Polinomi 11

11.1 Definizioni fondamentali

Definizione 11.1. Un *polinomio* è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi.

Esempio 11.1. Sono polinomi: $6a + 2b$, $5a^2b + 3b^2$, $6x^2 - 5y^2x - 1$, $7ab - 2a^2b^3 + 4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in *forma normale* o *ridotto*; se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando algebricamente i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.

Un polinomio in forma normale può presentare, tra i suoi termini, un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato *termine noto*.

Esempio 11.2. Il polinomio $3ab + b^2 - 2ba + 4 - 6ab^2 + 5b^2$ ridotto in forma normale diventa $ab + 6b^2 - 6ab^2 + 4$. Il termine noto è 4.

✍ *Esercizio proposto:* 11.1

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio. Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempio 11.3. Binomi, trinomi, quadrinomi.

a) $xy - 5x^3y^2$ è un binomio;
b) $3ab^2 + a - 4a^3$ è un trinomio;
c) $a - 6ab^2 + 3ab - 5b$ è un quadrinomio.

Definizione 11.2. Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono *uguali*, più precisamente vale il *principio di identità dei polinomi*: due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei rispettivi termini simili.

Se due polinomi sono invece formati da tutti termini opposti, allora si dicono polinomi *opposti*.

Definiamo, inoltre, un polinomio *nullo* quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.

Esempio 11.4. Polinomi uguali, opposti, nulli.

a) I polinomi $\frac{1}{3}xy + 2y^3 - x$ e $2y^3 - x + \frac{1}{3}xy$ sono uguali;
b) i polinomi $6ab - 3a + 2b$ e $3a - 2b - 6ab$ sono opposti;
c) il polinomio $7ab + 4a^2 - ab + b^3 - 4a^2 - 2b^3 - 6ab + b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Definizione 11.3. Il *grado complessivo* (o semplicemente *grado*) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, *grado di un polinomio rispetto ad una data lettera* l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio, dopo che è stato ridotto a forma normale.

Esempio 11.5. Grado di un polinomio.

- Il polinomio $2ab + 3 - 4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado;
- il grado del polinomio $a^3 + 3b^2a - 4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più grande con cui tale lettera compare è 3.

✍ *Esercizio proposto:* 11.2

Definizione 11.4. Un polinomio si dice *omogeneo* se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio 11.6. Il polinomio $a^3 - b^3 + ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

✍ *Esercizio proposto:* 11.3

Definizione 11.5. Un polinomio si dice *ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera*, quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio 11.7. Il polinomio $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2y - 2xy^2 + \frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Definizione 11.6. Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice *completo* se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempio 11.8. Il polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

❑ **Osservazione** Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.

Per esempio, il polinomio $x^4 - x + 1 + 4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come $x^4 + 0x^3 + 4x^2 - x + 1$.

✍ *Esercizi proposti:* 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 11.9, 11.10v 11.11

11.2 Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.

Definizione 11.7. La *somma algebrica di due o più polinomi* è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

La differenza di polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo polinomio.

Esempio 11.9. Differenza di polinomi.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - \left(2a^2 + ab - \frac{1}{2}b\right) &= 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - 2a^2 - ab + \frac{1}{2}b \\ &= a^2 + \frac{-1-2}{2}ab + \frac{4+1}{2}b \\ &= a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{5}{2}b. \end{aligned}$$

✍ *Esercizi proposti:* 11.12, 11.13, 11.14,11.15, 11.16, 11.17

11.3 Prodotto di un polinomio per un monomio

Per eseguire il prodotto tra il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy + 5x^3y^2$; indichiamo il prodotto con $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2)$. Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2) = 6x^3y^2 + 15x^5y^3$.

❑ **Osservazione** Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio 11.10. Prodotto di un monomio per un polinomio.

$$\begin{aligned} \left(3x^3y\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{4}{3}xy^3\right) &= \left(3x^3y\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) + \left(3x^3y\right) \cdot \left(\frac{4}{3}xy^3\right) \\ &= \frac{3}{2}x^5y^3 + 4x^4y^4. \end{aligned}$$

✍ *Esercizi proposti:* 11.18, 11.19

11.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.

Definizione 11.8. Si dice che un *polinomio è divisibile per un monomio*, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice *divisore* del polinomio.

Esempio 11.11. Quoziente tra un polinomio e un monomio.

$$\left(6x^5y+9x^3y^2\right):\left(3x^2y\right)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy.$$

❑ Osservazione

a) Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero;
b) un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore letterale del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo;
c) la divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio;
d) il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

✍ *Esercizi proposti:* 11.20, 11.21, 11.22

11.5 Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Esempio 11.12. Prodotto di polinomi.

a) $\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$. Riducendo i termini simili:

$$\begin{aligned}\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)&=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+3a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+\\&\quad+9a^2b^2-2a^3b^3+4a^2b-12a^2b^3\\&=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3.\end{aligned}$$

b) $(x - y^2 - 3xy)(-2x^2y - 3y)$. Moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo otteniamo.

$$\left(x - y^2 - 3xy\right)\left(-2x^2y - 3y\right) = -2x^3y - 3xy + 2x^2y^3 + 3y^3 + 6x^3y^2 + 9xy^2;$$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x + 1\right)$.

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x + 1\right) = \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 = \frac{3}{8}x^4 - x^3 - 2x^2.$$

✍ *Esercizio proposto:* 11.23

11.6 Divisione tra due polinomi

11.6.1 Polinomi in una sola variabile

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio $147 : 4$. Si tratta di trovare un quoziente q e un resto $r < 4$, in modo che $147 = q \cdot 4 + r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:

$$\begin{array}{l}
\text{dividendo} \searrow \qquad\qquad \swarrow \text{divisore} \\
\begin{array}{rrr|rr}
1 & 4 & 7 & 4 & \\ \cline{4-5}
1 & 2 & & 3 & 6 \leftarrow \text{quoziente} \\ \cline{1-3}
 & 2 & 7 & & \\
 & 2 & 4 & & \\ \cline{2-3}
 & & 3 & & \\
\end{array} \\
\text{resto} \nearrow
\end{array}$$

Verifichiamo che $147 = 36 \cdot 4 + 3$, dunque $q = 36$ e $r = 3$ soddisfano la nostra richiesta.

In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio x, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, $A(x)$ *dividendo* e $B(x)$ *divisore*, vogliamo determinare altri due polinomi, $Q(x)$ *quoziente* e $R(x)$ *resto*, con grado di $R(x)$ minore del grado di $B(x)$, per i quali: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamolo con un esempio.

Esempio 11.13. Eseguire la divisione tra i polinomi $A(x) = 3x^4 + 5x - 4x^3 - 1$ e $B(x) = 3x^2 - 1$.

Prima di eseguire l'algoritmo dobbiamo sempre controllare che:

- il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore: $A(x)$ ha grado 4 e $B(x)$ ha grado 2;
- i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile, in questo caso la x; poiché ciò non è vero, riscriviamo $A(x)$ ordinato: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$;

- dividendo e divisore siano in forma completa, cioè abbiano i termini con tutti i gradi; nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti:

$$A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 1; \quad B(x) = 3x^2 + 0x - 1.$$

Passo I Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & & \text{dividendo} & & & & \text{divisore} & \\
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
 & & \text{Spazio per i calcoli} & & & & \text{Spazio per il quoziente} &
\end{array}$$

Passo II Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, otteniamo x^2 che è il primo termine del quoziente; esso va riportato nello spazio dedicato al quoziente.

$$:$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
 & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & x^2 & &
\end{array}$$

Passo III Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:

- incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
- cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & &
\end{array}$$

Passo IV Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & & \\
\cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & &
\end{array}$$

Passo V Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto, $-4x^3 + x^2 + 5x - 1$ e il divisore $3x^2 + 0x - 1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & &
\end{array}
$$

Passo VI Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto, con segno opposto, sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & -4x^3 & +0x^2 & -\frac{4}{3}x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +\frac{11}{3}x & -1 & & &
\end{array}
$$

Passo VII Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x) = x^2 + \frac{11}{3}x - 1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è x^2, per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & +\frac{1}{3} \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & +4x^3 & +0x^2 & -\frac{4}{3}x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +\frac{11}{3}x & -1 & & & \\
 & & -x^2 & +0x & +\frac{1}{3} & & & \\ \cline{4-5}
 & & & +\frac{11}{3}x & -\frac{2}{3} & & &
\end{array}
$$

Non possiamo più ripetere l'algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x):B(x)$ ha quoziente $Q(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ e resto $R(x)=\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$.

Verifica Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra: $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

$$\begin{aligned}\left(3x^2-1\right)\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3}x &= 3x^4-4x^3-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}\\ &= 3x^4-4x^3+\frac{15}{3}x-\frac{3}{3}\\ &= x^4-4x^3+5x-1\\ &= A(x).\end{aligned}$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? È sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il seguente teorema.

Teorema 11.1 (Divisione euclidea)**.** *Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con grado di $R(x)$ minore o uguale del grado di $B(x)$, tali che $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.*

❑ **Osservazione** Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x)=0$ e $R(x)=A(x)$. Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

Definizione 11.9. Si dice che un polinomio A (dividendo) è *divisibile* per un polinomio B (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A=Q\cdot B$.

Esempio 11.14. Eseguiamo la divisione tra $A(x)=x^3-2x^2+x-2$ e $B(x)=x^2+1$. I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di A è maggiore del grado di B e quest'ultimo deve essere completo. Inseriamoli nello schema per eseguire l'algoritmo. Risulta: $\left(x^3-2x^2+x-2\right):\left(x^2+1\right)=(x-2)$; il resto $R(x)$ è il polinomio nullo e $A(x)$ è divisibile per $B(x)$. Infatti $\left(x^2+1\right)\cdot(x-2)=\left(x^3-2x^2+x-2\right)$.

$$\begin{array}{cccc|ccc} x^3 & -2x^2 & +x & -2 & x^2 & +0x & +1 \\ \cline{5-7} -x^3 & -0x^2 & -x & & x & -2 & \\ \cline{1-4} & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\ & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\ \cline{2-4} & & & 0 & & & \end{array}$$

In conclusione, se $A(x)$ è un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado m con $n\geqslant m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n-m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g<m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B. Se $n < m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

✍ *Esercizi proposti:* 11.24, 11.25, 11.26, 11.27, 11.28

11.6.2 Polinomi in più variabili

Per la divisione tra polinomi in più variabili riportiamo soltanto qualche esempio.

Esempio 11.15. Siano $A(a, b) = 3a^2b + 4ab^2 + 3a^3 - 2b^3$ e $B(a, b) = a - 3b$ rispettivamente dividendo e divisore di una divisione tra polinomi; essi sono due polinomi omogenei nelle due variabili a e b rispettivamente di grado 3 e grado 1.

Per eseguire la divisione procediamo come nel caso di polinomi in una sola variabile. Dividiamo il polinomio $A(a, b) = 3a^2b + 4ab^2 + 3a^3 - 2b^3$ per il polinomio $B(a, b) = a - 3b$ rispetto alla variabile a. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile a? No, A non lo è. Quindi ordiniamo A:

$$A(a, b) = 3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 - 2b^3;$$

- il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì;
- A e B sono completi rispetto alla variabile a? Sì.

Costruiamo lo schema per eseguire l'algoritmo e procediamo:

$$\begin{array}{cccc|cc} 3a^3 & +3a^2b & +4ab^2 & -2b^3 & a & -3b \\ \cline{5-6} & & \dots & & 3a^2 & -\dots \end{array}$$

Il quoziente è $Q = \dots\dots\dots$; il resto $R = 118b^3$

Verifica . . . .

Se avessimo eseguito la divisione rispetto alla variabile b, avremmo ottenuto stesso quoziente e stesso resto? Proviamo. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile b? No. Ordinando A, risulta:

$$A(a, b) = -2b^3 + 4ab^2 + 3a^2b + 3a^3 + 3a^2b;$$

  e ordinando B, risulta

$$B(a, b) = -3b + a;$$

- il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì;
- A e B sono completi rispetto alla variabile b? Sì.

Costruisci lo schema dell'algoritmo e concludi.

✍ *Esercizi proposti:* 11.29, 11.30

11.7 Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi in una sola variabile, *nel caso in cui il divisore sia di grado 1* si può applicare una regola nota come *regola di Ruffini*[1] (o *divisione sintetica*) e che si basa sui seguenti teoremi.

Teorema 11.2. *Il resto della divisione di un polinomio* $A(x)$ *per un binomio del tipo* $(x-k)$ *è uguale al valore che* $A(x)$ *assume quando al posto della variabile* x *si sostituisce il valore* k, $R = A(k)$.

Dimostrazione. Dalla divisione di $A(x)$ per $x-k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x) = (x-k) \cdot Q(x) + R$$

in cui si è scritto R anziché $R(x)$, poiché è una costante.

Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile x, sostituiamo al suo posto il valore k e otteniamo:

$$A(k) = \underbrace{(k-k)}_{0} \cdot Q(k) + R = R.$$

Ciò vuol dire che il valore assunto da $A(x)$ quando $x = k$ è proprio uguale al resto della divisione. □

Teorema 11.3 (di Ruffini). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio* $A(x)$ *sia divisibile per un binomio del tipo* $(x-k)$ *è che risulti* $A(k) = 0$.

Dimostrazione. Prima implicazione: $A(x)$ divisibile per $(x-k) \Rightarrow A(k) = 0$.

Poiché $A(x)$ è divisibile per $(x-k)$, per definizione di divisibilità deve essere $R = 0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k) = R = 0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(k) = 0$.

Seconda implicazione: $A(k) = 0 \Rightarrow A(x)$ divisibile per $(x-k)$.

Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x-k$, per il teorema del resto risulta $R = A(k)$ e per ipotesi $A(k) = 0$, ne segue che $R = 0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $(x-k)$. □

Procedura 11.4. *Dividere un polinomio con la regola di Ruffini:*

a) calcolo del resto;
b) applicazione del procedimento di divisione;
c) verifica.

Esempio 11.16. $\left(a^2 - 3a + 1\right) : (a-1)$.

Dividiamo con la regola di Ruffini il polinomio $A(a) = a^2 - 3a + 1$ per il binomio $B(a) = a - 1$; cerchiamo quoziente $Q(a)$ e resto $R(a)$.

[1] dal nome del matematico e medico italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822).

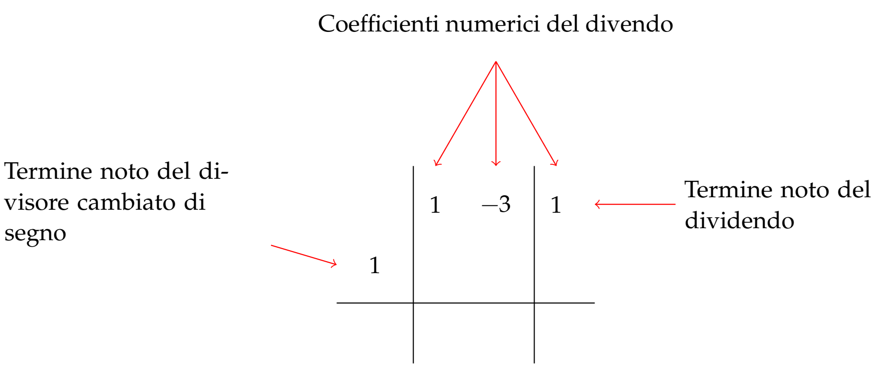
Passo I *Calcolo del polinomio resto.*

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è 1) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo $A(1)$: $1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$.

Il resto della divisione è -1.

Passo II *Applicazione del procedimento di divisione.*

Disegnare il seguente schema di Ruffini: scrivere i coefficienti numerici del polinomio dividendo, secondo le potenze decrescenti della variabile. Se manca un termine occorre mettere 0. L'ultimo termine numerico è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno, nell'esempio è 1.



Il primo termine si riporta inalterato nella parte sottostante:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & \downarrow & & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per il primo coefficiente appena trascritto e riportare il risultato sotto il secondo coefficiente

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Sommare i due termini appena incolonnati $-3 + 1 = -2$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & -2 & \end{array}$$

Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per la somma appena ottenuta $1 \cdot (-2) = -2$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \end{array}$$

Addizionare gli ultimi due numeri incolonnati $1 - 2 = -1$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 \end{array}$$

quoziente

resto

Infine si ricostruisce il polinomio quoziente, tenendo presente che i coefficienti numerici sono quelli trovati da questa divisione, cioè 1 e -2. Quoziente e resto sono allora $Q(x) = a - 2$ e $R = -1$.

Passo III *Verifica*

Come nella divisione con i numeri, si moltiplica il polinomio risultato per il polinomio divisore e si somma il polinomio resto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(a-2)(a-1) + (-1) = a^2 - a - 2a + 2 - 1 = a^2 - 3a + 1.$$

Esempio 11.17. $(4x^3 - 5x + 6) : (x + 1)$.

Applicazione del procedimento di divisione

Termine noto del divisore cambiato di segno

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & 0 & -5 & 6 \\ -1 & & -4 & +4 & +1 \\ \hline & 4 & -4 & -1 & 7 \end{array}$$

Resto

Coefficienti del polinomio quoziente

$$Q(x) = 4x^2 - 4x - 1 \qquad R = 7.$$

Verifica.

$$Q(x) \cdot B(x) + R = A(x)$$

$$\left(4x^2-4x-1\right)\cdot(x+1)+7=4x^3+4x^2-4x-x-1+7=4x^3-5x+6$$

Vediamo il caso in cui il binomio che fa da divisore ha coefficiente numerico della variabile diverso da 1.

Esempio 11.18. Dividere con la regola di Ruffini $\left(2x^4-x^3-4x^2+2x+7\right):(2x-1)$.

In questo tipo di esercizi si deve rendere il divisore del tipo $x+n$, quindi nel nostro caso si deve dividere sia il dividendo sia il divisore per 2; sappiamo, infatti, dalla proprietà invariantiva della divisione che dividendo per uno stesso numero dividendo e divisore il quoziente della divisione non cambia. Il resto invece risulterà diviso per 2. Quindi applichiamo l'algoritmo precedente e *ricordiamoci al termine della divisione di moltiplicare il resto per* 2.

La divisione allora diventa $\left(x^4-\frac{1}{2}x^3-2x^2+x+\frac{7}{2}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

✍ *Esercizi proposti:* 11.31, 11.32, 11.33, 11.34, 11.35

11.7.1 Calcolo del resto

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio precedente è $+\frac{1}{2}$) e si sostituisce alla lettera che compare nel polinomio dividendo. Il risultato che si ottiene è il resto della divisione $\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$.

Applicazione del procedimento di divisione.

	1	$-\frac{1}{2}$	-2	$+1$	$\frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	1	0	-2	0	$\frac{7}{2}$

Adesso si pone la lettera per ogni termine del polinomio risultato partendo dal grado del polinomio dividendo diminuito di 1. Il risultato è quindi il polinomio x^3-2x, il resto è $\frac{7}{2}\cdot 2=7$.

Verifica Per la proprietà della divisione si moltiplica il quoziente per il polinomio divisore e si somma il resto ottenuto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$\left(x^3-2x\right)(2x-1)+7=2x^4-x^3-4x^2+2x+7.$$

In generale, se si vuole dividere il polinomio $A(x)$ per il binomio $(nx-\alpha)$, utilizzando la proprietà invariantiva della divisione, si divide dividendo e divisore per n, così da ottenere un divisore con coefficiente 1 per il termine di primo grado. Quindi si può effettuare la divisione ottenendo il quoziente $Q(x)$ ed il resto R. Per ottenere il resto della divisione di partenza occorre moltiplicare R per il coefficiente n. Infatti si ha: $A(x)=(nx-\alpha)Q(x)+R$ e, dividendo ambo i membri per n, si ha:

$$\frac{A(x)}{n}=\left(x-\frac{\alpha}{n}\right)Q(x)+\frac{R}{n}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 11.36, 11.37, 11.38, 11.39, 11.40, 11.41