... dass jeder und jede meint, dass Vorli ihn oder sie ganz besonders mag.

Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen

Bekanntlich kann man die reellen Zahlen mit einer Geraden identifizieren. Auf der Zahlengeraden liegen von zwei Punkten einer weiter rechts als der andere, was bedeutet, dass sein Wert größer ist. Wir besprechen nun diese Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.

Definition 5.1. Ein Körper K heißt *angeordneter Körper*, wenn es zwischen den Elementen von K eine Beziehung $>$ („größer als") gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt ($a \geq b$ bedeutet $a > b$ oder $a = b$).

(1) Für je zwei Elemente $a, b \in K$ gilt entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
(2) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
(3) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
(4) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$).

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als auch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit den natürlichen Vergleichsordnungen einen angeordneten Körper. Im Zahlenstrahl bedeutet

$$a \geq b,$$

dass a mindestens so weit rechts wie b liegt. Die ersten beiden Eigenschaften drücken aus, dass auf K eine *totale* (oder *lineare*) *Ordnung* vorliegt; die in (2) beschriebene Eigenschaft heißt Transitivität.

Statt $a > b$ schreibt man auch $b < a$ („kleiner als") und statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Eine wichtige Beziehung in einem angeordneten

Körper ist, dass $a \geq b$ äquivalent[1] zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem dritten Axiom. Ein Element $a \in K$ in einem angeordneten Körper nennt man *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder gleich 0. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*.

Lemma 5.2. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 \geq 0$.
(2) *Es ist* $a \geq 0$ *genau dann, wenn* $-a \leq 0$ *ist.*
(3) *Es ist* $a \geq b$ *genau dann, wenn* $a - b \geq 0$ *ist.*
(4) *Es ist* $a \geq b$ *genau dann, wenn* $-a \leq -b$ *ist.*
(5) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq d$ *folgt* $a + c \geq b + d$.
(6) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$.
(7) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.
(8) *Aus* $a \geq b \geq 0$ *und* $c \geq d \geq 0$ *folgt* $ac \geq bd$.
(9) *Aus* $a \geq 0$ *und* $b \leq 0$ *folgt* $ab \leq 0$.
(10) *Aus* $a \leq 0$ *und* $b \leq 0$ *folgt* $ab \geq 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.5. □

Lemma 5.3. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Aus* $x > 0$ *folgt auch* $x^{-1} > 0$.
(2) *Aus* $x < 0$ *folgt auch* $x^{-1} < 0$.
(3) *Für* $x > 0$ *ist* $x \geq 1$ *genau dann, wenn* $x^{-1} \leq 1$ *ist.*
(4) *Aus* $x \geq y > 0$ *folgt* $x^{-1} \leq y^{-1}$.
(5) *Für positive Elemente* x, y *ist* $x \geq y$ *äquivalent zu* $\frac{x}{y} \geq 1$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.8, Aufgabe 5.36, Aufgabe 5.9, Aufgabe 5.10 und Aufgabe 5.11. □

Wir besprechen nun eine weitere Anordungseigenschaft der reellen Zahlen, das sogenannte *Archimedes-Axiom*. Um dieses formulieren zu können, müssen wir uns zunächst klar machen, dass in jedem Körper K jede natürliche Zahl n eine sinnvolle und eindeutige Interpretation hat. Dies ist nicht selbstverständlich, da ja in der Axiomatik eines Körpers zwar eine 0 und eine 1 vorkommt, aber keine $2, 3, \ldots$. Wir legen daher einfach über die Addition im Körper die

[1]Man sagt, dass zwei Aussagen A und B zueinander *äquivalent* sind, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Dabei sind die beiden Aussagen häufig abhängig von gewissen Variablenbelegungen, und die Äquivalenz bedeutet dann, dass $A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ wahr ist.

Bedeutung dieser Zahlen fest, also

$$2 = 1 + 1,$$

$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, u.s.w. Dabei kann passieren, dass eine positive natürliche Zahl in einem Körper gleich 0 ist, im Körper mit zwei Elementen ist beispielsweise $0 = 2 = 4 = 6 = \ldots$ und $1 = 3 = 5 = 7 = \ldots$. Eine negative ganze Zahlen $-n$ kann man in jedem Körper als das Negative (im Körper) von n interpretieren. Damit können wir das noch ausstehende Axiom formulieren.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Definition 5.4. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann heißt K *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq x$$

gibt.

Die reellen Zahlen (ebenso die rationalen Zahlen) erfüllen das Archimedische Axiom, sie bilden also einen archimedisch angeordneten Körper. Die folgenden Folgerungen aus dem Archimedes-Axiom gelten also für die reellen Zahlen. Wir werden sie direkt nur für die reellen Zahlen selbst formulieren, da man sogar jeden archimedisch angeordneten Körper als Unterkörper der reellen Zahlen erhalten kann. In Aufgabe 6.23 wird ein angeordneter Körper beschrieben, der nicht archimedisch angeordnet ist.

Lemma 5.5. (1) *Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx \geq y$.*
(2) *Zu $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.*
(3) *Zu zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y.$$

Beweis. (1). Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n \geq y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 5.2 (6) auch $nx \geq y$. Für (2) und (3) siehe Aufgabe 5.20. □

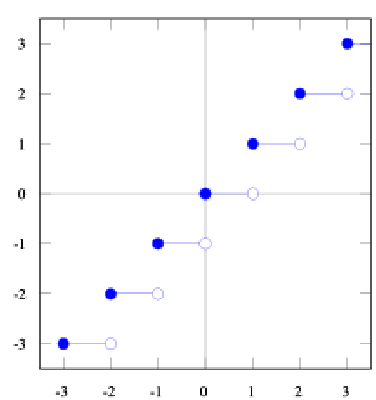
Definition 5.6. Für reelle Zahlen a, b, $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls* (oder *Randpunkte* des Intervalls), genauer spricht man von *unterer* und *oberer Grenze*. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in $\mathbb{R}$ ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$. Ferner verwendet man Schreibweisen wie

$$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+^0,\ \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}_-^0$$

oder Ähnliches. Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte *Überdeckung*. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



Definition 5.7. Zu einer reellen Zahl x ist die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ durch

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert.

Die Anordnungseigenschaften erlauben es auch, von wachsenden und fallenden Funktionen zu sprechen.

Definition 5.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *wachsend*, wenn

$$f(x') \geq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt},$$

streng wachsend, wenn

$$f(x') > f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt},$$

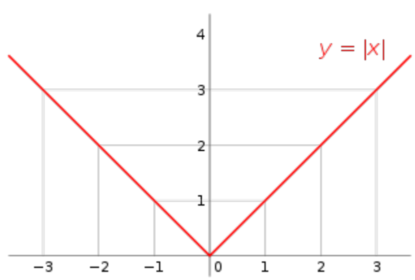
fallend, wenn

$$f(x') \leq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt},$$

streng fallend, wenn

$$f(x') < f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt}.$$

Der Betrag



Definition 5.9. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \geq 0\,, \\ -x, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 5.10. *Die reelle Betragsfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

erfüllt folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) *Es ist* $|x| \geq 0$.
(2) *Es ist* $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) *Es ist* $|x| = |y|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) *Es ist* $|y - x| = |x - y|$.
(5) *Es ist* $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*
(8) *Es ist* $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.22. □

Bernoullische Ungleichung

Die folgende Aussage heißt *Bernoulli-Ungleichung.*

Satz 5.11. *Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und eine natürliche Zahl n gilt die Abschätzung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Es sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

da Quadrate (und positive Vielfache davon) in einem angeordneten Körper nichtnegativ sind. □

Die komplexen Zahlen

Wir führen nun ausgehend von den reellen Zahlen die komplexen Zahlen ein. Zwar haben wir noch nicht alle Eigenschaften der reellen Zahlen kennengelernt, insbesondere haben wir noch nicht die Vollständigkeit diskutiert, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet, doch ist dies für die Konstruktion von $\mathbb{C}$ unerheblich. Verwenden werden weiter unten, dass jede nichtnegative reelle Zahl eine eindeutige Quadratwurzel besitzt. Damit haben wir alle für die Anfängervorlesungen relevanten Zahlenbereiche zur Verfügung.

Definition 5.12. Die Menge $\mathbb{R}^2$ mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$(a,b) \cdot (c,d) \,:=\, (ac - bd, ad + bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*. Er wird mit

$$\mathbb{C}$$

bezeichnet.

Die Addition ist also einfach die vektorielle Addition im $\mathbb{R}^2$, während die Multiplikation eine neuartige Verknüpfung ist, die zwar numerisch einfach durchführbar ist, an die man sich aber dennoch gewöhnen muss. Wir werden in Korollar 21.8 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) noch eine geometrische Interpretation für die komplexe Multiplikation kennenlernen.

Lemma 5.13. *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.31. □

Wir lösen uns von der Paarschreibweise und schreiben

$$a + b\mathrm{i} \,:=\, (a,b).$$

Insbesondere ist $\mathrm{i} = (0,1)$, diese Zahl heißt *imaginäre Einheit*. Diese Zahl hat die wichtige Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 \,=\, -1.$$

Aus dieser Eigenschaft ergeben sich sämtliche algebraischen Eigenschaften der komplexen Zahlen durch die Körpergesetze. So kann man sich auch die obige Multiplikationsregel merken, es ist ja

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) \,=\, ac+ad\mathrm{i}+b\mathrm{i}c+b\mathrm{i}d\mathrm{i} \,=\, ac+bd\mathrm{i}^2+(ad+bc)\mathrm{i} \,=\, ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

Wir fassen eine reelle Zahl a als die komplexe Zahl $a + 0\mathrm{i} = (a,0)$ auf. In diesem Sinne ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Es ist gleichgültig, ob man zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen oder als komplexe Zahlen addiert oder multipliziert.

Definition 5.14. Zu einer komplexen Zahl

$$z \,=\, a + b\mathrm{i}$$

heißt

$$\operatorname{Re}(z) \,=\, a$$

der *Realteil* von z und

$$\operatorname{Im}(z) \,=\, b$$

heißt der *Imaginärteil* von z.

Man sollte sich allerdings die Menge der komplexen Zahlen nicht als etwas vorstellen, was weniger real als andere Zahlensysteme ist. Die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen ist bei Weitem einfacher als die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Allerdings war es historisch ein langer Prozess, bis die komplexen Zahlen als Zahlen anerkannt wurden; das Irreale daran ist, dass sie einen Körper bilden, der nicht angeordnet werden kann, und dass es sich daher scheinbar um keine Größen handelt, mit denen man sinnvollerweise etwas messen kann.

Man kann sich die komplexen Zahlen als die Punkte in einer Ebene vorstellen; für die additive Struktur gilt ja einfach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Gaussschen Zahlenebene*. Die horizontale Achse nennt man dann die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*.

Lemma 5.15. *Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen erfüllen folgende Eigenschaften (für z und w aus $\mathbb{C}$).*

(1) *Es ist* $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{i}$.
(2) *Es ist* $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) *Es ist* $\mathrm{Im}\,(z+w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) *Für* $r \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

(5) *Es ist* $z = \mathrm{Re}\,(z)$ *genau dann, wenn* $z \in \mathbb{R}$ *ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn* $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ *ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.33. □

Definition 5.16. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + b\mathrm{i} \longmapsto \overline{z} := a - b\mathrm{i},$$

heißt *komplexe Konjugation.*

Zu z heißt $\overline{z}$ die *konjugiert-komplexe Zahl* von z. Geometrisch betrachtet ist die komplexe Konjugation zu $z \in \mathbb{C}$ einfach die Achsenspiegelung an der reellen Achse.

Lemma 5.17. *Für die komplexe Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln (für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$).*

(1) *Es ist* $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) *Es ist* $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) *Es ist* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) *Für* $z \neq 0$ *ist* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) *Es ist* $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) *Es ist* $\overline{z} = z$ *genau dann, wenn* $z \in \mathbb{R}$ *ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.40. □

Lemma 5.18. *Für eine komplexe Zahl z gelten die folgenden Beziehungen.*

(1) *Es ist* $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$.
(2) *Es ist* $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) *Es ist* $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.34. □

Das Quadrat d^2 einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ, und die Summe von zwei nichtnegativen reellen Zahlen ist wieder nichtnegativ. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl c gibt es eine eindeutige nichtnegative *Quadratwurzel* $\sqrt{c}$, siehe Aufgabe 8.9 (das werden wir später beweisen). Daher liefert folgende Definition eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl.

Definition 5.19. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + b\mathrm{i}$$

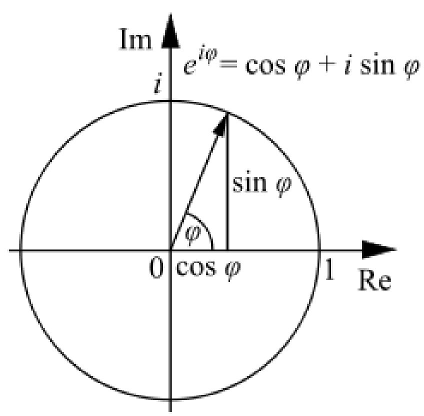
ist der *Betrag* durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

definiert.

Der Betrag einer komplexen Zahl z ist aufgrund des *Satzes des Pythagoras* der Abstand von z zum Nullpunkt $0 = (0,0)$. Insgesamt ist der Betrag eine Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ z \longmapsto |z|\,.$$



Die Menge aller komplexen Zahlen mit einem bestimmten Betrag bilden einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit dem Betrag als Radius. Insbesondere bilden alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 den *komplexen Einheitskreis.*

Lemma 5.20. *Für den Betrag von komplexen Zahlen gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) *Für reelles* z *stimmen reeller und komplexer Betrag überein.*
(3) *Es ist* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$ *ist.*
(4) *Es ist* $|z| = |\overline{z}|$.
(5) *Es ist* $|zw| = |z| \cdot |w|$.
(6) *Für* $z \neq 0$ *ist* $|1/z| = 1/|z|$.
(7) *Es ist* $|\mathrm{Re}\,(z)|, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.
(8) *Es ist* $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung, für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 5.35. Zunächst gilt nach (6) für jede komplexe Zahl u die Abschätzung $\mathrm{Re}\,(u) \leq |u|$. Daher ist

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z|\,|w|,$$

und somit ist

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich die gewünschte Abschätzung. □

Abbildungsverzeichnis