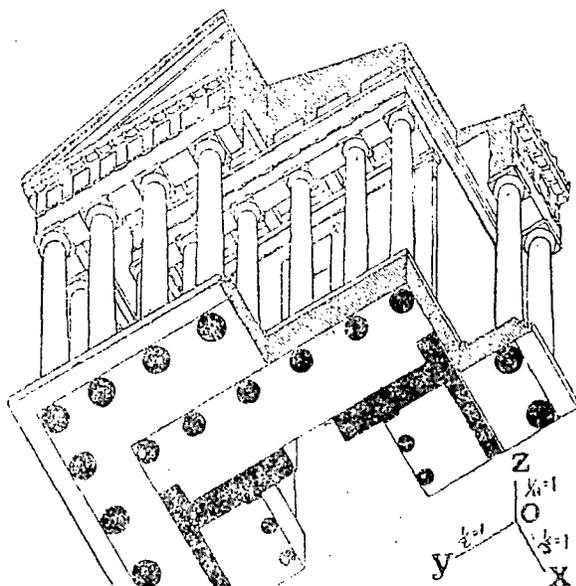


Н. А. РЫНИН.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

---

# АКСОНОМЕТРИЯ.



ПЕТРОГРАД.

Типо-литография Народного Комиссариата Путей Сообщения. Фонтанка, 117.

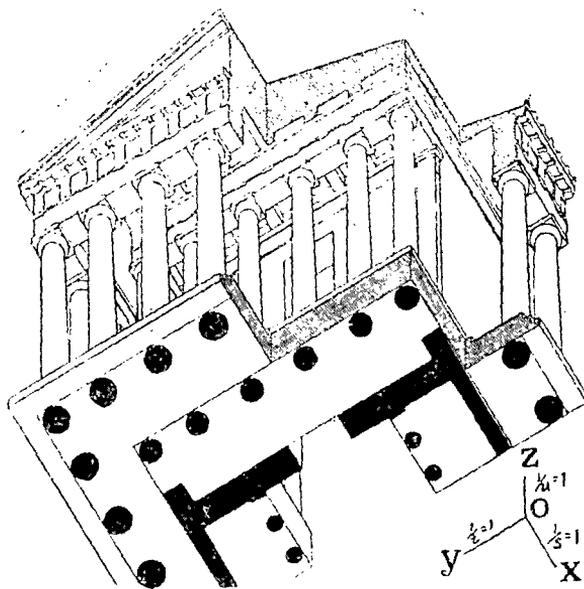
1922.

Н. А. РЫНИН.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

---

# АКСОНОМЕТРИЯ.



ПЕТРОГРАД.

Типо-литография Народного Комиссариата Путей Сообщения. Фонтанка, 117.

1922.

Р. Ц. № 2022, гор. Петроград.

Отпечатано в количестве 3.000 экз.

*Памяти*  
*незабвенного учителя,*

*профессора*

*Валериана Ивановича*

*КУРДЮМОВА*

*посвящает этот труд*  
*автор.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

Начиная с 1916 года мною был составлен и издан в печатном виде ряд сочинений по начертательной геометрии, причем в первом из них „Методы изображения“<sup>1)</sup> я изложил общее описание методов начертательной геометрии и показал связь их между собою и с проективной геометрией. В последующих же сочинениях: „Ортогональные проекции“<sup>2)</sup> и „Перспектива“<sup>3)</sup> я излагал отдельные методы начертательной геометрии применительно в программам технических учебных заведений и исходил из соображений, что читатель не знаком с основами проективной геометрии.

В настоящем сочинении я излагаю третий метод начертательной геометрии, именно „проекции аксонометрические“ или „аксонометрию“, кладя в основу только что упомянутые соображения.

Принимая же во внимание, что в технике аксонометрия применяется почти всецело для построения *наглядных изображений* предметов, а не для решения различных метрических задач, для каковой цели более пригодны другие виды проекций, я при изложении и имел в виду эту главную цель, отводя метрическим задачам второстепенное место.

Кроме того, при построении аксонометрических изображений и при решении различных задач, я, основываясь на теореме *Польке*<sup>4)</sup>, старался дать общие правила построений и решения задач, независимо от того, как получаются аксонометрические изображения — прямоугольным или косоугольным проектированием. Этот прием на мой взгляд значительно облегчает изучение аксонометрии и, на сколько мне известно, не встречался раньше в других сочинениях. Он назван мною *общим приемом решения аксонометрических задач*.

Так как главная цель применения аксонометрии в технике — научит быстро строить наглядные изображения различных предметов, то, имея это в виду, читатель при изучении этой книги, может ограничиться лишь чтением крупного шрифта, которым изложены приемы построения подобных изображений и некоторые элементы теории аксонометрии, пропуская мелкий, которым напечатаны подробности теории аксонометрии, решение метрических задач и некоторые второстепенные статьи. Читатель, желающий иметь материал для решения задач по

<sup>1)</sup> Н. А. Рынин. „Начертательная Геометрия. Методы изображения“. Петроград. 1916 г.

<sup>2)</sup> Его же. „Начертательная Геометрия“. „Ортогональные проекции“. 1-ое изд. Петроград. 1916 г., 2-ое издание. Пгр. 1918 г.

<sup>3)</sup> Его же. „Начертательная Геометрия“. „Перспектива“. Петроград. 1918 г.

<sup>4)</sup> См. дальше, стр. 13.

аксонометрии, может найти его в изданной мною книге „Сборник задач для упражнений и заданий для эapur по начертательной геометрии“. Пгр. 1916 года.

При составлении этой книги я пользовался многочисленными сочинениями по аксонометрии и вообще по начертательной геометрии. Подробный список этих сочинений приведен в § 4 книги. Главное же и первое сочинение, которое привело меня к мысли разрабатывать этот вопрос, было „Аксонометрия в прямоугольных и косоугольных проекциях“, составленное моим незабвенным, покойным ныне, учителем, профессором института инженеров путей сообщения Императора Александра I-го В. И. Курдюмовым, который сумел во многих своих учениках возбудить интерес и любовь к читавшемуся им предмету „Начертательная геометрия“.

Быв учеником В. И. Курдюмова а затем, по окончании курса наук в институте, и одним из его помощником в деле преподавания начертательной геометрии, я получил от него ряд указаний при изучении и преподавании этого предмета.

Так как В. И. Курдюмов напечатал на русском языке весьма ценный труд по аксонометрии, в который вложил не мало и своих оригинальных идей, и, кроме того, он с особенным вниманием и любовью относился к этому труду, служащему и по сие время прекрасным руководством по теории аксонометрии, то я и позволил себе посвятить памяти В. И. Курдюмова именно этот свой труд, представляющий развитие идей аксонометрии, в знак своего глубокого уважения и искренней признательности к своему бывшему учителю <sup>1)</sup>.

Петроград, 1 октября 1922 года.

---

<sup>1)</sup> Биография В. И. Курдюмова приведена на стр. 56.

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стран.
Посвящение . . . . .	III
Предисловие . . . . .	V
Оглавление . . . . .	VII

## Г Л А В А I.

### Теория аксонометрии.

§ 1. Схема аксонометрического проектирования . . . . .	1
§ 2. Показатели искажения и аксонометрические масштабы . . . . .	6
§ 3. Зависимость между элементами аксонометрического проектирования . . . . .	10
a) Косоугольные проекции . . . . .	10
b) Прямоугольные проекции . . . . .	19
c) Сводка правил аксонометрического проектирования . . . . .	33
§ 4. Исторический очерк развития аксонометрии . . . . .	44

## Г Л А В А II.

### Основные геометрические задачи.

§ 5. Построение аксонометрического изображения предмета по данным его ортогональным проекциям . . . . .	60
§ 6. Задачи на прямые линии . . . . .	66
§ 7. Задачи на плоскость . . . . .	70
§ 8. Задачи на прямую линию и плоскость . . . . .	73
§ 9. Задачи на многогранники . . . . .	77
§ 10. Задачи на кривые линии . . . . .	79
§ 11. Задачи на кривые поверхности . . . . .	83

## Г Л А В А III.

## Построение теней.

§ 12. Общие замечания . . . . .	89
§ 13. Тени многогранников . . . . .	90
§ 14. Тени кривых поверхностей . . . . .	92

## Г Л А В А IV.

## Примеры решения технических задач.

§ 15. Примеры решения технических задач . . . . .	96
Указатель имен . . . . .	110
Указатель предметов . . . . .	112
Замеченные опечатки . . . . .	114

---

# ГЛАВА I.

## Теория аксонометрии.

### § 1. Схема аксонометрического проектирования.

Представим себе в пространстве некоторое тело, например, кубик  $O_1 1_1 2_1 \dots 6_1 7_1$  (черт. 1). Зададимся случайною плоскостью  $K$  и некоторым направлением  $PP_1$ . Проведем теперь через ряд точек данного тела линии, параллельные направлению  $PP_1$ , до пересечения с плоскостью  $K$  и соединим между собою точки, полученные на  $K$  в том же порядке, в каком они соединены друг с другом в пространстве. Тогда мы получим *изображение*  $O_1 1_2 \dots 6_7$  кубика на плоскости  $K$ .

В каждом пространственном теле всегда можно наметить три взаимно перпендикулярных направления, параллельно которым располагаются три главнейших измерения тела: высота, ширина и толщина (глубина). При этом обыкновенно высота располагается вертикально, а ширина и толщина горизонтально.

На чертеже 1 показаны подобные три направления  $O_1 Z_1$ ,  $O_1 X_1$  и  $O_1 Y_1$ , параллельно которым измеряются высота, ширина и толщина кубика. Ось  $O_1 Z_1$  расположена вертикально, ось  $O_1 X_1$  — горизонтально, а ось  $O_1 Y_1$  — тоже горизонтально и перпендикулярно  $O_1 X_1$ . Подобные оси называются *осями координат*. Направления этих осей, располагаемые от точки  $O_1$  вправо, вперед и вверх, как это и показано на чертеже, считаются *положительными*, направления же в противоположные стороны от  $O_1$  считаются *отрицательными*. Каждая пара осей образует плоскость, называемую *координатною плоскостью*. Таковых плоскостей три:  $O_1 X_1 Z_1$  — вертикальная и обозначаемая буквою  $V$ ,  $O_1 Y_1 Z_1$  — вертикальная и обозначаемая буквою  $W$ , и  $O_1 X_1 Y_1$  — горизонтальная и обозначаемая буквою  $H$ . Очевидно, что эти три плоскости перпендикулярны друг к другу. Точка  $O_1$  их пересечения называется *началом координат*.

Положения всякой точки данного тела легко может быть определено, если известны расстояния ее от трех упомянутых плоскостей координат. Например, на чертеже 1 внутри кубика показана точка  $A_1$  и обозначены ее расстояния:  $y_1$  — до плоскости  $H$ ,  $x_1$  — до плоскости  $W$  и  $z_1$  — до плоскости  $V$ .

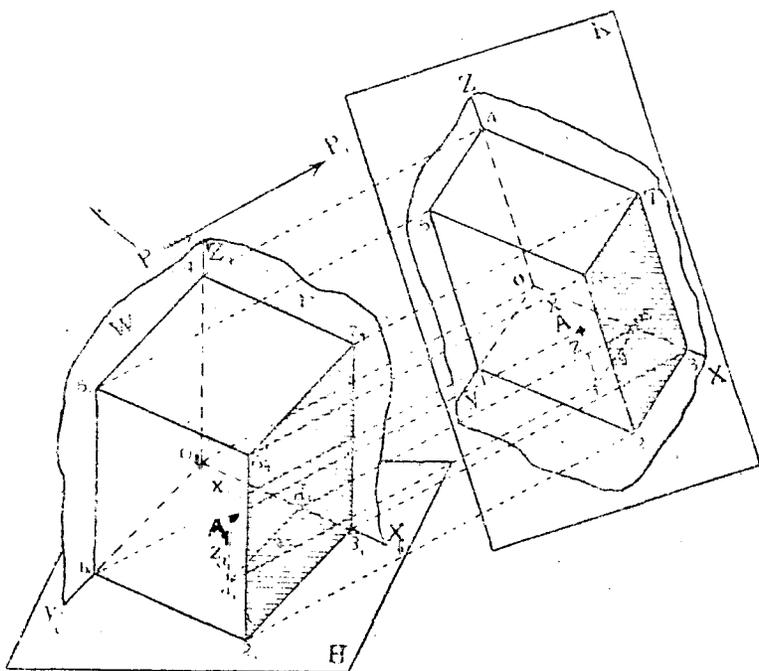
Расстояния  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  называются *координатами* точки.

Если эти расстояния измеряются вдоль положительных направлений осей координат, то они считаются положительными, если же вдоль отрицательных направлений, то — отрицательными.

На чертеже 1 координаты точки  $A_1$  все положительные.

Пользуясь данным направлением  $PP_1$ , построим изображения на плоскости  $K$  координатных осей, точки  $A_1$  и ее координат так же, как это мы делали при построении изображения вубика. Тогда мы получим изображения  $OZ$ ,  $OX$ ,  $OY$  и  $A$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для удобства дальнейшего изложения введем некоторые термины.

Тело  $O_11_12_1 \dots 6_17_1$  называется *изображаемым* или *проектируемым телом*.



Черт. 1.

Плоскость  $K$  называется *плоскостью аксонометрических проекций*.

Направление  $PP_1$  называется *направлением проектирования*.

Изображение  $O12 \dots 67$  называется *аксонометрической проекцией* или *аксонометрическим изображением* или *свободной (вольной) перспективой* тела  $O_11_12_1 \dots 6_17_1$ .

Оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  называются *осями аксонометрических координат* или *аксонометрическими осями*.

Расстояния  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются *аксонометрическими координатами* точки  $A$ .

Плоскости  $OXZ$ ,  $OYZ$ ,  $OXY$  называются *плоскостями аксонометрических координат*.

Точка  $O$  называется *началом аксонометрических координат*.

Точка  $A$  называется *аксонометрической проекцией* точки  $A_1$ .

Точка  $a$  называется аксонометрической проекцией точки  $a_1$  или вторичной горизонтальной проекцией точки  $A_1$  в отличие от горизонтальной (первичной) проекции  $a_1$ .

По аналогии с точкой  $a$  мы могли бы получить вторичную вертикальную и вторичную профильную проекции точки  $A_1$ .

Описанный способ построения изображения на плоскости  $K$  называется методом аксонометрических проекций или, просто, аксонометрией.

Заметим, что слово аксонометрия происходит от греческих слов— *ἄξον*-ось и *μέτρον*-мерю и в буквальном переводе обозначает „осемерие“. Как мы увидим в дальнейшем, изображения, построенные по такому способу на плоскости, позволяют непосредственно из чертежа измерять главные размеры предмета, параллельные осям координат. А это свойство, называемое *удобоизмеримостью*, является весьма ценным для чертежа.

Из чертежа 1-го не трудно заметить, что линии, параллельные между собою в пространстве, например,  $O_11_1$ ,  $3_12_2$ ,  $7_16_1$  и т. д., изобразятся на плоскости  $K$  также взаимно параллельными линиями ( $01 \parallel 32 \parallel 76$  и т. д.). Это свойство формулируется в виде следующей теоремы:

**Теорема 1-я.** Если линии в пространстве параллельны друг другу, то их аксонометрические проекции взаимно параллельны.

Поэтому на плоскости  $K$  и координата  $z$  точки  $A$  будет параллельна оси  $OZ$ , координата  $y$  будет параллельна оси  $OY$  и т. д.

Кроме того, в аксонометрии имеют место еще и следующие основные теоремы, относящиеся вообще к параллельным проекциям, и которые в виду их очевидности, мы приводим без доказательств.

**Теорема 2-я.** Если линии или углы лежат в плоскости, параллельной плоскости аксонометрических проекций, то они проектируются на последнюю, не искажаясь.

**Теорема 3.** Если линии в пространстве пересекаются, то и аксонометрические проекции их пересекаются, причем точка пересечения их проекций является проекцией точки пересечения самих линий в пространстве.

Например, на чертеже 1 линии  $5_16_1$  и  $6_17_1$  пересекаются в пространстве в точке  $6_1$ . Проекции этих линий  $56$  и  $67$  пересекаются в точке  $6$ , которая является проекцией точки  $6_1$ .

**Теорема 4-я.** Проекции отрезков одной и той же прямой или ей параллельных пропорциональны самим отрезкам.

**Теорема 5-я.** Если прямая касается кривой линии в какой-нибудь точке  $A_1$ , то проекция прямой будет касаться проекции кривой в точке  $A$ , являющейся проекцией точки  $A_1$ .

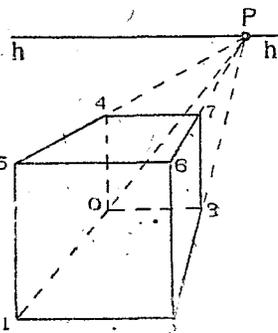
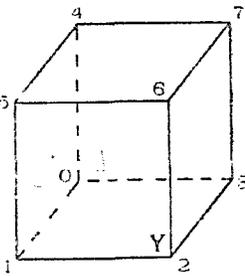
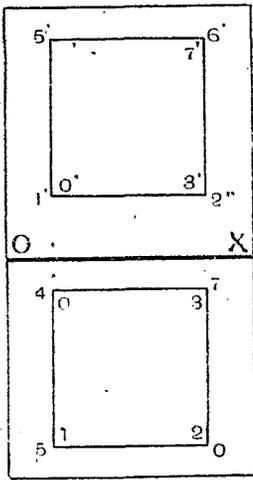
Если выбрать направление проектирования  $PP_1$  достаточно удачно, например, так, чтобы оно не было параллельным ни одному из главных измерений предмета, тогда аксонометрическая проекция предмета будет обладать *наглядностью изображения*, т. е. будет давать представление о характерных формах предмета.

Упомянутые два свойства аксонометрических изображений—удобоизмеримость их по трем главным осям и наглядность являются типичными для этих проекций.

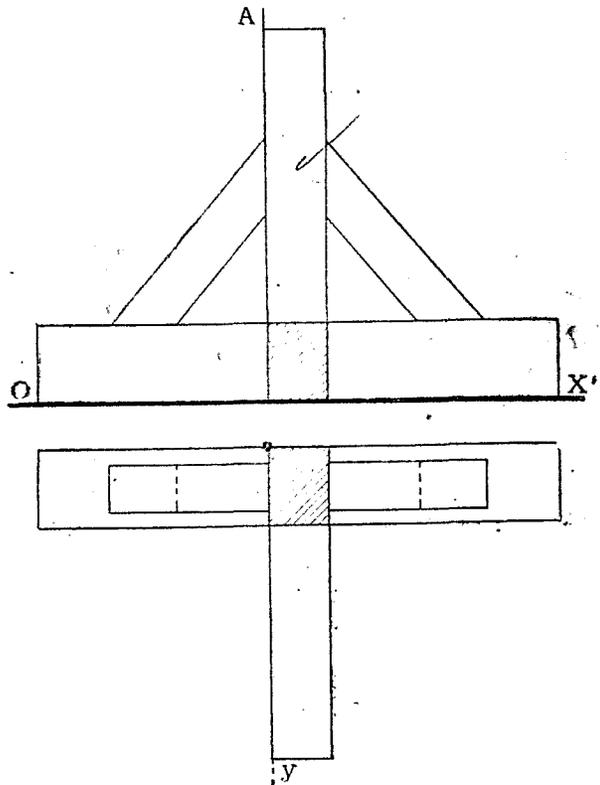
В этом отношении метод аксонометрических проекций занимает среднее положение между методом ортогональных проекций и перспективой.

Действительно, метод ортогональных проекций дает изображения весьма удобоизмеримые, но не наглядные. Перспектива же дает изображения весьма наглядные, но не удобоизмеримые.

Для сравнения на чертеже 2-м показаны изображения кубика, построенные при помощи трех упомянутых методов: вверху — в ортогональных проекциях, посередине — в аксонометрии, внизу — в перспективе.



Черт. 2.



Черт. 3.

Заметим еще, что в перспективе линии, удаляющиеся от зрителя и параллельные между собою в пространстве, изображаются сходящимися в некоторой точке (P).

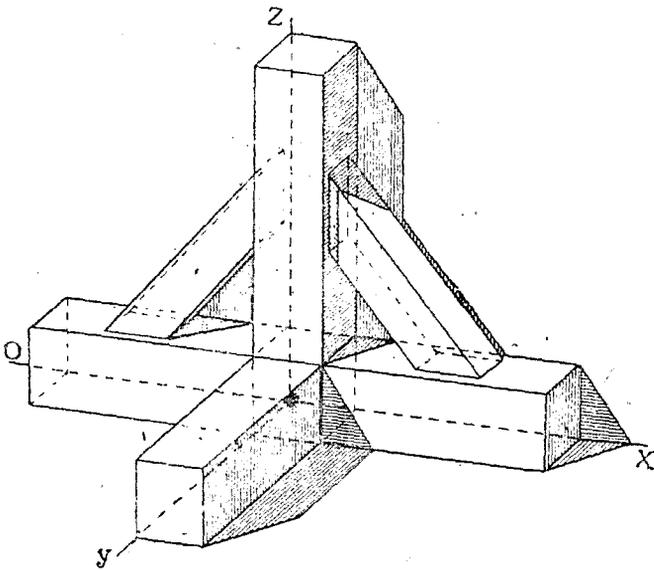
Между тем в аксонометрии подобные линии изображаются параллельными друг другу (01 || 23 || 67 || 54). Поэтому изображение будет казаться нашему глазу, привыкшему к перспективе, несколько неестественным. Линии 01, 23, 67, 54, являющиеся параллельными, кажутся расходящимися вдали.

Однако этот, сравнительно небольшой, недостаток аксонометрических изображений по сравнению с перспективным изображением является бледным фоном по сравнению с перспективой.

шей простотой и быстротой их построения и удобоизмеримостью, почему аксонометрия и имеет большое применение в технике.

Для сравнения на черт. 3 показано изображение опоры деревянной стойки в ортогональных проекциях, а на чертеже 4-м — в аксонометрии. Аксонометрический чертеж является более наглядным, нежели в ортогональных проекциях.

Главнейшая причина ненаглядности изображения в ортогональных проекциях заключается в том, что там *исчезают* главные измерения предмета, именно, в проекции на вертикальную плоскость — толщина, а в проекции на горизонтальную плоскость — высота.



Черт. 4.

Если читателю известен метод ортогональных проекций, то он может, пользуясь этим методом, построить аксонометрическое изображение любого предмета. Для этого необходимо иметь заданными в ортогональных проекциях: 1) предмет, 2) направление проектирования и 3) плоскость аксонометрических проекций  $K$ .

Ход построений будет такой: 1) проводим через ряд характерных точек предмета линии, параллельные данному направлению проектирования, 2) находим точки пересечения этих линий с плоскостью  $K$  и соединим их между собою в том же порядке, в каком они соединены в предмете и 3) совмещаем плоскость  $K$  с какою-нибудь плоскостью проекций. Полученная фигура и будет искомой.

На чертеже 5-м показаны подобные построения в пространстве, причем для простоты плоскость  $K$  принята совпадающей с  $V$ . Изобразим кубик  $O_1 1_1 2_1 \dots 6_1 7_1$ , его ортогональные проекции  $O1 \dots 67$  и  $O'1' \dots 6'7'$ . Кубик спроектирован наклонно на плоскость  $V$  и показано его аксонометрическое изображение  $O12 \dots 67$ . Проектирующие линии, подобные  $O_1O$ ,  $1_1I$  и т. д. спроектированы в свою очередь на  $H$  и  $V$ , и показаны построения, при помощи которых получают точки аксонометрического изображения. Например, для получения точки  $1$ , продолжим горизонтальную проекцию  $1a$  проектирующей линии до пересечения с осью  $OX$  в точке  $a$ , в полученной точке  $a$  проводим перпендикуляр к  $OX$  до пересечения с

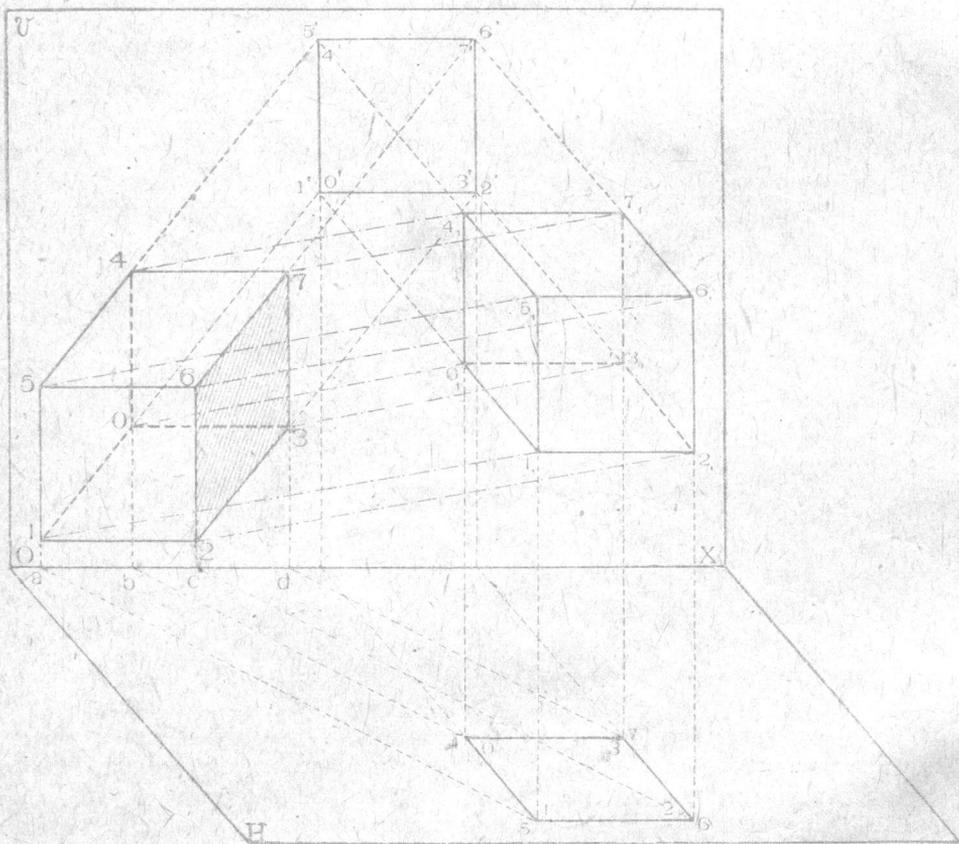
вертикальной проекцией  $1'1'$  той же линии в точке  $1$ , которая и будет принадлежать искомому изображению.

На черт. 6 те же построения изображены уже не в пространстве, а в ортогональных проекциях.

## § 2. Показатели искажения и аксонометрические масштабы.

Обратимся снова к чертежу 1-му.

В зависимости от взаимного расположения плоскости аксонометрических проекций  $K$ , направления проектирования  $PP_1$  и осей координат



Черт. 5.

нат  $O_1X_1$ ,  $O_1Y_1$ ,  $O_1Z_1$  в пространстве, линии, параллельные этим осям, например, главные размеры кубика, или координаты точки  $A$ , будут проектироваться на  $K$  или больше или меньше своей натуральной величины или, в частном случае, в натуральную величину.

Из чертежа 1-го не трудно заметить, что имеют место равенства следующих соотношений, которые мы обозначим некоторыми дробями:

$$\frac{O_1O_3}{O_1O_1} = \frac{O_1a^2}{O_1a_1^2} = \frac{x}{x_1} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{O_1O_1}{O_1O_1} = \frac{a^2 a}{a_1^2 a_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{O_1O_4}{O_1O_4} = \frac{aA}{a_1A_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{1}{u}$$

Величины  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{t}$ ,  $\frac{1}{u}$  называются *показателями искажения координат*, так как они показывают, как искажаются в проекциях линии, параллельные осям координат, или, вообще, координаты какой-нибудь точки  $A$ .

Так как аксонометрические изображения уподобляются перспективным, а в перспективе мы привыкли видеть линии, уходящие от зрителя вдаль, меньше своей натуральной величины, то и показатели искажения поэтому приравниваются некоторым правильным дробям. В частности они могут быть равными и единице.

Если на чертеже, где изображен предмет в аксонометрических проекциях, даны еще и аксонометрические оси, и у каждой из них надписан соответствующий ей показатель искажения, то мы можем определить, во сколько раз какой-нибудь главный размер предмета больше соответствующего ему изображенного на чертеже.

Например, на чертеже 7, изображена в аксонометрии призма  $abc... gh$  и показаны аксонометрические оси с соответствующими показателями искажения:

$$\frac{1}{s} = 0,8; \frac{1}{t} = 0,6 \text{ и } \frac{1}{u} = 1.$$

По этим данным не трудно определить, что истинная ширина призмы в пространстве равна:

$$AD = ad : \frac{1}{s} = ad : 0,8.$$

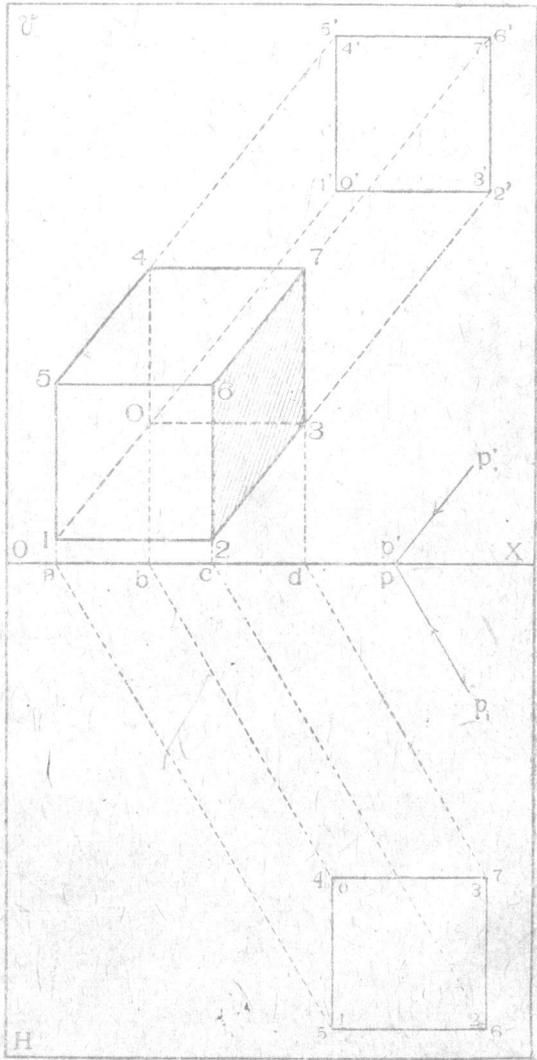
Толщина призмы равна:

$$AB = ab : \frac{1}{t} = ab : 0,6.$$

Высота призмы равна:

$$AE = ae : \frac{1}{u} = ae : 1 = ae.$$

Наконец, если известно, во сколько раз проектируемая в пространстве модель предмета больше или меньше самого предмета, то изображение и измерения его главнейших размеров приобретают полную определенность.

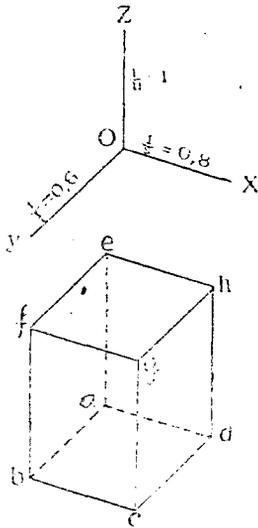


Черт. 6.

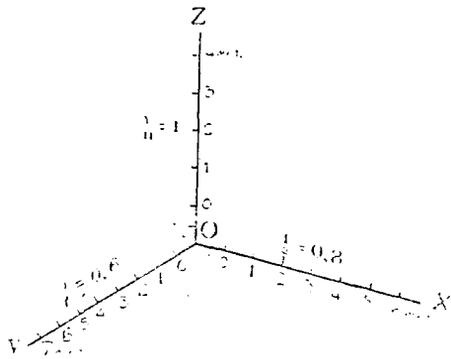
Пусть, например, отношение самой призмы в пространстве к проектируемой ее модели равно 200, т. е. модель исполнена в  $\frac{1}{200}$  натуральной величины.

Тогда каждый метр, измеряемый на самом предмете вдоль оси  $O_1Z_1$  изобразится в аксонометрическом изображении призмы при показателе искажения  $\frac{1}{n} = 1$  в  $\frac{1 \text{ метр}}{200} \times \frac{1}{n} = 0,5$  сантиметра. Каждый метр, измеряемый на самом предмете вдоль оси  $O_1Y_1$ , изобразится в аксонометрии при показателе искажения  $\frac{1}{t} = 0,6$

$$\text{в } \frac{1 \text{ метр}}{200} \times \frac{1}{t} = \frac{1 \text{ метр}}{200} \cdot 0,6 = 0,3 \text{ сант.}$$



Черт. 7.



Черт. 8.

Наконец, каждый метр, измеряемый на самом предмете вдоль оси  $O_1X_1$ , изобразится в аксонометрии при показателе искажения  $\frac{1}{s} = 0,8$

$$\text{в } \frac{1 \text{ метр}}{200} \times \frac{1}{s} = \frac{1 \text{ метр}}{200} \cdot 0,8 = 0,4 \text{ сант.}$$

При таких условиях схема аксонометрических осей изобразится по чертежу 8-му, на котором, кроме обозначения показателей искажения, намечены деления на осях и показаны измерения.

Для оси  $Z$ -ов каждый метр в натуре соответствует 0,5 сантиметра вдоль осн. Для оси  $Y$ -ов каждый метр в натуре соответствует 0,3 сант. вдоль осн. Для оси  $X$ -ов каждый метр в натуре соответствует 0,4 сант. вдоль осн.

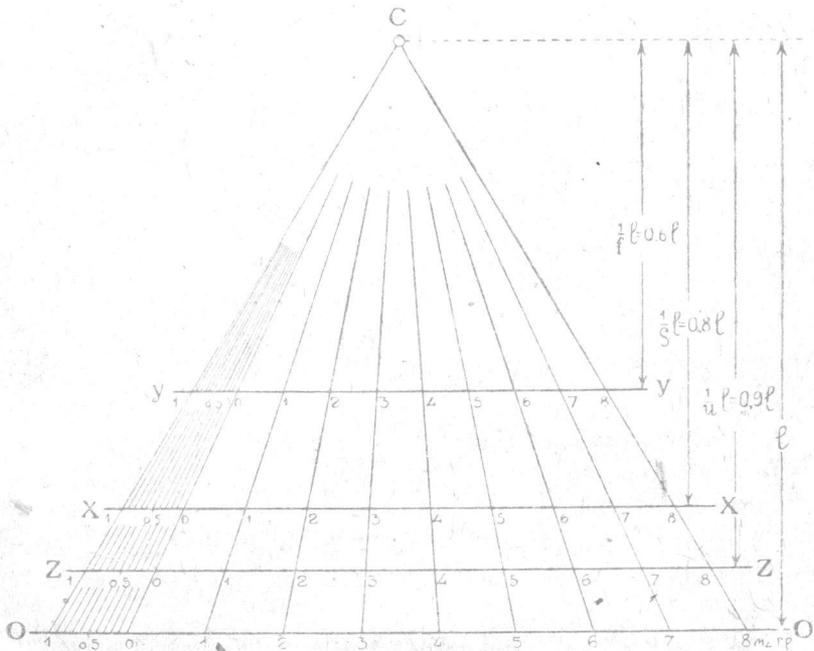
Заметим, что для удобства измерений нулевые точки из трех масштабов помещены не в начале координат, а от деление, и это последнее на каждой из осей разбито на части (на десять частей). Таким образом получается измерять длины изображения, параллельные осям, с точностью долей метра.

При более мелких делениях возможно достичь еще большей точности.

Приведенная на чертеже 8-м система аксонометрических осей с соответствующими тремя масштабами называется *аксонометрическим масштабом*.

Если принять этот масштаб для изображения призмы по чертежу 7-му, то получим следующие истинные размеры самой призмы в пространстве:

высота  $AE = 4,1$  метра,  
 ширина  $AD = 3,8$  метра,  
 толщина  $AB = 4,6$  метра.



Черт. 9.

Иногда, при построении аксонометрического изображения предмета принимают другой вид аксонометрического масштаба, показанный на чертеже 9-м.

Проведем горизонтальную линию  $OO$  и выберем над нею посредине точку  $C$  в случайном расстоянии  $l$  сантим. от  $OO$ .

Далее проведем линии  $XX_1$ ,  $YY_1$ ,  $ZZ_1$ , параллельные  $OO$  и в расстояниях от  $C$  соответственно равных  $\frac{1}{8} l$ ,  $\frac{1}{6} l$  и  $\frac{1}{4} l$  (на чертеже для примера взяты:  $\frac{1}{8} = 0,6$ ;  $\frac{1}{6} = 0,8$  и  $\frac{1}{4} = 0,9$ ).

По линии  $OO$  построен масштаб, соответствующий показателю искажения, равному единице. Точки деления этого масштаба соединены с точкою  $C$  рядом лучей. Эти последние в пересечении с линиями  $XX$ ,  $YY$  и  $ZZ$  дадут соответственные масштабы для направлений, параллельным аксонометрическим осям  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ .

Например, если бы масштаб чертежа 9-го соответствовал изображению призмы по чертежу 7-му (при  $\frac{1}{u} = 1$ ;  $\frac{1}{t} = 0,6$  и  $\frac{1}{s} = 0,8$ ), то типичные размеры призмы были бы следующими:

высота  $AE = 2$  метра (измеряется по линии  $OO$ ),  
 ширина  $AD = 1,9$  метра (измеряется по линии  $XX$ ),  
 толщина  $AB = 2,4$  метра (измеряется по линии  $YY$ ).

Аксонометрический масштаб по черт. 9-му представляет то преимущество по сравнению с первым (черт. 8), что при помощи его легко получать масштаб для любых направлений аксонометрических осей и для любых показателей искажения.

Для этого следует лишь засечь пучек его лучей линией, параллельной  $OO$  и удаленной от точки  $C$  в расстоянии, соответствующем принятому показателю искажения. Пользоваться масштабом по типу чертежа 9-го удобно тогда, когда приходится иметь дело с несколькими аксонометрическими изображениями при разных углах между осями и при разных показателях искажения.

Заметим, что, в зависимости от расположения плоскости проекций  $K$  относительно координатных осей и в зависимости от направления проектирования, показатели искажения:

1) могут быть или все равными друг другу; тогда проекции называются *изометрическими* ( $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} = \frac{1}{u}$ );

2) или два из них могут быть равны друг другу (например,  $\frac{1}{s} = \frac{1}{t}$  или  $\frac{1}{s} = \frac{1}{u}$ ; или  $\frac{1}{t} = \frac{1}{u}$ ). Тогда проекции называются *двуметрическими* (монодиметрическими);

3) или все три могут быть разными. Тогда проекции называются *триметрическими* (анизометрическими).

### § 3. Зависимость между элементами аксонометрического проектирования.

Обращаясь к чертежу 1-му, мы видим, что направление проектирования  $PP_1$  может относительно плоскости проекций  $K$  располагаться либо под острым углом, либо под прямым. В первом случае проекции называются *косоугольными*, а во втором — *прямоугольными*.

Рассмотрим сначала некоторые свойства косоугольных проекций, которые являются более общими, нежели прямоугольные.

#### а) Косоугольные проекции.

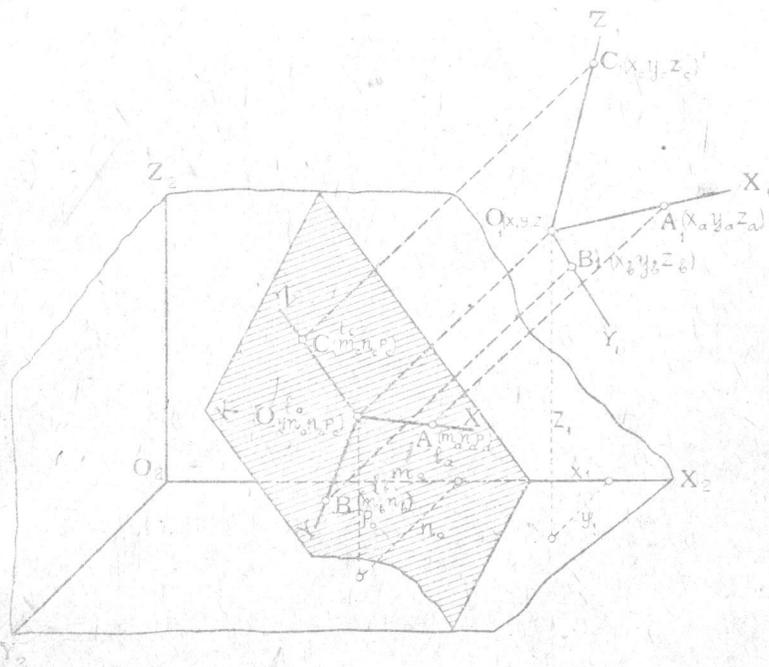
Основной теоремой косоугольных аксонометрических проекций является следующая:

**Теорема 6-я.** Три произвольные прямые на плоскости чертежа, пересекающиеся в одной точке, могут быть приняты за аксонометрические проекции данных прямоугольных координатных осей в пространстве, а три произвольные вещечные числа  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — могут быть приняты показателями искажения.

На черт. 10 изображены: случайно расположенная в пространстве система прямоугольных координатных осей  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ , которая спроектирована на плоскость аксонометрических проекций  $K$  в систему  $OXYZ$ .

*Доказательство.* Итак, пусть даны: плоскость проекций  $K$  с имеющимися в ней осями  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ , и кроме того даны три соответствующие этим осям показатели искажения  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Предположим, что мы нашли в пространстве систему прямоугольных координатных осей  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ , удовлетворяющих поставленному условию.

Выберем на осях  $OXYZ$  три точки:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и пусть они являются проекциями соответствующих точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на осях  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ .



Черт. 10.

Отнесем все элементы к некоторой, неподвижной системе прямоугольных координатных осей  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ , и обозначим координаты упомянутых точек относительно системы  $O_2 X_2 Y_2 Z_2$  следующими буквами:

Точки . . . . .	$O$	$A$	$B$	$C$
Координаты . . .	$l_0 m_0 n_0$	$l_a m_a n_a$	$l_b m_b n_b$	$l_c m_c n_c$
Точки . . . . .	$O_1$	$A_1$	$B_1$	$C_1$
Координаты . . .	$x_1 y_1 z_1$	$x_a y_a z_a$	$x_b y_b z_b$	$x_c y_c z_c$

Из них координаты точек  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются данными, а координаты точек  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ —искомыми.

Если мы сумеем определить эти последние, то мы и найдем в пространстве положение искомых осей.

Для этого необходимо определить двенадцать координат точек  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ .

Однако, число этих неизвестных можно свести к девяти если мы перенесем начало  $O_2$  в точку  $O$ , от чего постановка задачи не меняется.

При таких условиях для  $C$  — девяти неизвестных:  $x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c$  необх. пять девяти уравнений.

Воспользуемся для этого данными аналитической геометрии в пространстве.

Условие параллельности прямых  $AA_1, BB_1, CC_1$  дает четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (l_a - x_a) : (l_b - x_b) : (l_c - x_c) &= \\ = (m_a - y_a) : (m_b - y_b) : (m_c - y_c) &= \\ = (n_a - z_a) : (n_b - z_b) : (n_c - z_c) & \end{aligned} \right\} \dots \dots (a)$$

Взаимная перпендикулярность прямых:  $O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1$  (предполагая точку  $O_1$  перенесенной в  $O$ ), дает еще три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (l_0 - x_a)(l_0 - x_b) + (m_0 - y_a)(m_0 - y_b) + (n_0 - z_a)(n_0 - z_b) &= 0 \\ (l_0 - x_b)(l_0 - x_c) + (m_0 - y_b)(m_0 - y_c) + (n_0 - z_b)(n_0 - z_c) &= 0 \\ (l_0 - x_c)(l_0 - x_a) + (m_0 - y_c)(m_0 - y_a) + (n_0 - z_c)(n_0 - z_a) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

Наконец, задание показателей искажения дает еще два уравнения:

$$\frac{OA}{O_1A_1} : \frac{OB}{O_1B_1} : \frac{OC}{O_1C_1} = p : q : r \text{ или, } \dots \dots (c')$$

выражая отрезки прямых при помощи координат концов их, получим:

$$\frac{\sqrt{(l_a - l_0)^2 + (m_a - m_0)^2 + (n_a - n_0)^2}}{\sqrt{(x_a - l_0)^2 + (y_a - m_0)^2 + (z_a - n_0)^2}} : \frac{\sqrt{(l_b - l_0)^2 + (m_b - m_0)^2 + (n_b - n_0)^2}}{\sqrt{(x_b - l_0)^2 + (y_b - m_0)^2 + (z_b - n_0)^2}} : \frac{\sqrt{(l_c - l_0)^2 + (m_c - m_0)^2 + (n_c - n_0)^2}}{\sqrt{(x_c - l_0)^2 + (y_c - m_0)^2 + (z_c - n_0)^2}} = p : q : r \dots \dots (c)$$

Из девяти уравнений (a), (b), (c) можно определить девять неизвестных координат точек  $A_1, B_1, C_1$ . Направление же проектирования определяется, например, при помощи уравнения для линии  $AA_1$ :

$$\frac{x - x_a}{l_a - x_a} = \frac{y - y_a}{m_a - y_a} = \frac{z - z_a}{n_a - z_a} \dots \dots (d)$$

Обращаясь к чертежу 1-му мы, на основании теоремы 6-й можем сказать, что аксонометрическому изображению  $OXYZ$  осей на плоскости  $K$  соответствует бесчисленное множество осей координат  $O_1X_1, Y_1, Z_1$  в пространстве, причем все эти оси соответственно параллельны друг другу, а начала их располагаются по линии  $OO_1$ , определяемой по уравнению (d).

Зададимся каким-нибудь положением проектируемой системы  $O_1X_1, Y_1, Z_1$ . Тогда аксонометрическая и вторичная проекции какой-нибудь точки, например,  $A$  и  $a$  вполне определяют положение самой изображаемой точки  $A_1$  относительно системы  $O_1X_1, Y_1, Z_1$ .

Действительно, проводим  $aa_1 \parallel OO_1$  до пересечения с  $O_1X_1, Y_1$  в точке  $a_1$ . Из  $a_1$  проводим  $a_1A_1 \parallel O_1Z_1$  до пересечения с  $AA_1 \parallel OO_1$  в точке  $A_1$ , которая и будет искомой.

Так как подобные рассуждения будут иметь место для любой точки, то отсюда вытекает следующая теорема.

**Теорема 7.** Аксонометрические проекции (основная и вторичная) тела определяют форму и положение тела в пространстве относительно системы координат.

При этом должны быть заданы аксонометрические оси и показатели искажений.

В уравнениях (с') мы можем задать величины  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  так, чтобы они относились друг другу, как  $p : q : r$ .

Тогда получим, что

$$O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1.$$

Эти равенства выражают *следующую теорему*, названную по имени ученого, предложившего ее, теоремой Польке<sup>1)</sup>:

**Теорема 8.** Три прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной точке под произвольными углами можно рассматривать, как параллельную проекцию трех равных по длине отрезков, образующих в пространстве систему прямоугольных координатных осей.

При этом необходимо соблюдать, чтобы не более как две из прямых совпадали по направлению (черт. 11,с) и не более как одна из них обращалась бы в точку (черт. 11,д).

Последние замечания вытекают из следующих соображений (черт. 10).

Если все три оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  в плоскости  $K$  сольются в одну прямую (черт. 11,а), то это покажет, что все проектирующие линии  $OO_1$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , располагаются в одной плоскости, т. е. все точки  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат в одной плоскости, что противоречит поставленному условию — взаимной перпендикулярности прямых  $O_1X_1$ ,  $O_1Y_1$ ,  $O_1Z_1$ .

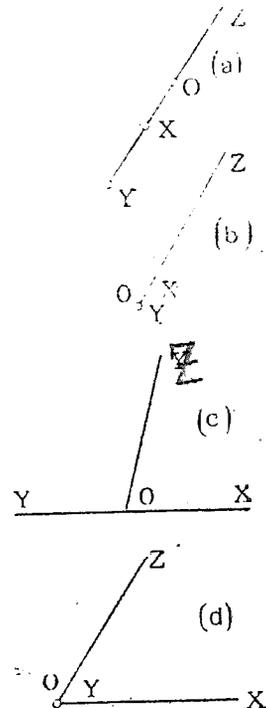
Равным образом задача будет невозможна, если два из показателей искажения будут равны нулю, например,  $p = q = 0$ , что соответствует черт. 11,б.

Если направление проектирования совпадает с одной из плоскостей проекций, например, с  $O_1X_1Y_1$ , то на  $K$  соответствующие оси  $O_1X_1$  и  $O_1Y_1$  спроектируются в одну прямую  $YOX$  (черт. 11,с).

Наконец, если направление проектирования совпадет с направлением одной из осей, например, с  $O_1Y_1$ , то эта ось на  $K$  спроектируется в точку  $OY$  (черт. 11,д).

Определим теперь зависимость между показателями искажения  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и углом ( $\sigma$ ), составляемым направлением проектирования с плоскостью аксонометрических проекций.

Эту зависимость можно определить и при помощи формул (а), (б) (с). Однако, проще ее определить при помощи несложных тригонометрических формул.



Черт. 11.

<sup>1)</sup> Впервые доказательство этой теоремы было дано Польке в 1853 г. (Journ. f. reine und angew. Math. B. 63).

Литературу по этому вопросу см. также:

Pohlke „Darstellende Geometrie“. Berlin. 1860.

H. A. Schwarz „Crelleschen Journal“. Bd. 63, Anno 1863.

F. Schilling „Zestschrift für Math. u. Physik“. 1903. Bd. 48. st. 487—494.

Ch. Wiener „Lehrbuch der Darst. Geom“. Leipzig. 1884. Bd. I. st. 448.

G. Loria „Vorlesungen über Darst. Geom“. Leipzig. 1907. st. 190.

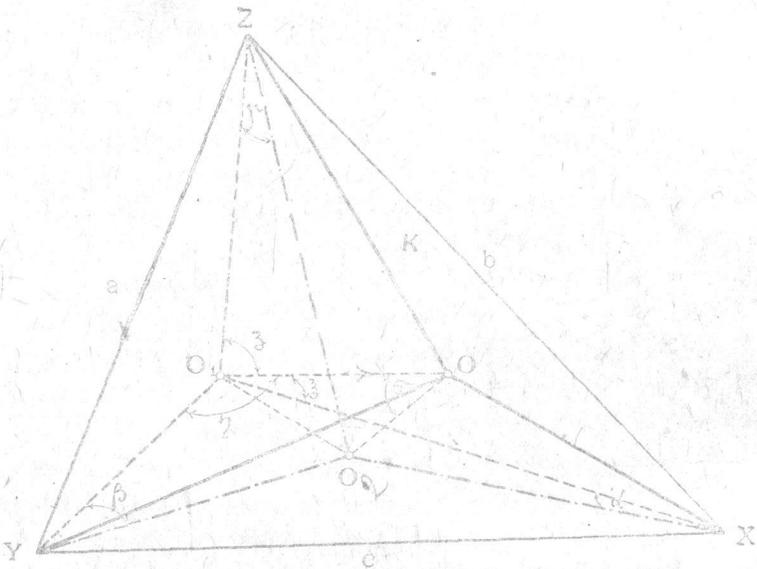
На черт. 12 изображены: координатные оси в пространстве  $O_1XYZ$ , плоскость аксонометрических проекций  $XYZ$ . Выбрано случайное направление проектирования  $O_1O$  под углом  $\sigma$  к  $XYZ$ , и оси  $O_1XYZ$  спроектированы на плоскость  $XYZ$  в линии  $OXYZ$ .

Обозначим показатели искажения через  $\frac{1}{s}, \frac{1}{t}, \frac{1}{u}$ .

Тогда очевидно:

$$\frac{OX}{O_1X} = \frac{1}{s}; \quad \frac{OY}{O_1Y} = \frac{1}{t}; \quad \frac{OZ}{O_1Z} = \frac{1}{u}.$$

Проведем теперь через  $O_1$  перпендикуляр к плоскости  $XYZ$  до пересечения с последней в точке  $O_2$ . Тогда, очевидно, угол  $O_1OO_2$  будет равен  $\sigma$ .



Черт. 12.

Обозначим углы между осями  $O_1XYZ$  и плоскостью  $XYZ$  через  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

Наконец, обозначим углы между осями  $O_1XYZ$  и направлением проектирования  $O_1O$  через  $\xi, \eta$  и  $\zeta$ .

Из треугольников  $OO_1X$  и  $O_1O_2X$ —имеем:

$$O_1O = O_1X \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \sigma} \dots \dots \dots (1)$$

Из  $\triangle$ -ка же  $OO_1X$  имеем:

$$OX^2 = O_1X^2 + OO_1^2 - 2 O_1X \cdot OO_1 \cos \xi \dots \dots \dots (2)$$

Подставляя вместо  $OO_1$  его выражение через  $O_1X$ , получим:

$$OX^2 = O_1X^2 + O_1X^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \sigma} - 2 O_1X^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \sigma} \cdot \cos \xi \dots \dots (3)$$

откуда получаем:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 = \left(\frac{OX}{O_1X}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \sigma} - 2 \cos \xi \frac{\sin \alpha}{\sin \sigma} \dots \dots (4)$$

Подобным же образом получим:

$$\left(\frac{1}{t}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \sigma} - 2 \cos \eta \frac{\sin \beta}{\sin \sigma} \dots \dots \dots (4)$$

и

$$\left(\frac{1}{u}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \sigma} - 2 \cos \xi \frac{\sin \gamma}{\sin \sigma} \dots \dots \dots (4)$$

Складывая равенства (4), получим:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 3 + \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{\sin^2 \sigma} - 2 \frac{\cos \xi \sin \alpha + \cos \eta \sin \beta + \cos \zeta \sin \gamma}{\sin \sigma} \dots \dots \dots (5)$$

Так как:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \cos^2 (90^\circ - \alpha) + \cos^2 (90^\circ - \beta) + \cos^2 (90^\circ - \gamma) = 1,$$

и кроме того:

$$\cos \xi \sin \alpha + \cos \eta \sin \beta + \cos \zeta \sin \gamma = \cos \xi \cos (90^\circ - \alpha) + \cos \eta \cos (90^\circ - \beta) + \cos \zeta \cos (90^\circ - \gamma) = \cos (90^\circ - \sigma) = \sin \sigma,$$

то формула (5) преобразуется в следующую:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 3 + \frac{1}{\sin^2 \sigma} - 2 \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma}$$

или, окончательно:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 2 + \cotg^2 \sigma \dots \dots \dots (6).$$

Это условие доказывает следующую теорему:

**Теорема 9.** В косоугольных аксонометрических проекциях сумма квадратов показателей искажения равна  $2 + \cotg^2 \sigma$ , где  $\sigma$  — есть угол между направлением проектирования и плоскостью аксонометрических проекций.

Обращаясь к чертежу 12 и принимая во внимание обозначение разных длин линий на нем получаем:

$$a^2 = m^2 + n^2; \quad b^2 = n^2 + l^2; \quad c^2 = l^2 + m^2,$$

откуда следует, что:

$$b^2 + c^2 > a^2; \quad c^2 + a^2 > b^2; \quad a^2 + b^2 > c^2 \dots \dots \dots (7).$$

А это приводит к теореме:

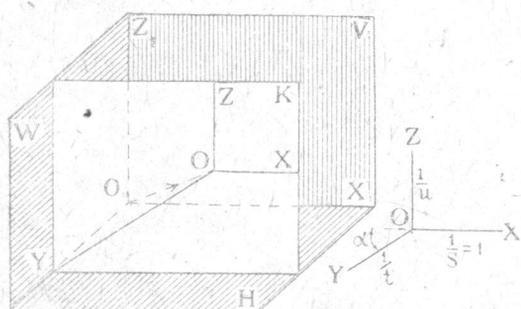
**Теорема 10.** Треугольник следов плоскости аксонометрических проекций на координатных плоскостях является остроугольным.

На стр. 13 (черт. 11) мы рассмотрели частные случаи, когда направление проектирования совпадает с какой-нибудь плоскостью проекций. В первом случае одна из координатных плоскостей исчезает в своей проекции, проектируясь в прямую линию, во втором же случае одна из осей исчезает в проекции, проектируясь в точку; при этом исчезают в проекции две координатных плоскости.

В обоих случаях в проекции исчезают линии предмета, параллельные его главным измерениям; изображения получаются не наглядными и потому они на практике не применяются.

Рассмотрим теперь частные случаи расположения плоскости проекций  $K$  относительно координатных плоскостей.

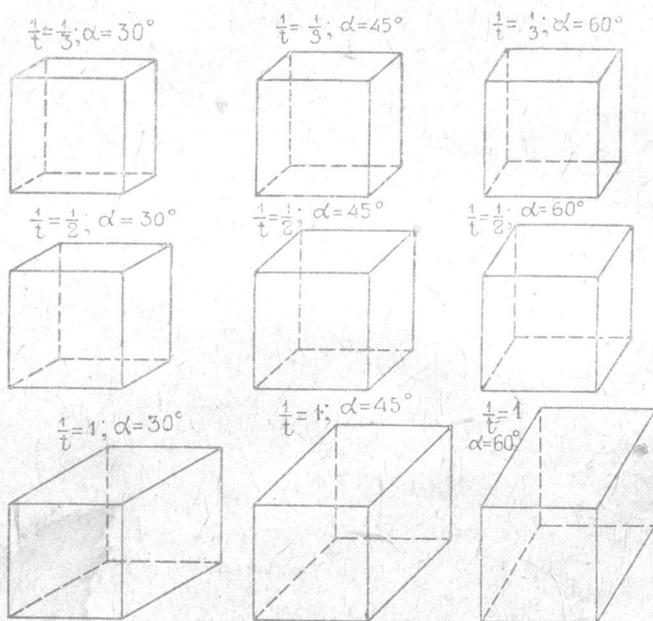
На черт. 13 изображен случай, когда  $K$  параллельна одной из плоскостей проекций ( $K \parallel V$ ). В этом случае два показателя искажения будут одинаковыми и равными единице ( $\frac{1}{s'} = \frac{1}{u} = 1$ ; проекция диметрическая).



Черт. 13.

Всякая фигура в пространстве, параллельная  $V$ , спроектируется на  $K$  без искажения.

На черт. 13 справа показано отдельно изображение аксонометрических осей.



Черт. 14.

В зависимости от угла ( $\alpha$ ) между осью  $OY$  и осью  $OX$  и от величины показателя искажения  $\frac{1}{t}$  изображения получатся более или менее красивые.

На черт. 14, для сравнения, показаны изображения кубиков в этой проекции для углов  $\alpha$  равных  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$  и для показателей

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \text{ и } 1.$$

(Если  $\frac{1}{t} = 1$ , то проекции будут изометрическими).

Если заданы аксонометрические оси и дан показатель искажения  $\frac{1}{t}$  для оси  $OY$ , то не трудно определить направление проектирования в пространстве. Для этого достаточно знать углы, составляемые проекциями этого направления на  $H$  и  $V$  с осью  $OX$ .

На черт. 15 даны: плоскость аксонометрических проекций  $K \parallel V$ , направление проектирования  $O_1O$ , и построены оси  $OXYZ$ .

Очевидно, показатель искажения равен:

$$\frac{1}{t} = \frac{OY}{O_1Y}$$

Построим проекции линии  $O_1O$  на  $V (O_1o')$  и на  $H (O_1o)$  и обозначим углы между этими проекциями и осью  $O_1X_1$  соответственно через  $\alpha$  и  $\beta$ .

Не трудно заметить, что:

$$\alpha = \angle OY_o = \angle Y_oOa,$$

т. е. угол  $\alpha$  равен углу между осью  $OY$  и продолжением оси  $OX$ .

Угол же  $\beta$  определяется следующим образом: из  $\triangle$ -ка  $O_1oo_0$  видим, что этот угол является острым углом прямоугольного  $\triangle$ -ка, у которого один катет

$$O_1o_0 = Y_o = Oa,$$

а другой

$$oo_0 = O_1Y = OY : \frac{1}{t}.$$

Зная длину  $Oa$ , показателя  $\frac{1}{t}$  и длину  $OY$ , легко построить  $\beta$ , что и выполнено на чертеже, где угол  $\beta$  определен из  $\triangle$ -ка  $aOb$ . В нем

$$Oa = O_1o_0; Ob = OY : \frac{1}{t},$$

и угол  $aOb$  — прямой.

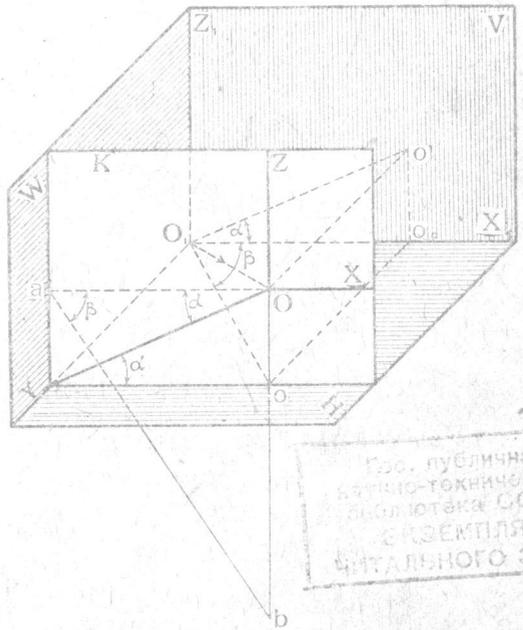
На чертеже 16 те же построения по определению углов  $\alpha$  и  $\beta$  выполнены отдельно.

Даны аксонометрические оси  $OXYZ$ .

Угол  $\alpha$  равен углу  $aOY$ .

Для построения угла  $\beta$  задаемся точкой  $Y$ , проводим  $Ya \perp OX$ , откладываем  $Ob = OY : \frac{1}{t}$  и соединим  $a$  с  $b$ . Угол  $Oab$  и равен  $\beta$ .

На правом чертеже направление проектирования построено в ортогональных проекциях.



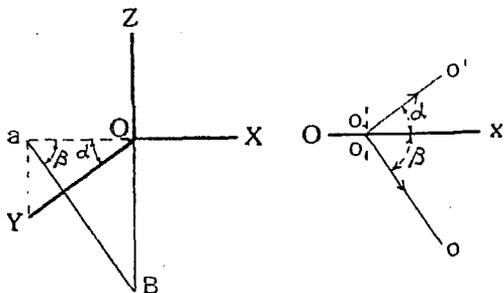
Черт. 15.

Библ. публичная  
техническая  
библиотека СССР  
ЭКЗЕМПЛЯР  
ЧИТАТЕЛЬНОГО ЗАЛА

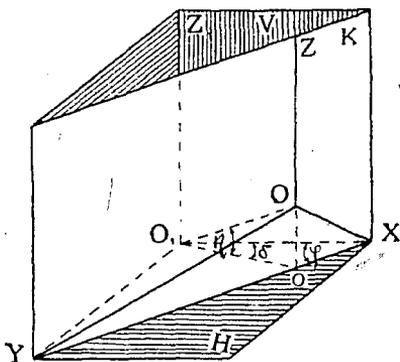
Другим типичным случаем расположения плоскости  $K$  является тот, когда она параллельна одной оси.

Например, на черт. 17 показана плоскость  $K \parallel OZ$ .

В этом случае  $\frac{1}{u} = 1$ .

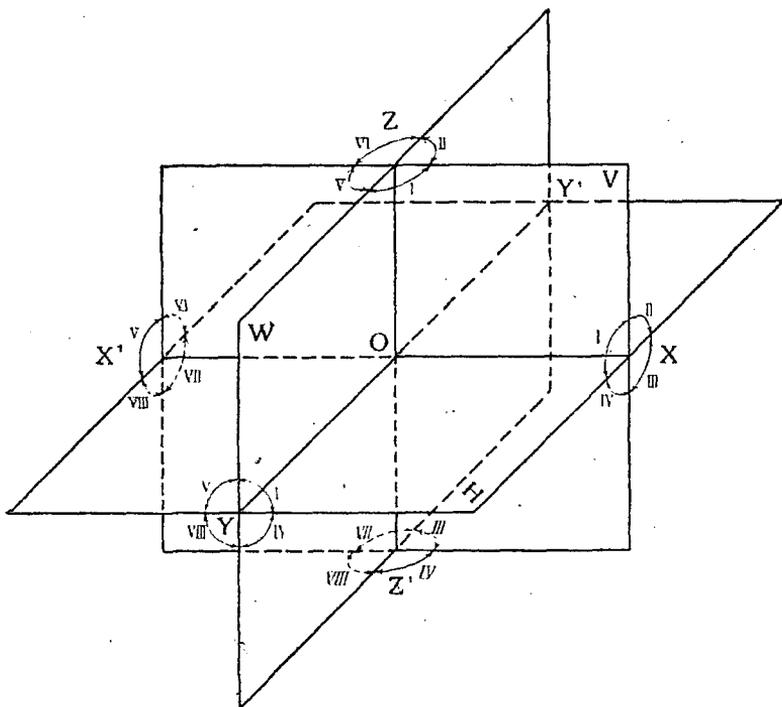


Черт. 16.



Черт. 17.

Направление проектирования  $O_1O$  определяется углами  $\eta$  и  $\delta$ , причем угол  $\eta$ —есть угол наклона  $O_1O$  к  $H$ , а угол  $\delta$ —угол между горизонтальной проекцией  $O_1o$  этого направления и осью  $X$ .

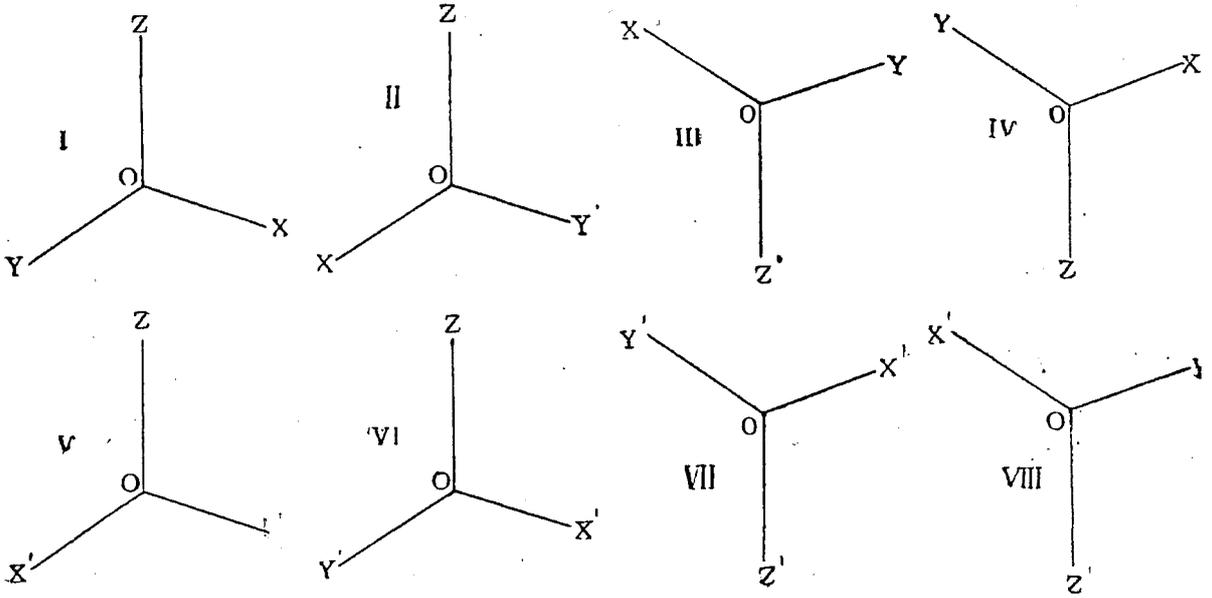


Черт. 18.

Направление плоскости  $K$  определяется углом  $\varphi$  между  $K$  и  $V$ . Заканчивая рассмотрение общих свойств косоугольных проекций, заметим, что координатные плоскости, пересекаясь в пространстве, образуют восемь пространственных углов (черт. 18), которые мы будем

нумеровать римскими цифрами, как это и показано на чертеже, именно:

справа от  $W$ —углы  $I, II, III, IV$  и  
слева от  $W$ —углы  $V, VI, VII, VIII$ .



Черт. 19.

Концы отрицательных направлений осей будем соответственно обозначать буквами  $X', Y', Z'$ .

Тогда, в зависимости от того, какой угол пространства пересекает плоскость проекций  $K$ , и предполагая, что в том же углу находится и зритель, получим следующие схематические изображения аксонометрических осей (черт. 19).

в) прямоугольные проекции.

При рассмотрении аксонометрических проекций косоугольных мы предполагали (черт. 12), что направление проектирования  $O_1 O$  расположено под острым углом к плоскости проекций  $K$ .

Перейдем теперь к исследованию случая, когда направление проектирования  $O_1 O$  перпендикулярно к плоскости  $K$  (черт. 20). В этом случае аксонометрические проекции называются *прямоугольными*.

На черт. 20 плоскость аксонометрических проекций  $K$  пересекает координатные плоскости пространства по линиям  $XU, YZ$  и  $ZX$ , образующим так называемый *треугольник следов*. Этот треугольник показан отдельно в неискаженном виде на черт. 21. Не трудно доказать следующую теорему:

**Теорема 11-я.** В прямоугольных аксонометрических проекциях линии высот треугольника следов являются аксонометрическими осями.

*Доказательство.* Обозначим точки пересечения линий:

$OX$  с  $YZ$  через  $M$ ,  $OY$  с  $XZ$  через  $N$  и  $OZ$  с  $XU$  через  $P$ .

Так как  $O_1O \perp K$ , то, очевидно, плоскости:

$$O_1XM \perp YZ, O_1YN \perp XZ \text{ и } O_1ZP \perp XY.$$

Следовательно, углы

$$XMY, XNY \text{ и } XPZ \text{—прямые,}$$

т. е. линии

$$XM, YN \text{ и } ZP$$

суть высоты треугольника  $XYZ$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 12-я.** В прямоугольных аксонометрических проекциях каждый показатель искажения меньше единицы.

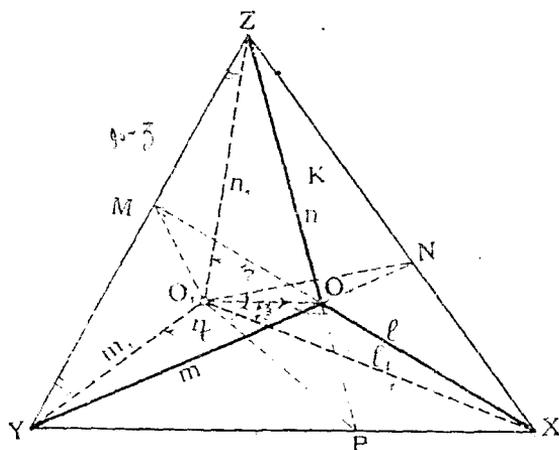
*Доказательство.* Из чертежа 20 видно, что

$$\frac{1}{s} = \frac{OX}{O_1X} = \cos(90^\circ - \xi); \quad \frac{1}{t} = \frac{OY}{O_1Y} = \cos(90^\circ - \eta);$$

$$\frac{1}{n} = \frac{OZ}{O_1Z} = \cos(90^\circ - \xi).$$

Так как косинусы углов меньше единицы, то отсюда и вытекает, что показатели искажения меньше единицы.

Случай, когда косинусы равны единице, соответствует положению плоскости  $K$  параллельно какойнибудь из осей координат; хотя этот случай и возможен, но на практике не применяется, так как тогда две другие оси координат спроектируются в одну прямую, и изображение предмета получится не наглядным.



Черт. 20.

**Теорема 13-я.** В прямоугольных аксонометрических проекциях треугольник следов определяет показателей искажения и углы  $\xi, \eta, \zeta$  между направлением проектирования и координатными осями в пространстве.

*Доказательство.* На черт. 22 дан треугольник следов  $XYZ$ . Проведя его высоты, найдем начало  $O$  аксонометрических координат.

Обращаясь к чертежу 20, видим, что  $\triangle XO_1M$  прямоугольный с высотой  $OO_1$ ; совместим его с плоскостью  $K$ , вращая его вокруг гипотенузы  $XM$ . Тогда он займет положение  $XO_1M$ , показанное на чертеже 22. Здесь известны: гипотенуза  $XM$ , точка  $O$  и прямой угол  $XO_1M$ , причем вершина его  $O_1$  должна лежать на линии  $OO_1$ , перпендикулярной к  $XM$ .

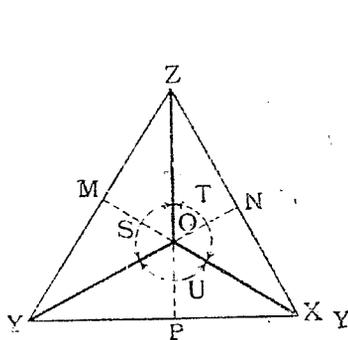
По этим данным нетрудно построить треугольник  $XO_1M$  и из него определить катет  $XO_1$  и угол  $OO_1X = \xi$ . Показатель искажения  $\frac{1}{s}$  будет равен отношению  $\frac{OX}{O_1X}$ . Подобным же образом определим остальные углы и показатели искажения.

*Задача № 1.* На черт. 21 даны аксонометрические оси  $OXYZ$  в прямоугольных проекциях. Требуется определить показатели искажения и углы  $\xi, \eta, \zeta$ .

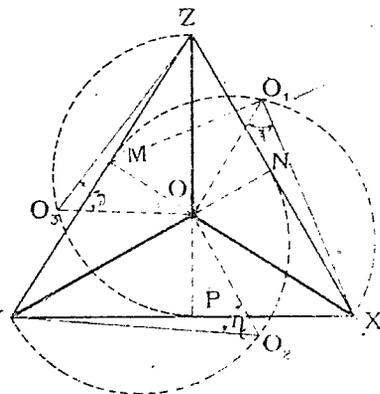
*Решение.* Задача решается на основании теорем 11-й и 13-й. Задаемся на одной из осей, например, на  $OY$  случайной точкой  $Y$ . Приводим  $YZ \perp OX$  до пересечения с  $OZ$  в точке  $Z$ . Далее приводим  $ZX \perp OY$  до пересечения с  $OX$  в точке  $X$ . Соединим точки  $X$  и  $Y$  линией  $XY$ , которая будет перпендикулярной к  $OZ$ . Треугольник  $XYZ$  является треугольником следов. Далее задача решается так, как это было показано в доказательстве теоремы 13-й.

**Теорема 14-я.** В прямоугольных аксонометрических проекциях сумма квадратов показателей искажения равна 2, т. е.

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 = 2. \dots \dots \dots (8)$$



Черт. 21.



Черт. 22.

*Доказательство.* Так как прямоугольные проекции являются частным случаем косоугольных, то к первым применима формула 6-я, стр. 15), положив в ней  $\sigma = 90^\circ$  или  $\cotg \sigma = 0$ . Тогда она и примет вид, указанный в теореме.

*Задача № 2.* Даны два показателя искажения  $\frac{1}{s}$  и  $\frac{1}{t}$ , определить третий и углы  $\xi, \eta$  и  $\zeta$ .

*Решение.* Решим задачу, пользуясь методом ортогональных проекций (черт. 23).

Проведем на горизонтальной плоскости  $H$  линии  $O_1X$  и  $O_1Y$  под прямым углом друг к другу и примем их за координатные оси в пространстве, аналогичные таковым же на черт. 20. Из чертежа же 20 имеем:

$$\sin \xi = \frac{1}{s} \text{ и } \sin \eta = \frac{1}{t}.$$

Так как  $\frac{1}{s}$  и  $\frac{1}{t}$  даны, то и углы  $\xi$  и  $\eta$  являются известными.

Направление проектирования  $O_1O$  в пространстве можно определить, как линию сечения двух конусов. Один из них имеет осью линию  $O_1X$  и угол при вершине  $2\xi$ , а другой—осью линию  $O_1Y$  и угол при вершине  $2\eta$ .

Так как такие конуса в общем случае пересекутся по двум производящим, то мы получим два решения задачи. Одна из линий  $O_1O$  будет лежать над  $H$  в I-м угле пространства, а другая—под  $H$  в IV-м угле. Рассмотрим лишь первое решение.

Для того, чтобы определять линию сечения конусов, засечем их шаром случайного радиуса с центром в точке  $O_1$ . Тогда оба конуса пересекутся шаром по малым кругам. Одна из точек (назовем ее  $O_3$ ) пересечения этих последних и определит вместе с точкой  $O_1$  искомое направление проектирования. На черт. 23 эти пространственные построения выполнены в проекциях.

Проводим линии  $O_{11}, O_{11}$  под углами  $\xi$  к  $OX$  и линии  $O_{12}, O_{12}$  под углами  $\eta$  к  $OY$ .

Линии  $O_{11}$  и  $O_{12}$  будут проекциями на  $H$  контуров упомянутых двух конусов.

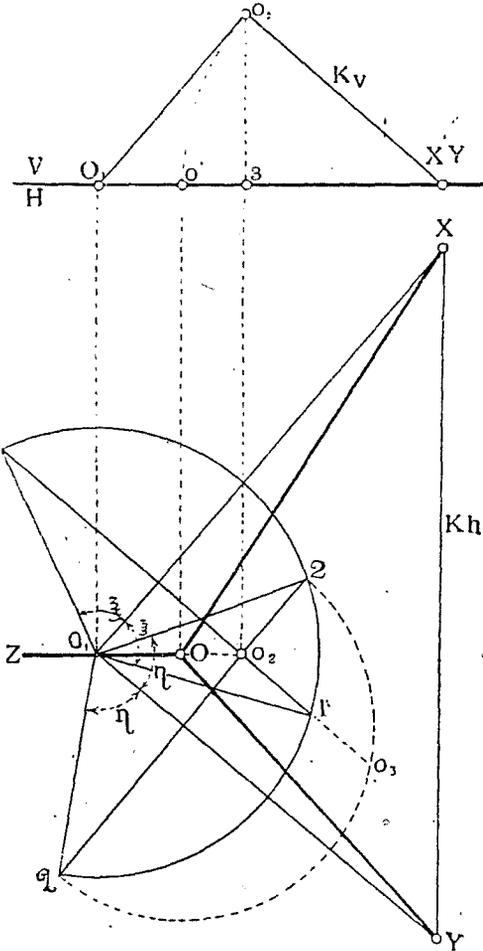
Опишем из точки  $O_1$ , как из центра, случайным радиусом дугу круга 1212 и отметим точки пересечения ее 1,1 и 2,2 с проекциями конусов. Дуга круга будет являться проекцией экватора ранее упомянутого шара. Линии же 11 и 22 будут проекциями кругов сечения шара с конусами. Точка  $O_2$  пересечения линий 22 и 22 является горизонтальной проекцией искомой точки  $O_3$ . Высота ее под  $H$  определяется следующим образом:

Совместим плоскость круга 22 с  $H$ , вращая ее вокруг оси 22 вправо. Тогда дуга этого круга изобразится пунктиром 20<sub>2</sub>. Перпендикуляр  $O_2O_3$  к 22 и дает искомое возвышение точки  $O_3$  над  $H$ . Так как в пространстве линия  $O_1O \perp K$ , то в проекции на  $H$  проекция направления проектирования  $O_1O_2$  должна быть перпендикулярна к следу  $Kh$ . Засекаем стороны угла  $XO_1Y$  случайной линией  $Kh$  ( $XU$ ), перпендикулярной к  $O_1O_2$ .

Переходим теперь к проекции на  $V$ .

Проводим ось  $O_1'X' \perp$  к  $XU$ . Находим проекции  $(O_1', X' Y'$  и  $O_2' (O_2'Z = O_2O_3)$ . Очевидно, угол  $O_1'O_2'X'$  должен быть прямым, и линия  $O_2'X'$  будет вертикальным следом плоскости  $K$ .

Совмещаем  $K$  с  $H$ , вращая  $K$  вокруг  $Kh$ , и находим совмещенное положение осей  $XO$  и  $YO$ . Проводим линию  $OO_1Z$ .



Черт. 23.

Линии  $OX, OY$  и  $OZ$  будут неискаженным видом аксонометрических осей. Зная же их, легко на основании ранее решенной задачи (стр. 21) определить  $\frac{1}{m}$  и  $\zeta$ .

Другой способ решения той же задачи (черт. 24).

Имеем данными  $\frac{1}{s} = \sin \xi$  и  $\frac{1}{t} = \sin \eta$ .

Примем произвольный отрезок  $XU$  за сторону треугольника следов. Тогда начало  $O_1$  пространственных координат определится из трех условий:

- 1)  $\angle XO_1Y = 90^\circ$ ; 2)  $\angle O_1XO = 90^\circ - \xi$  и 3)  $\angle O_1YO = 90^\circ - \eta$ .

Поэтому точка  $O_1$  в пространстве должна лежать: 1) на шаре с диаметром  $XU$ , 2) и 3) на конусах вращения, имеющих вершины соответственно в точках  $X$  и  $Y$  и производящие которых наклонены к  $XU$  соответственно под углами  $90^\circ - \xi$  и  $90^\circ - \eta$ .

Представим себе в пространстве некоторую плоскость  $Q$ , проходящую через  $XU$  и перпендикулярную к плоскости  $XUZY$ . Совместим  $Q$  с  $P$ , вращая  $Q$  вокруг  $XU$ , и построим в совмещенном виде круг  $XAUN$  сечения  $Q$  с шаром и производящие  $XB$  и  $YA$  сечения  $Q$  с обоими конусами. Очевидно, линия  $XB$  пойдет под углом  $90^\circ - \xi$  к  $XU$ , а  $YA$  — под углом  $90^\circ - \eta$  к  $XU$ . Отметим точки  $A$  и  $B$  пересечения этих линий с кругом и спроектируем их в  $a$  и  $b$  на диаметр.

Опишем на  $Xb$  и  $Ya$ , как на диаметрах, полуокружности. Эти полуокружности, как будет показано ниже, являются проекциями на плоскость  $XUZY$  линий сечения шара к каждому из упомянутых двух конусов.

Точка  $O$  пересечения этих кругов будет проекцией на плоскость  $XUZY$  начала  $O_1$  координат. Соединяя  $X$  и  $Y$  с  $O$  и проводя  $OZ \perp XU$ , получим аксонометрические оси. Проводя же  $XZ \perp$  к  $OY$  получим и третью вершину  $\Delta$ -ка следов.

В отношении же упомянутых двух кругов заметим следующее: обозначим длину диаметра  $XU$  через  $c$ . Тогда  $XB = c \cos(90^\circ - \xi)$  и диаметр одного из кругов  $Xb = c \cos^2(90^\circ - \xi)$ .

Проведем теперь через  $X$  какую-нибудь плоскость  $R \perp XUZY$ , которая пересечет круг  $XbY$  в какой-нибудь точке  $M$ , а шар — по кругу диаметра  $XM$ . Тогда этот круг в пространстве пересечется одной из производящих конуса с вершиной  $X$  в точке  $O_1$ , проекцией которого на плоскость  $XUZY$  будет точка  $O$ . Поэтому получим  $XO = XM \cos^2(90^\circ - \xi)$ . И вообще, все лучи  $XM$ , исходящие из  $X$ , будут делиться точкою  $O$  в постоянном отношении. А это обозначает, что геометрическое место точек  $O$  есть линия, подобная кругу  $XbY$  с центром подобия в  $X$ , т. е. круг диаметра  $Xb$ , что и требовалось доказать.

Круги  $Xb$  и  $Ya$  называются *кругами показателей искажения*.

Эти названия впервые были введены Тесаром <sup>1)</sup> (Tesar). Обозначим: центры их буквами  $Q$  и  $R$ , а радиусы:

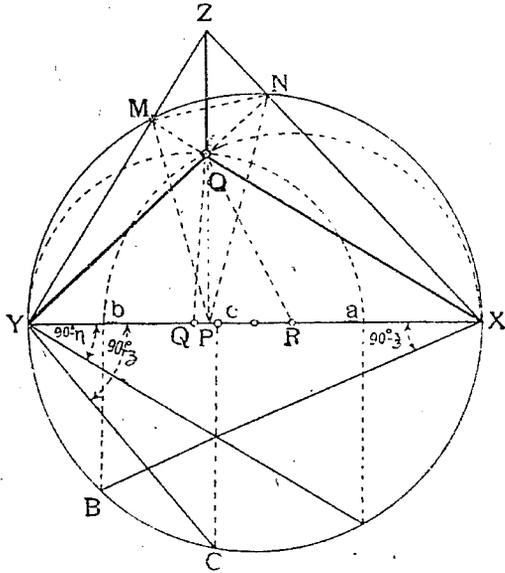
$$XR = r_x; YQ = r_y.$$

Тогда будем иметь:

$$r_x = \frac{1}{2} c \cos^2(90^\circ - \xi) \text{ и } r_y = \frac{1}{2} c \cos^2(90^\circ - \eta).$$

Обозначим еще:

$$r_z = \frac{1}{2} c \cos^2(90^\circ - \zeta).$$



Черт. 24.

<sup>1)</sup> Sitzber. d. math. nat. cl. d. Ak d. Wiss. in Wien, 1880, B. 81, Abth. 2, St. 453—478 J. Tesar „Der orthogonalaxonometrise Verkürzungskreis“.

Так как:

$$\cos^2 (90^\circ - \xi) + \cos^2 (90^\circ - \eta) + \cos^2 (90^\circ - \zeta) = 2,$$

то будем иметь

$$r_x + r_y + r_z = c,$$

откуда следует, что

$$r_z = QR.$$

Зная это, легко определить и угол  $90^\circ - \zeta$ .

Для этого по  $XU$  отложим  $Uc = 2 r_z = 2 QR$ , проведем  $Cc \perp XU$  до пересечения с кругом  $XU$  в точке  $C$ . Тогда  $\angle XUC = 90^\circ - \zeta$ .

Далее, так как:  $NR = RO$  и  $YQ = QO$ , то в  $\triangle$ -ке  $ORQ$  стороны:

$$OR = r_x, OQ = r_y \text{ и } QR = r_z.$$

Отношение этих величин равно:

$$r_x : r_y : r_z = \cos^2 (90^\circ - \xi) : \cos^2 (90^\circ - \eta) : \cos^2 (90^\circ - \zeta) = \\ = \left(\frac{1}{s}\right)^2 : \left(\frac{1}{t}\right)^2 : \left(\frac{1}{u}\right)^2, \text{ т. е. } \dots \dots \dots \text{ 8 bis}$$

Стороны  $\triangle$ -ка  $ORQ$  относятся друг к другу, как квадраты показателей искажения, или как квадраты величин, им пропорциональных ( $p^2 : q^2 : r^2$ ).

Треугольник  $ORQ$  или всякий, подобный ему, называется *треугольником показателей искажения*.

**Теорема 15.** При прямоугольном аксонометрическом проектировании треугольник  $MNP$  соединяющий основания высот в  $\triangle$ -ке следов будет треугольником показателей искажения, т. е. его стороны пропорциональны квадратам показателей искажения (черт. 24).

Эта теорема называется по имени ученого предложившего ее теоремой Шлеммльха <sup>1)</sup>.

Докажем это, т. е. покажем, что  $\triangle$ -ки  $MNP$  и  $ORQ$  будут подобными.

Углы  $\angle XUN$  и  $\angle XMN$  будут равны друг другу, так как измерятся одной и той же дугой  $XN$ . Если мы теперь опишем на  $XZ$ , как на диаметре, круг, то он пройдет через точки:  $P$  ( $\angle ZPX = 90^\circ$ ) и  $M$  ( $\angle ZMX = 90^\circ$ ). Поэтому:

$$\angle XZP \text{ будет равен } \angle XMP.$$

Кроме того, из подобия  $\triangle$ -ков  $XUN$  и  $XZP$ , имеем

$$\angle XUN = \angle XZP.$$

Из равенства:

$$\angle MN = \angle XUN = \angle XZP = \angle MP$$

видим, что угол  $\angle XMN = \angle XMP$ , т. е. высота  $XM$  делит угол  $\angle NMP$  пополам.

Так как в равнобедренном  $\triangle$ -ке  $YOQ$ :

$$\angle RQO = 2 \angle XUN,$$

и подобным же образом:

$$\angle NMP = 2 \angle XMN = 2 \angle XUN, \text{ то} \\ \angle RQO = \angle NMP.$$

<sup>1)</sup> Schlömilch. „Geometrie des Raumes“.

Соответственно получим, что:

$$\angle QRO = \angle MNP$$

а поэтому  $\triangle MNP \sim \triangle ORQ$ , что и требовалось доказать.

*Примечание 1.* Приводим еще правило Шварца, позволяющее определить показатели искажения по данным аксонометрическим осям.

„Два любых сопряженных диаметра и малая ось эллипса могут быть приняты за направления прямоугольных проекций трех взаимно перпендикулярных линий в пространстве. Если последние принять за декартовы оси а плоскость эллипса за плоскость аксонометрических проекций, то отношения обоих упомянутых полу диаметров и фокусного расстояния эллипса к большей полуоси равны соответственно трем показателям искажения“. Доказательство этого приведено в соч. G Loria „Vorlesungen über Darstellende Geometrie“. Leipzig, 1907. St. 175.

*Примечание 2.* Упомянем еще, что Гаусс также занимался теорией аксонометрии и вывел некоторые положения прямоугольной аксонометрии, связанные с векториальным анализом и с теорией комплексных чисел. Подробности о сем см. 1) Gauss „Werke“ II, S. 309. 2) Hofmannschen Zeitschrift. Bd. 17 (1886) S. 492—498. 3) Jbidem 1909. St. 156—158 статья Н. А. Schwarz'a. 4) Н. Рынин „Методы изображения“, стран. 177. Пгр. 1916.

**Теорема 16.** В прямоугольных аксонометрических проекциях сумма квадратов двух показателей искажения больше квадрата третьего.

*Доказательство.* Из аналитической геометрии известно, что если линия  $O_1O$  (черт. 20) проходит через начало  $O$ , координат, то сумма квадратов косинусов углов между нею и осями равна единице, т. е.:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1.$$

Отсюда следует, что:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 1,$$

или  $\sin^2 (90^\circ - \xi) + \sin^2 (90^\circ - \eta) < 1,$

или  $\cos^2 (90^\circ - \xi) + \cos^2 (90^\circ - \eta) > 1,$

или  $\cos^2 (90^\circ - \xi) > \sin^2 (90^\circ - \eta),$

или  $\cos (90^\circ - \xi) > \cos \eta.$

Откуда  $\xi + \eta < 90^\circ.$

Аналогично получим:  $\eta + \zeta < 90^\circ$  и

$$\xi + \zeta < 90^\circ.$$

Так как  $1 > \cos^2 (90^\circ - \xi),$

то  $\cos^2 (90^\circ - \eta) + \cos^2 (90^\circ - \zeta) > \cos^2 (90^\circ - \xi).$

Отсюда:

$$\left( \frac{1}{t} \right)^2 + \left( \frac{1}{u} \right)^2 > \left( \frac{1}{s} \right)^2$$

Аналогично:

$$\left( \frac{1}{s} \right)^2 + \left( \frac{1}{t} \right)^2 > \left( \frac{1}{u} \right)^2$$

и  $\left( \frac{1}{s} \right)^2 + \left( \frac{1}{u} \right)^2 > \left( \frac{1}{t} \right)^2$

что и требовалось доказать.

*Задача № 3.* Даны отношения между показателями искажения. Определить последние.

*Решение.* Пусть

$$\frac{1}{s} : \frac{1}{t} : \frac{1}{u} = p : q : r.$$

Это же отношение можно написать так (черт. 20)

$$\sin \xi : \sin \eta : \sin \zeta = p : q : r.$$

Отсюда получаем:

$$\sin \eta = \frac{q}{p} \sin \xi,$$

$$\sin \zeta = \frac{r}{p} \sin \xi.$$

Из ранее же приведенной формулы:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$$

получим:

$$\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta = 2.$$

Поэтому:

$$\sin^2 \xi + \left(\frac{q}{p}\right)^2 \sin^2 \xi + \left(\frac{r}{p}\right)^2 \sin^2 \xi = 2,$$

откуда:

$$\sin \xi = \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{2p^2}{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Подобным же образом получим:

$$\sin \eta = \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{2q^2}{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\sin \zeta = \frac{1}{u} = \sqrt{\frac{2r^2}{p^2 + q^2 + r^2}}$$

..... (10)

*Задача № 4.* Даны углы  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  между направлением проектирования  $O_1O$  и осями координат в пространстве (черт. 20). Определить углы  $S$ ,  $T$ ,  $U$  между аксонометрическими осями.

*Решение.* Обозначим:  $O_1X = l_1$ ;  $O_1Y = m_1$ ;  $O_1Z = n_1$ ;  $OX = l$ ;  $OY = m$ ;  $OZ = n$ . Из черт. 20 имеем, что  $\triangle$ -к  $OYZ$  является прямоугольной проекцией  $\triangle$ -ва  $O_1YZ$ .

Поэтому:

$$\frac{mn}{2} \sin S = \frac{m_1 n_1}{2} \cos \xi;$$

Откуда:

$$\sin S = \frac{m_1 n_1}{mn} \cos \xi.$$

Но  $m = m_1 \sin \eta$  и  $n = n_1 \sin \zeta$ .

Поэтому:

$$\sin S = \frac{m_1 \cdot n_1}{m_1 \sin \eta \cdot n_1 \sin \zeta} \cos \xi = \frac{\cos \xi}{\sin \eta \cdot \sin \zeta}$$

Аналогично получим:

$$\sin T = \frac{\cos \eta}{\sin \xi \cdot \sin \zeta}$$

$$\sin U = \frac{\cos \zeta}{\sin \eta \cdot \sin \xi}$$

..... (11)

*Задача № 5.* Дано отношение  $p : q : r$  между показателями искажения. Требуется определить углы  $S, T, U$  между аксонометрическими осями.

*Решение.* При решении этой задачи необходимо иметь в виду, чтобы была удовлетворена теорема 16, т. е. чтобы сумма квадратов двух чисел из  $p, q$  и  $r$ , была больше квадрата третьего. Из предыдущих задач мы имели:

$$\begin{aligned} \cos (90^\circ - \xi) &= \sin \xi = \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{2p^2}{p^2 + q^2 + r^2}}; \\ \sin \eta &= \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{2q^2}{p^2 + q^2 + r^2}}; \quad \sin \zeta = \sqrt{\frac{2r^2}{p^2 + q^2 + r^2}} \dots (10) \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \sqrt{\frac{-p^2 + q^2 + r^2}{p^2 + q^2 + r^2}}; \quad \cos \eta = \sqrt{\frac{p^2 - q^2 + r^2}{p^2 + q^2 + r^2}}; \\ \cos \zeta &= \sqrt{\frac{p^2 + q^2 - r^2}{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя написанные значения косинусов и синусов в формулы (11) предыдущей задачи, получим:

$$\sin S = \frac{\cos \xi}{\sin \eta \cdot \sin \zeta} = \sqrt{\frac{(p^2 + q^2 + r^2)(-p^2 + q^2 + r^2)}{2q^2}} \dots 12'$$

откуда

$$\cos S = -\frac{1}{2pq} \sqrt{(p^2 + q^2 - r^2)(p^2 - q^2 + r^2)}$$

Подобным же образом получим:

$$\cos T = -\frac{1}{2pq} \sqrt{(p^2 + q^2 - r^2)(-p^2 + q^2 + r^2)}$$

$$\cos U = -\frac{1}{2pq} \sqrt{(-p^2 + q^2 + r^2)(p^2 - q^2 + r^2)}$$

..... (12)

Так как, согласно теореме 10-й (стр. 15), треугольник следов  $XYZ$  является остроугольным, то каждый из углов  $S, T, U$  будет больше прямого. Поэтому и косинусы их будут отрицательными. Кроме того из формул (12) следует что, если два из показателей искажения будут одинаковыми, то и соответствующие им углы будут равными, например, если  $p = q$  и  $\left(\frac{1}{s} = \frac{1}{t}\right)$ , то и  $S = T$  и т. д.

Углы  $S, T$  и  $U$  можно построить и графически, если дано отношение показателей искажения  $p : q : r$ .

Это построение было предложено Вейсбахом<sup>1)</sup> и изображено на черт. 25.

Строим  $\Delta$ -к  $XYZ$ , стороны которого относились бы друг к другу как  $p^2 : q^2 : r^2$ . Тогда биссектрисы этого  $\Delta$ -ка и будут аксонометрическими осями, и углы между этими осями будут соответственно равны  $S, T, U$ .

*Доказательство.* Обозначим углы при вершинах  $X, Y, Z$  такими же буквами. Тогда будем иметь:

$$\frac{Y}{2} + \frac{Z}{2} + S = 180^\circ; \quad \text{но } Y + Z = 180^\circ - X;$$

откуда

$$\frac{Y}{2} + \frac{Z}{2} = 90^\circ - \frac{X}{2} \quad \text{и} \quad S = 90^\circ + \frac{X}{2}$$

$$- \operatorname{tg} S = - \operatorname{tg} \left( 90^\circ + \frac{X}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{X}{2} \dots (a)$$

<sup>1)</sup> Polytechnische Mitteilungen von Volz und Karmarsch, Tübingen 1844, Bd. 1, St. 125—126.

Обозначим для краткости:  $p^2 = a$ ;  $q^2 = b$ ;  $r^2 = c$ .

Тогда из  $\Delta$ -ка  $XYZ$  будем иметь:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cos X$$

откуда

$$\cos X = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \dots \dots \dots (b)$$

Но из тригонометрии имеем:

$$\cotg \frac{X}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos X}{1 - \cos X}} \dots \dots \dots (c)$$

Подставляя в формулу (c) значение  $\cos X$  из (b), получим

$$\cotg \frac{X}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)}} = \dots \dots \dots (d)$$

На основании же формулы (a) имеем

$$\tg S = - \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)}} \dots \dots \dots (13)$$

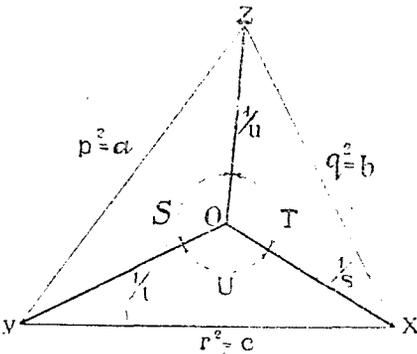
Но из выражений для  $S$  по формулам 12' и 12 и при обозначениях  $p^2 = a$ ;  $q^2 = b$ ;  $r^2 = c$  имеем

$$\tg S = \frac{\sin S}{\cos S} = - \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)}} \dots \dots \dots 13 \text{ (bis)}$$

Выражения 13 и 13-bis тождественны; это показывает, что угол  $S$ , полученный при помощи построения Вейсбаха, равен искомому.

Подобным же образом можно доказать, что и углы  $XOZ = T$  и  $XOY = U$ .

По формулам 10, 12 (или по аналогичным формулам 13-bis) можно для данного отношения показателей искажения  $p:q:r$  определить: 1) самые показатели, т. е.  $\sin \xi$ ,  $\sin \eta$  и  $\sin \zeta$ , где  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  — углы между направлением прямоугольного проектирования и осями координат в пространстве (черт. 20) и 2) углы  $S, T, U$  (черт. 21) между аксонометрическими осями.



Черт. 25.

В нижеприведенной таблице сопоставлены значения этих величин, полученные вычислением по упомянутым формулам для разных отношений  $p:q:r$ . На чертеже же 26 изображены кубики для всех случаев таблицы, при чем рядом с чертежом 26(a) указан истинный размер ребра кубика в пространстве, принятый равным единице длины (2.5 сантиметр.).

Как видно из таблицы 1-й и как это следует из теории прямоугольного аксонометрического проектирования, показатели искажения получаются в виде десятичных дробей с большим числом знаков, что представляет практические неудобства.

Действительно, пусть, например, мы имеем в пространстве параллелепипед, с размерами ребер  $X, Y$  и  $Z$ , причем эти ребра параллельны соответственным осям координат.

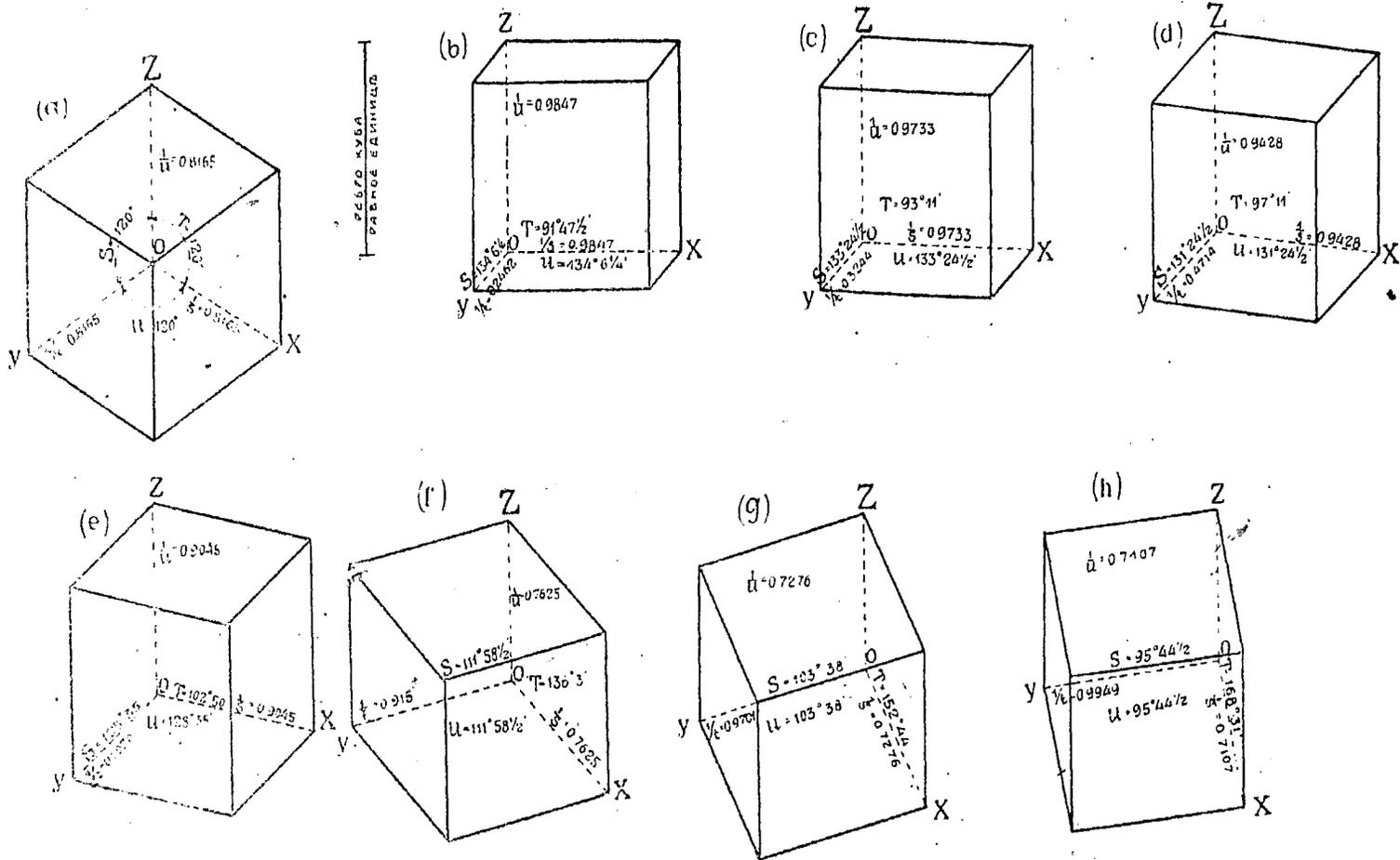
Изобразим этот параллелепипед сначала в ортогональных проекциях, например, в масштабе  $\frac{1}{10}$ . Тогда ребра его изобразятся в виде длин

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X}{10}; \\ y_1 &= \frac{Y}{10} \text{ и } \\ z_1 &= \frac{Z}{10}. \end{aligned}$$

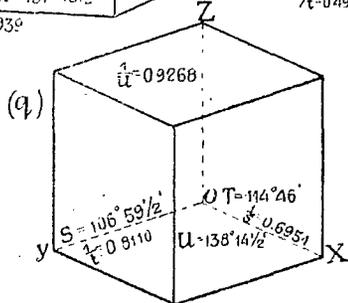
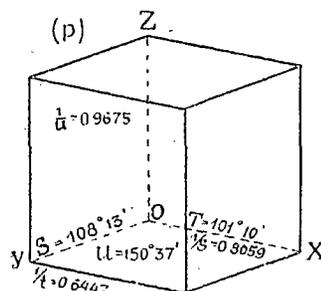
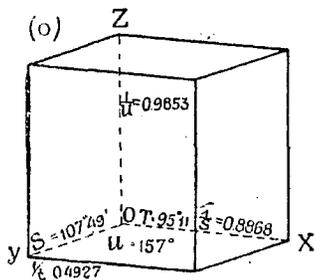
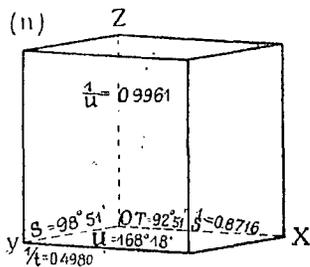
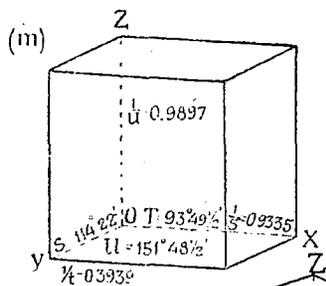
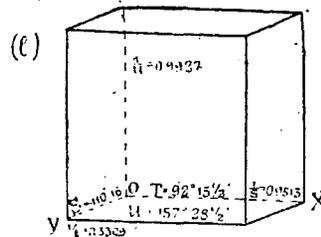
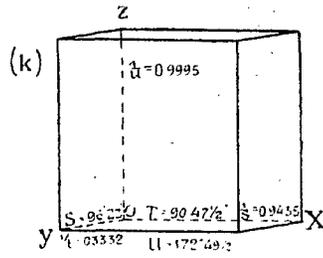
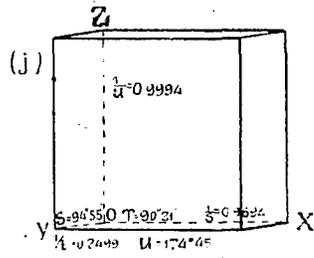
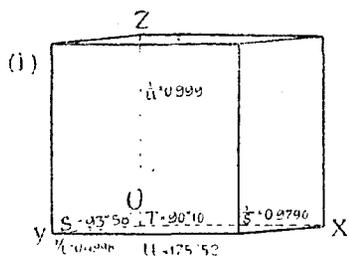
Т А Б Л И Ц А I-я

Соответствующие друг другу элементы прямоугольного аксонометрического проектирования (черт. 25).

$p : q : r.$		Цифровые лине.	$S.$	$T.$	$U.$	$\frac{1}{s} =$ $\sin \xi.$	$\frac{1}{t} =$ $\sin \eta.$	$\frac{1}{u} =$ $\sin z.$	Черт. № 26
1	1	1	120°	120°	120°	0,8165	0,8165	0,8165	a
1	$\frac{1}{4} = 0,25$	1	134°6 $\frac{1}{2}$ '	91°47 $\frac{1}{4}$ '	134°6 $\frac{1}{2}$ '	0,9847	0,2462	0,9847	b
1	$\frac{1}{3} = 0,333$	1	133°24 $\frac{1}{2}$ '	93°11'	133°24 $\frac{1}{2}$ '	0,9733	0,3244	0,9733	e
1	$\frac{1}{2} = 0,5$	1	131°24 $\frac{1}{2}$ '	97°11'	131°24 $\frac{1}{2}$ '	0,9428	0,4714	0,9428	d
1	$\frac{2}{3} = 0,666$	1	128°35'	102°50'	128°35'	0,9045	0,6030	0,9045	e
1	$\frac{6}{5} = 1,2$	1	111°58 $\frac{1}{2}$ '	136°3'	111°58 $\frac{1}{2}$ '	0,7625	0,9150	0,7625	f
1	$\frac{4}{3} = 1,333$	1	103°38'	152°44'	103°38'	0,7276	0,9701	0,7276	g
1	$\frac{7}{5} = 1,4$	1	95°44 $\frac{1}{2}$ '	168°31'	95°44 $\frac{1}{2}$ '	0,7107	0,9949	0,7107	h
$\frac{49}{50} = 0,980$	$\frac{1}{5} = 0,200$	1	23°58'	90°10'	175°52'	0,9790	0,4998	0,9990	i
$\frac{31}{32} = 0,969$	$\frac{1}{4} = 0,250$	1	94°55'	90°20'	174°45'	0,9694	0,2499	0,9994	j
$\frac{17}{18} = 0,944$	$\frac{1}{3} = 0,333$	1	96°23'	90°47 $\frac{1}{2}$ '	172°49 $\frac{1}{2}$ '	0,9435	0,3332	0,9995	k
$\frac{23}{24} = 0,958$	$\frac{1}{3} = 0,337$	1	110°16'	92°15 $\frac{1}{2}$ '	157°28 $\frac{1}{2}$ '	0,9513	0,3309	0,9927	l
$\frac{19}{20} = 0,950$	$\frac{2}{5} = 0,400$	1	114°22'	93°49 $\frac{1}{2}$ '	151°48 $\frac{1}{2}$ '	0,9335	0,3939	0,9847	m
$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{2} = 0,500$	1	98°51'	92°51'	168°18'	0,8716	0,4980	0,9961	n
$\frac{9}{10} = 0,900$	$\frac{1}{2} = 0,500$	1	107°49'	95°11'	157°	0,8868	0,4927	0,9853	o
$\frac{5}{6} = 0,833$	$\frac{2}{3} = 0,666$	1	108°13'	101°10'	150°37'	0,8059	0,6447	0,9675	p
$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{7}{8} = 0,875$	1	106°59 $\frac{1}{2}$ '	114°46'	138°14 $\frac{1}{2}$ '	0,6951	0,8110	0,9265	q



Черт. 26.



Переходя к аксонометрическим прямоугольным проекциям, получим изображения тех же ребер в виде длин:

$$x = x_1 \sin \xi; \quad y = y_1 \sin \eta; \quad z = z_1 \sin \zeta.$$

При таких условиях отношения аксонометрических изображений ребер к истинным их длинам в пространстве, т. е. аксонометрические масштабы будут равны:

$$\frac{x}{X} = \frac{\sin \xi}{10}; \quad \frac{y}{Y} = \frac{\sin \eta}{10}; \quad \frac{z}{Z} = \frac{\sin \zeta}{10}.$$

Для каждой из осей получается свой масштаб, в большинстве случаев весьма неудобный. Если проекции будут диметрическими, то получится лишь два разных масштаба.

Если же проекции будут изометрическими, то в этом случае возможно получить простое отношение для аксонометрического масштаба.

Действительно, при этих условиях

$$\sin \xi = \sin \eta = \sin \zeta.$$

и

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{\sin \xi}{10}$$

Примем масштаб чертежа в ортогональных проекциях не  $\frac{1}{10}$ , как раньше, а  $\frac{1}{10 \sin \xi}$ . Тогда аксонометрический масштаб для всех ребер параллелепипеда будет равен  $\frac{\sin \xi}{10 \sin \xi} = \frac{1}{10}$ , т. е. будет весьма простым.

Если даны не самые показатели, а простое отношение между ними, то можно подобным же образом получить более простые аксонометрические масштабы.

Пусть, например, даны:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{t} = \frac{1}{n} = \sin \xi : \sin \eta : \sin \zeta = p : q : r = \frac{p}{2} : \frac{q}{2},$$

Если чертеж в ортогональных проекциях составлен в  $\frac{1}{10}$  натуральной величины, то ребра на нем изобразятся в виде отрезков:

$$x_1 = \frac{X}{10}; \quad y_1 = \frac{Y}{10}; \quad z_1 = \frac{Z}{10}.$$

Аксинометрические изображения этих ребер будут равны:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \sin \xi = \frac{X}{10} \sin \xi = \frac{X}{10} \sin \zeta \cdot \frac{p}{2} \\ y &= \frac{Y}{10} \sin \eta \cdot \frac{q}{2} \\ z &= \frac{Z}{10} \sin \zeta \end{aligned}$$

Если принять масштаб чертежа в ортогональных проекциях не в  $\frac{1}{10}$ , а в  $\frac{1}{10 \sin \xi}$  натур. вел., то тогда соответствующие аксонометрические масштабы получатся гораздо проще и будут равны:

$$\begin{aligned} \frac{x}{X} &= \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{2}, \\ \frac{y}{Y} &= \frac{1}{10} \cdot \frac{q}{2}, \\ \frac{z}{Z} &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Выберем, например, из таблицы 1-й отношение  $p : q : r$  равным  $0,9 : 0,5 : 1$ . Тогда аксонометрические масштабы будут равны:

$$\text{для оси } X\text{-ов } \frac{x}{X} = \frac{1}{10} \cdot 0,9 = 0,09.$$

$$\text{для оси } Y\text{-ов } \frac{y}{Y} = \frac{1}{10} \cdot 0,5 = 0,05.$$

$$\text{для оси } Z\text{-ов } \frac{z}{Z} = \frac{1}{10} \cdot 1 = 0,1.$$

Соответствующие же показатели искажения будут  $0,9$ ;  $0,5$  и  $1$ , и схема осей примет простой вид, показанный на черт. 30.

*с) сводка правил аксонометрического проектирования.*

Вышеизложенная теория аксонометрического проектирования приводит к следующим заключениям относительно выбора показателей искажения и углов между аксонометрическими осями.

1. При косоугольном проектировании можно задаваться аксонометрическими осями под произвольными углами друг к другу и выбрать случайные значения показателей искажения.

2. При прямоугольном проектировании можно задаваться следующими величинами:

а) двумя показателями искажения, выбирая каждый меньше единицы (теорема 12-я стр. 20). Тогда третий показатель определится из условия, что сумма квадратов показателей должна равняться двум (формула 8-я). Соответствующие углы между осями можно определить так, как это показано в задачах на стр. 21 или 22). Можно также определить отношение между показателями искажения по известным их величинам, и тогда углы можно построить по способу, указанному ниже в п. б);

б) отношением  $p : q : r$  между показателями искажения.

Тогда величины показателей определяются по формулам 10, а величины углов между осями по формулам 13. Однако проще определять эти углы графически по способу Вейсбаха (стр. 27 и черт. 25).

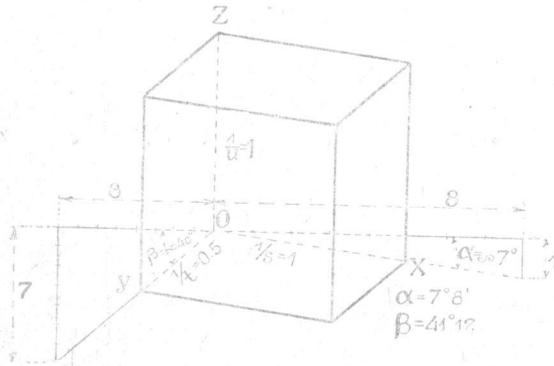
3. Так как в технике главнейшей целью аксонометрических проекций является получение наглядных изображений, независимо от способа их проектирования, то предпочтительнее пользоваться косоугольными проекциями, так как при этом можно задаваться произвольными значениями показателей искажения и углов между осями.

4. Наиболее простыми для построения и наиболее удобоизмеряемыми являются косоугольные проекции на плоскость, параллельную двум координатным осям в пространстве, при чем последние выбираются параллельными двум главным измерениям предмета (черт. 13 и 14). При этом проектируются без искажения все линии и углы, параллельные плоскости проекций. Если же при этом принять проекции изометрические, т. е. и третий показатель искажения равным единицы, то удобоизмеримость получится наилучшей.

5. Аксонометрическое изображение получается при косоугольном проектировании наиболее наглядным и красивым в том случае, когда

боковые грани предмета изображаются под углом к плоскости проекции и; кроме того, последняя не перпендикулярна к диагональной плоскости предмета.

На черт. 27 изображен соответствующий вид куба. Углы между осями  $OX$  и  $OY$  с осью  $Z$  приняты равными  $90^\circ + 7^\circ$  и  $90^\circ + 40^\circ$ . Углы в  $7^\circ$  и в  $40^\circ$



Черт. 27.

легко построить без транспортира по данным, указанным на чертеже

$$(tg 7^\circ = \approx 1/8; tg 40^\circ = \approx 7/8),$$

точнее

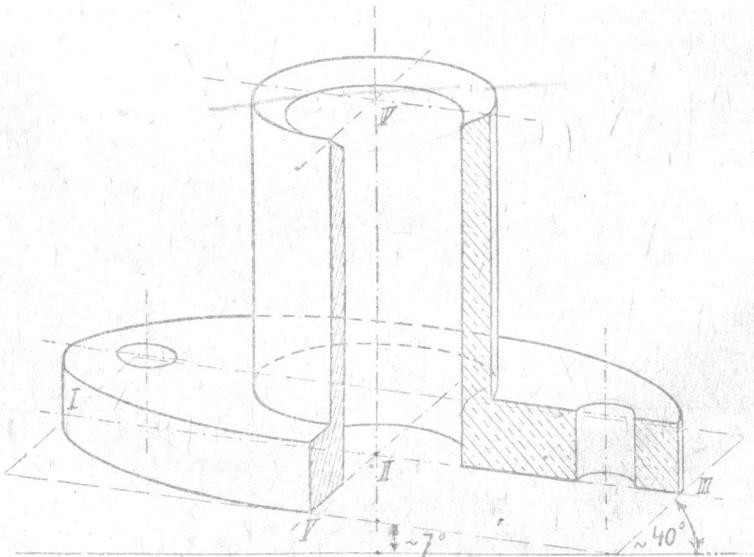
$$(tg 7^\circ 08' = 1/8; tg 41^\circ 12' = 7/8).$$

Показатели искажения приняты:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{u} = 1; \frac{1}{t} = 0,5.$$

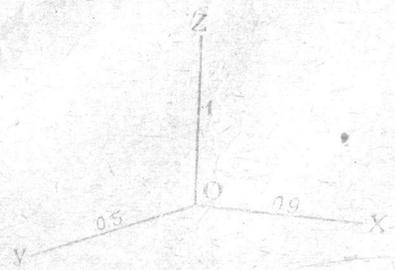
Подобную схему осей и показателей и рекомендуется применять для технических чертежей.

В качестве примера, на черт. 28 изображена по этой схеме часть чугунного фланца. Он же на черт. 29 показан в ортогональных проекциях.

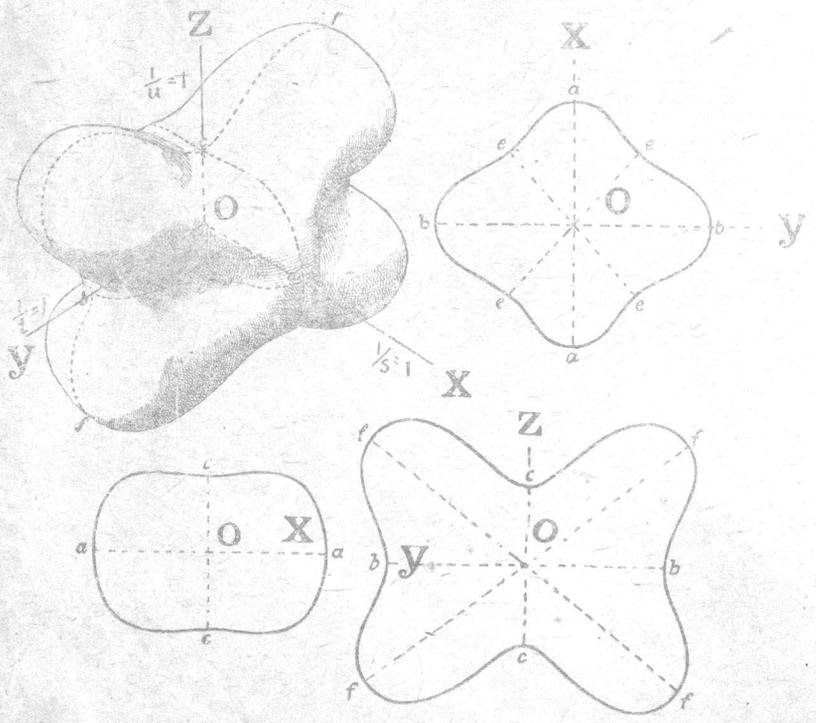


Черт. 28.

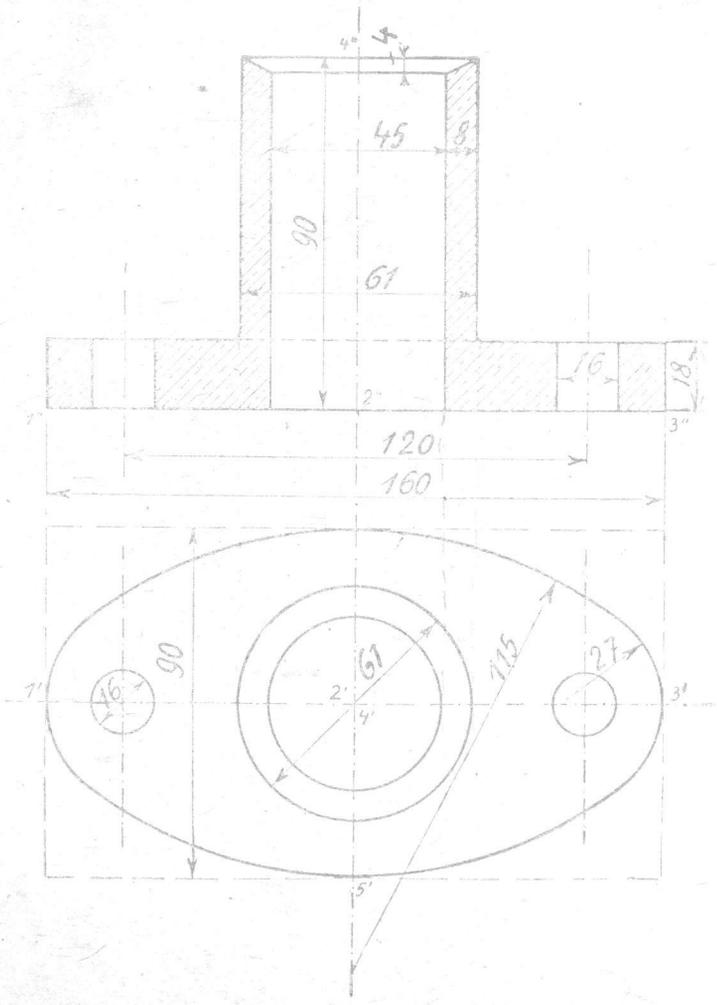
6. В таблице II-й сопоставлены виды аксонометрических проекций, а на чертежах 26, 28, 29, 31—49 приведены соответствующие примеры изображений. В первом столбце (I) показаны три случая расположения плоскости проекций  $K$  относительно пространственных координатных осей: а)  $K$  пересекает три оси, б)  $K$ —параллельна двум осям, т. е. параллельна одной из плоскостей координат, с)  $K$ —параллельна одной из осей координата.



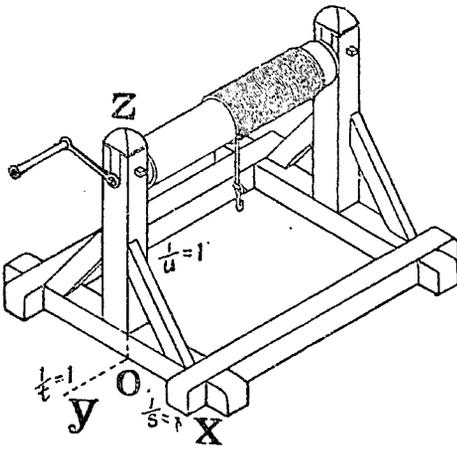
Черт. 30.



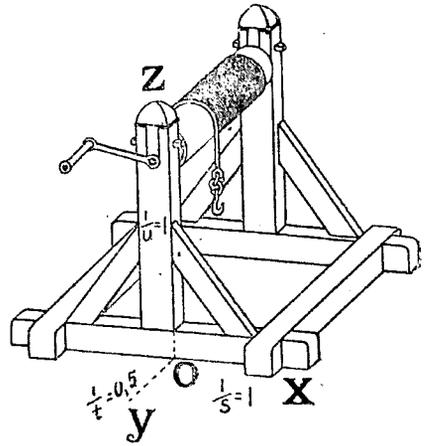
Черт. 31.



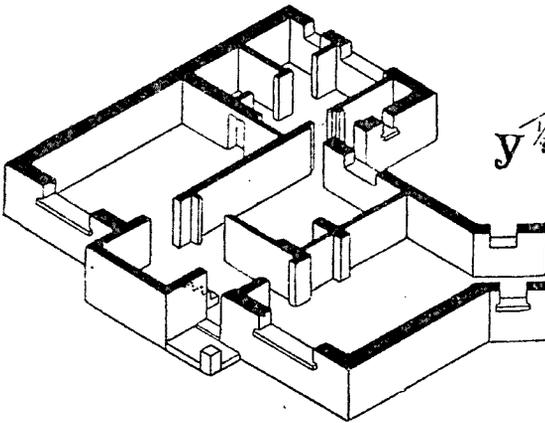
Черт. 29.



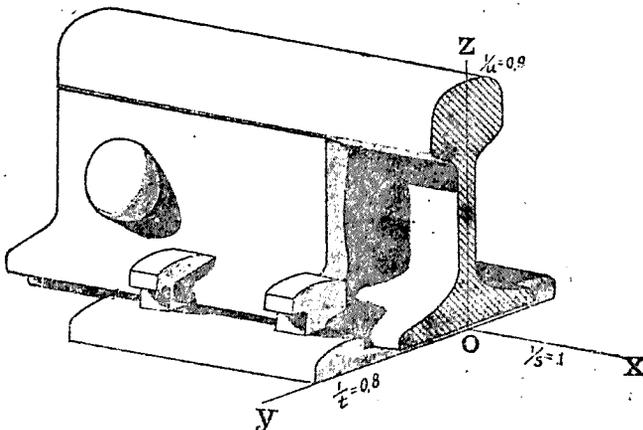
Черт. 32.



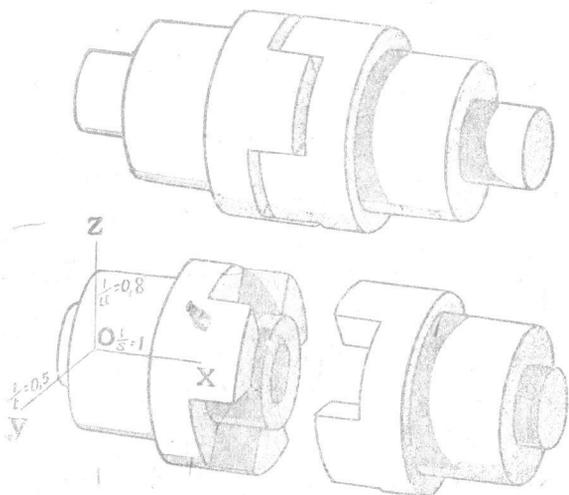
Черт. 33.



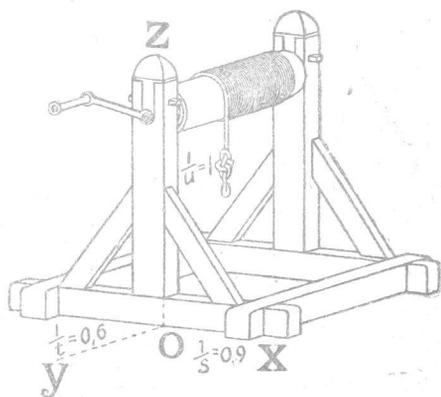
Черт. 34.



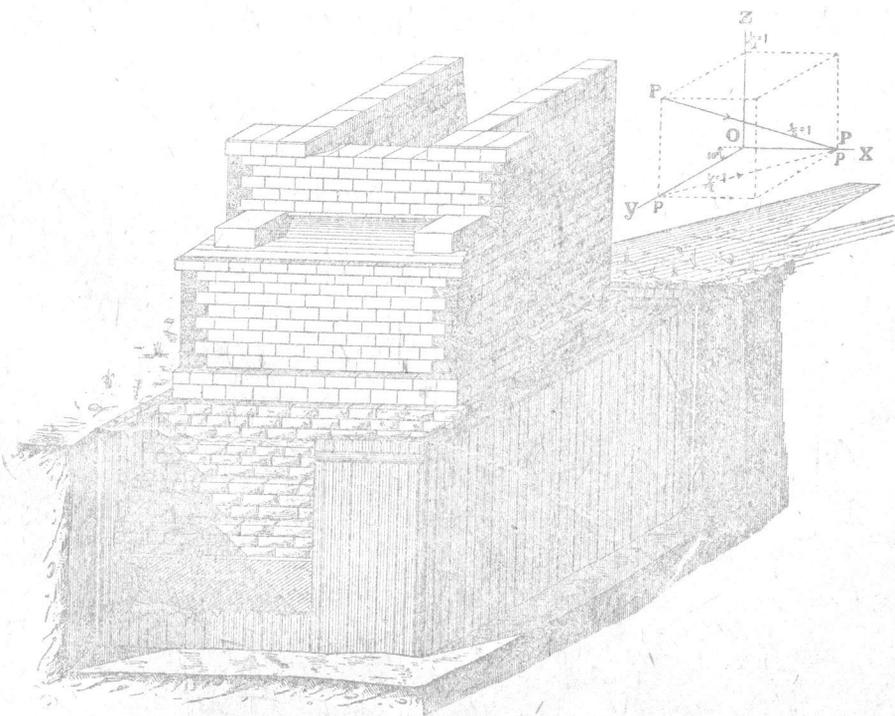
Черт. 35.



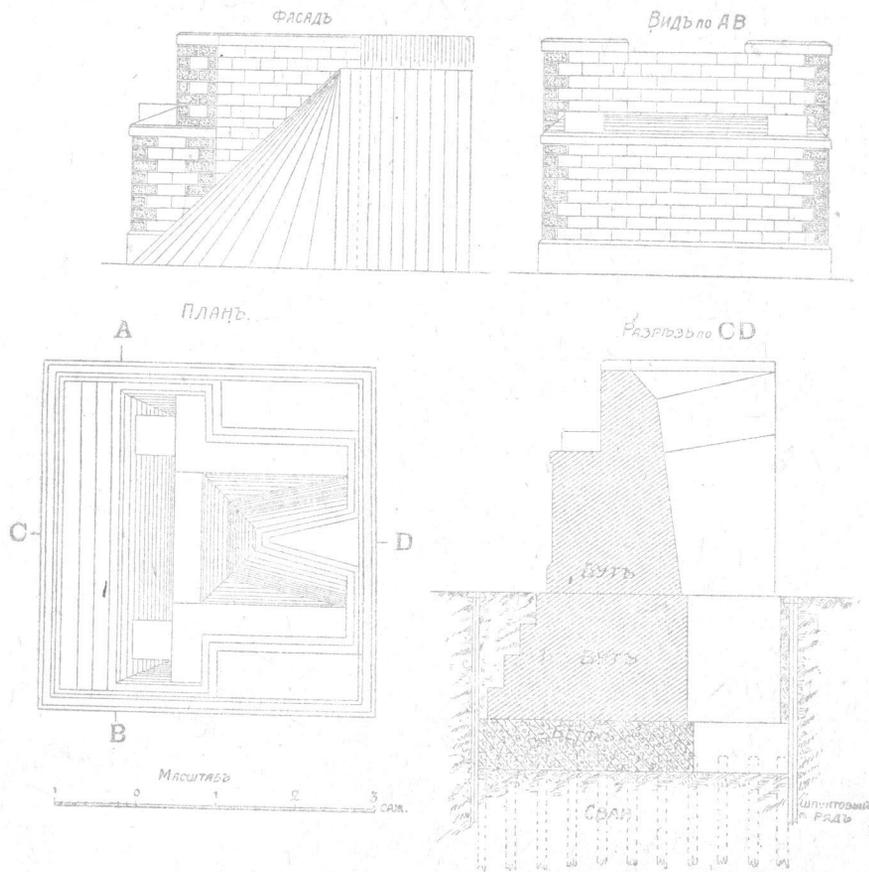
Черт. 36



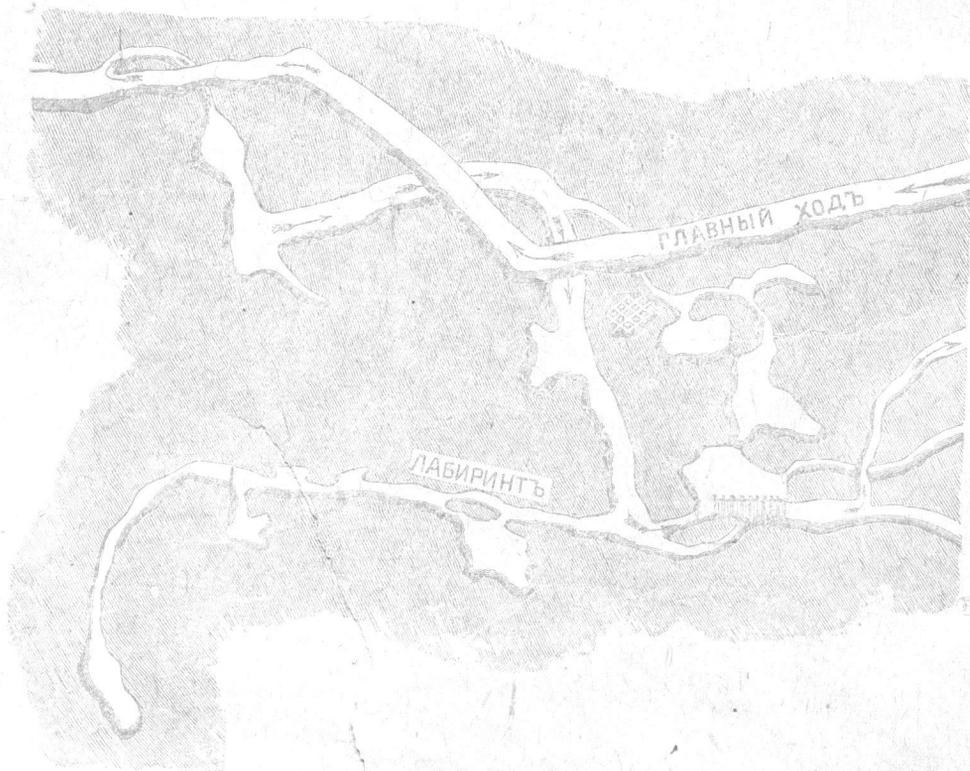
Черт. 37.



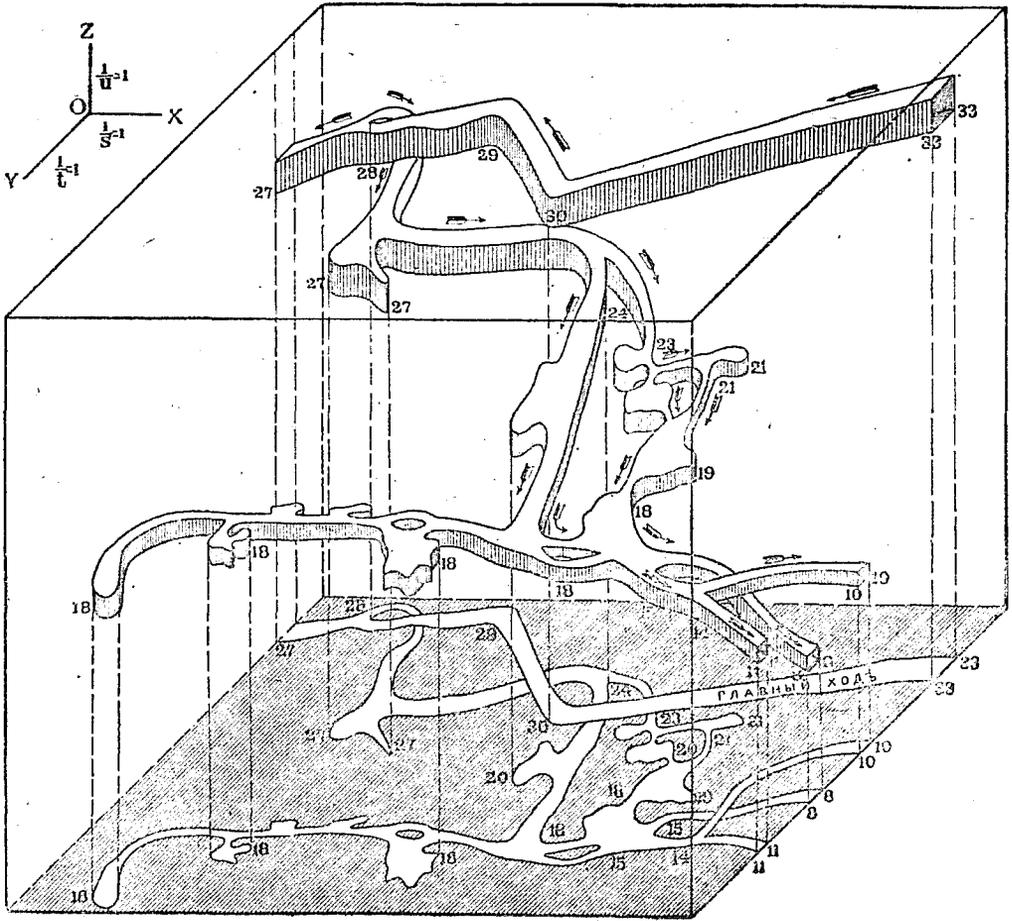
Черт. 38.



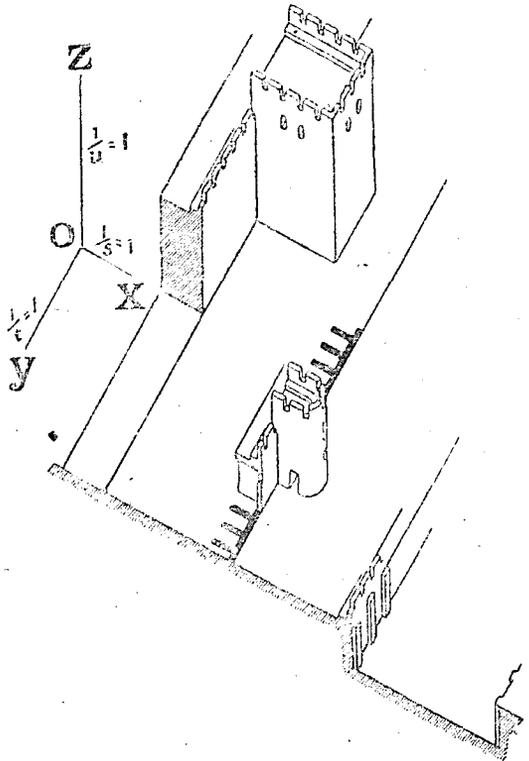
Черт. 39.



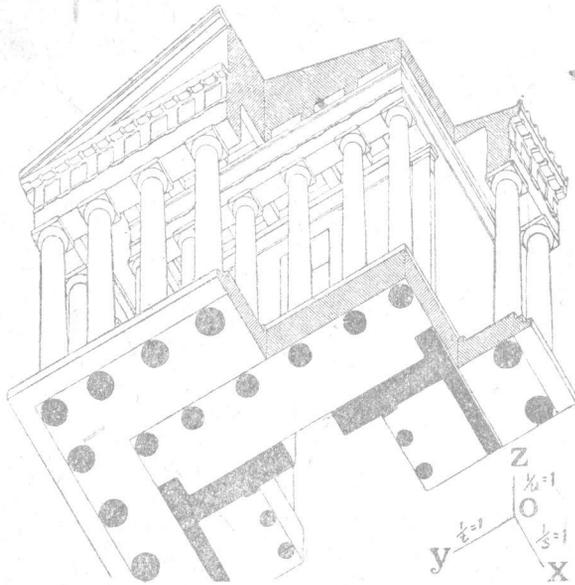
Черт. 40.



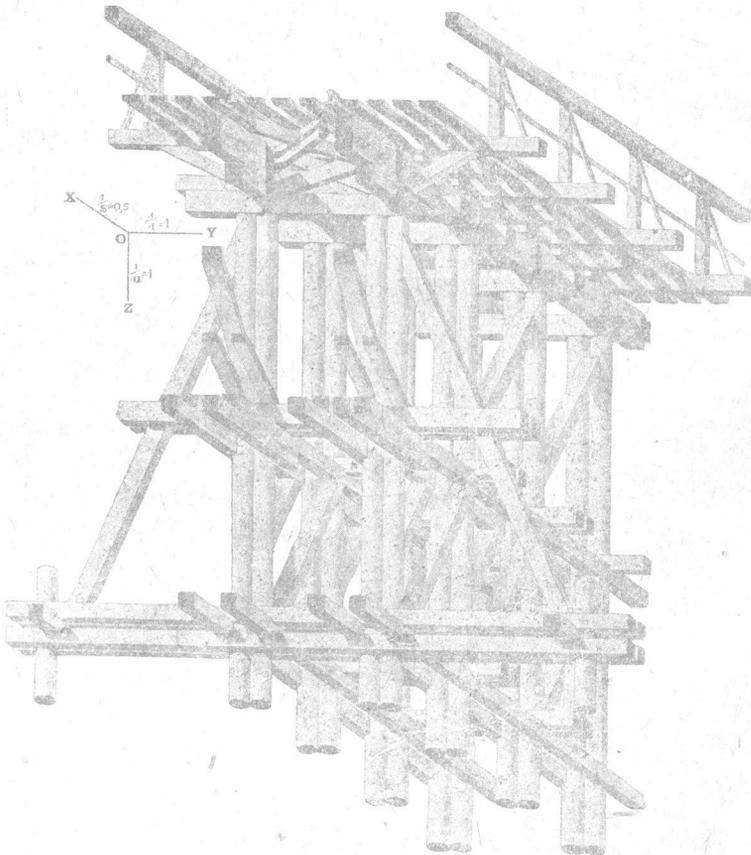
Черт. 41.



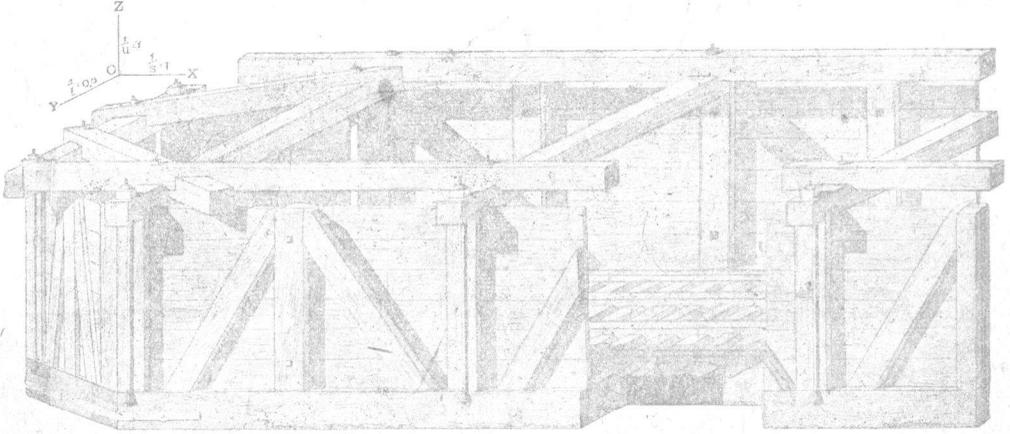
Черт. 12.



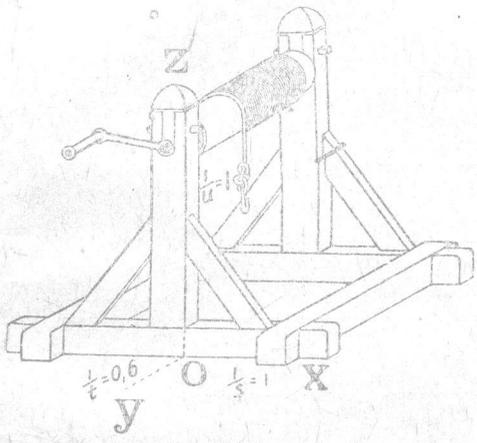
Черт. 43.



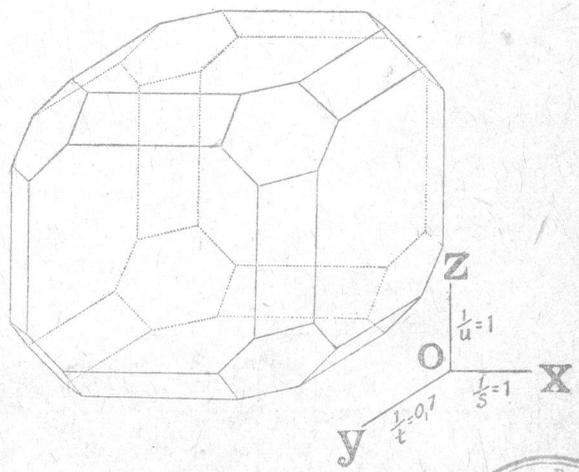
Черт. 44.



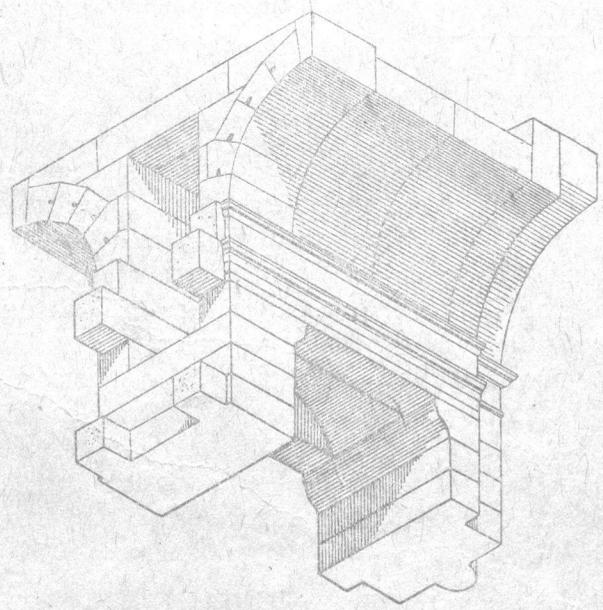
Черт. 45.



Черт. 46.



Черт. 47.



Черт. 48.



Т А Б Л И Ц А   П-л.  
Виды аксонометрических проекций.

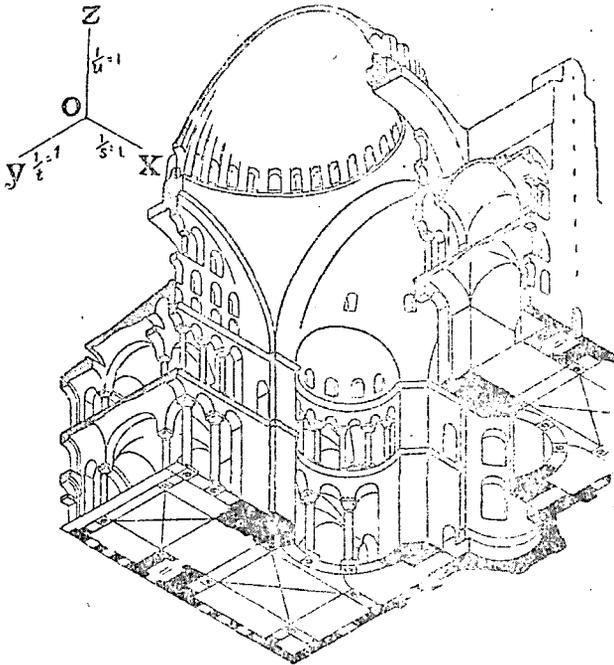
I.		II.	III.		IV.		
Расположение плоскости проекций $K$ .		Соотношение показателей. Проекция:	Косоугольные (свободная или вольная перспектива).		Прямоугольные.		
а	$K$ пересекает три оси.	Изометрические.	1	Перспективная аксонометрия.	12	Табл. I. Черт. 26 (а), 48, 49 и 50.	
		Диметрические.	2		13	Табл. I. Черт. 26 (b-г).	
		Триметрические.	3		14	Табл. I. Черт. 26 (d-г).	
б	$K$ параллельна одной из плоскостей координат.	Изометрические.	4	Проекции косые или обlique, или клинографические.	15	Не возможны.	
			5				Случайный угол ( $S$ ). Черт. 38 и 39.
			6				Кабинетная, или кавальерная, или быстрая перспектива. $K \parallel U$ или $W$ . $S = U = 135^\circ$ . Черт. 40 и 41.
		7	Военная или векторная перспектива. $K \parallel H$ . Вид сверху. Черт. 42.				
8	Лагушечья перспектива. $K \parallel H$ . Вид снизу. Черт. 43.	16	Не применяются.				
в	$K$ параллельна одной из осей.	Изометрические.	9	Изображения по виду одинаковые с выше упомянутыми в этом же столбце (1-8).	17	Не возможны.	
		Диметрические.	10		18	Не применяются.	
		Триметрические.	11				

Во втором столбце (II) показаны соотношения между показателями искажения, именно, когда они все равны друг другу (проекция изометрическая), когда равны друг другу только два из них (проекция диметрическая), и когда все они разные (проекция триметрическая).

В столбце III-м перечислены виды косоугольных проекций. Наиболее наглядные изображения получаются для строки (а) в случае проекций диметрических (черт. 28, 29, 33) и триметрических (черт. 34, 35, 36, 37). В последнем случае изображения ближе всего подходят к перспективным. Метод, по которому получаются виды изображений 1, 2 и 3 называется *перспективной аксонометрией*. Для изометрических проекций строки (б) приведены четыре разновидности косоугольных проекций: 4) один угол, например,  $S$  между осями случайный.

5) Два угла равны по  $135^\circ$ . В этом случае метод проектирования называется *кабинетною*, или *кавальерною*, или *быстрою перспективою*.

6) Если плоскость проекций  $K$  расположена параллельно  $H$  и изображается вид сверху, то метод называется *воспной* или *секторальной перспективой* и применяется для изображения крепостей



Черт. 49.

(черт. 42). Часто при этом углы  $S$  и  $U$  принимаются равными по  $135^\circ$ . При этом способе план предмета проектируется без искажения.

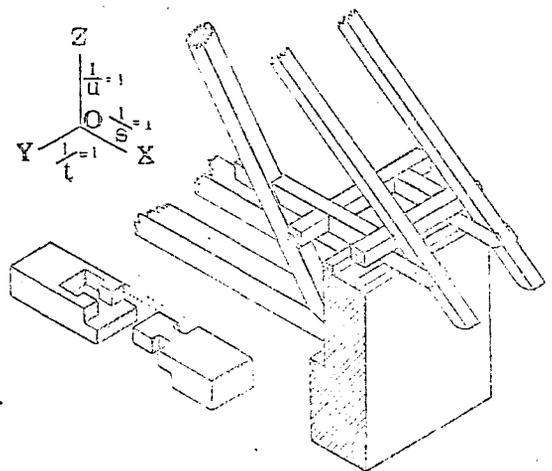
7) Этот случай аналогичен шестому, только изображается вид снизу. Метод называется *лягушечьей перспективой*.

Косоугольные диметрические проекции (вид 8-й, черт. 44—47) для случая (b) находят также довольно широкое применение в технике.

Проекции, полученные для случаев 4—8 иногда называются: *косыми*, *обличными* или *клинграфическими*.

Если плоскость проекций  $K$  параллельна одной из осей, то, в случае косоугольного проектирования (виды 9—11), изображения получают похожими на ранее упомянутые (1—8).

При прямоугольном проектировании (столбец IV) применяется лишь такое расположение плоскости проекций  $K$ , когда она пересекает все



Черт. 50.

три оси координат (случаи 12, 13 и 14). Если  $K$  будет параллельна одной из плоскостей координат, то изометрические проекции будут невозможными (случай 15), диметрические же — неизменяемыми, так как в последнем случае одно из главных измерений предмета исчезает в своей проекции. Если  $K$  будет параллельной одной из осей проекций, то изометрические проекции будут невозможными (случай 17), а диметрические и триметрические (случай 18) — неизменяемыми по тем же соображениям, что и раньше.

### Заключение.

В виду высказанных положений при построении аксонометрических изображений можно не обращать внимания на то, каким методом они получены, косоугольным или прямоугольным, а достаточно лишь задаться случайными аксонометрическими осями и написать на них случайные значения показателей искажения, принимая лишь во внимание, какой вид предмета желательно изобразить (сверху, сбоку, снизу, справа или слева) и какое изображение его желательно получить наглядное (например, случаи 1, 2, 3 или 12 (но хуже) табл. II), или удобоизмеримые (случаи 4—7), или, по возможности, соединить оба эти желания (случаи 8-й).

### § 4. Исторический очерк развития аксонометрии.

Кто первый начал строить изображения в аксонометрических проекциях, трудно установить.

По всей вероятности, многие архитектора и инженеры, которым пришлось иметь дело с планами и фасадами предметов, думали и пробовали давать изображениям более наглядный вид, не затрудняя в то же время себя применением сложных построений перспективы.

Впервые, вероятно, возник способ *косоугольного проектирования* на горизонтальную плоскость для изображения городов, т. е. так называемая *военная перспектива*. На черт. 51, в виде примера, приведен снимок с так называемого *Сизимундосского плана* Московского Кремля, относящийся к 1610 году <sup>1)</sup>.

Несколько отдельно стоит прием астронома *Кеплера*, который в своем сочинении „*Harmonices Mundi, Libri V, Lincii. Austriae, 1619*“ изобразил куб в виде аналогичном чертежу 26(a), т. е. получаемому при прямоугольном изометрическом проектировании куба (черт. 52); кроме того, в том же сочинении показано изображение куба с вписанным в нем октаэдром (черт. 53) в виде соответствующей кавальерной диметрической проекции

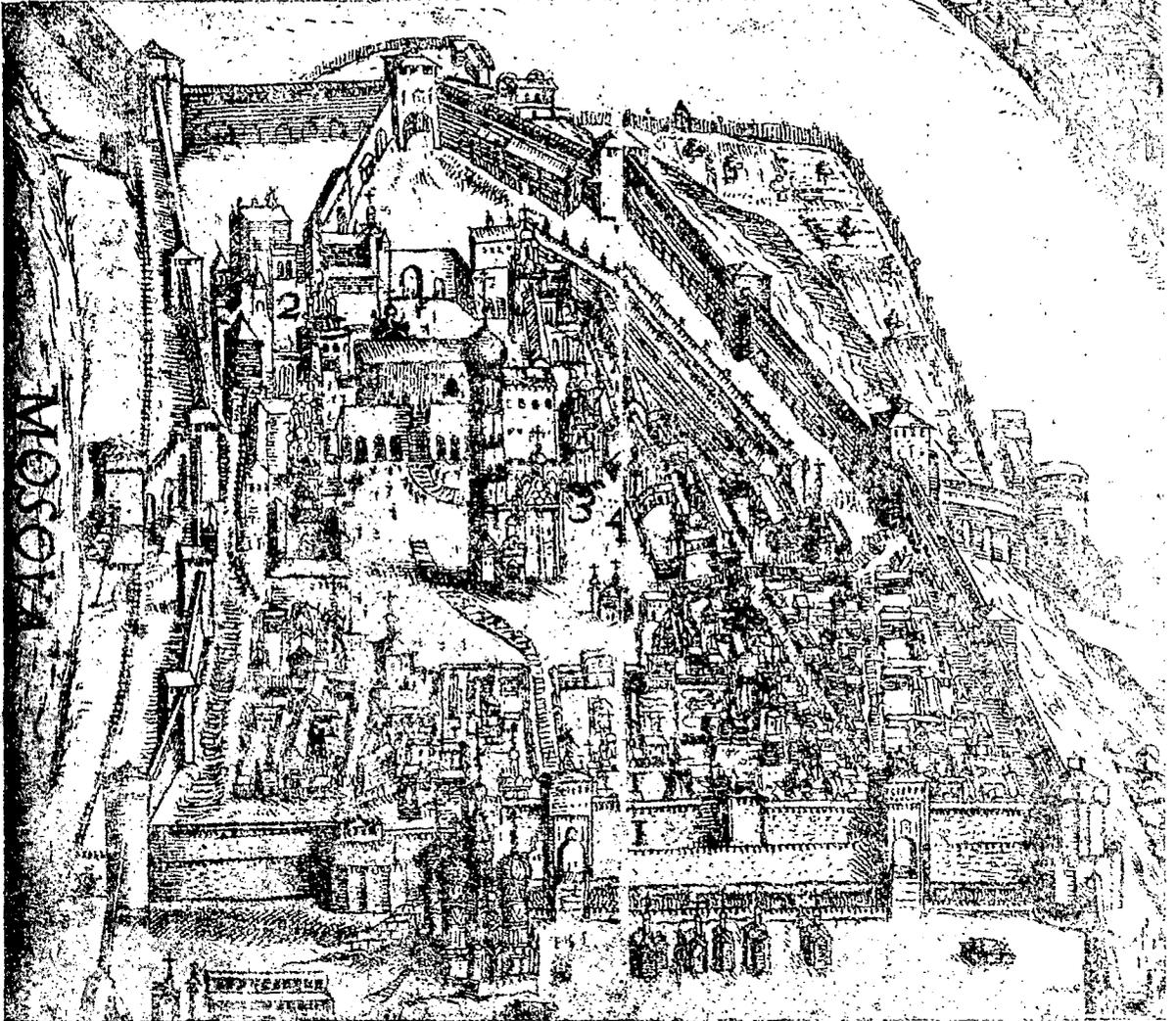
$$\left( \frac{1}{s} = \frac{1}{n} = 1; \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \right)$$

на плоскость  $K \parallel V$ . Однако, Кеплер никакой теории построения этого изображения не дал.

В дальнейшем метод косоугольного проектирования применялся для изображения сводов и камней на плоскость, параллельную их фасаду, при чем направление проектирования принималось под углом  $45^\circ$  к плоскости проекций (*кавальерная перспектива*). Примеры подобных изображений можно

<sup>1)</sup> П. Грабарь „История Русского Искусства“. Вып. 7. Москва.

найти в сочинениях *Деранда* (Derand) „L'architecture des voûtes, ou l'art des traits et coupes des voûtes“. 1645 (3<sup>me</sup> ed.—1755) и *Фрезье* (Frézier, F. A.) „Coupe des pierres“. 2<sup>e</sup> ed. В. I. 1754 г. В последнем сочинении между прочим приводится доказательство того, что прямоугольная проекция куба на плоскость, перпендикулярную к его диагонали, будет в виде правильного шестиугольника, (Pg. 319). (См. выше о *Кеплере*).



Черт. 51.

Подобное же доказательство можно найти и у *Кестнера* (Kästner) в его сочинении „Mathematische Anfangsgründe“. В. I. Göttingen. 1758.

*Ламберт* (Lambert, J. H. Род. в 1728 г. в Мюльгаузене, умер в 1777 г.) в сочинении „Freie Perspektive oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen“ 1759, распространяет метод центрального проектирования на получение параллельных проекций, предполагая точку зрения бесконечно удаленной. При этом плоскость проекций он располагает параллельно одной координатной оси (черт. 17), направление же проектирования принимает косоугольным.

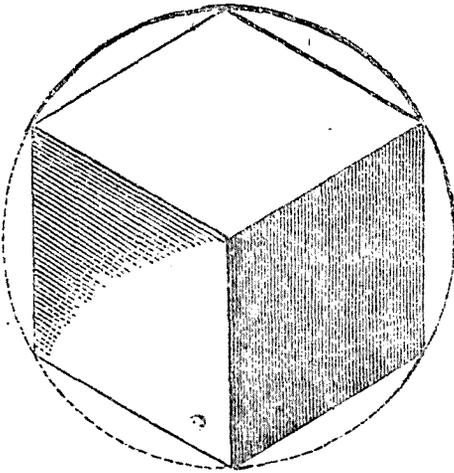
В 1775 году появилось сочинение *Карстена* (Karsten) „Lehrbegriff der gesammten Mathematik“. Gresswald, в котором автор аналитически излагает

теорию прямоугольного проектирования пространственных координатных осей на случайную плоскость и определяет отношение между проекциями осей и самими осями (показатели искажения).

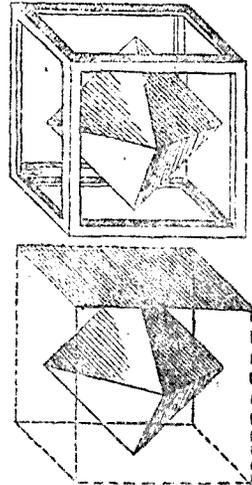
Первый, кто ввел термин „*изометрические проекции*“ и применил их в технике, был *Феирич* (умер в 1837 г.) (Farich William), который изложил теорию этих проекций в своих докладах 21 февраля и 7 марта 1820 г. в Кембриджском Философском Обществе.

Труд его „*Isametrical Perspective*“ был напечатан в Transactions of the Cambridge philosophical Society“ 1820 и затем был перепечатан в сочинении *Грегори* (Gregorys) „*Mathematics for practical men*“ London. 1825.

Минералогии и кристаллографы, стремясь в изображении кристаллов достичь наибольшей наглядности, применяли также аксонометрические проекции, например, *Мос* (Mohs) в соч. „*Grundriss der Mineralogie*“ 1822—1824 пользовался с этой целью изометрическими проекциями.



Черт. 52.



Черт. 53.

*Брандес* (Brandes) в труде „*Isometrische Perspektive*“ (Gehlers phys. Wörterbuch, B. 7, Abt. I) 1833. *Сопвич* (Sopwith) в соч. „*A treatise on Isometrical drawing*“. London. 1834, и *Юплинг* (Jopling) в соч. „*Practice of Isometrical Perspective*“. 1840,—дают дальнейшее развитие теории прямоугольных изометрических проекций.

Дальнейший шаг в теории прямоугольных проекций делает *Мёллингер* (Möllinger), который в своем сочинении „*Isometrische Projektionslehre*“. Solothurn. 1840, дает теорию диметрических прямоугольных проекций. Применением косоугольных проекций в изображениях кристаллов занимался *Науманн* (Naumann) (Anfangsgründe der Mineralogie. 1841). Между прочим, он в другом своем сочинении „*Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie*“ (1830) ввел термин „*клинографические проекции*“ для обозначения проекций на плоскость, параллельную двум координатным осям.

У *Брейтгаупта* (Breithaupt) в его „*Handbuch der Mineralogie*“ 1841—52, можно найти изображение кристаллов прямоугольной триметрической проекции.

Широкое обобщение теории аксонометрических проекций дал *Вейсбах* (Weisbach J.) в соч. „*Über die monodimetrische und anisometrische Projektionslehre*“ (Polytechnische Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Tübingen, 1844, B. I. St. 125—136).

Интересные применения аксонометрии в технике можно найти в соч. *Трипона* (Tripion) „*Etudes de projections, d'ombres et de lavis*“ 1848, и в

кристаллографии—в соч. *Котта* (Kopp) „Einleitung zur Kristallographie“ 1849. 2 Aufl. 1862.

В особенности много технических примеров применения аксонометрии дано в соч. братьев *Мейер* (Meyer M. H. und C. Th.) „Lehrbuch der Axonometrie“ 1852.

*Польке* (Pohlke, умер в 1877 г.), опубликовал свою, вышеупомянутую теорему (стр. 13, теорема 8 я), в 1853 г. (Journal f. reine u. angew. Math. B. 63). Позднее он развил теорию аксонометрии в своей „Darstellende Geometrie“. Berlin. 1860.

На русском языке впервые сведения об аксонометрии появляются в 1855 году, именно, когда профессор Петроградского Института инж. п. с. *А. Х. Ребер*, напечатал в журнале Главного Управления Путей Сообщения и Публичных Зданий свою статью „об изометрической проекции“, составленную, повидимому, по *Мёллингеру*. Эта статья появилась отдельной книгой в 1861 г.

В 1858 г. *Скужерский* (Skuhersky) в соч. „Orthographise Parallelperspektive“. Prag,—дает вместо аналитических—геометрические доказательства разных положений аксонометрии.

Подобный же геометрический метод применяет и *Ларшадор* (Largiador U.) в соч. „Das axonometrische Zeichnen“. Frauenfeld. 1858.

Далее, теорию аксонометрии разрабатывали *Мани* (Mann F.), *Шлёминг* (Schlöming D.) и *Юнге* (Junge U.).

В начале шестидесятых годов профессор Венской политехнической школы *Гони* (Hönig J.) подробно разработал теорию косоугольных проекций, которая была издана в литографированном виде. *Шварц* (Schwarz) в Journal von Crelle. Bd. 68 в 1863 г.,—дает элементарное доказательство теоремы *Польке*. *Делабар* (Delabar) в соч. „Anleitung zum Linearzeichnen“. Ч II, отд. 3. 1869 г.,—продолжает разработку теории косоугольных проекций.

Повторение работы *Ламберта* дает *Шлезингер* (Schlesinger) в своей „Darstellende Geometrie“. 1870. *Фидлер* (Fiedler W.) в своем капитальном трехтомном труде „Die darstellende Geometrie“. Leipzig. 1871. (2 Aufl. 1875, 3 Aufl. 1883),—дает строгую теорию аксонометрии и рассматривает этот метод в связи с геометрией положения.

Краткую и сжатую теорию аксонометрии дает в сочинении „Grundzüge der schiefen Parallelprojektion“, 1871, *Бурместр* (Burmester). Эти же проекции изложены и в литографированном издании его курса „Darstellende Geometrie“.

Краткая теория прямоугольной и кавальерной аксонометрии изложена в соч. *Гурнери* (Gournerie. J.) „Traité de Géométrie descriptive. Paris. 2 ed. 1873.

*Штаудигль* (Staudigl R.) в своем труде „Die axonometrische und schiefe Projection“. Wien. 1875,—разделяет все задачи аксонометрии на *проективные* и *метрические*. В проективных задачах свойства геометрических форм не зависят от способа проектирования этих форм. Например, проекция диагоналей куба при любом проектировании их всегда будут пересекаться в одной точке. В метрических же задачах вводится понятие меры, которая изменяется в зависимости от вида проектирования. Например, те же диагонали куба в зависимости от способа проектирования могут проектироваться в различные длины.

На польском языке известно сочинение *Wierzbicki Daniel'a* „Geometrya wykreslna“. Краков 1875.

Общую теорию аксонометрии разрабатывал также *Гаук* (Hauck) в соч. „Grundzüge einer allgemein axonometrischen Theorie der darstellenden Perspektive“ 1876, и *Пешка* (Peschka) в соч. „Freie schiefe Projektion“ (Sitzber. d. math. nat. cl. d. Ak. in Wien, B. 75, Abt. 2, 1877) и „Darstellende und projective Geometrie“ Wien 1883. Его же „Freie Perspektive“ 2 Aufl Leipzig I. 1888, II 1889.

В конце семидесятых годов профессор Московского университета Орлов в своих литографированных лекциях дал выводы основных формул теории прямоугольной аксонометрии.

В 1879 году в России были издан литографированный труд „Начертательная геометрия“. В моем экземпляре не обозначено имени автора. Последний дает краткую аналитическую теорию прямоугольной аксонометрии. По изложению же и по виду чертежей сочинение весьма похоже на ниже упоминаемый труд Михалева.

В 1880 года был издан в Петербурге А. Ланге и А. Рыковым литографированный курс лекций, читанных в Институте Инженеров Путей Сообщения Н. Макаровым в 1879—80 г.г. под заглавием „Изометрическая проекция“. В этом сочинении излагаются правила изометрического проектирования и способы построения тел в изометрических проекциях.

Весьма простые решения основных задач аксонометрии дает *Пельц* (Pelz) в ряде своих статей: „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie“ (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, B. 81, Abl. 2. 1880, B. 83, B. 2, Abt. 2. 1881 Bb. 40. 1884) и в „Beiträge zur wiss. Beh. d. orth. Axon.“ (Sitz. d. k. böhm. Gessellsch. d. Wiss. in Prag, 1884).

В 1880 г. появился на хорватском языке труд Marko Mikšič'a „Sistem deskriptivne geometrije“ Zagreb с изложением общих основ начертательной геометрии.

Многочисленные задачи с решениями на определение зависимости между показателями искажения и углами даны в соч. *Тезара* „Der orthogonal—axonometrischen Verkürzungskress“ (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, 81 Bd, 2 Abt. 1880).

Разработку теории косоугольной аксонометрии в частности, кавалерной можно найти в соч. *Брейто* (Breitho N.) „Traite de perspective cavalière“ 1881, и, в более общем виде, в соч. *Тессари* (Tessari) „Proiezioni assonometriche ortogonali ed oblique“ Torino. 1882.

В 1883 г. появилось сочинение на чешском языке *Мачовца* F „Lobrasování tečen a středů křivosti křivk“ с изложением общих основ начертательной геометрии. Строгая теория и, в особенности, довольно подробная история аксонометрии (до 1881 года) изложены в обстоятельном труде *Винера* (Wiener Christian) „Lehrbuch des darstellenden Geometrie“ Leipzig. Bd. I. 1884. и Bd. II. 1887.

В 1885 году в России профессор Института Инженеров П. С. В. И. Курдюмов напечатал первый из своих трудов по аксонометрии „Метод изометрических проекций“ СПб., в котором помещен образец предложенной им *изометрической клетчатки*, т. е. бумаги с сеткой линий, параллельных аксонометрическим осям. Навели же его на мысль изобрести такую клетчатку обстоятельства производства строительных работ на Кавказе, когда он, имея дело с подрядчиками и рабочими, плохо понимавшими русский язык, был вынужден очень часто прибегать к чертежам, построенным в изометрических проекциях, и искал способа, упрощающего массовое построение таких чертежей.

В том же 1885 году *Н. И. Макаров* издал второй том своих „Приложений начертательной геометрии“ СПб., во второй части которого помещил „способ изометрических проекций“.

В этом сочинении была высказана одна только основная идея аксонометрии и указаны три возможные вида прямоугольных аксонометрических проекций. Считая, однако, „изометрический способ проектирования наиболее употребительным в практике“ (что совершенно неверно), *Н. И. Макаров*, к сожалению, ограничился изложением одного только его. Следует также отметить, что отнесение *Н. И. Макаровым* изометрических проекций к *приложениям* начертательной геометрии является неправильным, так как эти проекции, равно как и вся аксонометрия являются особым методом начертательной геометрии. Кроме того, Макаров взамен установившегося термина

„косоугольное проектирование“, применяет давно вышедший из употребления „клинографическое или облическое проектирование“<sup>1)</sup>.

В 1887 году появился на чешском языке труд *Яролимек* (Jarolimek C). „Deskriptivni geometrie“ с изложением общих основ начертательной геометрии.

В 1887 году относится и труд *Бейеля* (Beyel Chr.), „Axonometrie und Perspektive“ Stuttgart.

В 1890 примеры построения аксонометрических изображений дал *Вондерлин* (Vonderlinn J.) в соч. „Lehrbuch des Projektionszeichens“ Stuttgart. Кроме того, подобные же примеры можно найти в сочинении его же „Darstellende Geometrie für Bauhandwerker“ (год неизвестен).

На русском языке краткая аналитическая теория прямоугольных аксонометрических проекций была изложена в литографированных лекциях *И. Е. Михалева* „Аксонометрия“ 1890 г.

По вольной перспективе или косоугольной проекции небольшой труд написал *А. Макавеев* „Курс геометрического черчения“ 1890 г. III-й отдел 2-го выпуска, в котором он рассматривает лишь практическую сторону вопроса—построение изображений, и не затрагивая теорию этих проекций. На чешском языке имеются труды, написанные до 1893 г. и заключающие изложение общих основ начертательной геометрии: *Ванечка* (Vaněček M.) „Posunování geom. útvarů“, *Рысавý Дом*. „Deskriptivni geometrie“ и *Тилшер* F. „Soustava deskriptivni geometrie lkonognosie“.

В 1893 написал небольшую статью о кавальерной перспективе *Жавари* (Javary A.) в труде „Traité de géométrie descriptive“ P. I. Paris.

*Берцолари* (Berzolar L.) издал в 1893 г. сочинение „Sull'assonometria ortogonale“ Parvia.

В том же 1893 г. в Софии *Шоурек* А. издал свой обстоятельный литографированный труд „Дескриптивна геометрия“, где имеется и глава об аксонометрии.

Более подробно и долгие остановиться на сочинении по аксонометрии моего учителя, профессора *В. И. Курдюмова* (черт. 54), вышедшем в 1-ом издании в СПб. в 1893 году под заглавием: „Курс начертательной геометрии Отдел III. Аксонометрия в прямоугольных и косоугольных проекциях“. Составил *В. И. Курдюмов*, профессор института инженеров Путей Сообщения Императора Александра I.

В этом сочинении автор впервые на русском языке дает полную и стройную теорию аксонометрии, как косоугольной, так и прямоугольной, причем пользуется аналитическим и графическим методами. Хотя при изложении теории аксонометрии *В. И. Курдюмов* пользовался главнейшими заграничными трудами, на которые он указывает в другом своем сочинении „Курс начертательной геометрии. Отдел I. Введение. Проекция ортогональные. Часть I. стр. XXXIV, однако, многие вопросы им были самостоятельно переработаны.

В особенности же заслуживает внимания ясность и методичность изложения, отличающая впрочем и все другие сочинения *В. И. Курдюмова*.

*В. И. Курдюмов*, методически излагая теорию аксонометрии, в начале выводит общие формулы прямоугольной аксонометрии, сопровождая исследование рядом ясных чертежей. При этом он вводит удачный новый термин „вторичная проекция“ для обозначения аксонометрической проекции от одной из ортогональных проекций изображаемого метода. Далее он разбирает графические методы решения теоретических задач прямоугольной аксонометрии и весьма подробно останавливается на аксонометрических масштабах.

В теории косоугольных проекций им подробно изложены вопросы, относящиеся к проектированию лишь на плоскость, параллельную одной или двум координатным осям, но совершенно не затронут общий случай распо-

<sup>1)</sup> См. *В. И. Курдюмов*. „Курс начертательной геометрии“. Отдел I, часть I СПб. 1895, стр. XXXVI.

ложения плоскости аксонометрических проекций, так как он считает этот случай не представляющим никаких особенных выгод.

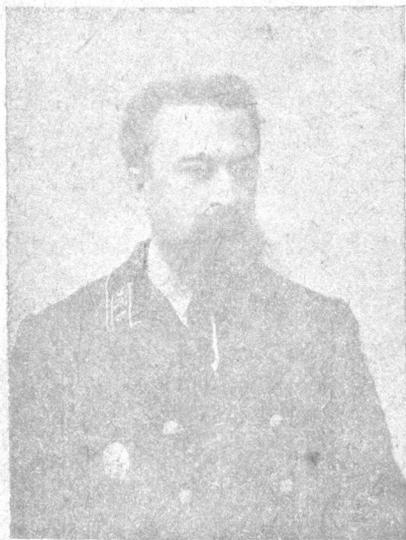
Поэтому в его сочинении мы не находим, например, известной уже в то время теоремы Польке.

Главную часть его труда составляет „Приложение аксонометрии к решению геометрических задач“, и, наконец, изложение он заканчивает главою „Приложение аксонометрии к построению теней“. Ниже, в соответственном месте, мы остановимся на разборе второго (1905 г.), значительно дополненного, издания того же труда. Здесь же мы приведем некоторые биографические сведения о В. И. Курдюмове.

### Краткая биография профессора В. И. Курдюмова.

Валериян Иванович Курдюмов был православный и родом из дворян Черниговской губернии. Родился он 12 октября 1853 г. Подробных сведений о его родителях, детстве и вообще о жизни до 20-летнего возраста имеется

весьма мало. Известно лишь, что он до 10 лет жил в Петербурге у своего отца. Потеряв последнего в этом возрасте, он был взят в Киев своим дядей, М. И. Курдюмовым и определен в первую Киевскую гимназию. В гимназические годы увлекался домашними спектаклями. Учился хорошо, но за латинский язык часто получал двойки, тогда как по математике всегда пятерки. Латинского языка он не любил и не хотел изучать. В результате, написав на выпускном экзамене русский перевод с латинского латинскими же буквами, он, окончив в 1873 году гимназию, не получил аттестата зрелости, необходимого для поступления в университет. По всем предметам, кроме латинского языка, у него отметки были отличные, и он получил об этом свидетельство, дававшее право держать конкурсные экзамены в специальные учебные заведения. Правда, он довольно сильно колебался в выборе своей дальнейшей карьеры. С одной сто-



Черт. 54.

роны, увлечение театром и успех нескольких написанных им пьес (например, „Воспитание—великое дело“), побуждали его поступать в Театральное Училище, с другой стороны, его привлекала и мысль о технической и научной деятельности. Во всяком случае он стал держать конкурсные экзамены в Петроградские Институты: Технологический и Инженеров Путей Сообщения и выдержал экзамены в оба института. По совету же своего дяди—выбрал Институт Инж. П. С. и был зачислен в последний по конкурсу двадцать пятым из 109 принятых.

В гимназические годы В. И. был всегда очень скромн в своей жизни, всегда весел, приветлив, остроумен и либерален во взглядах.

Повидимому, в первые годы своего обучения в Институте он испытывал материальную нужду, так как был освобожден по недостатку средств и за отличные успехи от платы за учебу. На 2-й курс он перешел первым по успехам.

В первое время своего пребывания в Институте В. И. еще порывался уйти в университет, интересуясь геометрией.

Однако, лекции, читавшиеся в Институте инженером Н. И. Дуровым по начертательной геометрии, примирили его с его положением и заронили в нем мысль самому совершенствоваться в этой науке, чтобы сделаться впоследствии профессором начертательной геометрии.

Успехи его в науках были отличные. В списках переходящих с курса на курс его фамилия значится почти всегда в первом десятке.

Наконец, в 1878 году, он окончил курс наук в Институте с дававшимся тогда званием гражданского инженера.

В том же году он поступает на службу в Департамент почтовых и водяных сообщений. Кроме того, тогда же он был оставлен при Институте сверхштатным репетитором без содержания.

Решившись, повидимому, стремиться к профессорской деятельности и сознавая в то же время необходимость в практическом цензе, он покидает Департамент и Институт и почти на 4 года посвящает себя работам по постройке Батумской железной дороги на Кавказе, где он работает у контрагента Бунге и Палашковского. К этому же времени относится его первый брак с Е. Н. Слободзинской, дочерью инженера Н. Слободзинского.

На Кавказе он проявил себя прекрасным инженером и начальником участка и произвел ряд ответственных построек на железно-дорожных ветвях Поти—Кутаис и Поти—Тьвибул, например, моста через реку Куру, глубокие выемки в скалистом грунте и т. п.

Во время этих работ в нем зародилась мысль о построении изометрической клетчатки, облегчающей массовое построение наглядных изображений различных сооружений и их деталей.

Возвратившись в 1884 году обратно в Петербург, он определяется на службу по Министерству Путей Сообщения и одновременно приглашается в Институт И. П. С. для репетиционных занятий. С этого года начинается его непрерывная кипучая деятельность в Институте и участие в различных сторонах его жизни. Можно, конечно, удивляться его работоспособности и равносторонней деятельности, когда он, исполняя целый ряд работ административного и организационного характера, в то же время находил время для составления и издания капитальных и многочисленных трудов по любимому своему предмету „начертательной геометрии“ и по строительному искусству, не говоря уже об организации им первой не только в России, но, пожалуй, и за границей фотографической лаборатории при высшем техническом учебном заведении.

Не касаясь пока хронологического описания появления его ученых трудов, подробный перечень которых приведен в конце статьи, перейдем к изложению главнейших моментов его жизни и работы в Институте.

В 1884 году он назначается редактором отдела сборника Института под заглавием „Труды преподавателей и материалы для институтских курсов“.

В 1885 году он был приглашен для ведения практических занятий по фотографии со студентами. Курс фотографии тогда читался В. И. Срезневским.

Летом того же года он получает командировку на русские железные дороги с целью собрания материалов по специальной железнодорожной архитектуре. Во время этой поездки он посетил и построенные им участки Батумской железной дороги с целью проверить правильность своих расчетов отверстий искусственных сооружений.

По возвращении своем в Петербург он приглашается для технических занятий в Департамент жел. дорог, где он работает до 1889 года по архитектуре и по эксплуатации жел. дорог.

Одновременно с сим он продолжает и свои занятия в Институте сначала в качестве вольнонаемного (1881 г.); потом и штатного (1887 г.) репетитора.

В семейной его жизни можно отметить состоявшийся в 1887 году его развод с женой.

Состоя репетитором в Институте, В. И. уже тогда отличался своею способностью ясно и увлекательно излагать студентам свои лекции, почему последние всегда имели громадный успех. Так, 3 ноября 1887 г., в день институтского праздника, состоялось его чтение в Институте о практических результатах преподавания фотографии в И—те. Во время лекции были демонстрированы на экране фотографии студентов, снятые с работ, производившихся в различных местах России.

Подобного же характера и с таким же успехом прошла его лекция в Институте 7 декабря того же года.

Исследуя вопрос о передаче давлений от фундаментов гражданских сооружений на грунт, он в 1888—89 гг. произвел в этом направлении ряд опытов вместе с преподавателем И—та П. К. Янковским для проверки теории последнего. Результаты этих опытов были изложены В. И. в его публичном чтении в Институте 7 ноября 1888 г., под заглавием „О сопротивлении естественных оснований“, между прочим, для наилучшей постановки этих опытов, он изобрёл лампу для вспышек магния, которая облегчила фотографирование движущихся частиц песка при падавливании песка на грунт.

Следует заметить, что опыты В. И. Курдюмова, воспроизведенные впоследствии берлинским профессором Мюллер-Бреслау, дали фотографическим путем картины распределения давлений в сыпучих телах. Картины эти послужили позднее прекрасным материалом для иллюстрации применения инженером Н. М. Герсевановым номографического интерпретирования волокнистых интегралов уравнений равновесия сыпучего тела, характеристиками которых и служат упомянутые кривые <sup>1)</sup>.

В 1884 году он избирается экстраординарным профессором И—та по кафедре строительного искусства и читает лекции по этому последнему, а также и по начертательной геометрии.

В 1890 году он женится вторым браком на Э. Н. Дуровой.

В 1892 г. он назначается заведывающим фотографической лабораторией Института и в то же время работает в хозяйственном комитете И—та, в качестве его члена.

Когда возникла мысль о постройке общежития для студентов И—та и были собраны средства на эту постройку, В. И. был назначен членом строительного комитета по постройке здания общежития, а в 1895 году, после окончания постройки, был избран заведывающим общежитием и сохранял эту должность до 1902 г.

В 1896 г. В. И. избирается ординарным профессором И—та.

Обрабатывая к печати свои курсы начертательной геометрии, он приурочил выпуск 1 отдела I-ой части этого сочинения почти к столетней годовщине с обнародования французским ученым Монжем своих лекций по начертательной геометрии, и поместил в своей книге портрет Монжа и краткую его биографию. Вместе с тем, совет И—та постановил послать в Париж, в те учреждения, где работал Монж (Академическую нормальную школу и Ecole des ponts et chaussées) упомянутое сочинение В. Курдюмова с биографией Монжа, в знак того, что в России воздают должное внимание к памяти французского ученого.

23 ноября 1897 г. в день годовщины И—та В. И. произносит в актовом зале речь „О развитии фотографии в И—те“.

Когда, в 1898 году, в И—те образовался научный кружок преподавателей, то В. И. принимал в нем деятельное участие.

Печатные труды В. И. по строительным работам обратили на себя внимание специалистов, благодаря своим выдающимся достоинствам, и в 1899 г. Советом И—та В. И. Курдюмову была присуждена за них премия К. К. Коковцева.

<sup>1)</sup> Н. Герсеванов. „Основание номографического исчисления с приложением их к инженерному делу“. Вып. II-й. „Номографические интегрирования“. СПб. 1908. Стр. 1:26.

Параллельно с другими работами В. И. деятельно занимался развитием фотографической лаборатории И—та, в которой с интересом занимались студенты И—та. (Например, в 1901/02 уч. году число посещений студентами дошло до 339).

В 1901 г. ему было предложено временно принять на себя обязанности инспектора Института, а с 1902 г. он был и утвержден в этой должности, отказавшись лишь от заведывания общежитием.

Следует заметить, что за время заведывания общежитием, им составлялись образцовые отчеты о ведении этого дела, печатавшиеся в Сборнике И—та.

Во время своей службы в И—те В. И. неоднократно принимал участие в экзаменах посторонних И—ту лиц на звание техника путей сообщения.

Обязанности инспектора В. И. исполнял до конца 1904 года. Этот тяжелый труд в связи с чрезмерным напряжением сил по составлению и изданию ряда своих печатных трудов и остальной деятельностью по Институту, усилили болезнь сердца его, которую он давно страдал, и после непродолжительной болезни он скончался в Петербурге 28 декабря 1904 г. Погребен В. И. был в Царском Селе. Студенты Института возложили на его гроб венки со следующей надписью:

„Незабвенному Валериану Ивановичу Курдюмову—студенты V-го курса.

Плоды дарования твоего и труда просвещают нас и грядущих за нами. Имя твое, имя честного труженика и славного слуги своей родины не умрет, а послужит для всех примером на поприще ученой и общественной деятельности“.

После покойного остались дочь его, Лидия, от первого брака, и сын Всеволод—от второго.

В отношении официальной оценки его трудов можно упомянуть, что он имел чин действительного статского советника и ордена до св. Владимира 4-ой степени включительно.

Из личных своих воспоминаний я помню Валериана Ивановича, как доброго человека, безукоризненной честности, строго, но справедливо относившегося к студентам, по во много раз строже к исполнению своих обязанностей.

Следует отметить в нем талант к педагогике. Он соединял в себе редкое сочетание прекрасного инженера, хорошего ученого и педагога по призванию. Часто меняя приемы преподавания, в особенности по начертательной геометрии, он стремился заинтересовать студентов и, действительно, успевал в этом. Среди моих товарищей по И—ту, многие не ограничивались лишь официальной сдачей зачетов и экзаменов по этому предмету, но изучали его глубже.

Часто В. И. заменял лекции беседами со студентами, вызывая некоторых из них к доске и разбирая с ними казавшиеся наиболее трудными вопросы.

Летние вакансии он проводил в Царском Селе, где он обдумывал свои курсы, занимаясь, в виде отдыха, разработкой своего небольшого сада, который привлекал своей красотой внимание прохожих и знатоков садоводства.

Память о светлой личности покойного сохранится у всех его сотрудников и учившихся у него, а прекрасный памятник о себе он оставил в виде своих печатных трудов по строительным работам и курса начертательной геометрии.

Заметим еще, что, занимаясь разработкой различных вопросов начертательной геометрии, он хотя и не разрешил, но формулировал задачу о том, по какой линии могут касаться две поверхности.

Эта задача известная под названием „Задачи профессора Курдюмова“ была после смерти его предметом исследования разных ученых и получила разрешение<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. М. Ребиндер „С касанием двух поверхностей по некоторой кривой линии“ (задача профессора Курдюмова). Юрьев. 1909 г.

Привожу, в заключение, список сочинений профессора В. И. Курдюмова, составленный мною в хронологическом порядке.

Список сочинений В. И. Курдюмова.

(В хронологическом порядке).

- 1) 1886 г. „Метод изометрических проекций“ (с 4 листами чертежей и образчиком изометрической клетчатки <sup>1)</sup>). Предисловие к этому сочинению имеет дату 6 января 1885 г.). Напечатано в выпуске V Сборника Института И. П. С. Императора Александра I-го.
- 2) „ „ „Отчет инженера В. Курдюмова, командированного на русские железные дороги с целью собрания материалов по специальной железнодорожной архитектуре“. (Журнал „Инженер“. Т. I, кн. 2).
- 3) 1889 г. „О сопротивлении естественных оснований“. Публичное чтение инженера В. И. Курдюмова, состоявшееся 7 ноября 1888 года в конференц-зале Института (Журнал М-ва П. С. № 8 за 1889 г.).
- 4) 1890 г. „Краткий курс оснований и фундаментов с приложением статьи о свайных работах“.
- 5) 1891 г. „К вопросу о сопротивлении естественных оснований“. Публичная лекция инженера В. И. Курдюмова 11 декабря 1889 г.
- 6) „ „ „Курс начертательной геометрии с приложением теории проекций с дополнительными числами“. Изд. литографированное.
- 7) ? „ „Общие понятия об аксонометрии“. Изд. литогр. Год не указан. Вероятно, около 1891 г.
- 8) 1892 г. „Аксонометрия в прямоугольных и косоугольных проекциях или параллельная перспектива“. Выпуск XXIII Сборника И. И. П. С.
- 9) „ „ „Сопряжения деревянных частей“. Конспект лекций В. И. Курдюмова.
- 10) 1893 г. „Курс начертательной геометрии“. Отдел III. „Аксонометрия в прямоугольных и косоугольных проекциях“.
- 11) 1894 г. „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск I. „Дерево“. Вып. XXV. Сборн. И. И. П. С.
- 12) „ „ „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск II. „Земляные работы на местности, покрытой водою“. Вып. XXVII. Сборн. И. И. П. С.
- 13) „ „ „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск III. „Свайные работы“. Изд. II-ое. Вып. XXVII. Сборн. И. И. П. С.
- 14) „ „ „Таблицы для расчета земляных работ“. Вычислены и проверены студентами II-го курса И. И. П. С. в 1893/94 г. (с предисловием В. И. Курдюмова).
- 15) „ „ „Курс начертательной геометрии“. Отдел II. „Проекция с числовыми отметками“. Вып. XXVII. Сборн. И. И. П. С.
- 16) „ „ „Теория теней“. Лекции профессора В. И. Курдюмова, составленные студентом И. Циневским. Изд. литогр. Имеется еще одно литографированное издание „Теории теней“ без указания года, но, по видимому, более раннее.
- 17) „ „ „Введение в курс начертательной геометрии. Теория проекций“. Изд. литогр. Год не указан.
- 18) „ „ „Теория перспективы“. Изд. литогр. Год не указан.

<sup>1)</sup> Место издания всех сочинений — С.-Петербург, за исключением особо упомянутых.

- 19) 1895 г. „Сопряжение деревянных частей“. Литографированный конспект лекций В. И. Курдюмова. 2-ое издание.
- 20) „ „ „Курс начертательной геометрии“. Отдел I. „Введение. Проекции ортогональные. Часть I-я. Проекция точек, прямых линий и плоскостей“.
- 21) „ „ „Задачник по начертательной геометрии“. Четыре выпуска в литогр. издании. Год не указан, по до 1896 г.
- 22) „ „ „Дорожная камера „Alliance“. (Русск. Фотогр. Журн. 1895 г. № 1)“.
- 23) 1896 г. „Курс начертательной геометрии“. Лекции, читанные профессором, инженером В. И. Курдюмовым, в 1895—96 уч. году. Литогр. издание студента Долгова.
- 24) 1897 г. „Курс Начертательной Геометрии“. Отдел I. „Способы образования и геометрические свойства кривых линий и поверхностей. Проекция ортогональные. Часть II. Проекция кривых линий и поверхностей“.
- 25) „ „ „Курс строительных материалов“, читанный профессором Института В. И. Курдюмовым. Издание (литогр.) студента С. Макаревича.
- 26) „ „ „Сопряжения деревянных частей“. По лекциям профессора В. И. Курдюмова. Москва. Импер. М. Т. У. Ведомства П. С.
- 27) 1898 г. „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск I. „Дерево“. Издание 2-ое (в сотрудничестве с Н. Н. Митинским).
- 28) „ „ „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск III. „Свайные работы“ Изд. 3-е.
- 29) „ „ „Краткий курс оснований и фундаментов“. Издание 2-е.
- 30) 1899 г. „Фотографическая лаборатория Института Инж. П. С. Императора Александра I“. Вып. I Сборника И. И. П. С.
- 31) „ „ „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск IV. „Каменная кладка“. Вып. XLV. Сборн. И. И. П. С.
- 32) 1900 г. „Фотографическая лаборатория И. И. П. С.“. Отчет о работах. Вып. LIII Сборника И. И. П. С.
- 33) „ „ „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск V с отдельным атласом чертежей. „Деревянные сопряжения“. Составили В. И. Курдюмов и Е. Ю. фон-Пистолькорс.
- 34) „ „ „Искусственные песчано-известковые камни, так называемые силикатные и насыщенные углекислотой“. Вып. LIV. Сборника И. И. П. С.
- 35) 1901 г. „Фотографическая лаборатория И. И. П. С.“. Отчет о работах. Вып. LV Сборника И. И. П. С.
- 36) 1902 г. „Краткий курс оснований и фундаментов“. Изд. 3-е.
- 37) 1903 г. „Материалы для курса строительных работ“. Вып. I. „Дерево“. Издание 3. (Вып. LXI Сборника И. И. П. С.).
- 38) 1904 г. „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск IV. „Каменная кладка“. Изд. 2-е. Вып. LXI Сборника И. И. П. С.
- 39) 1905 г. „Материалы для курса строительных работ“. Выпуск II. „Земляные работы“. Издание 3-е. (Обработано самим автором. Вышло в свет после его смерти). Вып. LXVI Сб. И. И. П. С.
- 40) 1905 г. „Курс начертательной геометрии“. Отдел III. „Проекция аксонометрические, прямоугольные и косоугольные“. Изд. 2-е.

Продолжаем исторический обзор развития аксонометрии.

В 1896 г. вышло в свет сочинение А. Вейлера (Weiler, A.). „Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie“. 2-е Auflage. Leipzig. В нем автор излагает теорию аксонометрии.

*Ожань* (Osagne, M.) в своем курсе „Cours de Géométrie descriptive“. Paris, 1896,—также излагает краткую теорию аксонометрии, при чем в начале суживает вопрос, ограничиваясь двумя координатными осями, вместо трех.

На английском языке краткую теорию изометрических проекций можно найти в сочинении *Эванса* (Evans, Th. J.) „A treatise on practical plane and solid Geometry“. London. 1897.

*Вилсон* (Willson, F. N.) в Америке издал в 1898 г. свой труд „Descriptive Geometry“. New-York, в котором излагает краткую теорию прямоугольных (изометрических) и кавальерных проекций.

В 1890 г. *А. Магжассев* в России издал „Курс геометрического черчения“, в котором описывает способы построения аксонометрических изображений, не излагая, впрочем, теории этих построений. Он же в 1898 г. выпустил в свет „Проекционное черчение“,—СПБ., где повторяет подобное же изложение.

*Штурм* (Sturm, R.) в сочинении „Elemente der darstellenden Geometrie“. Leipzig. 1900, дает краткую теорию прямоугольной и косоугольной аксонометрии.

Краткую теорию изометрических проекций излагает *Илс* (Eagles, T. H.) в соч. „Descriptive Geometry“. London. Около 1900 года.

*Пилле* (Pillet, J. J.) в своем прекрасном сочинении „Traité de perspective linéaire“. Paris, 1901, дает в конце краткое изложение основ кавальерной и изометрической аксонометрии.

Более подробно и с математическим анализом исследует теорию аксонометрии *Энрикес* (Enriques, F.) в соч. „Lezioni di Geometria Descrittiva“. Bologna, 1902.

В 1902 году в России *Саварков, В.*, выпустил литографированное издание своей „Аксонометрии“, где сделал сводку многих формул прямоугольной и косоугольной аксонометрии и изложил теорему Польке.

*Бейель* (Beyel C.) в своем труде „Über Axonometrie und Schiefe Parallelprojektion“. (Archiv f. M. u. P. III Rh., Bd. 4. 1903) также повторяется изложение основ аксонометрии.

О кавальерной перспективе говорит *Чиани* (Ciani E.) в „La prospettiva cavaliere a quarantacinque gradi“. Milano. 1903. Более подробно касается общей теории *Сайно* (Sayno A.) „Lezioni di Geometria Descrittiva“ Pavia 1903—04, связывая ее с теорией проективной геометрии.

В 1903 г. появился в России перевод с немецкого сочинения *Глазер Ф., Штаде Ф. и Зейдель М.* „Браткий курс геометрического черчения“. СПб., где изложена краткая теория косоугольных проекций.

Еще можно отметить вышедший в Москве в 1903 г. перевод с немецкого сочинения *Фолька* „Составление перспективных эскизов деталей машин“, где даются практические правила и указываются наиболее удобные углы между аксонометрическими осями для составления аксонометрических эскизов, которые переводчиком, а, вероятно, и автором не совсем правильно названы перспективными.

Много примеров применения аксонометрии в науке и технике указывает *Шиллинг* (Schilling F.) в соч. „Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie“. Leipzig und Berlin. 1904.

*Льотти С.* в своей „Аксонометрии“. СПб., 1904 г., (литогр. изд.)—дает конспективное изложение упомянутого выше сочинения В. Курдюмова.

*Шюсслер* (Schüssler R.) в соч. „Orthogonale Axonometrie“ Leipzig und Berlin, 1905, повторяет теорию прямоугольной аксонометрии.

*Вондерлинн* (Vonderlinn J.) в труде „Parallelperspektive; rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie“. Leipzig, 1905,—излагает общую теорию аксонометрии.

В 1905 г. вышло в свет 2-е издание сочинения *В. И. Курдюмова* „Курс начертательной геометрии“. Отдел III. „Проекция аксонометрические, прямоугольные и косоугольные“. СПб.

В этом сочинении автор показывает, что две аксонометрические проекции предмета: основная и вторичная вместе с аксонометрическими осями вполне определяют положение изображаемого предмета относительно плоскостей проекций.

Далее, автор самостоятельно разработал теорию косоугольных проекций на плоскость, параллельную одной координатной оси, дал решение ряда задач, устанавливающих зависимость между элементами аксонометрического проектирования, и построил график сравнительных минимумов показателей искажения в их диметрических проекциях.

Кроме того, в этой книге помещена глава „Приложение аксонометрии к построению технических чертежей“, в которой автор подробно разбирает вопрос о наилучшем выборе плоскости аксонометрических проекций в зависимости от вида изображаемого предмета, дает правила построения аксонометрической клеточки и приводит ряд примеров аксонометрических изображений технических предметов.

*Ринин, Н. А.* в своей брошюре „Применение метода аксонометрических проекций к решению некоторых задач механики“. СПб., 1905, напечатанной в Известиях С.-Петербур. Полит. И—та, предлагает способы решения задач механики в этих проекциях.

*Рон и Папперитц* (Rohn R. und Papperitz E.) в своих сочинениях: „Lehrbuch der parallelprojectionen und Axonometrie“. Bd. II. u. III. 3 Aufl. Leipzig, 1906 u. Bd. I. 4 Aufl, 1912, снова сделали сводку правил и теории аксонометрии.

Много технических примеров построения аксонометрических изображений можно найти в соч. *Гейнера* (Geyger E.), „Die angewandte darstellende Geometrie“. Leipzig. 1906.

Общую теорию излагает *Гиббен* (Ghijben Badon J.) в соч. „Gronden der Beschrijvende Meetkunde“. Breda, 1906.

Наглядные и интересные примеры применения аксонометрии к изображению различных зданий и их деталей дает *О. Шуази* в своей „Истории архитектуры“, пер. с французск. Москва, 1905—07. Т. I и II.

*Ринин Н. А.* в литографированных изданиях своего сочинения „Аксинометрические проекции“. СПб. 1-е изд., 1906 г., 2-ое—1912 г., 3-е—1917 г.,—постепенно развивал изложение аксонометрии в применении к задачам технических отделений Петроградского Политехнического Института.

*Лориа* (Loria G.) в своих „Vorlesungen über darstellende Geometrie“ Leipzig u. Berlin. 1907,—дает строгую теорию косоугольной и прямоугольной аксонометрии: Это сочинение является переводом с итальянского литографированного издания, вышедшего позднее в печатном виде под заглавием: „Metodi di Geometria Descrittiva“. Milano, 1909.

*Гаас* (Haass L.) в соч. „Die Schatten—Konstruktionen. Die Axonometrische Projektion und die Perspektive“. Leipzig, 1907, излагает краткую теорию аксонометрии.

Новый шаг в развитии аксонометрии делает русский профессор *Е. С. Федоров*, разрабатывая теорию аксонометрии (хотя этого термина он не употребляет) при исследовании вообще косых и векторвальных проекций в сочинении „Новая геометрия, как основа черчения“. СПб. 1907 г.

*Шенфлисс* (Schoenfliss A.) в соч. „Einführung in die Hauptgesetze der Zeichnerischen Darstellungs-methoden“. Leipzig und Berlin, 1908, излагает краткую теорию аксонометрии, связывая ее с проективной геометрией.

Интересные применения прямоугольной аксонометрии к изображению шара и круга с теоретическими исследованиями дает *Рихтер* (Richter) в соч. „Kreis und Kugel in senkrechter Projektion“. Leipzig und Berlin, 1908.

*Гаусснер* (Haussner R.) в своей „Darstellende Geometrie“. Erster Teil. Leipzig. 1908 (Sammlung Göschen), излагает краткую теорию косоугольного проектирования на плоскость, параллельную двум координатным осям.

Применение кавальерной перспективы показано в соч. *Дюпюи* и *Ломбарда* (Dupuis A. et Lombard J.) „Cours de dessin industriel“. Paris, 1910.

*Маккавеев А.* в сочинении „Начертательная геометрия“. СПб., 1910 г., дает изложение теории косоугольной и прямоугольной аксонометрии, без вывода соответствующих формул и касаясь лишь изометрической прямоугольной проекции и косоугольной проекции на плоскость, параллельную двум координатным осям.

Краткое изложение правил составления аксонометрических эскизов можно найти и в литографированных „Записках по черчению“. СПб. 1910. *А. Голозина.*

*Дальвиш* (Dalwigk F.) в сочинении „Vorlesungen über Darstellende Geometrie“. В. I. Leipzig u. Berlin, 1911, излагает краткую теорию аксонометрии.

Случай прямоугольной и изометрической проекции разбирает и *Брикар* (Bricard R.) в „Géométrie descriptive“. Paris. 1911.

*Гаук* (Hauck G.) в „Vorlesungen über Darstellende Geometrie“. Leipzig u. Berlin. 1912, приводит краткую теорию косоугольной и прямоугольной аксонометрии.

Примеры построения аксонометрических изображений, но без теории, дает *Киршicke* (Kirschke A.) в „Die darstellende Geometrie des Maschinentechnikers“. Leipzig. 1912.

Сжатую теорию и много технических примеров дает также *Мюллер* (Müller) в „Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen“. Bd. II. Leipzig und Berlin, 1912.

*Шмид* (Schmid Th.) в соч. „Darstellende Geometrie“. Berlin u. Leipzig, 1912, дает стройную теорию прямоугольной аксонометрии и показывает применение ее к решению ряда геометрических задач.

Весьма краткая и страдающая некоторыми недостатками теория изложена в русском переводе с немецкого сочинения *Дитцеля* (Dietzel C.) „Элементы прикладного проекционного черчения“. Москва, 1912.

Краткие сведения о кавальерной перспективе дает и *Клоке* (Cloquet L.) в своем курсе „Traité de perspective pittoresque“. Paris, 1913.

Следует отметить сочинение *М. Дашевского* „Основания для объединения главнейших методов проектирования“. СПб. 1913, в котором он делает попытку дать общую теорию методов проектирования, исходя из методов координат.

Краткое изложение основ аксонометрии без вывода формул дает *Гюельмслев* (Hjelmslev) в „Darstellende Geometrie“. Leipzig und Berlin, 1914.

*Рынин Н. А.* в сочинении „Начертательная геометрия. Методы изображения“. Петроград, 1916 г., рассматривает аксонометрию, как частный случай одной из задач проективной геометрии.

*Федоров Е. С.* подходит к аксонометрии с точки зрения вообще косых проекций и в частности предлагает метод, аналогичный методу военной перспективы в своем сочинении „Новая начертательная геометрия“. Петроград, 1917 (Известия Академии Наук). Следует заметить, что Е. Федоров (черт. 55) дает в своих многочисленных сочинениях по геометрии и кристаллографии ряд новых взглядов на методы геометрии. Идеи его находят интересные и практические применения в химии, технике и в других науках. Имя Е. С. Федорова давно пользуется заслуженной известностью как в России, так и за границей.



Черт. 55.

Заканчивая этот беглый обзор различных сочинений, затрагивающих вопросы аксонометрии, можно сделать следующее общее заключение.

Большинство авторов давали лишь компилятивное изложение уже известной теории и практики применения аксонометрии в соответствии с программами преподавания в различных учебных заведениях.

Из авторов же оригинально разрабатывавших новые вопросы теории аксонометрии можно отметить следующих: Ламберт (1759), Керстеп, (1775), Фейрич (1820), Мёллингер (1840), Вейсбах (1844), Польке (1853), Фидлер (1871), Штаудигль (1875), Целльц (1880), Курдюмов (1885—1905), Сайно (1903), Лорра (1907), Дешевой (1913), Рыжви (1916) и Федоров (1917).

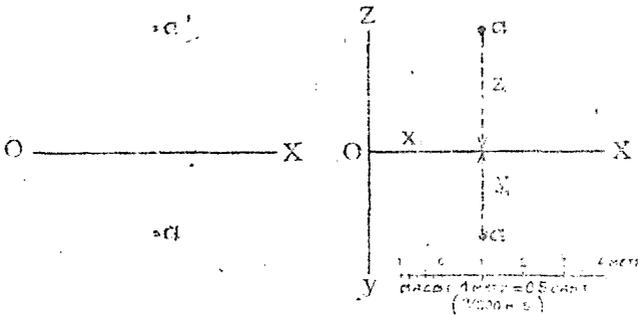
## Г Л А В А II.

### ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.

#### § 5. Построение аксонометрического изображения предмета по данным его ортогональным проекциям.

Так как главнейшая задача применения аксонометрии в технике заключается в построении наглядных изображений предметов, то мы рассмотрим прежде всего этот вопрос.

При этом, на основании теоремы 6-й (стр. 10) и общего заключения, приведенного в конце § 3-го (стр. 33), мы будем решать вопрос независимо от того, как проектируется предмет прямо или косоугольно, и каковы показатели искажения. В этом отношении курс будет отличаться от других подобных, и применяемый нами метод мы называем *общим методом* решения аксонометрических задач. Аксонометрические оси будем выбирать, согласно заключению на стр. 34 так, чтобы изображение получалось возможно нагляднее, или, когда требуется, возможно удобоизмеримее.



Черт. 56.

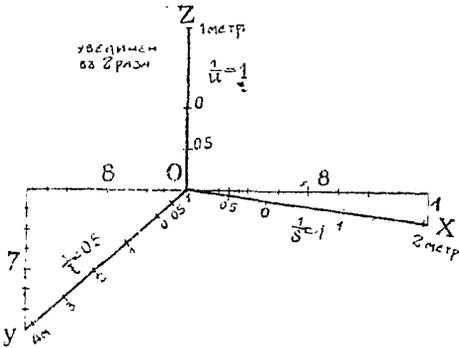
Черт. 57.

При построении изображения любого предмета в аксонометрических проекциях предлагается придерживаться следующего плана:

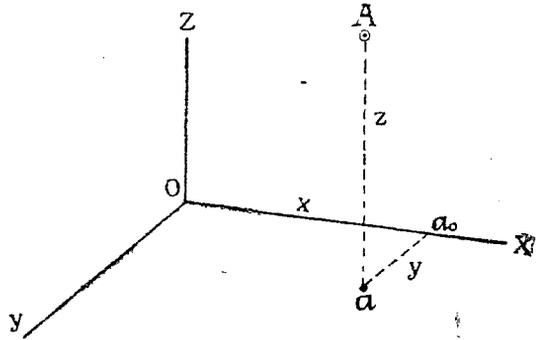
- 1) Разметка координатных осей на чертеже в ортогональных проекциях.
- 2) Построение аксонометрического масштаба.
- 3) Построение вторичной проекции предмета.
- 4) Построение аксонометрической проекции самого предмета.

*Задача № 6.* Дана точка  $A$  в ортогональных проекциях (черт. 56). Требуется построить ее изображение в аксонометрии. Увеличить чертеж в 2 раза.

*Решение.* 1) Задаемся случайным положением третьей координатной плоскости  $W$ , выбирая ее, например, слева от точки  $A$  и принимая точку  $O$  за начало координат. Следы  $W$  на  $V$  и  $H$  обозначим буквами  $OY$  и  $OZ$ . Тогда координаты точки  $A$  выразятся отрезками  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  (черт. 57). Пусть масштаб чертежа в ортогональных проекциях равен 1 метру = 0,5 сент. ( $\frac{1}{200}$  нат. вел.).

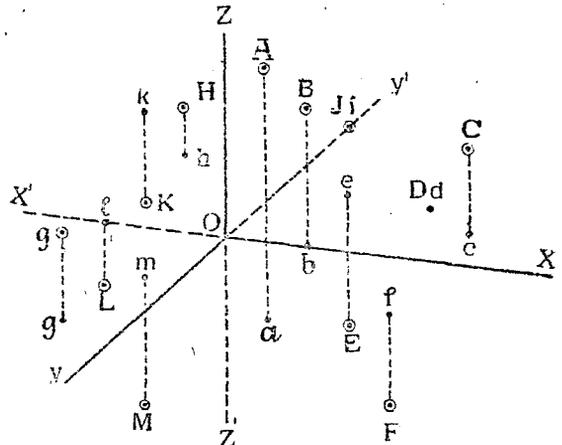


Черт. 58.



Черт. 59.

2) Переходим к аксонометрическому изображению и строим прежде всего аксонометрический масштаб (черт. 58). Задаемся ранее рекомендованными уже (стр. 34) направлениями осей по тангенсам углов наклона их к горизонту ( $tg\alpha = \frac{1}{8}$ ,  $tg\beta = \frac{7}{8}$ ). Проекция принимаем диметрические:  $\frac{1}{s} = \frac{1}{u} = 1$ ;  $\frac{1}{t} = 0,5$ . Разбивка масштабов делается следующим образом: так как, по заданию, чертеж должен быть увеличен в 2 раза, то для осей  $Z$ -ов и  $X$ -ов, для которых  $\frac{1}{s} = \frac{1}{u} = 1$ , масштаб будет в 2 раза крупнее масштаба чертежа в ортогональных проекциях, т. е. будет 1 метр = 1 сент.



Черт. 60.

Для оси же  $Y$ -ов, для которой показатель  $\frac{1}{t} = 0,5$ , масштаб будет 1 метр = 0,5 сантиметра  $\times 2 \times 0,5 = 0,5$  сент.

На основании этих соображений делаем разбивку всех трех масштабов (черт. 58). Таким образом, при построении аксонометрического изображения, координаты  $x$  и  $z$  будут по сравнению с чертежом 57 увеличиваться в 2 раза, а координата  $y$  — останется без изменения.

3) Строим вторичную горизонтальную проекцию  $a$  точки  $A$  (черт. 59), где аксонометрические координаты будут  $x = 2x_1$  и  $y = y_1$ .

4) Строим аксонометрическую проекцию самой точки  $A$  по ее вторичной горизонтальной проекции и по аксонометрической координате  $z = 2z_1$ .

Точка  $A$  расположена в I-м угле пространства, в котором находится и зритель. Конечно, можно было бы зрителя поместить в любом из восьми углов пространства, тогда соответственно изменилось бы расположение и обозначение аксонометрических осей (см. схемы чертежа 19). Точка же  $A$  оставалась бы в I-м угле. Если бы мы плоскость  $W$  перенесли на черт. 56 вправо от точки  $A$ , то последняя очутилась бы в V-м угле. Предлагаем читателю для упражнения построить изображения точки  $A$  в предположениях, что  $\alpha$ ) зритель находится последовательно в углах II, III, . . . VIII, точка  $A$  лежит в I угле (черт. 57).  $\beta$ ) точка лежит в V-м угле. Всего получится 16 изображений (считая и черт. 59).

В зависимости от того, в каком угле лежит изображаемая точка, и в каком находится она относительно от какой-нибудь координатной плоскости или оси проекций, аксонометрическая и вторичная горизонтальная проекции точки могут занимать разные относительные положения друг к другу и к аксонометрическим осям.

Так, аксонометрическая проекция может лежать над вторичной (точка располагается над  $H$ ), совпадать с ней (точка лежит в  $H$ ), или быть под нею (точка лежит под  $H$ ) и т. д.

На черт. 60 показаны в аксонометрии, в виде примера, различные расположения точек относительно плоскостей проекций, именно:

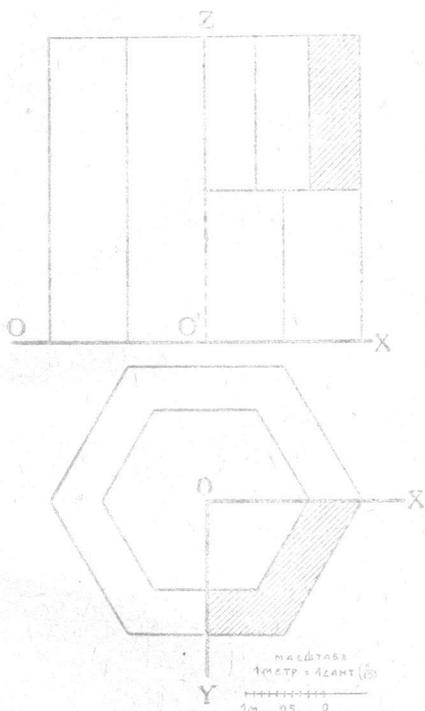
Точка $A$	лежит	в I-м угле.
" $B$	"	на верхней поле $V$ между I-м и II углами.
" $C$	"	во II-м угле.
" $D$	"	на задней поле $H$ между II-м и III-м углами.
" $E$	"	в III-м угле.
" $F$	"	в IV-м угле.
" $G$	"	в V-м угле.
" $H$	"	в VI-м угле.
" $I$	"	на задней стороне оси $Y$ -ов.
" $K$	"	в VII-м угле.
" $L$	"	на нижней поле $V$ между VII и VIII углами.
" $M$	"	в VIII-м угле.

**Задача № 7.** Построить аксонометрическое изображение чугунной отливки, заданной в ортогональных проекциях (черт. 61). Увеличить чертеж в  $1\frac{1}{2}$  раза. Часть изображения показать в разрезе согласно чертежа.

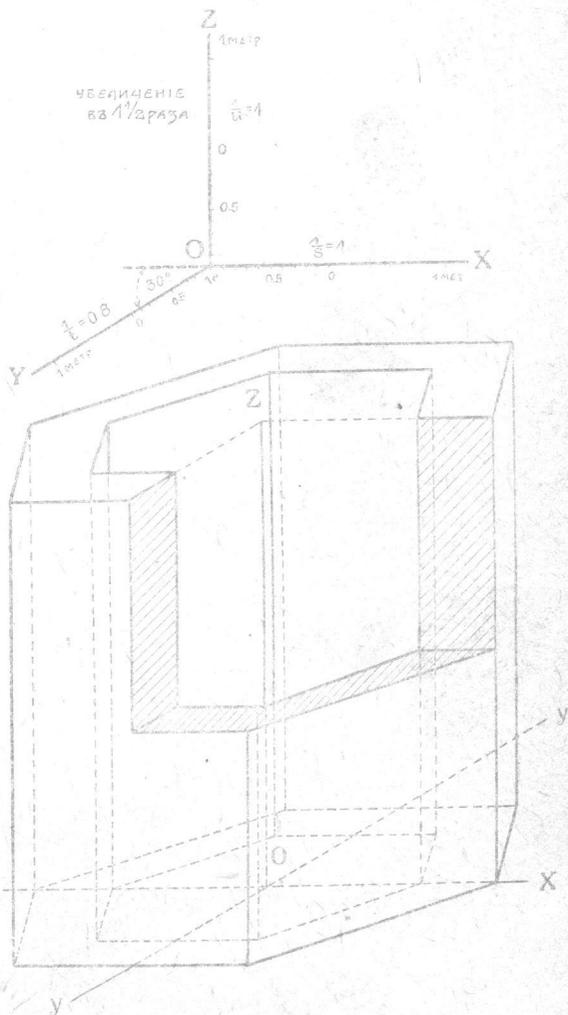
**Решение.** 1) Выбираем оси  $OXYZ$ , как показано на чертеже в ортогональных проекциях. Плоскость аксонометрических проекций располагаем совпадающей с координатной плоскостью  $OXZ$ . При таких условиях проектирование будет косоугольным; все же линии и углы, параллельные плоскости  $OXZ$ , будут проектироваться без искажения.

2) Строим аксонометрический масштаб (черт. 62) вверху. Его оси  $OX$  и  $OZ$  будут под прямым углом друг к другу. Ось  $OY$  проведем под углом  $30^\circ$  к  $OX$ . Для оси  $OY$  выберем показатель  $\frac{1}{t} = 0,8$ .

При таком выборе осей зритель располагается в I-м угле пространства, а предмет—в I, II, V и VI. Принимая во внимание заданное увеличение в  $1\frac{1}{2}$  раза, найдем, что масштаб для осей  $OX$  и  $OZ$  будет 1 метр  $= 1 \times 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$  сант., а для оси  $OY$ —1 метр  $= 1 \times 1\frac{1}{2} \times 0,8 = 1,2$  сант.



Черт. 61.



Черт. 62.

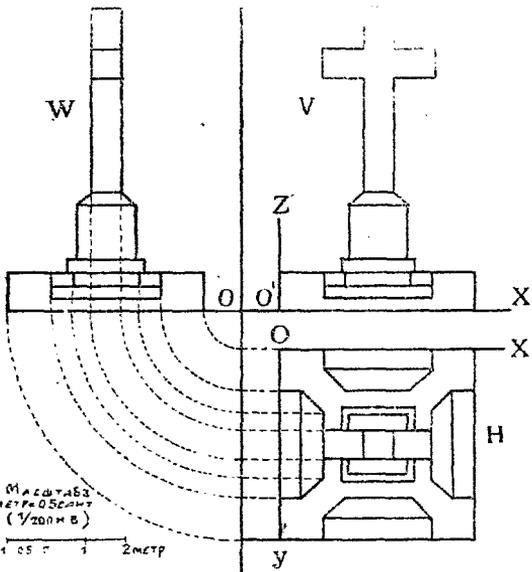
При таких масштабах и аксонометрических осях изображение получится по чертежу 62.

*Задача № 8.* Построить аксонометрическое изображение монумента, заданного в ортогональных проекциях на черт. 63, в масштабе 1 метр  $= 0,5$  сант.; чертеж увеличить в 2 раза. Аксонометрические оси расположить по чертежу 64. Показатели искажения даны:

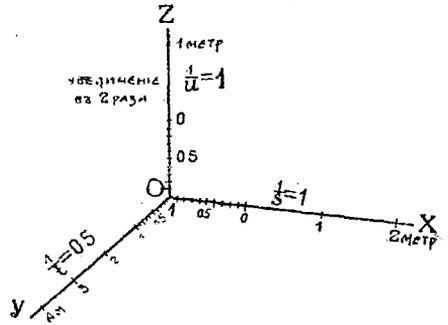
$$\frac{1}{s} = \frac{1}{t} = 1; \quad \frac{1}{t} = 0,5.$$

Оси расположить по направлениям  $OXYZ$  (черт. 63).

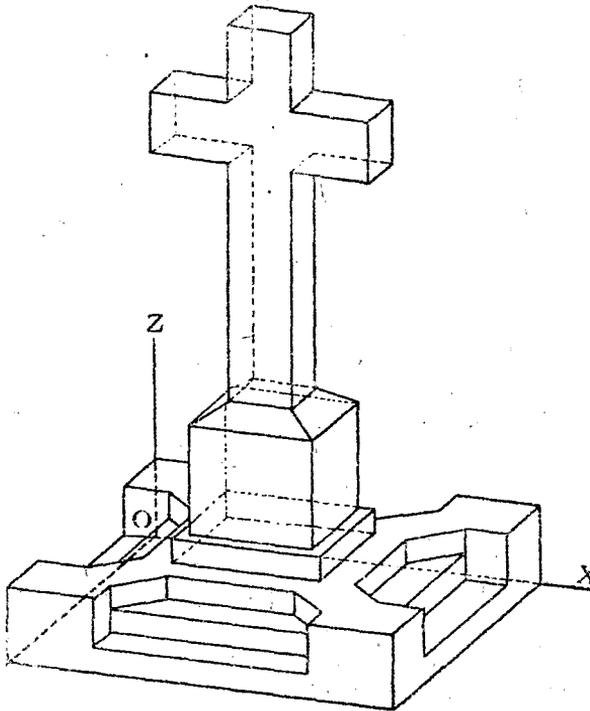
*Решение.* Размечаем по аксонометрическим осям масштабы. Для осей  $OX$  и  $OZ$  последние будут 1 метр  $= 0,5 \times 2 = 1$  сантим. Для оси  $OY$  — 1 метр.  $= 0,5 \times 2 \times 0,5 = 0,5$  сантим. При таких условиях изображение получится по чертежу 65-му.



Черт. 63.



Черт. 64.



Черт. 65.

трической клетчаткой. Впервые для изометрических прямоугольных проекций предложил ее профессор В. И. Курдюмов. Здесь же мы приводим несколько измененный нами вид клетчатки, приспособ-

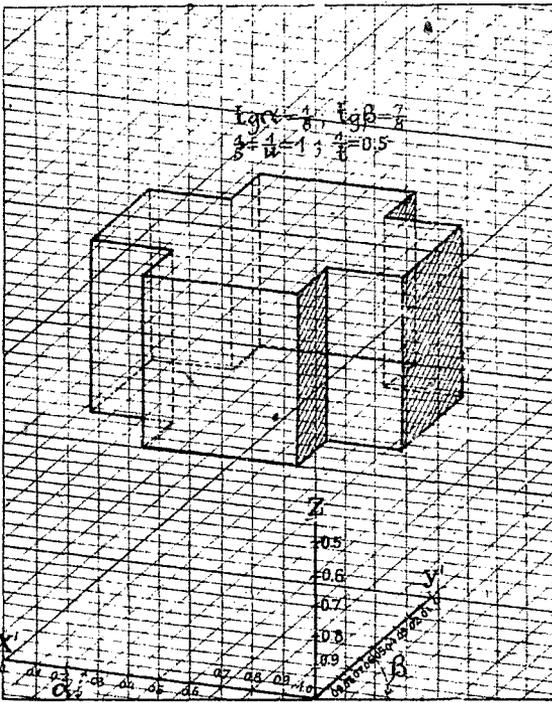
собленный для направления осей, дающих наиболее наглядное изображение

$$\left( \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8}, \operatorname{tg} \beta = \frac{7}{8} \right).$$

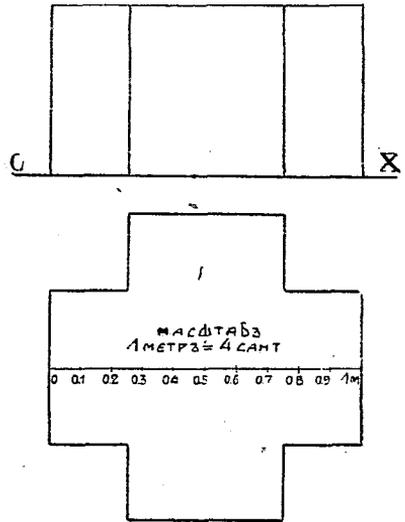
Соответственно этому проведены линии под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к нижней рамке чертежа 66-го, изображающего эту клетчатку и, кроме того, проведены вертикали. Показатели искажения приняты:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{u} = 1; \frac{1}{t} = 0,5.$$

Толстые линии  $\parallel OY'$  проведены через 4 сант., а параллельные оси  $OX'$ —через 2 сант. Пусть, например, требуется изобразить на клетчатке в натуральную величину каменный массив, данный на чертеже 67 в ортогональных проекциях в масштабе 1 метр=4 сант. Тогда масштаб для  $OX$  и  $OZ$  будет 1 метр = 4 сант., а для  $OY$ —1 метр = 2 сант.



Черт. 66.



Черт. 67.

Переносим изображение с черт. 67 на клетчатку, откладывая линии, параллельные осям  $OX$  и  $OZ$  без искажения, а параллельные оси  $OY$  — уменьшая в два раза.

**Задача № 9.** Даны: изображение монумента в аксонометрических проекциях и аксонометрический масштаб этого изображения (черт. 65). Требуется построить ортогональные проекции монумента в масштабе 1 метр = 0,5 сант.

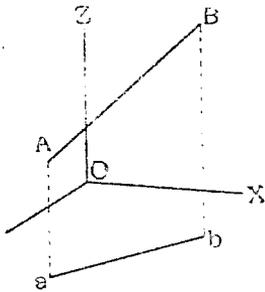
**Решение.** Эта задача является обратной задаче № 8. Переходим к чертежу 63-му. Проводим ось  $O'X'$ , а также оси  $O'XYZ$ . Измеряя различные длины частей монумента по чертежу 65 и по масштабу

(черт. 64), переводим их в масштаб чертежа 63-го, откладывая их по направлениям, параллельны соответственным осям. Таким образом построим проекции предмета на  $H$  и  $V$ . Пользуясь этими двумя проекциями, не трудно построить проекцию и на профильную плоскость  $W$ .

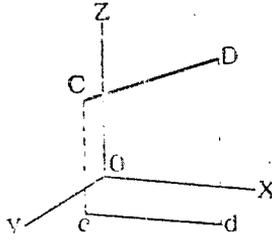
### § 6. Задачи на прямые линии.

Так как прямая линия определяется двумя точками, то для изображения ее должны быть даны аксонометричные и вторичные проекции двух ее точек.

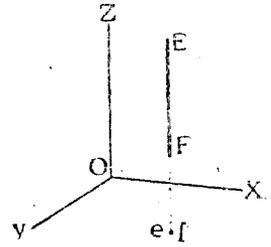
Например, на черт. 68 прямая задана ее аксонометрической проекцией  $AB$  и вторичной горизонтальной —  $ab$ .



Черт. 68.



Черт. 69.

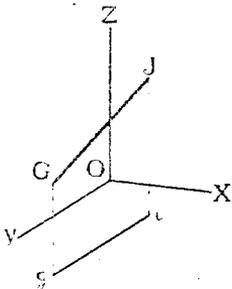


Черт. 70.

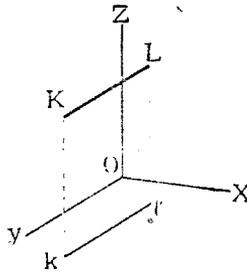
В зависимости от расположения прямой относительно плоскостей проекций меняется взаимное расположение между аксонометрической и вторичной проекциями прямой и осями.

Приведем несколько примеров различного положения прямой.

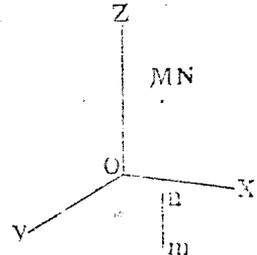
- 1)  $CD$  параллельна  $V$  (черт. 69). В этом случае  $cd \parallel OX$ .
- 2)  $EF$  перпендикулярна к  $H$  (черт. 70). В этом случае вторичная горизонтальная проекция  $ef$  сливается в точку, а  $EF \parallel OZ$ .
- 3)  $GJ \parallel W$ , (черт. 71), так как  $gi \parallel OY$ .



Черт. 71.



Черт. 72.



Черт. 73.

- 4)  $KL \parallel OY$  (черт. 72), так как  $KL \parallel kl \parallel OY$ .
- 5)  $MN$  параллельна направлению проектирования (черт. 73), так как аксонометрическая проекция ее сливается в точку.

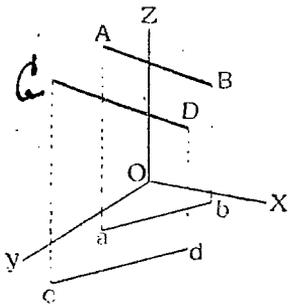
*Задача № 10.* Даны аксонометрические проекции линии  $AB$  (черт. 74). Требуется через точку  $C$  провести линию  $CD \parallel AB$ .

*Решение.* На основании теоремы 1-й (стр. 3) проводим  $CD \parallel AB$  и  $cd \parallel ab$ . Линия  $CD$  и будет искомой.

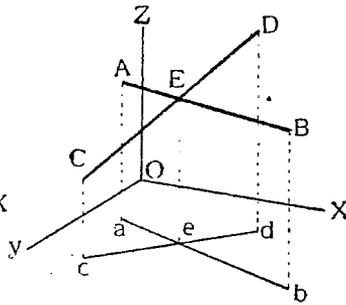
*Задача № 11.* Дана в аксопометрии линия  $AB$  (черт. 75) и точка  $C$  вне ее. Требуется через  $C$  провести прямую, пересекающую  $AB$ .

*Решение.* Задаемся на  $AB$  случайной точкой  $E$ ,  $e$  и соединяем  $C$  с  $E$  и  $c$  с  $e$ . Линия  $CED$ ,  $ced$  и будет искомой.

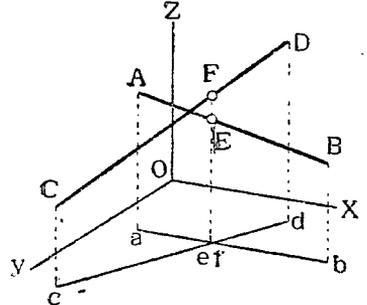
Для сравнения с чертежом 75 приводим на черт. 76 изображение двух линий  $AB$  и  $CD$ , не пересекающих друг друга.



Черт. 74.



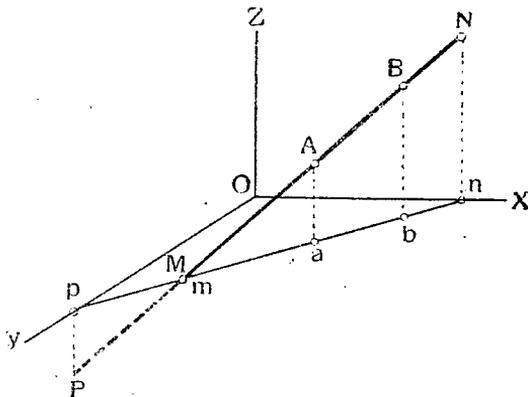
Черт. 75.



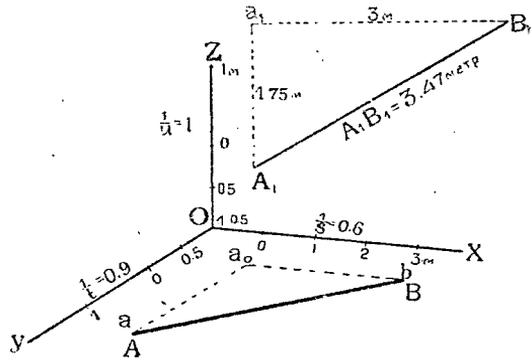
Черт. 76.

*Задача № 12.* Построить следы линии на плоскостях проекций (черт. 77).

*Решение.* Следы линии называются точки пересечения ее с плоскостями проекций. Так как плоскостей проекции три: вертикальная  $V$ , горизонтальная  $H$  и профильная  $W$ , то в общем случае, каждая прямая будет иметь три следа, которые мы будем называть соответственно *вертикальным* (на  $V$ ), *горизонтальным* (на  $H$ ) и *профильным* (на  $W$ ).



Черт. 77.



Черт. 78.

Горизонтальный след найдется, как точка пересечения  $AM$ ,  $m$  продолжения самой прямой  $AB$  с ее вторичной горизонтальной проекцией.

Вертикальный след  $N$ ,  $n$  найдем, продолжая  $ab$  до пересечения с  $OX$  в точке  $n$  и восстановив в  $n$  перпендикуляр к  $OX$  до пересечения с  $AB$  в точке  $N$ .

Профильный след  $(P, p)$ , получаем аналогичным способом.

**Задача № 13.** Определить истинную длину отрезка прямой  $AB$ .

**Решение.** Рассмотрим различные случаи задания прямой.

а)  $AB$  параллельна какой-нибудь оси координат. В этом случае длина отрезка прямо измеряется циркулем по масштабу, соответствующему этой оси.

б)  $AB$  параллельна какой-нибудь плоскости координат, которой параллельна и плоскость аксонометрических проекций (например,  $K \parallel V$ ; тогда  $\frac{1}{s} = \frac{1}{k} = 1$ ). В этом случае длина отрезка измеряется по масштабу осей, лежащих в этой плоскости (например, по масштабу  $OX$  или  $OZ$ ).

с)  $AB$  лежит в плоскости  $H$ , занимая случайное положение (черт. 78).

**Решение.** Проведем через  $A$  линию  $Aa_0 \parallel OY$  и через  $B$  — линию  $Ba_0 \parallel OX$ , до пересечения с первой в точке  $a_0$ . Тогда в плоскости  $H$  получится прямоугольный треугольник  $ABa_0$ , с прямым углом в точке  $a_0$ . Отрезок же  $AB$  будет гипотенузой этого  $\triangle$ -ка. Если мы определим, если будем знать длины катетов  $Aa_0$  и  $Ba_0$ .

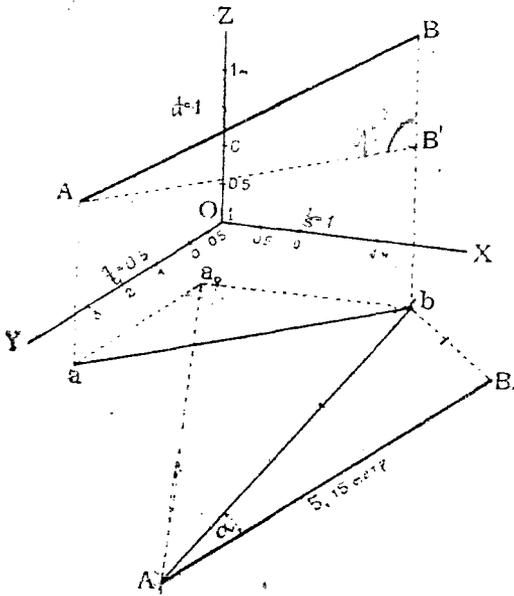
Длины же этих последних измеряются по соответственным масштабам.

Длина  $Aa_0$  по масштабу  $OY$  равна 1,75 метр.

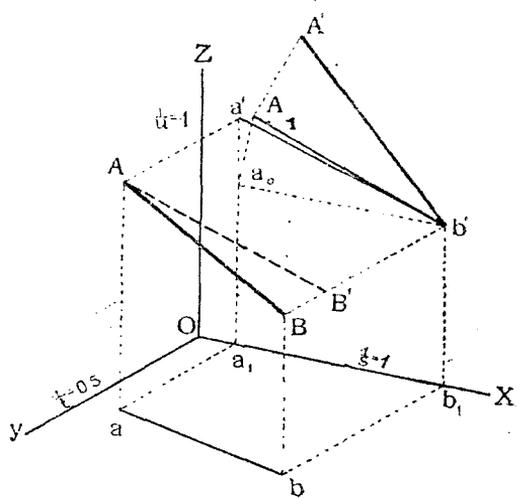
Длина  $Ba_0$  " "  $OX$  " 3 метр.

На черт. 78 вверху построен прямоугольный  $\triangle$ -к по этим катетам в масштабе оси  $Z$ -ов. Длина гипотенузы  $A_1B = 3,47$  метр. и будет искомой.

д)  $AB$  занимает случайное положение в пространстве (черт. 79).



Черт. 79.



Черт. 80.

**Решение.** Проводим через  $A$  линию  $AB' \parallel ab$  до пересечения с вертикалью  $Bb$  в точке  $B'$ .

$\triangle$ -к  $ABB'$  будет прямоугольным с прямым углом в вершине  $B'$ . Линия же  $AB$  будет гипотенузой этого  $\triangle$ -ка; она будет известна, если мы определим длины катетов  $AB'$  и  $BB'$ .

Но длина  $AB' = ab$ . Последняя же определяется из прямоугольного  $\triangle$ -ка  $aa_0b$ , как это было объяснено в предыдущей задаче. Принимая же во внимание, что по заданию  $\frac{1}{s} = 1$ , видим, что катет  $a_0b$  проектируется без искажения. Катет  $A_1a_0 = 2 \times aa_0$ , так как  $\frac{1}{k} = 0,5$ .



Отметим на сторонах угла  $AE$  и  $GE$  точки  $M$  и  $N$  и соединим их прямой  $MN$ .

Если мы будем знать истинные длины  $ME$ ,  $EN$  и  $MN$  сторон  $\triangle$ -ка  $MEN$  и по этим длинам построим этот  $\triangle$ -к, то мы определим искомый угол  $E$ .

Поэтому переходим к определению сторон этого  $\triangle$ -ка.

Для простоты выбираем точки  $M$  и  $N$  так, чтобы прямая  $MN$  была параллельна  $V$ .

Для этого проводим  $mn \parallel OX$ . Такое расположение имеет выгоду при заданном расположении плоскости аксонометрических проекций параллельно  $V$  (угол  $XOZ$ —прямой).

Так как  $\frac{1}{s} = \frac{1}{u} = 1$ , то при указанном расположении длина  $MN$  измеряется прямо по масштабу  $OZ$  и равна самому отрезку  $MN$ .

Переходим к определению длины  $EM$ . Эта последняя определяется по способу, рассмотренному в задаче 13 (случай  $d$ ).

Опишем здесь лишь порядок построений:

a) *Определение истинной длины  $EM$ .*

- 1)  $EM' \parallel OY$
- 2)  $MM' \parallel OZ$
- 3)  $ee_0 \parallel OY$
- 4)  $e_0 E_1 \perp mn$  и  $e_0 E_1 = \frac{ee_0}{0,5} = 2 ee_0$ .
- 5) Длина  $m E_1$  = истинной длине  $EM'$ .
- 6)  $M_1 m \perp m E_1$ ;  $M_1 m = MM'$ .
- 7) Длина  $M_1 E_1$  равна истинной длине  $ME$ .

b) *Определение истинной длины  $NE$ .*

- 1)  $EN' \parallel OY$
- 2)  $NN' \parallel OZ$
- 3)  $ee_0 \parallel OY$
- 4)  $e_0 E_1 \perp mn$  и  $e_0 E_1 = \frac{ee_0}{0,5} = 2 ee_0$ .
- 5) Длина  $n E_1$  = истинной длине  $EN$ .
- 6)  $N_1 n \perp n E_1$ ;  $N_1 n = NN'$
- 7) Длина  $N_1 E_1$  равна истинной длине  $NE$ .

Имея длины трех сторон  $\triangle$ -ка  $MNE$ , строим истинную фигуру последнего (черт. 82, слева вверху). Угол  $MEN = X$  и будет искомым.

§ 7. Задачи на плоскость.

Плоскость может быть задана следующими способами:

- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) точкой и прямой линией, не проходящей через эту точку;
- 3) двумя параллельными линиями;
- 4) двумя пересекающимися линиями.

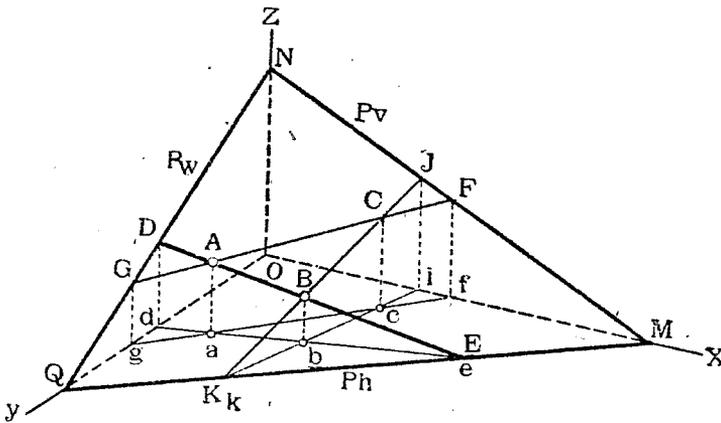
Первые три случая всегда легко свести к четвертому. Четвертый же случай выгоднее всего свести к такому, когда линиями, определяющими плоскость, являются *следы плоскости*, т. е. линии сечения ее с плоскостями проекций. Так как плоскостей проекций три: вертикальная  $V$ ,

горизонтальная  $H$  и профильная  $W$ , то в общем случае, каждая заданная плоскость  $P$  будет иметь три следа—вертикальный  $P_v$   
горизонтальный  $P_h$  и  
профильный  $P_w$ .

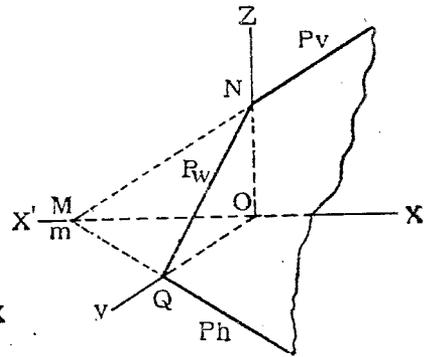
Следы мы условимся обозначать двумя буквами. Первая, большая, обозначает наименование плоскости ( $P$ ), вторая, малая ( $v, h, w$ ), наименование соответствующей плоскости проекций.

Так как задание плоскости следами является наиболее наглядным, характеризующим положение плоскости относительно плоскостей проекций, то покажем, как строятся эти следы.

*Задача № 16.* Дана плоскость двумя пересекающимися линиями  $AB$  и  $AC$  (черт. 83). Требуется построить ее следы.



Черт. 83.



Черт. 84.

*Решение.* Для построения каждого следа необходимо знать две точки последнего. Такими точками будут следы данных линий. Начиная с построения профильных следов  $Dd$  и  $Gg$ . Линия  $DG$  будет профильным следом  $P_w$  плоскости. Далее, находим вертикальный след  $Ff$  линии  $AC$ , и горизонтальный след  $Ee$  линии  $AB$ . Пока мы имеем по одной точке для каждого из двух остальных следов плоскости  $P$ . Для получения двух недостающих точек проведем в плоскости  $P$  еще одну линию, например,  $BC$  так, чтобы она пересекла  $V$  и  $H$  в пределах чертежа, и найдем ее следы  $Ji$  и  $Kk$ . Точки  $J$  и  $F$  определяют вертикальный след  $P_v$  плоскости, а точки  $K$  и  $E$ —горизонтальный  $P_h$ . Если построения выполнены точно, то соответственные следы должны пересекаться в точках  $M, N, Q$ , лежащих на координатных осях. Эти точки называются *точками схода следов*.

Если на чертеже показаны два следа плоскости, то, пользуясь соответственными точками схода следов, можно построить и третий.

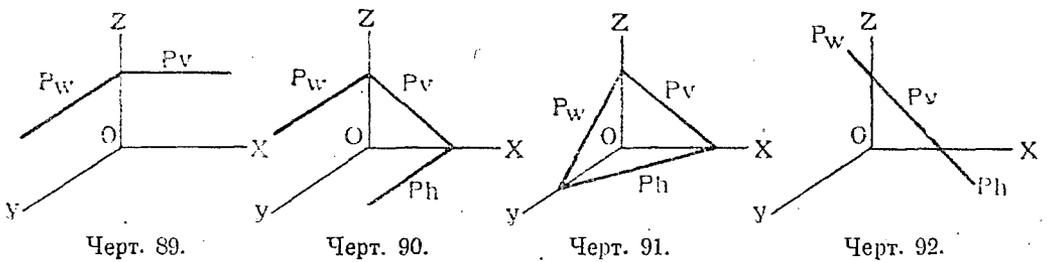
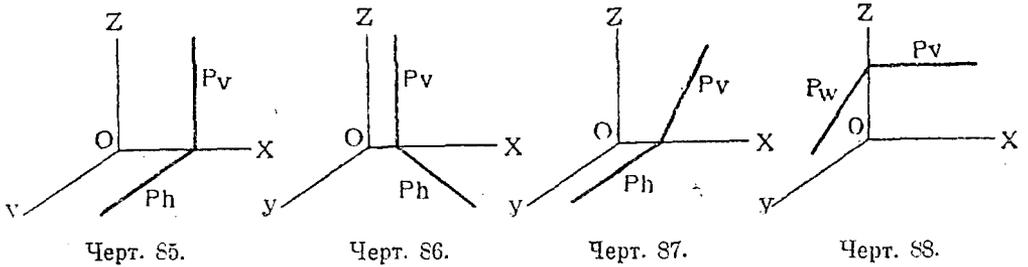
Например, на черт. 84, дана плоскость  $P$  ее следами  $P_v$  и  $P_w$ . Требуется построить  $P_h$ .

Для нахождения этого следа продолжаем  $P_v$  до пересечения с  $OX$  в точке  $M$ . Соединяем точки схода  $M$  и  $Q$  линией, которая и будет искомым следом  $P_h$ .

Как мы уже сказали, следы плоскости позволяют легко определить положение последней относительно плоскостей проекций.

На чертежах 85—92 показано несколько примеров задания плоскости следами, именно:

- 1)  $P \parallel W$  (черт. 85). При этом  $P_v \parallel OZ$  и  $P_h \parallel OY$ .
- 2)  $P \perp H$  (черт. 86).  $P_v \parallel OZ$ .
- 3)  $P \perp V$  (черт. 87).  $P_h \parallel OY$ .
- 4)  $P \perp W$  (черт. 88).  $P_v \parallel OX$ .
- 5)  $P \parallel H$  (черт. 89).  $P_v \parallel OX$ ;  $P_w \parallel OY$ .
- 6)  $P \parallel OY$  (черт. 70).  $P_w \parallel P_h \parallel OY$ .
- 7)  $P$  занимает случайное положение (черт. 91).
- 8)  $P$  параллельна направлению проектирования (черт. 92). При этом все три следа плоскости сливаются в одну прямую линию.



**Задача № 17.** Дана плоскость  $P$  (черт. 93). Провести какую-нибудь новую плоскость  $Q$ , параллельную  $P$ .

**Решение.** Так как аксонометрические проекции являются параллельными, а, кроме того, из элементарной геометрии известно, что две параллельных плоскости пересекаются по линиям, взаимно параллельным, то получим, что одноименные следы плоскостей  $P$  и  $Q$  должны быть взаимно параллельны. На черт. 93 показана плоскость  $Q$ , у которой  $Q_v \parallel P_v$ ,  $Q_h \parallel P_h$  и  $Q_w \parallel P_w$ .

**Задача № 18.** Даны две плоскости  $P$  и  $Q$  их следами (черт. 94). Построить линию их сечения.

**Решение.** Замечаем точки  $A, a$  и  $B, b$  пересечения одноименных следов. Линия  $AB, ab$  и будет искомой.

На чертеже 95 показан частный случай задания плоскостей, именно, когда обе они перпендикулярны к  $H$ . В этом случае линия  $AB, ab$  их сечения также будет перпендикулярна к  $H$ , и для построения ее достаточно определить лишь точку  $A, a$ , пересечения горизонтальных следов  $P_h$  и  $Q_h$ .

§ 8. Задачи на прямую линию и плоскость.

**Задача № 19.** Найти точку пересечения прямой линии  $AB$  с плоскостью  $Q$ , заданной следами (черт. 96).

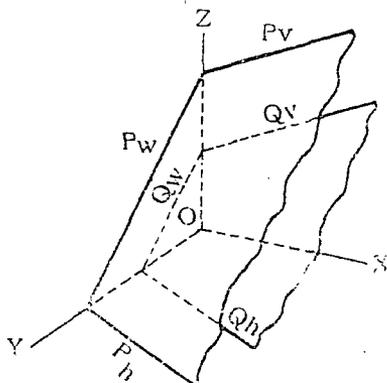
**Решение.** 1) Закключаем прямую  $AB$  в какую-нибудь плоскость  $P$ , например, перпендикулярную к  $H$ . Тогда  $P_h$  совпадет с  $ab$ , а  $P_w$  будет  $\parallel OZ$ . 2) Находим линию  $MN$  сечения плоскостей  $Q$  и  $P$ . 3) Отмечаем точку  $C, c$  пересечения линий  $AB$  и  $MN$ . Точка  $C, c$  и будет искомой.

**Задача № 20.** Найти точку пересечения прямой линии  $AB$  с плоскостью  $Q$ , заданной двумя пересекающимися линиями  $DE$  и  $DF$  (черт. 97).

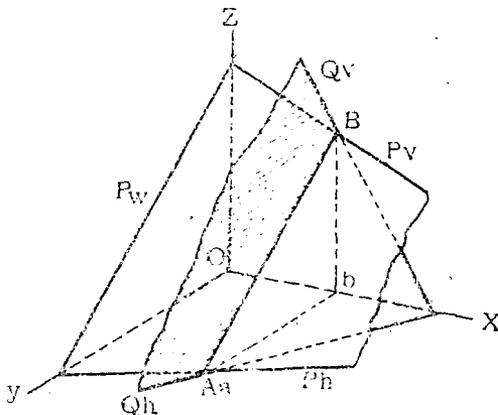
**Решение.** 1) Проводим через  $AB$  какую-нибудь плоскость, например,  $P \perp H$ ; тогда  $P_h$  совпадет с  $ab$ . 2) Находим точки  $M, m$  и  $N, n$  пересечения прямых  $DE$  и  $DF$  с  $P$ . Очевидно, линия  $MN, mn$  будет линией сечения плоскостей: данной  $Q$  и вспомогательной  $P$ . 3) отмечаем точку  $C, c$  пересечения прямых  $MN$  и  $AB$ . Точка  $C$  и будет искомой.

**Задача № 21.** Построить линию сечения двух  $\triangle$ -ков  $ABC$  и  $DEF$  (черт. 98).

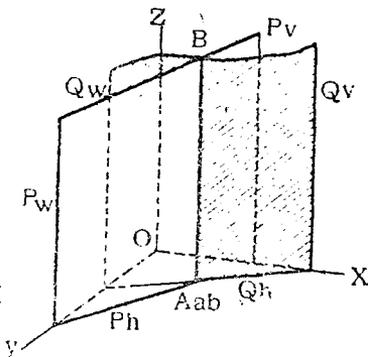
**Решение.** Эта задача сводится к только что рассмотренной. Путем попыток находим, какие стороны одного  $\triangle$ -ка пересекают плоскость



Черт. 93.



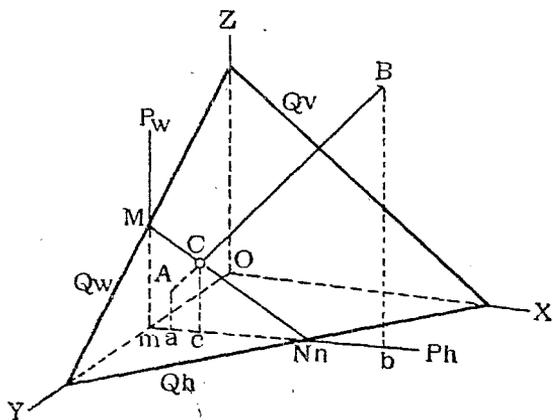
Черт. 94.



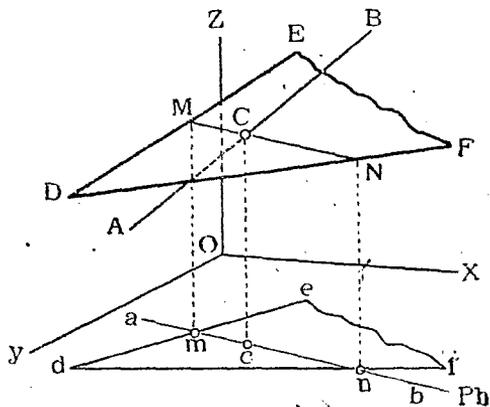
Черт. 95.

другого в пределах чертежа. На нашем чертеже получилось, что  $DE$  пересекает  $ABC$  в точке  $P$  (вспомогательная линия  $MN$ ), и  $DF$  пересекает  $ABC$  в точке  $Q$  (вспомогательная линия  $M_1N_1$ ). Искомой линией сечения будет прямая  $QP$ . Из рассмотрения взаимного положения плоскостей не трудно отметить и видимые и невидимые их части и стороны, причем последние прочерчиваем пунктиром. Например, точка  $M$  линии  $DF$  лежит выше точки  $N_1$  линии  $AB$ , причем точки

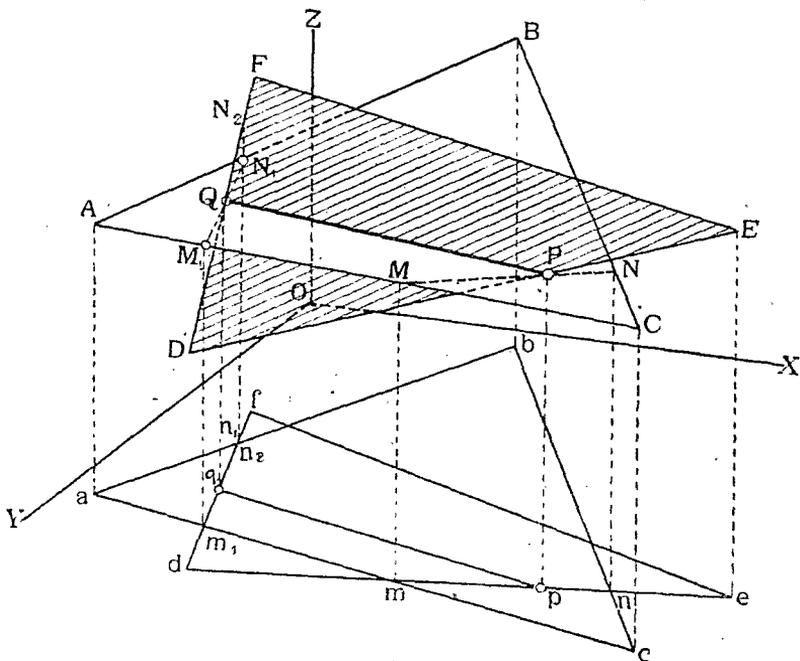
$N_2$  и  $N_1$  расположены на одном и том же перпендикуляре к  $H$ , поэтому точка  $N_2$ , а, следовательно, и вся линия  $QF$  от точки  $F$  до точки пересечения  $Q$  будет видна. Далее, часть ее закрывается плоскостью  $ABC$  и, наконец, после ребра  $AC$  до точки  $D$  она снова становится видимой и т. п.



Черт. 96.



Черт. 97.



Черт. 98.

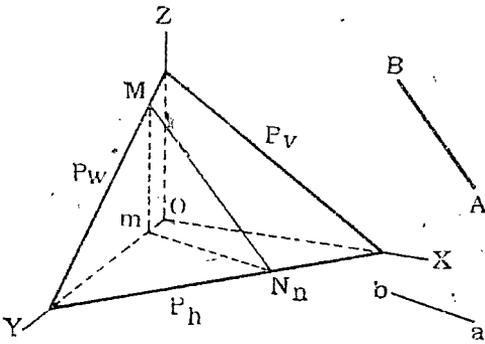
*Задача № 22.* Провести через точку  $A, a$  линию  $AB$ , параллельную плоскости  $P$  (черт. 99).

*Решение.* Задача сводится к проведению от точки  $A$  линии параллельной какой-либо прямой, лежащей в плоскости  $P$ . Строим в плоскости  $P$  произвольную прямую  $MN$ , выбирая точки  $M, N$  например, на следах плоскости.

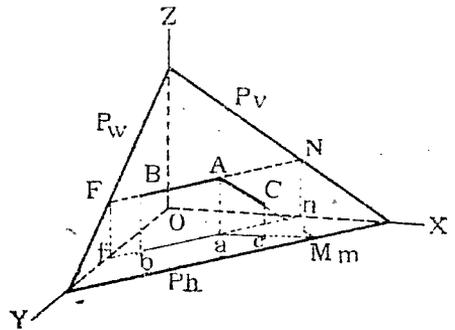
Линия  $mn$  будет вторичной горизонтальной проекцией этой прямой. Из точки  $A$  проводим прямую  $AB \parallel MN$ , из точки  $a$ —прямую  $ab \parallel mn$ .

Линия  $AB, ab$  и будет искомой.

**Задача № 23.** Дана точка  $A, a$  в плоскости  $P$  (черт. 100). Провести в  $P$  через  $A$  горизонталь и фронталь.



Черт. 99.



Черт. 100.

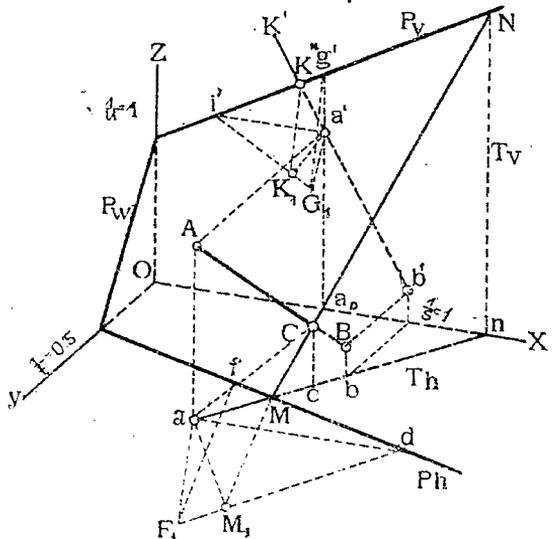
**Решение.** Горизонталью плоскости называется линия сечения этой плоскости со всякою другою, параллельною плоскости  $H$ . Очевидно, всякая горизонталь будет параллельна, во-первых, горизонтальному следу плоскости, а, во-вторых, своей горизонтальной проекции.

Поэтому в аксонометрии горизонталь  $AB$  будет  $\parallel Ph$  и  $\parallel ab$ .

Пользуясь этим, строим проекции  $AB$  и  $ab$ .

Фронтальною плоскости называется линия сечения этой плоскости со всякою другою, параллельною плоскости  $V$ . Очевидно, всякая фронталь будет, во-первых, параллельна вертикальному следу плоскости, а, во-вторых, ее горизонтальная проекция будет параллельна осп  $X$ —ов.

Поэтому в аксонометрии фронталь  $AC$  будет  $\parallel P_v$ , и  $ac$  будет  $\parallel OX$ . Пользуясь этим, строим проекции  $AC$  и  $ac$ .



Черт. 101.

**Задача № 24.** Даны в аксонометрии плоскость  $P$  и точка  $A, a$  вне плоскости  $P$  (черт. 101). Требуется из  $A$  опустить перпендикуляр на  $P$ .

**Решение.** Из общей теории ортогональных проекций известно, что горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости, а вертикальная—к вертикальному следу плоскости. На основании этого составим следующий план решения нашей задачи в аксонометрии.

- 1) Построим вторичную горизонтальную проекцию перпендикуляра.
  - 2) Построим его вторичную вертикальную проекцию.
  - 3) По этим двум проекциям построим его аксонометрическую проекцию.
- Переходим к решению задачи.

1) *Построение вторичной горизонтальной проекции.*

Проводим через точку  $a$  линии  $ad$  и  $af$  соответственно параллельные  $OX$  и  $OY$  до пересечения с  $P_h$  в точках  $d$  и  $f$ . Тогда в плоскости  $H$  получается проекция прямоугольного треугольного  $afd$  с прямым углом при вершине  $a$ . Строим истинную фигуру этого  $\triangle$ -ка по заданным показателям искажения. Так как  $\frac{1}{s} = 1$ , то истинная длина катета  $ad$  равна его проекции  $ad$ . Катет  $aF_1$  равняется  $2 \times af$  (так как  $\frac{1}{t} = 0,5$ ). Гипотенузой будет линия  $F_1d$ .

Опускаем из вершины  $a$  перпендикуляр  $aM_1$  на гипотенузу и сносим точку  $M_1$  на  $P_h$  в точку  $M$ , проводя, например,  $M_1M \parallel F_1f$ .

Линия  $aM$  и будет искомой вторичной горизонтальной проекцией перпендикуляра.

2) *Построение вторичной вертикальной проекции.*

Совершенно подобным же образом строим  $\triangle$ -к  $a'i'G_1$  ( $a'G_1 = a'g'$ , так как  $\frac{1}{u} = 1$ ) и находим точку  $K'$  на следе  $P_v$ . Линия  $a'K'$  и будет искомой.

3) *Построение аксонометрической проекции.*

Выбираем на полученных проекциях  $aM$  и  $a'K'$  какие-нибудь точки  $b'$  и  $b''$ , лежащие в одной и той же профильной плоскости и определяющие точку  $B$  в пространстве. Линия  $AB, ab$  и будет искомой. Точка  $C, c$  пересечения этого перпендикуляра с  $P$  определится уже известным способом (см. задачу № 19). Для этого через  $AB$  проведена вспомогательная плоскость  $T \perp H$  и найдена линия  $MN$  сечения  $P$  с  $T$ . Искомая точка  $C$  определится в пересечении линий  $AB$  с  $MN$ .

*Задача № 25.* Определить угол между линией  $AB$  и плоскостью  $P$ . (черт. 102).

*Решение.* Углом между линией и плоскостью называется угол между этой линией и прямоугольной проекцией ее на эту же плоскость. Поэтому, прежде всего следует построить эту проекцию. Для этого опускаем из точки  $A$  перпендикуляр на плоскость  $P$  и находим точку  $C_e$  его пересечения с  $P$  (см. задачу № 24). Далее, находим точку  $E_e$  пересечения прямой  $AB$  с  $P$  (см. задачу № 19). Линия  $CE, c_e$  и будет искомой прямоугольной проекцией  $AB$  на  $P$ . Наконец, определяем истинную величину угла между линиями  $AE$  и  $CE$ . Эта задача была уже раньше решена (задача № 15).

*Задача № 26.* Определить угол между двумя плоскостями  $P$  и  $Q$  (черт. 103).

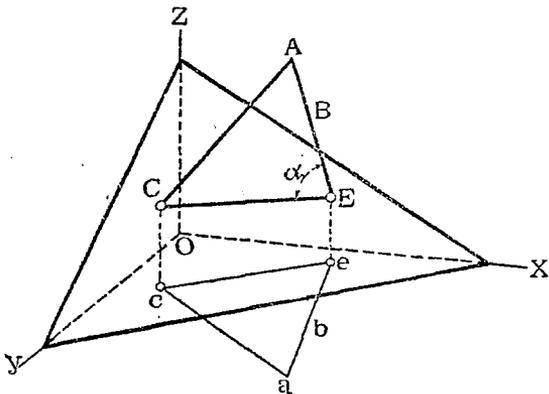
*Решение.* Выберем в пространстве, между плоскостями, случайную точку  $A$  и опустим из нее перпендикуляры:  $AB$  на плоскость  $P$  и  $AC$ —на плоскость  $Q$  (см. задачу № 24). Очевидно, в пространстве искомый угол между плоскостями  $P$  и  $Q$  будет дополнить угол между  $AB$  и  $AC$  до  $180^\circ$ . Угол же  $BAC$  определяется так, как было объяснено в задаче № 15.

*Задача № 27.* Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями.

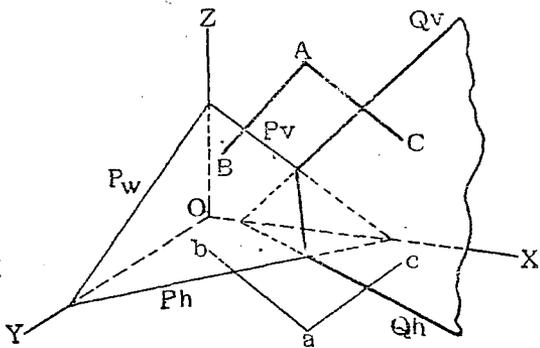
*Решение.* В общем случае эту задачу можно решить так: 1) Выбираем какую-нибудь точку  $M$  на одной из плоскостей, например,  $Q$ . 2) Опускаем из  $M$  перпендикуляр  $MN$  на плоскость  $P$  и находим точку  $N$  пересечения его с  $P$  (задача № 24). 3) Определяем длину  $MN$  (задача № 13). Эта длина и будет выражать искомое расстояние между плоскостями.

В частных случаях задания плоскостей  $P$  и  $Q$  задача может быть решена проще.

Например, на черт. 104 плоскости  $P$  и  $Q$  заданы параллельными  $W$ . В этом случае расстояние между ними будет измеряться длиной отрезка  $AB$  между следами, проведенного параллельно оси  $OX$ , измеряемого по масштабу оси  $OX$ .



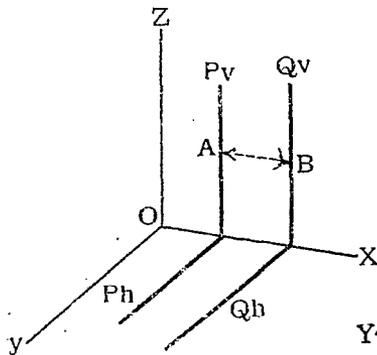
Черт. 102.



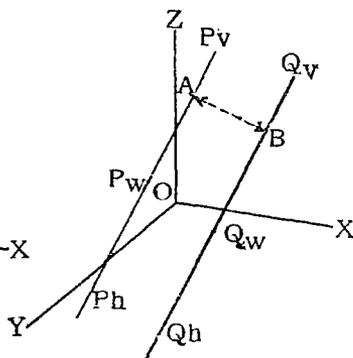
Черт. 103.

Если следы каждой плоскости сливаются в одну прямую линию (черт. 105), и если аксонометрические проекции прямоугольные, то расстояние  $AB$  между следами, измеряемое в масштабе той оси, для которой показатель равен единице, и выразит расстояние между плоскостями.

Предлагаем читателю определить расстояние между плоскостями  $P_1, Q$  (черт. 105) для общего случая аксонометрического проектирования.



Черт. 104.



Черт. 105.

§ 9. Задачи на многогранники.

Задачи на пересечение многогранника с плоскостью, с прямой или с многогранником сводятся к предыдущим, т. е. задачам на пересечение прямой линии с плоскостью.

Приведем несколько примеров решения подобных задач.

Задача 28. Построить линию сечения призмы  $ABC \dots GI$  (черт. 106).

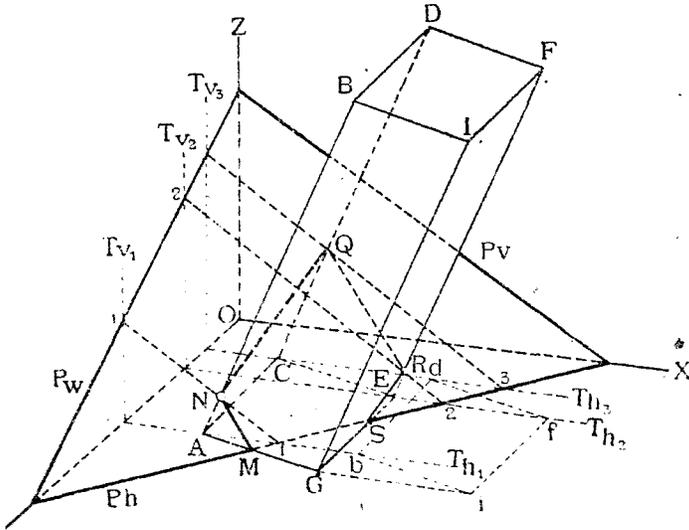
*Решение.* Из рассмотрения чертежа нетрудно заметить, что основание  $ACEG$  призмы пересекается со следом  $Pn$  плоскости в точках  $M$  и  $S$ , которые и будут принадлежать искомой линии сечения.

Для нахождения остальных точек поступаем следующим образом:

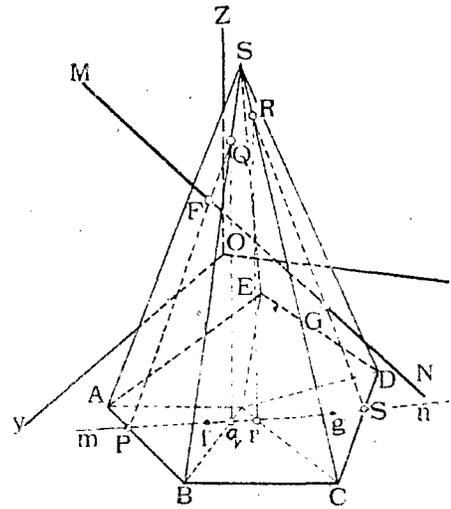
1) заключаем ребра призмы  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$  в вертикальные плоскости  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ;

2) находим линии  $11$ ,  $22$ ,  $33$  сечения этих плоскостей с плоскостью  $P$ ;

3) замечаем точки  $N$ ,  $Q$  и  $R$  пересечения этих линий с взятыми ребрами призмы.



Черт. 106.



Черт. 107.

Полученные точки и определяют искомую линию сечения  $MNQRS$ . Для наглядности изображения невидимые линии следует вычерчивать пунктиром.

*Задача № 29.* Построить точки пересечения прямой  $MN$  с пирамидою  $SABCDE$  (черт. 107).

*Решение.* Заключаем прямую  $MN$  в вертикальную плоскость  $T$  (тогда след  $Th$  пойдет по  $tn$ ) и находим линии  $PQ$  и  $RG$  пересечения ее с гранями  $ABS$  и  $CDS$  пирамиды. Точки  $F$  и  $G$  пересечения линий  $PQ$  и  $RG$  с  $MN$  и будут искомыми.

*Задача № 30.* Построить линии сечения пирамиды  $SPQR$  с призмою  $ABCDEF$  (черт. 108).

*Решение.* Общий план решения этой и подобной этой задачи — следующий:

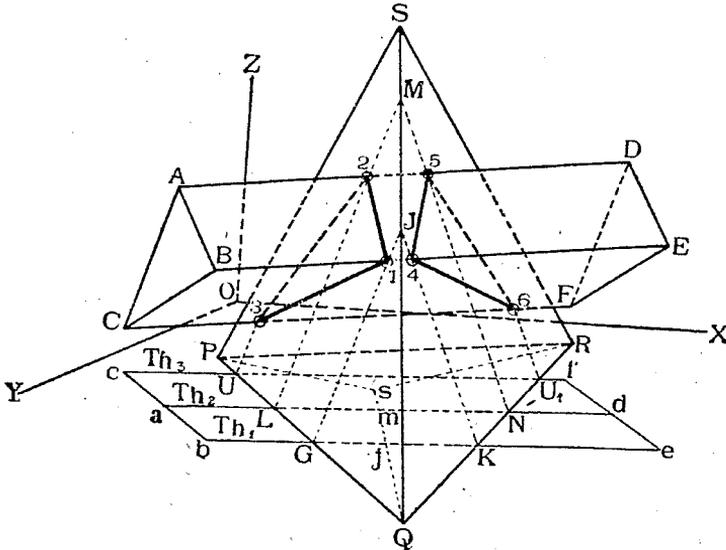
- 1) находим точки пересечения ребер одного тела с гранями другого;
- 2) находим точки пересечения ребер второго с гранями первого;
- 3) соединяем последовательно друг с другом найденные точки.

При этом заранее, до построений, следует отметить те ребра каждого тела, которые заведомо не пересекают граней другого.

Переходим к данному случаю. Из рассмотрения вторичных проекций тел видно, что ребро  $PR$  пирамиды не пересекает грани призмы, так как на  $H$  линия  $PR$  лежит вне контура вторичной проекции призмы.

Далее, ребра  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FD$  призмы не пересекут грани пирамиды, так как их вторичные проекции лежат вне контура вторичной проекции пирамиды.

Будем определять в дальнейшем точки искомой линии путем попыток.



Черт. 108.

Возьмем сначала длинные ребра призмы и найдем их пересечения с пирамидой (см. задачу № 29). Получились точки 1, 2, 3 входа и точки 4, 5, 6—выхода.

Очевидно, линия 123 будет линией входа призмы в пирамиду, а линия 456 будет линией выхода. Найденные точки вполне выясняют линию сечения, и потому нет надобности продолжать попытки и искать точки пересечения ребер пирамиды с гранями призмы.

### § 10. Задачи на кривые линии.

В аксонометрии изображения кривых линий строятся по точкам, причем для построения линий необходимо знать их форму (закон образования) и размеры.

Рассмотрим примеры построения плоских и пространственных кривых линий.

**Задача № 31.** Построить в плоскости  $H$  при центре  $C$  круг радиуса  $R$  (черт. 109). Аксонометрические оси и показатели даны.

**Решение.** Проводим через  $C$  линию  $\parallel OX$  и откладываем  $CP = CM = 0,9 R$ .

Далее проводим через  $C$  линию  $QN \parallel OY$  и откладываем  $CN = CQ = 0,5R$ . По точкам  $P, Q, M, N$  строим параллелограмм —

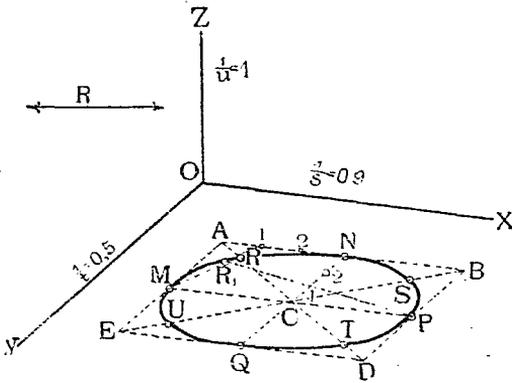
проекцию квадрата, описанного вокруг круга. Точки  $P, Q, M, N$  будут проекциями концов диаметров, перпендикулярных друг к другу.

Проводим диагонали  $AD$  и  $BE$ . Известно, что круг пересекает диагонали описанного вокруг него квадрата в точках, так делящих полудиагонали, что, например:

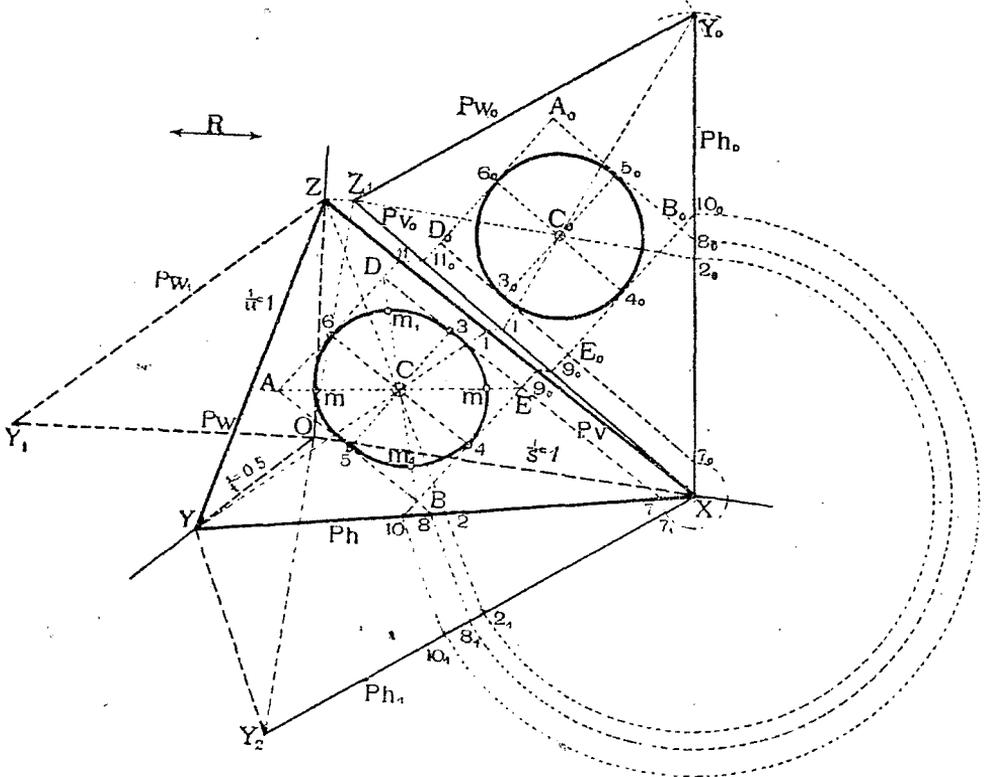
$$CU = 0,7 CE;$$

$CT = 0,7 CD$  и т. д. (точнее 0,707, а не 0,7). Пользуясь этим, находим точки  $R, S, T, U$  на диагоналях. По восьми точкам уже не трудно, при помощи лекала, построить эллипс—проекцию данного круга.

Если требуется точнее определить разные точки круга, то можно, например, применить следующий способ <sup>1)</sup>. Разделим половину  $AN$



Черт. 109.



Черт. 110.

какойнибудь стороны  $AB$  квадрата на  $n$  равных частей, например, на 3 и перенумеруем их по порядку, начиная от вершины  $A$  квадрата; на такое же число (3) равных частей разделим прилегающий радиус  $CN$ ,

<sup>1)</sup> Другие способы см. Н. Рынин „Ортогональные проекции“. Пгр. 1918 год, стр. 157. Его же „Перспектива“. Пгр. 1918 г. Часть I, стр. 181.

и перенумеруем их по порядку, начиная от центра  $C$  круга. Точки деления стороны  $AN$  будем соединять с полюсом  $M$  круга, а точки деления радиуса  $CN$  — соединим с противоположным полюсом  $P$ . Точки  $(R_i)$  пересечения линий, проходящих через точки с одинаковыми номерами (1,1) и будут принадлежать изображению круга (в пространстве легко доказать, что, например, угол  $MR_1P$  будет прямым).

*Задача № 32.* Дана в аксонометрии плоскость  $P$  и в ней точка  $C$ . Требуется в  $P$  построить при центре  $C$  круг радиуса  $R$  (черт. 110).

*Решение.* Применим следующий план решения этой задачи:

- найдем истинную фигуру треугольника  $XYZ$  следов плоскости  $P$ ,
- определим в этом  $\triangle$ -ке положение центра круга  $C$ ,
- построим этот круг в  $\triangle$ -ке,
- перенесем круг в заданное положение.

Переходим к решению поставленных задач.

*a) Определение истинной фигуры  $\triangle$ -ка  $XYZ$ .*

Треугольник  $XYZ$  построим по трем его сторонам. Определим истинные длины последних. Зная показатели искажения,

$$\left( \frac{1}{s} = \frac{1}{u} = 1; \frac{1}{t} = 0,5 \right),$$

поступаем следующим образом (см. задачу № 13).

Истинная длина  $Ph = XY$  есть гипотенуза  $XY_2$ , построенная на катетах  $OX$  и  $OY_2 = \frac{OY}{0,5} = 2OY$ .

Истинная длина  $Pw = ZY$  есть гипотенуза  $ZY_1$ , построенная на катетах  $OZ$  и  $OY_1 = 2OY$ .

Истинная длина  $Pv = XZ$  есть гипотенуза  $XZ_1$ , построенная на катетах  $OX$  и  $OZ_1 = OZ$ .

Принимаем  $XZ_1$  на основании искомого  $\triangle$ -ка  $XZ_1Y_0$  и строим последний по сторонам  $Z_1Y_0 = ZY_1$  и  $XY_0 = XY_2$ .

*b) Определение центра круга  $C_0$  в  $\triangle$ -ке  $XZ_1Y_0$ .*

Проведем в  $\triangle$ -ке  $XYZ$  через центр  $C$  две каких-нибудь прямых линии, например,  $YC1$  и  $ZC2$ . Найдем положение точек 1 и 2 на соответственных сторонах  $\triangle$ -ка  $XZ_1Y_0$ , разделив соответственные стороны его в том же отношении, в каком точки 1 и 2 делят стороны  $XZ$  и  $XY$ . Для этого проведены линии  $22_1 \parallel YU$ , и  $11_0 \parallel ZZ_1$  и пунктирные дуги кругов.

Тогда линии  $Y1$  и  $Z2$  займут в  $\triangle$ -ке  $XZ_1Y_0$  положение  $Y_01_0$  и  $Z_12_0$ . Пересечение их и определит искомую точку  $C_0$ .

*c) Построение круга  $C_0$  в  $\triangle$ -ке  $XZ_1Y_0$ .*

Принимая точку  $C_0$  за центр, строим в  $\triangle$ -ке  $XZ_1Y_0$  круг данного радиуса  $R$ .

д) Перенос круга  $C_0$  в заданное положение плоскости  $P$ .

Для большей точности построений будем вместе с кругом  $C_0$  переносить и описанный вокруг него квадрат  $A_0B_0E_0D_0$ , две стороны которого параллельны основанию  $XZ_1$ ,  $\Delta$ -ка  $XZ_1Y_0$ . После переноса эти стороны должны пойти параллельно линии  $Pv$ .

Продолжаем линии  $A_0B_0$  и  $D_0E_0$  до пересечения со стороной  $XU$ , в точках  $8_0$  и  $7_0$  и переносим их пунктирными дугами кругов и прямыми параллельными  $YU_2$  сначала в точки  $8_1$  и  $7_1$  на линию  $XU_2$ , а потом на линию  $XU$  в точки  $7$  и  $8$ . Проводим линии  $8A$  и  $7D \parallel Pv$ .

Далее, в  $\Delta$ -ке  $XZ_1Y_0$  продолжаем стороны квадрата до пересечения с  $XZ_1$  в точках  $9_0$  и  $11_0$  и со стороной  $XU_0$  в точке  $10_0$ . Переносим точку  $10_0$  на сторону  $XU$  в точку  $10$ , а точки  $9_0$  и  $11_0$  линиями  $9_09$  и  $11_011 \parallel Z_1Z$ —на сторону  $XZ$  в точки  $9$  и  $11$ .

Линия  $9, 10$  и ей параллельная  $11A$  определяют направления вторых сторон квадрата в плоскости  $P$ . В пересечении с первыми сторонами определятся вершины  $ABED$  квадрата. Проводим диагонали и диаметры квадрата. На диагоналях откладываем  $Sm = 0,7CA$  и  $Sm_1 = 0,7CD$ .

Точки  $m, m, m_1, m_1, 3, 4, 5$  и  $6$  определяют проекции искомого круга, который можно обвести по лекалу. Для построения любого числа добавочных точек можно воспользоваться приемом, описанным в задаче № 31.

Построение вторичной проекции не представляет затруднений.

**Задача № 33.** Построить в аксонометрии цилиндрическую винтовую линию по данным: радиусу ее  $R$  и шагу  $H$ . Ось винтовой  $\parallel OZ$ . Аксонометрические оси и показатели даны (черт. 111).

**Решение.** Строим сначала в любом месте  $H$  вторичную проекцию винтовой линии, которая в пространстве на плоскость  $H$  проектируется в круг, а в аксонометрии—в эллипс. Задавшись центром  $C$  и, зная радиус  $R$ , эту вторичную проекцию не трудно построить по способу, указанному в задаче № 31.

Винтовую линию в пространстве можно рассматривать, как траекторию движущейся точки, поступательные перемещения которой, параллельные оси винтовой, пропорциональны угловым перемещениям вокруг той же оси.

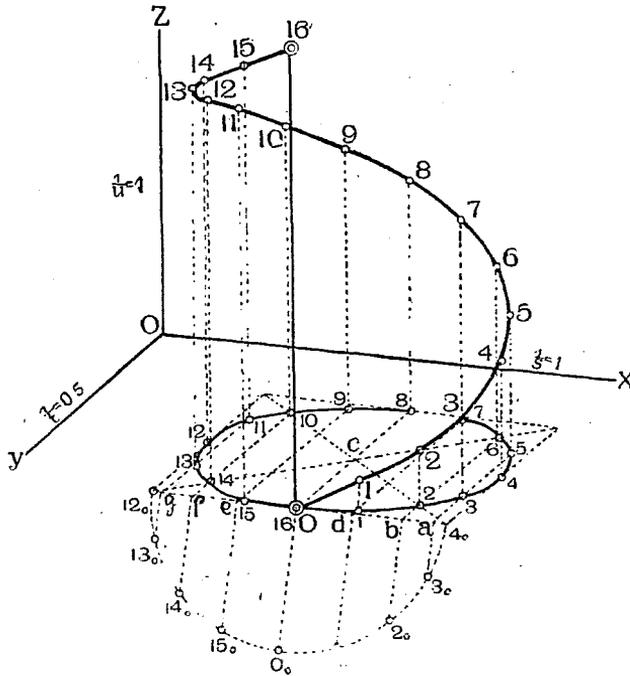
Наметим, например, 16 положений движущейся точки на протяжении одного шага и примем точку  $O$ , лежащую в  $H$  за начальное положение. Тогда, отложив по вертикали  $016$  отрезок  $016 =$  шагу  $h$ , получим конечное положение движущейся точки, после полного оборота вокруг оси. Наметим теперь на эллипсе точки, отвечающие высотам движущейся точки в

$$\frac{h}{16}, \frac{2}{16} h, \frac{3}{16} h \dots$$

и т. д.

Для этого в пространстве круг—проекцию винтовой, следует разделить на 16 равных частей и точки деления перенести на эллипс.

Так как  $\frac{1}{s} = 1$ , строим на стороне  $4_0 12_0$  квадрата, как на диаметре, полуокружность, которую делим на 8 равных частей точками  $3_0, 2_0, 1_0$  и т. д. и эти точки сносим прямоугольно на сторону  $4_0 12_0$  в точки  $a, b, d \dots$  и через полученные точки проводим линии  $\parallel$  диаметру  $OC_8$  до пересечения с дугой эллипса в точках 1, 2, 3, 4 . . . 16.



Черт. 111.

Из этих последних проводим линии  $\parallel OZ$  и откладываем на них соответствующие доли шага винтовой. Полученные точки соединяем плавной кривой  $O-16'$ , которая и будет искомой.

### § 11. Задачи на кривые поверхности.

*Задача № 34.* Пострсить в аксонометрии изображение кривой поверхности по заданному закону образования последней.

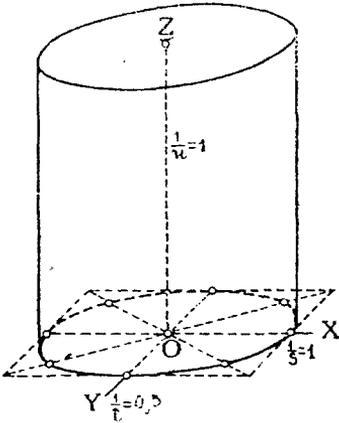
*Решение.* При построении аксонометрического изображения кривой поверхности следует изображать *контур видимости* этой поверхности, т. е. линию сечения плоскости аксонометрических проекций с цилиндром, обертывающим в пространстве данную поверхность, и параллельным направлению проектирования. Контур видимости будет обертывать аксонометрические проекции всех прямых, начерченных в пространстве на кривой поверхности и будет служить границей видимости этих кривых. Кроме контура видимости полезно, для лучшей наглядности, вычерчивать аксонометрические изображения типичных производящих или направляющих линий данной поверхности.

Рассмотрим изображение кривых поверхностей на примерах.

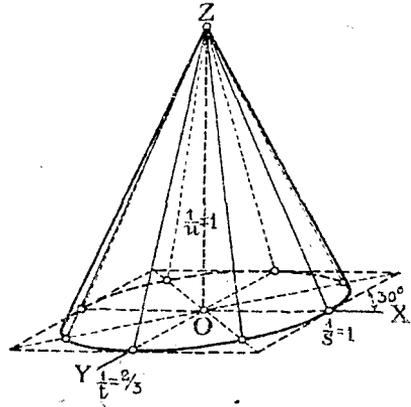
а) *Прямой круговой цилиндр*, стоящий на  $H$  (черт. 112); изображены: ось  $OZ$ , верхнее и нижнее основания и контурные производящие, касательные к основаниям.

б) *Прямой круговой конус*, стоящий на  $H$  (черт. 113); изображены: ось  $OZ$ , вершина  $Z$ , основание, контурные производящие, проходящие через вершину и касательные к основанию, и восемь производящих, проходящих через восемь точек основания и делящих последнее на равные части.

в) *Шар* (черт. 114).

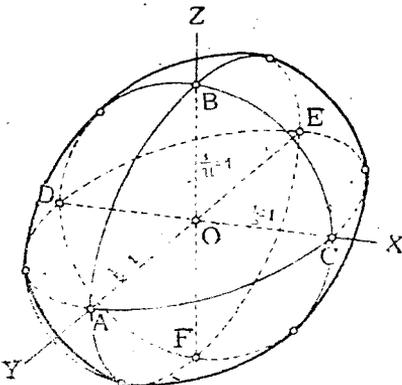


Черт. 112.



Черт. 113.

Изображены три главных (взаимно перпендикулярных) круга, контур видимости (эллипс), касательный к изображениям этих кругов, и оси. Более наглядное изображение шара дано на черт. 115, где показаны параллели и меридианы шара.



Черт. 114.

д) *Однополый гиперболоид вращения* (черт. 116).

Изображены: верхнее и нижнее основания, горло, контур видимости и ряд производящих.

Перейдем теперь к решению задач на пересечение кривых поверхностей.

*Задача № 35.* Построить линию сечения кривой поверхности с плоскостью.

*Решение.* Общий прием решения этой задачи заключается в следующем.

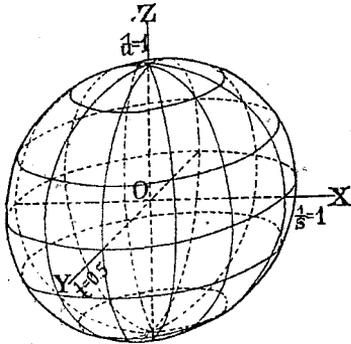
Искомая кривая линия строится по точкам, которые определяются

так: выбираем на данной кривой поверхности ряд прямолинейных (а если таковых нет, то плоских криволинейных) образующих и заключаем их во вспомогательные плоскости. Находим линии сечения этих вспомогательных плоскостей с данной. Точки пересечения полу-

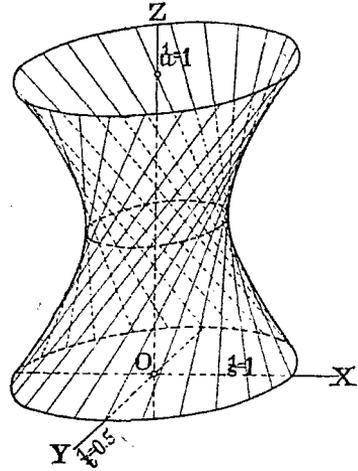
ченных линий с выбранными производящими и дадут в совокупности очертание искомой линии.

Например, определим линию сечения плоскости  $P$  с цилиндром (черт. 117).

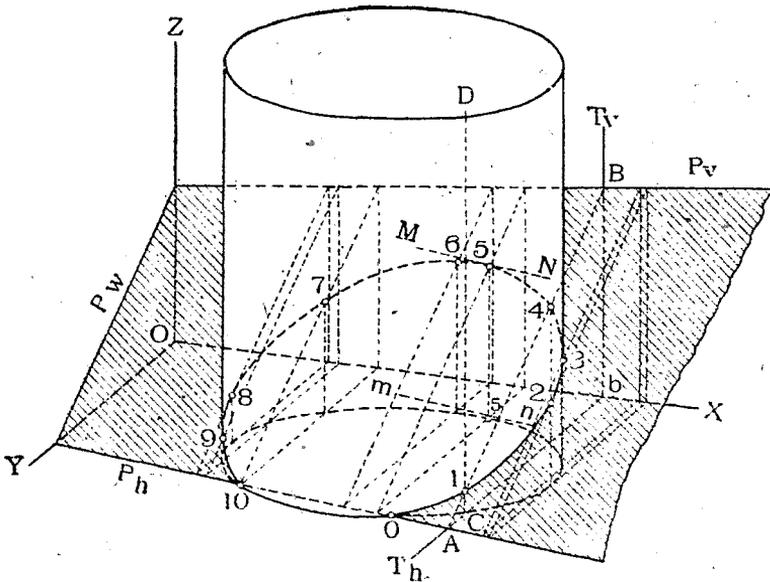
Прежде всего замечаем точки  $O$  и  $10$  пересечения горизонтальных следов плоскости  $P$  и цилиндра, очевидно эти точки принадлежат искомой линии сечения.



Черт. 115.



Черт. 116.



Черт. 117.

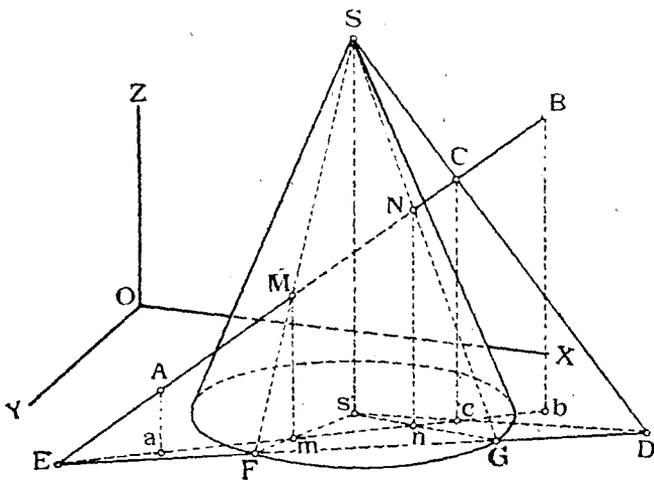
Покажем, как определить случайные точки этой последней. Выберем случайную производящую  $DC$  цилиндра. Проведем через нее вспомогательную плоскость  $T \perp H$  и найдем линию сечения  $AB$  плоскостей  $T$  с  $P$ . Точка 1 пересечения  $AB$  с  $CD$  и будет принадлежать искомой линии сечения.

Подобным же образом найдены точки 2, 4, 6, 7 и 8.

Далее строим характерные точки кривой именно:

3 и 9 — пересечение контурных производящих с плоскостью  $P$  и 5 — точку, в которой касательная к кривой будет параллельна следу  $Ph$ . Эту точку находим следующим образом. Проводим касательную  $mn$  к основанию цилиндра параллельно  $Ph$  и замечаем точку касания 5. Находим точку 5 пересечения производящей 55 с  $P$  и в точке 5 проводим прямую  $MN \parallel Ph$ . Линия  $MN$  будет касательной к искомой кривой. Соединяя найденные точки плавной кривой 012...10, и получим искомую кривую.

**Задача № 36.** Построить точки пересечения кривой поверхности с прямой линией.



Черт. 118.

**Решение.** Общий прием решения этой задачи заключается в следующем. Проводим через данную прямую линию вспомогательную плоскость, находим линию (прямую или кривую) сечения этой плоскости с данной поверхностью. Точки пересечения данной прямой с новой построенной линией и будут искомыми.

В частности, вспомогательную плоскость следует проводить так, чтобы она пересекала данную кривую поверхность по линиям, по возможности, простым. Например, если дан цилиндр, то плоскость следует проводить параллельной его оси. Тогда она пересечет его по прямолинейным производящим. Если дан конус, то плоскость следует проводить через его вершину по тем же соображениям.

На чертеже 118 показано решение задач на построение точек пересечения прямой  $AB$  с конусом  $S$ .

Выбираем на прямой  $AB$  случайную точку  $C$  и соединяем ее с вершиной конуса  $S$ . Плоскость, определяемая линиями  $AB$  и  $SC$ , будет проходить через эту вершину.

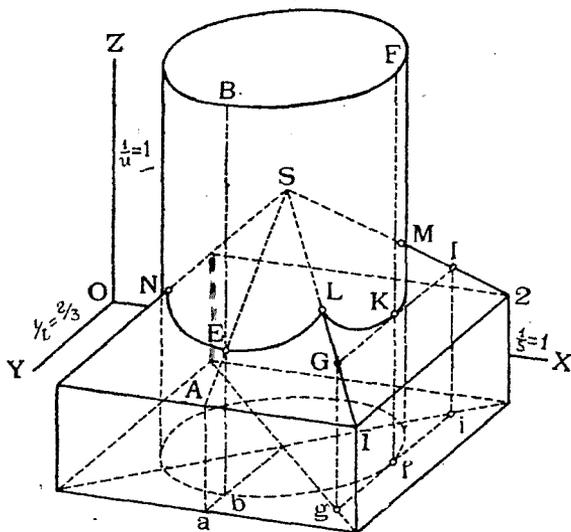
Находим след  $ED$  этой плоскости и строим линии  $FS$  и  $GS$  сечения ее с конусом. Искомые точки  $M$  и  $N$  определятся в местах пересечения  $ABC$ ,  $FS$  и  $GS$ .

*Примечание.* Если бы вместо прямой  $AB$  была бы дана плоская кривая линия, то план решения оставался бы прежний. Только вспомогательная плоскость уже выбиралась бы произвольно, а оставалась бы плоскостью данной кривой линии.

**Задача № 37.** Построить линии сечения кривой поверхности с многогранником.

*Решение.* В этом случае задача сводится к предыдущим, т. е., последовательно, строятся линии сечения граней и точки сечения ребер многогранника с кривою поверхностью.

На черт. 119 показан пример решения подобной задачи в применении к технике; изображена линия сечения фабричной дымовой трубы с четырехскатной крышей ее цоколя. Построены точки  $N, L, M$  пересечения ребер крыши с трубой, и кривые  $NEL$  и  $LKM$  сечения со скатами крыши.



Черт. 119.

Между прочим, точки  $E$  и  $K$  этих кривых, как не трудно убедиться, являются точками их, ближайшими к соответствующим карнизам крыши. Поэтому, например, прямая  $GI$ , параллельная карнизу 12, будет касательной к изображению кривой  $LKM$  и т. д.

**Задача № 38.** Построить линию сечения двух кривых поверхностей.

*Решение.* Общий план решения этой задачи заключается в следующем.

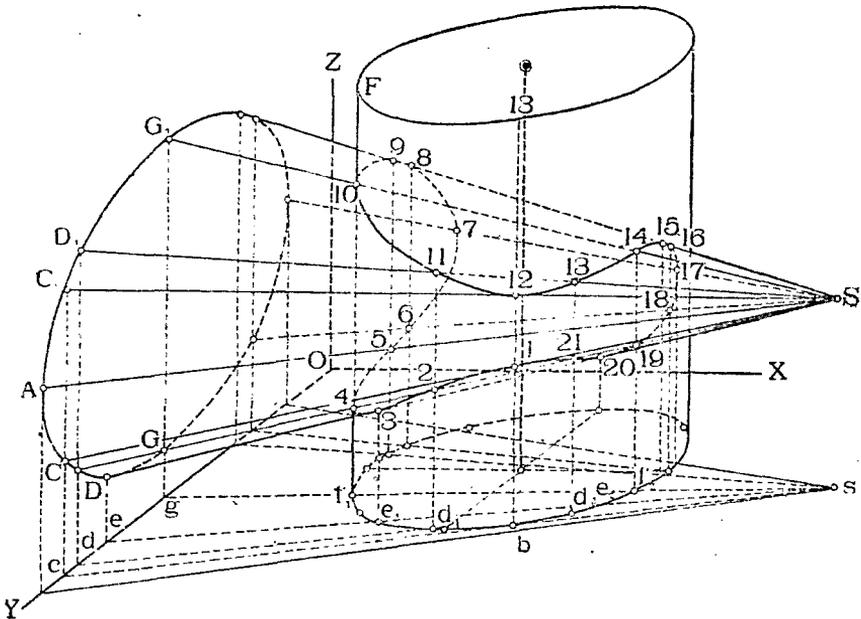
Выбираем ряд прямолинейных (или, если нет таковых, то плоских криволинейных) производящих одной поверхности и находим по способу, указанному в задаче № 36, точки пересечения их с другой поверхностью.

Полученные точки соединяем плавной кривой линией, которая и будет искомой.

На чертеже 120 показан пример решения подобной задачи в применении к конусу и цилиндру.

Типичными точками искомой кривой  $1, 2 \dots 21$ , являются следующие:

- 1 и 12—касания производящих  $SC$  и  $SC_1$  конуса с цилиндром (их вторичные проекции  $sc$  касаются основания цилиндра в точке  $b$ ).
- 4 и 10—пересечения левой контурной производящей цилиндра с конусом.
- 3 и 20—пересечения нижней контурной производящей конуса с цилиндром.
- 9 и 15—пересечения верхней контурной производящей конуса с цилиндром.
- 7 и 17—пересечения задней производящей конуса с цилиндром; в этих точках кривая сечения будет касательной к вертикалям и т. д.



Черт. 120.

**Задача № 39.** Построить точки пересечения пространственной кривой линии с кривой поверхностью.

**Решение.** Проводим через данную линию какую-нибудь поверхность, например, цилиндрическую или коническую, но при том такую, чтобы она с данной поверхностью пересекалась по линии возможно простой. Тогда точки пересечения этой последней с данной кривой линией и будут искомыми.

## ГЛАВА III.

### Построение теней.

#### § 12. Общие замечания.

Построение теней в аксонометрии имеет целью придать изображению возможно бóльшую наглядность.

Лучи света обыкновенно предполагаются параллельными друг другу. Направление же их следует выбирать так, чтобы тени по возможности не скользили вдоль главных граней предмета, а, наоборот, рельефнее выделяли его характерные выступы.

В технике принимают направление лучей света параллельным диагонали куба (черт. 121), прислоненного своими гранями к плоскостям проекций. Тогда направление аксонометрических проекций лучей будет параллельным  $PP_1$ , а направление их вторичных горизонтальных проекций будет параллельным  $pp_1$ .

Рассмотрим построение теней на примерах решения различных задач.

*Задача № 40.* Построить тень от точки  $A$  на плоскость проекций (черт. 122).

*Решение.* Задача сводится к проведению через  $A$  луча, параллельного направлению  $PP_1$  и к нахождению точки пересечения этого луча с плоскостью проекций. Для этого проводим  $AA_0 \parallel PP_1$  и  $aA_0 \parallel pp_1$ . Точка пересечения  $AA_0$  с  $aA_0$  и даст тень  $A_0$  точки  $A$  на  $H$ .

В этом случае тень упала на горизонтальную плоскость проекций.

На том же чертеже дана другая точка  $B$ , тень  $B_0$  от которой упала на вертикальную плоскость проекций  $V$ .

Из этих двух примеров видно, что задача на построение тени от точки на какую-нибудь плоскость сводится к задаче на построение точки пересечения линии (луча) с этой плоскостью.

*Задача № 41.* Построить тень от линии  $Aa$  (черт. 122).

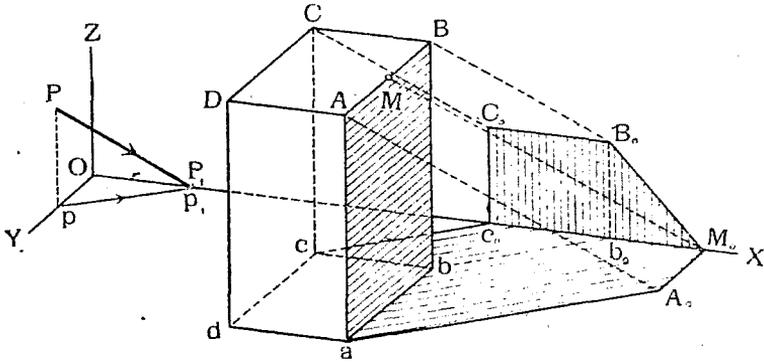
*Решение.* Так как точка  $a$  задана лежащей в  $H$ , то она совпадает со своей тенью на  $H$ . Поэтому строим тень  $A_0$  от другого конца  $A$  и соединим концы тени на  $H$ . Линия  $aA_0$  и будет искомой. Она все лежит на  $H$ .

В том же чертеже показано еще построение тени от вертикального луча  $Bb$ . Сначала, до плоскости  $V$ , тень  $bb_0$  идет параллельно  $PP_1$ , далее тень ломается и идет вертикально до точки  $B_0$ .

Если бы требовалось построить тень от случайной линии (черт. 122), то поступаем следующим образом: строим сл



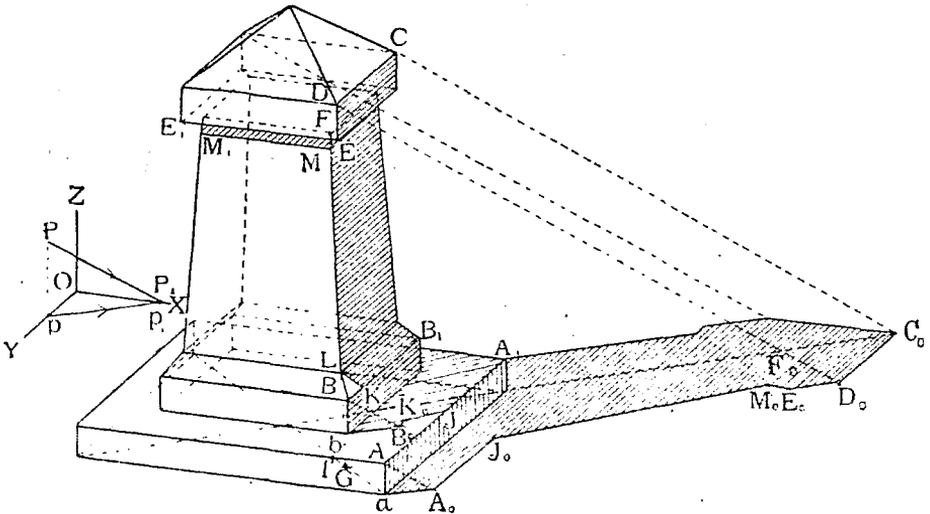
*Решение.* Непосредственно из рассмотрения чертежа видно, что контуром собственной тени призмы будет ломаная линия  $aABSc$ . Строим тень от этой линии. Получаем  $aA_0M_0B_0C_0c_0$  — контур падающей тени. Для наглядности полезно заштриховывать или закрасивать собственные тени слабее, а падающие — темнее.



Черт. 123.

**Задача № 43.** Построить тени монумента (черт. 124).

*Решение.* Построение теней начинаем снизу. Начало контура собственной тени найдем, проведя  $aA_0 \parallel pp_1$  касательное к нижнему контуру (основанию) монумента. Тенью от ребра  $aA$  будет линия  $aA_0$ .



Черт. 124.

Далее, контур собственной тени пойдет по линии  $AA_1$ . Так как она параллельна  $H$ , то падающая от нее тень  $A_0J_0$  будет параллельна  $AA_1$ . Контур собственной тени  $AA_1$  около середины своей попадает в тень, падающую от средней части монумента, которая ложится частью на его квадратное основание, частью на  $H$ .

Тень  $bB_0$  от ребра  $bB$  и от точки  $B_0$  тень

ем основании пойдет параллельно параллельно ребру  $BB_1$ . Строим

теперь тень от ребра  $FG$  монумента. Тень от  $F$  упала в точку  $F_0$ . Линия  $GF_0$  и будет искомая. Отмечаем точку  $J_0$  пересечения ее с  $AJ_0$ . Точка  $J_0$  будет тенью от точки  $J$  на ребре  $AA_1$ . Проводим  $JK_0 \parallel F_0J_0$  до пересечения с  $BK_0 \parallel BB_1$  в точке  $K_0$ , которая будет тенью от точки  $K$  на ребре  $BB_1$ . Линия же  $LK$  будет тенью от ребра  $LF$  на грань  $LBB_1$ .

Далее строим тени на  $H$  от ребер  $CD$ ,  $DE$  и  $EE_1$ .

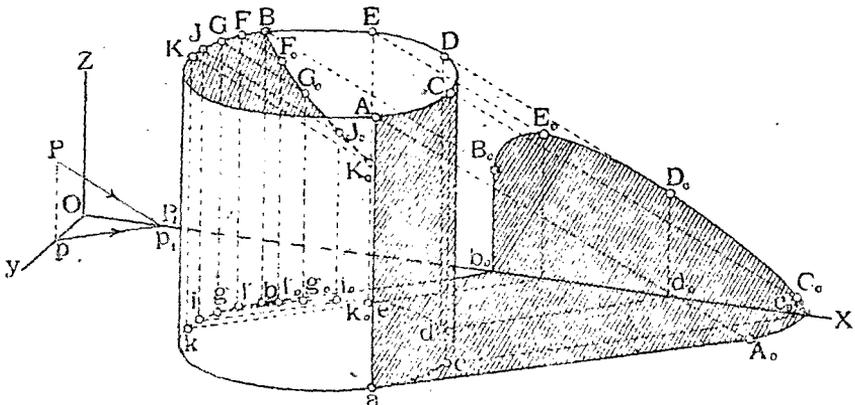
Тень от ребра  $EE_1$  пойдет через  $E_0$  параллельно  $EE_1$  и пересечет тень  $F_0J_0$  в точке  $M_0$ , которая будет тенью от точки  $M$  на ребре  $FG$ . Линия же  $MM_1 \parallel EE_1$  будет тенью на передней грани монумента от ребра  $EE_1$ . Подобным же образом достраиваем остальные тени, находящиеся на  $H$ .

В рассмотренном примере часть теней упала на  $H$ , часть же на само тело (тень  $bB_0J$ , тень  $MM_1$  и тень  $LK$ ).

Таким образом, обобщая этот случай для группы нескольких многогранников, получим, что задача на построение падающих теней их сводится к построению линий сечения этих многогранников с обертывающими их призмами, параллельными лучам света. Подобная же задача была уже нами рассмотрена (задача № 30).

#### § 14. Тени кривых поверхностей.

Задачи на построение теней кривых поверхностей решаются аналогично задачам на построение теней многогранников. Разница лишь в том, что обертывающая призма превращается в обертывающий цилиндр, который, в частных случаях, может иметь и плоскостные вставки.



Черт. 125.

Рассмотрим построение теней кривых поверхностей на примерах.

**Задача № 44.** Построить тени цилиндра, не имеющего верхнего основания (черт. 125).

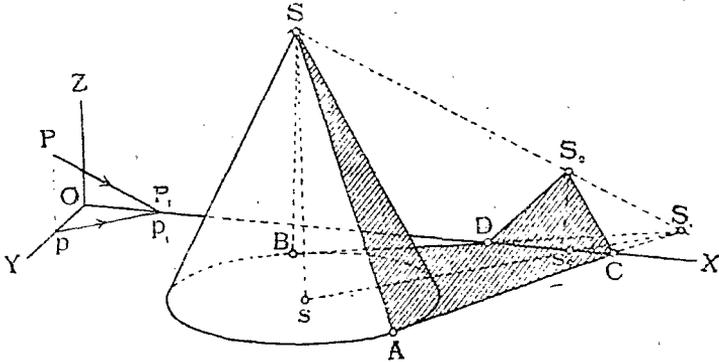
**Решение.** Определяем сначала контур собственной тени цилиндра. Для этого проводим линии  $A_0a$  и  $b_0b \parallel pp_1$  касательными к нижнему основанию цилиндра. Получаем точки  $a$  и  $b$  касания, через которые

пройдут производящие цилиндра  $aA$  и  $bB$ , отделяющие освещенную часть его боковой поверхности от неосвещенной. Полный контур собственной тени будет:  $aACDEBb$ . От этого контура строим тень  $aA_0C_0D_0E_0B_0b_0b$ , падающую частью на  $H$ , частью на  $V$ . Дуга же  $AKB$  круга верхнего очертания цилиндра даст тень на внутреннюю поверхность его. Для построения ее проводим через ряд точек этой дуги лучи и находим пересечение их с цилиндром. Например, луч  $F$  пересек цилиндр в точке  $F_0$  (вспомогательные линии:  $ff_0 \parallel pp, f_0F_0 \parallel aA$ ) и т. д.

Тенью будет служить линия  $BF_0G_0J_0$ .

В рассмотренном случае задача свелась к пересечению обертывающих поверхностей:

- 1) плоскости  $AaA_0$  с плоскостью  $H$  (прямая  $aA_0$ ),
- 2) цилиндра  $ACDEBA_0C_0D_0E_0B_0$  с плоскостями  $H$  и  $V$  (дуги эллипсов  $A_0C_0D_0E_0B_0$ ),
- 3) плоскости  $BbB_0b_0$  с  $V$  и  $H$  (прямые  $B_0b_0$  и  $b_0b$ ),
- 4) цилиндра  $AKBF_0G_0$  данным цилиндром (кривая  $BF_0G_0$ ).



Черт. 126.

В общем случае задачи на построение теней кривых поверхностей сводится на построение линий сечения последних с поверхностями, параллельными лучу и обертывающими данные поверхности.

**Задача № 45.** Построить тени конуса (черт. 126).

**Решение.** Предположим, что плоскости  $V$  нет. Тогда тень от вершины  $S$  конуса упала бы на  $H$  в точку  $S_1$ . Проведем через  $S_1$  линии  $S_1A$  и  $S_1B_1$  касательные к основанию конуса и обозначим точки касания буквами  $A$  и  $B$ . Линии  $SA$  и  $SB$  будут производящими отдела собственной тени конуса. Часть тени от производящей  $AS$  упадет на  $H$  до точки  $C$ . Равным образом часть тени от  $SB$  ляжет на  $H$  до точки  $D$ . От точек же  $C$  и  $D$  тень переломится, так как здесь она встречает плоскость  $V$ , и пойдет в точку  $S_0$ , тень от  $S$  на  $V$ .

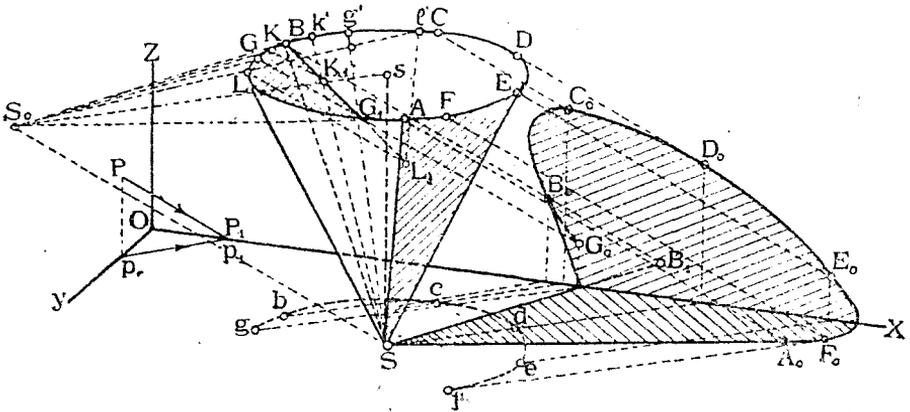
**Задача № 46.** Построить тени конуса, стоящего вершиной на  $H$  и не имеющего верхнего основания (черт. 127).

**Решение.** Проводим через вершину  $S$  луч до пересечения с плоскостью верхнего основания в точке  $S_0$ . Из последней проводим касательные к основанию и отмечаем точки касания  $A$  и  $B$ . Производящие  $SA$  и  $SB$  будут принадлежать контуру собственной тени.

Строим обычным порядком тень от контура  $SAEDCB$ . Получим контур падающей тени  $SA_0F_0E_0D_0C_0B_0S$ .

Дуга же  $ALB$  даст тень на внутреннюю поверхность конуса. Точки этой тени получим, проведя через ряд точек дуги  $ALB$  лучи, и построив их пересечение с поверхностью конуса (см. задачу № 36, черт. 118). Например, для построения точки  $K_1$  проводим  $KK_0 \parallel PP_1$ .

Далее, проводим  $S_0K$  до пересечения с дугою основания в точке  $k'$ . Линия  $k'S$  будет линией сечения конуса с плоскостью, проходящей через прямую  $KK_1$  и через вершину  $S$ . Точка  $K_1$  пересечения прямых  $KK_1$  и  $k'S$  и будет искомой.



Черт. 127.

**Задача № 47.** Построить тени кривой поверхности, заданной ее параллелями (черт. 128).

**Решение.** На черт. 128 изображен шар его параллелями. Кроме того, построено и два главных меридиана  $AFBG$  и  $DFEG$  и экватор  $AEBD$ .

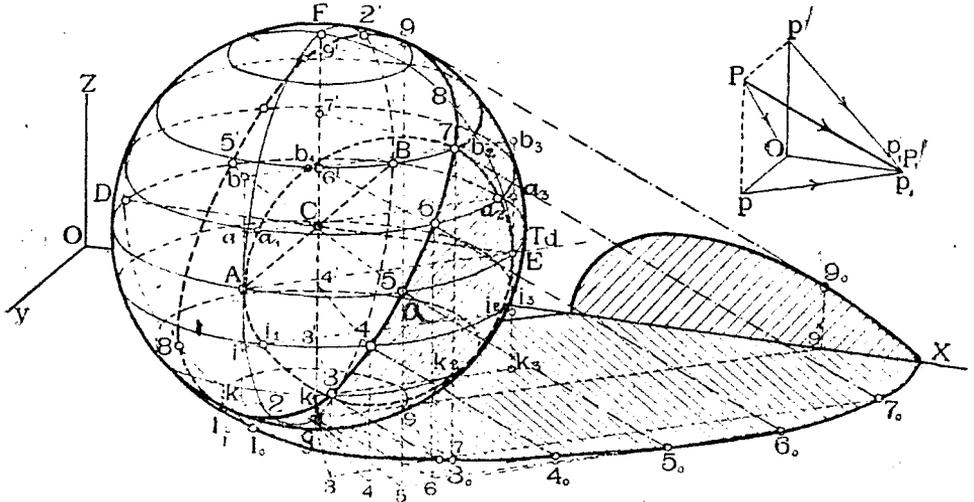
Даны: направление лучей света  $PP_1$  и его вторичные проекции: горизонтальная  $pp_1$  и вертикальная —  $p'p'_1$ .

Строим контур собственной тени шара. Определяем сначала *типичные* точки ее.

Для этого проводим касательные к контуру видимости шара, параллельные лучу  $PP_1$ . Получим точки 1 и 9. Далее, проводим касательные к экватору параллельные вторичной проекции  $pp_1$ . Получим точки 5 и 5'. Проводим касательные к главному меридиану, параллельному  $V$ , параллельные вторичной проекции  $p'p'_1$ . Получим точки 8 и 8'. Наконец, проводим касательные к меридиану, параллельному  $W$ , параллельные вторичной проекции  $PO$ . Получим точки 2 и 2'. Точки 1, 2, 5, 8, 9, 2', 5', 8' позволяют уже приблизительно построить плавную кривую, в данном случае эллипс, которая и будет искомым контуром собственной тени шара.

Для построения *случайных* точек этого контура проведем какую-нибудь вертикальную плоскость  $T$  параллельную лучу, которая рассекает шар в пространстве по кругу и в аксонометрии по эллипсу. Прямые касательные к этому эллипсу и параллельные лучу  $PP_1$  и определяют в точках касания искомые точки.

В нашем примере мы провели плоскость  $T$  через точки  $A$  и  $E$ ; обозначим через  $Td$  след этой плоскости на плоскости экватора. Очевидно  $Td \parallel pp_1$ . Плоскость  $T$  пересекает плоскости параллелей шара по линиям  $aa_3, bb_3, ii_3, kk_3$ . Эти последние пересекут соответственные параллели в точках  $a, a_2; b, b_2; i, i_2; k, k_2$ . Совокупность этих точек дает кривую—эллипс  $Aa_1, \delta_1, a_2, a_2, Ee_2, k_2, k_1, i_1A$  сечения плоскости  $T$  с шаром. Проводим касательные к этой кривой, параллельные  $PP_1$ . Получим точки 7 и 3 искомого контура собственной тени.



Черт. 128.

Для построения контура падающей тени замечаем точки пересечения контура собственной тени шара с разными параллелями шара и строим тени, падающие от этих точек. Например, пусть точка 4 будет пересечением контура собственной тени с 4-й параллелью.

Соединяем центр  $4'$  этой параллели с точкой 4. Проведим вторичную проекцию  $s4 \parallel 44'$  и находим вторичную проекцию 4 точки 4. Далее проводим  $44_0 \parallel PP_1$  и  $44_0 \parallel pp_1$  до пересечения в точке  $4_0$ , которая и будет тенью точки 4 и т. д.

На черт. 128 часть тени от шара упала на  $H$ , а часть—на  $V$ .

Интересную геометрическую задачу представляет определение осей эллипсов: контуров собственной тени шара, тени падающей на  $H$  и тени, падающей на  $V$ .

Решение этой задачи мы предоставляем читателю.

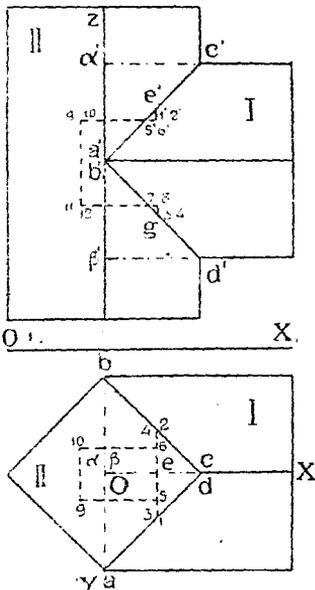
## ГЛАВА IV.

### Примеры решения технических задач.

#### § 15. Примеры решения технических задач.

Рассмотрим теперь применение аксонометрии к решению различного рода технических задач на примерах.

*Задача № 48.* На чертеже 129 изображено в ортогональных проекциях соединение горизонтального деревянного бруса I перил с деревянной же стойкою (II). Оба бруса квадратного сечения. Требуется построить детали соединения в аксонометрии. Масштаб увеличить в 2 раза.



Черт. 129.

*Решение.* Строим сначала деталь врубки бруса I. Так как необходимо иметь вид левой его части, где имеется врубка, то строим схему пятого угла пространства (вид слева, сверху) (черт. 130, внизу), выбирая плоскость аксонометрических проекций  $\parallel V$  и задаваясь  $\frac{1}{t} = 0,5$ .

Согласно задания будем увеличивать в два раза размеры врубки, параллельные  $OX'$  и  $OZ$ , оставляя без изменения размеры, параллельные  $OY$  (так как  $\frac{1}{t} = 0,5$ ).

Строим сначала изображение нормального сечения  $AB\alpha\beta$  (черт. 130 справа). Условимся, для краткости, аксонометрическое изображение предмета (черт. 130) называть картиною, а ортогональные проекции его (черт. 129) — эпюрою.

Откладываем  $\alpha\beta$  на картине  $= 2\alpha'\beta'$  (эпюра) и длину  $AB$  (картина)  $= ab$  (эпюра). Через точки  $A, B, \alpha$  и  $\beta$  проводим параллельно  $OX'$  ребра бруса.

Намечаем, далее, точки среза  $C$  и  $D$ , откладывая  $\alpha C$  (картина)  $= 2\alpha'c'$  (эпюра) и  $\beta D = 2\beta'd'$ .

Теперь мы имеем две грани врубки  $ACB$  и  $ADB$ .

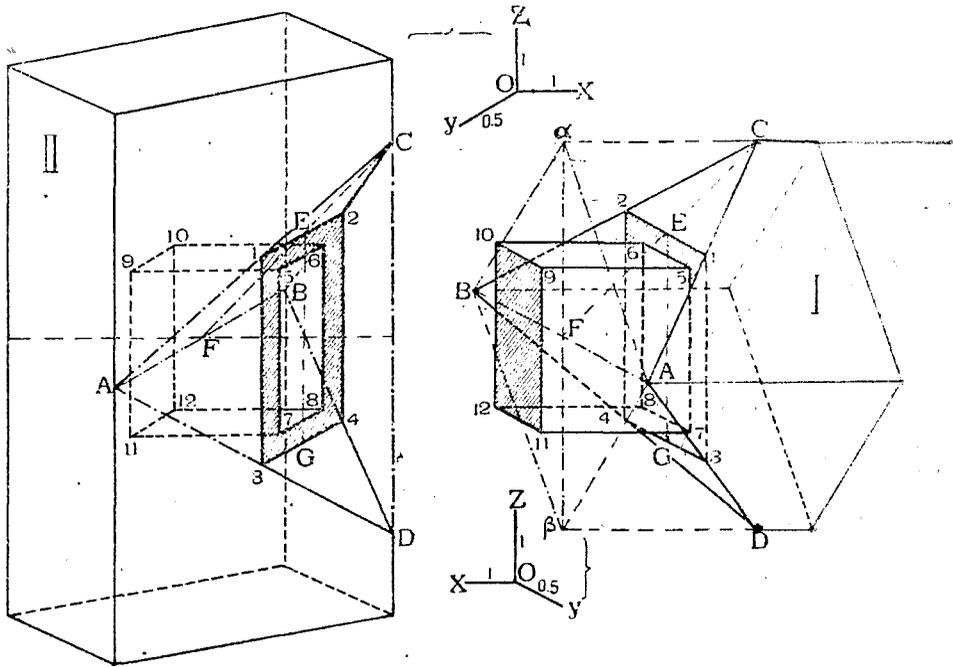
Строим плоскость сечения 1234, откладывая  $CE$  (картина)  $= 2c'e'$  (эпюра). Откладываем по вертикали  $EG = 2e'g'$ . Точки  $E$  и  $G$  позволяют легко построить изображение прямоугольника 1234.

Построение щипа начинаем с изображения прямоугольника 567 ориентируя его относительно линии  $EG$  и имея в виду, что 56 (картина)  $= 56$  (эпюра) и  $57$  (картина)  $= 2 \times 57$  (эпюра).

Проводим через точки 5, 6, 7, 8 ребра пины, параллельные  $OX'$  откладываем длины 5,9; 6,10 и т. д. (картина) =  $2 \times 5,9$ ;  $2 \times 6,10$  (эюра) и заканчиваем изображение.

Для изображения стойки (I) принимаем вид справа сверху (I угол пространства), располагая оси согласно схеме на черт. 130 вверху. Описания построений не приводим, предлагая разобраться в них самому читателю.

*Задача № 49.* Построить в аксонометрии детали сопряжения стойки с посадкой из круглого леса (черт. 131)<sup>1)</sup>. Масштаб увеличить в  $2\frac{1}{2}$  раза.



Черт. 130.

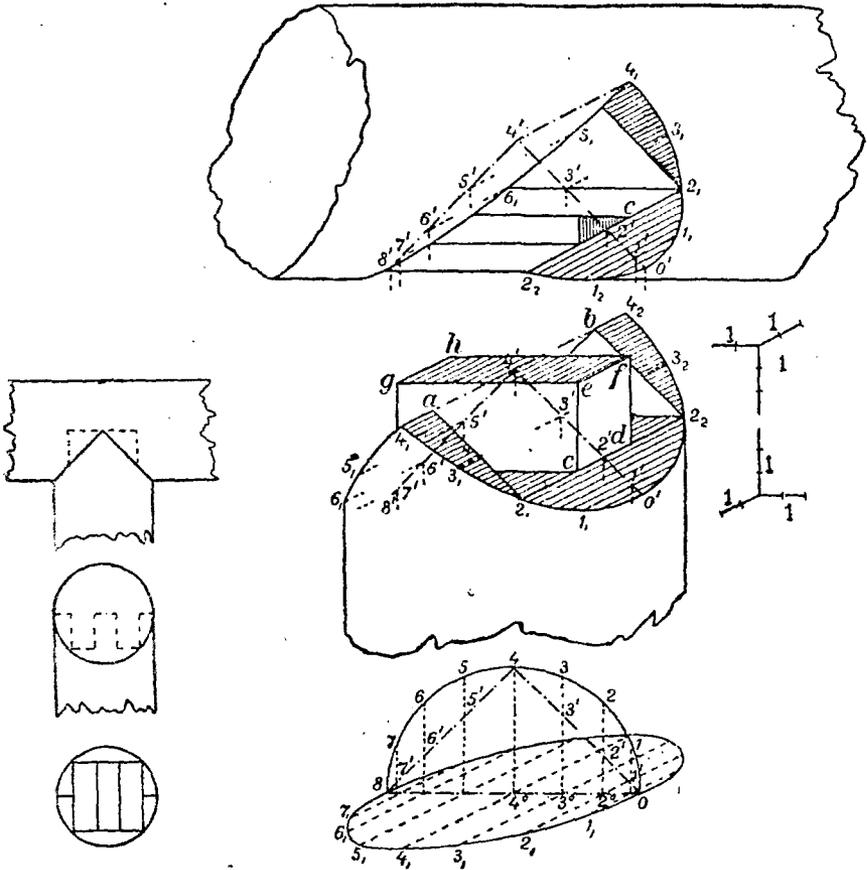
*Решение.* Будем изображать стойку и насадку отдельно, при чем для изображения первой примем I угол пространства (вид справа сверху), а для изображения второй—VII угол (вид слева снизу). Плоскость проекций выберем  $\parallel V$ . Показатель  $\frac{1}{t} = 1$  (проекции изометрические).

Прежде всего следует построить изображение эллипсов, в которые проектируются линии сечения прямых круговых цилиндров, ограничивающих стойку и насадку. Эллипсы эти строятся по точкам, ординаты которых определяются по чертежу 132 (внизу), на котором изображено нормальное сечение стойки (эллипс  $0, 1_1, 2_1, 3_1, \dots, 8, \dots$ ) и линия прямоугольного среза стойки ( $048$ ). Изображение стойки начинаем с построения линии  $0'4'8'$ . На этой последней намечаем ряд точек  $1', 2', 3', \dots$ , через них проводим линии, параллельные оси  $Y$ -ов и откладываем на них длины:  $1'1_1 = 1_01_1$ ;  $2'2_1 = 2_02_1$ ;  $3'3_1 = 3_03_1$ ;

<sup>1)</sup> Заимствовано из соч. В. Курдюмова „Аксонометрия“, СПб., 1905, стр. 232.

$4'4_1 = 4_04_1$ , и т. д. Соединяя найденные точки плавными кривыми, получим изображения контуров среза стойки (полуэллипсы). Подобным же образом построим и полуэллипсы насадки.

Далее на хорде  $2_12_2$  стойки находим точки  $c$  и  $d$ . Строим ребра  $ce$  и  $df$  шипа и, наконец, самый шип. Отмечая на диаметре  $4_14_2$  точки  $a$  и  $b$  и соединяя их с  $2_1$  и  $2_2$ , получим начало очертания пазов и т. д.



Черт. 131.

Черт. 132.

Имея изображения шипа и пазов стойки, нетрудно перенести их на изображение насадки.

**Задача № 50.** Построить в аксонометрии детали соединения деревянной стропильной ноги с затяжкой (черт. 133).

**Решение.** Для изображения затяжки выбираем I угол пространства (вид справа сверху), а для изображения ноги — IV угол (вид справа снизу). Соответственно с этим строим схемы осей (черт. 134). Проекция выбираем изометрические. Масштаб изображения выбираем в 2 раза крупнее, по сравнению с чертежом 133.

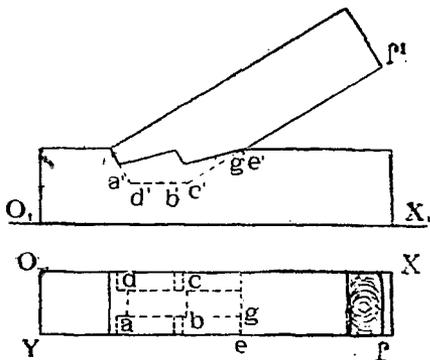
При построении изображения ноги аксонометрические оси ее  $OX$  и  $OZ$  приняты соответственно параллельным осям  $OX$  и  $OZ$  затяжки. Поэтому все ребра ноги, параллельные плоскости  $OXZ$ , будут параллельны и равны соответственным ребрам затяжки, изображенным на чертеже 134 и параллельным плоскости  $OXZ$ . Например,  $BG$  (нога)  $\neq BG$  (затяжка

и  $AB$  (пога)  $\neq AB$  (затяжка) и т. д. Построение же отдельных точек изображения не представляет затруднений.

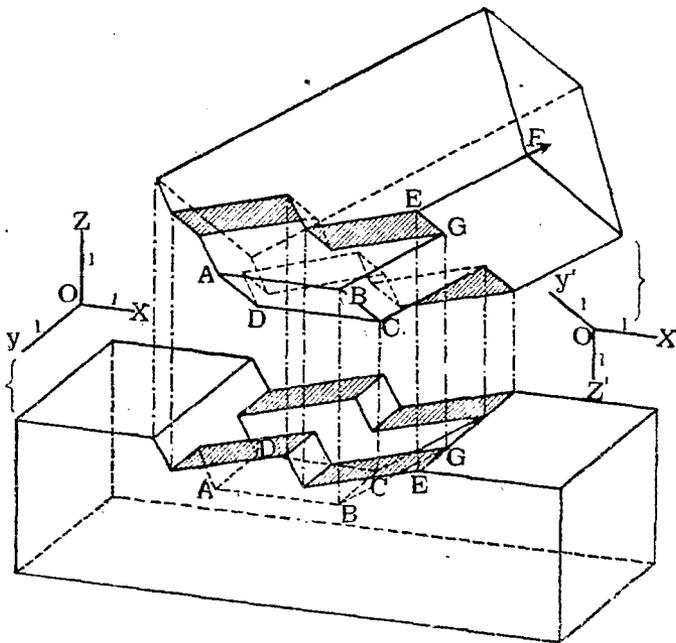
**Задача № 51.** Построить в аксонометрии изображение портала, обделанного тесовой кладкой, и показать отдельно изображение арочных камней. Портал задан в ортогональных проекциях (черт. 135 слева).

**Примечание.** Свод над дверью образован движением круга переменного радиуса. Центр круга скользит по прямой  $m'n'$ ,  $m''n''$ , плоскость его остается параллельной фасаду, а радиус пропорционально уменьшается от  $m'p''$  до  $n'g''$ .

**Решение.** На черт. 135, в середине, портал по общим правилам изображен в аксонометрии с показанием теней. Предлагаем читателю самому определить аксонометрические оси и показатели искажения. Справа же показаны в аксонометрии три арочных камня, причем, для облегчения построения, сначала очерчены пунктиром параллелепипеды, вмещающие эти камни. Заметим, что соответственные линии на аксонометрических видах как камней, так и самого портала взаимно параллельны.



Черт. 133.



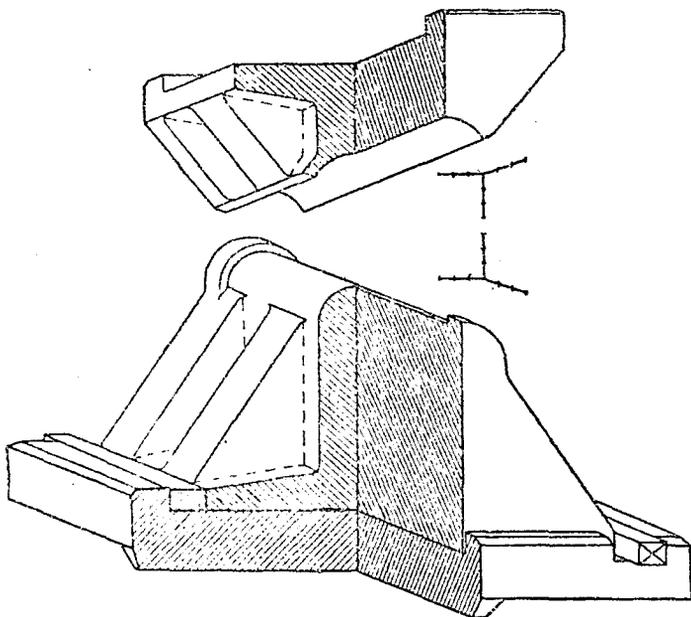
Черт. 134.

Масштаб же для камней принят крупнее, нежели для портала. Для облегчения построения изображения камней были сначала построены разрезы их по  $a'b'$ ,  $e'd'$  и  $e'f'$  (черт. 135, внизу), а также истинная фигура развертки ( $g$ ) боковой стенки.



значить эти закругления или штриховкой, или, как это и сделано на черт. 137, пунктирными прямыми, являющимися линиями сечения главной стенки с продолженными боковыми плоскостями приливов.

*Задача № 53.* Изобразить в аксонометрии результаты опытов, произведенных над шейкой вала из никелевой стали, вращающейся во вкладыше из белого металла. Опыты имели целью показать зависимость между температурой вкладыша в  $^{\circ}\text{C}$ , окружной скоростью в метрах и развивающейся теплотой, отнесенной к квадратному сантиметру площади проекции шейки и выраженной в единицах тепла, а также в килограммометрах в секунду. Опыты производились при удельном давлении в 6,5 килогр. на кв. сант., но так как при употреблении



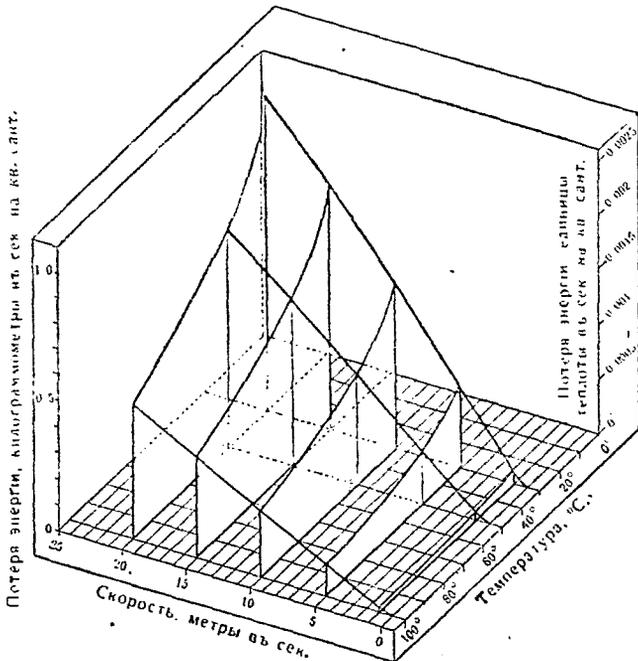
Черт. 137.

шейся смазке, произведение удельного давления и коэффициента трения было почти постоянно, то принято, что результаты может быть применены и для любого удельного давления от 3 до 15 килограммов на кв. сант. <sup>1)</sup>.

*Решение.* Проводим сначала три аксонометрические оси (черт. 138) и градуируем их в пределах, определяемых опытами. От делений на осях плоскости  $H$  проводим перпендикуляры, лежащие в той же плоскости и образующие сетку, на которой можно располагать точки совершенно так же, как это делается на обыкновенной клетчатой бумаге. В найденных таким путем точках восстанавливаем перпендикуляры к  $H$  и откладываем на них отрезки представляющие значения третьего переменного. Вершины этих линий соединяем главными кривыми, которые образуют поверхность, изображающую, подобно уравнению, зависимость между упомянутыми переменными.

<sup>1)</sup> См. Дж., Б. Педль „Построение и применение номограмм. Перев. с английского Е. Куколевской под редакцией Р. Полякова. Москва. 1913. Стран. 121. Из этой книжки нами заимствован текст и чертежи задачи № 53.

На чертеже 138 приведено пять кривых, параллельных плоскости „температура-теплота“, и три кривых параллельных плоскости „скорость-теплота“. Взяв одну из этих последних кривых, соответствующих  $50^{\circ}$ , мы видим, что при этой постоянной температуре теплота, развиваемая вследствие трения, увеличивается с увеличением скорости, но не совершенно пропорционально последней, так как коэффициент трения не остается вполне постоянным при изменении скорости. Сохраняя скорость постоянной и изменяя температуру, увидим, что теплота от трения уменьшается с повышением температуры сначала быстро, а затем медленнее. Из диаграммы видно, что при исследуемой шейке вала теплота от трения будет наибольшей при пуске.



Черт. 138.

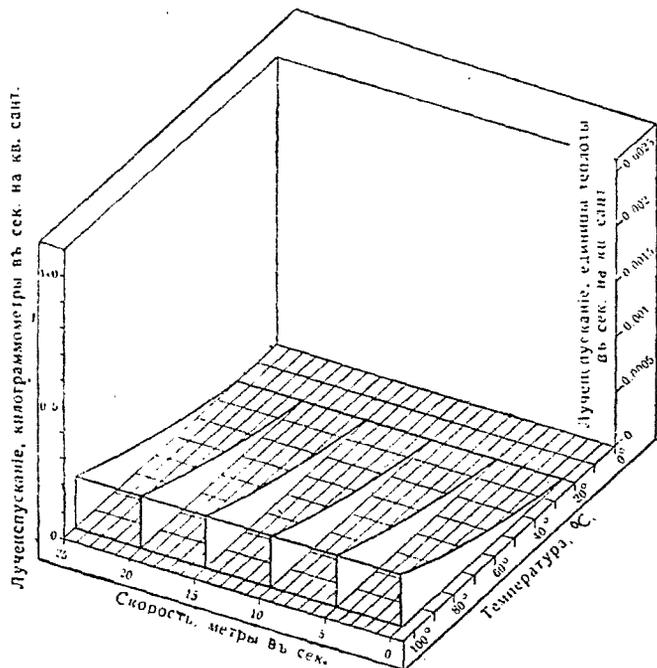
в ход, когда температура низка. Также ясно, что при этой температуре лучеиспускание в окружающую атмосферу будет не велико, вследствие незначительной разницы температур. Образующаяся теплота идет поэтому на нагревание вкладыша, но по мере того, как его температура повышается, количество развиваемой теплоты уменьшается, а лучеиспускание увеличивается до тех пор, пока мы не дойдем до момента, когда лучеиспускание как раз уравнивает образующуюся теплоту, и температура установится постоянная.

Естественно возникает вопрос, возможно ли определить, когда именно этот момент наступит. Если необходимые опытные данные имеются под руками, то это может быть сделано при помощи аксонометрии.

Предположим, что у нас эти данные имеются. На основании их мы строим в аксонометрии вторичную диаграмму на тех же осях теплоты, температуры и скорости, как и раньше (черт. 139). Она по-

называет размер теплового лучеиспускания, отнесенного к квадратному сантиметру площади проекции исследуемого вкладыша и построена для температуры окружающего пространства, равной  $20^{\circ}\text{C}$ . Когда вкладыш имеет эту температуру, его лучеиспускание, конечно, равно нулю. Лучеиспускание не зависит от скорости шейки вала; поэтому поверхность будет цилиндрической, параллельной оси скоростей.

При увеличении температуры вкладыша лучеиспускание, конечно, увеличивается.



Черт. 139.

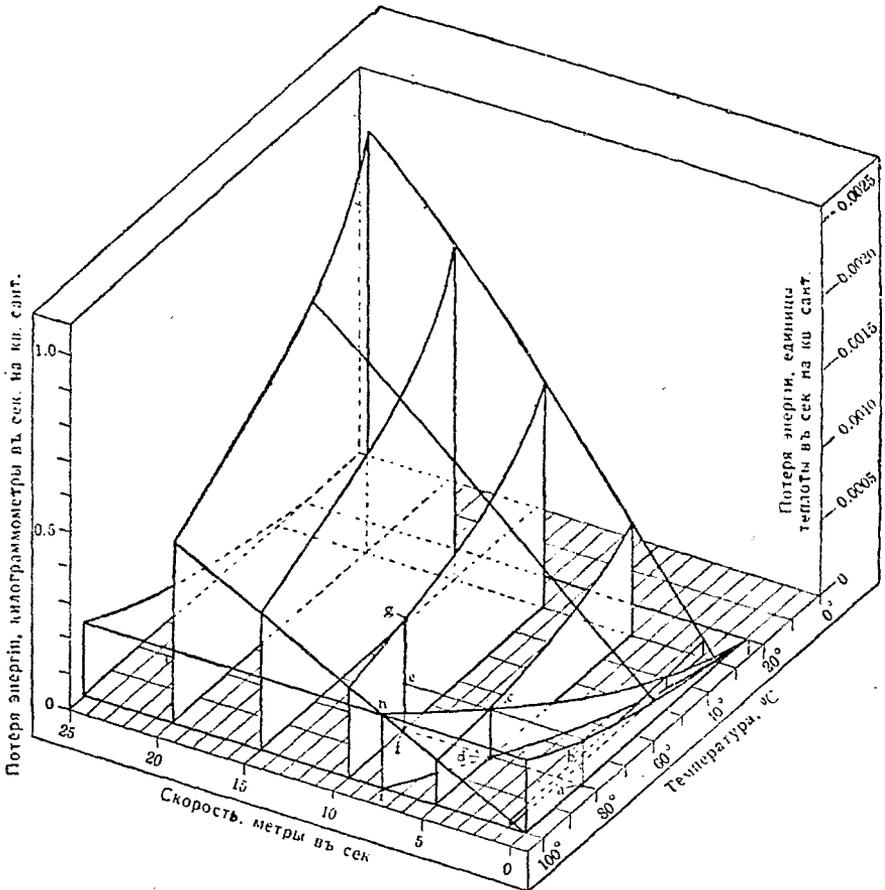
Скомбинируем теперь эти диаграммы на один чертеж (черт. 140). Обе поверхности пересекутся по некоторой линии  $hci$ , которую нетрудно построить. Всякая точка на этой линии будет соответствовать некоторой температуре и скорости, при которых лучеиспускание как раз равно образующейся теплоте—необходимому условию постоянства температуры. Эта линия, будучи спроектирована на горизонтальную плоскость, дает нам линию  $idi$ . Всякая точка на горизонтальной плоскости, проектированной от осей температуры и скорости, и приходящаяся впереди этой линии, будет указывать, что при этих условиях лучеиспускание больше, чем образующаяся теплота, или, что и естественного охлаждения достаточно для того, чтобы удерживать вкладыши при температуре ниже выбранной максимальной. Точки, находящиеся за этой линией, соответствуют условиям, при которых должно быть применено искусственное охлаждение.

Подобные аксонометрические диаграммы облегчают исследование явлений и позволяют с известной точностью производить подсчеты.

**Задача № 54.** По направлению  $ST$  (черт. 141) действует сила 500 кгр. Определить составляющие ее по направлениям  $SA$ ,  $SB$  и

*SC.* Все эти направления заданы в аксонометрии. Все показатели равны порознь единице.

*Решение.* Зададимся случайной длиной силы  $ST$  и разложим ее на две составляющих: одну по направлению  $SC$  и другую—лежащую в плоскости  $SAB$ . Найдем предварительно линию сечения плоскостей  $SAB$  и  $STC$ . Одной из точек этой линии будет точка  $S$ . Для нахождения другой выберем в плоскости  $ABS$  случайную линию, не проходящую через  $S$ . Например,  $AB$ , и найдем точку пересечения ее с



Черт. 140.

плоскостью  $STC$ . Чтобы найти эту точку, проведем через  $AB$  вертикально проектирующую плоскость и определим линию  $DE$  сечения ее с плоскостью  $STC$ . Точка  $F$  пересечения линий  $AB$  и  $DE$  и будет искомой. Линия же  $SF$  будет линией сечения плоскостей  $ABS$  и  $STC$ .

Разложим теперь силу  $ST$  по направлениям  $SC$  и  $SF$ . Получим в аксонометрии составляющие  $SJ$  и  $SG$ . Составляющую  $SG$  разложим по направлениям  $SA$  и  $SB$ . Получим составляющие  $SK$  и  $SL$ . Теперь остается определить истинные длины отрезков  $ST$ ,  $SJ$ ,  $SK$  и  $SL$ . На чертеже показаны, в виде примера, построения для определения истинной длины  $SJ$ . Для этого проведены:  $i1 \parallel OX$ ,  $s1 \parallel OY$ ,  $12 \perp i1$  и отложено  $12 = s1$ . Длина  $i2$  равна истинной длине  $si$ . Далее проводим

$S3 \parallel si$ ,  $J3 \perp OX$  и  $24 \perp i2$ ; откладываем  $24 = J3$ . Длина  $4i$  и будет выражать истинную длину  $SJ$ .

Длины остальных составляющих и  $ST$  определены подобным же образом. Полученные отрезки отложены вверх чертежа. Если принять длину  $ST$  за единицу, то при помощи простых построений, показанных вверх чертежа, получим, что

$$\begin{aligned} SL &= 0,94 ST \\ SJ &= 0,48 ST \\ SK &= 0,12 ST. \end{aligned}$$

Так как, по заданию, сила  $ST = 500$  килограммам, то окончательно получаем:

$$\begin{aligned} SL &= 0,94 \cdot 500 = 470 \text{ вгр.} \\ SJ &= 0,48 \cdot 500 = 240 \text{ вгр.} \\ SK &= 0,12 \cdot 500 = 60 \text{ вгр.} \end{aligned}$$

**Задача № 55.** Предлагаем читателю в виде упражнения решить в аксонометрии следующую задачу: Дана в пространстве в виде вектора сила  $AB = 500$  вгр., и дано еще шесть не параллельных и не пересекающихся направлений. Разложить силу  $AB$  на эти направления и определить ее составляющие.

*План решения.* Назовем данные шесть направлений цифрами 1, 2 . . . 5, 6. Принимаем линии 1, 2 и 3 на направляющие одно-

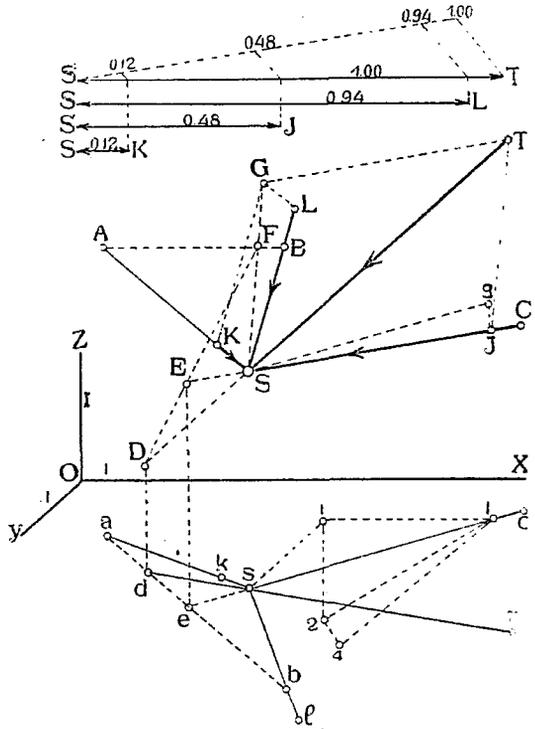
полого гиперboloида и находим точку  $M$  пересечения его с линией 4. Через точку  $M$  проводим прямолинейную производящую  $M$  гиперboloида и составляем уравнение моментов неизвестных усилий  $x_5$  и  $x_6$  действующих по линиям 5 и 6 относительно линии  $M$ , пересекающей первые четыре направления: Уравнение будет вида

$$x_5 \cdot a_5 + y_6 \cdot b_6 + AB \cdot c = 0, \text{ где}$$

$a_5$  и  $b_6$  расстояния сил  $x_5$  и  $y_6$  от линии  $M$ , а  $c$  — расстояние данной силы  $AB$  от той-же оси. Взяв другие 4 направления — составим новое ур—ие и т. д. пока не составим шесть ур—ий с 6-ю неизвестными, из этих ур—ий и определим последние.

**Задача № 56.** На шаре, изображающем в аксонометрии землю, показать точки, соответствующие Москве ( $55^{\circ}46'$  с. ш. и  $7^{\circ}20'$  в. д.) и Самарканду ( $39^{\circ}39'$  с. ш. и  $36^{\circ}37'$  в. д. от Пулковского меридиана) и провести через эти точки дугу большого круга.

*Примечание.* При вычерчивании эллипсов — проекции круга, можно пользоваться следующим практическим правилом: расстояние



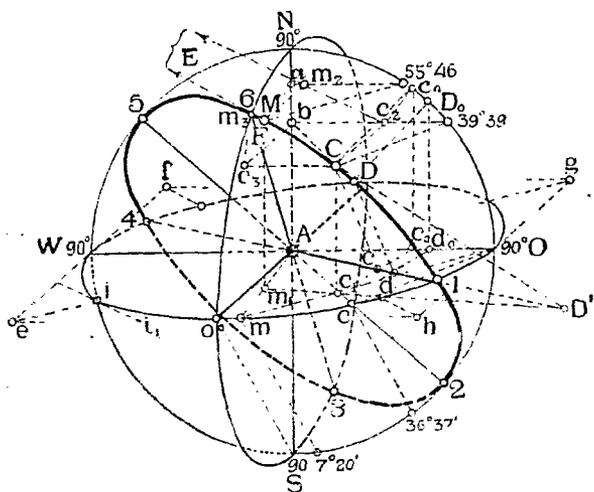
Черт. 141.

диагональных точек эллипса до его центра, равно 0,7 длины той же полудиагонали, например,  $Ai = 0,7 Ae$ . Кроме того, касательная к эллипсу в диагональной точке параллельна сопряженному диаметру, например,  $ii_1 \parallel fh$ .

*Решение.* На чертеже 142 шар задан в аксонометрии изображением трех его главных кругов: экватором и двумя взаимноперпендикулярными меридианами, причем один из них  $SON$  принят за нулевой, проходящий через Пулково. Плоскость аксонометрических проекций принята параллельной плоскости  $V$ , с которой совпадает один из главных меридианов.

Покажем сначала, как отложить на дуге экватора, начиная от нулевого меридиана, к востоку ( $O$ ) долготы Москвы и Самарканда. Для

этого представим себе, что экватор поворачивается вокруг диаметра  $WO$  передней частью вниз до совпадения с плоскостью меридиана  $NOSW$ . Тогда дуга экватора  $Oo^0W$  совпадает с дугой меридиана  $OSW$ . Точка  $O^0$  экватора опишет в пространстве дугу  $O^0S$ , хордой которой будет служить прямая  $o^0S$ . При вращении экватора хорды дуг, описываемых остальными точками его, будут параллельны друг другу и хорде  $o^0S$ . Зная это, нетрудно теперь найти на экваторе требуемые точки.



Черт. 142.

Для этого на совмещенном положении экватора откладываем от точки  $S$  вправо дуги в  $7^{\circ}20'$  и  $36^{\circ}37'$ , соответствующие долготам Москвы и Самарканда. Проводим через концы этих дуг хорды, параллельные хорде  $o^0S$ , до пересечения с начальным положением экватора в точках  $m$  и  $c$ .

Теперь откладываем на дуге  $NO$  главного меридиана широты  $55^{\circ}46'$  и  $39^{\circ}39'$ .

Чтобы найти теперь самые точки расположения Москвы и Самарканда на шаре, делаем следующие построения, основанные на том, что круги широт, проходящие через эти точки подобны экватору и в аксонометрии изобразятся эллипсами, подобными эллипсу экватора. Поэтому и соответствующие хорды этих эллипсов будут взаимно параллельными.

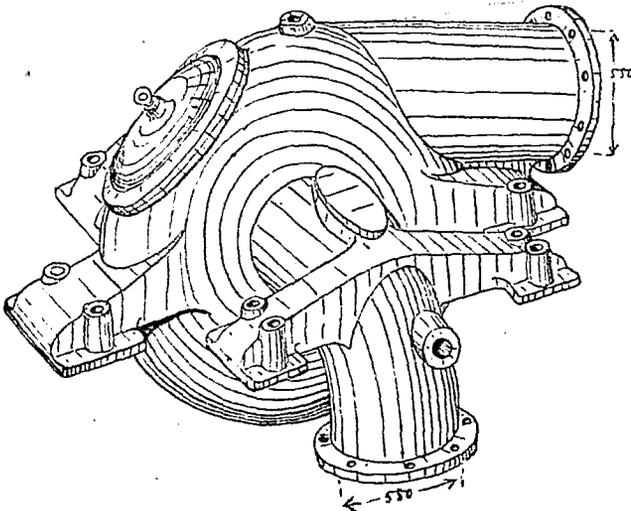
Проводим через точки  $55^{\circ}46'$  и  $39^{\circ}39'$  прямые  $\parallel OA$  до пересечения с  $NS$  в точках  $a$  и  $b$ . Эти точки будут центрами кругов широт Москвы и Самарканда. Далее, соединяем точки  $m$  и  $c$  соответственно с  $A$  и  $O$ .

Через точку  $a$  проводим  $aM \parallel Am$ , а через точку  $55^{\circ}46'$  проводим  $55^{\circ}46'M \parallel Om$ . Пересечение линий  $aM$  и  $55^{\circ}46'M$  даст точку  $M$ , искомое положение Москвы. Подобным же образом найдем и положение точки  $C$ —Самарканда.

Перейдем теперь к решению второй части задачи, именно к проведению через точки  $M$  и  $C$  большого круга.

Определим ряд точек этого круга.

Для этого построим линию сечения плоскости  $MAC$  этого круга с плоскостями трех данных основных кругов шара. Например, найдем сначала линию сечения плоскости  $MAC$  с плоскостью экватора. Одной из точек этой линии будет точка  $A$ . Для нахождения другой точки находим вторичную горизонтальную проекцию прямой  $MC$  на плоскость экватора. Для этого проектируем  $M$  на  $Am$  в точку  $m_1$  и  $C$  на  $Ac$



Черт. 143.

в точку  $c_1$  и соединяем  $m_1$  с  $c_1$ . Точка  $D'$ —пересечения прямой  $MC$  с  $m_1c_1$  и будет второй точкой искомой линии. Последняя пересекает экватор в точках  $1$  и  $4$ , которые и будут принадлежать искомому кругу, проходящему через точки  $M$  и  $C$ . Подобным же образом найдены: след  $F$  линии  $MC$  на плоскости нулевого меридиана, как точка пересечения прямой  $MC$  с ее проекцией  $m_2c_2$  на плоскость этого меридиана. Точки  $6$  и  $3$  пересечения линии  $AF$  с нулевым меридианом также будут принадлежать искомой дуге.

Наконец, точка  $E$ , лежащая вне пределов чертежа, будет следом линии  $MC$  на плоскости второго меридиана и прямая  $AE$  пересечет этот меридиан в точках  $5$  и  $2$ , принадлежащих искомому кругу. Восемь точек:  $M, C, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ —дают возможность по лекалу обчертить дугу эллипса—изображение искомого круга.

Правила же аналитической геометрии, позволяя, при желании, найти его оси и касательные в разных точках, что облегчит и сделает более точным его построение.

Покажем, например, как построить диаметр этого эллипса, сопряженный с 25.

Предположим, что эллипс, вращаясь около диаметра 25, совпал с  $V$ . Тогда он примет форму круга 5N02.

Точка  $C$  придет в положение  $c_1$ , двигаясь по дуге, хорда которой будет  $Cc_1$ . Положение точки  $c_1$  определим, зная, что вторичная вертикальная проекция  $c_2$  будет двигаться по линии  $c_2c_4 \perp 25$ , и после поворота эллипса точка  $C$  совпадет со своей вертикальной проекцией, очутившись на круге, т. е. в месте пересечения прямой  $c_2c_4$  с кругом. Конец  $D$  сопряженного диаметра эллипса после поворота упадет в точку  $D_0$  на круге, отстоящую на  $90^\circ$  от концов 2 и 5 диаметра.

При обратном повороте хорда перемещения точки  $D_0$  будет  $D_0D \parallel c_1C$ .



Черт. 144.

Для нахождения положения точки  $D$  находим линии сечения плоскостей вращения точек  $C$  и  $D$  с плоскостью эллипса. Для этого проводим  $c_1c_0 \perp AO$ , соединяем  $c_0$  с  $c_1$  и находим точку  $c$  пересечения  $c_0c_1$  с 25 и проводим  $cC$ . Эта последняя линия и будет служить линией сечения плоскости круга вращения точки  $C$  с плоскостью эллипса. Далее проводим  $D_0d_0 \perp AO$ ,  $d_0d \parallel c_0c_1$  и  $d.D \parallel cC$ . Точка  $D$  пересечения линий  $D_0D$  и  $dD$  и будет искомым концом сопряженного диаметра. Другой конец  $D_1$  будет с противоположной стороны точки  $A$  на продолжении линий  $DA$ , причем  $D_1A = DA$ .

Далее же следует провести через точки  $DD_1$ , 5 и 2 проекции сторон квадрата, описанного вокруг эллипса, параллельные соответственным сопряженным диаметрам и вписать в эту проекцию квадрат эллипса.

Подобным же образом решаются задачи на построение изображений звезд на небесной сфере, а также кругов эллиптики, склонений и т. п.

Интересные решения подобных задач можно найти в книге О. Richter „Kreis und Kugel in senkrechter Projektion“. Leipzig, 1908.

Знание основных свойств аксонометрических проекций помогает технику при составлении эскизов с натуры и при зарисовке деталей различных технических сооружений.

Подобные изображения, сделанные от руки, с соблюдением основных правил аксонометрии, называются *аксонометрическими эскизами*. На чертеже 143 показан пример подобного эскиза, изображающего деталь трубчатого соединения турбинной установки.

Наконец, отметим еще попытку изображать лица в аксонометрических проекциях, т. е. без перспективных сокращений. На черт. 144 изображен в виде примера исполненный по правилам аксонометрии портрет Людовика XIV. Портрет этот дает хорошее представление о рельефе лица; даже при близком разглядывании нельзя заметить ощутительной разницы с обычными перспективными или фотографическими изображениями.

---

## Указатель имен \*)

- Бейель—49, 56.  
Берцолари—49.  
Брандес—46.  
Брейт—48.  
Брейтгаупт—46.  
Бриккар—58.  
Бурместер—47.  
Ванечек—49.  
Вейлер—55.  
Бейсбах—27, 28, 33, 46, 59.  
Вильсон—56.  
Винер—13, 48.  
Вирзбик—47.  
Вондерлинн—49, 56.  
Гаас—57.  
Гаук—47, 58.  
Гаусс—25.  
Гаусспер—57.  
Гейгер—57.  
Герсеванов—52.  
Гнельмслев—58.  
Глазер—56.  
Головин—58.  
Гониг—47.  
Грабарь—44.  
Грегори—46.  
Гурнерп—47.  
Гибьен—57.  
Цальвинг—58.  
Делабар—47.  
Дерайд—45.  
Дешевой—58, 59.  
Дитцель—58.  
Долгов—55.  
Дуров—51.  
Дурова—52.  
Дюпюи—58.  
Жавари—49.  
Зейдель—56.  
Игльс—56.  
Иоплинг—46.  
Карстен—45.  
Кеплер—44, 45.  
Керстен—59.  
Кестнер—45.  
Киршке—58.  
Клоке—58.  
Коковцев—52.  
Копп—47.  
Кремль—44.  
Кура—51.  
Курдюмов—II, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54,  
56, 59, 61, 97.  
Кутанс—51.  
Ламберт—45, 49.  
Ланге—48.  
Ларнадор—47.  
Ломбард—58.  
Лорна—13, 25, 57, 59.  
Льочнич—56.  
Людовик XIV—109.  
Макаров—48.  
Маккаев—49, 56, 58.  
Маковек—48.  
Мамоштова пещера—38, 39.  
Манн—47.  
Мейер—47.  
Микчик—48.  
Митписский—55.  
Михалевский—48, 49.  
Мёллингер—46, 47, 59.  
Монж—52.  
Мос—46.  
Москва—105, 106, 107.  
Мюллер—58.  
Наумани—46.  
Окань—56.  
Орхов—48.  
Папперитц—57.  
Парфенон—40.  
Педль—101.  
Пельц—48, 59.  
Пешка—47.  
Пилле—56.  
Пистолькорс—55.  
Польке—I, 13, 47, 59.  
Поти—51.  
Пулково—105, 106.  
Ребиндер—53.  
Редер—47.  
Рисави—49.  
Рихтер—57.  
Рон—57, 108.  
Рыков—48.  
Рынин—I, 25, 57, 58, 59, 80.  
Сайно—56, 59.  
Самарканд—105, 106, 107.  
Сахарков—56.  
Сигизмундов плап—45.  
Скүхерский—47.  
Слободзинская—51.  
Слободзинский—51.

\*) Числа указывают страницы текста.

Сопвич—46.  
Софли Св. храм—43.  
Срезневский—51.  
Тезар 23, 48.  
Тессари—48.  
Тильзер—49.  
Тквибул—51.  
Трипон—46.  
Федоров—57, 58, 59.  
Фейрич—46, 59.  
Фидлер—47, 59.  
Фольк—56.  
Фрезье—45.  
Чяани—56.  
Шварц—13, 25, 47.  
Шепфлисс—57.

Шпллинг—13, 56.  
Шлезингер—47.  
Шлемилх—24.  
Шлеминг—47.  
Шмит—58.  
Шоурек—49.  
Штаде—56.  
Штаудингль—47, 59.  
Штурм—56.  
Шуази—57.  
Шюсслер—56.  
Эванс—56.  
Эврикес—56.  
Янковский—52.  
Яролимек—49.

---

## Указатель предметов \*)

Аксонометрия—I, 3.  
 „ перспективная—42.  
 Арка—41.  
 Вал—101.  
 Вкладыш—101.  
 Ворота—36, 37, 41.  
 Гиперболоид вращения однополюый—84.  
 Горизонталь плоскости—75.  
 Горлогиперболоида—84.  
 Долгота—106.  
 Дом—36.

Задача № 1—21.  
 „ № 2—21.  
 „ № 3—26.  
 „ № 4—26.  
 „ № 5—27.  
 „ № 6—60.  
 „ № 7—62.  
 „ № 8—63.  
 „ № 9—65.  
 „ № 10—66.  
 „ № 11—67.  
 „ № 12—67.  
 „ № 13—68.  
 „ № 14—69.  
 „ № 15—69.  
 „ № 16—71.  
 „ № 17—72.  
 „ № 18—72.  
 „ № 19—73.  
 „ № 20—73.  
 „ № 21—73.  
 „ № 22—74.  
 „ № 23—75.  
 „ № 24—75.  
 „ № 25—76.  
 „ № 26—76.  
 „ № 27—76.  
 „ № 28—77.  
 „ № 29—78.  
 „ № 30—78.  
 „ № 31—79.  
 „ № 32—81.  
 „ № 33—82.  
 „ № 34—83.  
 „ № 35—84.  
 „ № 36—86.  
 „ № 37—87.  
 „ № 38—87.  
 „ № 39—88.  
 „ № 40—89.  
 „ № 41—89.  
 „ № 42—90.

Задача № 43—91.  
 „ № 44—92.  
 „ № 45—93.  
 „ № 46—93.  
 „ № 47—94.  
 „ № 48—96.  
 „ № 49—97.  
 „ № 50—98.  
 „ № 51—99.  
 „ № 52—100.  
 „ № 53—101.  
 „ № 54—103.  
 „ № 55—105.  
 „ № 56—105.  
 Задача метрическая—47.  
 „ проективная—47.  
 Затяжка—98.  
 Земля—105.  
 Изображение—1.  
 „ аксонометрическое—2.  
 „ наглядное—1.  
 Интеграл волокнистый—52.  
 Интегрирование номографическое—52.  
 Исчезновение размера—5.  
 Камень арочный—99.  
 Клетчатка аксонометрическая—64.  
 „ изометрическая—48.  
 Кладка тесовая—99.  
 Контур видимости—83.  
 „ тени падающей—90.  
 „ „ собственной—90.  
 Конус прямой круговой—84, 93.  
 Координата—1.  
 „ аксонометрическая—2.  
 Крепость—39, 43.  
 Кристалл—41.  
 Круг—79.  
 „ показателей искажения—23.  
 Крыша—87.  
 Линия винтовая—82.  
 Лицо—109.  
 Массив каменный—65.  
 Масштаб аксонометрический—9.  
 Меридиан—106.  
 Метод аксонометрических проекций—3.  
 „ общий решения аксонометриче-  
 ских задач—60.  
 Методы изображения—1.  
 Монумент—63, 65, 91.  
 Мост—40.  
 Муфта—37.  
 Наглядность—3.  
 Направление проектирования—2.

\*) Цифры указывают страницы текста.

- Насадка—97.  
 Начало аксонометрических координат—2.  
   "  координат—1.  
 Нога стропильная—98.  
 Опора мостовая—100.  
 Осемьмерие—3.  
 Ось аксонометрическая—2.  
   "  аксонометрических координат—2.  
   "  координат—1.  
 Отливка чугунная—62.  
 Перила—96.  
 Перспектива—I.  
   "  быстрая—42.  
   "  векториальная—42, 43.  
   "  военная—42, 43, 44.  
   "  вольная—2, 42.  
   "  кабинетная—42.  
   "  кавалерная—42, 44.  
   "  лягушечья—42, 43.  
   "  свободная—2, 42.  
 Пещера—38, 39.  
 План дома—36.  
 Плоскость аксонометрических координат—2.  
 Плоскость аксонометрических проекций—2.  
 Плоскость координатная—1.  
 Показатель искажения координат—7.  
 Повтор—41.  
 Портал—99.  
 Портрет—109.  
 Прием общий решения аксонометрических задач—I.  
 Призма—7, 90.  
 Проектирование косоугольное—44, 45.  
 Проекции аксонометрические—I.  
   "  ортогональные—I.  
 Проекция аксонометрическая—2.  
   "  аппроксимационная—10.  
   "  вторичная—49.  
   "  "  вертикальная—3.  
   "  "  горизонтальная—3.  
   "  "  профильная—3.  
   "  двуметрическая—10.  
   "  изометрическая—10, 46, 48.  
   "  клинографическая—42, 43, 46.  
   "  косая—42, 43.  
   "  моноретрическая—10.  
   "  обличная—42, 43.  
   "  прямоугольная—10, 19.  
   "  триметрическая—10.  
 Разложение силы—104, 105.  
 Рельс—36.  
 Свод—99.  
 Сила—103.  
 Склонение—108.  
 След линии—67.  
   "  "  вертикальный—67.  
   "  "  горизонтальный—67.  
   "  "  профильный—67.  
 След плоскости—70.  
   "  "  вертикальный—71.  
   "  "  горизонтальный—71.  
   "  "  профильный—71.  
 Стойка—97.  
 Стойка деревянная—5.  
 Стропила—43.  
 Сфера небесная—108.  
 Таблица 1-я—29.  
   "  2-я—42.  
 Тело изображаемое—2.  
   "  проектируемое—2.  
 Теорема 1—3.  
   "  2—3.  
   "  3—3.  
   "  4—3.  
   "  5—3.  
   "  6—10.  
   "  7—12.  
   "  8—13.  
   "  9—15.  
   "  10—15.  
   "  11—19.  
   "  12—20.  
   "  13—20.  
   "  14—21.  
   "  15—24.  
   "  16—25.  
 Теорема Польке—13.  
 Точка схода следов—71.  
 Треугольник показателей искажения—24.  
   "  следов—19.  
 Труба фабричная—87.  
 Удобноизмеримость—3.  
 Установка тюрбинная—109.  
 Устой—37, 38.  
 Фронталь плоскости—75.  
 Флянец—34, 35.  
 Храм—40, 43.  
 Цилиндр прямой круговой—84, 92.  
 Шар—84, 94, 105.  
 Широта—106.  
 Шип—96.  
 Экватор—106.  
 Эллиптика—108.  
 Эскиз аксонометрический—109.

## Замеченные опечатки.

---

Чертежи.	Страницы.	Исправления.
16	18	Вместо $aB$ надо $ab$ .
19 (V)	19	Вместо $X'OZ$ надо $X'OZY$ .
23	22	Вверху вместо $O_1O_2Y$ надо $O_1'O_2'Y'$ .
24	23	Внизу пропущена на круге $XACBY$ буква $A$ .
68	66	Вместо $OXX$ надо $OXYZ$ .
74	67	Вместо линии $D$ надо $CD$ .
107	78	На линии $CD$ вместо $S$ надо $U$ .
110	80	На линии $XZ_1$ вместо $9_0$ надо $9$ .
110	80	На линии $XZ$ вместо $1$ надо $1_0$ .
128	95	Вверху справа вместо $pp_1$ надо $p'p_1'$ .
130	96	Внизу вместо $OX$ надо $OX'$ .

---

## Труды того же автора по начертательной геометрии и технической графике.

---

1. „Методы изображения“. Петроград. 1916 г.
  2. „Ортогональные проекции“. Птгр. 1918 г. (2-е издание).
  3. „Перспектива“. Птгр. 1918 г.
  4. „Аксонометрия“. Птгр. 1922 г.
  5. „Проекции с числовыми отметками“. Птгр. 1922 г.
  6. „Сборник задач по начертательной геометрии“. Птгр. 1916 г. (Готово к печати новое издание).
  7. „Ледорезы“. Спб. 1901 г.
  8. „Значение начертательной геометрии и сравнительная оценка главнейших ее методов“. Спб. 1907 г.
  9. „Дневной свет и расчеты освещенности помещений. Руководство к рациональному проектированию световых отверстий в различных сооружениях и к определению степени освещения (силы тени) поверхностей различных тел“. Спб. 1908 г.
  10. „Ослабление силы дневного света, проходящего через стекла разных сортов“. Спб. 1908.
  11. „Примеры решения задач по начертательной геометрии“. Спб. 1909 г.
  12. „Номография“ (печатается).
  13. „Кинематография“ (готова к печати).
- 

Продаются в главнейших книжных магазинах, а также в складе изданий Института Инж. Пут. Сообщ. (Птгр., Забалканский пр., № 9) и у автора (Петроград, Коломенская ул., 37, кв. 25).

---

