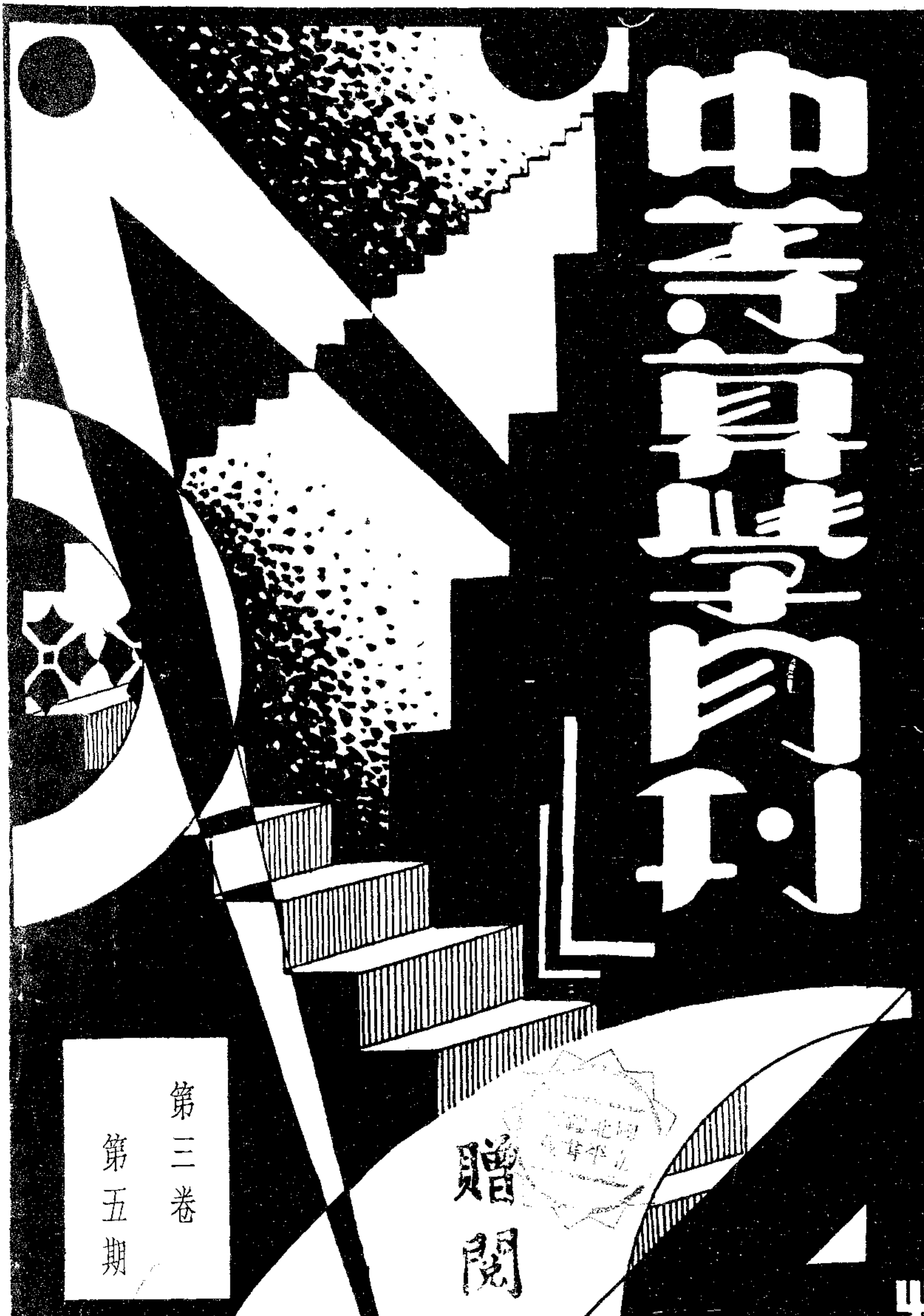

中等算學月刊
第三卷
第五期
贈閱

中華書局出版

中學算學教科書

初級中學用

- (審定)新課程標準適用 初中算術 陸子芬等編 二冊 各六角半
- 新課程標準適用 初中代數 余介石 胡術五 何濟友編 二冊 各七角
- 新課程標準適用 初中幾何 余介石 胡術五 徐子豪編 二冊 各七角
- 新課程標準適用 初中三角 張鵬飛編 一冊 (印刷中)
- 四位算學用表(附初等算學基本公式及法則) 余介石編 一冊 四角
- 新中華初級中學 算術(語體) 張鵬飛編 二冊 上冊七角 下冊六角
- 新中華初級中學 算學教科書 張鵬飛編 六冊 各三角半
- 新中華初級中學 算術教本 張鵬飛編 一冊 五角
- (審定)新中學 算術 吳在淵 胡敦復編 一冊 精裝一元二角 並裝八角
- 新中學 算術習題詳解 張鵬飛編 精裝一冊 一元四角
- 新中華初級中學 代數教本 張鵬飛編 二冊 上冊四角 下冊三角
- (審定)新中學 代數學 秦汾 張鵬飛編 一冊 精裝一元二角 並裝八角
- 新中學 代數學習題詳解 張鵬飛編 精裝一冊 一元六角
- 新中華初級中學 幾何教本 張鵬飛編 二冊 各七角
- (審定)新中學初級 幾何學 吳在淵編 一冊 精裝一元 並裝七角
- 新中學 幾何學 胡敦復 吳在淵編 一冊 精裝一元 並裝七角
- 新中學 幾何學習題詳解 張鵬飛編 精裝一冊 一元八角
- 新中學初級 混合法算學 張鵬飛編 六冊 各四角
- 新中學初級 混合法算學習題答案 張鵬飛編 六冊 第一冊二角半
- 新中學初級 混合數學 程廷熙 傅種孫編 六冊 各六角
- 新中學 平面三角 胡仁源 張鵬飛編 一冊 精裝八角 並裝五角
- 新中學 平面三角習題詳解 張鵬飛編 精裝一冊 八角

高級中學用

- (審定)新課程標準適用 代數學 余介石編 一冊 一元九角
- 新課程標準適用 幾何學 余介石編 二冊 (一)一元四角 (二)八角
- 新課程標準適用 幾何學教科書 吳在淵編 二冊 (一)一元三角
- 新課程標準適用 解析幾何學 黃泰 徐子豪編 一冊 八角
- 新課程標準適用 三角學 余介石編 一冊 六角半
- 五位算學用表(附中等算學基本公式) 余介石編 一冊 六角
- 高級中學用 新中學代數學 張鵬飛編 一冊 九角
- (審定)高級中學用 新中學幾何學 胡敦復編 一冊 一元六角
- 高級中學用 新中學解析幾何學 余恆編 一冊 一元九角
- 三S平面幾何學 仲光然等譯 一冊 一元七角
- 三S立體幾何學 仲光然等譯 一冊 九角

本期目次

華0719(全) 23,12.

讀梅教授等修正中學算學課程建議書

汪桂榮

(壹)一點感想

鄙人從事中學算學教學十餘年，平常階喜研究中學算學教學，但總覺得研究中學算學教學不能單從中學方面着想，因初中學生均從小學來，所以小學算學教學對於初中算學教學頗有影響，又高中畢業生均須投考大學，故大學入學試驗標準頗影響於高中算學教學，前者關係較小而後者則關係甚大，蓋高中算學教學一方面要培植良好基礎，一方面又須使投考大學不生困難，故某大學入學試題中考幾何中之極大極小則趕快補充極大極小教材，某大學考三角中之消去法則趕快補充消去教材，某大學考高等代數中之整數論或某大學考解析幾何中之斜坐標，則又設法補充，今年忙到這裏明年又換花樣，教育部規定之算學鐘點有限，而大學入學試驗之範圍則無窮，鄙人担任中學算學教學之時間愈久，則此等情形亦知之愈多，嘗思大學入學算學試題所以特別加深之故，不外(一)希望取幾個優秀分子，(二)圖閱卷之便利，(三)大學教授手中均爲高深課本，於其中隨便選擇幾個習題，對於中學算學課程情形則未顧及，故每次錄取標準往往不滿六十分，有時三四十分亦已錄取，譬如高中代數教育部規定爲八學分，現在一般學校大都採范氏高等代數爲教本，其中關於二次方程式論，虛數論，機會論，方程式論，行列式論，無窮級數論，不少重要問題，但某大學並不重視而專考小代數中之冷僻問題，又如解析幾何部頒標準爲四學分，且僅及平面不及立體，一般中學大部採施蓋二氏平面解析幾何爲教本，其中關於直線，圓，錐線，高級平面曲線，不少重要問題，但某大學則常考 Salmon 書中後部分之高深定理或立體解析幾何，又如高中平面三角及高中平面立體幾何均在高一必修，往往不能過深，但某大學則常考 HobsonLoney 等三角書中特別難題，或幾何入於近世幾何範圍，諸如此類不可勝數，不知(一)此等習題，在教育方面觀之毫無診斷

價值，大家均在四十分上下，若記分再無標準往往埋沒英才，至爲可惜，(二)因大學入學，試驗標準加高，高中算學教學往往用勉強注入之法、反不能將根基打固，將來雖砌高大樓房亦多危險，與大學教授所希望提高程度原旨往往相反，故鄙人時常大聲急呼者，卽在中學算學教學非請大學教授注意不可，中學算學課程非請大學教授規定不可，且就歐美各國情形而論，英之中學算學改造運動始於 Perry 教授、法則始于Tannary教授，美則始於 Moore教授，德則始於 Klein教授，且均有一定主張如Perry主張實驗教材，及直觀方法，Tannany 主張實用教材，及函數圖解，Moore主張融合制度，及實驗方法，Klin 主張函數觀念，及融合制度，可知各國中學數學改革運動，均由大學教授提倡，故一切問題均迎刃而解，此次梅教授等登高一呼，吾知我國中學算學教學改革之期當不遠矣，又去歲暑期教育部規定各大學舉辦理科講習會，此亦大學教授注意中學教學問題之極好機會也，余所希望者，在梅教授等此次建議僅限於高中算學分組問題，其他尙未有具體之主張，深盼梅教授等再作進一步之計劃，則我國中學算學教學方有無窮之希望也。

(貳)解決途徑

鄙人以爲解決一個教育問題，當從下列三方面研究之，

(1)已往經驗

鄙人服務於中學校已十餘年，在此十餘年中，關於選科制，分科制，及普通科制均經試用，各有其優點亦各有其劣點，大概選科制之優點可以適應個性，升學不感困難，其劣點在學生往往避難就易，學校經濟太費，分科制之優點亦在適應個性，升學不感困難，其劣點則在文科學生自以文學家，對於理科太不重視，同樣理科學生自以爲科學家，往往國文不通，普通科制之優點在能齊一程度，使學者對於各方面平均發展，把根基打得牢固，其劣點在一部分學生感覺算學太難，而一部分學生則投考理工大學向覺算學不敷應用，爲今之計宜定一辦法保存選科制，分科制，普通科制之優點，而去其劣點，但三年前教育部所以改爲普通科制之最大原因，在(一)

齊一程度因中學教育爲基礎教育，並非養成專家，(二)矯正已往中學生科學程度太差，乃特別注重數理，此兩點亦宜注意及之。

(2)目前事實

(一)學生太忙，以算學論，譬如高中代數照部頒標準爲八學分，一般學校大都採范氏高等代數爲教本，省去極小部分教材，自一方面觀之則投考理工者程度頗感不足，但自他方面觀之對於將來不研究理工者，或對於數理之志趣不近者，讀之有何用處，換言之我國高中學生，是否人人均須把如范氏高等代數之程度讀得及格，方能畢業，實一疑問，鄙人於每次出考題時，結算分數時，均有如上之矛盾心理發生，頗難解決，算學如此，其他各門功課均有同樣情形，因之學生太忙對於身心發展大有妨礙。

(二)會考與升學預備不同，大概至高中三年級下學期學生一方面欲預備會考，一方面又須預備升學，前者則就高中三年內所讀之課程一一須加復習，學生已疲於奔命，但會考方畢，而升學之難關又至，會考所預備之學程與升學所需者幾乎完全不同，前者在各方面之平均注重，後者則注重文或理之高深部分，尤以投考理工大學爲最感困難，往往身體弄壞，臨時不能應試，至覺可惜。

(三)大學入學試驗之算學標準太高，近三五年來各大學入學試驗關於算學標準日漸提高，前已略言之，在大學教授目光中三角幾何，高等代數，解析幾何在高中均已讀過，當然無所不知無所不曉，不知高中算學教學不過打了一點基礎譬如高中通用之葛氏三角其內容僅及龍氏三角四分之一，又如高中通用之施蓋二氏解析幾何其內容僅及龍氏解析幾何三分之一，且大學教授往往注重理論，中學方面所通用之美國式教本則大都注重實用，譬如立體幾何何等實用，對於空間懸想之訓練何等重要，但在大學入學試驗中頗不重視，在大學方面祇見高中畢業生之程度太差，不知近年來高中算學程度已較前增高許多矣 此種大學中學不銜接問題，實爲目前我國中學教育之最嚴重問題，如何方能使其合理化，則有待於解決者也。

(四)私立中學畢業生往往較官立中學畢業生升學容易，根據最近三五年投考

上海交通大學入學統計，其名次較前者往往爲私立中學之畢業生，如天津南開中學，北平匯文中學，上海私立南洋中學，南洋模範中學，大同大學附中，甯波效實中學等，大都因爲私立中學，不受部頒標準約束，可以注重理科或商科一方面，故升學頗便利。

(3)教育原理

(一)個性差別，在初中方面學生算學程度之差別較小，至高中後則差別異常顯著，當然算學程度之差別往往由於努力程度之不同，但在高中方面除努力程度不同外個性志趣之不同實爲最大原因，往往有對於算學常努力而有事倍功半之慨，凡讀過科學史者均知達爾文幼時亦勉強讀過代數毫無成就，改考生物乃成生物家前東大附中行選科制時許多有文學天才者對於算學成績往往甚差，近兩三年來因改行普通科制高中學生往往因高深數理未能及格因而除名者不知凡幾，殊與教育原理有所不合。

(二)需要不同　目前初中課程已極豐富，學生經嚴格訓練後對於各方面已甚了解，至高中後卽有將來研究文科或理科之兩種傾向，當然高中方面非養成專家，但高中畢業生非投考理工大學卽投考文法大學，投考理工大學所需算學程度甚深，投考文法大學者則有初等代數及初等幾何知識已足應付，以需要不同之人勉強受同一訓練，其結果之不能美滿宜矣，而說高中畢業生除升學外，事實上尙有不升學而就職業者，對於高深算學理論，毫無用處。

(三)教學困難，高中算學課程旣爲普通必修，在教學時如牽就算學程度較優之學生或志在理工之學生，則一部分人少所獲益，反之以他一部分學生爲準則又顧彼失此，似此現行之劃一制度，不但不足以提高算學標準，結果或得其反。

(叁)具體主張

關於解決以上所說問題之方法，鄙人之主張與梅教授等之主張稍有不同，蓋鄙人不主張高中算學分組，而主張高中算學必修十六學分，選修十四學分，就整個高

中課程言之則依比例縮小爲五分之四必修，五分之一選修，一切教育部頒標準江蘇省教育廳進度表均不變動；仍保留普通科之優點，蓋部頒標準及蘇教廳進度表均有極大彈性，比例縮小五分之一絕無困難，關於理組選修學理另立算學十四學分，物理化學生物若干學分關於文組則設文科重要選修學程，玆將算學分組或高中文理分科之劣點，分別言之於下：

1.就學生求學情形言之，在文組學生對於算學彼此觀望毫不努力，凡已行文理分科及行能力分組之學校均知之，若列必修算學爲十六學分較一般需要已稍高，符合教育部注重理科之原意，在必修算學各人非努力不可，否則無升級畢業之望，至於選修算學不過爲升學便利而設，當然着重之點仍在必修算學，將根基打好。

2.就學生志趣改變言之，因理組課程比較繁重，若行分組制度則學生入理組後中途萬難變更，在智力測驗尚未能完備之今日，或分科指導未能有充分之實施，則學生入理組後萬一中途感覺志趣不合，能力不足，則欲改變志趣異常困難，在選科制則較有彈性，尤其在大部分必修小部分選修制，則毫無問題，須知學生中途志趣改變，乃中學教育階段內最重要的問題，因學生在中學時代正當身心最發育時期，志趣極易改變，且中學課程之功用本有適應，探試，診斷等等功用也，或有以選科制中途退選爲一不良現象，不知此正選科制之最大優點也，若不爲學生着想而徒爲行政或教師之便利，則非所知矣。

3.就教師方面言之算學分組或文理分科，往往不爲教師所贊成，前次江蘇省教育廳所招集之修訂算學教學進度表會議時，有某某學校提出此點，蓋教師受岐視，精神上不愉快，則教學上之效果卽微也。

4.就教學方面言之，若行分組制，則在高一須讀完三角幾何，高二須讀完高等代數，高三方讀解析幾何，須知三角後部分往往比高等代數及解析幾何前部分難讀，且三角稍深部分非讀過高等代數中之虛數不可，若採分組制事實上教學上發生困難，且不合理，卽不發生教學上之困難，則讀高等代數時三角幾何已經忘却，讀至解析幾何時三角幾何及高等代數亦多忘却，此爲行分科制時算學課程支配上最困

難之問題，若採選科制，則高一可不設選科，先將三角幾何之基礎打好，在高二除必修高等代數外，可選修幾何及三角，在高三除必修解析幾何外，可選修高等代數，及平面立體解析幾何，如此則學生受兩重循環之訓練，異常透澈，有近代所提倡融合算學之優點，而無其弊端。

5.再就行政方面言之，若採分科制則在單軌高中發生困難，即在雙軌高中如學生偏於文或偏於理太多，亦感覺分組不易。

若照鄙人所主張之小部分選科制，高一無選科，高二高三稍設選科而大部分課程仍爲必修，則保存普通科之優點而無其劣點，有分科制選科制之優點而無其劣點，或有以選科課程學生多不負責任爲問者，此在行多量選科制或有之，而在小部分選科制絕無此顧慮，因目前高中學生處境至爲困難，畢業考試由教育廳主持，入學試驗由各大學辦理，在此種情況之下惟有教師努力教學生努力學，除兩方努力外絕無辦法，小部分選修算學，爲學生升學所必需，學生均感覺爲生死關頭，非萬不得已，絕不輕易放棄，不過理組選修課程以算學而論，乃爲比較高深者，教師須用極大努力從事整理，使學者研究不感困難，難題稍加提示，使學者能設法解決，總之多少要帶幾分引誘性，獎勵性，非然者在中學校內教高深數理而用大學教法，學生課後自修之困難太多，加以考試太嚴留級開除太厲害，則學者因切膚關係自然不免有退選之事，此非選科之弊，而因不善用選科之故也。

茲將鄙人所擬高中三年級必修選修算學支配方法，及教材內容分別言之於下：

高一上必修平面三角三學分， 高一下必修平面及立體幾何四學分，

高二上必修高等代數三學分， 高二下必修高等代數三學分，

高二上選修高等幾何三學分， 高二下選修高等三角二學分，

高三上必修平面解析幾何三學分。

高三上選修平面立體解析幾何附微積大意五學分，

高三上選修高等代數四學分。

必修平面三角內容

（1）銳角三角函數及直角三角形之眞數解法

（2）對數及直角三角形之對數解法

（3）任意角三角函數及三角函數之變跡，（4）斜三角形之解法，

（5）三角函數之關係及恆等式證明法，（6）複角之三角函數，

（7）反三角函數，（8）三角方程式及消去法大意，

（9）三角極限及近於0°及90°之三角函數。

必修幾何內容

（甲）平面之部

（1）幾何學之基礎，（2）定理及其證明法，

（3）軌跡問題，（4）作圖問題，

（5）計算問題。

（乙）立體之部

（1）空間之線與面多面角，（2）柱體及錐體，

（3）球。

必修高等代數內容

（1）代數學之根據，（2）整式四則，

（3）一次方程式，（4）因子分解，

（5）因式及倍式，（6）分式四則，

（7）分項分式，（8）二項式定理，

（9）開方法，（10）根式四則，

（11）虛數及雜數，（12）二次方程式，

（13）不等式，（14）一次不定方程式，

（15）比例及變數，（16）等差等比及調和級數，

（17）對數複利及年金，（18）選擇及機會，

（19）方程式論，（20）行列式論，

(21) 無窮級數論。

必修平面解析幾何內容

(1) 坐標，　(2) 軌跡與方程，

(3) 直線，　(4) 圓，

(5) 拋物綫橢圓及雙曲綫，　(6) 坐標軸之移轉，

(7) 切線及法線，　(8) 坐標，

(9) 褱變數方程式，　(10) 超越函數。

選修高等幾何內容

(1) 幾何學之基礎，

(2) 定理證明法及補助線之作法，

(3) 三角形之性質，　(4) 圓之性質，

(5) 軌跡之求法，　(6) 作圖之方法，

(7) 切圓問題，　(8) 圓周等分法，

(9) 幾何作圖不能問題，　(10) 極大與極小，

(11) 近世幾何大意。　(12) 立體幾何，

選修高等三角內容

(1) 三角函數之定義與其變跡，

(2) 直角三角形解法及應用問題，

(3) 三角函數之關係及恆等式證明法，　(4) 複角之三角函數，

(5) 補助角，　(6) 三角方程式，

(7) 反三角數，　(8) 三角形邊角之關係，

(9) 斜三角形解決及應用問題，　(10) 三角形及四邊形之性質，

(11) 消去法，　(12) 不等式極大極小，

(13) 三角極限，　(14) 棣毛弗定理及三角級數。

選修高等代數內容

(1)代數學之基礎論，
(2)整數論，
(3)逆分數論，
(4)虛數論，
(5)級數求和論，
(6)二次方程式論，
(7)不等式論，
(8)函數變跡論，
(9)方程式論，
(10)三次及四次方程式論，
(11)行列式論，
(12)極限論，
(13)無窮級數論，
(14)二項級數，指數級數，三角級數，及反三角級數論。

選修解析幾何及微積大意內容

(甲)平面解析幾何之部

(1)斜坐標，
(2)直線，
(3)圓，
(4)拋物線，
(5)橢圓，
(6)雙曲線，
(7)普通二次方程式，
(8)極坐標，
(9)褒變數方程式，
(10)圖形之平移旋轉對稱圖形及相似圖形，
(11)反圖，
(12)極與極線及對極圖形，

(乙)立體解析幾何之部

(1)空間坐標，
(2)空間軌跡與方程，
(3)平面，
(4)直線，
(5)球面柱面錐面旋轉面及直紋面，
(6)空間坐標軸之移轉，
(7)錐面，
(8)直線與錐面。

(丙)微積大意之部

(1)微商之定義及其求法，
(2)求微商之公式及應用問題，
(3)微分及無窮小，
(4)積分之定議及求積分之基本公式，
(5)積分之簡單應用及不定積分中常數之決定法，
(6)有理分數及無理函數積分之求法用分部法及代替法求積分，
(7)定積分大意。

解決幾何三大名題的三種曲線

青 心

『初等幾何學中有三大問題，起於歐几里得之前，延及二千數百年無人能解，至百年前始能證明其不能作圖，今舉之於下：

(1)等分一任意角為三分；

(2)作正方形等於一定圓之面積；

(3)作一綫分，令在其上所作正立方體等於在一定線分上所作正方體體積之二倍。

此等問題用高次曲線皆有十餘種解法，然出於初等幾何學範圍之外，（初等幾何學之作圖僅許用圓規及直尺作之，否則謂為不能作圖，）故在純正幾何學中不承認其能作也（見吳在淵編近世初等幾何學下册 129 面）。

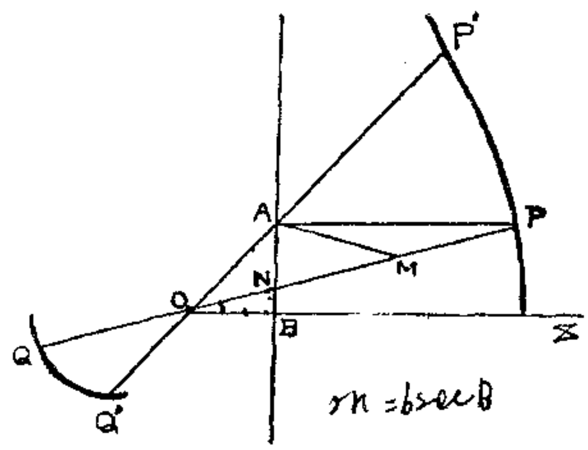
用高次曲線解此三題，雖在純正幾何學中不承認其能作圖，但在算學全部裏面看起來，却有很大意義和價值的。就是這些曲綫本身也都極其有趣，何況其中還有不少是希臘科學黃金時代（公元前三世紀）的產物呢！倘若我們願意把他們研究一下，定然可以看出當日先哲治學精神之一般，話休煩絮，現在就把較著的三種曲綫一敍述出來，介紹給中等算學學生，作為課餘的參考罷。以下每段中第(2)節述曲綫之方程式，這是笛卡兒以後的幾何，可以幫助我們明瞭曲線的圖形。未讀過解析幾何的學生如略去不看，亦無妨礙。

(一)解三分角問題的 Conchoid 曲線

(1) Conchoid 之構圖：

設∠AOB為所分之一銳角（如非銳角，可減去其中直角之倍角，因其易作，且

不必用此法也)自A引AB⊥OB,令OA有定長,設爲a。取4a定長之線段PQ使其常過O點,並使其中點常在AB線內移動,則此線段之兩端 P,Q 之軌跡爲一高次曲綫名曰 Conchoid.發現此曲線者爲二千餘年前希臘先賢 Nicomedes(180B.C.)。



$rn = b\sec\theta$

$\frac{ON}{b} = \sec\theta$

(2) Conchoid 之方程式:

設O點爲極點,OB爲極軸;P(ρ,θ)爲曲綫上一點,再設OB=b,(OA Cos∠AOB)則　　$\rho = ON + NP, = b\sec\theta + 2a.$

換成直角坐標,爲　　$(x^2+y^2)(x-b)^2 = 4a^2x^2.$

(3) Conchoid 之應用——三等分∠AOB

自A引AP⊥AB與曲綫交於P,聯OP截AB於N,則$\angle NOB = \frac{1}{3}\angle AOB$.

證:取NP之中點M,並聯MA,則$NM = MP = AM = OA$.

故　　$\angle AON = \angle AMN = 2\angle MPA = 2\angle NOB.$

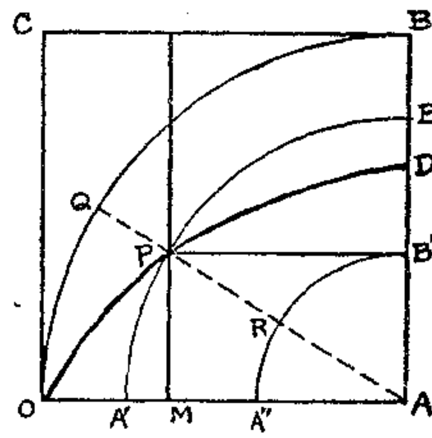
所以　　$\angle NOB = \frac{1}{3}\angle AOB.$

(二)解正方圓問題的 Quadratrix 曲線

(1) Quadratrix 之構圖

設$\widehat{OQB}$爲一所設圓之象限弧,A爲圓心,OA爲半徑,作OA上之正方形 OABC。令 CO 線向BA線平行移動,C端在CB內,O端在OA內,移至BA位置而止,同時並令OA 線分向 BA旋轉,A端不動,O端在$\widehat{OQB}$內,轉至BA位置而止。設此二種移動同

始同終，且各均齊一致，則二動線分交點之軌跡OPD為一種高次曲線，名曰 Quadratrix。發現者為先賢 Hippias of Elis.(460B.C.)



(2) Quadratrix 之方程式

設O為原點，OA為X軸，OC為Y軸，P之坐標為（x,y）再設OA為γ，則$MA=\gamma-x$，$MP=y$。因$\overset{\frown}{OQ}:\overset{\frown}{OQB}=OM:OA=x:\gamma$，故 $\angle OAP=\frac{\pi x}{2\gamma}$。因得 $\frac{y}{\gamma-x}=\tan\frac{\pi x}{2\gamma}$ 所以 $y=(\gamma-x)\ \mathrm{tah}\ \frac{\pi x}{2\gamma}$.

(3) Quadratrix 之應用——以線分表弧分

若$\overset{\frown}{OQB}=\frac{\overline{AB}^2}{AD}$，則$\overset{\frown}{OQB}$弧分能以定長之線分AB,AD表明。以下用窮舉法求證$\overset{\frown}{OQB}=\frac{\overline{AB}^2}{AD}$。設B′為B″為AB上D點兩傍的兩點。以A為圓心，AB′為半徑作$\overset{\frown}{A'PB'}$；再以AB″為半徑作$\overset{\frown}{A''RB''}$。

假設	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{AB}=\frac{AB}{AB'}$	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{AB}=\frac{AB}{AB''}$	(1)
因	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{A'PB'}}=\frac{AB}{AB'}$	$\frac{CQB}{\overset{\frown}{A''RB''}}=\frac{AB}{AB''}$	(2)
比較（1），（2）得	$\overset{\frown}{A'PB'}=AB$	$\overset{\frown}{A''RB''}=AB$	(3)
從圖知	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{QB}}=\frac{OA}{PB''}=\frac{AB}{PB''}$	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{QB}}=\frac{OA}{PB''}=\frac{AB}{PB''}$	(4)
及	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{QB}}=\frac{\overset{\frown}{A'PB'}}{\overset{\frown}{PB'}}$	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{QB}}=\frac{\overset{\frown}{A''RB''}}{\overset{\frown}{RB''}}$	(5)

以(3)代入(4) 再與(5)比較	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{QB}}=\frac{A'\overset{\frown}{PB'}}{PB''}=\frac{A'PB'}{\overset{\frown}{PB'}}$	$\frac{\overset{\frown}{OQB}}{\overset{\frown}{QB}}=\frac{A''\overset{\frown}{RB''}}{\overset{\frown}{PB''}}=\frac{A''RB''}{\overset{\frown}{RB''}}$	(6)
因得	$\overset{\frown}{PB'}=PB''$	$\overset{\frown}{RB''}=PB''$	(7)

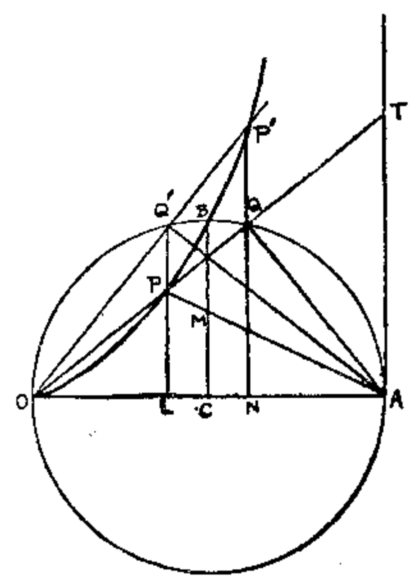
但由初等幾何知(7)式決不能成立;故假設必爲不合理,

如此,則 $\frac{\overset{\frown}{OQB}}{AB}=\frac{AB}{AD}$ $\therefore \overset{\frown}{OQB}=\frac{\overline{AB}^2}{AD}$. Q.E.D.

注意:用 Quadraf ix 亦可解三分角問題,

(三)解倍立方問題的一種 Cissoid 曲線

(1) Cissoid 之構圖:



任取一圓,設其圓心爲 C,OCA 爲此圓之一直徑,O,A 爲其兩端,在A端作切線AT,並自他端O引諸弦OQ,OQ'……等,且引長使之與 AT 過於T,T',……諸點。取OP=QT,OP'=Q'T',……等,則PP'……諸點之軌跡爲一高次曲線,名曰Cissoid of Dioceles 因以紀念發現者先賢Dioceles(1?0B.C)氏也。

(2) Cissoid of Dioceles 之方程式:

設O爲極點,OA爲極軸:P(ρ,θ)爲曲綫上 點,再設圓之半徑爲γ,則圓之方程式爲$\rho=2\gamma\cos\theta$,切線AT之方程式爲 $\rho\cos\theta=2\gamma$.故$QT=OT-OQ=\frac{2\gamma}{\cos\theta}-2\gamma\cos\theta=2\gamma\sin\theta\tan\theta$.今OP=QT,所以Cissoid OPP'之方程式爲$\rho=2\gamma\sin\theta\tan\theta$,換直角坐標,則爲 $x^3=y^2(2\gamma-x)$.

(3) Cissoid of Dioceles 之應用 —倍所設之立方

取$CM=\frac{1}{2}CB=\frac{1}{2}\gamma$；聯AM，其延長部分交曲綫於P。自P引$PL\perp OA$，並使之遇圓周於Q'。在OA上取AN＝CL，自N引$NQ\perp OA$，則遇圓周於Q。聯OQ'，AQ'，OQ及AQ。設$LA=a$，$LQ'=b$，$OL=C$，則$\frac{a(\equiv LA)}{LP}=\frac{CA}{CM}=\frac{\gamma}{\frac{1}{2}\gamma}=2$，是以$LP=\frac{1}{2}a$，因$\triangle OLP\sim\triangle ONQ=\triangle ALQ'\sim\triangle Q'LO$。故$\triangle Q'LO\sim\triangle OLP$。乃得$\frac{LA}{LQ'}=\frac{LQ'}{OL}=\frac{OL}{LP}$，即$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{LP}=\frac{c}{\frac{1}{2}a}$，更因而得(i)$ac=b^2$及(ii)$\frac{1}{2}ab=c^2$。由此二式又得$2b^3=a^3$。所以二倍一所設立方體，可用下式求之：

$$\frac{\text{所求倍立方之邊}}{LA}=\frac{\text{所設立方之邊}}{LQ'}.$$

關於極大極小之數定理

金 品 桂叔超

1.定理一 諸正數量之和一定，則其積恆以諸數量相等時爲極大。

〔證〕 設x及y爲不等兩數量，則因$(x-y)^2>0$故$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)>xy$

今設諸數量中任意兩不等量爲 x及y，若以$\frac{x+y}{2}$代 x，以$\frac{x+y}{2}$代y，則諸數量之和不變而其積恆增大。

由是使諸數量變爲相等則其和不變而其積漸次增大，故欲其連乘積爲極大，須諸量皆相等。

2.定理二 諸正數量之積一定，其和恆以諸數量相等時爲極小

〔證〕 設x及y爲不等兩正數量，則因$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2>0$

故 $x+y>\sqrt{xy}+\sqrt{xy}$

由是，兩不等量x及y之和，恆較與此同積之兩相等量$\sqrt{xy}$及$\sqrt{xy}$之和爲大.

今設諸數量中，任意兩不等量爲x及y，若以$\sqrt{xy}$代x，以$\sqrt{xy}$代y則諸數量之積不變而其和當減小。故欲諸數之和爲極小，諸數量必相等。

3.問題 等周之諸三角形中，何種三角形有極大面積

〔解〕 $\because A=\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\frac{A^2}{S}=(s-a)(s-b)(s-c)$$

A爲極大時 $(s-a)(s-b)(s-c)$亦爲極大 但諸數量$s-a$, $s-b$, $s-c$之和爲 $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s=$ 常數 故以$s-a=s-b=s-c$ 時有極大面積卽$a=b=c$有極大面積，故在等周之諸三角形中，等邊三角形有極大面積。

4.問題 設$a^x \cdot b^y \cdot c^z=A$求$(x+1)(y+1)(z+1)$之極大値.

〔解〕 $\because$ $a^{x+1}\cdot b^{y+1}\cdot c^{z+1}=abcA$

取對數$(x+1)\log a+(y+1)\log b+(z+1)\log c=\log(abcA)$ (1)

又因 $(x+1)(y+1)(z+1)=\frac{(x+1)\log a\cdot(y+1)\log b\cdot(z+1)\log c}{\log a\cdot\log b\cdot\log c}$

故 $(x+1)(y+1)(z+1)$爲極大時，$(x+1)\log a\cdot(y+1)\log b\cdot(z+1)\log c$亦爲極大，從定理一及(1)知必

$(x+1)\log a=(y+1)\log b=(z+1)\log c$ (2)

時，$(x+1)(y+1)(z+1)$方爲極大。

以(2)代入(1)得

$$x+1=\frac{\log(abcA)}{\log a^3}$$

$$y+1=\frac{\log(abcA)}{\log b^3}$$

$$z+1=\frac{\log(abcA)}{\log c^3}$$

$\therefore(x+1)(y+1)(z+1)=\frac{(\log abcA)^3}{\log a^3\log b^3\log c^3}$爲所求之極大值也。

5. 定理三　若$x+y=d$，則$\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}$在$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$時有極小值。

〔證〕因 $\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}$有極小值時，$\frac{m^2}{x}-\frac{m^2}{d}+\frac{n^2}{y}-\frac{n^2}{d}=$

$\frac{m^2(d-x)}{dx}+\frac{n^2(d-y)}{dy}=\frac{m^2y}{dx}+\frac{n^2x}{dy}$亦有極小值，

但 $\frac{m^2y}{dx}\cdot\frac{n^2x}{dy}=\frac{m^2n^2}{d^2}=$一常數，

從定理二知必 $\frac{m^2y}{dx}=\frac{n^2x}{dy}$ 時 $\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}$爲極小，

即 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ 時 $\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}$爲極小。

6. 問題　求$2\pi\left[r^2+R^2-\left(\frac{r^3}{x}+\frac{R^3}{d-x}\right)\right]$之極大值。

〔解〕 原式爲極大時 $\frac{r^3}{x}+\frac{R^3}{d-x}$ 必爲極小，故從定理三，知必在 $\frac{x}{r^{\frac{3}{2}}}=\frac{d-x}{R^{\frac{3}{2}}}$ 時有極小值，卽在 $x=\frac{dr^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}+R^{\frac{3}{2}}}$ 時原式有極大值。

7.定理四 若 $ax+by+cz=p$，則 $x^2+y^2+z^2$ 在 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 時爲極小。

〔證〕 因 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$$=(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$$

$$=p^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$$

$x^2+y^2+z^2$ 爲極小時 $(a^2+b^2+c^2)$ $(x^2+y^2+z^2)$ 亦必爲極小。但此式須在 $bx-ay=o$ $cy-bz=o$ 及 $az-cx=o$ 時方爲極小，卽 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 時 $x^2+y^2+z^2$ 爲極小。

8.定理五 若 $ax+by+cz=p$ 則 $ax=by=cz=\frac{p}{3}$ 時，xyz 爲極大。

〔證〕 $\because xyz=\frac{(ax)(by)(cz)}{abc}$

故 xyz 爲極大時 $(ax)(by)(cz)$ 亦爲極大，但 ax,by,cz 之和一定故其積以 $ax=by=cz=\frac{p}{3}$ 時爲極大，從定理一可知也。

9.定理六 若 xyz 一定，則 $lxy+myz+nzx$ 在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l}$ 時爲極小。

〔證〕 xyz 一定時 $x^2y^2z^2$ 亦爲一定，$(lxy)(myz)(nzx)$ 亦爲一定，故 $lxy+myz+nzx$ 在

$$lxy=myz=nzx \text{ 時有極小值。}$$

設 $(lxy)(myz)(nzx)=p^6$ 則

$$lxy=myz=nzx=p^2$$

故必 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l}$ 時 $lxy+myz+nzx$ 爲極小，

系xyz爲一定則$xy+yz+zx$在$x=y=z$時爲極小。

10.定理七　若$lxy+myz+rz,=p$則xyz在$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l}$爲極大。

〔證〕　$lxy+myz+nzx$爲一定時$(lxy)(myz)(nzx)$有極大值卽$x^2y^2z^2$有極大值，亦卽xyz有極大。但此時必

$$lxy=myz=nzx=\frac{p}{3} \tag{2}$$

化簡得　$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{l}$時$xyz$爲極大。

系若$xy+yz+zx$爲一定則xyz在$x=y=z$時有極大值。

二圓公切線之研究

李 修 睦

通常求圓之切線，皆從二重點下手，其法極善，但對初學者，其理稍深，若依平面幾何中切綫之定義，僅用一直線至一點之距離公式，以求切綫，其理至爲淺易，今卽從此出發，以研究二圓之公切綫。

預備定理1。一直綫至圓心之距離爲r，，此直綫卽爲該圓之切線。

預備定理2。直線 $ax+by=1$ 至(h,k)至點之距離爲

$$\frac{ah+bk-1}{\sqrt{a^2+b^2}}。$$

此二定理，極爲淺顯，證略。

二圓之公切綫，分外公切線及內公切線二類，玆分述之如下：

(Ⅰ)二圓之外公切線。

令二圓之方程式爲

$$C1: \qquad (x-h_1)^2+(y-k_1)^2=r^2_1 \qquad (1)$$

$$C2: \qquad (x-h_2)^2+(y-k_2)^2=r^2_2 \qquad (2)$$

任一直線

$$ax+by=1 \qquad (3)$$

至(h_1,k_1)之距離爲r_1，至(h_2,k_2)之距離爲r_2，卽爲C_1，C_2二圓之公切線：

直線(3)至(h_1,k_1)之距離爲

$$\frac{ah_1+bk_1-1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

至(h_2,k_2)之距離爲

$$\frac{ah_2+bk_2-1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

若直線(3)爲C_1,C_2二圓之公切線,必有

$$\frac{ah_1+bk_1-1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm r_1 \qquad (4.1)$$

$$\frac{ah_2+bk_2-1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm r_2 \qquad (4.2)$$

在上二式中,等號右端之正負號,可以任取,但因直綫(3)爲 C_1,C_2 二圓之外公切線,C_1,C_2二圓之圓心,必在直線(3)之同側,故上二式等號右端,應同取正號或同取負號,

$r_2\cdot(4.1)-r_1\cdot(4.2)$,得:

$$a(h_1r_2-h_2r_1)+b(k_1r_2-k_2r_1)+(r_1-r_2)=0 \qquad (5.1)$$

$(4.1)\cdot(4.2)$,得:

$$(ah_1-bk_1-1)(ah_2-bk_2-1)=r_1r_2(a^2+b^2) \qquad (5.2)$$

在上二式中,解出a,b,代入(3)式,卽得C_1,C_2二圓之外公切線。

從(5.1),解出b,得

$$b=-\frac{(r_1-r_2)+a(h_1r_2-h_2r_1)}{(k_1r_2-k_2r_1)}. \qquad (5.3)$$

故

$$ah_1+bk_1-1=\frac{ar_1(h_2k_1-h_1k_2)-r_1(k_1-k_2)}{(k_1r_2-k_2r_1)},$$

$$ah_2+bk_2-1=\frac{ar_2(h_2k_1-h_1k_2)-r_2(k_1-k_2)}{(k_1r_2-k_2r_1)},$$

$$a^2+b^2=\frac{(r_1-r_2)^2+2(r_1-r_2)(h_1r_2-h_2r_1)a+[(h_1r_2-h_2r_1)^2+(k_1r_2-k_2r_1)^2]a^2}{(k_1r_2-k_2r_1)^2}$$

代入(5.2),得

$$a^2[(k_1r_2-k_2r_1)^2+(h_1r_2-h_2r_1)^2-(h_2k_1-h_1k_2)^2]$$
$$+2a[(r_1-r_2)(h_1r_2-h_2r_1)+(k_1-k_2)(h_2k_1-h_1k_2)]$$
$$+[(r_1-r_2)^2-(k_1-k_2)^2]=0 \qquad (6)$$

此式乃對於a之二次方程式,其判別式爲

$$\triangle=(r_1-r_2)^2(h_1r_2-h_2r_1)^2+2(r_1-r_2)(k_1-k_2)(h_2k_1-h_1k_2)(h_1r_2-h_2r_1)$$
$$+(k_1-k_2)^2(h_2k_1-k_2h_1)^2-(r_1-r_2)^2(k_1r_2-k_2r_1)^2$$
$$-(r_1-r_2)^2(h_1r_2-h_2r_1)^2+(r_1-r_2)^2(h_2k_1-h_1k_2)^2$$
$$+(k_1-k_2)^2(k_1r_2-k_2r_1)^2+(k_1-k_2)^2(h_1r_2-h_2r_1)^2$$
$$-(k_1-k_2)^2(h_2k_1-h_1k_2)^2$$
$$=[(r_1-r_2)(h_2k_1-h_1k_2)+[(k_1-k_2)(h_1r_2-h_2r_1)]^2$$
$$-(k_1r_2-k_2r_1)[(r_1-r_2)^2-(k_1-k_2)^2]$$
$$=[h_1(k_1r_2-k_2r_1)-h_2(k_1r_2-k_2r_1)]^2$$
$$-(k_1r_2-k_2r_1)^2[(r_1-r_2)^2-(k_1-k_2)^2]$$
$$=(h_1-h_2)^2(k_1r_2-k_2r_1)^2$$
$$-(k_1r_2-k_2r_1)^2[(r_1-r_2)^2-(k_1-k_2)^2]$$
$$=(k_1r_2-k_2r_1)^2[(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1-r_2)^2]. \tag{7}$$

$$\therefore\quad a=\frac{-[(r_1-r_2)(h_1r_2-h_2r_1)+(k_1-k_2)(h_2k_1-h_1k_2)]}{(k_1r_2-k_2r_1)^2+(h_1r_2-h_2r_1)^2-(h_2k_1-h_1k_2)^2}$$
$$\pm\frac{(k_1r_2-k_2r_1)\sqrt{(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1-r_2)^2}}{(k_1r_2-k_2r_1)^2+(h_1r_2-h_2r_1)^2-(h_2k_1-h_1k_2)^2} \tag{8}$$

將a之二值，代入(5.3)，b亦應有二值，故解(5.1)及(5.2)，得有二解，此卽謂C_1，C_2二圓有二外公切綫也。故得

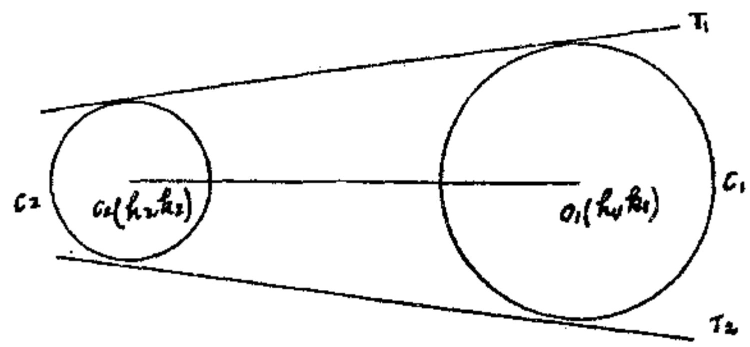
定理1. 二圓恆有二外公切線。

在(8)式中，若

$$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1-r_2)^2>0,$$

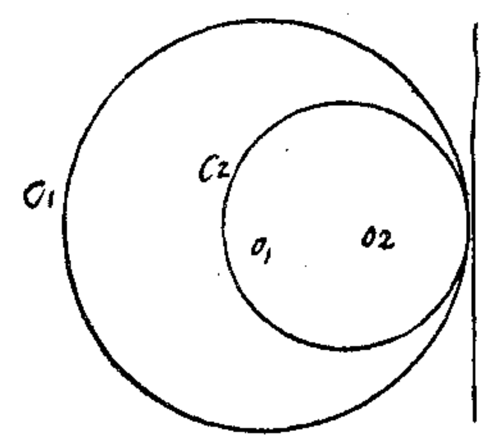
(6)式應有二相異實根，即(5.1)及(5.2)有二相異實解，故 C_1，C_2 二圓有二相異實外公切線。但在上式中，$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2$ 爲二圓圓心距離之平方，$(r_1-r_2)^2$爲二圓半徑之差之平方故得

定理2. 若二圓圓心之距離，大於二圓半徑之差，則此二圓，有二相異實外公切綫，



若　　$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1-r_2)^2=o$,

(6)式有一重根,故(5.1)及(5.2)有一二重解 C_1,C_2 圓之二外公切線合而爲一,故得



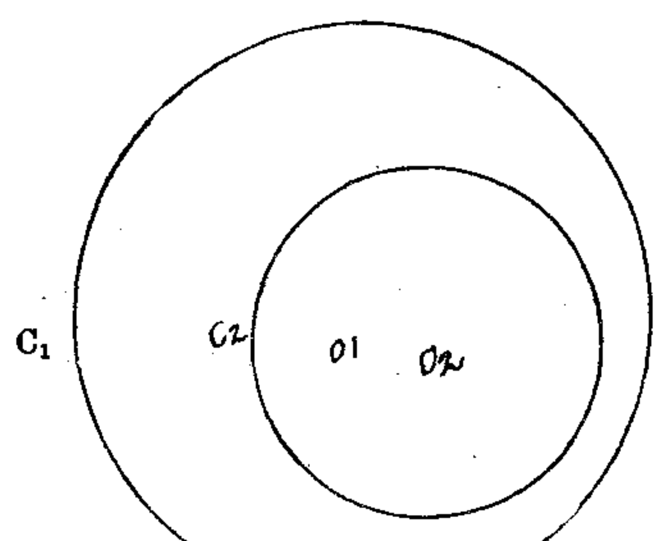
定理3. 若二圓圓心之距離,等於二圓半徑之差,則此二圓之二外公切綫合而爲一。

若

$$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1-r_2)^2<o,$$

(6)式之根爲二相配複數,故(5.1)及(5.2)無實解,即C_1,C_2二圓無外公切線也,故得

定理4. 若二圓圓心之距離,小於二圓半徑之差,則此二圓無外公切線。



Ⅱ.二圓之內公切線。

令二圓C_1,C_2及任一直綫之方程式爲

$$C_1: \quad (x-h_1)^2+(y-k_1)^2=r_1^2 \tag{9}$$

$$C_2: \quad (x-h_2)^2+(y-k_2)^2=r_2^2 \tag{10}$$

$$T: \quad ax+by=1 \tag{11}$$

依同理,若直線(11)爲C_1,C_2二圓圓之內公切線,必有

$$ah_1+bk_1-1=\pm r_1\sqrt{a^2+b^2} \tag{12.1}$$

$$ah_2+bk_2-1=\mp r_2\sqrt{a^2+b^2} \tag{12.2}$$

此處與(4.1),(4.2)二式所不同者,在等號右端,應取相反之號,因二圓心,在內公切線之異側也。

$r_2(12.1)+(12.2).r_1$,得:

$$a(h_1r_2+h_2r_1)+b(k_1r_2+k_2r_1)-(r_1+r_2)=o \tag{13}$$

$(12.1).(12.2)$,得:

$$(ah_1+bk_1-1)(ah_2+bk_2-1)=-r_1r_2(a^2+b^2) \tag{14}$$

由(13)式中,解出b,代入(14)式.得:

$$\begin{aligned}&a^2[(k_1r_2+k_2r_1)^2+(h_1r_2+h_2r_1)^2-(h_1k_2-h_2k_1)^2]\\&-2[(r_1+r_2)(h_1r_2+h_2r_1)+(k_1-k_2)(h_1k_2-h_2k_1)]a\\&+[(r_1+r_2)^2-(k_1-k_2)^2]=o\end{aligned} \tag{15}$$

此爲a之二次式,其判別式爲

$$\triangle=(k_1r_2+k_2r_1)^2[(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1+r_2)^2] \tag{16}$$

此式演算方法,與(7)式同,若在(7)式中,將r_2改號,卽得上式故得

$$\begin{aligned}a=&\frac{(r_1+r_2)(h_1r_2+h_2r_1)+(k_1-k_2)(h_1k_2-h_2k_1)}{(k_1r_2+k_2r_1)^2+(h_1r_2+h_2r_1)^2-(h_1k_2-h_2k_1)2}\\&\pm\frac{(k_1r_2+k_2r_1)\sqrt{(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1+r_2)^2}}{(k_1r_2+k_2r_1)^2+(h_1r_2+h_2r_1)^2-(h_1k_2-h_2k_1)}\end{aligned} \tag{17}$$

代入(13)式中,可求得b之二值,代入(11)式卽得C_1,C_2二圓之內公切線,故得:

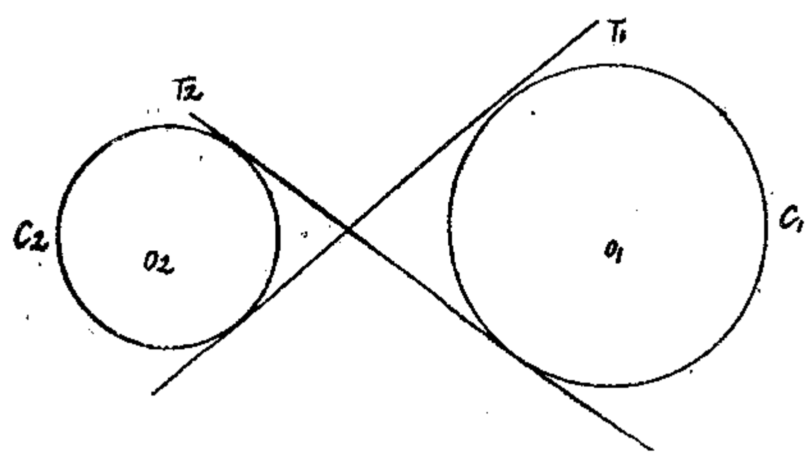
定理5. 二圓恆有二內公切線,

在(17)式中,若

$$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1+r_2)^2>o,$$

(15)式應有二相異實根,C_1, C_2 二圓應有二相異實內公切線,但$(h_1-h^2)^2-(k_1-k^2)^2$為二圓圓心距離之平方 (r_1+r^2)為二圓半徑之和,故得:

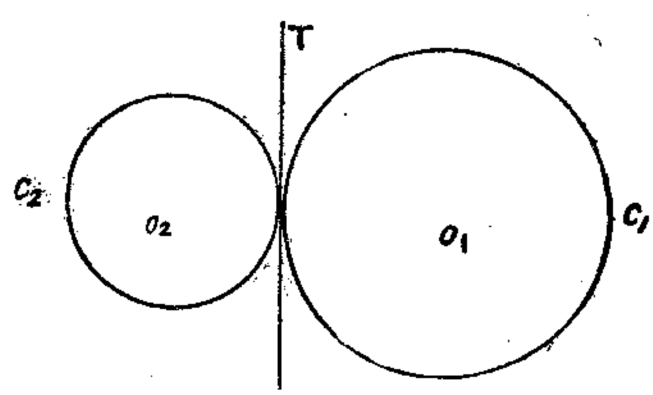
定理6. 若二圓圓心之距離大於二圓半徑之和,則此二圓有二相異實內公切線,



若

$$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1+r_2)^2=o,$$

則(15)式有一重根,卽 C_1, C_2 二圓之二內公切線,合而為一,故得



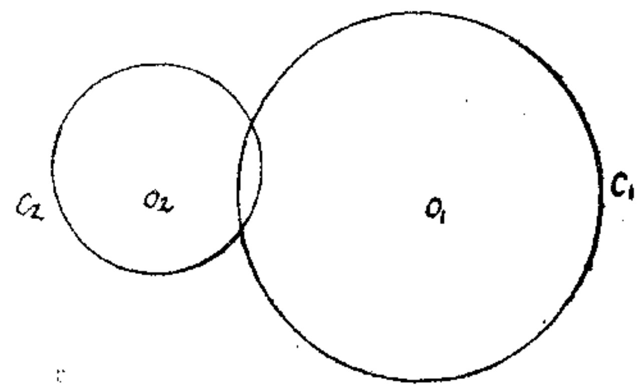
定理7. 若二圓圓心之距離,等於二圓半徑和,則此二圓,僅有一內公切綫,

若

$$(h_1-h_2)^2+(k_1-k_2)^2-(r_1+r_2)^2<o,$$

則(15)式無解,卽C_1, C_2二圓無內公切線,故得

定理8. 若二圓圓心之距離,小於二圓半徑之差,則此二圓無內公切線.



以上所言 僅論及二圓公切線，有無問題。在實際上，若已與二圓圓方程式，欲求此二圓之公切線，將圓心及圓半徑諸數值代入(5.1)，(5.2)二式中，解出a，b，再代入(3)式即得二圓之外公切線。若將圓心及圓半徑諸數值代入(13)，(14)二式中，將a，b解出再代入(11)式，卽得二圓之內公切線，

二十四年元旦後三日草於京市一中。

算學週遊記

——Helen ablot Merrill——

范寄萍譯

(一)數之整除性

不論什麼數，都可以用其他數來除，得商和餘數。假如餘數是零，我們便說那數可以整除這數。

我們不實際做除法運算，便可以知道一數能否被2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13等數整除。這種方法，所根據的原理是：一，假如二數都可以被某數整除，二，數和差亦可被那數整除。例如42,56都可被7整除，其和98，差14，顯然亦可被7整除。推廣起來，就是說，如a,b兩數都可被c整除，a+b和a−b亦可被c整除。

除數2　凡數末位可爲2整除者，該數必定可爲2整除。例如一切三位數可寫做1000a+10b+c。因爲前二項不論a,b數值爲何，必可被2整除。所以只要末位c可被2整除，這數自然可以被2整除。

除數3　一數各位數字之和可爲3整除者，該數必可爲3整除。

例如　四位數 1000a+100b+10c+d而a+b+c+d 可爲3整除，此數必可被3整除，佈式證明如下。

99a+99b+9c	可爲3整除
a + b + c + d	可爲3整除
1000a+100b+10c+d	其和當可爲3整除

722能被3整除否？不能。(7+2+2=11)

258能被3整除否？可以。(2+5+3=15)

根據這條法則，可以知道一數被3除所得的餘數，剛巧和該數數字和用3除所得

的餘數一様如722被3除，和7+2+2=11被3除所得的餘數是一様，不是一件很有趣味的事嗎？所以如果要問735869542被3除的餘數是多少？只要連續加各數字的和得 49,13,4。因爲4被3除1，所以原數被3除也就餘1。

除數4,8,16等 因爲100可被4整除，100的倍數，當亦可被4整除，所以只要一數末二位可被4整除。如57372末二位72可被4整除，這數自可被4整除。

同理，1000可被8整除，只要判定一數末三位能否被8整除，便可以判定該數能否被8整除。而且根據這種原理，可以判定2^n的整除性。

除數5或10 這種法則，和除數2相像，毋用再述，讀者當可領悟。

除數6,12 只要留意6,12的因數，便可獲得法則，亦不必多言。

除數9 一數各位數字之和可爲9整除者，該數必可爲9整除。這種原理和法則與除數3相像。例如8577數字和27可被9整除，這數可被9整除。而825的數字和15以9除餘6，便可以斷定825除以9一定餘6。

除數7,11,13。因爲這三數相乘積是1001，得着一種新穎法則，做試驗的準繩。現在先述特例173,299。因1001可被7整除，1001×173=173173當可被7整除。所以只要原數和這數的差可被7整除，便可判定原數可被7整除。佈式如下。

(1)	173173	可被7整除
(2)	173299	受判定的數
(3)	126	可被7整除

(1)，(3)皆可被7整除，其和(2)當可被7整除，又因129不能被11或13整除，當可判定原數不能被11或13整除。

由這個例題可以看到：要想試驗一個六位數能否被7,11,13整除，只要判定該數後三位數與前三位數的差能否被7,11,13整除，便得分曉。如果是五位數，或是四位數，判定後三位數與前二位數或前一位數的差即可。

例如85176，176−85=91故可被7,13整除，而不能被11整除。又如8151，151−8=143故可被11,13整除，而不能被7整除。

凡是六位以上的數，先從右方每三位數分一段，交錯加減而判定其整除性。如78,362,49·。先要計算

495−·62+78=？現在述一九位數的通式，來闡明這種法則。

如a爲首三位數，b爲次三位數，c爲末三位數則

$$N=1000000a+1000b+c$$

式中a至少在第七位，b在第六位，或在第五，第四位而c在末三位，佈式證明如下：

(1)	$1,000,000a+1000b+c$	受判定的數如
(2)	$a-b+c$	可被7，或11，或13整除

其差 (3) $999,999a+1001b$

因 $999,999=3^3\times7+11\times13\times37$,

$1001=7\times11\times13$

皆含有7，11，13因數，故(3)可爲7，11，13整除，原數的整除性不難明瞭。

除數11另一法則　一數的各位數字，順次用+，−符號交錯結合，如所得爲零，或11倍數，該數必可被11整除。例如7793，

因 $7-2+9-3=11$　故此數可被11整除。

四位數$1000a+100b+10c+d$，如$a-b+c-d$爲零或11倍數，二者相結合，消去d，其各項係數，讀者不難證明可被11整除，而明白這種法則的原故。

如n爲整數，2n便可以代表可爲2整除的數。$2n+1$或$2n-1$便代表不能被2整除的奇數。那麼一切正整數，分爲2n或$2n-1$兩類了！

同理3n代表可爲3整除的數，$3n-1$及$3n+1$代表不能被3整除的數.有時用$3n+1$及$3n+2$來替代$3n-1$及$3n+1$。再推廣起來，4n代表可爲4整除的數，$4n+1$，$4n+2$，$4n+3$。或$4n-1$，$4n+1$，$4n+2$　或$4n-2$，$4n-1$　$4n+1$來代表不能被4整除的

數。這種不同的形式，本來沒有什麼差別，通常總是用最小的數。如採用 $5n-2,5n-1,5n+1,5n+2$ 代替 $5n+1,5n+2,5n+3,5n+4$ 在計算方面要簡便得多。

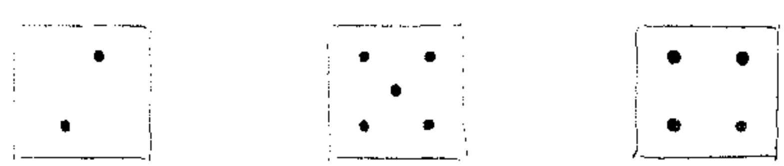
質數 凡數除本身及1外，不能被任何數整除者，謂之質數，否則為複數。

許多算學家，努力着要獲得一個公式來表示一切質數。其中一個公式是 $n^2+n=11$ $n=0,1,2,3\cdots$

這個公式的缺點是不能表示比11小的質數。而且 $n=11k$ 時便不是質數，$n=10,21,32\cdots$ 時亦不是質數。相彷彿的公式尚有 n^2+n+17

又有些人列出相差為2的連續質數，發現在一位數中有連續三數3,5,7。（若1包含在內，則為 1,3,5）。在兩位數中有（11,13）（17,19）兩對。位數愈多，這種質數愈少。在700和800中，900和1000中簡直地沒有了！

末後再敘述一個遊戲，來結束這篇。A 給 B 三粒骰子說：『任意排定一個次序，先寫正面的數，再寫背面的數。合成一六位數，除以 37，其商更除以 3 告訴我結果，我便可以知道骰子正面是什麼？』假如B排定的次序是



該數是 254,523

$254,523\div37=6879$

$6879\div3=2293$ B告訴A的數。

A猜得的步驟是：

$2293-7=2286$

$2286\div9=254$

這不是一件極容易而極難猜的遊戲嗎？

問 題

1. 731, 325, 1674, 43572。能為3整除？

2. 7643, 96464, 733136, 92592, 83754能爲4及8整除？

3. 比7小而能整除 913428,72524,9255是何數？

4. 比16小而能整除973822,373835 是何數？

5. 數8365548901至少可被二小于16之數整除,試求之。

6. 如二數數字相同而其排列次序相反,試證其差可爲9整除。例8367與7638。

7. 如b之數字爲偶數個,c之數字與之相同而其排列次序相反,試證b+c可爲11整除。

8. 如n爲任意整數,試證$n(n^2+1)$是偶數。

9. 取出比3大的質數,試表明可分爲兩類:

a.如加1,其加可爲6整除。例11,29,83。

b.如減1,其差可爲6整除。例13,43,61。

10. 如將一切質數書爲6n+1,或6n-1易證上題。

凡數不能爲6整除可寫成那五種不同形式呢？

其中有能分成因數嗎?按6n+1當n=4;6n+1=25卽非質數。但質數常可以6n+1,6n-1代表之。

11. 試證1,3,5;及3,5,7是僅有的三奇數的連續質數。

12. 言

13. 試證眞分數平方,立方,四次方根等仍是眞分數。

14. 如一偶數除以3餘2,試證該數之半除以3餘1。

15. 如一偶數除以3餘1,該數之半除以3餘多少呢？

16. 試證任意三連續數乘積可爲3整除,任意四連續數乘積可爲4整除。並推證任意n連續乘積可爲n整除。

17. 數1234不能爲11整除,如任意移動數字次序,可得多少數能爲11整除?按1243能爲11整除,尙有七數。

18. 數12345不能爲11整除,如任意移動數字次序,可得多少數能爲11整除?數

123456, 1234567, 12345678?

19. 如一數立方不是9的倍數,試證該數除以9餘1或8。

20. 如n不能爲7整除,試證n^3-1,n^3+1能爲7整除。例$2^3=8$,8-1可爲7整除。$3^3=27$,27+1可爲7整除。

21. 試證120之因數和(包含1,120除外)爲2×120

22. 試證672之因數和(包含1,672除外)爲2×672

23. 6的因數和是6,

$$6=1\times2\times3=1+2+3$$

希臘算學家稱爲完全數——諸因數乘積(包含1)等于諸因數之和。

試證28,496爲完全數

按次完全數爲128,更次卽爲一八位數。從這幾個數看起來,好像完全數的末尾都是6或28.但是沒有人能夠證明,而且完全數究竟有多少亦不能得悉。

自 由 講 座

記者先生：

我是一個初中行將畢業的學生，會考和升學兩重難關，轉眼就到，平素對於各門功課，雖不能說有多少把握，但多少還有些自信力，但對算學一課，最感困難。我并不是完全不懂，每對一段書逐步看去，大約尚能明白，然而全節或全章，命意所在總覺含糊，又三年內學過了算術，代數，幾何許多花樣，現在完全要考，實在覺得頭緒太多，無法記憶，不知先生有何妙法賜教，以解決上面兩點困難。 伍志誠敬上

來書所述二點，謹覆如下：

（一）算學一科所含符號及抽象觀念較多，故初學易感茫無頭緒之苦，算學中每一名詞或一公式，皆可視爲一複雜事件之縮紀，吾人必先熟嫻牢憶，務使一見此名詞或公式時，其所表之全部意義，立能湧現於吾人腦中，如此則對算學中之記述，方可明瞭其用意何在，其次研究算理如何證明，算式如何推出，首應逐步細看，察其何以能成立，遇有疑問時，應複習已知部份，求其理由之所在，此爲溫故知新之最良方法，各步已無疑義後，則可分全段爲數小部份，而究各部份之用意，第一部份所證者爲何，第二部份所得者爲何結論，最後可着眼各部份間，有如何之關聯，至此當可恍然於全節之輪廓，大可助吾人理解力，縱使各部份細節有遺忘之處，亦不難據理解推得之矣。

（二）算理頭緒紛亂，記憶似爲一難事，就記者經驗論，算學較之任何科目，需要記憶力處皆較少，因全部算學，只須記憶基本名詞與原理，其餘皆可由理解推出也。算理之所以難於記憶者，其故仍在其中符號及抽象觀念太多，不能望文生義而明。上述解決第一層困難之方法，鄙意同時對第二層困難，亦大有裨益，最重要者，算理決不宜強記，否則雖能背誦如流，亦無運用之能力，仍不能證解算題，故記者以爲第一應由理解以助記憶，第二應由練習以增運用之能力，次則所記者應以大體主要事

件爲限，細節勢難盡記，亦不必記，以其易於推知也，若强記之事項過多，必至顚倒錯亂。記者歷年爲各大中學閱看入學考卷，覺算學成績最劣者，卽在受試者之答解，大部似是而非，或大體無舛誤，而說明之方式，推演之步驟，每不中程式，其故卽在讀者未得要領也。

此外記者個人經驗所及，覺有一事，亦爲考生之通病，卽忽視基本部份，以爲淺近，不足措意，不知行遠自近，登高自卑，基礎不固，流弊頗巨。往往考生能演算複雜之代數題，而不知立一圓之完全定義！又嘗見某生用種種複雜之理，以證得對頂角必相等。若對基本部份能澈底明白之人，決不至有此失也。

此函已載首都學生半月刊，近因人時有讀者來函，所詢與此大體相同，故轉錄之以代答。　　（編者）

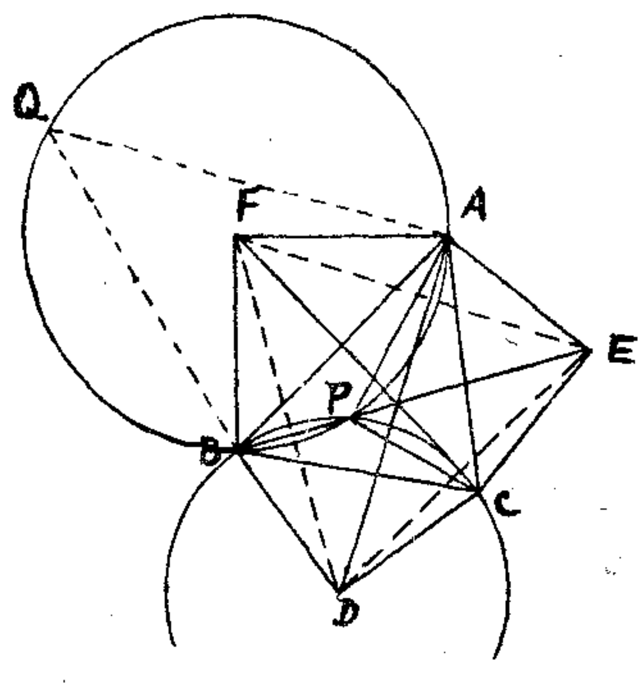
問　題　欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效。凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題。無論出題或解題，槪依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨地披露。數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登。來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰。至解題時所用圖形，務請用黑水墨精確作好，連帶寄下。

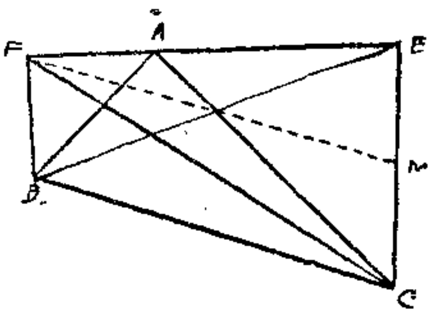
問題已解決者

31．1於△ABC各邊上，作直角等腰三角形BCD，CAE，ABF，求證AD，BE，CF三線相等且交於一點。

證（上海光華附中金品）



以D，F為圓心，BD，BF為半徑，各作圓交于B，P兩點。聯結BP及PE，則因$\angle AFB=\angle BDC=90^\circ$，$\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AFB=45^\circ$，$\therefore\ \angle APB=135^\circ$。同理，$\angle BPC=135^\circ$。$\therefore\ \angle APC=360^\circ-135^\circ-135^\circ=90^\circ$而A，P，C，E四點共圓。由是$\angle APE=\angle ACE=45^\circ$，$\angle APB+\angle APE=180^\circ$，因之B，P，E在一直線上，而BE乃為二圓之公共弦，故$BE\perp DF$。同理，$AD\perp EF$，$CF\perp DE$。卽AD，BE，CF為△DEF之三高，故交於一點。



但 AD,BE,CF 未必相等，觀下之特例可知。

設$\angle BAC=90^{0}$,$AC>AB$，則A,E,F在一直綫上。因$AC>AB$，易證$CE>BF$。在CE上取$EM=BF$，由是$\triangle BFE\equiv\triangle FME$，$BE=FM$。$\because CE>EM$，$\therefore CF>FM$卽$CF>BE$而$CF\neq BE$矣

（編者按此題在第一卷九期中已提出，但題文稍異，二卷二期中之解答，亦不甚完全。若如邊上所作三角形皆係等邊，則$AD=BE=CF$無誤，北平育英中學郭可詹君來稿中已言及之。今特將此題推廣之，列入提出問題中，幸讀者注意。）

31.2 $\triangle ABC$之各內分角線交其對邊于P,Q,R。試證PQR與ABC面積之比爲

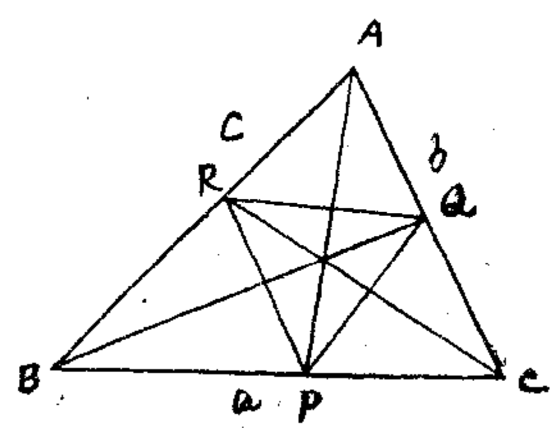
$$\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

內a,b,c各表BC,CA,AB之長。

證（上海光華附中金品）

由 $BP:PC=AB:AC=c:b,\cdots(1)$

及 $BP+PC=a\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$



得 $BP=\frac{ca}{b+c}$， $PC=\frac{ab}{b+c}$；

同理， $CQ=\frac{ab}{c+a}$， $QA=\frac{bc}{c+a}$；

$AR=\frac{bc}{a+b}$， $RB=\frac{ca}{a+b}$。

故 $\triangle ARQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{bc}{c+a}\sin A=\frac{bc\cdot S}{(a+b)(c+a)}$

內$S=\frac{1}{2}bc\sin A$爲$\triangle ABC$之面積。同理，

$$\triangle BPR=\frac{caS}{(a+b)(b+c)}，\triangle CPQ=\frac{abS}{(b+c)(c+a)}。$$

故 $\triangle PRQ=S-\frac{bcS}{(a+b)(c+a)}-\frac{caS}{(a+b)(b+c)}-\frac{abS}{(b+c)(c+a)}$

$$\frac{\triangle PRQ}{S}=1-\frac{bc}{(a+b)(c+a)}-\frac{ca}{(a+b)(b+c)}-\frac{ab}{(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

（此題解者尙有北平育英中學郭可詹君）

31.3 試求下列級數之和：

$$1.2{}_nC_0+2.3{}_nC_1+3.4{}_nC_2+\cdots\cdots+(n+1)(n+2){}_nC_n.$$

(注意)以下諸解中均以c_r代${}_nC_r$.

解一(南京匯文女子中學戴淑莊)

設S為所求之和，則

$$S=\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)C_r=\sum_{r=0}^{n}r^2c_r+3\sum_{r=0}^{n}rc_r+2\sum_{r=0}^{n}c_r.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{r=0}^{n}c_r=1+\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n}{1!}+1=(1+1)^n=2^n\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\sum_{r=0}^{n}rc_r=c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n$$

$$=n+2\frac{n(n-1)}{2!}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots\cdots+n$$

$$=n\left\{1+\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{1!}+1\right\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n.2^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

於(3)中以$n-1$代n，則有

$$n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}+\cdots\cdots+n-1$$
$$=(n-1)2^{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以n分別乘(3)及(4)得

$$n^2+\frac{n^2(n-1)}{1!}+\frac{n^2(n-1)(n-2)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n^2(n-1)}{1!}+n^2$$
$$=n^2\cdot2^{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1!}+\cdots\cdots+n(n-1)$$

$$=n(n-1)2^{n-2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

自(5)式減法(6)式,得

$$n^2\cdot 1+(n-1)^2\cdot\frac{n}{1!}+(n-2)^2\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots+1^2\cdot n=n(n+1)2^{n-2}.$$

即
$$\sum_{r=0}^{n} r^2c_r=1^2c_1+2^2c_2+\cdots\cdots+n^2\cdot c_n=n(n+1)2^{n-2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

將(2),(3),(7)各值代入(1),得

$$S=n(n+1)2^{n-2}+3n\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^n=2^{n-2}(n^2+7n+8).$$

解二(浙江省立甯波中學黃正乾)

$$S=\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)c_r=\sum_{r=0}^{n}r(r-1)c_r+4\sum_{r=0}^{n}rc_r+2\sum_{r=0}^{n}c_r$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{n(n-1)}{2!}+3\cdot 2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+4\cdot 3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$+\cdots\cdots+n(n-1)\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1}{n!}+4n\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^n$$

$$=n(n-1)\left[1+\frac{n-2}{1!}+\frac{(n-2)(n-3)}{2!}+\cdots\cdots+1\right]+(n+1)2^{n+1}$$

$$=n(n-1)2^{n-2}+(n+1)2^{n+1}=2^{n-2}(n^2+7n+8).$$

(首都胡維菁君解法同此題,不另錄)

解三(上海光華附中金品)

$$2(1-x)^{-3}=1.2+2.3x+3.4x^2+\cdots\cdots+(n+1)(n+2)x^n+\cdots\cdots,$$

$$(1+x)^n=cx^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots\cdots+c_n.$$

故所求級數爲上二式乘積中x^n之係數.此積可書爲

$$\frac{2(1+x)^n}{(1-x)^3}=\frac{2[2-(1-x)]^n}{(1-x)^3}$$

$$=\frac{2[2^n-c_12^{n-1}(1-x)+c_22^{n-2}(1-x)^2+\cdots\cdots]}{(1-x)^3}$$

$$=\frac{2^{n+1}}{(1-x)^3}-\frac{n\cdot 2^n}{(1-x)^2}+\frac{n(n-1)2^{n-1}}{1-x}+x\text{之}n-3\text{次多項式。}$$

由是知x^n之係數為 $2^n(n+1)(n+2)-n2^n(n+1)+n(n-1)2^{n-2}$

$=2^{n-2}(n^2+7n+8)$卽所求級數之和。

(金陵大學徐鍾沂君解法同此，不另錄)

解四(長沙楚怡小學徐正凡)

所求級數之和，顯然爲下二式乘積中x^0之係數：

$$S_1=2c_0+3c_1\frac{1}{x}+4c_2\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots+(n+2)C_n\frac{1}{x^n},$$

$$S_2=1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

但S_2爲$(1-x)^{-2}$之展開式，而S_1易證其爲$[2+(2+n)\frac{1}{x}](1+\frac{1}{x})^{n-1}$。今

$$S_1S_2=\frac{(1+x)^{n-1}[2x-(2+n)]}{x^n(1-x)^2}=\frac{2(1+x)^n}{x^n(1-x)^2}+\frac{n(1+x)^{n-1}}{x^n(1-x)^2}.$$

故求 $\frac{2(1+x)^n}{(1-x)^2}+\frac{n(1+x)^{n-1}}{(1-x)^2}$ 中x^n之係數，卽得所求之和爲

$2^{n-2}(n^2+7n+8)$，法同解三，不贅。

31.4 試解

$$x+y+z+t=5\cdots\cdots\cdots(1)\qquad x^3+y^3+z^3+t^3=5\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x^2+y^2+z^2+t^2=5\cdots\cdots\cdots(2)\qquad x^4+y^4+z^4+t^4=5\cdots\cdots\cdots(4)$$

解(首都胡維菁)

$$(x+y+z+t)^2-2(xy+xz+xt+yz+yt+zt)=x^2+y^2+z^2+t^2,$$

故 $$xy+xz+xt+yz+yt+zt=\tfrac{1}{2}(5^2-5)=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$x^3+y^3+z^3+t^3-3(yzt+ztx+txy+xyz)$$
$$=(x+y+z+t)\{x^2+y^2+z^2+t^2-(xy+xz+xt+yz+yt+zt)\}$$

故 $$yzt+ztx+txy+xyz=\tfrac{1}{3}[5-5\{5-10\}]=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$(x+y+z+t)\{(x^3+y^3+z^3+t^3)+(xyzt+ztx+txy+xyz)\}$$
$$=(x^4+y^4+z^4+t^4)+(x^2+y^2+z^2+t^2)(xy+xz+xt+yz+zt)$$

$+4xyzt$

$$5\{5+10\}=9+5\times10+4xyzt,\quad xyzt=4\cdots\cdots\cdots(7)$$

由(1),(5),(6),(7)諸式,可知x,y,z,t爲下列方程式之根

$$\lambda^4-5\lambda^3+10\lambda^2-10\lambda+4=0.$$

利用因數定理(Factor Theorem)可得λ之四值,卽

$$x=1,\quad y=2,\quad z=1+i,\quad t=1-i.$$

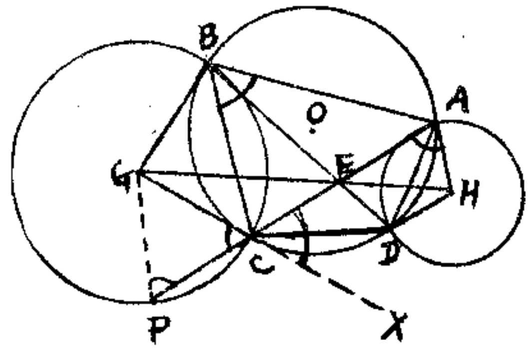
題中諸式均爲x,y,z,t之對稱式,故上之四根種種不同之排列,均爲本題之解,因之共有24組解答。

(本題解者尚有上海光華附中金品君,長沙楚怡小學徐正凡君)

31.5 過圓內接四邊形之各頂點作圓之切線 可得一圓之外切四邊形,則此二四邊形之四對角綫交於一點。

證(上海光華附中金品)

設ABCD爲圓內接四邊形,G,H爲外切四邊形之一雙對角頂。以G,H爲圓心,CG,DH各爲半徑作圓如圖所示。因



$\angle CAH=\angle ACX=\angle GCP=\angle GPC$,

∴AH‖GP,卽AH,GP爲一雙平行半徑;故其端之聯綫(AP卽AC)必過二圓之相似中心。同理BD亦必過相似中心;故AC,BD兩對角綫之交點E卽二圓之相似中心。但相似中心在聯心綫GH上,而GH爲外切四邊形之一對角線;同理可證外切四邊形之另一對角綫亦必過E點。

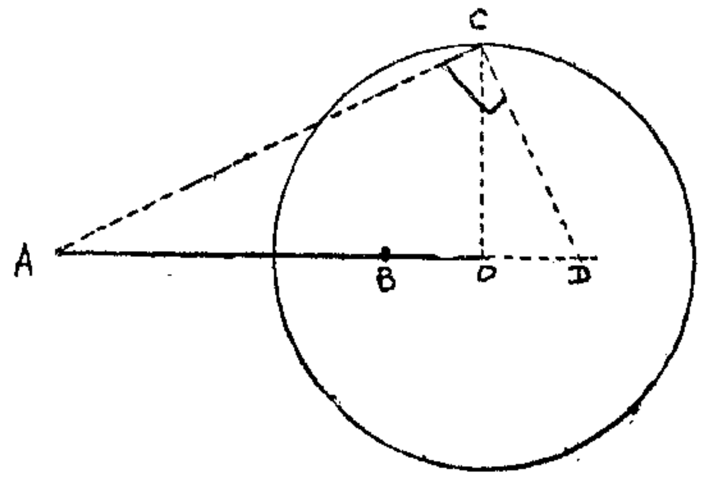
31.6 設有一圓O,其半徑爲r,A爲任意點,試於OA上求點B,使

$$OA\times OB=r^2$$

並證明之。

解(北平育英中學郭可詹)

作OA之垂直半徑OC，作CD⊥AC交AO之延長線于D. 在OA綫上取點B使DO=OB，則B為所求之點



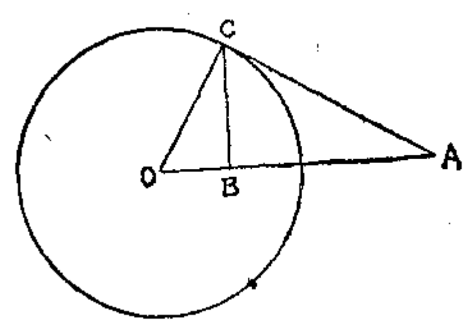
（證明）因△ACD為直角三角形，且OC⊥AD，

$$\overline{OC}^2 = DO\cdot OA,$$
$$= OB\cdot OA,$$
$$r^2 = OB\cdot OA.$$

（與此法相同者，有浙江省立甯波中學黃正乾君）

解二（福州高級中學林挺藩）

由A作圓之切線AC，自切點C作OA之垂綫，則垂足B卽所求之點。



（證明）聯結OC，則△OCA與△OBC相似。

因之

$$OA:OC=OC:OB$$

而 $$OA\times OB=OC^2=r^2.$$

（按此法當A在圓外時，最為方便，但A在圓內時不適用。）

31.7 依x之升冪展開下列級數：

$$e^{ax}\cos bx+e^{bx}\cos ax.$$

解（香港鐸聲書院何季隆）

$$e^{ax}\cos bx+e^{bx}\cos ax=e^{ax}\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^{bix}+e^{-bix}\right)+e^{bx}\cdot\tfrac{1}{2}\left(e^{aix}+e^{-aix}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[e^{(a+bi)x}+e^{(a-bi)x}+e^{(b+ai)x}+e^{(b-ai)x}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[e^{(a+bi)x}+e^{(a-bi)x}+e^{i(a-bi)x}+e^{-i(a+bi)x}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[1+(a+bi)x+(a+bi)^2\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+(a+bi)^r\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots\right.$$

$$+1+(a-bi)x+(a-bi)^2\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+(a-bi)^r\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots$$

$$+1+i(a-bi)x-(a-bi)^2\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+i^r(a-bi)^r\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots$$

$$+1-i(a+bi)x-(a+bi)^2\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+(-i)^r(a+bi)\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots\Big]$$

$$=2+(a+b)x+\cdots+\frac{1}{2}\frac{x^r}{r!}\Big[(a+bi)^r(1+\overline{-i}^r)+(a-bi)^r(1+i^r)\Big]+\cdots$$

$r=4n+2$ 時 i^r 及 $(-i)^r$ 均等於-1，故此展開式中無x^2,x^6,x^{10}，……等諸項，其前四項爲

$$2+(a+b)x+(a^3-3a^2b-3ab^2+b^3)\frac{x^3}{3!}+(a^4-6a^2b^2+b^4)\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

（本題解者尚有首都胡維菁君，係用直接乘法做者，結果同不另錄。）

提　出　之　問　題

35.1 已知拋物綫之準線及其焦點，用圓規及直尺作出此拋物線與同平面內所設一直線之交點（武昌郭煥庭提）。

35.2 於$\triangle ABC$之各邊上作底角爲30°之等腰三角形 BCE，CAF，ABG；求證$\triangle EFG$爲等邊三角形（前人提）

35.3 求證

$$\sqrt[3]{2+\frac{9\sqrt{3}}{10}}+\sqrt[3]{2-\frac{9\sqrt{3}}{10}}=2.$$

（前人提）

35.4 於$\triangle ABC$之各邊上作相似等腰三角形 BCE，CAF，ABG，求證AE，BF，CG交於一點D（編者提）。

35.5 證明公式

$$(2n+\tfrac{1}{2})\pi\pm\alpha \quad 與 \quad (n-\tfrac{1}{2})\pi+(-1)^n(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)$$

所表之角相同，并以圖說明之（長沙明德學校周德珪提）。

更 正

國立交通大學武孟羣教授來函……（前略）……近閱三卷三期，載有交大去年入學試題解答，其中一題（高等代數第7題a），殊覺意有未安，茲特述以商榷：—

原題爲求級數

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{1+4x}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之發斂。解答用以下之各不等式：

$$\frac{1}{1-x}<-\frac{1}{x},\quad \frac{1}{1+2x}<\frac{1}{2x},\quad \frac{1}{1-3x}<-\frac{1}{3x},\cdots\cdots,$$

然此等不等式顯非對任何x均爲眞實，爲a在o及1間，第一式卽不合。卽令此等諸式全眞實矣，然亦僅證明級數之和爲

$$<-\frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right],$$

然級數未嘗不可取負值，何以見其不向$-\infty$發散？

鄙意此題可以如下解之：命u_n爲第n項，則 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。是以若$S_{2n}$及$S_{2n+1}$爲2n項及2n＋1項之和。則

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=0,$$

因之若S_{2n}之極限存在，則S_{2n+1}之極限亦存在而相等。故可以僅研究S_{2n}之極限是否存在。今考級數

$$u=\frac{1}{(1-x)(1+2x)}+\frac{1}{(1-3x)(1+4x)}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(1-\overline{2n-1}x)(1+2nx)}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

此級數對於x之任何値（o及能使分母爲零之値當然除外）皆爲收斂（編者按此係因u_n之分母爲n之二次式，分子中無n，參看Fine大代數第950節），故

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\frac{1}{(1-\overline{2n-1}x)(1+2nx)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

存在。但

$$S_{2n}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{1+4x}+\cdots\cdots+\frac{1}{1-\overline{2n-1}x}+\frac{1}{1+2nx}$$

$$=\frac{2+x}{(1-x)(1+2x)}+\frac{2+x}{(1-3x)(1+4x)}+\cdots\cdots+\frac{2+x}{(1-\overline{2n-1}x)(1+2nx)}$$

$$=(2+x)\sum_{1}^{n}\frac{1}{(1-\overline{2n-1}x)(1+2nx)}=(2+x)u_n,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(2+x)u_n=(2+x)\lim_{n\to\infty}u_n$$

(1)亦存在。(後略)

(編者按此題出於Fine大代數上,此書問題詳解中以爲是 alternating series,顯然錯誤。三期所載解答,當x取負値時,尚可用,x取正値時,則有問題。玆承武先生指正,實深感謝!編者疎忽之處,尚祈讀者隨時加以指摘,俾得改正爲幸!)

國立武漢大學二十三年度入學試驗
文法學院算學試題解答：

初等代數(三題作二)

1. 甲與乙二人同作四百公尺之賽跑，若乙先出發二十五公尺，則甲尚贏十五秒鐘，若乙先出發三十六秒鐘，則甲輸四十公尺，問各人跑四百公尺所需之時間幾何？

〔解〕：一

設甲之速度爲每秒鐘 x 公尺

乙之速度爲每秒鐘 y 公尺

則按題意可得方程組

$$\begin{cases} \dfrac{400}{x}=\dfrac{400-25}{y}-15 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{400-40}{x}=\dfrac{400-36y}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dfrac{400}{x}=\dfrac{375}{y}-15 \\ \dfrac{360}{x}=\dfrac{400}{y}-36 \end{cases}$$

解之得

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{10}，\frac{1}{y}=\frac{9}{25}$$

$$x=\frac{10}{3}\text{公尺}$$

$$y=\frac{25}{9}\text{公尺}$$

故甲跑四百公尺所需之時間爲 120 秒鐘而乙跑則需 144 秒鐘。

2. 某人以銀一千三百元，分存甲乙兩銀行，經過一年，自兩銀行所得之利息相等，若以存甲銀行之數改儲乙銀行，則可得年利三十六元，又若以存乙銀行之數改儲甲銀行，則可得年利四十九元，問兩銀行所存之銀數及利率各若干？

〔解〕：一

設先以 x 元存入甲銀行而以 (1300—x) 元存入乙銀行，又設甲銀行之年利率爲 y %而乙銀行之年利率爲 z %。則按題意可得下之聯立方程組：

$$\begin{cases} xy=(1300-x)z \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{xz}{100}=36 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \dfrac{(1300-x)y}{100}=49 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

整理之得

$$\begin{cases} xy=1300y-xy \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ xz=3600 \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \\ 1300y-xy=4900 \cdots\cdots\cdots\cdots(6) \end{cases}$$

以 y 遍乘(4)式，z 遍乘(6)式而加之得

$$xy^2=4900z \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

由(5)及(7)可得

$$\frac{y^2}{z}=\frac{49z}{36}$$

$$y=\frac{7}{8}z \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

以此值代入(4)式得

$$\frac{7}{6}xz=1300z-xz$$

卽　$7x=7800-6x$

$x=600$元

$z=6$

$y=7$

故甲銀行內曾存入600元其年利息爲7%而乙銀行內曾存入700元其年利率爲6%。

3. 設有數以19除之餘6，以17除之餘12問最小之正整數爲何？

〔解〕：—

設該數爲x，則按題可得

$$x=19m+6=17n+12,$$

其中m，n均爲正整數。因而

$$n=m+\frac{2m-6}{17}$$

適合此式之m最小值爲3。故知所求之最小數爲63。

平面幾何(二題作一)

1. 過二定點A，B作一圓與一已知圓0相切，問其一般之作法爲何？

〔解〕：—

過A，B兩點任作一圓與圓0交於P，Q兩點。聯PQ與AB之聯線交於S。自S作0圓之切線ST而得切點T。則過A，B，T三點之圓卽爲所求者。自S至圓0旣可作兩切線故此題有兩解於特例中如A，B兩點分居於圓0之內外，則此題爲不可能。

2. n邊形之對角線有若干？

〔解〕：—

n邊形之對角線會於一頂點者有n－3個，而其總數爲${}_nC_2-n=\frac{1}{2}n(n-3)$

平面三角(二題作一)

1. 試證$\sin x\sin y=\sin^2\frac{x+y}{2}-\sin^2\frac{x-y}{2}$

〔證〕:—

$$\sin x\ \sin y=\left[\frac{\sin x+\sin y}{2}\right]^2-\left[\frac{\sin x-\sin y}{2}\right]^2$$

$$=\sin^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}-\sin^2\frac{x-y}{2}\cos^2\frac{x+y}{2}$$

$$=\sin^2\frac{x+y}{2}-\sin^2\frac{x-y}{2}$$

2. 試解次之方程式:

〔解〕:—

$$6\cot^2x=1+4\cos^2x$$

$$6\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=1+4\cos^2x$$

即 $$4\cos^4x+3\cos^2x-1=0.$$

$$\cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\text{或}2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

即 $$x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

國立武漢大學二十三年度入學試驗

理工學院算學試題解答

高等代數(二題作一)

1. 當複素數 $\alpha+\beta i$ 爲 $x^3+px+q=0$ 之根時,則 2α 爲 $x^3+px-q=0$ 之根。但 p q 皆爲實數求證。

[證]:—

$\alpha+\beta i$ 既爲 $x^3+px+q=0$ 之根,故有

$$(\alpha+\beta i)^3+p(\alpha+\beta i)+q\equiv0$$

即
$$(\alpha^3+p\alpha-3\alpha\beta^2+q)+(3\alpha^2\beta-\beta^3+p\beta)i=0$$

$$\begin{cases}\alpha^3+p\alpha-3\alpha\beta^2+q=0\\3\alpha^2\beta-\beta^3+p\beta=0\end{cases}$$

但 $\beta\neq0$,故

$$\begin{cases}\alpha^3+p\alpha-3\alpha\beta^2+q=0\\\beta^2=3\alpha^2+p\end{cases}$$

消去 β^2 即得

$$8\alpha^3+2p\alpha-q=0$$

故 2α 爲 $x^3+px-q=0$ 之根

2. 試證

$$\begin{vmatrix}o & c & b & l\\-c & o & a & m\\-b & -a & o & n\\-l & -m & -n & o\end{vmatrix}\equiv(al-bm+cn)^2$$

〔證〕：—

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & l \\ -c & 0 & a & m \\ -b & -a & 0 & n \\ -l & -m & -n & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{a}(al-bm+cn)\begin{vmatrix} -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \\ -l & -m & -n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2}(al-bm+cn)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ al-bm+cn & -m & -n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2}(al-bm+cn)^2\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (al-bm+cn)^2$$

平面及立體幾何(二題作一)

1. 求自定圓周上一點K，引直交二弦，令一弦爲他弦之二倍。

〔解〕：—

設所求兩弦K B，KA之長爲2x及x而定圓直徑之長爲r。則由下式

$$5x^2 = r^2$$

卽可知 $x = \frac{r}{\sqrt{5}}$

此x旣爲可求，則KA，KB當立卽可得。

2. 設平面p外有二定點A，B。今於平面p上求點M，令∠AMB=90°。問點M之軌跡爲何？

〔解〕：—

以AB聯線爲直徑而作球S．此球S與平面p之割痕卽爲所求之軌跡，普通S與p之交痕爲一圓或一點或竟不交，故所求之軌跡爲一圓，一點或竟無有。

平面三角（二題作一）

1.　試解次之方程式：

$$\tan^{-1}\frac{1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{x+2}+\tan^{-1}\frac{1}{x+3}=\frac{\pi}{4}$$

〔解〕：—

$$\because\quad \tan\left[\tan^{-1}\frac{1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{x+2}+\tan^{-1}\frac{1}{x+3}\right]$$

$$=\frac{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}}{1-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}}$$

$$\frac{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}}$$

$$\therefore\ \frac{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}}{1-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+3}}=1$$

化簡之得

$$x^4-4x^3-16x^2-9x+20=0$$

解此方程式卽得所求之根。

2.　在任意三角形ABC內，試證

$$\frac{\sin(A-B)}{ab}+\frac{\sin(B-C)}{bc}+\frac{\sin(C-A)}{ca}=0$$

但a，b，c爲A，B，C三角各個之相對邊

〔解〕：—

$$\frac{\sin(A-B)}{ab}+\frac{\sin(B-C)}{bc}+\frac{\sin(C-A)}{ca}$$

$$=\frac{\sin A}{a}\left[\frac{\cos B}{b}-\frac{\cos C}{c}\right]+\frac{\sin B}{b}\left[\frac{\cos C}{c}-\frac{\cos A}{a}\right]$$

$$+\frac{\text{SniC}}{c}\left[\frac{\cos A}{a}-\frac{\cos B}{b}\right]$$

$$=0$$

因　$\frac{\text{SinA}}{a}=\frac{\text{SinB}}{b}=\frac{\text{SinC}}{c}$　也

解析幾何 (二題作一)

1. 假設雙曲線有一雙相等共軛直徑。求證其爲等邊雙曲線。

〔解〕：一

設此雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots(1)$$

則其共軛雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\cdots\cdots(2)$$

若　$y=x_1x\cdots\cdots(3)$

$y=x_2x\cdots\cdots(4)$

爲(1)之兩共軛直徑，且(3)與(1)之一交點爲A (x_1,y_1)而(4)與(2)之一交點爲B (x_2,y_2)。則(3)及(4)可各爲

$$\frac{x}{x_1}-\frac{y}{y_1}=0$$

$$\frac{x}{x_2}-\frac{y}{y_2}=0$$

此二直徑既爲共軛者，應有

$$\frac{x_1x_2}{a^2}-\frac{y_1y_2}{b^2}=0\cdots\cdots(5)$$

卽　$\frac{x_1{}^2x_2{}^2}{a^4}=\frac{y_1{}^2y_2{}^2}{b^4}$

但A居於(1)，B居於(2)故有

$$\frac{x_1^2}{a^2}\left(\frac{y_2^2}{b^2}-1\right)=\frac{y_2^2}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right)$$

即 $$\frac{x_1^2}{a^2}=\frac{y_2^2}{b^2}$$

∴ $$\frac{y_2}{b}=\pm\frac{x_1}{a} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

又由(5)可得

$$\frac{x_2}{a}=\pm\frac{y_1}{b} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

故 $$\begin{aligned}0A^2-0B^2&=x^{12}+y_1^2-x_2^2-y_2^2\\&=x_1^2+y_1^2-\frac{a^2}{b^2}y_1^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2\\&=(a^2-b^2)\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)\\&=a^2-b^2\end{aligned}$$

因而如有OB=OA，則必有a=b。質言之即(1)爲有一雙相等共軛直徑，則(1)應爲等邊雙曲線。

2. 求直線$x+2y-13=0$對於二次曲線$3x^2+8y^2-26x-76y+231=0$之極。

〔解〕:—

設所求之極爲$(x_1,y_1,)$則方程式

$$x+2y-13=0$$

應與 $$(3x_1-13)x+(8y_1-38)y-13x_1-38y_1+231=0$$

表同一直線。故有

$$\frac{3x_1-13}{1}=\frac{8y_1-38}{2}=\frac{-13x_1-38y_1+231}{-13}$$

解之即得

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=3\end{cases}$$

故所求之極爲(2,3) 〔瑤〕