Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 48

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 48.1. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Intervallschachtelung in K einen Punkt enthält. Zeige, dass K vollständig ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 48.2. Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$3,601473301\ldots .$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

Aufgabe 48.3. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y. Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x + y$.

Aufgabe 48.4. Bestimme die ersten Intervalle I_n, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, in der Intervallhalbierung zu $\sqrt[3]{20}$, ausgehend von $I_0 = [0, 10]$.

Aufgabe 48.5. Bestimme die ersten Intervalle I_n, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, in der Intervallhalbierung zu $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$, ausgehend von $I_0 = [0, 1]$. Was besagt das Ergebnis für die Ziffernentwicklung von $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$ im Zweiersystem?

Im jetzigen Kontext betrachte man auch nochmal Aufgabe 28.36, Aufgabe 28.37, Aufgabe 28.38.

Aufgabe 48.6.*

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n, wobei a_n streng wachsend und b_n streng fallend ist, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Aufgabe 48.7.*

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

derart an, dass $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$ aus einem einzigen Punkt besteht, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 48.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Aufgabe 48.9.*

Sei K ein angeordneter Körper und sei M die Menge aller Intervallschachtelungen auf K. Wir sagen, dass zwei Intervallschachtelungen I_n, $n \in \mathbb{N}$, und J_n, $n \in \mathbb{N}$, zueinander verfeinerungsäquivalent sind, wenn folgendes gilt: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J_n \subseteq I_m$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $I_k \subseteq J_n$.

(1) Zeige, dass die Verfeinerungsäquivalenz eine Äquivalenzrelation auf M ist.
(2) Sei $K = \mathbb{R}$. Zeige, dass zwei verfeinerungsäquivalente Intervallschachtelungen die gleiche reelle Zahl definieren.
(3) Man gebe ein Beispiel für zwei reelle Intervallschachtelungen, die nicht verfeinerungsäquivalent sind, die aber die gleiche reelle Zahl definieren.

Aufgabe 48.10. Inwiefern definiert eine rationale Zahl einen Dedekindschen Schnitt?

Aufgabe 48.11. Inwiefern definiert eine reelle Zahl einen Dedekindschen Schnitt?

Aufgabe 48.12. Man gebe für jede der vier Bedingungen, die in der Definition eines Dedekindschen Schnittes vorkommen, ein Beispiel für ein Paar (A, B) mit $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, das drei dieser Bedingungen erfüllt, aber nicht die vierte.

Aufgabe 48.13. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine Addition, die für rationale Schnitte mit der Addition auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. Zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, dass es ein neutrales Element gibt und dass jeder Dedekindsche Schnitt einen negativen Schnitt besitzt.

Aufgabe 48.14. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine Multiplikation, die für rationale Schnitte mit der Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. Zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, dass es ein neutrales Element gibt und dass jeder Dedekindsche Schnitt $\neq 0$ einen inversen Schnitt besitzt.

Aufgabe 48.15. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine totale Ordnung, die für rationale Schnitte mit der Größergleichrelation auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt.

Aufgabe 48.16. Zeige, dass die Menge der Dedekindschen Schnitte ein angeordneter Körper ist.

Aufgabe 48.17. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jeder Dedekindsche Schnitt in K ein Punktschnitt ist. Zeige, dass K vollständig ist.

Aufgabe 48.18. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es seien r, s nichtnegative reelle Zahlen mit

$$r^n < s.$$

Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit

$$\left(r + \frac{1}{k}\right)^n < s$$

gibt.

AUFGABE 48.19.*

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz.

AUFGABE 48.20.*

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

AUFGABE 48.21. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

AUFGABE 48.22.*

Sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

($n \in \mathbb{N}_+$).

(1) Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
(2) Zeige, dass sämtliche Folgenglieder ≥ 1 sind.
(3) Zeige, dass die Folge gegen 1 konvergiert ist.

AUFGABE 48.23. Berechne für die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

die ersten vier Glieder als Bruch. Man gebe jeweils einen approximierenden Dezmialbruch mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{1000}$ an.

AUFGABE 48.24. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a) $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$,

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 48.25.*

Für die Eulersche Zahl e seien die Abschätzungen

$$2,71 \leq e \leq 2,72$$

bekannt.

(1) Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^2 sagen?
(2) Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^{-1} sagen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.26. (3 Punkte)

Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$-7,35831149\ldots.$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

In der folgenden Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass sich alles in $\mathbb{R}_+$ abspielt.

Aufgabe 48.27. (3 Punkte)

Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y. Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x \cdot y$.

Aufgabe 48.28. (3 Punkte)

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$2,1278\ldots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 48.29. (4 Punkte)

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,101001000100001000001\ldots$$

im Dezimalsystem, die angedeutete Regelmäßigkeit gelte für die gesamte Entwicklung. Bestimme die Ziffernentwicklung von $1/x$ bis zur vierten Nachkommastelle.

Aufgabe 48.30. (3 Punkte)

Bestimme die Ziffernentwicklung von

$$0,\overline{1} \cdot 0,\overline{1}\,.$$

Aufgabe 48.31. (3 Punkte)

Berechne für die Folge

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

die Glieder bis x_5 als Bruch. Man gebe jeweils einen approximierenden Dezmialbruch mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{10000}$ an.

Abbildungsverzeichnis