douĕ cuiuţe de care s'au legat capetele unei sfori, carea intinsă indoit ajunge dela B până la D. Apoi punem creta in sfoara intinsă şi o ducem jur imprejur in dreapta sau in stănga. Pe urma cretei rĕmăne *o figură asemenea cercului cu un diametru mai mare (osia mare* AD) *şi cu unul mai mic (osia mică* EF*), care se strătaie in centru sub unghiu drept.*

(Fig. 44).

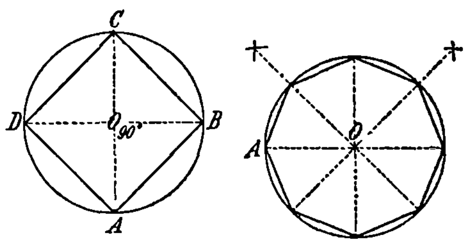


Scolarii numesc şi alte corpuri eliptice (vasă, blide, căzi de scăldat, lavoare, straturi in grădina de flori etc.) şi se deprind in desemnarea de figuri eliptice mai mari şi mai mici.

§. 20. Despre poligoanele regulate.

I. Dacă tragem sau ne cugetăm in cerc (fig. 45) două diametre ce se strătae sub unghiu drept şi apoi le impreunăm capetele prin coarde, căpĕtăm un *patrat* — in cerc. Dacă vom injumĕtăţi laturile acestuia (a pătratului) prin raze şi vom impreuna cele 8 puncte in periferie prin drepte, formăm o figură cu 8 laturi şi 8 unghiuri (opt-unghiu).

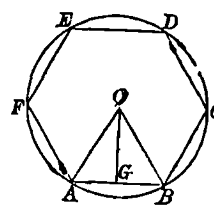
(Fig. 45).



Transportănd razul cercului pre periferia sa de 6 ori, căpĕtăm — trăgĕnd drepte la punctele de strătăiare — un *şese-unghiu regulat* (fig. 46). Din acesta căpĕtăm un *treiunghiu* ecuilatural, dacă impreunăm prin căte o coardă tot numai al 2-le punct de strătăiare (sărind căte preste un colţ al şese-unghiului).

II. 1. Figurile mărginite de mai mult de 4 laturi se numesc *poligoane.*

(Fig. 46).



2. Poligoanele se numesc după numĕrul unghiurilor (de 5, 6, 7, 8 etc. unghiuri).

3. Un poligon regulat are laturi şi unghiuri egale.

4. Poligoane regulate putem forma impărţind periferia cercului intr'un numĕr anumit de părţi (arcuri) egale, şi trăgĕnd la punctele de strătăiare coarde.

5. Impărţirea periferiei se poate face a) prin probarea cu circiniul; b) prin mĕsurarea unghiurilor cu raportorul; c) prin construcţiune geometrică (p. I.)

III. Numiţi-'mi poligoane din scoală, şi deafară! Desemnaţi in cerc căte un patrat, un opt-unghiu, un şese-unghiu, un treiunghiu, un 12-unghiu. Desemnaţi un cinci-unghiu regulat cu ajutorul raportorului!

Procedura. Cercul trebue impărţit in 5 părti egale; deci un arc ce corespunde unei lature din 5-unghiu va fi $= {}^{360}{}_{5} = 72^0$. In urmare se va lua la centrul cercului cu raportorul un unghiu de 72^0;

brațele sale — 2 raze — duse la periferie cuprind din aceasta chiar a 5-a parte. Impărțirea mai departe este ușoară.

Precum formăm poligoane regulate cu ajutorul cercului, tot așa-'l putem construì pre acesta in jurul fiecărui poligon (subințelegĕnd aci și trei- și patru-unghiul). Anume avem numai să privim laturile poligonului de coardele cercului, apoi injumĕtățim douĕ și din punctul de injumĕtățire ridicăm perpendiculare; punctul, unde intẽlnesc aceste, este centrul cercului.

Cursul al doile.

Mĕsurarea fețelor și a corpurilor.

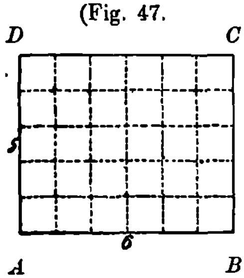
I. Mĕsurarea fețelor plane.

Se vor repețì cunoștințele relative despre mĕsurile pătrate din „Calculațiune".

§. 21. **Suprafața paralelogramelor dreptunghiulare.**

I. Pe tablă stă un paralelogram (fig. 47) a cărui bază este de 6 dm. și inălțimea de 5 dm.; ear pe masă un decimetru patrat de pap. Priviți la oblungul depe tablă! Să-'i mĕsurăm baza! inălțimea! Ce am aflat? (b=6 dm. n=5 dm.) — Oare căți dm² se cuprindă oblungul nostru — prețuiți! Acuma să luăm dm² de carton și să mĕsurăm mai ăntăi baza. Șirul dedesubt este mĕsurat. Căți dm² cuprinde? (6 dm²). Așadară chiar atăța de căți dm. de lungă este baza AB. Și căte șiruri de aceste putem avè in figura noastră? (. . . . 4). Adecă chiar atătea, de căți dm. este inălțimea AD. Căți dm² vom avè dară in oblungul acesta? (5 sfășii de căte 1 dm² și in fiecare sfașie căte 6 dm²; la olaltă 5 ori 6 dm² = 30 dm²). — Această procedură se mai repețește ăncă barĕm la douĕ figuri oblungi și la un patrat.

(Fig. 47.



Deci:

II. 1. Suprafața (aria) paralelogramelor dreptunghiulare o aflăm, inmulțind baza cu inălțimea.

2. Suprafața patratului se află, dacă mĕsurăm o lature și o inmulțim cu sine insăș.

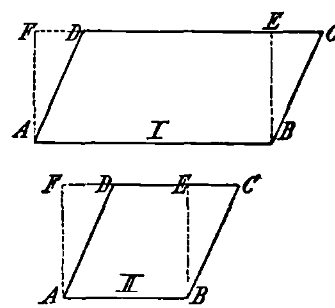
Dacă am ecsprima baza prin b, inălțimea prin n și aria prin a, am căpĕta formulele: $a=b \times n$; $b=a:n$; $n=a:b$. In patrat află laturea din suprafață, dacă din aceasta ecstragem rădĕcina patrată.

III. Chilia scoalei este de 8·5 m. de lungă, şi de 7·23 m. de lată; cătu-i suprafaţa? Să fie de a se podì din nou cu scânduri de căte 4 $^1/_2$ m. de lungi şi de 4 $^1/_2$ dm. de late; căte scănduri ar trebuì? O grădină in formă de oblung este de 68·62 m. de lungă şi 18·4 m. de lată; cătu-i suprafaţa? [1]). Moşia unui om este de 18·56 ha.; căt face aceasta in mĕsuri vechi (jughere, stĕnjini)?

§. 22. **Suprafaţa paralelogramelor pezişe.**

I. Pe tablă stă un romboid (fig. 48). Se ridică dela B la DC perpendiculara BE. Acésta este inălţimea romboidului.

(Fig. 48).



Acuma ia invĕşătorul un paralelogram peziş de hărtie tăiat in direcţia inălţimei sale, şi-l lipeşte pe tabla jilavă; i se mĕsură şi se află baza AB de 24 cm. şi inălţimea BF de 16 cm. Apoi ia treiunghiul din dreapta romboidului şi-l lipeşte deastănga potrivindu-l bine cu tăiătura. Prin aceasta se capĕtă oblungul ABFE. Se mĕsură şi se află şi in acesta baza AB de 24 cm.; ear inălţimea este tot cea de mainainte BE. Ce se vede de aci? Că paralelogramulŭ peziş ABCD are aceeaş bază şi aceeaş inălţime cu oblungul format din trĕnsul, adecă este egal cu acela. — Aceasta se poate repeţì şi la alte paralelograme pezişe (romboide şi rombi).

Intorcĕndu-se la paralelogramul de pe tablă (fig. 48) intreabă, căt de mare este aria oblungului ABFE? ($24 \times 16 = 384$ cm²). Şi căt de mare trebue să fie şi aria romboidului? Negreşit 384 cm², adecă acurat căt a oblungului, pentrucă acesta s'a format din acela neluănd şi neadaugĕnd nemic — numai că treiunghiul s'a pus de cealaltă parte.

II. 1. Perpendiculara ridicată pe baza paralelogramului peziş (romb, romboid) pănă la paralela făţişă se numeşte înălţimea aceluia, şi poate cădè in, sau afară de paralelogram.

2. Ori ce paralelogram peziş este egal cu un paralelogram dreptunghiular de bază şi inălţime asemene.

---

[1]) Mĕsurile agrarie (pentru mĕsurarea pămintelor) sunt: 1 m²; 1 ar (dkm²) = 100 m² = 27·804 stĕnjini pătraţi; 1 hectar (ha) = 10·000 m² = 1 jugher, 1180 stĕnjini şi 4 $^4/_5$ urme.

3. Suprafaţa unui paralelogram peziş se află inmulţind baza cu inălţimea (verticală).

4. Suprafaţa ori cărui paralelogram se află inmulţind baza cu inălţimea.

III. Cercaţĭ in scoală felurite paralelograme şi preţuiţi şi determinaţi (mĕsurănd şi computănd) suprafaţa lor! — Aci scolarii se conduc a preţuì la inceput lungimea şi lăţimea, şi apoi a le inmulţì (suprafaţa tablei, a uşei, a fereştrelor, a padimentului, a podului etc.)

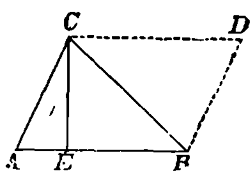
Desemnaţi celea 4 paralelograme şi determinaţi arealul lor! — Suprafaţa stratului de flori de formă pătrată din grădina noastră este de 37·4544 m²; căt de mare-i laturea? (l.$=\sqrt{37·4544}=$6·12 m.)

Mai multe atari teme!

§. 23. Suprafaţa treiunghiului.

I. Aci am douĕ treiunghiuri congruente de hărtie. Lipeşte mai ăntăi unul pe tabla umezită, apoi şi pre celalalt, potrivindul lăngă cel dintăi (fig. 49). Ce s'a format? (. . . un paralelogram). Numiţi-mi baza treiunghiului! (AB). Baza paralelogramului! (tot AB). Inălţimea treiunghiului? (CE). Şi cea a paralelogramului? (tot DE). Vedeţi dară, că prin impreunarea celor duĕ treiunghiuri congruente s'a născut un paralelogram de asemenea bază şi inălţime cu △ ABC. — Comparaţi acuma mărimea treiunghiului cu cea a paralelogramului! Ce observaţi? (Treiunghiul este ½ din paralelogram).

(Fig. 49).



Se mĕsurăm baza şi inălţimea paralelogramului şi apoi să-i computăm suprafaţa! (Se face!) Căt de mare va fi suprafaţa treiungbiului? (½ din paralelogram).

Tot aceasta se mai repeţeşte şi cu alte 2, 3 părechi de treiunghiuri congruinte.

Invĕţătorul deseamnă pe tablă d. e. 4 treiunghiuri de formă felurită — dar cu bază şi inălţime egală — şi lasă pe scolari să judece, că care poate să aibă suprafaţă maĭ mare. In urmă se resumează cunoştinţele.

II. 1. Ori ce treiunghiu este ½ dintr'un paralelogram ce are aceaş bază şi inalţime cu dinsul.

2. Suprafaţa ori cărui treiunghiu se află dacă luăm de jumĕtate productul din baza şi inalţimea sa. De aci formula:

$$a. = \frac{b \times n}{2}, \text{ (}a\text{=aria; }b\text{=baza; }n\text{=inălţimea).}$$

3. Toate treiunghiurile de bază și inălțime egală au aceeaș suprafață.

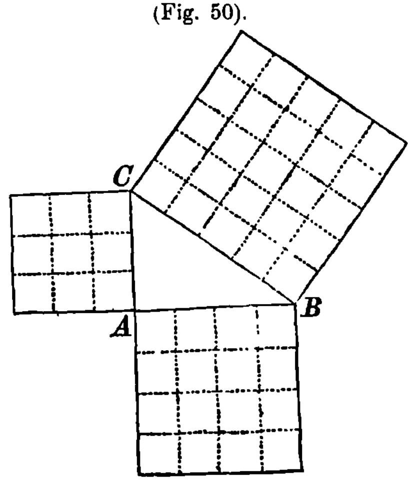
4. Baza și inălțimea treiunghiului le putem afla prin computare din suprafață, anume: baza, dacă înpărțim suprafața cu jumětate inalțimea ($b=a:\frac{n}{2}=\frac{2a}{n}$); inălțimea, dacă impărțim suprafața cu jumětate baza ($n=a:\frac{b}{2}=\frac{2a}{b}$).

III. Pe tablă stau 4 treiunghiuri felurite; intregiți-le in paralelograme; și apoi prețuiți și computați suprafața lor! Desemnați si voi căte 3 treiunghiuri și le computați și suprafața! — O livadă de forma unui treiunghiu este de 58·5 m. dealungulŭ bazei și de 115·6 m. in direcția lățimei (inălțimei); cătu-i suprafața? — Un capět de pămĕnt de forma unui treiunghiu de 25 m. de lat și de 30 m. de lung (la bază) are să se schimbe cu altul de formă oblungă de 12 m. de lat; căt de lung trebue să fie acesta?

§. 24. Teorema (problema) lui Pithagora.

I. Pe tablă stă un treiunghiu dreptunghiular BCA (fig. 50). Numiți-mi cateții! ipotenuza! Catetul AB să fie de 4, catetul AC de 3 și ipotenuza BC de 5 dm. de lungă. Să formăm preste fiecare laturea treiunghiului căte un patrat și să impărțim toate laturile fiecărui patrat in dm., apoi să impreunăm prin drepte punctele de impărțire fățișe. (Se face!) Prin aceasta am căpătat in fiecare patrat alte patrate mai micuțe (de căte dm²). Anume, căte in patratul de preste AB? (16 dm²); căte in cel de preste AC? (9 dm²); la olaltă in aceste douě? (25 dm²); in cel de preste ipotenuză? (25 dm²). Așadară acurat atătea, căte in celelalte douě la olaltă. Probați aceasta și la alte treiunghiuri dreptunghiulare! Ce urmează de aci?

(Fig. 50).



II. 1. In fiecare treiunghiu dreptunghiular — suma pătraților de preste cateți este egală cu patratul de preste ipotenuză (după formula: $AB^2+AC^2=BC^2$.

2. Legea aceasta se numeşte după *Pithagora* (pag. 6) — aflătorul ei — *problema pitagoreică.*

III. Desemnaţi — cu ajutorul acestei probleme — un patrat, carele să fie de douĕ ori aşa de mare ca unul dat!

Procesul: Trage in patratul dat o diagonală. Aceea este laturea patratului cerut. Pentru ce?

Desemnaţi un patrat, carele să fie numai jumĕtate dintr'un patrat dat!

Procesul: Trage in patratul dat o diagonală şi o injumĕtăţeşte. O jumĕtate de aceasta este laturea patratului cerut. Pentru ce?

Intr'un treiunghiu dreptunghiular e catetul AB de 9 cm., catetul AD de 12 cm; cât de lungă-i ipotenuza BD?

Resolvirea: $BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = (9 \times 9) + (12 \times 12) = 225.$

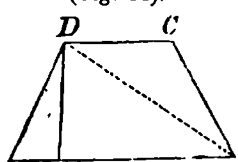
$BD = \sqrt{225} = 15$ cm.

O scară de 5 m. de lungă e răzĕmată de un pĕrete aşa, că cu capĕtul din sus ajunge marginea deasupra a pĕretelui; ear cu cel din jos stă pe faţa plană a pămĕntului de 2 m. dela pĕrete; cât de inalt e pĕretele? (Scara formează cu pĕretele şi cu distanţa sa dela acesta un $\triangle$ dreptunghiular; scara = ipotenuza = BC (fig. 50) pĕretele = catetul AC şi pămĕntul = catetul AB. Deci $AC^2 = BC^2 - AB^2$, $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$.

§. 25. Suprafaţa trapezului şi a poligoanelor.

I. Pe tablă stă o figură patrulaturală (fig. 51). Ce fel? (trapez). Pentru ce? (pag. 43). Cari i sunt laturele paralele? Cum stă linia DE? Insemnaţi-vĕ: O perpendiculară dusă in trapez dela o paralelă la alta, se numesce *inălţimea* aceluia. — Să mĕsurăm pe rând: baza AB (20 cm.), paralela DC (12 cm.), inălţimea DE (9 cm.) Cât de mare poate fi suprafaţa trapezului?

(Fig. 51).



Dacă tragem diagonela BD, se imparte trapezul in douĕ treiunghiuri. Priviţi si imi spuneţi baza si inălţimea fiecăruia!

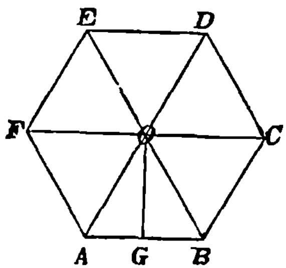
In $\triangle$ ABD baza e AB şi inălţimea DE; in $\triangle$ BCD baza este CD, ear inălţimea DE.

Acuma computând suprafaţa fiecărui treiunghiu şi adaogĕnd resultatele aflate, am determinat şi aria trazului.

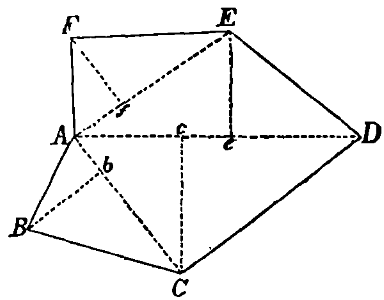
Sau să privim trapezul de un paralelogram (nu prea regulat). In casul acesta, inmulţind baza AB cu inălţimea DE, am căpĕta prea mult; ear inmulţind pre CD cu DE, am căpĕta prea puţin. Ci dacă am inmjumĕtăţi laturile neparalele AD şi BC şi prin punctele de injumĕtăţire am trage o a treia paralelă (o linie mijlocie), care ar fi mai mică decăt AB, dar mai mare decăt DC, şi apoi pe aceasta am inmulţi-o cu inălţimea DE: am căpĕta acurat suprafaţa trapezului. In loc de a trage in trapez linia mijlocie, o putem determina prin calculare, anume: adaogĕnd ambele paralele şi suma luănd-o de jumĕtate.

Lăngă trapez mai desemnăm pe tablă şi un poligon regulat (fig. 52) şi unul neregulat (fig. 53). — Poligonul regulat il putem impărţi prin drepte dusĕ din centrul sĕu O la toate colţurile sale in atătea trei-

(Fig. 52).



(Fig. 53).



unghiuri, căte laturi are. Bazele tuturor treiunghiurilor, ce au inălţimea comună OG (fig. 52), fac periferia poligonului. Acuma spre a afla *suprafaţa poligonului* ori vom computa pe rănd suprafaţa fiecărui treiunghiu (pag. 50), şi resultatele obţinute le vom adaoge, ori vom inmulţi periferia poligonului cu inălţimea sa (OG), şi productul il vom lua de jumĕtate.

Poligonul neregulat (fig. 53) se imparte prin diagonale in treiunghiuri; se calculează suprafaţa acestora şi resultatele singuratice se adaog; suma este aria căutată.

II. O perpendiculară dusă in trapez dela o paralelă la alta, este inălţimea aceluia.

2. Suprafaţa trapezului este egală la suma din suprafeţele ambelor treiunghiuri formate prin o diagonală, sau la productul din jumĕtatea sumei laturilor paralele şi din inălţimea aceluia. (Dacă ni-ar insemna a = aria; P = paralela cea mai lungă şi p = paralela cea mai scurtă, ear n = inălţimea: am avè formula:

$$a = \frac{P+p}{2} \times n.$$

3. Suprafaţa poligonului regulat se află, dacă luăm de jumětate productul din periferia aceluia şi din depărtarea centrului dela o lature.

Suprafaţa poligonului neregulat (vezi sub p. I. pag. 53).

III. Laturile paralele ale unui pămĕnt arător in formă de trapez sunt de 168 m. şi 136·5 m. de lungi, lăţimea e de 38·5 m.; căt de mare-i suprafaţa?

Resolvirea. $a = \frac{P+p}{2} \times n = \frac{168+136{\cdot}5}{2} \times 38{\cdot}5 = 5861{\cdot}625$ m² $= 58$ *a*. 61 m² 62 dm² 50 cm².

Căt de mare e suprafaţa unei grădine, ce are forma figurei 53, dacă AC=80 m., B*b*=45; AD=160, C*c*+50; E*e*=35, AE=85 şi F*f*=30 m.?

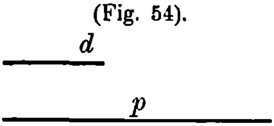
$a = \frac{80 \times 45}{2} + \frac{160 \times 50}{2} + \frac{160 \times 35}{2} + \frac{85 \times 30}{2} = a = 1800 + 4000 + 2800 + 1275 = 9875$ m² $= 98$ *a* 75 m².

Intr'un strat de flori de forma unui poligon regulat de 6 laturi o lature e de 2·5 m. de lungă; ear distanţa-i de centru de 1·24 m.; căt face suprafaţa acelui strat?

§. 26. Suprafaţa cercului.

I. Pe tablă stă un cerc, in care se vede tras un diametru. O singură privire ne spune, că periferia e mai mare decăt diametrul. Dar de căte ori să fie mai mare? Aceasta vrem să cercăm acuma. Aci v'am adus un vas (un litru de pleu) cu fund rotund. Cum vom afla centrul acestei feţe cercuale? (. . . . . cu ajutorul unei córde [1]). Să tragem un diametru pe fundul acesta, apoi să-'l luăm intre coarnele circiuiului şi să-'l străpunem pe dreapta *d*. — Acuma să mĕsurăm şi periferia cu sfoara aceasta, şi să-o străpunem pe a doua dreaptă *p*. — Priviţi acuma ambele drepte (*d* şi *p*) şi judecaţi, de căte ori poate fi mai mare *p*. decăt *d*. — Să luăm pe *d* in circiniu şi să cercăm, de căte ori incape pe *p* (de 3 ori şi mai rĕmăne o bucăţică — carea dacă am mĕsura-o bine, am afla, că este $^1/_7$ din *d*, adecă periferia dela cercul nostru este de 3 $^1/_7$ ori mai mare decăt diametrul. — Mĕsurarea se continuă şi la alte vasĕ rotunde, ajungĕnd la acelaş resultat.

(Fig. 54).



II. 1. Periferia este de 3 $^1/_7$ sau 3·14 ori mai mare decăt diametrul; — diametrul se cuprinde in periferie de 3·14 ori.

Numĕrul 3·14 ecsprimă raportul dintre periferie şi diametru, şi se numeşte de obiceiu „numĕrul rudolfic", insemnăndu-se cu litera grecească π (ecsprimă „pi").

[1]) Prin punctul de injumĕtăţire a coardei se duce o dreaptă, care e un *diametru*.

2. Fiind dat diametrul, periferia o aflăm, inmulţindul pe cela cu 3·14 (după formula: $p = d \times \pi = 2r\pi$ [1]).

3. Fiind dată periferia, diametrul il aflăm impărţind-o prin numĕrul rudolfic ($d = p : \pi$); ear razul, dacă periferia o impărţim prin de 2 ori π ($r = p : 2\pi$).

4. Descriem un cerc pe tablă şi-i impărţim periferia d. e. in 6 părţi asemenea. Apoi ducem spre punctele de impărţire 6 raze. Prin aceasta suprafaţa cercului s'a impărţit in 6 treiunghiuri, cari diferesc de celea cunoscute până acuma numai prin baza cea strâmbă. Suma suprafeţelor acestor 6 treiunghiuri este egală la suprafaţa cercului. Dar cum vom afla suprafaţa acestor treiunghiuri cercuale? Să determinăm inălţimea unui △ de aceste! Aceasta este egală cu razul cercului. Deci suprafaţa treiunghiului 1 va fi e egală la $^1/_2$ productul din arcul sau baza sa şi din raz, $= (a \,.\, r : 2)$; a treiunghiului $2 = b \,.\, r : 2 \ldots.$ deci suprafaţa arcului insemnănd-o cu A va fi:
$A = a \,.\, (r : 2) + b \,.\, (r : 2) + c \,.\, (r : 2) + d \,.\, (r : 2) + e \,.\, (r : 2) + f \,.\, (r : 2)$; insă in loc de a inmulţi fiecare arc cu $(r : 2)$, le putem inmulţi toate, adecă suma lor, care este periferia — cu $(r : 2)$. In urmare: *Suprafaţa cercului se află, dacă inmulţim periferia cu razul de jumĕtate $A = p \,.\, (r : 2)$* sau fiindcă $p = 2 \,.\, r \,.\, \pi$, *suprafaţa cercului o vom putè determina şi aşa, dacă vom inmulţì razul cu sine insuş, şi productul (patratul) earăş cu numĕrul rudolfic* ($A = \frac{2r \,.\, \pi \,.\, r \,.}{2} = r \,.\, \pi \,.\, r \,. = r \,.\, r \,.\, \pi = r^2\pi$).

III. Să fie in cercul nostru $r. = 18$ cm.; p după calculare $(2 \times 18 \times 4{\cdot}14) = 113{\cdot}04$ cm. Atunci avem: $A = \frac{113{\cdot}04 = 18}{2} = 1017{\cdot}36 \text{cm}^2$ $= 10 \text{ dm}^2\ 17 \text{ cm}^2\ 36 \text{ mm}^2$, sau $A = r^2 \,.\, \pi = 18 \times 18 \times 3{\cdot}14 = 1017{\cdot}36 \text{ cm}^2$.

O masă rotundă are in diametru 1·2 m.; a) căt de mare-'i suprafaţa? b) căt loc cuprinde fiecare din 6 persoane, care şed la dinsa? Un cal e priponit pe un prat cu o fune de $3\,^1/_2$ m.; căt loc poate paşte?

Adaos.

§. 27. Suprafaţa sectorului, a segmĕntului şi a elipsei.

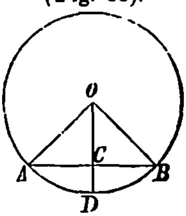
I. Să ne cugetăm cercul impărţit in cele 360° ale sale şi dela centru dusĕ raze spre toate punctele de impărţire. In casul acesta intreg cercul se imparte in 360 de treiunghiuri micuţe egale (cu baze strĕmbe) şi un sector d. e. AOB cuprinde (fig. 54) 90 atari treiunghiuri, adecă

[1]) p = periferia; d = diametru; r = raz; $\pi = 3{\cdot}14$.

chiar atătea, de căte graduri este unghiul format la centru. Pe un treiunghiu de acestea se vine a 360 parte din intreaga suprafață cercuală, și pe celea 90 de treiunghiuri ale sectorului dela centru ne spune numěrul treiunghiurilor, căte cuprinde sectorul. Dacă am scoate din sectorul nostru treiunghiul AOB, ce ni-ar rěmănè? (segmĕntul ADB).

II. 1 Suprafața sectorului o putem afla, dacă impărțim suprafața cercului prin 360 și cuoțientul il inmulțim cu numěrul gradurilor unghiului sectorial. — (Dacă mărimea unghiului o insemnăm prin x, avem formula: $A = \frac{r^2 \pi \cdot x}{360}$

(Fig. 55).



2. Dacă e cunoscută și mărimea arcului -- prelăngă raz, putem determina suprafața sectorului intocma așa ca la treiunghiu, adecă luănd productul din arc și din raz de jumětate. ($A = \frac{\text{arc} \times r}{2}$).

3. Vrĕnd a determina suprafața segmĕntului, computăm ăntăi aria sectorului corespunzĕtor arcului comun; apoi scoatem aria treiunghiului; restul e suprafața segmentului.

4. Periferia și suprufața elipsei (fig. 42 pag. 46) se determină cam in acelaș mod ca și la cerc, anume:

a) Periferia (p), dacă inmulțim cu numěrul rudolfic diametrul mijlociu, sau jumětate din suma celor douĕ diametre principale ($p = \frac{D+d}{2} \times 3{\cdot}14$; resultatul e totdeauna ceva prea mic).

b) Suprafața, dacă inmulțim cu numěrul rudolfic productul din razul cel mai mare și cel mai mic. ($A = R \times r \times 3{\cdot}14$).

III. Pe tablă stau felurite cercuri, in care se vĕd sectori și segmente. Determinați cuprinsul lor prin mĕsurare și computare!

Căt de mare-'i suprafața sectorului, dacă $r = 8$ m. $\sphericalangle$ sectorial $= 45^0$?

$$A = \frac{r^2 \pi \cdot x}{360} = \frac{8 \times 8 \times 3{\cdot}14 \times 45}{360} = 25{\cdot}12 \text{ m}^2.$$

Un prat de formă eliptică este de 120 m. de lung și de 80 m. de lat; a) căt de mare-'i periferia? b) suprafața?

a) $p = \frac{D+d}{2} \times \pi = \frac{120+88}{2} \times 3{\cdot}14 = 300 \text{ m}^2 = 3\ a.$

b) $A = R \times r \times \pi = 60 \times 40 \times 3{\cdot}14 = 7536 \text{ m}^2 = 75\ a.\ 36 \text{ m}^2.$

II. Mĕsurarea corpurilor.

Procesul didactic este cel schiţat mai sus (pag. 14 şi 15), adecă din privirea corpului aşezat intr'un loc potrivit se formulează: I. descrierea; II. legile referitoare; III. deprinderi relative. La material nou inviaţiuni nouĕ urmează la locul lor.

§. 28. **Mĕsuri de corpuri (cubice).**

I. Spre a infăţişa mĕsurile corpurilor (cubice), invĕţ. trebue să aibă un decimetru şi un centimetru cubic de lemn sau de pap, precum şi un metru cubic, ce se poate compune din 12 bucăţi de lemn de căte 1 m. de lungi.

Să mĕsurăm laturile cestor două cuburi de pe masa mea. . . Ce am aflat? Că fiecare lature a cubului mai mic este de 1 cm., ear a cubului mai mare de 1 dm. de lungă. Vedeţi, un cub cu laturi de 1 cm. se numesce *centimetru cubic* (cm^3), şi dacă are laturi de 1 dm., este dm^3. Cum se va numì un cub mare d. e. un lădoiu cu laturi de 1 metru? (. . . metru cubic $=$ 1 m^3). Si un cub de tot micuţ cu laturi numai de 1 milimetru? (. . . 1 mm^3).

Priviţi aci bucăţica aceasta de lemn, socotiţi, căţi cm^3 s'ar putè tăia din trĕnsa? Dar din beţişorul acesta? Ce socotiţi? Şi din butucaşul acesta căţi dm. ar eşì? Judecaţi! . . . Acuma iau priviţi spaţul chiliei de scoală! Ce socotiţ, căţi metri cubici d. e de lemne ar putè incăpè aci? Precum vedeţi, căţi cm^3, dm^3 şi m^3 cuprind *anume* corpurile aceste, n'o putem şti ci numai aşa — cam aproape — chipzuind. Dar acuma vom invĕţa, a *şti mĕsura* şi a computa apriat căţi metri, deci-, centi- milimetri cubici cuprinde fiecare corp. Cu ce mĕsurăm lungimea? suprafeţele? Vedeţi, chiar aşa intrebuinţăm cuburile inşirate, când vrem să determinăm mărimea corpurilor sau a spaţului lor. Mai numiţi odată cuburile acelea!

Să punem 10 cm^3 intr'un şir unul după şi lăngă olaltă, şi apoi 10 atari şiruri acurat după olaltă; (dacă nu sunt atăţa cm^3 in natură, infăţişăm aceasta prin dĕsemn la decimetrul cubic). Aşa căpĕtăm o pĕtură de 10 cm. de lungă, de 10 cm. de lată şi de 10 cm. de groasă. Dacă am pune acum 10 atari pĕturi preste olaltă, am căpĕta un corp de 10 cm. de lung, de 10 cm. de lat şi de 10 cm. de inalt — adecă un decimetru cubic. Şi căţi cm^3 ar cuprinde acela? In pĕtura cea mai dedesubt 10 intr'un şir, in 10 şiruri dară de $10 \times 10 = 100$, şi in tus zece pĕturile? (. . . $10 \times 10 \times 10$, sau $100 \times 10 = 1000$). Deci 1 dm^3 cuprinde 1000 cm^3.

Pe decimetrul cubic al nostu [1]) se vede impărţirea in cm. pe dinafară pe liniile transversale. Tot aşa cuprinde şi metrul cubic 1000 dm^3, 1 cm^3 1000 mm^3. Se va arăta la vasĕle de tinichiea, că decimetrul cubic — gol este acurat 1 litru etc.

II. 1. Corpurile le putem mĕsura numai cu alte corpuri, acăror mărime este deja determinată, şi care se numesc mĕsuri de corpuri (de volum sau cubice).

2. Mĕsurile cubice sunt: metrul, deci- centi- şi milimetrul cubic.

3. Metrul cubic (1 m^3) are 1000 decimetri cubici,
decimetrul „ (1 dm^3) „ 1000 centimetri „
centimetrul „ (1 cm^3) „ 1000 milimetri „

adecă:

m^3		dm^3		cm^3		mm^3
1	=	1000	=	1,000.000	=	1.000,000.000
		1	=	1.000	=	1,000.000
				1	=	1.000

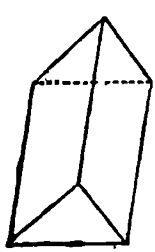
Mĕsurile cubice umblă dară din miie in miie; de aci şi in sistemul numĕral o unitate de aceste cuprinde trei note.

4. Decimetrul cubic — ca vas — se numeşte 1 litru; 100 l. fac 1 hectolitru (un butoiu); 1000 l. un chilolitru.

III. Inşiraţi şi esplicaţi mĕsurile cubice! — Un lădoiu este de 1·2 m. de lung, 1·2 de larg. şi de 1·2 m. de inalt. Cum se va putè numì spaţul ce-'l cuprinde? — Cu ce vom mĕsura lungimea d. e. a unui şanţ? Şi mărimea unei feţe d. e. a unui pămĕnt arător? — Dar mărimea unui corp d. e. a unei grămĕzi de lemne? — Desemnaţi mĕsurile cubice cunoscute! Faceţi-vĕ pănă in oara următoare din pap căte 1 dm^3 şi căte 1 cm^3, şi-i aduceţi la scoală.

§. 29. Prisme plane.

(Fig. 56).



I. (Invĕţ. are puse pe masă cubul şi douĕ prisme, una in *trei*, alta in *patru* muchi. Arĕtănd-le prisma cea in trei muchi (fig. 55) incepe. Priviţi bine corpul acesta! Căte baze are? Căte feţe laturale? Căte feţe vedeţi aci de toate? (5). Căte muchi? (9). Căte colţuri? (6). Să privim mai deamĕnuntul bazele! Ce formă au? (. . . treiunghiulară). Cum fug dinsele? (. . . paralel). Aci am un treiunghiu de hărtie acurat căte o bază de acestea de mare (se arată!) Să-'l punem şi pe cealaltă

[1]) se poate căpĕta dela firma W. Krafft in Sibiiu.

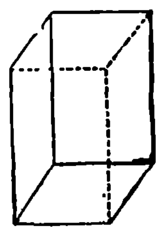
bază! Ce vedeţi? Cum sunt dară bazele in privinţa mărimei? (egale). Acuma priviţi feţele laturale! Spuneţi, ce ştiţi despre dinsele! (sunt 3 la numĕr, sunt paralelograme, sunt asemenea de mari şi stau perpendicular pe baze).

Acuma să privim corpul acesta al doile *prisma cea in patru muchi* (fig. 56). Spuneţi-'mi tot ce ştiţi despre bazele şi feţele lui laturale (are douĕ baze patrulaturale, paralele şi egale şi patru feţe laturale paralelogramice).

Acuma spuneţi tot asemenea şi despre *cubul acesta*).

Să comparăm acuma tustrele corpurile aceste intre sine. Priviţi şi-'mi spuneţi in ce seamĕnă! (Fecare are douĕ baze şi atătea feţe laturale, căte laturi are baza. Cele douĕ bazel a fiecare corp sunt egale şi paralele; feţele laturale sunt la toate paralelograme). Atari corpuri se numesc *prisme* sau *columne prismatice*.

(Fig. 57).



Să vedem acum, căţi dm³ etc. cuprinde o atare columnă. — Aci am decimetrul cubic pe care se vĕd marcaţi centimetri cubic, şi care se poate desface. Căţi cm² se află marcaţi pe baza acestuia? (100, v. pag. 57 p. I). Şi căţi cm³ cuprinde pĕtura dela bază? (de $10 \times 10 = 100$ cm³). Căte pĕturi sunt de a toate? (10). Căţi cm³ vor fi in aceste? ($100 \times 10 = 1000$ cm³). Vedeţi, chiar aşa vom determina şi cuprinsul unei prisme de acestea. Dacă vom şti de căţi cm² este baza şi apoi căte atari pĕturi de căte 1 cm. de inalte sunt clădite preste olaltă, uşor putem şti cuprinsul cubic al lor. Ear cum se află suprafaţa bazei, ştim de mai nainte. Spre a afla numĕrul pĕturilor, n'avem decăt să mĕsurăm dîstanţa dintre baze (inălţimea) d. e. Să fie baza prismei noastre patrulaturală de 4 cm. de lungă şi de lată, ear inălţimea de 6 cm. Suprafaţa bazei va fi de $4 \times 4 = 16$ cm². Adecă pe baza aceasta incap 16 cm³, cari formează o pĕtură de 16 cm³; acuma fiind columna de 6 cm de inaltă, adecă cuprinzĕnd 6 pĕturi tot de căte 16 cm³, vor fi de toţi de 6 ori 16 cm³ = 96 cm³.

Cum vom afla suprafaţa unei prisme? (computăm pe rănd suprafaţa bazelor, apoi a feţelor laturale, şi productele le adaogem).

II. 1. Un corp mărginit de douĕ baze egale şi paralele (trei-patru-unghiuri sau poligoane) şi de atătea paralelograme ca feţe laturale, căte laturi au bazele, se numeşte prismă sau columnă prismatică.

2. Dacă bazele prismei sunt treiunghiuri, este prismă treilaturală, dacă bazele-'s patru-unghiuri, prisma este patrulaturală etc.

3. O prismă patrulaturală — ce are şi de baze paralelograme, se numeşte paralelepiped. Paralelepipedul este columnă in 4 muchi. Bazele-i pot fi patrate, oblunguri, rombi sau romboizi. In casul prim avem columnă pătrată, in al doile oblungă, in al 3-le rombică şi in al 4-le romboidică. — Cubul este un paralelepiped, ale cărui toate feţele sunt patrate.

4. Distanţa verticală dintre ambele baze se numeşte inălţimea prismei.

5. In fiecare prismă:

a) Cuprinsul cubic este productul din bază şi din inălţime.

La prisma treilaturală inmulţim jumĕtate productul din laturea bazei luată de baza treiunghiului şi inălţimea acestuia cu inălţimea prismei. La prisma patrulaturală, inmulţim lungimea cu lăţimea bazei şi productul ăncă cu inălţimea prismei; la cub — dacă inmulţim mărimea unei laturi de trei ori cu sine insaş, sau o ridicăm la potenţa a treia.

b) Inălţimea este cuoţientul din volum şi din bază;

c) baza este cuoţientul din volum şi din inălţime.

6. Suprafaţa unei prisme o putem determina dacă calculăm pe rănd arealul bazelor şi al feţelor laturale şi apoi productele le adaogem.

La cub computăm numai arealul unei feţe, şi apoi productul il inmulţim cu 6.

III. Numiţi corpuri cu forma prismatică, a) din scoală (masă, dulap, tablă, uşă, rudă metrică, carte, cerusă indungată neascuţită etc.); b) de aiurea (grinzile cioplite, un mur drept; apoi şi un spaţ gol d. e. din dulap, din chilia de locuit etc.) Tăiaţi din napi şi formaţi din argilă căte un cub, un paralelepiped, o prismă in 3 şi una in 5 muchi! — Desemnaţi corpuri prismatice (ăntăi după modele de sĕrmă sau de pe tablă, (fig. 57) apoi după natură).

Şopronul nostru e de 5 m. de lung, de 2 m. de larg şi de 3 m. de inalt. Acolo sunt clădite lemne tăiate de foc; căţi steri vor fi? ($5 \times 2 = 10$ m^2; $10 \times 3 = 30$ m^3).

Mĕsuraţi şi computaţi şanţul ce se face dinaintea curţii scolare! (este de 12 m. de lung de 0·9 larg şi de 0·8 m. afund); in căt custă, dacă se plăteşte 1 m^3 cu 15 cr.?

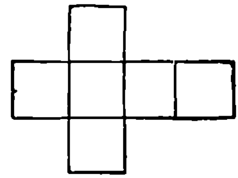
Un părete de 6·38 m. de lung, de 3·2 m. de inalt şi de 0·65 m. de gros se clădeşte din cărămiz, de căte 0·29 m. de lungi, 0·145 m. de late şi de 0·058 m. de groasĕ; socotiţi şi computaţi căte cărămizi vor trebuì, abstrăgĕnd cu totul dela tincueată (mestecătura de nĕsip, var şi apă)? $(6{\cdot}38 \times 3{\cdot}2 \times 0{\cdot}65) : (0{\cdot}29 \times 0{\cdot}145 \times 0{\cdot}058) = ?$ Căţi cm^3 cuprinde prisma aceasta regulată optlaturală.

Impărţim baza (de 8 unghiuri) prin drepte duse din centrul dĕnsei in 8 treiunghiuri egale; apoi mĕsurăm o lature a unghiului ca baza unui treiunghiu = 3 cm., inălţimea unui treiunghi de acestea = 1·6 cm. şi inălţimea prismei = 15 cm.

$$\text{Baza} = \frac{3\times1{\cdot}6\times8}{2} = 19{\cdot}2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumul} = 19{\cdot}2\times15 = 288 \text{ cm}^3.$$

(Fig. 58).



Mĕsuraţi şi computaţi volumul chiliei noastre scolare până la coperiş! Cum vom mĕsura ecstensiunile?

Volumul unei prisme de 5 dm. de inaltă este 160 dm³; căt de mare-'i baza? ($b = \frac{160}{5} = 32$ dm²).

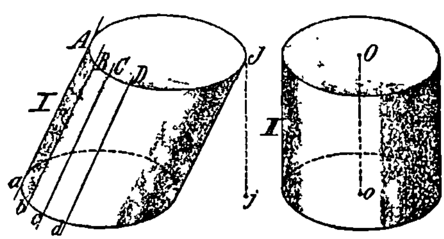
Volumul unei prisme cu bază de 16 dm² este de 120 dm³; căt de naltă-'i? ($n. = \frac{120}{16} = 7{\cdot}5$ dm.)

§. 30. Cilindrul.

I. Priviţi vasul acesta rotund de tinichea (pleu) (fig. 58). Il cunoaşteţi dejà! Cum se numeşte? (11.). Se mărgineşte de 2 baze rotunde cercuale şi de o faţă laturală regulat strĕmbă. Cele douĕ muchii deasupra şi dedesubt sunt cercuri.

Sunt cilindre şi cu bază *eliptică* sau *ovală;* aci vom privì insă mai de aproape numai cilindrul cu bază cercuală.

(Fig. 59).



Invĕlim cilindrul nostru — afară de baze — cu o bucată potrivită de hărtie, apoi il desbrăcăm şi intindem hărtia pe tabla jilăvită. Ce vedem? Un oblung, ce are de bază linia cercuală dedesubt şi de inălţime inălţimea cilindrului. — Ce socotiţi dară, cum vom putè dĕtermina suprafaţa intreagă a cilindrului nostru?

Aici am o prismă patrulaturală şi un cilindru, tăiate amĕndouĕ din morcovi (napi), cam asemenea de groasĕ şi de inalte. Priviţi-le, comparaţi-le! In ce diferesc? Eată acuma fac din prismă tăindu-'i muchiile laturale o prismă optlaturală. Prin aceasta s'a făcut mai asemene de cilindru. Acuma taiu earăş muchiile aceste opt, şi capĕt o prismă cu 16 laturi, care este şi mai asemene cilindrului etc. Ce observaţi? (cu căt prisma devine cu mai multe laturi, cu atăta se apropie mai tare de forma cilindrului — până ce mai pre urmă — se preface cu totul in acesta). De aici puteţi vedè, că cilindrul nu este altceva, decăt o prismă cu laturi nenumĕrate. — In urmare ce socotiţi, cum i-om putè calcula volumul? (. . . intogmai ca la prismă).

II. 1. Cilindrul se mărgineşte de 3 feţe: douĕ baze cercuale egale şi o faţă laturală regulat stĕmbă.

2. Faţa laturală se mai numeşte şi *măntea.*

3. Linia verticală dusă (cugetată) prin centrul bazelor este inălţimea (osia) cilindrului.

4. Cilindrul este pretutindinea asemenea de gros.

5. Suprafaţa mănteauei o calculăm, inmulţind cercuferinţa bazei cu inălţimea cilindrului.

6. La ori care cilindru:

a) Cuprinsul cubic il aflăm inmulţiud-i baza cu inălţimea.

Cănd vrem să computăm cuprinsul cilindrului, trebue să-'i determinăm mai ăntăi prin mĕsurare diametrul sau razul bazei, precum şi inălţimea (lungimea). — Baza este $a = r^2 \times \pi$, şi vol. cilindrului (V) $= r^2 \times \pi \times n$. (nălţimea).

b) Inălţimea o aflăm — impărţind volumul prin bază; ear

c) baza, — impărţind volomul prin inălţime.

III. Numiţi corpuri cu formă cilindrică, a) din scoală (ceruse, tocul de păstrat pene, călămare, ţevile de cuptor; ţevea la termometru, barometru); b) de aiurea (mĕsurile de bucate, ciubere, tulpine de arbori, sul de car, tăvălicul, columne in biserică, frupte, precum: mere, nuci (ovale); perii, corpul şerpilor, a vermilor etc).; — c) tăiaţi din morcovi căte un cilindru cu bază cercuală! Formaţi un cilindru din $^1/_2$ coală de hărtie! — d) Desemnaţi căte douĕ cilindre după cel depe tablă! e) cilindrul nostru este de 14 cm. de inalt, razul la bază de 2·5 cm.; judecaţi, mĕsuraţi, calculaţi căt de mare-'i volumul? (V.$= r^2 \times \pi \times n =$ $2{\cdot}5 \times 2{\cdot}5 \times 3{\cdot}14 \times 14$); — f) Volumul unui cilindru este de 345 dm³, baza 15 dm²; căt de inaltu-'i? ($\frac{345}{15} = 23$ dm.); g) Aci avem alt cilindu de 12 dm. de inalt, al cărui volum este 576 dm³; cătu-'i de mare la bază? $b = \frac{576}{12} = 48$ dm²); h) Computaţi volumul lemnului celui mare din curtea noastră, mĕsuraţi-i lungimea! (12 m.); căt de grosu-'i la capete? (de 0·8 m. şi de 0·6 m. in diametru).

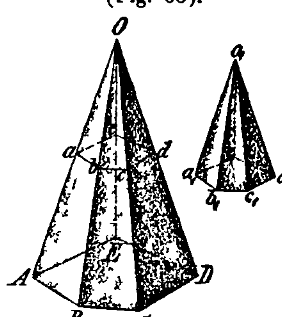
Arborii necioplIţi i privim de corpuri cilindrice. Spre a determina volumul lor, měsurăm diametrele ambelor capete; adaogem mărimea lor şi suma aceea luată de jumětate ni infăţişază diametrul mijlociu, din care computăm baza mijlocie, care inmulţită cu lungimea lemnului — ne dă volumul. Bunăoară in problema de mai sus: diametrul mijlociu $=\frac{0\cdot8+0\cdot6}{2}=0\cdot7$ m.: periferia mijlocie $=2\cdot19$ m.; de aci suprafaţa $=2\cdot19\times(r:2)$; $r:2=\frac{0\cdot35}{2}=0\cdot175$; deci $a.=2\cdot19\times0\cdot175=0\cdot38275$ m² şi $V.=0\cdot38275\times12=4\cdot59300$ m³.

§. 31. **Piramide.**

I. Priviţi corpul ăsta (o piramidă patrulaturală). Căte baze are? (.... una). Ce formă are? (.... patrulaturală). Căte feţe laturale? (... patru). Aşadară acurat atătea, căte laturi are baza. Priviţi, ce formă au feţele laturale? (... treiunghiulară). Căte muchi are corpul acesta (... 8). Ce observaţi aci (la vĕrf) la piramida noastră? (toate feţele laturale se unesc sau se sfĕrşesc intr'un colţ). Căte colţuri vedeţi aci de toate? (5). Vedeţi, corpul acesta se numeşte piramidă (fig. 59).

Sunt piramide cu 3, 4, 5, *6* feţe laturale — precum vedeţi aci una (cu 6 feţe laturale). Spuneţi tot ce vedeţi la dinsa despre bază, feţe, muchii şi colţuri. Ce socotiţi, cum vom calcula suprafaţa intreagă a piramidei noastre patrulaturale? (... vom computa pe rănd suprafaţa bazei şi apoi a feţelor laturale şi productele le vom adaoge).

(Fig. 60).



Aci vedeţi o prismă şi o piramidă ambele de tinichea şi goale (v. pag. 17). Aşadară au formă de vasĕ. Priviţi-le! Spuneţi, in ce seamĕnă? (au baze şi inălţime egală). — In ce diferesc? (prisma e asemenea de groasă pe tot locul, piramida se tot subţie spre vĕrf). Ce socotiţi, care va cuprinde dară mai multă apă? (prisma). Să cercăm! Aci este apă. (Se toarnă cu vasul piramidal in cel prismatic, şi se află, că in acesta incap acurat 3 mĕsuri piramidale). Ce am aflat? (că prisma este de 3 ori mai mare decăt piramida). Vedeţi dară, că piramida noastră este numai $^1/_3$ din prismă. Şi aceasta o putem zice nu numai despre aceste douĕ corpuri, ci despre ori care piramidă, că adecă este numai a treia parte aşa de mare ca prisma, ce are cu dinsa bază şi inălţime egală.

II. 1. Un corp, ce are numai o bază şi atătea feţe laturale căte laturi are baza, se numeşte piramidă.

2. Feţele laturale sunt treiunghiuri şi se sfirşesc intr'un vĕrf (colţ); suma lor formează mănteaoa piramidei.

3. Sunt piramide de 3, 4, 5 şi mai multe laturi.

4. Linia verticală dusă (cugetată) din centrul bazei spre vĕrf este inălţimea piramidei; (ear inălţimea treiunghiurilor se zice inălţimea laturală.

5. La ori care piramidă aflăm:

a) Suprafaţa, dacă computăm şi adaogem arealul bazei şi cela al tuturor feţelor laturale;

b) Volumul, dacă din productul bazei şi al inălţimei luăm a treia parte $(V. = \frac{b \times n}{3})$;

c) Baza piramidei, dacă impărţim volumul intreit prin inălţime: $(b = \frac{3V.}{n})$;

d) Inălţimea, dacă impărţim volumul intreit prin bază $(n = \frac{3V}{b.})$.

III. Numiţi corpuri piramidale! (ceruse ascuţite, cuie de şindilă fără cap, un par ascuţit). — Tăiaţi din morcov sau argilă căte o piramidă trei şi patrulaturală! Comparaţi piramida cu prisma. Desemnaţi-le după figurile depe tablă.

Mĕsuraţi şi computaţi la piramida noastră patrulaturală a) baza; b) suprafaţa unei feţe laturale; c) suprafaţa intrégă; d) cuprinsul cubic! Să fie baza pătrată, şi o lature de 8 cm.; inălţimea verticală de 30 cm. şi cea laturală de 32 cm. Atunci avem: a) Baza de $8 \times 8 = 64$ cm^2; b) arealul unei feţe laturale $(a. = \frac{b. \times n.}{2})$ $8 \times 32 = 256$ cm^2; c) arealul intreg: $64 + (256 \times 4) = 1088$ cm^2; d) Vol. $= \frac{64 = 30}{3} = 640$ cm^3.

Turnul bisericei noastre are forma unei piramide de 8 laturi; căţi metri cubici de aer cuprinde? Căt de mare este mănteaoa lui? Preţuiţi ecstensiunile lui, după care vĕ voiu spune eu mĕsurile sau mărimile *adevĕrate*, după cum mi le am căştigat pentru voi!

Adaos.

Piramida trunchiată şi corpuri in formă de io.

A) *Piramida trunchiată.*

I. Invĕţ. in faţa scolarilor taie vĕrful unei piramide de argilă paralel cu baza. Bucata rĕmasă este piramidă *trunchiată,* (ABCD, *abcd* fig. 59), ear cea cu vĕrful piramidă *intregitoare* (*abcd* 0 fig. 59). Va contribuì mult la căştigarea unei intuiţiuni chiare, dacă invĕţ. va avè construită din lemn o piramidă, al cărei vĕrf să se poată lua uşor şi apoi earăş să se poată aşeza cu ajutorul unui cuiu de lemn potrivit. — Piramida trunchiată are două baze paralele asemenea, dar neegale; — feţele laturale sunt trapeze. Perpendiculara dusă din centrul unei baze la cealaltă este inălţimea dinsei. Să comparăm piramida noastră trunchiată cu prisma patrulaturală! In ce seamĕnă? (au căte 2 baze paralele şi atătea feţe laturale căte laturi au bazele, — apoi la numĕrul muchilor şi al colţurilor). In ce diferesc? (piramida se subţie spre vĕrf, prisma nu). Aşadară am putè privì in cătva piramida trunchiată de prismă cu baze neegale. Vrĕnd a-'i determina volumul, am trebuì să inmulţim baza cu inălţimea. Dar care bază? Dacă vom lua pe cea mai mare, vom căpĕta prea mult, cu cea mai mică — prea puţin; deci vom trebuì să luăm o *bază mijlocie.* Cum se află acesta, ştiţi de mai nainte.

II. 1. Suprafaţa piramidei trunchiate se află, calculand arealul singuratecelor feţe şi apoi adaogĕndu-le.

2. Volumul piramidei trunchiate se afla, dacă baza mijlocie se inmulţeşte cu inălţimea (Vol. $= \frac{B+b}{2} \times n.$), sau şi subtrăgĕnd volumul piramidei intregitoare din cela al piramidei intregi.

III. Grinzile la un capĕt mai groase sunt piramide trunchiate!

1. Judecaţi şi mĕsuraţi laturea bazei mari, a celei mici şi inălţimea piramidei noastre trunchiate cu baze pătrate! Să fie laturea bazei mari (B.) = 10 cm., a celei mici (b) = 6 cm. şi inălţimea (n.) = 15 cm. Acuma să calculăm:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } B = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2 \\ \text{b) } b = 6 \times 6 = 36 \quad " \end{array}\right\} \text{adaose}$$

$$B + b = 136 \text{ cm}^2$$

c) $\frac{B+b}{2} = 68 \text{ cm}^2 =$ baza mijlocie.

d) Vol. $= \frac{B+b}{2} \times n. = 68 \times 15 = 1020 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 20 \text{ cm}^3.$

Resultatul acesta (1020 cm^3) este numai aprocsimativ, anume cu ceva mai mare decăt cel adevĕrat; insă diferinţa este atăt de neinsemată, incăt pentru trebuinţele vieţei practice se poate trece cu vederea.

2. Priviţi, şi judecaţi ecstensiunile unei grinzi dela podul nostru! Acuma vĕ spun eu mărimile dejà computate: lungimea = 8 m, la capĕtul cel mai gros este laturea feţei pătrate 30 cm., la cel mai subţire de 28 cm.; computaţi-i cuprinsul cubic!

a) Laturea mijlocie $= \frac{30+28}{2} = 29$ cm.

b) Suprafaţa bazei mijlocie $= 29 \times 29 = 841$ cm^2.

c) Vol. $= 841 \times 8$ m. $=$ (8. m. $= 800$ cm.) $841 \times 800 = 672800$ cm^3 $=$ 672·8 dm^3.

B) *Corpuri in formă de ic.*

I. Invĕţ. taie peziş o prismă treilaturală de morcov la ambele baze sau şi numai la una. Corpul format este un *ic* (asemenea celui cu care se creapă butuci, care se şi arată scolarilor). La ic se vĕd, a) muchia ascuţită, b) baza, care jace făţiş cu muchia ascuţită aşa, incăt laturile mai lungi (paralele) ale aceleia fug paralel cu aceasta; c) inălţimea, adecă distanţa verticală dintre bază şi muchia ascuţită; d) faţa de strătăiare verticală — un treiunghiu, al cărui vĕrf ajunge in muchia ascuţită şi baza este egală cu distanţa verticală dintre laturile paralele cele mai lungi ale bazei icului. Inălţimea acestui treiunghiu este egală cu inălţimea icului amentită mai sus sub c).

II. 1. Suprafaţa icului se află computĕnd pe rănd feţele laturale şi adaogĕnd resultatele; 2. ear volumul, dacă faţa verticală de strătăiare se inmulţeşte cu a treia parte din suma celor trei muchi paralele.

III 1. Numiţi şi alte corpuri in formă de ic (coperişe de case, cu front peziş). 2. Faceţi-vĕ căte un ic de lemn. 3. Desemnaţi căte un ic după figura de pe tablă. 4. Priviţi, judecaţi, mĕsuraţi şi computaţi volumul icului nostru! Să fie de 15 cm. de inalt; muchia ascuţită = 12 cm., laturile contige (de lăngă olaltă) ale bazei oblungi 21 cm. şi 10 cm. a) Faţa verticală de strătăiare este treiunghiu cu bază = 10 cm. şi inălţimea = 15 cm.; deci arealul acestuia $= \frac{10+15}{2} - 75$ cm^2;

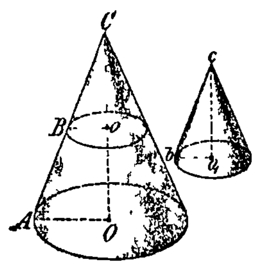
b) a treia parte din suma celor 3 muchi paralele $= \frac{21+21+21}{3} = \frac{54}{3}$ 18 cm.; c) vol. $= 75 \times 18 = 1350$ cm^3 $= 1$ dm^3 350 cm^3.

Dacă se va tăia icul paralel cu baza, căpětăm un ic trunchiat numit şi *obelisr* (cu două baze paralele neegale, şi cu atătea feţe laturale in formă de trapeze, căte laturi are baza). Computarea aprocsimativă a obeliscului se reduce la cea dela piramida trunchiată.

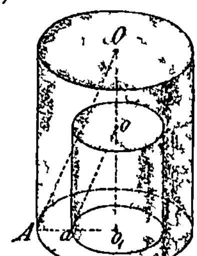
§. 32. **Con.**

Procesul didactic este acurat cel dela piramidă, pentru aceea, spre a incungiura atătea repeţiri, vom resuma pre scurt cunoştinţele relative.

I. Conul este un corp cu o bază cercuală şi cu o faţă laturală regulat strĕmbă (curbă), care se sfĕrşeşte intr'un punct (ABC fig. 60). Aceasta se numeşte *mănteaoa* conului. Perpendiculara dela vĕrf la bază este *inălţimea*; ear o dreaptă dusă dela vĕrf spre un punct al periferiei bazei este *linia laturală* a conului.



(Fig. 61).



Sunt conuri şi cu bază eliptică şi ovală. Aci vorbim numai despre cele cu bază cercuală.

Tăiănd conul paralel cu baza (se arată!) căpĕtăm un *con trunchiat* şi unul *intregitor*. Cel trunchiat are 2 baze cercuale insă neegale.

Pentru ca se putem ecspune intuitiv modul calcularei suprafeţei şi a cuprinsului cubic al acestor corpuri, vom putè procede aşa: a) La *suprafaţă*. Invĕlim apriat mănteaua atăt a conului intreg, căt şi a celui trunchiat cu căte o bucată de hărtie, apoi intinzĕnd hărtiile pe tabla jilăvită, vedem că cea dela conul intreg este un *treiunghiu cu bază curbă,* eară cea dela conul trunchiat un trapez cu laturile paralele asemene curbe. Baza treiunghiului ni infăţişază periferia bazei conului, asemene şi paralelele trapezului, periferiile celor două baze ale conului trunchiat; ear inălţimea treiunghiului precum şi cea a trapezului nu e altceva decăt linia laturală a mătelei acelora. Dacă dară măntelele ambelor conuri nu sunt decăt suprafeţele treiunghiului şi a trapezului, urmează, că suprafaţa acelora se va calcula acurat ca a treiunghiului şi ca a trapezului.

b) *La volum.* 1. *Conul intreg.* Iuvĕţ. mĕsură cu vasul conic de tinichea (pag. 17) pe cel cilindric deasemene bază şi inălţime, şi scolarii văd, că in cilindru incap acurat *trei vasě conice.* Ci aceasta are valoare faţă cu toate corpurile conice şi cilindrice de asemene bază şi inălţime. Deci conul este acurat *a treia parte din cilindrul de asemene bază şi inălţime.* Cum vom calcula dară volumul conului? (vom inmulţî baza cu inălţimea, şi productul il vom impărţì prin 3).

2. Conul *trunchiat.* — Precum putem privì piramida trunchiată de o prismă cu baze neegale (pag. 65), aşa putem considera conul trunchiat de un cilindru cu baze neegale, şi a-'i calcula cuprinsul ca şi la cilindru, adecă inmulţindu-i baza mijlocie cu inălţimea.

Aci bază mijlocie vom computa-o din razul mijlociu, carele se află, luănd de jumĕtate suma ambelor raze.

II. La ori care con intreg şi trunchiat putem afla:

1. Suprafaţa intreagă, dacă computăm mai ăntăi arealul bazei, respective a bazelor, şi apoi cela al măntelei, şi resultatele le adaogem.

2. Suprafaţa măntelei:

a) la conul *intreg.* Dacă luăm de jumĕtate productul din periferia bazei şi din linia (inălţimea) laturală (a. $= \frac{p \times n}{2} = \frac{2r \times 3{\cdot}14 \times n}{2} = r. \times 3{\cdot}14 \times n$);

b) la conul *trunchiat.* Dacă din razul mijlociu vom calcula periferia mijlocie, şi aceasta o vom inmulţì cu inălţimea laturală (a.$=2 \times \frac{R+r}{2} \times 3{\cdot}14 \times n.=(R+r) \times 3{\cdot}14 \times n$).

3. Cuprinsul cubic:

a) la conul *intreg.* Dacă productul din bază şi din inălţime il impărţim prin 3 (Vol.$=\frac{b \times n}{3}$; ear baza $= r^2 \times 3{\cdot}14$; de aci Vol. $= \frac{r^2 \times 3{\cdot}14 \times n}{3}$;

b) la conul *trunchiat.* Dacă baza mijlocie o inmulţim cu inălţimea (Vol. $= \frac{R+r}{2} \times \frac{R+r}{2} \times 3{\cdot}14 \times n$). Sau şi mai apriat. Dacă din cuprinsul conului intreg subtragem cuprinsul conului intregitor.

4. La conul intreg aflăm:

a) Baza (b), dacă i impărţim volumul intreit prin inălţime ($b = \frac{3V}{n}$;

b) Inălţimea (n), dacă impărţim volumul intreit prin bază ($n = \frac{3V}{b.}$).

III. Numiţi corpuri conice (coarnele vitelor, cozile porcilor, ciocul unor pâsĕri, precum a vrabiilor, morcovi, rădichi, tulpinele de brad pănă in vĕrf, oale de flori, unele vasĕ de mĕsurat; turnar fără grumazi, tulpine de brad tăiate la vĕrf). Formaţi din argilă căte un con intreg şi unul trunchiat!

Comparaţi a) conul cu piramida! b) cu cilindrul! Desemnaţi căte un con intreg şi căte unul trunchiat — după modelele de pe tablă! Mĕsuraţi şi computaţi la conurile noastre: a) bazele; b) razele; c) suprafeţele măntelelor; d) arealul lor intreg; e) cuprinsul lor cubic! (Să fie *r.* = 3 cm.; inălţimea laturală (*n*) la conul intreg 14 cm. ear la cel trunchiat de 10 cm.; inălţimea verticală colo de 13 şi colea de 9 cm.

1. Suprafaţa:

La conul intreg:

a) suprafaţa bazei $=r^2 \times 3{\cdot}14 = 9 \times 3{\cdot}14 = 28{\cdot}26$ cm²;

b) „ măntelei $= r \times 3{\cdot}14 \times 14 = 131{\cdot}88$ cm².

c) „ intreaga a conului $= 28{\cdot}26$ cm² $+ 131{\cdot}88$ cm² $=$ $160{\cdot}14$ cm².

La *conul trunchiat.* R=3 cm. *r.*=2 cm.; inălţimea laturală (*b*) = 10 cm. şi cea verticală (*n*) = 9 cm.

a) Suprafaţei bazei mijlocie $= \frac{R+r}{2} \times \frac{R+r}{2} \times 3{\cdot}14 = 2{\cdot}5 \times 2{\cdot}5 \times 3{\cdot}14$ $= 19{\cdot}6250$ cm².

b) Mănteaoa $= 2 \times \frac{R+r}{2} \times 3{\cdot}14 \times n = (R+r) \times 3{\cdot}14 \times 10 = 5 \times 3{\cdot}14 \times$ $10 = 157$ cm².

c) Suprafaţa intreagă:

Baza mare	=28·26 cm²
„ mică	=12·56 „
mănteaoa	=157 „
	197·82 cm².

2. Cuprinsul cubic:

a) la *conul intreg:* Vol. $= \frac{b \times n}{3} = \frac{28{\cdot}26 \times 13}{3} = 122{\cdot}46$ cm³.

b) la *conul trunchiat:* Vol. $\frac{R+r}{2} \times \frac{R+r}{2} \times 3{\cdot}14 \times n = 19{\cdot}6250 \times 9$ $= 176{\cdot}6250$ cm³.

Dacă in conul nostru, carele cuprinde 122·46 cm³ inălţimea este 13 cm.; căt de mare este baza?

Resolvirea: $(b = \frac{3V}{n} = \frac{3\times122{\cdot}46}{13} = 367{\cdot}38 : 13 = 28{\cdot}26$ cm².

Să presupunem cunoscut vol. cu 122·46 cm³ şi baza (18·26 cm²); cât va fi inălţimea? $(n = \frac{3V}{b} = \frac{3\times122{\cdot}46}{28{\cdot}26} = 367{\cdot}38 : 28{\cdot}26 = 13$.

In curte avem o tulpina de brad de 5 m. de lungă, tăiată la ambe capetele in formă de cerc; diametrul unei baze este 70 cm. şi al celeialalte de 42 cm.; câtă massă cuprinde?

a) Baza mijlocie va avè un raz de $\frac{35+21}{2} = \frac{56}{2} = 28$ cm.; arealul acestei baze este $= r^2\times3{\cdot}14 = 28\times28\times3{\cdot}14 = 2461{\cdot}76$ cm².

b) Fiind lemnul de 5 m. = 500 cm. de lung, volumul va fi $2461{\cdot}76\times500 = 1230880$ cm³ $= 1{\cdot}230880$ m³ = 1 m³ 230 dm³ 880 cm³.

Adaos. Vasĕ ovale şi buţi.

1. *Vasĕ ovale.* Vasĕ, a căror bază şi gură au formă de elipsă sau ovală de mărime felurită, le putem privì de nişte cilindre asemene de inalte pe baza mijlocie.

Ecsemplu. Priviţi şi mĕsuraţi mărimile de lipsă la butina noastră! Inălţimea 1·5 m., osiile bazei = 140 cm. şi 90 cm., osiile gurei 180 cm. şi 130 cm. Acuma judecaţi, câţi litri pot incăpè in trĕnsa! — Să calculăm acuma:

a) Osiile feţei mijlocie $= \frac{140+180}{2} = 160$ cm. = 16 dm. şi $\frac{90+130}{2} = 110$ cm. = 11 dm.

b) Arealul acestei feţe $(= R\times r\times3{\cdot}14 = 8\times5{\cdot}5\times3{\cdot}14) = 138{\cdot}16$ dm².

c) Acuma fiind inălţimea butinei = 1·5 m., vom avè cuprinsul $= 138{\cdot}16\times1{\cdot}5 = 2072{\cdot}40$ dm³.

d) Fiind 1 l. = 1 dm³, va cuprinde 2072 l. 4 dl.

2. *Buţi.* Butea încă o putem privì de cilindru asemene de inalt, a cărui bază are de raz a treia parte din suma afunzimei dela vrană şi din jumĕtate lărgimea bazei.

Ecsemplu. Priviţi butea mea (se arată!) Judecaţi aprocsimativ inălţimea, afunzimea dela vrană şi jumĕtate lărgimea bazei! Spuneţi acuma, cam câţi litri poete cuprinde! Să mĕsurăm acuma mărimile aceste! Inălţimea să fie 16 dm., afunzimea dela vrană = 11 dm. şi jumĕtate lărgimea bazei = 4 dm. Acuma să computăm:

a) $11+4=15$; $15:3=5$ dm. este razul bazei dela cilindrul de computat; baza $=5\times5\times3{\cdot}14=78{\cdot}50$ dm².

b) Vol. $= 78{\cdot}50\times16 = 1{\cdot}256$ m³ = 12 hl. 56 l.

§. 33. Globul.

A. *Computarea suprafeței.*

I. Invěț. are la indemănă douě globuri de lemn, unul mai mare altul mai mic, care se poate desface in douě semigloburi. Scolarii le privesc sub conducerea invěțătorului din toate punctele de vedere. I provoacă să judece, de căți cm^2 sau dm^2 poate fi suprafața globului. In fine le arată, cum se poate determina aceasta, anume:

Pe suprafața de strătăiare a unui semiglob chiar in centruințepeneşte capětul unei şferi de spagat intinsă in ceară topită, ear cu capětul celalalt il tot inrotilează in jurul centrului pănă ce se acopere suprafața semiglobului. Apoi tae sfóră, şi mai invěleşte odată tot asemene aceeaş suprafață. Cele douě bucăți de sfoară tăiate acoper dară acurat *de douě ori suprafața cercuală* a semiglobului. Acuma invělim cu cele douě sferi suprafața cea strěmbă a unui semiglobu pănă ce se gată sfoara. Aceasta o putem face uşor aşa, că ințepenim un cuişor de fier acurat in punctul, carele este asemene de departe dela periferia bazei, in jurul căruia apoi uşor putem infaşura cu sfoara semiglobul. Sfěrşind infăşurarea vedem, că cu cele douě sferi s'a *acoperit acurat suprafața strěmbă a semiglobului,* adecă aceasta este acurat *de douě ori* aşa de mare ca şi suprafața cea cercuală (baza); in urmare intreaga suprafață a globului este de 4 ori atăta. Aşadară cănd vrem să determinăm suprafața globului, vom determina ăntăiu razul (sau diametrul), ori neputěnd aceasta, cercuferință, din aceasta razul (pag. 55) şi din raz suprafața cercului, care resultat il inmulțim cu 4.

II. 1. Globul e mărginit de o singură față strěmbă, incăt fiecare punct din aceasta este asemene de departe dela centrul globului.

2. O linie dreaptă dusă sau cugetată prin centru şi prolungită pănă in suprafața globului se numesce diametrul acestuia; jumětate din acesta este razul globului.

3. Diametrul, pre lăngă care se invěrte globul se numesce *osia* acestuia, şi capetele osiei *poli.*

4. Un cerc preste glob, ce-'l injumětățeşte, se numeşte cercuferința (periferia) globului; aceasta este cel mai mare cerc ce se poate trage preste glob.

5. Globul tăiat in direcția cercuferinței sale ni dă douě semigloburi cu fețe (baze) cercuale.

6. Suprafaţa globului este de 4 ori aşa de mare ca şi suprafaţa cercuală a unui semiglob al sĕu.

$$(\text{A.}=4\times r^2\times\pi=4\times r^2\times 3{\cdot}14).$$

Fiind insă $4\times r^2\times 3{\cdot}14$ $(=2\times 2\times r\times r\times 3{\cdot}14)$ egal cu $2\times r$ (diametru) $\times 2\times r\times 3{\cdot}14$ (periferie); suprafaţa globului se poate determina şi aşa, că se inmulţeşte diametrul cu periferia.

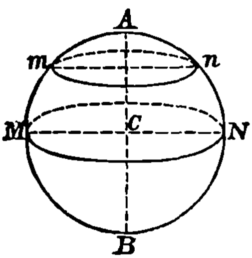
$$(\text{A}=d\times p=2r\times p).$$

III. 1. Numiţi corpuri globiforme (globul geografic, fire de mazere, sĕmburi de ciraşe, minge (labdă), glob de puşcă, de popice, de sticlă etc.)

2. Comparaţi globul cu cilindrul! semiglobul cu conul! globul cu cubul!

3. Desemnaţi figura globului după figura de pe tablă (fig. 62).

(Fig. 62).



4. Priviţi, judecaţi, mĕsuraţi şi computaţi arealul globului nostru cestui, ce se poate desface in 2 semigloburi! In ce mĕsuri vom ecsprima suprafaţa? (in cm²). Pentru ce nu in m² sau in mm²? — Ce vom mĕsura ăntăi? (diametrul). Bine, acesta este .... 10 cm.; deci:

$d. = 10$ cm.
$r. = 5$ cm.
$p. = (2r\times\pi)=10\times 3{\cdot}14=31{\cdot}4$ cm.
$\text{A} = 4\times r\times r\times 3{\cdot}14=314$ cm²

sau:

$\text{A}=d\times p=10\times 31{\cdot}4=314$ cm².

5. Căt de mare-'i suprafaţa globului nostru geografic? — Ce vom mĕsura diametrul sau periferia? (... periferia, pentrucă diametrul nu se poate, neputĕndu-se desface globul). Cu ce vom mĕsura periferia? (cu o sfoară incingĕnd cu dinsa globul pre la ecuator).

$p. = 60$ cm.
$d. = p : 3{\cdot}14=60 : 3{\cdot}14=19{\cdot}108$ cm.
$r. = 9{\cdot}55$ cm.
$\text{A.} = 4\times r\times r\times 3{\cdot}14$ $(=4r^2\pi)$
$\text{A.} = 4\times 9{\cdot}55\times 4{\cdot}55\times 3{\cdot}14=1145{\cdot}5$ cm² $=$ 11 dm² 45·5 cm²

sau

$\text{A.} = p.\times d. = 60\times 19{\cdot}108=1145{\cdot}5$ cm².

De aci vedem, că calcularea suprafeţei după diametru şi periferie este mai simplă.

B. *Computarea cuprinsului cubic.*

I. Aci vedeţi un měr binişor rotund, ce-'l putem privì deocamdată de un glob. Priviţi incoace, cum il voiu tăia pe jumětate in două semigloburi. Apoi bucăţelesc ambele semigloburi prin două tăieturi ce se strătaiă in cetrul bazei in căte 4 bucăţi, de toate dară in 8. Priviţi bucăţile aceste. Cu care corpu din căte le cunoasceţi, le putem aseměna? (. . . cu piramida). Da, le putem privì chiar de piramide cu bază stręmbă. Fiecare piramidă de aceste are de bază o parte din suprafaţa globului de inălţime razul globului, şi puněndu-le la olaltă in forma globului, convin cu věrfurile lor in centrul acestuia. — Forma piramidală a acestor bucăţi se vede şi mai bine, dacă cele două semigloburi le-am impărţì in modul arătat in 16, 32, 64 părţi.

Procedura aceasta se repeţeşte la mai multe corpuri rotunde, pănă ce scolarii pricep cum se cade raportul dintrě glob şi piramidele formate din trěnsul.

Este clar, că dacă vom computa cuprinsul cubic al fiecărei din piramidele aceste şi apoi vom adaoge resultatele, vom căpěta cuprinsul cubic al globului. Cum se află insă volumul piramidei? (Vol.$=\frac{b \times n}{3}$).

Dacă vom numì pe rănd bazele celor 8 piramide *a, b, c, d, e, f, g, h*, razul globului *r*.: volumul globului va fi:

$$V.=a\,.\,(r:3)+b\,.\,(r:3)+c\,.\,(r:3)+d\,.\,(r:3)+e\,.\,(r:3)+f\,.\,(r:3)+ g\,.\,(r:4)+h\,.\,(r:3).$$

In loc de a inmulţì insă fiecare bază cu $^1/_3$ din raz, le putem pune la olaltă pe toate şi suma lor a o inmulţì cu $r:3$, aşa dară:

$$V.=(a+b+c+d+e+f+g+h)\,.\,(r:3).$$

Insă suma tuturor bazelor acestora nu este altceva decăt suprafaţa globului; deci:

II. *Cuprinsul cubic al globului il aflăm, dacă suprafaţa i- vom inmulţì-o cu razul, şi productul il vom lua a teia parte.* (V.$=$A$.(r:3)=\frac{p \times d \times r}{3}=\frac{2r\pi \times 2r \times r}{3}=\frac{4 \times r^3 \times \pi}{3}$

III. 1. Judecaţi, căţi cm^3 poate cuprinde globul nostru cest ce se poate desface in semigloburi! Să computăm! Mărimile le ştim de mai nainte: $d=10$ cm.; $r=5$; $p=31{\cdot}4$ cm. A.$=p \times d=31{\cdot}4 \times 10=314$ cm^2.

$$V.=\frac{A.\times r.}{3}=\frac{p \times d \times r}{r}=\frac{31{\cdot}4 \times 10 \times 5}{3}=523{\cdot}3\ cm^3.$$

2. Tot aşa se află cu scolarii şi volumul globului geografic (fiind $p = 60$ cm.; $d - 19\cdot108$ cm.; $r = 9\cdot55$ cm. $A. = 1145\cdot5$ cm^2).

$$V. = \frac{1145\cdot5 \times 9\cdot55}{3} = 3646\cdot308 \text{ cm}^3 = 3 \text{ dm}^3\ 646 \text{ cm}^3\ 308 \text{ mm}^3.$$

Tot asemene se privesc, judecă şi se mĕsură periferia şi diametrul şi apoi se calculează cuprinsul cubic a aceluia.

Adaos. Calcularea corpurilor neregulate.

Volumul corpurilor cu formă foarte neregulată se poate determina aşa, că punem corpul respectiv intr'un vas prismatic sau cilindric, al cărui cuprins il ştim; implem apoi vasul cu nĕsip sau apă; scoatem afară corpul şi aplanănd nĕsipul, computăm volumul acestuia din baza vasului şi inălţimea massei ajutătoare). In fine subtragĕnd volumul massei din volumul vasului implut (şi cu corpul respectiv): ajungem la volumul corpului de mĕsurat. Se inţelege dela sine, că massa ajutătoare trebue să acopere la inceput de tot corpul respectiv in vasul implut. D. e. Aci avem lădiţa aceasta, priviţi, judecaţi-i lungimea, lăţimea şi inălţimea din lontru! Să mĕsurăm ecstensiunile acestea! (Se face! — să fie lungimea 80 cm., lăţimea 50 cm. şi inălţimea 60 cm.) Acuma băgăm intrĕnsa piatra aceasta şi spaţul gol il umplem cu apă. — Scoatem earăş piatra şi aflăm că apa stă de 20 cm. de sus; căt de mare-'i volumul acestei pietri?

a) Lăduţa cuprinde	$80 \times 50 \times 60$ cm.
Prisma formată de apă	$80 \times 50 \times 20$ cm.
Subtras	$80 \times 50 \times (60 - 20) = 80 \times 50 \times 40 = 160000$ cm^3 = 160 dm^3 = $0\cdot16$ m^3.

Mai poate-se determina volumul a atari corpuri şi cu ajutorul greutăţii lor specifice; dar procedura schiţată acilea fiind mai simplă se prefereşte pentru scoala primarie.

§. 34. **Resumarea formulelor de mĕsurat.**

1. Paralelogramul $= b \times n$ ($b.$ = baza; $n.$ inălţimea).

2. Treiunghiul $= \frac{b. \times n.}{2}$

3. Trapezul $= \frac{P. + p.}{2} \times n.$ (P. = paralela mare; $p.$ = paralela mică).

4. Periferia cercului $= d. \times 3\cdot14$ ($d.$ = diametru; $r.$ = raz; $p.$ = periferia).

5. Arealul cercului $= \frac{p. \times r.}{2} = r.^2 \times 3 \cdot 14.$

6. Cubul $= l^3$; (l. = lature).

7. Prisma şi cilindru $= b. \times n.$

8. Piramida şi conul $= \frac{b. \times n.}{3}$

9. Piramida trunchiată $= \frac{B. + b.}{2} \times n.$ (B. = baza mare).

10. Conul trunchiat $= \frac{R. + r.}{2} \times \frac{R. + r.}{2} \times 3.14 \times n.$ (R. = razul bazei mai).

11. Suprafaţa globului $= 4^2 \times 3 \cdot 14$ ($d. \times p.$)

12. Volumul globnlui $= \frac{2r. \times 3 \cdot 14 \times 2r \times r}{2} = \frac{3^3 \times 3 \cdot 14}{3}$

Tabla de materii.

Cursul al doile.

Mĕsurarea fețelor și a corpurilor.

I. Mĕsurarea fețelor plane.

Adaos.

II. Mĕsurarea corpurilor.