

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 26

Aufgaben

AUFGABE 26.1. Es sei R ein Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R . Zeige, dass es ein Element $f \in \mathfrak{a}$ mit der Eigenschaft gibt, dass für alle maximale Ideale \mathfrak{m} gilt:

$$f \in \mathfrak{m} \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}.$$

AUFGABE 26.2. Es sei R ein Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R . Zeige, dass es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass das inverse Ideal \mathfrak{a}^{-1} zu \mathfrak{a}^m äquivalent ist.

AUFGABE 26.3. Es sei R ein Zahlbereich. Zeige, dass es ein $f \in R$, $f \neq 0$, mit der Eigenschaft gibt, dass die Nenneraufnahme R_f faktoriell ist.

AUFGABE 26.4. Es sei $X = \text{Spek}(R)$ das Spektrum eines Zahlbereiches. Zeige, dass jede offene Menge von X von der Form $D(f)$ mit einem $f \in R$ ist.

AUFGABE 26.5. Zeige mit Korollar 26.11, dass der Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ faktoriell ist.

AUFGABE 26.6. Sei $R = A_{13}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 13$. Zeige mittels Korollar 26.11, dass R faktoriell ist.

AUFGABE 26.7. Sei $R = A_{-43}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -43$. Zeige mittels Korollar 26.11, dass R faktoriell ist.

AUFGABE 26.8. Sei $R = A_{-67}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -67$. Zeige mittels Korollar 26.11, dass R faktoriell ist.

2

AUFGABE 26.9. Es sei D quadratfrei und sei A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Ferner sei D ein Vielfaches von 5 und $D \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Zeige: A_D ist nicht faktoriell.

Tipp: Siehe Aufgabe 10.2.

AUFGABE 26.10. Zeige, dass der siebte Kreisteilungsring R_7 faktoriell ist.

AUFGABE 26.11.*

Zeige, dass der achte Kreisteilungsring $R_8 = \mathbb{Z}[X]/(X^4 + 1)$ faktoriell ist.

Bemerkung: Der Betrag der Diskriminante von R_8 ist 256.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3