Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.1. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 15.2. Es seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei absolut konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 15.3. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von z) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} .$$

Aufgabe 15.4. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen z^0, z^1, z^2, z^3, z^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^3 .$$

Aufgabe 15.5.*

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Aufgabe 15.6. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.[1]

Aufgabe 15.7. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die durch die Reihenglieder

$$a_n := c_{2n} + c_{2n+1}$$

definierte Reihe ebenfalls und zwar gegen die gleiche Summe konvergiert.

Aufgabe 15.8. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

Aufgabe 15.9. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Die nächsten Aufgaben verwenden die Definition einer *periodischen Funktion.*

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

[1] Aus der Stetigkeit, die wir aber noch nicht bewiesen haben, folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 15.10. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine periodische Funktion und
$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine beliebige Funktion.

a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.

b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 15.11. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f beschränkt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.12. (4 Punkte)

Es sei
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5$ in der vierten Potenz
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^4 .$$

Aufgabe 15.13. (4 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei
$$R_{N+1}(z) = \exp z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*
$$|R_{N+1}(z)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |z|^{N+1}$$
gilt.

Aufgabe 15.14. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von
$$\exp 1 .$$

Aufgabe 15.15. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[2]

Aufgabe 15.16. (3 Punkte)

Beweise das Additionstheorem für den Sinus, also die Gleichheit

$$\sin (z + w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 15.17. (4 Punkte)

Es seien

$$f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

[2]Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.