Sistemi non lineari 6

6.1 Sistemi di secondo grado

Ricordiamo che un sistema di equazioni non è altro che l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

Definizione 6.1. Il *grado di un sistema di equazioni*, se le equazioni sono polinomi, è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Esempio 6.1. Determinare il grado dei seguenti sistemi di equazioni

- $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases}$ entrambe le equazioni sono di primo grado; il sistema è di primo grado;
- $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$ la prima equazione è di primo grado, la seconda di secondo grado; il sistema è di secondo grado;
- $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ y=3x^2-2x+6=0 \end{cases}$ entrambe le equazioni sono di secondo grado; il sistema è di quarto grado.

I sistemi di secondo grado sono dunque composti da un'equazione di secondo grado e da una di primo grado.

6.1.1 Sistemi di secondo grado numerici

Esempio 6.2. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$.

Utilizziamo il metodo di sostituzione che abbiamo già visto per i sistemi di primo grado.

- Ricaviamo una delle due incognite dall'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} y=2x \\ x^2+6\cdot(2x)^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+24x^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases}.$$

- Risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta *equazione risolvente del sistema*: $25x^2-9=0 \Rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \vee x_2=\frac{3}{5}$.

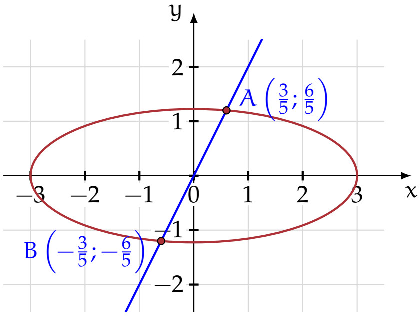
- Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y. Le coppie $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, se ci sono, si dicono *soluzioni del sistema*.

$$\begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5} \\ y_1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = +\frac{3}{5} \\ y_2 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = +\frac{6}{5} \end{cases}$$

quindi le soluzioni del sistema sono:

$$\left(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right) \vee \left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

Le soluzioni del sistema possono essere interpretate geometricamente come i punti di intersezione tra la retta rappresentata dall'equazione $y = 2x$ e la curva rappresentata dall'equazione $x^2 + 6y^2 = 9$. Con qualsiasi software che disegni funzioni inseriamo le due equazioni e otteniamo la figura a lato. La curva rappresentata dalla seconda equazione è una *ellisse*; i punti A e B, intersezione tra retta ed ellisse, corrispondono alle soluzioni del sistema.



Esempio 6.3. Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y - 3x - 1 = 0 \end{cases}$.

Isoliamo la y dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado

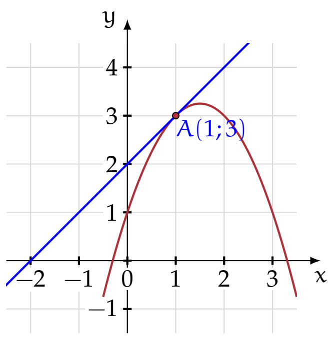
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + (x + 2) - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente del sistema $x^2 - 2x + 1 = 0$ ha il discriminante uguale a zero e due soluzioni reali coincidenti: $x_1 = x_2 = 1$. Quindi il sistema ha due soluzioni reali coincidenti

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

cioè il suo insieme soluzione è costituito dalla coppia ordinata $(1; 3)$.

Le soluzioni del sistema possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y = x + 2$ e la parabola rappresentata dall'equazione $y = -x^2 + 3x + 1$. La soluzioni saranno due punti reali coincidenti. Questo punto è detto punto di tangenza tra retta e parabola.



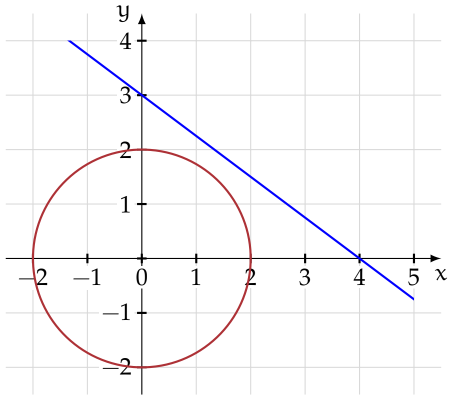
Esempio 6.4. Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$.

Isoliamo y nell'equazione di primo grado e sostituiamola nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3 \\ x^2+\left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3 \\ x^2+\frac{9}{16}x^2-\frac{9}{2}x+9-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3 \\ \frac{25}{16}x^2-\frac{9}{2}x+5=0 \end{cases}.$$

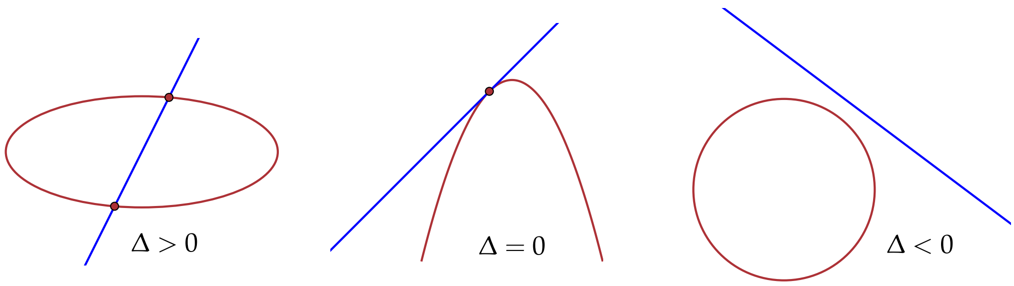
Risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita $\frac{25}{16}x^2-\frac{9}{2}x+5=0$ e verifichiamo che $\Delta=\frac{81}{4}-\frac{125}{4}$ è negativo, quindi l'equazione non ha soluzioni reali e $\text{I. S.}=\emptyset$. Il sistema non ha soluzioni reali e si dice *impossibile*.

Le soluzioni del sistema possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=-\frac{3}{4}x+3$ e la curva rappresentata dall'equazione $x^2+y^2=4$. Nella rappresentazione grafica ottenuta con un software che disegna funzioni le figure geometriche ottenute non hanno punti d'incontro. La curva rappresentata dalla prima equazione è una *circonferenza*; retta e circonferenza non hanno punti di intersezione.



❍ **Conclusione** Un sistema di secondo grado, con equazione risolvente di secondo grado, rappresenta sempre l'intersezione tra una retta e una curva di secondo grado (circonferenza, parabola, ellisse o iperbole). Le soluzioni del sistema rappresentano i punti di incontro tra retta e curva. In base al segno del discriminante dell'equazione risolvente abbiamo:

- $\Delta>0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti distinti;
- $\Delta=0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti;
- $\Delta<0$ il sistema non ha soluzioni reali. Retta e curva non hanno punti in comune.



Se l'equazione risolvente risulta essere una equazione di *primo grado* o una *uguaglianza* vera o falsa, allora:

- se si ottiene una uguaglianza vera, il sistema è indeterminato;

- se si ottiene una uguaglianza falsa il sistema è impossibile;
- se l'equazione risolvente è di primo grado determinata, da essa si ricava il valore dell'incognita e si sostituisce tale valore nell'altra equazione. Il sistema ha una sola soluzione (in questo caso non si parla di due soluzioni coincidenti, come nel caso precedente di $\Delta = 0$).

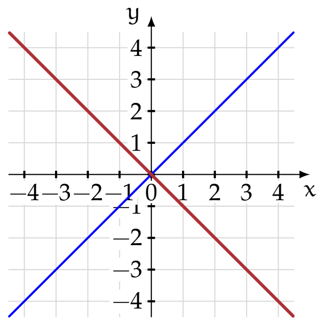
Esempio 6.5. Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

Isoliamo la y dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado.

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 - (-x)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

L'equazione risolvente del sistema in questo caso è una *identità* (uguaglianza sempre verificata) e tutte le coppie formate da numeri opposti (la prima equazione ci vincola ad avere $y = -x$) sono soluzioni del sistema: $\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{I. S.} = (k; -k)$. Il sistema ha infinite coppie di numeri reali che lo soddisfano e si dice *indeterminato*.

La figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in un software che disegna funzioni. La curva di secondo grado è formata dalle due rette $x + y = 0$ e $x - y = 0$ e la seconda equazione rappresenta la retta a che si sovrappone alla precedente.



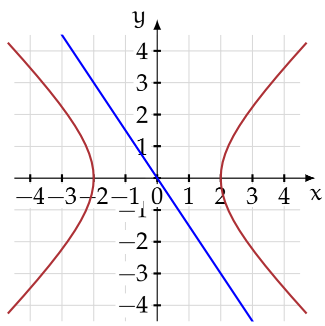
Esempio 6.6. Risolvere il sistema $\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$.

Isoliamo la y dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 - \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 - \frac{9}{4}x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ -\frac{5}{4}x^2 = 4 \end{cases}.$$

L'equazione risolvente del sistema $-\frac{5}{4}x^2 = 4$ non ha soluzioni, quindi il sistema è *impossibile*.

La figura a lato è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in un software che disegna le funzioni. L'equazione di secondo grado rappresenta una curva detta *iperbole* e la seconda equazione rappresenta la retta; vediamo che curva e retta non hanno punti di intersezione.



Esempio 6.7. Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ -x + y = -1 \end{cases}$.

Isoliamo la y dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - (x-1)^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x^2 + 2x - 1 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 5 \end{cases}.$$

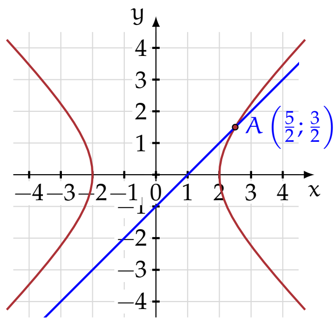
L'equazione risolvente del sistema in questo caso è l'equazione di primo grado $2x - 5 = 0$, la cui soluzione è $x = \frac{5}{2}$. Si sostituisce il valore trovato nell'altra equazione e troviamo la soluzione del sistema che in questo caso è unica:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

quindi, l'insieme soluzione è

$$\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

La figura a lato è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in un applicativo che disegna funzioni. L'equazione di secondo grado rappresenta una curva detta iperbole e la seconda equazione rappresenta una retta; vediamo che curva e retta hanno un solo punto di intersezione.



✍ *Esercizi proposti:* 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13

6.1.2 Sistemi di secondo grado letterali

Esempio 6.8. Discutere e risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y - kx = -2 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$.

Si risolve come nel caso degli analoghi sistemi numerici. Bisognerà, nell'equazione risolvente, discutere per quali valore del parametro k si otterranno soluzioni reali. Ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamola nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = kx - 2 \\ kx - 2 - x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = kx - 2 \\ -x^2 + kx - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = kx - 2 \\ x^2 - kx + 4 = 0 \end{cases}.$$

Discutiamo l'equazione risolvente di secondo grado

$$\Delta = k^2 - 16 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow k < -4 \vee k > 4 \Rightarrow x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2-16}}{2} \vee x_2 = \frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ \Delta = 0 \Rightarrow k = -4 \vee k = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{k}{2} \\ \Delta < 0 \Rightarrow -4 < k < 4 \Rightarrow \text{I.S.} = \emptyset \end{cases}.$$

Sostituiamo nella prima equazione $y - kx = -2$ i valori della x così ricavati. Si ha:

$$\text{per } k \leqslant -4 \vee k \geqslant 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_1 = \frac{k^2-4-k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = \frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_2 = \frac{k^2-4+k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 6.14, 6.15

6.2 Sistemi frazionari

Definizione 6.2. Si dice *frazionario* un sistema in cui almeno una delle equazioni che lo compongono è frazionaria.

Poiché una delle equazioni è frazionaria, l'incognita compare al denominatore e per questo motivo occorre procedere alla definizione del dominio in cui si ricercano le soluzioni del sistema.

Esempio 6.9. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ \dfrac{x}{y+2} = \dfrac{x}{2y+5} \end{cases}$.

Determiniamo le condizioni di esistenza di $\dfrac{x}{y+2} = \dfrac{x}{2y+5} \Rightarrow \text{C. E. } y \neq -2 \wedge y \neq -\dfrac{5}{2}$.
Trasformiamo l'equazione frazionaria nella sua forma canonica di equazione intera:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{y+2} = \frac{x}{2y+5} \\ &\Rightarrow x \cdot (2y+5) - x \cdot (y+2) = 0 \\ &\Rightarrow 2xy + 5x - xy - 2x = 0 \\ &\Rightarrow xy + 3x = 0. \end{aligned}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ xy + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x(2x-2) + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2x^2 + x = 0 \end{cases}.$$

$2x^2 + x = 0$ è l'equazione risolvente che ha soluzioni $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{1}{2}$. Sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado e otteniamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow (0; -2) \vee \left(-\frac{1}{2}; -3\right).$$

La soluzione $(0; -2)$ non soddisfa le C. E., quindi il sistema ha soluzione $\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$.

✍ *Esercizi proposti:* 6.16, 6.17, 6.18, 6.19

6.3 Sistemi in più incognite

Quanto detto si può estendere ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite. Per risolvere uno di tali sistemi si cercherà, operando successive sostituzioni a partire dalle equazioni di primo grado, di ottenere un'equazione di secondo grado in una sola incognita (equazione risolvente del sistema). A partire dalle eventuali soluzioni di tale equazione, si determineranno poi le soluzioni del sistema stesso.

Esempio 6.10. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases}$.

Isoliamo z dalla prima equazione, che è di primo grado, e sostituiamo nelle altre equazioni:

$$\begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-2(2x+y)=1 \\ xy-y^2+(2x+y)-5y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-4x-2y=1 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ -x+2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases}.$$

Ricaviamo x dalla seconda equazione e la sostituiamo nelle altre:

$$\begin{cases} z=2(2y-1)+y \\ x=2y-1 \\ 2y^2-y-y^2+4y-2-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=5y-2 \\ x=2y-1 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}.$$

L'equazione $y^2-y-2=0$ è l'equazione risolvente del sistema; le sue soluzioni sono $y_1=2 \vee y_2=-1$.

Sostituiamo i valori trovati per la y nelle altre equazioni per trovare i valori corrispondenti della x e della z:

$$\begin{cases} z=5\cdot 2-2=8 \\ x=2\cdot 2-1=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} z=5\cdot(-1)-2=-7 \\ x=2\cdot(-1)-1=-3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (3;2;8) \vee (-3;-1;-7).$$

✍ *Esercizi proposti:* 6.20, 6.21

6.4 Sistemi simmetrici

Definizione 6.3. Un sistema di due equazioni in due incognite si dice *simmetrico* se rimane lo stesso scambiando tra loro le incognite.

Per esempio, se nel sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+3xy+5=0 \end{cases}$$

scambiamo la x con la y, otteniamo

$$\begin{cases} y+x=1 \\ y^2+x^2+3yx+5=0 \end{cases}$$

che è identico al precedente.

Risolviamo il sistema, le soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

e come si può notare x e y vengono scambiate anche nella soluzione.

In generale, se il sistema è simmetrico, trovata una coppia soluzione $(a; b)$ l'altra è $(b; a)$.

6.4.1 Sistema simmetrico fondamentale

Il sistema simmetrico fondamentale è del tipo $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ e risolve il problema di trovare due numeri, nota la loro somma e il loro prodotto.

Ricordiamo che nell'equazione di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$, la somma delle radici è $-b$, mentre il prodotto è c. Pertanto, basta risolvere l'equazione $t^2 - st + p = 0$, detta *equazione risolvente*.

In base al segno del discriminante $\Delta = s^2 - 4p$ abbiamo:

- $\Delta > 0$: l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte t_1 e t_2, le soluzioni del sistema sono:
$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ y_1 = t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = t_2 \\ y_2 = t_1 \end{cases};$$
- $\Delta = 0$: l'equazione risolvente ha radici coincidenti $t_1 = t_2$, le soluzioni del sistema sono:
$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ y_1 = t_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = t_1 \\ y_2 = t_1 \end{cases};$$
- $\Delta < 0$: l'equazione non ammette soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

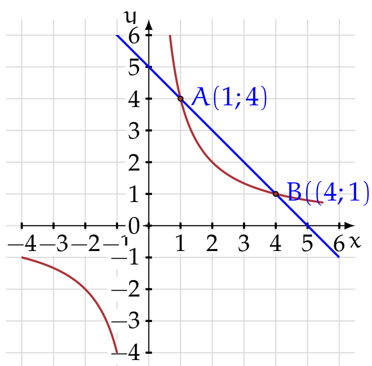
Esempio 6.11. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $t^2 - 5t + 4 = 0$ le cui soluzioni sono: $t_1 = 1 \vee t_2 = 4$.

Le soluzioni del sistema sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

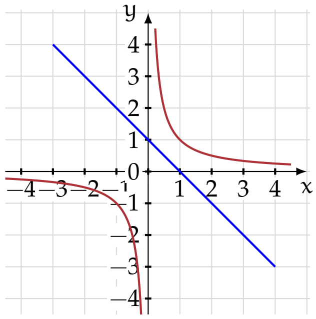
Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x + y = 5$ interseca l'iperbole equilatera $xy = 4$ nei due punti $A(1; 4)$ e $B(4; 1)$.



Esempio 6.12. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è

$$t^2 - t + 4 = 0$$



che ha il discriminante negativo e dunque non ha soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

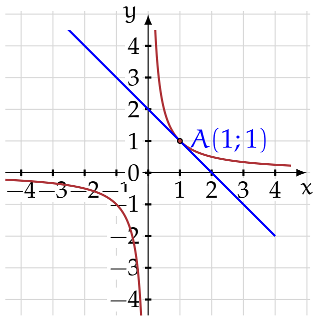
Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=1$ non interseca mai l'iperbole equilatera $xy=4$.

Esempio 6.13. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $t^2 - 2t + 1 = 0$ le cui soluzioni sono: $t_1 = t_2 = 1$.

Il sistema ha due soluzioni coincidenti:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$



Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=2$ è tangente all'iperbole equilatera $xy=1$ nel punto $(1;1)$.

✍ *Esercizi proposti:* 6.22, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26, 6.27

6.4.2 Sistemi simmetrici riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

In questa categoria rientrano i sistemi simmetrici che, mediante artifici, possono essere trasformati in sistemi simmetrici del tipo visto nella sezione precedente.

Esempio 6.14. Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$.

È possibile trasformare il sistema in un sistema simmetrico fondamentale. Infatti, ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy+b(x+y)=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy+ba=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{a^2+ab-c}{2} \end{cases}.$$

Posto $a=s$ e $p=\frac{a^2+ab-c}{2}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}.$$

Esempio 6.15. Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (7)^2-2xy=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ -2xy=25-49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è $t^2-7t+12=0$ le cui soluzioni sono $t_1=3 \vee t_2=4$.
Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}.$$

Esempio 6.16. Risolvere il sistema $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$

Dividendo per -3 la prima equazione, per 2 la seconda e ricordando l'identità

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

si ha:

$$\begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ \left(\frac{5}{3}\right)^2-2xy=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ xy=-\frac{10}{9} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è $t^2-\frac{5}{3}t-\frac{10}{9}=0$ le cui soluzioni sono: $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{6}$.
Le soluzioni del sistema sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} x_1=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \\ y_1=\frac{5+\sqrt{65}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{5+\sqrt{65}}{6} \\ y_2=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \end{cases}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 6.28, 6.29, 6.30, 6.31, 6.32

6.4.3 Sistemi non simmetrici riconducibili a sistemi simmetrici

Rientrano in questa classe i sistemi che, pur non essendo simmetrici, possono essere trasformati, mediante opportune sostituzioni, in sistemi simmetrici. Naturalmente questi sistemi si possono risolvere anche con la procedura solita di sostituzione per i sistemi di secondo grado.

Esempio 6.17. Risolvere il sistema $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$.

Mediante la sostituzione $y'=-y$ otteniamo $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale.

L'equazione risolvente è $t^2-8t+15=0$ le cui soluzioni sono $t_1=3 \vee t_2=5$, pertanto il sistema ha le soluzioni

$$\begin{cases} x_1=3 \\ {y_1}'=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ {y_2}'=3 \end{cases}.$$

Dall'uguaglianza $y' = -y \Rightarrow y = -y'$ otteniamo le soluzioni del sistema dato

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -3 \end{cases}.$$

Esempio 6.18. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ xy = 2 \end{cases}$.

Mediante la sostituzione $x' = 2x$ e $y' = -3y$ da cui $x = \frac{x'}{2}$ e $y = -\frac{y'}{3}$ otteniamo

$$\begin{cases} x' + y' = 8 \\ \frac{x'}{2} \cdot \left(-\frac{y'}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 8 \\ x'y' = -12 \end{cases}$$

che è un sistema simmetrico fondamentale.

Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x' + y' = 8 \\ x'y' = -12 \end{cases}$ con la procedura nota. L'equazione risolvente è $t^2 - 8t - 12 = 0$ le cui soluzioni sono $t_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{7}$; pertanto il sistema ha le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1' = 4 - 2\sqrt{7} \\ y_1' = 4 + 2\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2' = 4 + 2\sqrt{7} \\ y_2' = 4 - 2\sqrt{7} \end{cases}.$$

Dalle sostituzioni $x = \frac{x'}{2}$ e $y = -\frac{y'}{3}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7} \\ y_1 = \frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = \frac{4+2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7} \\ y_2 = \frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Procedura di sostituzione Ricaviamo una delle due incognite dall'equazione di primo grado e sostituiamola nell'altra equazione

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2x-8}{3} \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2x-8}{3} \\ x\left(\frac{2x-8}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2x-8}{3} \\ 2x^2 - 8x - 6 = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione $2x^2 - 8x - 6 = 0$ avente come soluzioni $x_1 = 2 - \sqrt{7} \vee x_2 = 2 + \sqrt{7}$. Sostituiamo i valori trovati e ricaviamo i valori della y:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{7} \\ y_1 = \frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 2 + \sqrt{7} \\ y_2 = \frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 6.33, 6.34

6.4.4 Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

Introduciamo le seguenti trasformazioni dette *formule di Waring*,[1] dal nome del matematico che le ha formulate per primo. Con tali formule, si possono trasformare le potenze di un binomio in relazioni tra somme e prodotti delle due variabili che lo compongono. Indicate come s somma delle variabili e p il loro prodotto, le seguenti sono le prime formule fino alla quinta potenza.

[1] Edward Waring, matematico inglese (1736 – 1798).

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=s^2-2p$;
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)=s^3-3ps$;
- $a^4+b^4=s^4-4ps^2+2p^2$;
- $a^5+b^5=s^5-5ps^3+5p^2s$.

Esempio 6.19. Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2xy=3 \end{cases}$.

Applicando l'identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)-2xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 1-5xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Da cui l'equazione risolvente $t^2-t-\frac{2}{5}=0 \Rightarrow 5t^2-5t-2=0$ con $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{10}$ e $t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{10}$. Le soluzioni del sistema sono quindi: $\left(\frac{5-\sqrt{65}}{10};\frac{5+\sqrt{65}}{10}\right) \vee \left(\frac{5+\sqrt{65}}{10};\frac{5-\sqrt{65}}{10}\right)$.

Esempio 6.20. Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\frac{7}{2} \end{cases}$.

Ricordando l'identità $x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$, il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0 \end{cases}.$$

Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$. L'equazione $2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0$ diventa $2u^2-4u-\frac{5}{2}=0$ che ha come soluzioni $u_1=-\frac{1}{2} \vee u_2=\frac{5}{2} \Rightarrow xy=-\frac{1}{2} \vee xy=\frac{5}{2}$.

Il sistema assegnato è equivalente all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\frac{5}{2} \end{cases}$$

e dunque il suo insieme soluzione I. S. si ottiene dall'unione dell'insieme soluzione dei due sistemi $\text{I. S.}=\text{I. S.}_1 \cup \text{I. S.}_2$.

Il primo sistema

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

ha equazione risolvente $t^2+t-\frac{1}{2}=0$ con radici

$$t_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad t_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

e quindi il sistema ha soluzioni

$$S_1=\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \vee \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Il secondo sistema

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\frac{5}{2} \end{cases}$$

ha equazione risolvente $t^2 + t + \frac{5}{2} = 0$, che ha $\Delta < 0$ e quindi insieme soluzione vuoto. Pertanto anche il sistema non ha soluzioni reali, quindi $\mathrm{I.S.}_2 = \emptyset$. L'insieme soluzione del sistema assegnato $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^4 + y^4 = \frac{7}{2} \end{cases}$ è dunque $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cup \emptyset = \mathrm{I.S.}_1$.

✍ *Esercizi proposti:* 6.35, 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.43, 6.44, 6.45, 6.46, 6.47

6.5 Sistemi omogenei di quarto grado

Definizione 6.4. Un sistema si dice *omogeneo* se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno tutti i termini con lo stesso grado.

I sistemi omogenei di quarto grado sono quindi nella forma:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}.$$

Primo caso $d_1 = 0 \wedge d_2 = 0$.

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0 \end{cases}$. Un sistema di questo tipo ha sempre almeno la soluzione nulla $(0; 0)$.

Per trovare le altre soluzioni del sistema poniamo $y = tx$ e sostituendo abbiamo:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2tx^2 + c_2t^2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(a_1 + b_1t + c_1t^2) = 0 \\ x^2(a_2 + b_2t + c_2t^2) = 0 \end{cases}.$$

Supponendo $x \neq 0$, cioè $x \in \mathbb{R}_0$, possiamo dividere le due equazioni per x^2, otteniamo così due equazioni nell'incognita t che possiamo risolvere. Se le due equazioni ammettono qualche soluzione comune allora il sistema ammette infinite soluzioni. Le soluzioni sono del tipo $x = k$ e $y = kt$, dove t è la soluzione comune di cui si è detto prima.

Esempio 6.21. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ -x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$.

Applicando la sostituzione $y = tx$, il sistema diventa $\begin{cases} x^2 - 3tx^2 + 2t^2x^2 = 0 \\ -x^2 + 5tx^2 - 6t^2x^2 = 0 \end{cases}$.

Dividendo per x^2 otteniamo $\begin{cases} 1 - 3t + 2t^2 = 0 \\ 1 - 5t + 6t^2 = 0 \end{cases}$.

La prima equazione ha radici $t_1 = 1$ e $t_2 = \frac{1}{2}$, mentre la seconda equazione ha radici $t_3 = \frac{1}{2}$ e $t_4 = \frac{1}{3}$. Le due equazioni hanno una radice in comune $t = \frac{1}{2}$.

Pertanto, oltre alla soluzione $(0; 0)$, il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere scritte nella forma $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{2}k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{R}_0$.

Secondo caso $d_1 = 0 \wedge d_2 \neq 0$.

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$.

Ponendo $y = tx$ si ha $\begin{cases} a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2tx^2 + c_2t^2x^2 = d_2 \end{cases}$.

Dividendo per x^2 la prima equazione (C. E. $x \in \mathbb{R}_0$) si ha $\begin{cases} a_1 + b_1t + c_1t^2 = 0 \\ x^2(a_2 + b_2t + c_2t^2) = d_2 \end{cases}$.

Si risolve la prima equazione nell'incognita t; si sostituiscono i valori trovati nella seconda equazione e si ricavano i valori di x e di seguito i valori di y con $y = tx$.

Esempio 6.22. Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 \\ -x^2 + 2xy - 3y^2 = -6 \end{cases}$.

Sostituendo $y = tx$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 1 - t - 6t^2 = 0 \\ x^2(-1 + 2t - 3t^2) = -6 \end{cases}.$$

La prima equazione ha radici $t_1 = \frac{1}{3}$ e $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Sostituendo $t = \frac{1}{3}$ nella seconda equazione si ha $x_{1,2} = \pm 3$ e sapendo che $y = tx$ si ottengono le coppie

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

Sostituendo $t = -\frac{1}{2}$ si ha $x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{11} \vee x_4 = \frac{2\sqrt{6}}{11}$ e sapendo che $y = tx$ si ottengono le coppie

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{11} \\ y_3 = \frac{\sqrt{6}}{11} \end{cases} \vee \begin{cases} x_4 = -2\frac{\sqrt{6}}{11} \\ y_4 = -\frac{\sqrt{6}}{11} \end{cases}.$$

L'insieme soluzione del sistema è quindi

$$\text{I. S.} = \{(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), (x_4; y_4)\}.$$

Terzo caso $d_1 \neq 0 \wedge d_2 \neq 0$.

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$.

Ponendo $y = tx$ si ha

$$\begin{cases} x^2(a_1 + b_1t + c_1t^2) = d_1 \\ x^2(a_2 + b_2t + c_2t^2) = d_2 \end{cases}.$$

Dividendo membro a membro le due equazioni, sotto la condizione $x \neq 0 \wedge a_2 + b_2t + c_2t^2 \neq 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 + b_1t + c_1t^2}{a_2 + b_2t + c_2t^2} = \frac{d_1}{d_2} \\ &\Rightarrow d_2(a_1 + b_1t + c_1t^2) = d_1(a_2 + b_2t + c_2t^2) \\ &\Rightarrow (c_1d_2 - c_2d_1)t^2 + (b_1d_2 - b_2d_1)t + a_1d_2 - a_2d_1 = 0 \end{aligned}$$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita t.

Se l'equazione ha come soluzioni t_1 e t_2 dobbiamo poi risolvere i sistemi

$$\begin{cases} y = t_1 x \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = t_2 x \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}.$$

Esempio 6.23. Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = -68 \\ -2x^2 + xy + 3y^2 = 88 \end{cases}$.

Sostituendo $y = tx$ il sistema diventa $\begin{cases} x^2(1 + 3t - t^2) = -68 \\ x^2(-2 + t + 3t^2) = 88 \end{cases}$.

Dividendo membro a membro con la condizione $x \neq 0 \wedge 3t^2 + t - 2 \neq 0$, cioè $x \neq 0$, $t \neq -1$ e $t \neq \frac{2}{3}$, si ha $\frac{1+3t-t^2}{-2+t+3t^2} = -\frac{68}{88}$, da cui l'equazione $29t^2 + 83t - 12 = 0$ con radici $t_1 = \frac{4}{29} \vee t_2 = -3$.

A questo punto dobbiamo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{29}x \\ -2x^2 + xy + 3y^2 = 88 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -3x \\ -2x^2 + xy + 3y^2 = 88 \end{cases}.$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -6 \end{cases}.$$

Quindi l'insieme soluzione del sistema è $\text{I. S.} = \{(-2; 6), (2; -6)\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 6.48, 6.49, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.54, 6.55, 6.56, 6.57, 6.58, 6.59, 6.60

6.6 Metodo di addizione

In alcuni casi è utile applicare questo metodo per eliminare velocemente i termini di secondo grado.

Esempio 6.24. Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$.

Sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione di primo grado

$$2x + 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; x + y - 2 = 0.$$

Il sistema può allora essere trasformato nel seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

che può essere risolto con il metodo di sostituzione.

✍ *Esercizio proposto:* 6.61

6.7 Sostituzione delle variabili

In alcuni casi, sostituendo in modo opportuno le variabili, il sistema può essere risolto più facilmente.

Esempio 6.25. Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x^3+y^4=3 \\ x^6-x^3y^4=0 \end{cases}$.

Sostituendo $x^3=u$ e $y^4=v$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2u+v=3 \\ u^2-uv=0 \end{cases}.$$

Quest'ultimo può essere risolto con il metodo di sostituzione; si ottengono le soluzioni:

$$\begin{cases} u=0 \\ v=3 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}.$$

Ricordando le sostituzioni si ottengono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^3=0 \\ y^4=3 \end{cases} \to \left(0;\sqrt[4]{3}\right)\vee\left(0;-\sqrt[4]{3}\right) \text{ e } \begin{cases} x^3=1 \\ y^4=1 \end{cases} \to (1;1)\vee(1;-1).$$

✍ *Esercizio proposto:* 6.62

6.8 Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

Riprendiamo un problema già discusso. Considerare più variabili ci permette di facilitare il processo di traduzione in linguaggio matematico.

Problema 6.26. Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62cm.

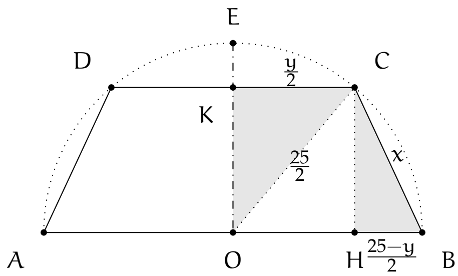
Dati: $\begin{cases} \overline{AB}=25;\ 2p=62; \\ AB \parallel CD;\ AD\equiv BC \end{cases}$.

Obiettivo: $\overline{CB}$; $\overline{CD}$.

D.implicititi: $\begin{cases} \overline{KO}=\overline{CH};\ \overline{CO}=\frac{25}{2}; \\ \overline{KC}=\frac{\overline{DC}}{2};\ \overline{HB}=\frac{25-y}{2}; \\ \widehat{CKO}=90°;\ \widehat{CHB}=90°. \end{cases}$

Incognite: $\overline{CB}=x$; $\overline{CD}=y$.

Vincoli: $\begin{cases} 0<x<\frac{25}{2}\sqrt{2} \\ 0<y<25 \end{cases}$.



Relazioni tra dati e incognite: $\begin{cases} y+2x+25=62 \\ \left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=x^2-\left(\frac{25-y}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+37 \\ x^2-25x+150=0 \end{cases}$.

Soluzioni: $\begin{cases} x_1=15 \\ y_1=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=10 \\ y_2=17 \end{cases}$.

Verifica: Entrambe le soluzioni sono accettabili.

La risoluzione del problema si basa sull'equazione di primo grado $y + 2x + 25 = 62$ che definisce il perimetro, sulla congruenza dei segmenti $\overline{KO}$ e $\overline{CH}$ facilmente dimostrabile in quanto stessa distanza tra due rette parallele, l'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli CKB e CHB, rettangoli per costruzione. Naturalmente tutte le informazioni ausiliare vanno dimostrate, ma data la loro facilità le lasciamo al lettore.

Importante è impostare le condizioni sulle incognite che devono essere maggiori di 0 ma anche $x < \frac{25}{2}\sqrt{2}$ perché il trapezio non diventi un triangolo ($\overline{BC} < \overline{BE}$) e $y < 25$ perché la base minore sia realmente minore ($\overline{CD} < \overline{AB}$). L'ultimo passo consiste nella verifica delle soluzioni, che nel nostro caso sono entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti in quella semicirconferenza che avranno il perimetro di 62cm.

Problema 6.27. L'azienda Profit intende fare una ristrutturazione riducendo il numero degli operai. Oggi spende per essi (tutti con lo stesso stipendio) € 800 al giorno. Se si licenziassero 5 dipendenti e si riducesse lo stipendio di € 2 al giorno si avrebbe un risparmio giornaliero di € 200. Quanti sono gli operai attualmente occupati nell'azienda?

Dati: $\begin{cases} \text{spesa per salari al giorno} = € 800; \\ \text{riduzione salario giornaliero} = € 2; \\ \text{riduzione numero operai} = 5 \text{ unità}; \\ \text{risparmio dopo il licenziamento e la riduzione di stipendio} = € 200. \end{cases}$

Obiettivo: numero operai occupati prima della ristrutturazione

Incognite: $\begin{cases} x = \text{numero operai prima della ristrutturazione}; \\ y = \text{salario percepito da ogni operaio prima della ristrutturazione}. \end{cases}$

Vincoli: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Altre Informazioni: $\begin{cases} \text{Numero operai dopo la ristrutturazione} = x - 5; \\ \text{salario dopo la ristrutturazione} = y - 2; \\ \text{spesa per stipendi dopo la ristrutturazione} = 800 - 200 = € 600. \end{cases}$

Relazioni tra dati e incognite:

$$\begin{cases} xy = 800 \\ (x-5)(y-2) = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 800 \\ xy - 2x - 5y + 10 = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 800 \\ 2x + 5y = 210 \end{cases}$$

Soluzioni: $\begin{cases} x_1 = 25 \\ y_1 = 32 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 80 \\ y_2 = 10 \end{cases}$

Verifica: Entrambe le soluzioni sono accettabili.

Naturalmente c'è una grande differenza tra percepire 32€/giorno di salario o 10€/giorno, come avere impiegati 25 o 80 operai. Il problema va meglio definito. Sarebbe sufficiente un vincolo che ci dice qual è la paga minima giornaliera di un operaio.

Problema 6.28. Un numero $k \in \mathbb{N}$ è composto da tre cifre. Il prodotto delle tre cifre è 42. Se si scambia la cifra delle decine con quella delle centinaia si ottiene un numero che supera k di 360. Se si scambia la cifra della unità con quella delle centinaia si ottiene un numero minore di 99 rispetto al numero k. Trovare k.

Dati: $\begin{cases} \text{il numero } k \text{ è composto da tre cifre}; \\ \text{prodotto delle tre cifre} = 42; \\ \text{scambiando la cifra delle decine con quella delle centinaia si ha } l = k + 360; \\ \text{scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia si ha } m = k - 99. \end{cases}$

Obiettivo: trovare il numero k.

Incognite: $\begin{cases} x = \text{ cifra che rappresenta il numero delle centinaia;} \\ y = \text{ cifra che rappresenta il numero delle decine;} \\ z = \text{ cifra che rappresenta il numero delle unità.} \end{cases}$

Vincoli: $\begin{cases} x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \end{cases}$.

Altre Informazioni: $\begin{cases} k = 100x + 10y + z; \\ l = 100y + 10x + z; \\ m = 100z + 10y + x. \end{cases}$

Relazioni tra dati e incognite:

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z = 42 \\ 100y + 10x + z = 100x + 10y + z + 360 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 42 \\ x - y = -4 \\ x - z = 1 \end{cases}.$$

Soluzioni: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 7 \\ z_1 = 2 \end{cases}$.

Verifica: La soluzione soddisfa le condizioni, il numero cercato è 372.

✍ *Esercizi proposti:* 6.63, 6.64, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.69, 6.70, 6.71, 6.72, 6.73, 6.74, 6.75, 6.76, 6.77, 6.78, 6.79, 6.80, 6.81, 6.82, 6.83, 6.84, 6.85, 6.86, 6.87, 6.88, 6.89, 6.90, 6.91, 6.92, 6.93, 6.94, 6.95, 6.96, 6.97, 6.98 6.99, 6.100