



3
742140

工學小叢書

材料強度學

下 册

陸志鴻 著



商務印書館發行

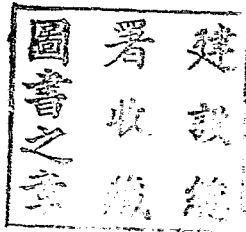
MG
TB301
:
:2

工學小叢書

材 料 強 度 學

下 册

陸 志 鴻 著



商 務 印 書 館 發 行

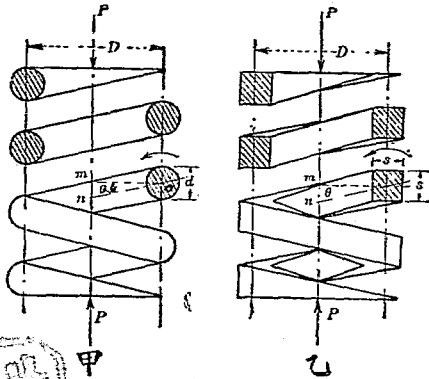


3 1773 7530 4

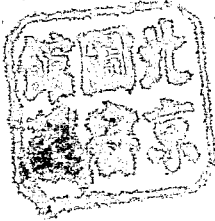
第七章

螺旋彈條

52. 螺旋彈條。彈條有種種形式,其一種之疊板彈條已述於第四章。此式中板受彎曲作用。但本章之彈條,用圓棒,方棒等捲成螺旋形,稱為螺旋彈條(helical spring)。此棒受扭轉作用者也。第95圖示螺旋彈條之一部分,甲為圓形斷面,乙為正方形斷面。



第 95 圖





此彈條上加外力 P ，而拉伸或壓縮時，生伸長或縮短。今設彈條鋼棒之任意斷面，由外力而受扭轉能率。其值 T 為外力與彈條平均半徑之乘積。即

$$T = P \cdot \frac{D}{2}$$

圖示 Om 線扭轉後至 On 位置，角 mOn 即扭角。設為 θ ，則某斷面扭轉 θ 角時， m 移至 n ，因之彈條有 mn 之伸長或短縮。但 θ 甚小，故 mn 可視為圓弧長，

$$mn = Om \times \theta = \frac{D}{2} \theta$$

此即每捲沿彈條中心軸線上長度之變化。由扭角與扭轉能率之關係公式，則圓形斷面棒時，

$$\theta = \frac{32Tl}{\pi d^4 N} \dots\dots\dots(92)$$

正方形斷面時，

$$\theta = \frac{7.2Tl}{s^4 N} \dots\dots\dots(92a)$$

設 mn 以 δ_0 表之，則

圓形斷面, $\delta_0 = \frac{D}{2}\theta = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{Tl}{Nd^4}$

正方形斷面, $\delta_0 = \frac{D}{2}\theta = 7.2 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{Tl}{Ns^4}$

但 $T = \frac{P \cdot D}{2}$, l 為每捲之長, 故為 πD . 因之

圓形斷面, $\delta_0 = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{PD}{2Nd^4} \cdot \pi D = \frac{8PD^3}{Nd^4}$

正方形斷面, $\delta_0 = \frac{7.2D}{2} \cdot \frac{PD}{2Ns^4} \cdot \pi D = \frac{5.6PD^3}{Ns^4}$

δ_0 為每捲彈條之歪, 設捲數 n 之彈條全體歪為 δ , 則

$$\delta = n\delta_0$$

故 圓形斷面, $\delta = \frac{8nPD^3}{Nd^4} \dots\dots\dots(93)$

正方形斷面, $\delta = \frac{5.6nPD^3}{Ns^4} \dots\dots\dots(93a)$

求最大值內力之公式與軸同樣. 即

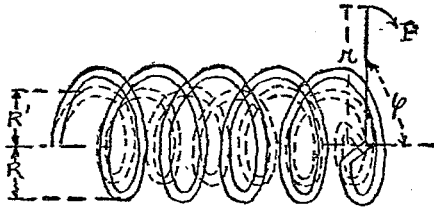
圓形斷面, $T = P \cdot \frac{D}{2} = \frac{\pi}{16} d^3 p_s$

或 $P = \frac{\pi d^3 p_s}{8D}$, $p_s = \frac{8PD}{\pi d^3} \dots\dots\dots(94)$

正方形斷面, $T = P \cdot \frac{D}{2} = 0.208s^3 p_s$

或 $P = \frac{0.416s^3 p_s}{D}, p_s = \frac{2.4PD}{s^3} \dots \dots (94a)$

以上為彈條軸線方向上加拉力或壓力時之公式。若固定彈條一端,他端加偶力扭轉時,則彈條上棒之各斷面,有彎曲能率之作用,其方向因偶力方向而定。例如第96圖上所示之偶力方向時,則將彈條各捲輪彎成小直徑,而增



第 96 圖

其捲數。今彎曲能率(即偶力能率)設為 M , 各捲輪平均半徑設自 R 減為 R' , 捲數自 n 增為 n' 。全長 l 不變, 故

$$l = 2\pi nR = 2\pi n'R'$$

彎曲能率與曲率變化為比例(第四章參照),
故

$$M = EI \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) = \frac{2\pi EI(n' - n)}{l}$$

或
$$n' - n = \frac{Ml}{2\pi EI}$$

設全體扭角為 φ , 則

$$\varphi = 2\pi(n' - n) = \frac{Ml}{EI} \text{ (radian)}$$

因
$$l = n\pi D,$$

$$\therefore \varphi = \frac{n\pi DM}{EI} \text{ (radian)}$$

圓形斷面時,
$$I = \frac{\pi}{64} d^4,$$

$$\therefore \varphi = \frac{64nDM}{Ed^4} \dots\dots\dots(95)$$

正方形斷面時,
$$I = \frac{s^4}{12},$$

$$\therefore \varphi = \frac{12\pi nDM}{Es^4} \dots\dots\dots(95a)$$

內力計算可由彎曲能率與斷面係數求之。

例 1. 直徑 $\frac{3}{8}$ 吋圓鋼棒, 捲成平均直徑 5 吋之螺旋彈條, 以 40 磅之力拉時, 使伸長略為 3 吋. 求捲數幾何. 但鋼之橫彈性係數為 12,000,000 磅/平方吋.

由圓棒時公式

$$\delta = \frac{8nPD^3}{Nd^4}, \quad \text{或} \quad n = \frac{8Nd^4}{8PD^3}$$

$$\therefore n = \frac{3 \times 12,000,000 \times (\frac{3}{8})^4}{8 \times 40 \times 5^3} = 17.8 \text{ 約 } 18 \text{ 捲.}$$

例 2. 前題彈條上鋼棒之最大值內力幾何?

由公式, 圓棒時

$$p_s = \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8 \times 40 \times 5}{3.14 \times (\frac{3}{8})^3} = 9,660 \text{ 磅/平方吋}$$

例 3. 每邊長 $\frac{1}{2}$ 吋之正方形斷面棒, 造成螺旋彈條, 加 200 磅荷重時, 使最大值內力不超過 60,000 磅/平方吋. 求捲輪之平均直徑.

對於正方形斷面, 由公式

$$p_s = \frac{2.4PD}{s^3} \quad \text{或} \quad D = \frac{p_s s^3}{2.4P}$$

$$\text{故 } D = \frac{60,000 \times (\frac{1}{4})^3}{2.4 \times 200} = 1.95 \text{ 吋 約 } 1\frac{15}{16} \text{ 吋}$$

例 4. 前題彈條捲數若為 12 吋, 生最大值內力之際, 須有若干縮短? 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

由公式

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{5.6nPD^3}{Ns^4} = \frac{5.6 \times 12 \times 200 \times 1.95^3}{12,000,000 \times (\frac{1}{4})^4} \\ &= 2.125 \text{ 吋} = 2\frac{1}{8} \text{ 吋} \end{aligned}$$

問 題

1. 直徑 $\frac{1}{4}$ 吋之圓形斷面鋼棒, 作成平均直徑 4 吋之螺旋彈條, 捲數為 10. 加以 20 磅之力而拉伸時, 伸長幾吋? 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

2. $\frac{1}{2}$ 吋直徑之圓形斷面鋼棒, 作成平均直徑 10 吋, 捲數 10 捲之螺旋彈條, 加以 40 磅荷重時, 求壓縮及最大值內力. 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

3 今不壓縮前記彈條而以 125 磅吋能率之

偶力扭轉時,求最大彎曲內力及自由端之扭角.
但 $E=30,000,000$ 磅/平方吋.

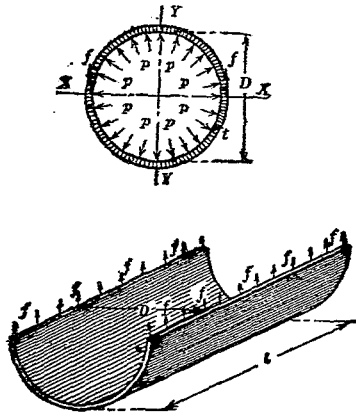
4. 可容最大內力爲 $50,000$ 磅/平方吋,每邊長 $\frac{1}{2}$ 吋之正方形斷面鋼棒,作成平均直徑 2 吋,捲數 10 之螺旋彈條. 求其可支持最大荷重與其縮短之值. 但 $N=12,000,000$ 磅/平方吋.

第八章

圓筒及管

53. 壁之厚與內力之分布. 汽鍋之胴(drum), 蒸汽機關之汽筒, 蒸汽管等或水壓機械之圓筒, 送水管及其他藏容有壓力之液體或氣體之圓筒中壓力平均分布於各部分, 與壁面成直角. 其結果生擴大圓筒之作用, 而圓筒材料內部, 沿其周圍生拉內力. 此曰周圍張力 (hoop tension or circumferential tension). 此周圍張力之強, 自圓筒內面至外面, 各半徑之圓周上, 其值各異. 內面最大而漸次減小, 至外面為最小. 任意半徑之周圍上, 周圍張力之強之計算法較複雜. 然圓筒壁厚對於內徑為小時, 則周圍張力之差異甚小, 而可視為均一強度. 因之薄圓筒之強度計算法較簡單.

54. 薄圓筒受內壓時之強度。薄圓筒上，壁中周圍張力可視為均一。今圓筒長度相當大時，縱方向內力可視為均一。取圓筒一部分長 l 部考察之。第 97 圖上以含中心線之平面 XX ，



第 97 圖

分圓筒為上下二部。上半面作用壓力之全量與下半面作用壓力之全量相等，而方向相反，以保持平衡。但若僅取下半面論之，則與下半面作用壓力總量相平衡之力，為斷面 XX 上向上作用之周圍張力 f 之全量也。

壓力均垂直於壁面。下半面上作用之向下力全量，為各壓力之向下分力而求其和者也。設壓力強為 p 磅/平方吋，圓筒內徑為 D 吋，則向下力全量為 pDl 磅。今設圓筒長 l 吋，管壁厚 t 吋，則周圍張力作用之面積為 $2tl$ 平方吋。故張力全量為 $f \cdot 2tl$ 磅。此二力相平衡時，

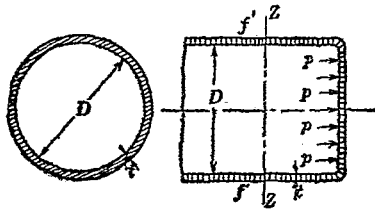
$$pDl = 2ftl, \text{ 或 } pD = 2ft.$$

即

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{pD}{2f} \\ f = \frac{pD}{2t} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (96)$$

以上所論者，圓筒對於含中心軸線平面，沿縱方向而破壞之作用也。其他若圓筒兩端閉塞時，則同一之內壓力沿軸線方向作用於兩端面，而與之抵抗之拉內力生於筒壁橫斷面上。前述之周圍張力垂直於縱斷面，而此處所述之拉內力垂直於橫斷面。

第 98 圖為有端面圓筒之一部分縱斷面。作用於端面上壓力全量與筒壁橫斷面圓環上作



第 98 圖

用之內力全量相平衡。今設 p 磅/平方吋爲內壓力之強, D 吋爲圓筒內徑, t 吋爲筒壁之厚, f' 磅/平方吋爲筒壁材料中拉內力。則端面上內壓力全量爲 $\frac{\pi}{4} D^2 p$ 磅, 而管壁橫斷面上拉內力全量略爲 $\pi D t f'$ (精確言之, 爲 $\pi(D+t)t f'$), 故平衡條件爲

$$\frac{\pi}{4} D^2 p = \pi D t f'$$

或

$$pD = 4t f'$$

故

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{4f'} \\ f' &= \frac{pD}{4t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (97)$$

與上之縱斷面上內力之公式比較之, 則 $p, D,$

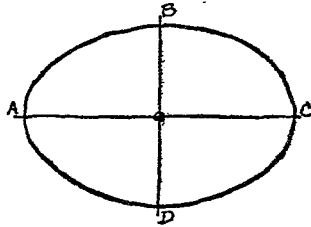
t 爲同一，故

$$f = \frac{pD}{2t} = 2f'$$

即均一內壓力作用之圓筒壁，其縱斷面上拉內力爲橫斷面上拉內力之二倍。即圓筒之橫斷面有縱斷面上二倍之強度。故受內壓力之圓筒若破壞時，必沿縱斷面而破裂。計算圓筒強度，亦須以縱斷面上內力爲主眼也。

橢圓形斷面之薄圓筒(如第99圖)，則周邊上周圍內力各處不同。且受內壓力時，橢圓形欲變爲圓形。最小曲率之 B, D 及最大曲率之 A, C 有反方向之彎曲能率之作用。周圍張力之求法與上相同，即 A, C 處爲 $\frac{p \times AC}{2t}$ ，而 B, D 處爲 $\frac{p \times BD}{2t}$ 。其縱斷面上拉內力，則

$$f' = \frac{p \times (\text{管端內面積})}{t \times (\text{管周})}$$



第 99 圖

例 1. 送 1,350 磅/平方吋之壓力水, 用內徑 $\frac{3}{4}$ 吋銅管. 問厚度如何? 但可容內力為 950 磅/平方吋.

$$\text{由公式 } t = \frac{pD}{2f} = \frac{1,350 \times \frac{3}{4}}{2 \times 950} = 0.533 \text{ 吋約 } \frac{17}{32} \text{ 吋}$$

例 2. 設接縫強度為 $\frac{1}{2}$, 以可容內力 10,000 磅/平方吋之銅板造成內徑 8 呎 4 吋, 板厚 $1\frac{1}{4}$ 吋之汽鍋胴. 問可耐蒸汽壓力若干?

內徑改為吋, 則 $D = 8 \text{ 呎 } 4 \text{ 吋} = 100 \text{ 吋}$.

$$f = 10,000 \times \frac{1}{2} = 5,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$\therefore p = \frac{2tf}{D} = \frac{2 \times 5,000 \times 1.25}{100} = 125 \text{ 磅/平方吋}$$

例 3. 內徑 10 吋壁厚 $\frac{1}{4}$ 吋之鑄鐵管, 通以 50 磅/平方吋壓力之蒸汽, 問所生拉內力幾何?

$$f = \frac{pD}{2t} = \frac{50 \times 10}{2 \times \frac{1}{4}} = 1,000 \text{ 磅/平方吋}$$

55. 受內壓力之薄球面殼. 球面殼 (spherical shell) 受內壓力時, 其殼壁內力可與圓筒壁時同樣計算. 實際上鮮純粹之內壓球形容器, 而多用球面之一部者. 例如汽鍋胴之碟形端板是也. 此時雖不可直接應用球形計算式, 但不乏其例.

今以含中心一平面, 分球為兩部分, 則半球內面全壓力之切斷平面上分力, 必與切斷面圓環上拉內力全量相平衡. 設內壓力強為 p 磅/平方吋, 球內徑為 D 吋, 殼壁厚為 t 吋, 拉內力為 f 磅/平方吋, 則

$$\frac{\pi}{4} D^2 p = \pi D t f$$

或

$$pD = 4ft$$

故

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{4f} \\ f &= \frac{pD}{4t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (98)$$

56. 有接縫圓筒或球面殼之強度。上述之圓筒或球面殼均無接縫 (seams)。然實際汽鍋胴或板製筒等有縱方向及橫方向之接縫。故不能直接應用上之無接縫時之公式。接縫普通用鉚釘 (rivet)，其強度因釘之大小，數，及配列法而異，但必較無接縫者為弱。有鉚釘部強度對於無接縫時強度之比，曰鉚釘之効率 (Efficiency of riveted joint)，必小於 1。設効率為 η ，則前記公式可如次應用之。

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{2f\eta} \\ f &= \frac{pD}{2t\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (96a)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{pD}{4f\eta} \\ f &= \frac{pD}{4t\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (97a, 98a)$$

57. 受外壓之圓筒. 圓筒受外壓時,筒壁厚者無凹入之虞,其計算法與受內壓時相同,但壁上非生拉內力,而生壓內力. 若筒壁薄者,則備有堅固兩端而圓筒長較小者,可防其變形,可由上述內壓力時薄圓筒之公式以計算之. 即設 p 磅/平方吋為均一作用之外壓力, D 吋為圓筒平均直徑, t 吋為其厚, f 磅/平方吋為縱斷面上壓內力,則

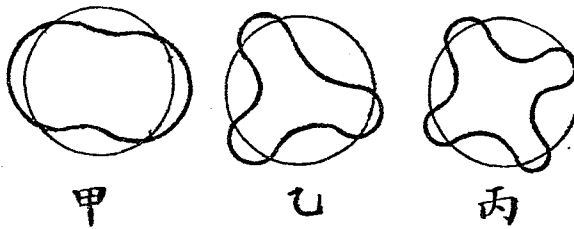
$$p = \frac{2ft}{D} \dots\dots\dots (99)$$

但受外壓力時不若受內壓力時之安定,受內壓力時,圓筒因壓力而受變成真圓之作用. 然受外壓力時,則少生變形後,即益增大之. 因外壓而圓筒或圓管破壞時,生凹陷 (collapse). 凹陷形狀對於管長 L , 與直徑 D 之比有關係. 設 n 為凹陷後突出部之數,則

$\frac{L}{D}$	15~7.5	7.5~3.75	3.75~2.5
---------------	--------	----------	----------

n	2	3	4~5
-----	---	---	-----

第 100 圖示凹陷狀況之略圖，甲有突出部 2，乙有突出部 3，丙有突出部 4。



第 100 圖

58. 管或圓筒凹陷之公式。關於管或圓筒之凹陷，與長柱之情形極相似。由種種假定所得理論的公式，與實驗的結果所得實驗的公式均有之。然理論的公式與實際難一致，故須根據於實驗的公式為是。

Fairbairn 之實驗的公式如下：

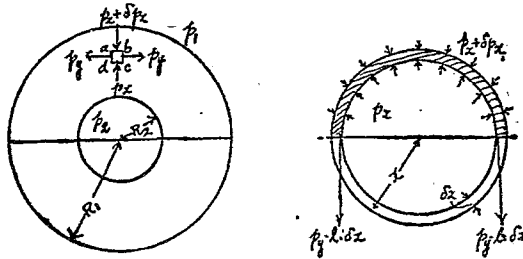
$$p = 9,672,000 \frac{t^{2.19}}{LD} \dots\dots\dots (100)$$

但此式有 2.19 之乘方數，須用對數表計算，較不便。故省略之而為下式：

$$p = 9,672,000 \frac{t^2}{LD} \dots\dots\dots (100a)$$

對於管厚 $\frac{3}{8}$ 吋以上，其誤差甚小。上二式中 p 磅/平方吋為開始凹陷時外壓力之強， t 吋為管厚， L 吋為管長， D 吋為圓直徑。

對於汽鍋之焰管 (flue) 等，通常安全率為 3 至 4。



第 101 圖

59. 厚壁圓筒。第 101 圖上 R_2 與 R_1 為圓筒內半徑及外半徑。 p_2 , p_1 為內面及外面之流體壓力之強。今就橫斷面上任意半徑 r 處一微小面之圓環考察之。該圓環內微小部 $abcd$ 上作用

之內力有三種。即周圍張力 p_y , 半徑方向上壓內力 p_x , 及與圓筒軸線平行方向之縱內力。今設橫斷面受壓力作用後仍為平面(此假定對於距兩端面相當距離處可視為真), 則橫斷面上任何點之縱向歪為常數, 與 x 無關。取上之薄圓環之半部, 其半徑為 x , 厚為 δx , 長為 l , 則其平衡條件必為內外側壓力之合力與直徑斷面上周圍張力之全量相等。即

$$(p_x \times 2xl) - (p_x + \delta p_x)2(x + \delta x)l = 2p_y \cdot l \delta x$$

或
$$-p_x \cdot \delta x - x \delta p_x - \delta x \delta p_x = p_y \cdot \delta x$$

上之薄圓環之厚 δx 為極小時,

$$p_y = -p_x - x \frac{d p_x}{d x} = -\frac{d}{d x}(p_x \cdot x) \dots \dots (a)$$

若軸線平行方向上縱內力均布於橫斷面, 而設其強為 f_1 , 又軸線方向上縱歪設為 e , 則

$$e = \frac{1}{E} \left(f_1 - \frac{p_y}{m} + \frac{p_x}{m} \right)$$

由上述假定, 則 e 與 x 無關係而為定數。今 e , E , f_1 , 及 m 皆為常數時, $p_y - p_x$ 亦必為常數。故

$$p_y - p_x = 2a \dots\dots\dots (b)$$

以 (a) 代入, 則

$$-2p_x - x \frac{dp_x}{dx} = 2a$$

或
$$\frac{dp_x}{p_x + a} = -\frac{2dx}{x}$$

積分之,
$$\log(p_x + a) = -\log x^2 + \text{常數}$$

或
$$p_x + a = \frac{b}{x^2}$$

$$\therefore p_x = \frac{b}{x^2} - a \dots\dots\dots (c)$$

但 b 與 a 皆常數, 由內外側壓力而決定之。再由 (b), 得

$$p_y = \frac{b}{x^2} + a \dots\dots\dots (d)$$

$x = R_1$ 時 $p_x = p_1$, 又 $x = R_2$ 時 $p_x = p_2$, 故

$$b = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} (p_2 - p_1), \quad a = \frac{p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

故

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} (p_2 - p_1) - (p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2) \right\} \\ p_y &= \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} (p_2 - p_1) + (p_2 R_2^2 - p_1 R_1^2) \right\} \end{aligned} \right\} (101)$$

受內壓力之厚圓筒。設內壓力之強為 p_2 ，而外壓力 p_1 為零。例如壓力水管等，則

$$p_x = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} \cdot p_2 - p_2 R_2^2 \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{或} \quad p_x = p_2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{R_1^2}{x^2} - 1 \right) \\ \text{同樣} \quad p_y = p_2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{R_1^2}{x^2} + 1 \right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (102)$$

例 4. 內徑 6 吋，壁厚 2 吋之送水管，水壓為 1,000 磅/平方吋。求橫斷面上各點之周圍張力與半徑方向上壓內力 (radial compressive stress)。

$R_1 = 5$ 吋， $R_2 = 3$ 吋， $p_2 = 1,000$ 磅/平方吋。

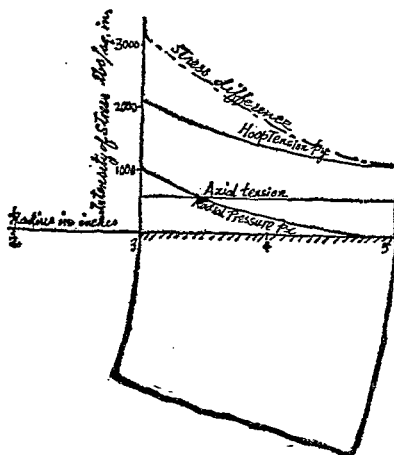
由 (102) 式，

$$p_x = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{x^2} - 1 \right)$$

$$p_y = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{x^2} + 1 \right)$$

橫斷面各點之 p_x 及 p_y 示於第 102 圖。內面上

$x = 3$ ，故



第 102 圖

$$p_x = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{9} - 1 \right) = 1,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_y = \frac{9000}{16} \left(\frac{25}{9} + 1 \right) = 2,126 \text{ 磅/平方吋}$$

外面上 $x=5$, 故

$$p_x = 0$$

$$p_y = \frac{9000}{16} (1+1) = 1,125 \text{ 磅/平方吋}$$

受外壓力之厚圓筒。設外壓力為 p_1 , 而內壓力 p_2 為零, 則

$$p_x = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left\{ \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} (-p_1) + p_1 R_1^2 \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{或} \quad p_x &= p_1 \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{x^2} \right) \\ \text{同樣, } p_y &= -p_1 \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (103)$$

p_y 之負號示周圍張力為壓內力。

60. 決定圓筒或圓管尺寸之公式。圓筒斷面上內力之分布已示於第102圖。圓管受內壓力時，最大值內力為內側面即 $x=R_2$ 時之周圍張力。其值為

$$p_{v_2} = p_2 \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \dots\dots\dots (a)$$

今設 p 為材料之彈性限界內可作用之最大內壓力，即 p_2 。 t 為圓筒壁厚度，即為 $R_1 - R_2$ 。 d 為內徑，即 $2R_2$ 。 又設 $\frac{R_1}{R_2}$ ，即 $\frac{d+2t}{d} = k$ ，而 $\frac{t}{d} = a = \frac{1}{2}(k-1)$ 。 f 為彈性限界內最大可容內力，即

p_{v_2} 。

由上式(a)，得

$$f = p \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

而

$$\frac{p}{f} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1},$$

$$k = \sqrt{\frac{1 + p/f}{1 - p/f}}, \text{ 或 } \sqrt{\frac{f+p}{f-p}}.$$

$$\therefore \alpha = \frac{t}{d} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1 + p/f}{1 - p/f}} - 1 \right\},$$

$$\text{或 } \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{f+p}{f-p}} - 1 \right\} \dots\dots(104)$$

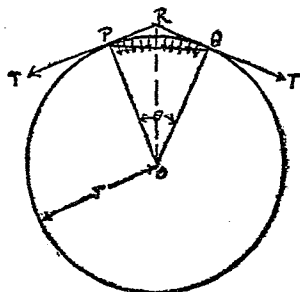
但此式對於鑄鐵管，可與實際相近。

61. 圓環或輪邊之迴轉。圓環以通過中心之垂直軸迴轉時，因離心力生周圍張力於環內。若半徑大而環斷面小時，則周圍張力均布於斷面上。與受內壓力之薄圓筒相似。今設半徑為 r 吋，角速度為 ω ，或直線速度為每秒 v 吋。若以等速度迴轉時，環上各質點受向內之半徑方向上加速度每秒每秒 $\omega^2 r$ ，或 $\frac{v^2}{r}$ 吋。若 A 為斷面積之平方吋數， w 為材料每立方吋重量，則環邊長 δs 吋部分之向心力為

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \delta s \text{ 磅}$$

但 g 爲每秒每秒 32.2×12 吋。或圓弧單位長上
向心力爲

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \text{ 磅}$$



第 103 圖

今於第 103 圖上，圓弧 PQ ，即 $r\theta$ 上之半徑方
向合力爲

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \times \text{弦 } PQ,$$

或

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} A \times 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

其作用方向爲 RO 。此力必爲 P 與 Q 處張力

(tension) T 之合力。今將 T 分解於 RO 方向上, 則

$$2T \sin \frac{\theta}{2} = A \cdot \frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \times 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

或
$$T = A \frac{w}{g} v^2, \text{ 或 } A \frac{w}{g} \cdot \omega^2 r^2$$

故環邊拉內力之強為

$$p = \frac{T}{A} = \frac{w}{g} v^2 = \frac{wv^2}{12 \times 32.2} \text{ 磅/平方吋} \dots\dots (105)$$

此式對於滑輪 (pulley) 上拖帶 (belt) 之離心張力亦可應用。

設 f 為輪邊 (wheel rim) 最大安全內力, 則輪邊之極限速度為

$$f = \frac{w}{g} v^2$$

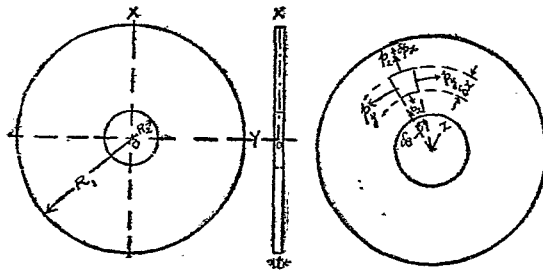
$$\therefore v = \sqrt{\frac{fg}{w}} = \sqrt{\frac{f \times 12 \times 32.2}{w}} \text{ 吋/秒}$$

上式中 v 與 g 若以呎為單位, 則

$$p = \frac{12wv^2}{g} = \frac{12wv^2}{32.2} = 0.3722wv^2 \text{ 磅/平方吋}$$

62. 圓板之迴轉。設圓板厚度均一, 且較直

徑爲甚小,而迴轉於其軸周. 此時圓板面垂直方向上無內力之作用. 第104圖上半徑方向上內力設爲 p_x , 周圍張力設爲 p_y , 二者拉伸方向時設爲正. t 爲圓板之均一厚度, R_1 與 R_2 爲外側半徑與內側半徑. w 爲每單位容積材料之重量, ω 爲其等角速度.



第 104 圖

今於圓板中半徑 x 處取一極小部分, 對於中心成 $\delta\theta$ 之角, 其半徑方向上之寬爲 δx . 則其微小容積爲 $x\delta\theta \times \delta x \times t$. 其半徑方向上向內之力略爲

$$\frac{w}{g} \omega^2 x \cdot t \cdot x \delta\theta \cdot \delta x \dots\dots\dots (a)$$

此必爲該微小部分上 p_x 與 p_y 全量之合成力。
故將此二者分解之如前節，則

$$i \left\{ p_y \cdot \delta x \cdot 2 \sin \frac{\delta \theta}{2} + p_x \cdot 2x \sin \frac{\delta \theta}{2} - (p_x + \delta p_x) 2(x + \delta x) \sin \frac{\delta \theta}{2} \right\}$$

或近似的爲

$$i(p_y \cdot \delta x - p_x \delta x - x \delta p_x) \delta \theta \dots \dots \dots (b)$$

$\delta \theta$ 爲極小。使 (a), (b) 兩式相等時，

$$p_y = \frac{w}{g} \omega^2 x^2 + p_x + x \frac{d p_x}{d x}$$

或
$$p_y = \frac{w}{g} \omega^2 x^2 + \frac{d}{d x} (x p_x) \dots \dots \dots (c)$$

今設變形即歪全起於半徑方向，而 x 變爲 $x+u$ ，則圓周上所生歪爲

$$\frac{2\pi(x+u) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{u}{x} \dots \dots \dots (d)$$

變形後上之微小部分在半徑方向上之寬爲

$$x + \delta x + u + \delta u - (x + u) = \delta x + \delta u$$

而該部分半徑方向之歪(若正號時爲拉伸歪)爲

$$\frac{\delta x + \delta u - \delta x}{\delta x} = \frac{du}{dx} \dots\dots\dots(e)$$

因圓盤軸線之平行方向上內力爲零，故由(d)，
(e) 兩式，

$$\frac{u}{x} = \frac{1}{E} \left(p_y - \frac{p_x}{m} \right) \dots\dots\dots(f)$$

但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比。

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E} \left(p_x - \frac{p_y}{m} \right) \dots\dots\dots(g)$$

解(f), (g) 兩聯立方程式，

$$p_y = \frac{Em}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right) \dots\dots\dots(h)$$

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \left(\frac{u}{x} + m \frac{du}{dx} \right) \dots\dots\dots(i)$$

將此代入於(c)，

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -\frac{w}{g} \omega^2 \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E} x^2$$

或
$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = -\frac{w}{g} \omega^2 \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E} x \dots\dots(j)$$

此微分方程式由 Lamb's "Infinitesimal Calculus,"

§ 191. 先就

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{x} \right) = 0$$

積分之，

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 2A \dots\dots\dots (k)$$

或

$$x \frac{du}{dx} + u = 2Ax$$

又積分一次，

$$ux = Ax^2 + B$$

∴

$$\frac{u}{x} = A + \frac{B}{x^2} \dots\dots\dots (l)$$

由 (k), (l)

$$\frac{du}{dx} = A - \frac{B}{x^2} \dots\dots\dots (m)$$

今設 $u = Cx^3$ ，二次微分之，代入於 (j)，則

$$C = -\frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}$$

因 $\frac{u}{x} = Cx^2$ ， $\frac{du}{dx} = 3Cx^2$ ，故

$$\frac{u}{x} = A + \frac{B}{x^2} - \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} x^2 \dots\dots\dots (n)$$

$$\frac{du}{dx} = A - \frac{B}{x^2} - \frac{3w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} x^2 \dots\dots\dots (p)$$

以此代入於 (i),

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \left\{ (m+1)A - (m-1)\frac{B}{x^2} - (3m+1)\frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2} x^2 \right\} \dots\dots (q)$$

對於二半徑處 p_x 已知時, 可求 A 與 B .

中央有孔之圓盤. 此時 $x=R_1$, $p_x=0$, 又 $x=R_2$, $p_x=0$, 故

$$A = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{(3m+1)(m-1)}{m^2} (R_1^2 + R_2^2)$$

$$B = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{(3m+1)(m+1)}{m^2} R_1^2 R_2^2$$

由此得

$$p_x = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1) \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} - x^2 \right) \dots (106)$$

又由 (h), (n), (p), 得

$$p_y = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} \left\{ (3m+1) \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{x^2} \right) - (m+3)x^2 \right\} \dots (107)$$

p_y 之值常爲正, 因 x 之增加而減少. $x=R_2$ 爲最

大,其值爲

$$p_y(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4m} \{ (3m+1)R_1^2 + (m-1)R_2^2 \} \dots (108).$$

若 R_2 極小時,其近似值爲

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4m} (3m+1)R_1^2$$

若 R_2 極近於 R_1 ,則其值極近於 §61 之公式 (105).

$x=R_1$ 及 $x=R_2$ 時 p_x 之值爲零, x 在 R_1 至 R_2 之間, p_x 爲正. 而

$$\frac{dp_x}{dx} \propto \left(\frac{2R_1^2 R_2^2}{x^3} - 2x \right),$$

當 $x = \sqrt{R_1 R_2}$ 時,其值爲零.

在此半徑處,半徑方向之張力爲極大,其值爲

$$p_x(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)(R_1 - R_2)^2$$

實體圓盤. 若圓盤無中央孔時,則在 (n) 式中, $x=R_1$ 時 $p_x=0$, $x=0$ 時 $u=0$. 由後之條件,自 (n) 式得 $B=0$. 由前之條件,自 (g) 式得

$$A = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8E} \cdot \frac{(3m+1)(m-1)}{m^2} R_1^2$$

由 (h) 式,

$$p_y = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} \{ (3m+1)R_1^2 - (m+3)x^2 \} \dots\dots(109)$$

$x=0$ 時, 即在中心處為極大. 故

$$p_y(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)R_1^2$$

或

$$= \frac{3m+1}{8m} \cdot \frac{w}{g} (\omega R_1)^2 \dots\dots\dots(110)$$

又由 (i) 式,

$$p_x = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)(R_1^2 - x^2) \dots\dots\dots(111)$$

此常為正值, 自中心至外側漸次減小, 在中心為極大, 即

$$p_x(max.) = \frac{w}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8m} (3m+1)R_1^2$$

與周圍張力之極大值相等.

問 題

1. 內徑 4 吋之無接縫管, 通過 200 磅/平方吋壓力之液體. 材料中拉內力若不超過 12,000 磅/平方吋時, 管之厚度幾何?

2. 厚 $\frac{5}{8}$ 吋鋼板所作成內徑 6 呎之汽鍋胴.

合接縫強度計算之,使最大內力不超過 10,000 磅/平方吋. 問可容內壓力幾何?

3. 內徑 6 吋之鋼管,加以 400 磅/平方吋之內壓力,設可容內力為 6,000 磅/平方吋時,求管厚.

4. 板厚 $\frac{7}{8}$ 吋,內徑 7 呎之蒸汽胴,蒸汽壓力 200 磅/平方吋時,縱及橫斷面上所生內力如何?

5. 有大小二個同材料之管,大管內徑 10 吋,小管內徑 5 吋. 大管厚 $\frac{1}{2}$ 吋時,問耐同一壓力之小管厚度幾何?

6. 厚 $\frac{7}{8}$ 吋,內徑 7 呎之蒸汽胴,對於 200 磅/平方吋之內壓力為安全. 用同一材料之厚 $\frac{5}{8}$ 吋,內徑 6 呎之蒸汽胴,問其可容內壓力幾何?

7. 直徑 3 呎之鋼輪薄邊,重量為每立方吋 0.28 磅. 若使內力不超過 10 噸/平方吋時,每分迴轉數若何? 但 $E=30 \times 10^6$ 磅/平方吋.

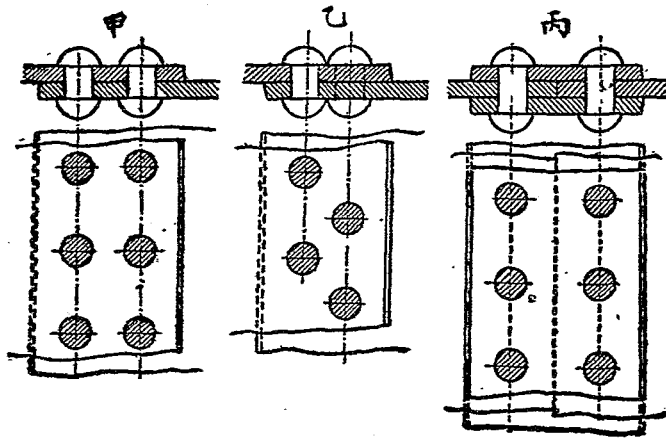
第九章

鉚釘接縫

63. 鉚釘及其接縫。汽鍋，水槽，橋樑等之鋼板或鋼條結合時，一般用鉚釘 (rivet)。鉚釘者，兩端有鉚釘頭 (rivet head) 之擴大部，而中央有鉚釘頸 (shank) 之圓棒。用此釘之接縫 (joint) 為永久的接合，僅能切去釘頭，方可分離。故須常時解離之部，不可用鉚釘。釘為鍊鐵 (wrought iron) 或極軟鋼 (soft steel) 等柔軟而強韌之材料所製成，一端釘頭造成後，赤熱之插入孔中，打擊而造成他端之釘頭。一般釘上作用之力，由板而垂直加於釘頸。故主為剪作用。

64. 接縫之種類。鉚釘接縫大別之為二種，即疊接縫 (lap joint) 與對接縫 (butt joint) 是也。

疊接縫者如第 105 圖甲乙所示，將兩板重縫，以
 一列或數列之釘固着之。因釘之列數；有一列
 鉚釘疊接縫 (single-riveted lap joint)，二列鉚釘
 (double riveted)，三列鉚釘 (treble riveted) 等之名。
 二列以上有如第 105 圖甲之並列鉚釘 (chain
 riveting) 與乙之間列鉚釘 (zig-zag riveting or stag-



第 105 圖

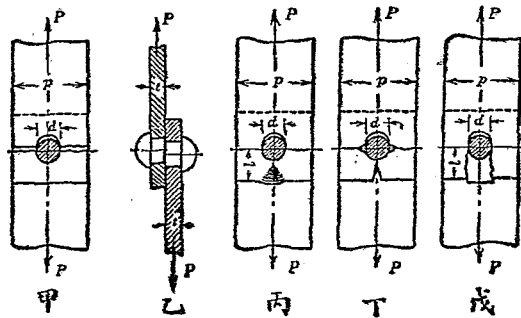
gered riveting) 之別。對接縫者將兩板之邊緣相
 對合，其一側或兩側之接縫處覆以縫板 (butt

strap or cover plate), 而以釘固着之。如第 105 圖丙所示。縫板用於板之一側者, 曰一重縫板對接縫 (butt joint with single butt strap)。若用於兩側者曰二重縫板對接縫 (butt joint with double butt strap)。一重縫板之接合, 其構造上因板之伸縮, 而接合部交互受彎曲作用, 縫板中央易生破壞。因之信賴之程度低, 不宜多用之。汽鍋胴之縱接縫, 其內側與外側有用寬度相異之縫板 (butt joint with double strap of unequal width)。此時鉚釘之中心間距離須變更之。又橋樑, 家屋等鐵骨上之鉚釘接縫, 僅抵抗外力而對於漏洩無顧慮。對接縫中亦有二列鉚釘, 三列鉚釘等。

65. 鉚釘接縫之強度計算。鉚釘接縫之強度, 須自二方面考察之。即板之強度與釘之強度是也。此時釘及板之大小, 釘之配列法, 及相隣二釘間心距 (pitch), 均為必須知之者。心距對於壓力容器中之漏洩有大影響。若心距在

某程度以上時，則板緣之搞緊 (caulking) (釘頭周圍及板之接觸端緣等，置以尖鈍工具，錘擊之，使金屬充分接觸，以防漏洩。) 爲無效。強度之計算雖充分，而漏洩預防上，尙須縮短心距也。

今就第 106 圖上一列鉚釘疊接之一心距研究之。此接縫破壞時有下之五種情形：



第 106 圖

- (甲) 釘與釘間之板裂開而破壞(第106圖甲).
 (乙) 因釘之剪斷而破壞(第106圖乙).

(丙) 因釘或板之壓縮而破壞(第106圖丙).

(丁) 因板之彎曲而破壞(第106圖丁).

(戊) 因板之剪斷而破壞(第106圖戊).

今計算時設有下列之符號:

P = 一心距之鉚釘接縫上作用之全荷重(今假定為張力).

t = 板厚.

d = 釘之直徑.

p = 釘之心距.

l = 釘之中心至板邊緣之距離.

f_t = 板之拉伸強度.

f_c = 板或釘之壓縮強度.

f_s = 板或釘之剪斷強度.

f_b = 板之彎曲強度.

先就(甲)論之,板之寬因釘孔而減小. 故有效面積為 $(p-d) \times t$.

$$\therefore P_1 = f_t t (p - d) \dots \dots \dots (112)$$

(乙) 時釘僅受剪斷, 故

$$P_2 = f_s \frac{\pi}{4} d^2 \dots \dots \dots (113)$$

(丙) 時內力分布不明, 近似的取為

$$P_3 = f_t t d \dots \dots \dots (114)$$

(丁) 時, 可視為釘孔部分板之端緣固着於兩端而中央受荷重之樑. 則彎曲能率之值為

$$M = \frac{1}{8} P_4 d$$

中央板深為 $(l - \frac{1}{2}d)$, 故斷面係數之值為

$$Z = \frac{1}{6} t (l - \frac{1}{2}d)^2$$

故
$$\frac{1}{8} P_4 d = \frac{1}{6} t (l - \frac{1}{2}d)^2 f_b$$

即
$$P_4 = \frac{1}{3} f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d} \dots \dots \dots (115)$$

(戊) 時釘孔兩端受剪斷,

$$P_5 = 2 f_s l t \dots \dots \dots (116)$$

以上五式均爲某假定下之近似式，非爲精確。然適用於實際，無大誤謬。

上示五式中 P 值均必相等，由此條件及材料之 f_t, f_c, f_s, f_b 等值，可計算 p, d, t, l 等之值。

由 (112) 及 (113) 兩式，

$$f_t \cdot t \cdot (p-d) = f_s \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

或
$$p = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots (117)$$

此爲定心距之式

由 (114), (115) 兩式，

$$f_c t d = \frac{1}{3} \cdot f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d}$$

或
$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3f_c}{f_b}} \right) d \dots\dots\dots (118)$$

此爲可不因壓縮而破壞之重疊處板寬。

由 (113), (115) 兩式，

$$f_s \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{1}{3} f_b \frac{t(2l-d)^2}{d}$$

或
$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3\pi f_s \cdot d}{4f_b \cdot t}} \right) d \dots\dots(119)$$

此爲可不因剪斷而破壞之重疊處板寬。

由(112), (115)兩式,

$$f_t \cdot t(p-d) = \frac{1}{3} f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d}$$

或
$$l = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3f_t \cdot p-d}{f_b \cdot d}} \right) d \dots\dots\dots(120)$$

此爲可不因彎曲而破壞之重疊處板寬。

最後由(113), (114)兩式,

$$f_s \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = f_c t d$$

或
$$d = \frac{4f_c t}{\pi f_s} \dots\dots\dots(121)$$

此爲板厚與直徑之比例公式。

上示疊接時之重疊處板寬有公式三個,各生相異值之 l 。當採用其中之最大者。

66. 鉚釘之直徑與板之厚。鉚釘之直徑與板之厚之比例，由前記公式(121)可算出之。鉚釘及板之材料如汽鍋等所用者，範圍略一定，而 f_c 與 f_s 之比亦略為一定。因釘直徑與板厚亦有一定比例，故作釘直徑與板厚比例之表，可不用計算而求之。但用特殊材料時，須計算之。

次示 Lloyd Rule 及 Board of Trade Rule 之表如下(第294頁)。

67. 板及鉚釘材料之強度。鉚釘主用於汽鍋及種種鐵骨工事。其材料略一定，而強度亦比較的限定於狹小範圍內。汽鍋用材料，品質良好，須擇軟韌而富展延性者。強度可較小。從來用鍊鐵板及鍊鐵釘，而近來製鋼發達，一切鍊鐵均為極軟鋼所驅逐。

德國定為拉伸強度每平方耗 34 至 36 噸者用於汽鍋板，釘之剪斷強度為其 0.8 倍。或拉伸強度為每平方吋 55,000 至 65,000 磅，伸長率 20 至 25%，而釘之剪斷強度取為 0.8 倍。

Lloyd Rule

板之厚(吋)	釘直徑(吋)			
	一列釘接縫	二列釘接縫	三列釘接縫	縫板接縫二重
$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	—	—	—
$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{11}{16}$	—	—
$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{3}{4}$	—	—
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{9}{16}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{11}{16}$
$\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{16}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{11}{16}$	—	$1\frac{1}{16}$	1	$\frac{13}{16}$
$\frac{3}{4}$	—	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{13}{16}$	—	—	$1\frac{1}{8}$	1
$\frac{7}{8}$	—	—	$1\frac{3}{16}$	$1\frac{1}{16}$
$\frac{15}{16}$	—	—	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{8}$
1	—	—	$1\frac{5}{16}$	$1\frac{3}{16}$

Board of Trade Rule

板之厚(吋)	釘直徑(吋)			
	一列釘接縫	二列釘接縫	三列釘接縫	縫板接縫二重
$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	—	—	—
$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	—	—
$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{13}{16}$	—	—
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{11}{16}$
$\frac{9}{16}$	$1\frac{1}{8}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{16}$	$1\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{13}{16}$
$\frac{11}{16}$	—	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{16}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{3}{4}$	—	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{13}{16}$	—	—	$1\frac{3}{16}$	1
$\frac{7}{8}$	—	—	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{8}$
$\frac{15}{16}$	—	—	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{16}$
1	—	—	$1\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{4}$

鍊鐵時, 拉伸強度為 40,000 至 55,000 磅/平方吋, 釘之剪斷強度略與此等.

汽鍋時安全係數取為 4.0 至 4.5.

鐵骨工事上所有材料普通為軟鋼, 而釘多用極軟鋼. 其強度與汽鍋時相同. 安全強度如次:

$$f_s = 8,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$f_t = 10,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$f_c = 12,500 \text{ 磅/平方吋}$$

$$f_b = 15,000 \text{ 磅/平方吋}$$

68. 各種鉚釘接縫之効率. 以鉚釘接合之板, 較之完全部分, 則接縫部分, 因釘孔而斷面縮小, 故為最弱之部, 破損必沿釘列而起於接縫部.

換言之, 有接縫之板, 不能生實體板所可有之最大力, 而破損必起於較小之力. 鉚釘接縫所可抵抗之最大力與實體板所可抵抗之最大力之比, 稱曰鉚釘接縫之効率 (Efficiency of riveted joint).

鉚釘接縫之効率, 詳言之, 可分為板之効率與

釘之効率。又二列釘三列釘時更生相異之効率。

今取一心距 (pitch) 時, 實體板所可抵抗之最大力 P_0 爲

$$P_0 = f_t p t \dots \dots \dots (122)$$

但 p 爲心距, t 爲板厚, f_t 爲板之拉伸強度。由此可計算鉚釘接縫之効率。

(a) 一列鉚釘疊接縫 (第 107 圖)。此爲前述鉚釘之強度計算中所引例之最簡單者也。今設由前述方法, 已求得心距, 釘之直徑, 板之厚, 釘孔中心至板緣之距離等。此時設板之拉伸抵抗爲 P_1 , 則

$$P_1 = f_t t (p - d)$$

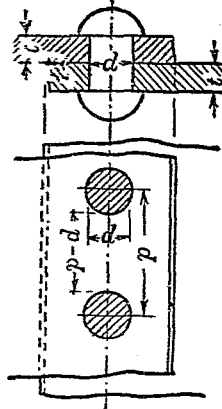
釘之剪斷抵抗設爲 P_2 , 則

$$P_2 = f_s \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

由此二式求接縫之効率 R , 以百分率表之。

$$\text{板之効率} \quad R_1 = \frac{P_1}{P_0} \times 100 = \frac{p-d}{p} \times 100 \dots (123)$$

釘之效率 $R_2 = \frac{P_2}{P_0} \times 100 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 f_s}{p t f_i} \times 100 \dots (124)$



第 107 圖

若使 R_1 與 R_2 相等, 則

$$\frac{p-d}{p} = \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{p t} \cdot \frac{f_s}{f_i}$$

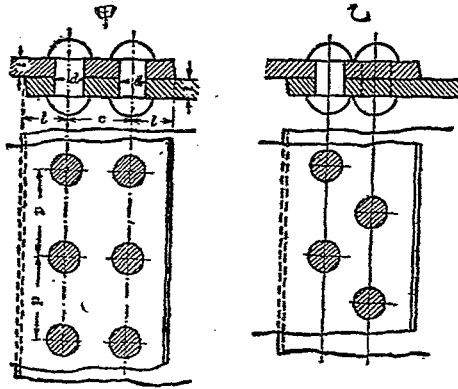
或

$$p = \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{t} \cdot \frac{f_s}{f_i} + d \dots (117)$$

若用鋼板及鋼鉚釘, 則 $f_s = 0.8 f_i$, 故

$$p = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{d^2}{t} + d \dots (125)$$

(b) 二列鉚釘疊接縫(第108圖). 此有間列配置與並列配置之分,但求法同一.



第 108 圖

$$P_1 = f_t \cdot t(p-d)$$

$$P_2 = f_s \cdot 2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \right)$$

故
$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{2 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則
$$p = \frac{2 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (126)$$

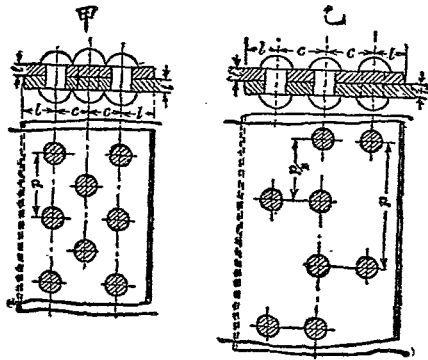
二列以上之鉚釘列，各列間之距離為問題。但一釘中心與相隣釘之中心間之距離不得小於釘直徑之二倍。即並列配置時，

$$c \cong 2d$$

間列配置時，

$$c \cong \sqrt{(2d)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

(c) 三列鉚釘疊接縫(第109圖)。此時有並列



第 109 圖

配置與間列配置之分，其求法同一。可與前例同樣。板之可抵抗之最大力 P_1 為

$$P_1 = f_t t (p - d)$$

$$P_2 = 3 \times \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) f_s$$

故 $R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$

$$R_2 = \frac{3 \times \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則 $p = \frac{3 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (127)$

若如第 109 圖乙所示, 內列鉚釘之心距爲外列鉚釘之二分之一, 則

$$P_2 = 4 \times \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) f_s$$

$$R_2 = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

因之 $p = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (127a)$

又此種鉚釘接縫上內列板之斷面更小, 故此列之板之強度須研究之. 但此時外列釘對於板之破斷亦抵抗, 故須合併研究之. 即內列所

可耐之最大力 P_3 爲

$$P_3 = \frac{\pi}{4} d^2 f_s + (p - 2d) t f_t$$

或

$$R_3 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 f_s + (p - 2d) t f_t}{p t f_t} \times 100$$

$$= \frac{R_2}{4} + \frac{p - 2d}{t} \times 100$$

故若 $R_3 = R_1 = R_2$, 則

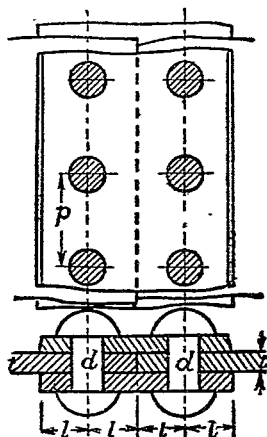
$$p = \frac{4 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (127a)$$

及

$$d = \frac{t}{\left(\frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{f_t}{f_s} = \frac{5t}{\pi} = 1.59t \dots \dots \dots (127b)$$

(但指鋼板及鋼鉚釘)

(d) 一列鉚釘對接縫(第110圖). 對接縫中一重縫板, 宛如二個疊接縫之相連者. 故如疊接縫之求法即可. 但縫板厚爲板厚之 $1\frac{1}{8}$ 倍左右者爲普通. 用二重縫板時, 縫板厚度內外均爲板厚之 $\frac{5}{8}$ 倍. 釘受複剪斷, 故較疊接縫爲甚強.



第 110 圖

板之可耐最大力 P_1 爲

$$P_1 = (p-d)tf_s$$

故板之効率爲

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

釘之可耐最大力 P_2 爲

$$P_2 = C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) f_s$$

故卸釘之効率爲

$$R_2 = \frac{C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (128)$$

但 C 爲某常數, 若剪作用完全, 則複剪時當爲 2. 然安全上有取小於 2 者. 例如 Board of Trade Rule 指定 $C = 1.75$.

鉚釘之直徑與板之厚度間之關係由 § 65 公式 (113), 可變爲複剪斷而求之. 一般對於二重縫板一列鉚釘之對接縫, 用次之比例:

$$\left. \begin{array}{l} d = t + \frac{1}{4} \text{ 吋} \quad \text{鐵板及鐵鉚釘} \\ d = t + \frac{5}{16} \text{ 吋} \quad \text{鋼板及鋼鉚釘} \end{array} \right\} \dots \dots (129)$$

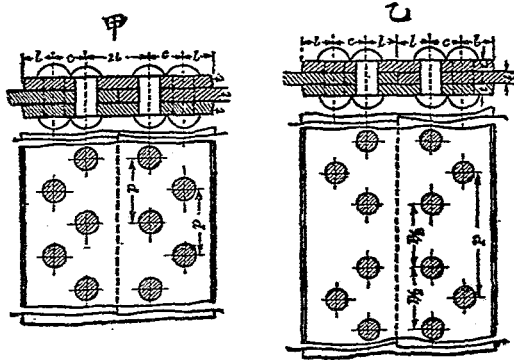
(e) 二列鉚釘對接縫 (第 111 圖). 二列鉚釘對接縫普通爲間列配列之鉚釘, 如上圖甲, 其心距相同, 或如上圖乙, 將內列鉚釘配列爲二分之一之心距.

甲時, $R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$

$$R_2 = \frac{2C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \cdot \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{2C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{t} \cdot \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots(130)$$



第 111 圖

釘之直徑與板之厚之關係為

$$\left. \begin{aligned} d &= t + \frac{3}{16} \text{ 吋, 鐵板或鐵鉚釘} \\ d &= t + \frac{1}{4} \text{ 吋, 鋼板或鋼鉚釘} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(131)$$

乙時, $R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$

$$R_2 = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

使 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{t} \times \frac{f_t}{f_s} + d \dots \dots (130a)$$

又考察內列鉚釘間板之破斷, 則外列鉚釘亦抵抗之。故合計二者之抵抗,

$$R_3 = \frac{C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)f_s + (p-2d)tf_t}{ptf_t} \times 100$$

$$= \frac{R_2}{3} + \frac{(p-2d)}{p} \times 100$$

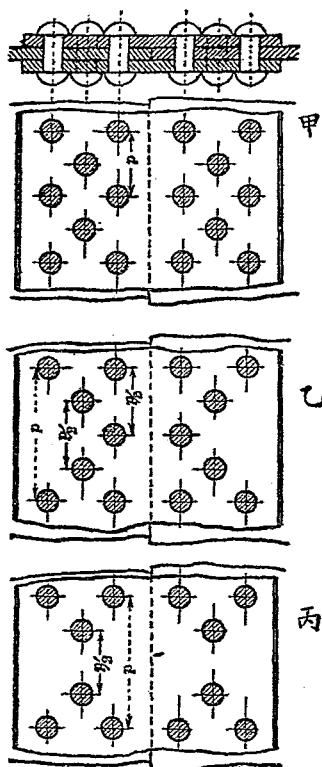
普通所用鉚釘之直徑與板厚之關係爲

$$\left. \begin{aligned} d &= t + \frac{1}{8} \text{ 吋 鐵板或鐵鉚釘} \\ d &= t + \frac{3}{16} \text{ 吋 鋼板或鋼鉚釘} \end{aligned} \right\} \dots \dots (131a)$$

用此尺寸之鉚釘, 則 R_3 較 R_1 或 R_2 爲大, 因之鉚釘接縫之效率由 R_1 或 R_2 決定之。

(f) 三列鉚釘對接縫(第112圖)。此接縫有下

之各種配列法。(甲)各列有同一心距之配列，(乙)僅最外列有大心距之配列，(丙)內外列同一心距，而中列為 $\frac{1}{2}$ 心距之配列。



第 112 圖

$$\text{甲時, } R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則

$$p = \frac{3C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (132)$$

鉚釘直徑與板厚之比之關係如下:

$$\left. \begin{aligned} d &= t + \frac{1}{16} \text{ 吋 鐵板及鐵鉚釘} \\ d &= t + \frac{1}{8} \text{ 吋 鋼板及鋼鉚釘} \end{aligned} \right\} \dots \dots (133)$$

$$\text{乙時, } R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{5C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

$$\text{使 } R_1 = R_2, \text{ 則 } p = \frac{5C\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)}{t} \times \frac{f_s}{f_t} + d \dots \dots \dots (132a)$$

鉚釘之直徑對於 $\frac{5}{8}$ 吋至 $\frac{7}{8}$ 吋之厚板時,

$$\left. \begin{array}{l} d = t + \frac{1}{8} \text{ 吋} \\ \text{對於 1 吋 以上之厚板時,} \\ d = t \text{ 吋} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(133a)$$

對於中列鉚釘之切斷, 外列鉚釘亦生作用, 故

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{C \frac{\pi}{4} d^2 f_s + (2p-d) t f_t}{p t f_t} \times 100 \\ &= \frac{R_2}{5} + \frac{(p-2d)}{p} \times 100 \end{aligned}$$

但對於前記鉚釘之直徑, 則 R_3 較 R_1 或 R_2 大.

$$\text{丙時,} \quad R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

$$R_2 = \frac{4C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{p t} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

$$\text{使 } R_1 = R_2, \text{ 則} \quad p = \frac{4C \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)}{t} \times \frac{f_s}{f_t} + d \dots\dots\dots(132b)$$

鉚釘直徑與乙時同樣, 中列之效率亦與乙時同樣.

(g) 寬度相異之二重縫板對接縫(第 113 圖). 此接縫多用於汽鍋胴之縱向接縫(longitudinal seam). 主為三列鉚釘者. 第 113 圖所示為最普通之種類之接縫.

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

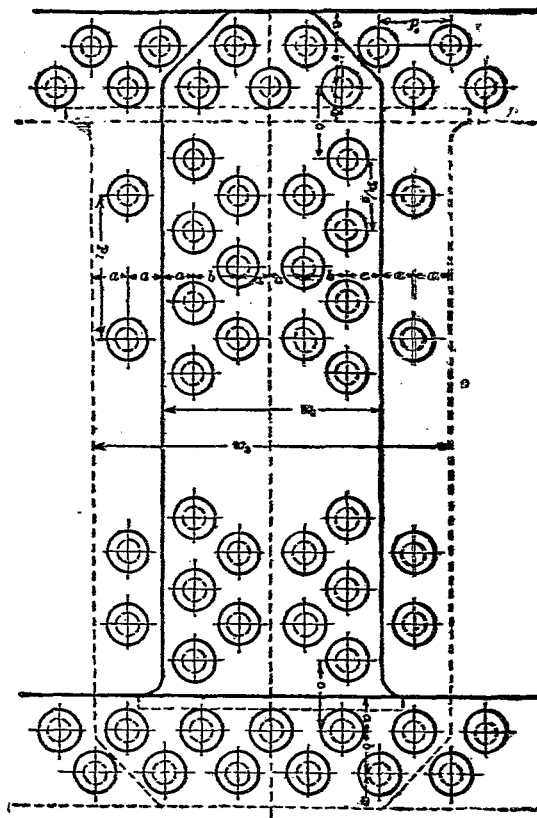
$$R_2 = \frac{(4C+1)\frac{\pi}{4}d^2}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

內側四鉚釘為複剪斷, 而最外列一鉚釘為單剪斷.

中列鉚釘間板之破斷時, 外列之鉚釘亦有影響. 故

$$R_3 = \frac{\frac{\pi}{4}d^2f_s + (p-2d)tf_t}{ptf_t} \times 100$$

由此三式, 使 $R_1 = R_2 = R_3$, 求 p , t 及 d 之關係. 但一般此法所得 p 值過大, 對於漏洩不完全. 故適當定 p 值後, 算出 R_1 , R_2 及 R_3 . 取其最小值為接縫之效率.



第 113 圖

今示 Board of Trade Rule 之鉚釘接縫最大心距
之表如下:

$$p = kt + 1\frac{5}{8} \text{ 吋.}$$

一心距間之鉚釘數	1	2	3	4	5
疊接縫	$k=1.31$	2.62	3.47	4.14	—
對接縫	$k=1.75$	3.50	4.63	5.52	6.00

但 p 不超過 10 吋.

以上主為汽鍋胴之鉚釘接縫或水槽之鉚釘接縫等。對於心距有極大尺寸，即有多數鉚釘連續時之計算也。

若如帶片等寬度狹小，不過心距之數倍者，可不求接縫効率而直接計算各列鉚釘之強度。茲舉數例如下。

例 1. 鋼板厚 $\frac{9}{16}$ 吋，鉚釘直徑 1 吋，鉚釘之心距 $2\frac{1}{8}$ 吋，自釘中心至板之邊緣距離 $1\frac{1}{2}$ 吋時，試計算此一系列鉚釘疊接縫之各種強度。但 $f_t = 12,500$ 磅/平方吋， $f_s = 10,000$ 磅/平方吋， $f_c = 23,000$ 磅/平方吋。

由題意,

$$t = \frac{9}{16} \text{ 吋}, \quad d = 1 \text{ 吋}, \quad p = 2\frac{1}{8} \text{ 吋}, \quad l = 1\frac{1}{2} \text{ 吋}.$$

由公式 (112), (113), (114), (115), 及 (116), 得

$$P_1 = (p-d)tf_t = (2.125 - 1) \times 0.5625 \times 12,500 = 7,900 \text{ 磅}$$

$$P_2 = \frac{\pi}{4}d^2f_s = \frac{3.14}{4} \times 1^2 \times 10,000 = 7,840 \text{ 磅}$$

$$P_3 = f_c td = 0.5625 \times 1 \times 23,000 = 12,900 \text{ 磅}$$

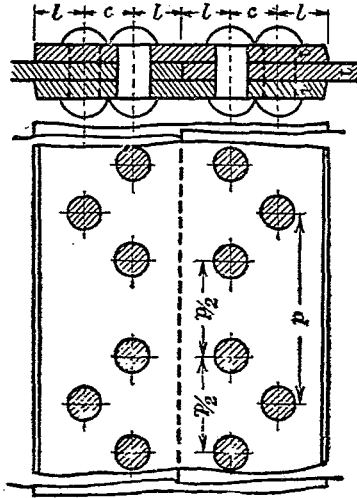
$$P_4 = \frac{1}{3}f_b \cdot \frac{t(2l-d)^2}{d} = \frac{1}{3} \times 15,000 \times \frac{0.5625(3.00-1)^2}{1}$$

$$= 11,250 \text{ 磅}$$

$$P_5 = 2f_s lt = 2 \times 10,000 \times 1.5 \times 0.5625 = 16,900 \text{ 磅}$$

由此則若用普通之 $l=1.5d$ 之比例, 則 P_4, P_5 較 P_1, P_2 甚大, 而接縫之破損由板之破斷或釘之剪斷而生。

例 2. 有二列鉚釘二重縫板之對接縫, 鋼板厚 $\frac{9}{16}$ 吋, 鉚釘直徑 $\frac{3}{4}$ 吋, 求他之尺寸如何? 但鉚釘之配列如第 114 圖。



第 114 圖

先求板之效率,

$$R_1 = \frac{p-d}{p} \times 100$$

次求鉚釘之效率,

$$R_2 = \frac{3C \frac{\pi}{4} d^2}{pt} \times \frac{f_s}{f_t} \times 100$$

取 C 爲 2, 且對於鋼板鋼鉚釘,

$$\frac{f_s}{f_t} = 0.8$$

故
$$R_2 = \frac{6 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{pt} \times 0.8 \times 100$$

若 $R_1 = R_2$, 則
$$p = \frac{6 \cdot \frac{\pi}{4} \times d^2}{t} \times 0.8 + d$$

$$= \frac{6 \times 3.14 \times 0.752 \times 0.8}{0.5625 \times 4} + 0.75$$

$$= 3.78 + 0.75 = 4.53 = 4 \frac{1}{2} \text{ 吋}$$

若採用此心距, 則效率爲

$$R_1 = \frac{4.5 - 0.75}{4.5} \times 100 = 83.3 \%$$

$$R_2 = \frac{6 \times \frac{3.14}{4} \times 0.75^2}{4.5 \times 0.5625} \times 0.8 \times 100 = 83.8 \%$$

內列鉚釘間之板切斷而外列鉚釘剪斷時,

$$R_3 = \left\{ \frac{C \frac{\pi}{4} d^2 f_s}{pt f_t} + \frac{(p-2d) t f_t}{pt f_t} \right\} \times 100$$

$$= \frac{R_2}{3} + \frac{p-2d}{p} \times 100$$

$$= \frac{83.8}{3} + \frac{4.5-1.5}{4.5} \times 100$$

$$= 27.9 + 66.7 = 94.6 \%$$

此較 R_1 及 R_2 為甚大。

板或釘在釘孔部分壓壞時，

$$R_4 = \frac{3d}{p} \times \frac{f_c}{f_t} \times 100$$

今設 $\frac{f_c}{f_t} = 2.00$ ，則

$$R_4 = \frac{3 \times 0.75 \times 2}{4.5} \times 100 = 100\%$$

定縫板之厚時，內列鉚釘間，縫板切斷之荷重與外列鉚釘間板切斷之荷重若相等，則

$$P_1 = (p-d) \cdot t f_t = 2(p-2d)t_1 f_t$$

$$\therefore t_1 = t \frac{p-d}{2(p-2d)}$$

但實際取此厚度之 $1\frac{1}{4}$ 倍。

$$t_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{p-d}{p-2d} t = \frac{5}{8} \cdot \frac{4.5-0.75}{4.5-2 \times 0.75} \times \frac{9}{16}$$

$$= 0.439 \doteq \frac{7}{16} \text{ 吋}$$

板孔中心至板緣距離

$$l = 1.5d = 1.5 \times 0.75 = 1\frac{1}{8} \text{ 吋}$$

釘列間間隔

$$C = 2d = 2 \times 0.75 = 1.5 \text{ 吋}$$

問 題

1. 鋼板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，全拉荷重 18,000 磅之二重縫板對接縫，其適當尺寸如何？但鋼之拉伸強度 10,000 磅/平方吋，剪斷強度為 $\frac{8}{10}$ 倍。壓縮強度為 12,500 磅/平方吋。

2. 一列鉚釘疊接縫之板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，鉚釘直徑 $\frac{15}{16}$ 吋，釘心距 $2\frac{1}{16}$ 吋，用鋼板及鋼鉚釘。鋼之拉伸強度為 28 噸/平方吋，剪斷強度為 23 噸/平方吋時，計算各效率。

3. 厚 $\frac{5}{8}$ 吋之汽鍋用鋼板，用三列鉚釘疊接縫。鋼鉚釘直徑設為 $\frac{15}{16}$ 吋。求他之尺寸如何？

第十章

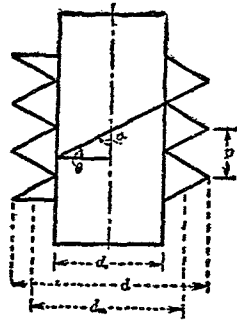
螺絲接合

69. 螺絲及螺絲接合. 圓筒表面上以與中心線成某角度(但除直角)之一直線捲附之, 生一種立體曲線, 此曰螺旋線. 沿該線而迴繞圓筒一次, 則於其中心線方向上進行一定距離. 換言之, 以平行於圓筒中心線之圓筒面上直線切螺旋線時, 該直線爲螺旋線所分爲相等多數部分. 此各線分之長曰螺旋之步距 (pitch). 卽一迴轉時所進行之距離也.

沿此螺旋線, 以三角形或四角形斷面捲附時, 則得如第 115 圖所示. 圓筒表面上生螺旋狀配列之高部與低部. 如此所成螺旋狀突起曰螺絲 (screw thread).

今若作成使與螺絲相抱圍而嵌合之螺旋狀之部體 (element), 固定一方, 使他方迴轉時, 則每

一迴轉,其圓筒中心線方向上之相互移動爲一步距. 一般供實用之螺絲必須兼備此兩部. 圓筒外面有螺旋之部體曰雄螺旋 (male screw), 內面有螺旋之部體曰雌螺旋 (female screw).



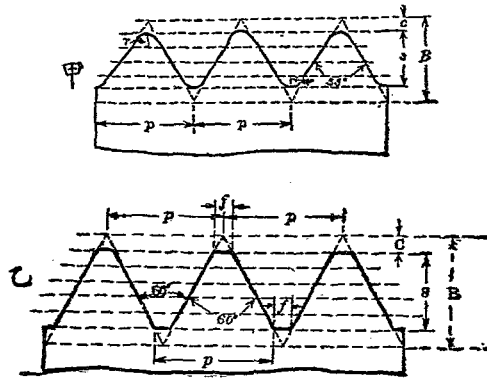
第 115 圖

將雄螺旋與雌螺旋生相互迴轉時,其中心線方向上生關係運動. 若不使迴轉時,則中心線方向不能生關係運動. 而具有雄螺旋及雌螺旋兩部體互相結合. 故可應用於各部分之接合. 且必要時得容易分離. 前章所述鉋釘接縫爲永久接合 (permanent joint), 而此種接合曰一時接合 (temporary joint).

70. 螺絲之種類。上述螺絲有三角形四角形等種種形狀。然種種異形主用於運動傳送之目的。對於接合則僅用二等邊三角形之螺絲。然使用多數螺絲時，若用各別之比例，則不得彼此交換，且製作上設備與手續均繁。故螺絲形狀宜有一定標準以期統一。標準螺絲其種類不止一二，然應用最廣之代表的形狀為英國式魏垣氏標準螺絲 (Whitworth standard thread) 及美國式守巒氏標準螺絲 (Sellers standard thread)。其尺寸如第116圖甲乙所示。

71. 螺帽釘，端入螺帽釘，及釘帽 螺絲接合，具雄螺旋及雌螺旋。為螺帽釘或端入螺帽釘與釘帽所成。

螺帽釘 (bolt) 者，為一端具有頭部 (head) 之圓棒。棒之他端有螺絲，與具有雌螺旋之部體即釘帽 (nut) 相嵌合。螺帽釘之棒，通過於所結合兩部體之孔中，將兩部體挾入於釘頭與釘帽之間，而緊着之。



第 116 圖

(甲) 魏垣氏

(乙) 守巒氏

 $p = \text{步距, 吋}$ $p = \text{步距, 吋}$ $s = 0.64 p$ $s = 0.65 p$ $r = 0.137 p$ $B = 0.866 p$ $B = 0.96 p$ $C = \frac{1}{8} B = 0.108 p$ $C = \frac{1}{6} B = 0.16 p$ $f = \frac{1}{8} p$

端入螺帽釘 (stud) 者, 用於上之螺帽釘不適用之處。圓棒兩端刻有螺絲, 一端雄螺旋嵌入於所結合部體中一者之雌螺旋中。而棒貫通

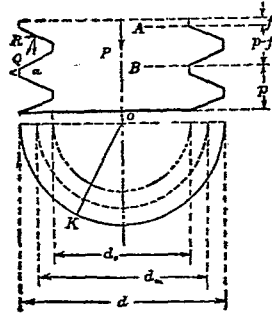
他方部體之孔後，他端嵌入於釘帽而緊着之。

釘頭及釘帽之外側普通為六角形，具有迴螺器 (spanner) 之鉗挾面。有時亦有為四角形者。或亦有其他之適當形狀者。

72. 螺帽釘，端入螺帽釘，及釘帽之尺寸。螺帽釘及端入螺帽釘須自強度計算其大小。接合時外力主為中心方向上拉力。故對於此拉力而求之。

因此拉力結果，螺帽釘主體受拉力作用，其螺絲部受自主體剪斷之作用，又與本體接續部如突出樑時，有折斷之作用。同時釘帽上薄邊受螺絲面上壓力之分力，有破裂之作用。此四作用須同時研究。但一般釘帽與螺帽釘之尺寸比例有一定，故常就第一之內力而計算之。

第117圖中抵抗拉力之面積須就螺絲底測之。設拉力之值為 P 磅，螺絲底直徑為 d_0 吋，材料之可容拉內力為 p_t 磅/平方吋。則



第 117 圖

$$P = \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t \dots\dots\dots (134)$$

次就螺絲之剪斷論之。設各螺絲同樣接觸，則抵抗剪斷之面積，其寬為圖上 AB 即 $(p-f)$ (但 p 為步距)，而長為沿螺絲上接觸開始處至終了處之長。設釘帽高為 h 吋，每一吋之螺絲數為 n ，則螺絲總數為 nh 。每螺絲之長為 πd_0 吋，故全體接觸部長為 $\pi d_0 nh$ 。故

$$P = \pi d_0 nh (p-f) p_s \dots\dots\dots (135)$$

但 p_s 為材料之可容剪內力 (磅每平方吋表之)。

今設對於剪作用之強度與對於拉力作用之

強度若相等，則可定釘帽之高。即

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \pi d_0 n h (p-f) p_s$$

$$\therefore h = \frac{p_t}{p_s} \cdot \frac{d_0}{4n(p-f)}$$

對於鋼則 $p_s = 0.8 p_t$ ，則

$$h = \frac{5d_0}{16n(p-f)}$$

魏垣氏螺絲， $f=0$ 。 守禮氏螺絲 $f = \frac{1}{8} p$ 。且 $n =$

$\frac{1}{p}$ 。故由上式，

$$\text{魏垣氏式 } h = \frac{5pd_0}{16p} = \frac{5}{16} d_0 = 0.313 d_0 \dots \dots (136)$$

$$\text{守禮氏式 } h = \frac{5pd_0}{16 \times \frac{7}{8} p} = \frac{5}{14} d_0 = 0.357 d_0 \dots (136a)$$

一般釘帽之高 h 等於螺帽釘外徑 d ，故無須考慮剪斷之破壞。

次視螺絲為突出樑，則彎曲能率如下。設荷重集中於螺絲高之中央，

$$M = P \times \frac{s}{2}$$

但 s 爲螺絲之高, 魏垣氏式 $s=0.64p$, 守巒氏式 $s=0.65p$. 抵抗面與對於剪斷之面同一. 即寬 $\pi d_0 n h$, 厚 p 或 $\frac{7}{8}p$. 故斷面係數爲

$$Z = \frac{1}{6} \pi d_0 n h p^2 \quad \text{或} \quad Z = \frac{1}{6} \pi d_0 n h \left(\frac{7}{8} p \right)^2$$

由此二式,

$$\text{魏垣氏式} \quad \frac{P_s}{2} = \frac{1}{6} \pi d_0 n h p^2 p_t$$

$$\text{守巒氏式} \quad \frac{P_s}{2} = \frac{1}{6} \pi d_0 n h \left(\frac{7}{8} p \right)^2 p_t$$

因之

$$\begin{aligned} \text{魏垣氏式} \quad P &= \frac{\pi d_0 n h p^2 p_t}{3s} \\ &= \frac{\pi d_0 h p p_t}{3s} \dots\dots\dots(137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{守巒氏式} \quad P &= \frac{49 \pi d_0 n h p^2 p_t}{192s} \\ &= \frac{49 \pi d_0 h p p_t}{192s} \dots\dots\dots(137a) \end{aligned}$$

今使對於彎曲之強度與對於拉伸之強度相等, 而決定 h .

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{\pi d_0 h p p_t}{3s}$$

或
$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{49\pi d_0 h p p_t}{192s}$$

以 s 之值代入上式得

魏垣氏式
$$h = \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{p} d_0 = \frac{3}{4} \times 0.64 d_0$$

$$= 0.48 d_0 \dots\dots\dots (138)$$

守巒氏式
$$h = \frac{192}{4 \times 49} \cdot \frac{s}{p} d_0 = \frac{192}{4 \times 49} \times 0.65 d_0$$

$$= 0.636 d_0 \dots\dots\dots (138a)$$

故對於彎曲之破壞亦無須考慮之。

次就釘帽之破裂論之。設軸線方向之拉力在螺絲表面直角作用之壓力為 Q ，則

$$Q = \frac{P}{2} \sec \frac{\alpha}{2}$$

但 α 為螺絲頂角。魏垣氏式 為 55° ，守巒氏式 為 60° 。故

魏垣氏式
$$Q = \frac{P}{2} \times \frac{1}{\cos 27^\circ 30'} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{0.88701}$$

$$= 0.564 P$$

$$\begin{aligned} \text{守 登 氏 式 } Q &= \frac{P}{2} \times \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{0.86603} \\ &= 0.578 P \end{aligned}$$

今求上力之半徑方向分力 R .

$$\begin{aligned} \text{魏 垣 氏 式 } R &= Q \sin 27^\circ 30' = 0.564 P \times 0.46175 \\ &= 0.260 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{守 登 氏 式 } R &= Q \sin 30^\circ = 0.578 P \times 0.50000 \\ &= 0.289 P \end{aligned}$$

此 R 力作用於相反對之半徑方向，而使釘帽破裂。實際上 R 各少量作用於螺絲全面上，自釘帽上方至下方放射狀作用於各方向。今簡單上如上假定，極為安全。

抵抗此力之面為釘帽之縱斷面。其高 h 等於螺帽釘外徑 d ，其邊厚為 $\frac{1}{2}(D-d)$ 。但 D 為釘帽上一側面至對側面之寬。故抵抗面積在兩側為 $(D-d)d$ 平方吋。因之

$$\text{魏 垣 氏 式 } R = 0.260 P = (D-d)dp_t$$

$$\text{守 登 氏 式 } R = 0.289 P = (D-d)dp_t$$

今設螺帽釘對於拉伸之強度與釘帽對於破裂之強度相等，而決定 D ，則

$$\text{魏垣氏式} \quad \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{(D-d)d p_t}{0.260}$$

$$\text{守巒氏式} \quad \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{(D-d)d p_t}{0.289}$$

故

$$\text{魏垣氏式} \quad D = 0.260 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{d_0^2}{d} + d \dots\dots\dots (139)$$

$$\text{守巒氏式} \quad D = 0.289 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{d_0^2}{d} + d \dots\dots\dots (139a)$$

d_0 與 d 之關係因步距大小而異。若 p 未知，則不能解上式。但大略 d_0 以 d 代之，則上式爲

$$\text{魏垣氏式} \quad D = 1.204 d \dots\dots\dots (139b)$$

$$\text{守巒氏式} \quad D = 1.227 d \dots\dots\dots (139c)$$

然六角之一側面至對側面略爲 $1.732 d$ ，且上記之計算極近似而簡略者。實際之值較之尙小。故實際所用尺寸比例極爲安全。

例 1. 直徑 1 吋之圓鋼棒，其頂部切螺絲，而嵌入於釘帽，以支持重量。若可容拉內力爲

10,000 磅/平方吋時，問可支持幾許長度？但鋼重量爲每立方吋 0.284 磅。

由魏垣氏標準螺絲，若直徑 1 吋，每吋有 8 個螺絲。故螺絲底直徑 d_0 爲

$$d_0 = d - 2s = 1 - 2 \times 0.64 \times \frac{1}{8} = 0.840 \text{ 吋}$$

有效面積爲

$$\frac{\pi}{4} \times 0.840^2 = 0.5542 \text{ 平方吋}$$

故可支持之最大重量爲

$$P = p_t \times 0.5542 = 10,000 \times 0.5542 = 5,542 \text{ 磅}$$

直徑 1 吋長 1 吋之圓棒重量爲 $\frac{\pi}{4} \times 0.284 = 0.223$

磅，故可支持之最大長度 l 爲

$$l = \frac{5,542}{0.223} = 24,852 \text{ 吋} = 2,071 \text{ 呎}$$

第十一章

橫栓接合及縱栓接合

73. 串釘接合. 甲乙二物體接合時, 可使相互迴轉於軸周者, 其法以前記迴轉軸為中心線, 穿圓孔於甲乙二物體之上, 插入一釘於此孔中, 得所要之接合. 此稱曰串釘接合 (pin joint). 此時釘全自由, 而甲乙二物或皆不固定, 或固定其一. 有不能解離之永久接合, 亦有可解離之一時接合.

串釘接合多用以傳力於甲乙兩物體間. 受拉力或壓力或兩者之作用. 此時釘受剪斷作用, 故以複剪斷為有利. 使一方物體為叉形, 他方物體挾於其間, 而貫以釘. 即所謂叉接合 (forked joint) 是也. 釘對於甲乙兩部體 (大多為棒形) 之軸線成橫方向, 故稱為橫栓接合.

或
$$P = \frac{\pi}{4} d_0^2 p_t \dots \dots \dots (140a)$$

次就釘之剪斷論之。因複剪斷，故其直徑 d 吋爲

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 \times 1.75 \times p_s \dots \dots \dots (141)$$

(此係數不爲 2 而爲 1.75 者，蓋期安全也。參觀前章鉚釘接縫。)

或 $p_s = 0.8 p_t$ ，故

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{4} d^2 p_t \times 1.75 \times 0.8 \\ &= 1.4 \times \frac{\pi}{4} d^2 p_t \dots \dots \dots (141a) \end{aligned}$$

故棒與釘若有同一強度時，

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = 1.4 \times \frac{\pi}{4} d^2 p_t$$

或
$$d = \frac{1}{\sqrt{1.4}} d_0 = 0.845 d_0 \dots \dots \dots (141b)$$

若 A 部體之叉部與 B 部體外側相密着，則釘僅受剪斷作用。但大多數之情形，則兩者間鬆寬，且使用中亦生磨滅而有空隙。故釘自剪斷作用外，尙受樑之彎曲作用。然荷重之分布與

支點之位置不明，因串釘接合之狀態而不一定，故多設假定而求釘之尺寸。

設荷重分布於釘上，而兩支點跨徑為 $1.5d$ 。此長度即兩叉點內側間距離與外側間距離之中間之長。因之

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{3Pd}{8 \times 2} = \frac{3}{16}Pd \quad (P \text{ 爲均布荷重})$$

$$Z = \frac{\pi}{32}d^3$$

故
$$\frac{3}{16}Pd = \frac{\pi}{32}d^3 p_t \dots\dots\dots(142)$$

或
$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 p_t \dots\dots\dots(142a)$$

若對於彎曲之強與對於拉伸之強相等，則

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 p_t = P = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 p_t$$

因之
$$d = \sqrt{\frac{3}{2}} d_0 = 1.225 d_0 \dots\dots\dots(142b)$$

普通採 $d = 0.845 d_0$ 及 $d = 1.225 d_0$ 之中間值 $d = d_0$ 。

次求圓孔兩側及頂上之厚度。其精確計算甚難。僅能由種種假定而計算之，以供參考耳。

設兩側厚爲 b , 則抵抗拉力之面積爲 $2bd$. 故

$$P = 2bdp_t \dots \dots \dots (143)$$

然 $d = d_0$, 故

$$\frac{\pi}{4}d^2p_t = P = 2bdp_t$$

或
$$b = \frac{\pi d}{8} = 0.398d \dots \dots \dots (143a)$$

普通之尺寸爲 $b = 0.5d \sim 0.75d$.

對於頂上部, 則可視爲一樑, 荷重均布於其上. 若跨徑等於 d , 厚度爲 h , 則

$$M = \frac{Pd}{8} = \frac{1}{6}dh^2p_t$$

或
$$P = \frac{4}{3}h^2p_t \dots \dots \dots (144)$$

故
$$\frac{\pi}{4}d^2p_t = P = \frac{4}{3}h^2p_t$$

或
$$h = \sqrt{\frac{3\pi}{16}}d = 0.768d \dots \dots \dots (144a)$$

實際上尙較此安全. 普通比例爲 $h = 0.75d$.

兩叉部之寬合計之, 普通約爲中央部體之 1.25 倍乃至 1.50 倍. 此蓋備力之分布不均勻, 而荷重偏於一方時之用也.

例1. 受 $3\frac{1}{2}$ 噸拉力之棒上設有串釘接合。鋼之可容最大拉內力為10,000磅/平方吋。求各部之尺寸。

設棒之直徑為 d_0 ，由公式(140)，

$$d_0 = \sqrt{\frac{4P}{\pi p_t}} = \sqrt{\frac{4 \times 3.5 \times 2240}{3.14 \times 10,000}} = 1 \text{ 吋}$$

故釘之直徑亦為1吋。

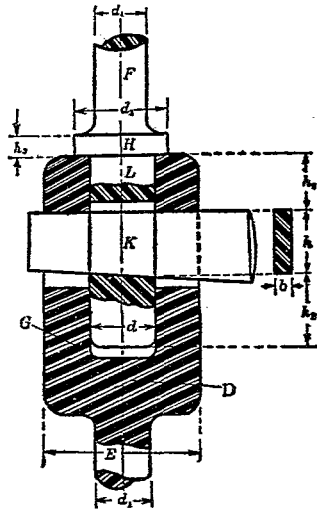
$$\text{圓孔兩側厚} \quad b = 0.5d = \frac{1}{2} \text{ 吋}$$

$$\text{圓孔頂上厚} \quad h = 0.75d = \frac{3}{4} \text{ 吋}$$

$$\text{兩叉部寬} \quad f = 0.625d = \frac{5}{8} \text{ 吋}$$

74. 楔接合。橫栓接合中自串釘接合而外，尚有用楔(cotter)之楔接合(cotter joint)。楔接合與串釘接合同樣，對於拉伸及壓縮而設計之。然使用有扁平側面之矩形或其他類似之斷面之楔，故兩物體結合而成爲若一物體者。其間不能生關係運動。但有時軸線方向上楔孔之長較楔之長大，使兩物體位置可有軸線方向上之調整。

若楔孔各側與楔各側密着時，則拉伸與壓縮二者均可由楔傳達。若軸線方向有空隙時，則其一者必由他法傳達。普通拉力以楔傳送，而壓力以他法傳達。第 119 圖上方部體 F 上有鐓 (collar)，與下方部體 B 之承孔 (socket) G 之上面相接觸。由此以傳達壓力。有时无鐓，承孔內面及其插入之上方部體 L 不為圓筒形，而附有



第 119 圖

傾斜。由此以傳壓力。長度之調整，因摩擦所生之空隙。故楔之一側為傾斜面，移動於長之方向可調整之。楔面之斜度普通為 $\frac{1}{8}$ 乃至 $\frac{1}{4}$ 。

強度計算略與串釘接合時同。但楔之厚小，故支承面之壓力相當大。今詳述之可分為受拉力部分，受剪力部分，及受壓力部分之三種。又受彎曲作用之部分亦存在。第119圖上受拉力部分為棒 E 及 F ，延長部 L ，及承孔 G 。受剪力部分為承孔內側之楔斷面，楔上部之承孔壁，鏢 H ，及楔下部之 L 。受壓力部分為楔， L ，承孔 G 及鏢 H 。又楔亦受彎曲作用。

楔上力之作用狀態雖不明，今假定其為均布荷重作用之樑而計算之(119圖參照)。

先由受拉力部分求之。

$$\text{棒 } E \text{ 及 } F \text{ 上 } P = \frac{\pi}{4} d_1^2 p_t \dots\dots\dots(145)$$

$$\text{延長部 } L \text{ 上 } P = \left(\frac{\pi}{4} d^2 - bd \right) p_t \dots\dots\dots(145a)$$

承孔 G 上 $P = \left[\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) - b(D - d) \right] p_t$ (145b)

次由受剪力部分求之。

楔 K 上 $P = 2bh p_s$ (146)

延長部 L 上 $P = 2dh_2 p_s$ (146a)

承孔 G 上 $P = 2(D - d)h_1 p_s$ (146b)

鏢 H 上 $P = \pi d h_3 p_s$ (146c)

次由受壓力部求之。

楔 K 上 $P = bd p_c$ (147)

延長部 L 上 $P = bd p_c$ (147a)

承孔 G 上 $P = b(D - d) p_c$ (147b)

鏢 H 上 $P = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d^2) p_c$ (147c)

次由受彎曲作用部求之。

楔 K 上, $M = \frac{Pd}{8} = \frac{bh^2}{6} p_t$

或 $P = \frac{4}{3} \cdot \frac{bh^2}{d} p_t$ (148)

今先由 (146), (148) 二式, 則

$$2bh p_s = P = \frac{4}{3} \cdot \frac{bh^2}{d} p_t$$

對於鋼則 $p_s = 0.8p_t$, 故

$$= \frac{2 \times 0.8 \times 3}{4} d = 1.2d \dots\dots\dots(149)$$

將此值代入於(146), 與(145a)組合之, 得

$$2.4bdp_s = P = \left(\frac{\pi}{4}d - b\right)d p_t$$

或 $2.4 \times 0.8b = \frac{\pi}{4}d - b$

故 $(1.92 + 1)b = \frac{3.14}{4}d$

$$b = \frac{3.14}{2.92 \times 4} d = 0.269d \dots\dots\dots(149a)$$

普通 $b = \frac{1}{4}d$.

由(147a)及(147b), 得

$$bdp_c = P = b(D - d)p_c$$

或 $D = 2d \dots\dots\dots(150)$

自他式求 D 時, 尚較此值為小, 故取此值.

延長部 L 之支承面充分與否, 由(145a)及(147a)

比較之,

$$bdp_c = P = \left(\frac{\pi}{4}d - b\right)dp_t$$

但 $b = \frac{1}{4}d$, 故

$$\frac{1}{4}d^2p_c = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right)d^2p_t$$

因之, $p_c = (\pi - 1)p_t = 2.14p_t \dots\dots\dots(151)$

此值實用上可無妨礙.

次由剪力可計算承孔 G 及延長部 L 處長度 h_1 及 h_2 . 而鏢 H 之尺寸, 則取鏢之可容支承壓力為楔之 $\frac{2}{3}$, 組合 (147) 與 (147c),

$$bdp_c = P = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d^2) \frac{2}{3}p_c$$

或
$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{d^2}{4} = d_2^2 - d^2$$

$$\therefore d_2 = \sqrt{\frac{3}{2\pi} + 1} \cdot d = 1.215d \dots\dots\dots(152)$$

由 (146) 及 (146c), 可求厚度.

$$2bh_3p_s = P = \pi dh_3p_s$$

或
$$2\left(\frac{1}{4}d\right)\left(\frac{5}{4}d\right) = \pi dh_3$$

故
$$h_3 = \frac{2 \times 5}{4 \times 4 \times \pi} d = 0.199d \dots \dots \dots (152a)$$

最後求棒直徑 d_1 與延長部直徑 d 之關係。由 (145) 及 (145a), 且 $b = \frac{d}{4}$, 得

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 p_t = P = \left(\frac{\pi}{4} d^2 - \frac{1}{4} d^2 \right) p_t = \frac{2.14}{4} d^2 p_t$$

故
$$d = \sqrt{\frac{3.14}{2.14}} d_1 = 1.21d_1 \dots \dots \dots (153)$$

以上計算, 假定楔與棒為同一材料, p_t, p_s, p_c 等均有同一值。但有時楔特用強韌材料, 因之尺寸比例與上述稍異。此時楔之 p_t, p_s, p_c 值與棒之 p_t, p_s, p_c 值各應用於前記十二個式中以求適當之尺寸比例也。

例 2. 第 120 圖所示楔接合上, 加以 $3\frac{1}{2}$ 噸之拉力。求各部內力之值。

由題意 $P = 3.5 \text{ 噸} = 7,840 \text{ 磅}$

$$d = 1\frac{1}{4} \text{ 吋}, \quad d_1 = 1 \text{ 吋}$$

$$D = 2\frac{1}{2} \text{ 吋,}$$

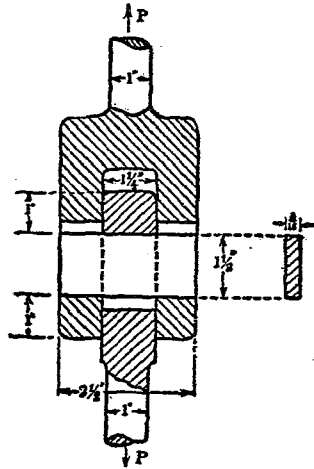
$$b = \frac{5}{16} \text{ 吋,} \quad h = 1\frac{1}{2} \text{ 吋}$$

$$h_1 = 1 \text{ 吋,} \quad h_2 = 1 \text{ 吋}$$

代入上之各式, 求 p_t , p_s , p_c .

對於棒, 則由 (145),

$$p_t = \frac{4}{3.14} \times 7,840 = 10,000 \text{ 磅/平方吋}$$



第 120 圖

對於延長部，則由 (145a), (146a) 及 (147a),

$$p_t = \frac{7,840}{\left\{ \frac{3.14}{4} \times \left(\frac{5}{4} \right)^2 - \frac{5}{16} \times \frac{5}{4} \right\}}$$

$$= 9,400 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_s = \frac{7,840}{2 \times \frac{5}{4} \times 1} = 3,140 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_c = \frac{7,840}{\frac{5}{16} \times \frac{5}{4}} = 20,000 \text{ 磅/平方吋}$$

對於承孔，則由 (145b), (146b), 及 (147b),

$$p_t = \frac{7,840}{\left[\frac{3.14}{4} (2.5^2 - 1.25^2) - \frac{5}{16} (2.5 - 1.25) \right]}$$

$$= 2,380 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_s = \frac{7,840}{2 \times (2.5 - 1.25) \times 1} = 3,140 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_c = \frac{7,840}{\frac{5}{16} (2.5 - 1.25)} = 20,000 \text{ 磅/平方吋}$$

對於楔，則由 (146), (147), 及 (148),

$$p_s = \frac{7,840}{2 \times \frac{5}{16} \times \frac{3}{2}} = 8,360 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_c = \frac{7,840}{\frac{5}{16} \times \frac{5}{4}} = 20,000 \text{ 磅/平方吋}$$

$$p_t = \frac{7,840 \times 3 \times \frac{5}{4}}{4 \times \frac{5}{16} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 10,460 \text{ 磅/平方吋}$$

75. 縱栓接合。縱栓(key)者，插入於軸與其附着部分之間，而傳達迴轉運動者也。受剪斷作用。有三種：僅與軸表面因摩擦而接觸運動者，曰摩擦縱栓(friction key)；以平面接觸於軸表面而傳運動者，曰平面上縱栓(key on the flat)；軸表面有栓溝(key-way)，嵌入於其內而傳運動者，曰嵌入縱栓(sunk key)。前二種比較鮮用，而嵌入縱栓最多用之。以上任何種類，軸上附着之物體中均設有栓溝，以縱栓背部嵌入於其內。

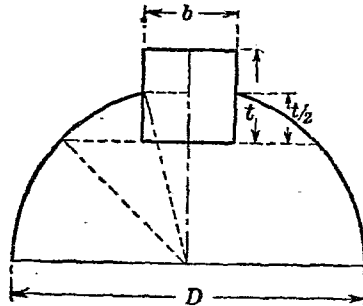
縱栓為正方形或矩形之斷面，兩側密着於栓溝而傳力。但上下兩面未必須密着於栓溝底

面。傳達迴轉運動時，若同時須防附着物體之軸線方向移動時，則上下兩面使不平行而附以極小之傾斜。擊入時如楔之作用。

軸之直徑與縱栓大小之比例普通有一定之表。以用實驗的數值為宜。計算時先用前述扭作用之軸之計算法，而與次述縱栓計算相比較，使軸與縱栓略有同一強度而決定之。

縱栓於長方向上受剪力而破斷，同時接觸於軸或殼之側面受壓力。故須研究此二種之抵抗。

第 121 圖上壓縱栓側面之力設為 P 磅，縱栓



第 121 圖

之寬爲 b 吋，長爲 l 吋時，

$$P = blp_s \dots\dots\dots(154)$$

設加於軸上之扭轉能率爲 T 吋磅，軸之外徑爲 D 吋，則

$$T = P \frac{D}{2}, \quad P = \frac{2T}{D}$$

而
$$p_s = \frac{2T}{blD} \dots\dots\dots(154a)$$

由軸之強度考察之，則

$$T = \frac{\pi}{16} D^3 p_s'$$

故
$$\frac{blD}{2} p_s = \frac{\pi}{16} D^3 p_s'$$

若軸與縱栓爲同一材料所成，則 $p_s = p_s'$ ，故

$$b = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{D^2}{l} \dots\dots\dots(155)$$

次由縱栓側面之壓力考察之，則支承面寬 $\frac{t}{2}$

吋，長 l 吋，故

$$P = \frac{t}{2} l \cdot p_c \dots\dots\dots(156)$$

或
$$p_c = \frac{4T}{tD} \dots\dots\dots(156a)$$

由此式與(154 a), 則

$$t = \frac{2P_s b}{p_c} \dots\dots\dots(157)$$

對於鋼則

$$p_c = 2p_s$$

故

$$t = b \dots\dots\dots(157a)$$

第十二章

聯合內力

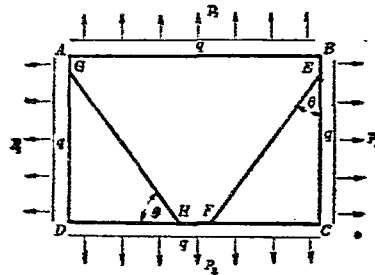
76. 主內力. 以上各章大體就材料強度學之初步論之, 今稍涉及高等研究.

一物體於種種方向之平面上受垂直內力與剪內力之作用. 其方向及內力之大小若均已知時, 則某方向平面上所作用之垂直內力與剪內力之大小及方向, 可就各內力對於該平面之方向, 求其垂直及平行諸分內力而計算其代數和即可.

若就通過物體內一點之平面, 由前記方法求其上之內力, 而適無剪內力之存在, 僅有垂直內力作用時, 則此方向之平面曰主平面 (principal plane). 該平面上作用之垂直內力之強, 曰該點上主內力 (principal stress).

內力狀態雖任何複雜，常有三個互成直角之主平面之存在。其對應三主內力中，一個較他二者為大，他一個較他二者為小。且有時主內力中之一有為零或為極小而可視為零者。若此時則無考論立體之必要，僅為平面的，以下先就此論之。

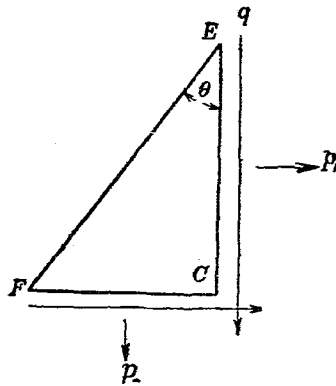
今設互成直角二平面，其一方加以垂直內力 p_1 ，他方加以垂直內力 p_2 。且其上各有 q 之剪內力。第 122 圖示上述之矩形片 $ABCD$ ，其厚為單位長。平行於紙面之平面上無內力作用。上記內力若距離大時，或有變化。但設矩形甚小



第 122 圖

故視爲無變化者。此等 p_1 , p_2 , 及 q 之內力可視爲多數外力之結果, 求各外力之垂直及平行分力, 合成之而得 p_1 , p_2 , 與 q 。

如上之內力狀態已知後, 若須求主平面之方向及主內力之值, 則如下法。第 122 圖上與 BC 面成某角度之 EF 面設爲主平面之一。則該面上內力 p 必全垂直於平面, 而無剪內力之存在。今取離此三角形板 EFC 而研究其平衡條件。(第 123 圖參照。) 作用於面 EF , EC , FC 之力各爲



第 123 圖

$p \cdot \overline{EF}$, $p_1 \cdot \overline{EC}$, $q \cdot \overline{EC}$, $p_2 \cdot \overline{FC}$ 及 $q \cdot \overline{FC}$. 此等之力平行於 EC 之分力, 及平行於 FC 之分力必須各平衡. 故

$$p \cdot \overline{EF} \cos\theta = p_1 \cdot \overline{EC} + q \cdot \overline{FC}$$

$$p \cdot \overline{EF} \sin\theta = p_2 \cdot \overline{FC} + q \cdot \overline{EC}$$

然 $\overline{EC} = \overline{EF} \cos\theta$, $\overline{FC} = \overline{EF} \sin\theta$,

故 $p \cdot \cos\theta = p_1 \cos\theta + q \cdot \sin\theta$

$$p \cdot \sin\theta = p_2 \sin\theta + q \cdot \cos\theta$$

或 $(p - p_1) \cos\theta = q \cdot \sin\theta \dots\dots\dots(158)$

$$(p - p_2) \sin\theta = q \cdot \cos\theta \dots\dots\dots(159)$$

或 $p - p_1 = q \cdot \tan\theta \dots\dots\dots(158a)$

$$p - p_2 = q \cdot \cot\theta \dots\dots\dots(159a)$$

因之, $p_1 - p_2 = q (\cot\theta - \tan\theta) = \frac{2q}{\tan 2\theta}$

或 $\tan 2\theta = \frac{2q}{p_1 - p_2} \dots\dots\dots(160)$

正切之值由 $+\infty$ 至 $-\infty$ 均存在. 故 q , p_1 , p_2 雖爲任何值, θ 之值必可存在. 由上式則 θ 有相差 90 度之二值存在. 即必可有相成直角之二主

平面也明矣。

次設主內力之值爲 p 及 p' ，則將 (158) 與 (159) 相乘，得

$$(p-p_1)(p-p_2) = q^2 \dots\dots\dots (161)$$

或 $p^2 - p'(p_1 + p_2) + (p_1 p_2 - q^2) = 0 \dots\dots\dots (161a)$

解此二次式，可得 p 及 p' 。其值爲

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{p_1 + p_2}{2} + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(p_1 - p_2)^2} \\ p' &= \frac{p_1 + p_2}{2} - \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(p_1 - p_2)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (162)$$

p 爲最大內力，與 p_1 及 p_2 有同一方向。 p' 作用於 p 平面之直角平面 GH 上。若 q^2 較 $p_1 p_2$ 大時，與 p 有反對之方向。

77. 主歪。第二章中曾述內力之強 p_1 (例如拉內力) 在彈性限界以內時，則其作用方向上生 e_1 之歪。若橫方向上之歪被制止時，則 e_1 之值爲

$$e_1 = \frac{p_1}{E}$$

但 E 爲縱彈性係數。然內力 p_1 方向之諸直角方向上，生反對之歪（此時爲收縮）。其值爲 $\frac{p_1}{mE}$ 。但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比。同樣， p_1 之直角方向上所加內力 p_2 ，對於其作用方向上生

$$e_2 = \frac{p_2}{E}$$

之歪。而其直角方向上生 $-\frac{p_2}{mE}$ 之歪。而 p_1 方向上亦受此歪。

若第三內力 p_3 作用於 p_1, p_2 之直角方向時，則 p_3 方向上生

$$e_3 = \frac{p_3}{E}$$

之歪。同時 p_1 及 p_2 方向上生 $-\frac{p_3}{mE}$ 之歪。

今設此 p_1, p_2, p_3 之互成直角三內力爲某點上三主內力，則此等各獨立作用時，各生 e_1, e_2, e_3 之歪於其自己方向，而生 $-\frac{e_1}{m}, -\frac{e_2}{m}, -\frac{e_3}{m}$ 之歪於其直角方向上。但此等同時作用，故一

內力方向上之歪受他內力所生之歪之影響。因之，

$$e_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{p_2 + p_3}{mE} \dots\dots\dots (163)$$

$$e_2 = \frac{p_2}{E} - \frac{p_3 + p_1}{mE} \dots\dots\dots (163a)$$

$$e_3 = \frac{p_3}{E} - \frac{p_1 + p_2}{mE} \dots\dots\dots (163b)$$

此計算中 p_1, p_2, p_3 各設為拉內力。但其中若有壓內力，或皆為壓內力時，可變內力之符號而容易求得。此 e_1, e_2, e_3 各為與主內力 p_1, p_2, p_3 相當之主歪 (principal strain)。

例 1. 有一棒裝置之使不生橫方向上收縮，而拉伸之。則縱方向上彈性係數受如何變化？

縱彈性係數為收縮可自由時，內力與歪之比。故

$$E = \frac{p_1}{e_1}$$

若防止收縮後歪量為 e_1' ，則此時彈性係數為

$$E' = \frac{p_1}{e_1'}$$

E 與 E' 相異, 防止收縮時, p_1 直角方向之 p_2, p_3 內力必作用, 此三內力爲主內力。

由 (163a) 與 (163b),

$$e_1' = \frac{p_1}{E} - \frac{p_2 + p_3}{mE} \dots\dots\dots (a)$$

$$0 = \frac{p_2}{E} - \frac{p_3 + p_1}{mE} \dots\dots\dots (b)$$

$$0 = \frac{p_3}{E} - \frac{p_1 + p_2}{mE} \dots\dots\dots (c)$$

由 (b), (c) 二式,

$$p_2 = p_3$$

代入於 (b),

$$p_2 = \frac{p_2 + p_1}{m} \quad \text{或} \quad p_2 = \frac{p_1}{m-1}$$

代入於 (a),

$$e_1' = \frac{p_1}{E} - \frac{2p_1}{m(m-1)E}$$

$$\text{或} \quad e_1' = \frac{p_1}{E} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} = \frac{p_1}{E} \cdot \frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)}$$

$$\text{但} \quad e_1' = \frac{p_1}{E'}$$

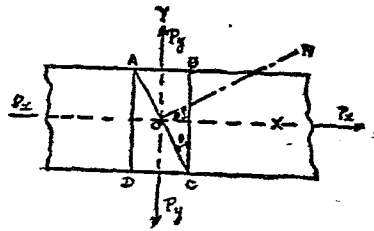
$$\text{故} \quad E' = E \times \frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}$$

設 $m=4$, 則

$$E' = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} E = 1.2E$$

78. 傾斜面上之內力. 互成直角二面上作用之垂直內力爲已知, 而該兩面之垂直面上無內力作用時, 則垂直於第三面而與初二面成傾斜之他一面上所作用之內力可求. 即主內力已知時, 對於主平面傾斜之面上所作用內力可求也.

第 124 圖上主內力 p_x, p_y 設爲同一種類之內



第 124 圖

力. $ABCD$ 之矩形片 (厚爲單位長) 爲平衡. 今以與 BC 成 θ 角之面分爲二三面形片. 面 AC 上內力有垂直內力 p 及剪內力 q . 此與 AB 及 BC

面上垂直內力 p_x 及 p_y 相平衡。故取 AC 之垂直及平行之分力，則

$$p \cdot \overline{AC} = p_x \cdot \overline{BC} \cdot \cos \theta + p_y \cdot \overline{AB} \cdot \sin \theta$$

$$q \cdot \overline{AC} = p_x \cdot \overline{BC} \cdot \sin \theta - p_y \cdot \overline{AB} \cdot \cos \theta$$

兩式各邊以 \overline{AC} 除之，則因

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \cos \theta, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \sin \theta,$$

$$\text{故} \quad p = p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta \dots\dots\dots(164)$$

$$q = (p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta = \frac{p_x - p_y}{2} \sin 2\theta \dots(165)$$

由 (165) 可求 q 之最大值。即 $\sin 2\theta$ 當 $2\theta = 90^\circ$ 或 $\theta = 45^\circ$ 時為最大。故

$$q_{\max} = \frac{p_x - p_y}{2} \dots\dots\dots(166)$$

此時之 p 為

$$p = \frac{p_x + p_y}{2} \dots\dots\dots(167)$$

若 p_x 與 p_y 為反對種類之內力，則符號相異。即以 $-p_y$ 代 p_y 或 $-p_x$ 代 p_x 可也。此時

$$p = p_x \cos^2 \theta - p_y \sin^2 \theta \dots\dots\dots(164a)$$

$$q = \frac{p_x + p_y}{2} \sin 2\theta \dots\dots\dots(165a)$$

$\theta = 45^\circ$ 時,

$$q_{max} = \frac{p_x + p_y}{2} \dots\dots\dots(166a)$$

$$p = \frac{p_x - p_y}{2} \dots\dots\dots(167a)$$

若 $\theta = 45^\circ$, 而 $p_x = p_y$, 則 $p = 0$, $q = p_x$. 即單純剪之狀態也。

今設 AC 面上 p, q 之合內力為 r . 則 $r \times \overline{AC}$ 必與 AB, BC 面上垂直內力總量之合力相平衡。

$$\begin{aligned} \therefore r \cdot \overline{AC} &= \sqrt{(p_x \cdot \overline{BC})^2 + (p_y \cdot \overline{AB})^2} \\ &= AC \sqrt{p_x^2 \cos^2 \theta + p_y^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

故 $r = \sqrt{p_x^2 \cos^2 \theta + p_y^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{p^2 + q^2} \dots\dots(168)$

每 AC 平面單位面積上沿 OX, OY 之分力各為 $p_x \cos \theta, p_y \sin \theta$. 設合內力 r 與 OX 成 α 角, 則

$$\tan \alpha = \frac{p_y \sin \theta}{p_x \cos \theta} = \frac{p_y}{p_x} \cdot \tan \theta \dots\dots\dots(169)$$

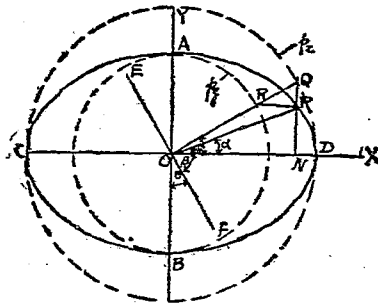
又設合內力 r 與 AC 平面成 β 角, 則

$$\tan \beta = \frac{p}{q} = \frac{p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta}{(p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta}$$

79. 內力之橢圓. 第124圖上二主內力 p_x, p_y 爲已知, 而紙面上直角方向無第三主內力. 任何平面上內力之大小與方向可由圖式求之.

第125圖上以 O 爲中心作二圓 CQD 及 ARB . 其半徑各與二主內力 p_x, p_y 爲比例. 任意一中間平面 EF 上作垂直線 OQ , 與大圓交於 Q , 與小圓交於 R . 作 QN 垂直於 OX , 及 RP 垂直於 OY , 與 QN 交於 P . 則 OP 即表該平面上合內力 r 之大小與方向. 對於各傾斜平面求 P 點軌跡, 可知其爲一橢圓. 蓋

$$ON = OQ \cos \theta = p_x \cos \theta$$



第 125 圖

對於此彈性的破損 (elastic failure) 有下之三說。

(a) 最大主內力說, 即最大主內力達一定值時而起破損。

(b) 最大主歪說, 即最大主歪達一定值時而起破損。

(c) 最大剪內力說, 即最大剪內力達一定值時而起破損。此最大剪內力即與主內力之最大差為比例。 (§ 78 (166) 式.)

第一之 (a) 說為藍慶 (Rankine) 之主張, 主行於英國。第二說之 (b) 主發達於歐洲大陸, 而第三說之 (c) 則係最近之學說, 為蓋斯脫 (J. J. Guest) 所主唱。其理論與實驗結果之關係, 目下正研究之也。

脆性 (brittle) 材料似以最大主內力說為正, 延性 (ductile) 材料似因最大剪內力說而破損。對於一般材料之共通關係式雖有, 但須求實驗常數, 未有確論。

今就同一面上垂直內力 p_1 及剪內力 q 作用

時,例示上記三說如次.

由最大主內力說,則最大主內力爲

$$p = \frac{1}{2}p_1 + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}p_1^2} \dots\dots\dots (170)$$

由最大主歪說,則最大主歪爲

$$e_1 = \frac{p}{E} - \frac{p'}{mE} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} p_1 + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \right\} \\ - \frac{1}{mE} \left\{ \frac{1}{2} p_1 - \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \right\}$$

或
$$Ee_1 = \frac{1}{2}p_1 \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}p_1^2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \dots\dots\dots (171)$$

但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比.

若 $m=4$, 則相當單純內力 (equivalent simple stress) 爲

$$Ee_1 = \frac{3}{8} p_1 + \frac{5}{4} \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \dots\dots\dots (171a)$$

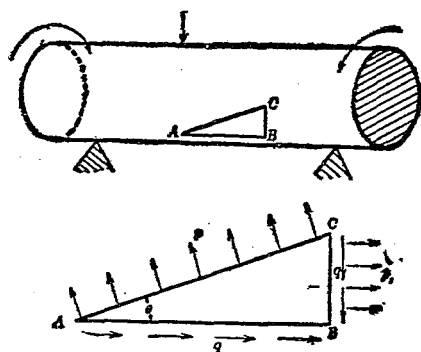
由最大剪內力說,則

$$\frac{p-p'}{2} = \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} \dots\dots\dots (172)$$

81. 彎與扭之聯立. 軸迴轉時若僅有偶力

所生之扭作用，則如前所述，惟受剪內力。然大多因軸自身重量與運轉力，受彎曲能率之作用。因之自剪內力外常受他種內力。故此時作用於軸上之內力為垂直於軸線之面上之剪內力，平行於軸線方向上作用之垂直內力，及平行於軸線面上作用之剪內力是也。

今於第127圖上，軸之外皮當垂直內力與剪內力最大之處，設有一微小直角三角形 ABC 。而設 AC 為主平面之一。 AC 上作用之內力必皆為垂直內力，而為內力中最大或最小者。因



第 127 圖

彎曲作用所生內力，爲平行於 AB ，而作用於 BC 上之 p_1 ，因扭作用所生之內力，爲沿 AB 與 BC 作用之 q 。故垂直於 AC 之主內力 p ，由 (162)

$$p = \frac{p_1}{2} + \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}}$$

$$p' = \frac{p_1}{2} - \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}}$$

今設 M 爲作用於軸之彎曲能率， T 爲作用於軸之扭轉能率， d 爲軸之外徑，則

$$M = p_1 \frac{\pi}{32} d^3, \quad \text{或} \quad p_1 = \frac{32M}{\pi d^3}$$

$$T = q \frac{\pi}{16} d^3, \quad \text{或} \quad q = \frac{16T}{\pi d^3}$$

以此值代入前式，得最大值 p 爲

$$p = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + T^2}) \dots\dots\dots(173)$$

或

$$p = \frac{32}{\pi d^3} \left(\frac{M}{2} + \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{2} \right) \dots\dots\dots(174)$$

即 (173) 示與括弧內相等值之扭轉能率作用時所生軸之內力之式，而 (174) 示與括弧內相等

值之彎曲能率作用時所生軸之內力之式。設 T_i 爲相當扭轉能率 (equivalent twisting moment), M_i 爲相當彎曲能率 (equivalent bending moment). 假想 T 與 M 不同時作用, 而僅有 T_i 或 M_i 單獨作用。此時

$$T_i = M + \sqrt{M^2 + T^2} \dots\dots\dots(173a)$$

$$M_i = \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + T^2}) \dots\dots\dots(174a)$$

若由英國之最大主內力說 (maximum principal stress theory), 則 (173), (174) 兩式示材料之安全使用內力。而上示之 T_i 與 M_i 爲由最大主內力說之相當扭轉能率與相當彎曲能率。若由歐洲大陸所使用之最大主歪說 (maximum principal strain theory), 則

$$e = \frac{p}{E} - \frac{p'}{mE}$$

$$\text{或 } Ee = \frac{p_1}{2} + \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}} - \frac{1}{m} \left(\frac{p_1}{2} - \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}} \right)$$

$$= \frac{p_1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}} \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

若 $m=4$, 則 $Ee = \frac{3}{8} p_1 + \frac{5}{4} \sqrt{q^2 + \frac{p_1^2}{4}}$

或 $Ee = \frac{3}{8} \cdot \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{T^2 + M^2}$

或 $Ee \cdot \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{3}{4} M + \frac{5}{4} \cdot \sqrt{M^2 + T^2} \dots (173b)$

$Ee \cdot \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{3}{8} M + \frac{5}{8} \sqrt{M^2 + T^2} \dots (174b)$

故 $T_i' = \frac{3}{4} M + \frac{5}{4} \sqrt{M^2 + T^2} \dots (173c)$

$M_i' = \frac{3}{8} M + \frac{5}{8} \sqrt{M^2 + T^2} \dots (174c)$

T_i' 為由最大主歪說之相當扭轉能率, M_i' 為其相當彎曲能率. (174c) 中右邊 M 之係數在德國書籍中為 0.35, 而第二項之係數為 0.65.

若由最近之最大剪內力說 (maximum shear stress theory), 則由 (172),

$$\begin{aligned} \frac{p-p'}{2} &= \sqrt{q^2 + \frac{1}{4} p_1^2} = \sqrt{\frac{16^2 T^2}{\pi^2 d^6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{32^2 M^2}{\pi^2 d^6}} \\ &= \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{T^2 + M^2} \dots (173d) \end{aligned}$$

故
$$T_i'' = \sqrt{T^2 + M^2} \dots \dots \dots (173e)$$

T_i'' 爲由最大剪內力說之相當扭轉能率。

通常 (173a) 稱曰藍慶 (Rankine) 之公式, (173e) 稱曰蓋斯脫 (Guest) 之公式。由藍慶公式設計之圓軸, 較由蓋斯脫公式者爲小。

例 2. 直徑 3 吋之圓棒受 40,000 磅吋之扭轉能率, 與 10,000 磅吋之彎曲能率。求最大主內力。剪內力之強爲

$$q = \frac{16 \times 40,000}{\pi \times 3^3} = 7,544 \text{ 磅/平方吋}$$

垂直內力之強爲

$$p_1 = \frac{32 \times 10,000}{\pi \times 3^3} = 3,722 \text{ 磅/平方吋}$$

故最大主內力爲

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \times 3,722 + \sqrt{7,544^2 + \frac{1}{4} \times 3,722^2} \\ &= 9,664 \text{ 磅/平方吋} \end{aligned}$$

例 3. 有 36,000 磅吋之扭轉能率與 40,850 磅吋之彎曲能率同時作用之鋼軸, 設安全使用內力爲 10,000 磅/平方吋時, 求所需直徑幾何?

由最大主內力說, 求相當彎曲能率,

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2}(M + \sqrt{T^2 + M^2}) \\ &= \frac{1}{2}(40,850 + \sqrt{36,000^2 + 40,850^2}) \\ &= \frac{1}{2}(40,850 + 54,450) = 47,650 \text{ 磅吋} \end{aligned}$$

故 $d = \sqrt[3]{\frac{32 \times 47,650}{\pi \times 10,000}} = 3.647 \text{ 吋}$

由最大主歪說, 求相當彎曲能率,

$$\begin{aligned} M_i' &= \frac{3}{8}M + \frac{5}{8}\sqrt{T^2 + M^2} \\ &= \frac{3}{8}40,850 + \frac{5}{8} \times 54,450 = 15,320 + 34,030 \\ &= 49,350 \text{ 磅吋} \end{aligned}$$

故 $d = \sqrt[3]{\frac{32 \times 49,350}{3.14 \times 10,000}} = 3.693 \text{ 吋}$

由最大剪內力說, 求相當扭轉能率,

$$T_i'' = \sqrt{M^2 + T^2} = 54,450 \text{ 磅吋}$$

此時安全剪內力爲

$$\frac{10,000}{2} = 5,000 \text{ 磅/平方吋,}$$

故
$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 54,450}{\pi \times 5,000}} = 3.81 \text{ 吋}$$

問 題

1. 直徑 12 吋之軸受 100 呎噸之扭轉能率與 20 呎噸之彎曲能率。求其所生之最大內力。

2. 直徑 4 吋之鋼軸,其所受彎曲能率為扭轉能率之 $\frac{5}{8}$ 。設最大安全內力為 10,000 磅/平方吋,軸之迴轉數每分為 180,問可傳送馬力幾何?

3. 橫方向中一者之膨脹全為阻止時之彈性係數,與自由可膨脹時對於普通壓縮之彈性係數,其關係如何?

4. 受 160 呎噸扭轉能率與 40 呎噸彎曲能率之軸,其最大安全內力限定於 4 噸/平方吋時,實體圓軸之直徑幾何?

5. 前題之軸若為內徑等於外徑之 0.6 倍之中空圓軸,其外徑幾何?

6. 直徑 $2\frac{1}{2}$ 吋,每分 100 迴轉之軸,受 6 吋噸之彎曲能率時,若限定其最大安全內力為 5 噸/平方吋,則可傳馬力幾何?

第十三章

曲 樑

82. 曲樑. 第四章所述之樑,其軸線爲直線. 然受彎曲作用,可視爲樑之機械部分,有彎曲之軸線者亦復不少. 此等之樑曰曲樑 (curved beam). 其解法與直樑 (straight beam) 稍異.

曲樑之曲率 (curvature) 小時,即對於斷面尺寸,曲率半徑 (radius of curvature) 大時,可將直樑之公式少變形後應用之.

例如曲樑之最初半徑爲 R ,彎曲後半徑爲 R_1 ,則橫斷面上距中性軸 y 處之點上作用之內力 f 爲

$$f = E \cdot y \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \dots \dots \dots (175)$$

(參照第四章公式 (40) 及 (59).)

此彎曲時所需彎曲能率 M 爲

$$M = EI \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \dots \dots \dots (176)$$

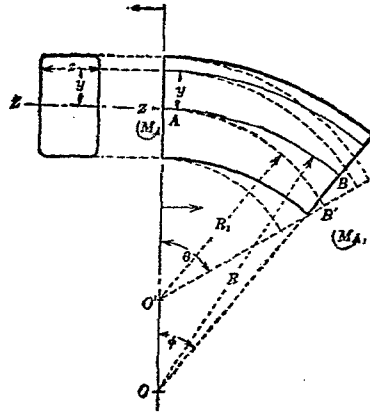
但 E, I 之意義與第四章同。

然曲率大之曲樑，例如鉤 (hook)，環 (link) 等，則此等之式不能即應用之。

此等曲樑之橫斷面尺寸較樑之長或曲率半徑為大，故不在直樑時所假定之制限內。因之由直樑之理論而解決時，理論上非屬嚴密，不過為實用上近似解法耳。

今假定通過斷面中心之中心線，當彎曲前後，在同一平面內，且斷面為均一。設 R 為最初軸線之曲率半徑， R_1 為彎曲後曲率半徑。此彎曲時，設樑兩端加以等大反向之偶力 M 。此即如直線樑時之單純彎曲也。

如圖所示垂直於軸線之切斷面上，設有 ZZ 線通過中心而與曲率半徑成直角。任意點自此線之距設為 y ，自曲率中心向外者為正，向內者為負。又設垂直於 y 之寬設為 z ，斷面積為 A 。



第 128 圖

就曲樑中一小部分 AB , 延長其兩端面交於 O . 其間角度設為 ϕ . 彎曲後之交點即曲率中心設為 O' , 中心角度設為 θ . 則自中央軸線 ZZ 距 y 處層之最初長度為

$$(R+y)\phi$$

彎曲後 y 變為 y_1 , 而其長為

$$(R_1+y_1)\theta$$

故此層長度之變化為

$$(R_1+y_1)\theta - (R+y)\phi$$

而歪 e 爲

$$e = \frac{(R_1 + y_1)\theta}{(R + y)\phi} - 1 \dots\dots\dots(177)$$

設中心線之歪爲 e_0 , 其彎曲後長度爲

$$R_1\theta = R\phi(1 + e_0) \dots\dots\dots(178)$$

因之

$$\frac{\theta}{\phi} = (1 + e_0) \frac{R}{R_1} \dots\dots\dots(179)$$

此值代入於(177), 則

$$\begin{aligned} e &= \frac{R_1 + y_1}{R + y} \times \frac{R}{R_1} (1 + e_0) - 1 \\ &= \frac{1 + \frac{y_1}{R_1}}{1 + \frac{y}{R}} (1 + e_0) - 1 \dots\dots\dots(180) \end{aligned}$$

實際上 y 與 y_1 之差甚小, 可略去之, 因之 $y = y_1$,

則上式爲

$$\begin{aligned} e &= \frac{1 + \frac{y}{R_1}}{1 + \frac{y}{R}} (1 + e_0) - 1 \\ &= \frac{y(1 + e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right)}{1 + \frac{y}{R}} + e_0 \dots\dots\dots(181) \end{aligned}$$

次設此歪如普通之拉伸歪可自由起生，而求與此歪 e 相當之內力 f ，則

$$f = eE$$

與直樑時同樣，內力總和為零，則

$$\Sigma f dA = 0, \text{ 或 } E \Sigma e dA = 0$$

由 (181)，

$$(1+e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y}{1+\frac{y}{R}} dA \right) + e_0 \cdot A = 0 \dots (182)$$

或

$$R(1+e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y}{R+y} dA \right) + e_0 \cdot A = 0 \dots (182a)$$

又彎曲能率與抵抗能率相等，由此求 M 之關係，得

$$M = \Sigma (f \cdot dA \cdot y)$$

$$= E \left\{ e_0 \Sigma (y dA) + R(1+e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y^2 dA}{R+y} \right) \right\}$$

但

$$\Sigma (y \cdot dA) = 0$$

$$\text{故 } M = ER(1+e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y^2 dA}{R+y} \right) \dots (183)$$

$$\text{或 } \frac{M}{E} = R(1+e_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \Sigma \left(\frac{y^2 dA}{R+y} \right) \dots (183a)$$

由(182)及(183),可自己知斷面,曲率半徑及偶力之值而求未知數 R_1 與 e_0 . 由此二值,自(181)可求 e 值. 因之可得 f 之值. 但如上所求得之 R_1 與 e_0 中含有 $\Sigma\left(\frac{y}{R+y}dA\right)$ 及 $\Sigma\left(\frac{y^2}{R+y}dA\right)$ 之二量,此等之量因斷面形狀與大小,有一定之值. 由積分法或圖法可求得之. 然求此二量時,手續繁雜,用 $R\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right)$ 之補助量以表二值,則求得一量即可. 此量與面積 A 為同等量,故以 A_1 表之. 即

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\frac{y}{R+y}dA\right) &= \Sigma\left\{\left(1-\frac{R}{R+y}\right)dA\right\} \\ &= \Sigma(dA) - R\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right) \\ &= A - A_1 \dots\dots\dots(184)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\frac{y^2}{R+y}dA\right) &= \Sigma\left\{\left(y - R + \frac{R^2}{R+y}\right)dA\right\} \\ &= \Sigma(ydA) - R\Sigma(dA) + R^2\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right) \\ &= RA_1 - RA = R(A_1 - A) \dots\dots\dots(185)\end{aligned}$$

將此代入 (182 a) 與 (183 a), 則得

$$R(1+e_0)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)(A_1 - A) = e_0 A \dots\dots\dots (186)$$

$$R^2(1+e_0)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)(A_1 - A) = \frac{M}{E} \dots\dots\dots (187)$$

由此求 e_0 及 R_1 , 則

$$e_0 = \frac{M}{EAR} \dots\dots\dots (188)$$

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAR + M} \times \frac{A}{(A_1 - A)R} \dots\dots\dots (189)$$

此值代入於 (181), 則

$$\begin{aligned} e &= \frac{y\left(1 + \frac{M}{EAR}\right)\left(\frac{M}{EAR + M} \times \frac{A}{(A_1 - A)R}\right)}{1 + \frac{y}{R}} + \frac{M}{EAR} \\ &= \frac{M}{ER} \left\{ \frac{y}{(R + y)(A_1 - A)} + \frac{1}{A} \right\} \dots\dots\dots (190) \end{aligned}$$

或因 $f = E \cdot e$, 故

$$f = \frac{M}{R} \left\{ \frac{y}{(R + y)(A_1 - A)} + \frac{1}{A} \right\} \dots\dots\dots (191)$$

或

$$f = \frac{M}{(R + y)A} \left\{ 1 + \frac{y}{R} \cdot \frac{A_1}{A_1 - A} \right\} \dots\dots\dots (191a)$$

$$\text{或} \quad f = \frac{M}{R(A_1 - A)} \left\{ \frac{A_1}{A} - \frac{R}{R+y} \right\} \dots\dots\dots (191b)$$

(191 a) 中, $f=0$ 時, 則

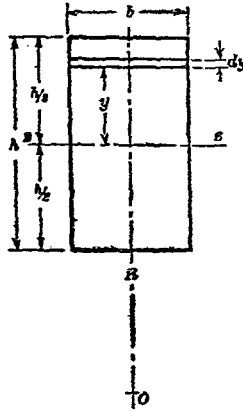
$$y_0 = -R \cdot \frac{A_1 - A}{A_1} \dots\dots\dots (192)$$

即定中性面之位置。故曲樑上中性面不通過斷面之中心, 而為負值, 即在中心線內側, 偏近於曲率中心。

又由 (191 b), 則中心線外側之內力, 當 y 達最大值時, 為最大。而中心線內側之內力, 當 y 達最大負值時為最大。故曲樑時最大內力作用於樑之最外面及最內面。然 M 為正值時, 外側為拉內力, 內側為壓內力, 而增加樑之曲率。

83. A_1 量之計算。前節所述曲樑之解法中, 須求 A_1 之量。此 A_1 量由曲樑之斷面形狀與大小而定。若斷面形狀為矩形, 圓形等簡單整正之形時, 可由計算容易求得 A_1 。若斷面為不規則之形(但為對稱形), 或複雜之形時, 以圖法求之為便。

(a) 矩形斷面. 第 129 圖所示矩形斷面, 寬為 b , 高為 h . 其中心自曲率中心 O 相距為半徑 R . 由通過中心之軸相距 y 部分上設有微小面積 dA . 則 $dA = b \cdot dy$, 故



第 129 圖

$$A_1 = Rb \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dy}{R+y} = Rb \log_e \frac{2R+h}{2R-h} \dots\dots (193)$$

但 $A = bh$, 故

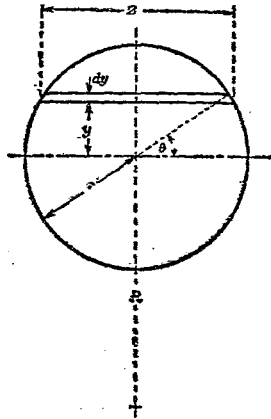
$$y_0 = - \frac{R \log_e \frac{2R+h}{2R-h} - h}{\log_e \frac{2R+h}{2R-h}} \dots\dots (194)$$

上爲正確之式，但實用上可用近似值。今將(193)展開之，則得

$$A_1 = bh \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 + \frac{1}{80} \left(\frac{h}{R} \right)^4 + \dots \right\}$$

今取至 $\left(\frac{h}{R} \right)^2$ 之項，或四乘方之項，可得精密度相異之結果。取至六乘方之項，殆無必要。

(b) 圓形斷面。第130圖示圓形斷面，半徑爲 r 。其中心與曲率中心之距爲半徑 R 。由通過中心之軸距 y 處設有微小面積 dA ，則



第 130 圖

$$dA = zdy$$

但

$$z = 2r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta, \quad dy = r \cos \theta \cdot d\theta$$

故

$$dA = 2r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta$$

$$R + y = R + r \sin \theta$$

因之

$$\begin{aligned} A_1 &= R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{zdy}{R+y} = 2r^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \cdot d\theta}{R+r \sin \theta} \\ &= 2r^2 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{r} \sin \theta + \frac{R}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^2 - R^2}{R+r \sin \theta} \right\} d\theta \\ &= 2\pi R^2 - 2\pi R \sqrt{R^2 - r^2} \\ &= 2\pi R(R - \sqrt{R^2 - r^2}) \dots \dots \dots (195) \end{aligned}$$

(c) 一般斷面。對於一般斷面，則

$$\begin{aligned} A_1 &= \Sigma \left\{ \frac{R}{R+y} dA \right\} \\ &= \Sigma \left\{ \left(1 - \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{y^3}{R^3} + \frac{y^4}{R^4} - \dots \right) dA \right\} \end{aligned}$$

對於內外對稱之斷面，則 $\frac{y}{R}$ 之奇數乘方項為零。

$$\begin{aligned} \text{故 } A_1 &= \Sigma(dA) + \Sigma\left(\frac{y^2}{R^2}dA\right) + \Sigma\left(\frac{y^4}{R^4}dA\right) + \dots\dots \\ &= A + \frac{I}{R^2} + \frac{1}{R^4}\Sigma(y^4dA) + \dots\dots\dots, \dots\dots(196) \end{aligned}$$

但 I 爲該斷面對於同一軸線之慣性能率。若 $\left(\frac{y}{R}\right)$ 之四乘方以下可略去時，則

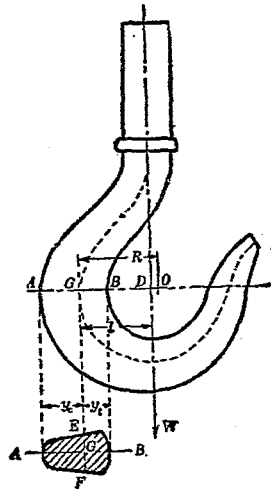
$$\frac{I}{R^2} = A_1 - A$$

(d) 圖式求法。求 $A_1 = R\Sigma\left(\frac{dA}{R+y}\right)$ 時，若斷面之形比較的非爲簡單者，以圖式求法爲便。第 131 圖示其一例。AECFBHDK 爲已知斷面形，其中心爲 G 。

取 GO 等於曲率半徑 R ，定 O 點位置。引平行於軸之任意線 EF ，求 EF 之寬。取 $E'F'$ 等於 $\overline{EF} \times \frac{R}{R+y}$ 。其法將 E 及 F 與 O 點連結，交軸線 AB 於 M, N 。作 ME', NF' 與 AB 垂直，可得 E', F' 點。對於 AB 內側部分， y 爲負值，其圖法全相同。例如對於 KH 求 $K'H'$ 之法，全與 $E'F'$ 之作法

上彎曲內力,可應用前數節解法以求之。

第 132 圖示普通之鉤。對於主斷面 AB 之曲率中心為 O 。荷重雖垂直懸於鉤上,而作用線未必通過 O 點。設荷重為 W , G 為斷面 AB 之中心,則曲率半徑 R 等於 OG 之長。荷重對於斷面上作用之彎曲能率 M 為 Wl 。斷面 $AEBF$ 之面積設為 A 。由前節方法所得補助函數 A_1 , 可用之



第 132 圖

以求彎曲作用所生之內力。即

$$f_b = \frac{Wl}{R(A_1 - A)} \left(\frac{R}{R + y} - \frac{A_1}{A} \right)$$

但此外尚有因荷重而生之直接內力作用於斷面上。此內力總計為 W ，而為拉內力。今設均布於斷面上，則

$$f_t = \frac{W}{A}$$

斷面各點 f_b 與 f_t 同時作用。彎曲內力最大值作用於 A , B ，而 A 為壓內力， B 為拉內力。此時彎曲能率作用於減少曲樑曲率之方向。故 A 處內力為

$$f_1 = f_t - f_b = \frac{W}{A} - \frac{Wl}{R(A_1 - A)} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R}{R + y_a} \right) \dots\dots(197)$$

B 處內力為

$$f_2 = f_t + f_b = \frac{W}{A} + \frac{Wl}{R(A_1 - A)} \left(\frac{R}{R + y_b} - \frac{A_1}{A} \right) \dots\dots(198)$$

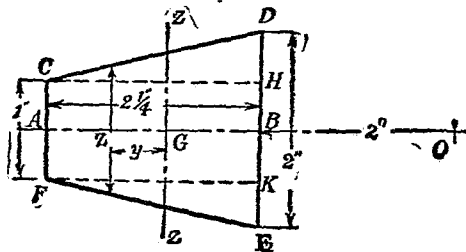
設計時當使上之二值相差不遠。

例1. 鉤之主斷面設為對稱梯形。高 $2\frac{1}{4}$ 吋，內側寬 2 吋，外側寬 1 吋。荷重作用線設通過曲率

中心。曲率中心之位置自斷面內側距2吋。懸1½噸荷重時，求內力之最大值。

斷面中心須先求得。視梯形為矩形與三角形之和，如第133圖所示。梯形 $CDEF$ 可分為矩形 $CHKF$ 及三角形 CDH 與 EKF 。對於 DE 求各面積之能率，此當與全面積乘 BG 之能率相等。由此可得中心 G 之位置。矩形面積 a_1 為

$$a_1 = 1 \times 2 \frac{1}{4} = 2.25 \text{ 平方吋。}$$



第 133 圖

三角形面積 a_2 為

$$a_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{4} = 1.125 \text{ 平方吋。}$$

故全面積 A 為

$$A = a_1 + a_2 = 2.25 + 1.125 = 3.375 \text{ 平方吋.}$$

今取對於 DE 之面積能率, 則

$$A \times \overline{BG} = (a_1 \times 1.125) + \left(a_2 \times \frac{1}{3} \times 2.25\right) = 3.375 \text{ (吋)}^2$$

故 $\overline{BG} = 1$ 吋.

因之對於 G 之曲率半徑為

$$R = \overline{OG} = 1 + 2 = 3 \text{ 吋}$$

次求補助函數 A_1 , 得

$$A_1 = R \int \frac{dA}{R+y} = R \int \frac{z dy}{R+y}$$

今設 ZZ 軸上之寬為 z_0 , 則 $z_0 = 1\frac{5}{9}$ 吋.

$$z = z_0 - \frac{4}{9}y = 1\frac{5}{9} - \frac{4}{9}y = \frac{4}{9}\left(\frac{7}{2} - y\right)$$

故

$$\begin{aligned} A_1 &= 3 \int_{-1}^{1.25} \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{7}{2} - y\right) dy}{3+y} = 3 \times \frac{4}{9} \int_{-1}^{1.25} \frac{3.5 - y}{3+y} dy \\ &= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1.25} \left(-1 + \frac{6.5}{y+3}\right) dy = \frac{4}{3} \left[-y + 6.5 \log_e(y+3)\right]_{-1}^{1.25} \\ &= \frac{4}{3} \left(-2.25 + 6.5 \log_e \frac{4.25}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}(-2.25 + 6.5 \log_e 2.125)$$

$$= \frac{4}{3}(-2.25 + 6.5 \times 2.303 \times 0.3273) = 3.5381 \text{ 平方吋}$$

故 $A_1 - A = 3.5381 - 3.375 = 0.1631$ 平方吋

由此得 A 處最大壓內力爲

$$f_1 = \frac{1.25 \times 3}{3 \times 0.1631} \left(\frac{3.5381}{3.375} - \frac{3}{4.25} \right) - \frac{1.25}{3.375}$$

$$= \frac{1.25}{0.1631} \times 0.3423 - 0.37 = 2.62 - 0.37$$

$$= 2.25 \text{ 噸/平方吋}$$

B 處最大拉內力爲

$$f_2 = \frac{1.25 \times 3}{3 \times 0.1631} \left(\frac{3}{2} - \frac{3.5381}{3.375} \right) + \frac{1.25}{3.375}$$

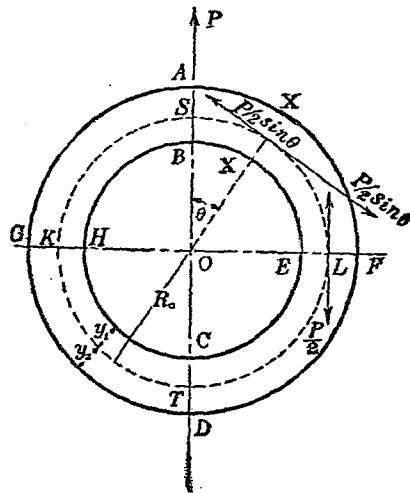
$$= \frac{1.25}{0.1631} \times 0.4517 + 0.37 = 3.46 + 0.37$$

$$= 3.83 \text{ 噸/平方吋}$$

85. 圓環. 計算圓環內力時, 以用曲樑公式爲最精確. 有時雖設種種假定而用直樑式以計算之, 但不過近似法耳.

通過其中心方向上受拉力或壓力之圓環，其半徑方向上之斷面，均受彎曲能率，剪力，與直接內力。然最大彎曲內力之最外側面與最內側面上剪內力為零。故計算強度時，惟有彎曲內力與直接內力，而可省去剪內力者也。

第184圖示一圓環，受通過中心之拉力 P 。因此拉力，圓環生變形，而不成真圓。但由對稱條件， A, F, D, G 四橫斷面必仍通過中心。因之



第 134 圖

A 至 F 間方向變換之總和為零。換言之，其反對方向之彎曲作用相等。

今設與拉力作用線成 θ 角之橫斷面 XX 上，增加曲率之彎曲能率為 M ，橫斷面 BF 上之彎曲能率為 M_1 ，則環之一部分 $XFEX$ 必在平衡狀態，故對於斷面 XX 之中心取能率，則得

$$M = M_1 + \frac{P}{2} R_0 (1 - \sin \theta) \dots \dots \dots (199)$$

由 §82 之 (183), (185),

$$M = ER_0^2 (1 + e_0) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) (A_1 - A) \dots \dots \dots (200)$$

然 A 至 F 間撓屈總和為零，故

$$\int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} di = \int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} ds = \frac{R_0}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = 0$$

但 i 為傾斜， s 為樑長， $ds = R_0 d\theta$ 。上式應用直樑之式而得。故可得近似的解法。但正確方法如下。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = ER_0(A_1 - A)$$

$$\times \left\{ \int_0^{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{1 + e_0}{R} ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + e_0) d\theta \right\} \dots\dots\dots (201)$$

若取四分之一圓周，則變形後， CS 與 OL 間亦為直角。故

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1 + e_0}{R} ds = \frac{\pi}{2}$$

故 (201) 式為

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = ER_0(A_1 - A) \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e_0 d\theta \right\}$$

$$= -ER_0(A_1 - A) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e_0 d\theta \dots\dots\dots (202)$$

橫斷面上作用之直接內力總和為

$$\frac{P}{2} \sin \theta = E \Sigma (e \cdot dA)$$

$$= E \left\{ R_0 (1 + e_0) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) (A - A_1) + e_0 A \right\} \dots\dots\dots (203)$$

由此式及(199), (200), 得

$$e_0 = \frac{M_1}{E A R_0} + \frac{P}{2EA} \dots\dots\dots (204)$$

由此式及(202), 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_1 - A}{A} \left(M_1 + \frac{P R_0}{2} \right) \dots\dots\dots (205)$$

但將(199)積分之,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = \frac{\pi}{2} M_1 + \frac{P R_0}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \dots\dots\dots (206)$$

故使(205)與(206)相等, 則

$$M_1 = \frac{P R_0}{\pi} \left(\frac{A}{A_1} - \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots\dots (207)$$

將此值代入於(199), 得

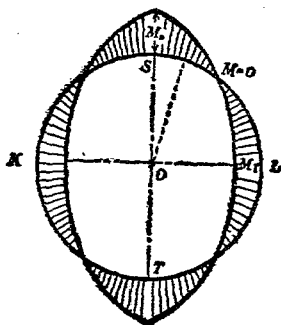
$$M = P R_0 \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \dots\dots\dots (208)$$

此值當 θ 為零時有最大值. 故此時

$$M_0 = \frac{P R_0}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} = 0.318 P R_0 \cdot \frac{A}{A_1} \dots\dots\dots (209)$$

由(208), (209) 知彎曲能率與斷面形狀及大小有

關係。彎曲能率當 $\sin \theta = \frac{2A}{\pi A_1}$ 時爲零。由 (208) 可求對於各 θ 值之 M 。若作成線圖，如第 135 圖。彎曲能率之值已知時，則對於已知橫斷面形狀及大小，即可求內力之值。且各斷面受 $\frac{P}{2} \sin \theta$ 之直接內力，其強爲 $\frac{P \sin \theta}{2A}$ 。又有總量 $\frac{P}{2} \cos \theta$ 之剪內力，成某種分布狀態。其分布因斷面形狀而異。圓形斷面時，兩極端爲零，中心軸線上最大，爲平均值即 $\frac{P \cos \theta}{2A}$ 之 $\frac{4}{3}$ 倍。



第 135 圖

定環之強度時，須求最內側與最外側之內力。就彎曲能率及直接內力最大之斷面而求其值即可。

今設最內側距中心軸線為 y_1 ，而求內力，則

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 - y_1} \right) + \frac{P \sin \theta}{2A}, \quad (210)$$

此值當 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時達極限值。

$$\theta=0, \text{ 則 } f_1 = \frac{P}{\pi(A_1 - A)} \left(1 - \frac{A}{A_1} \cdot \frac{R_0}{R_0 - y_1} \right) \dots \dots (210a)$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$, 則

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 - y_1} \right) + \frac{P}{2A} \dots (210b)$$

上二式中正值示拉內力，負值示壓內力。

次設最外側距中心軸線為 y_2 ，而求內力，則

$$f_2 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 + y_2} \right) + \frac{P \sin \theta}{2A}, \quad (211)$$

$$\theta=0, \text{ 則 } f_2 = \frac{P}{\pi(A_1 - A)} \left(1 - \frac{A}{A_1} \cdot \frac{R_0}{R_0 + y_2} \right) \dots \dots (211a)$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, 則

$$f_2 = \frac{P \left(\frac{1}{\pi} \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \right)}{A_1 - A} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{R_0 + y_2} \right) + \frac{P}{2A} \dots\dots (211b)$$

例 2. 圓環上有通過中心之拉力 P . 斷面爲圓形, 斷面半徑爲環平均半徑之 $\frac{1}{3}$. 求環內側及外側之內力.

設斷面半徑爲 r , 環之平均半徑爲 R_0 , 則 $R_0 = 3r$. 由 (195) 式,

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\pi R_0 (R_0 - \sqrt{R_0^2 - r^2}) = 6\pi r (3r - r\sqrt{9-1}) \\ &= 6\pi r^2 (3 - \sqrt{8}) = 1.0294\pi r^2 \end{aligned}$$

又 $A = \pi r^2$

故 $A_1 - A = 1.0294\pi r^2 - \pi r^2 = 0.0294\pi r^2$

$$\frac{A_1}{A} = 1.0294$$

以此代入於 (210) 及 (211), 可得內力之值.

內側面上作用之內力爲

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{0.9714}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \theta \right)}{0.0294\pi r^2} (1.0294 - 1.5) + \frac{P \sin \theta}{2\pi r^2}$$

$$= -\frac{P}{\pi r^2} (4.95 - 8.5 \sin \theta)$$

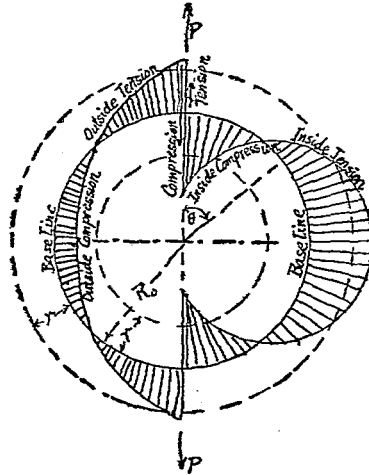
$\theta=0$ 時, f_1 最大, 而壓內力為

$$f_1 = \frac{4.95P}{\pi r^2}$$

$\sin \theta = \frac{4.95}{8.5} = 0.5830$ 或 $\theta = 35^\circ 40'$ 之橫斷面上, f_1

為零.

次求外側面上之內力,



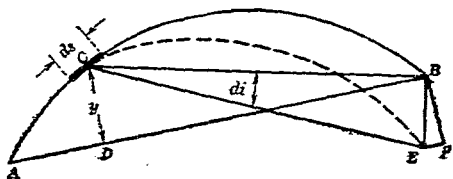
第 136 圖

$$f_s = \frac{P \left(\frac{0.9714}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \theta \right)}{0.0294 \pi r^2} (1.0294 - 0.75) + \frac{P \sin \theta}{2 \pi r^2}$$

$$= \frac{P}{\pi r^2} (2.94 - 4.25 \sin \theta)$$

內力之分布狀況略如第 136 圖。

86. 曲樑之撓屈。樑受撓屈後，變其形狀，又連結原中心線上二點之弦長亦變化。第 137 圖



第 137 圖

上原有中心線 ACB 之曲樑，受彎曲作用。今考察其微小部分 ds 之影響。若曲樑他部分不變化，而僅 ds 變化 di 之方向，則 A 若固定時， B 當移至 E 。將此移動 BE 分為平行及垂直於 AB 兩部。其水平部分 EF 為

$$EF = EB \cos \angle BEF = CB \cdot di \cdot \cos \angle BEF$$

$$= di \cdot CB \cos \angle BCD = DC \cdot di = y \cdot di$$

但由直線樑之式，

$$\frac{di}{ds} = \frac{M}{EI}, \quad \text{或} \quad di = \frac{M}{EI} ds$$

故因 ds 之彎曲，所生弦 AB 之變化 EF 爲

$$EF = \frac{M}{EI} y ds$$

故全體彎曲所生之變化爲

$$\int \frac{My}{EI} ds \dots \dots \dots (212)$$

例如圓環之變化，生於主要直徑即平行及垂直於力之直徑上。因

$$y = R_0 \cos \theta, \quad ds = R_0 d\theta,$$

而
$$M = PR_0 \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

代入於 (212)，而求第 134 圖上直徑 KL 之減小。即

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR_0}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) R_0 \cos \theta \cdot R_0 d\theta \\ & = \frac{2PR_0^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{4} \right) \dots \dots \dots (213) \end{aligned}$$

其直角之直徑 ST (第 134 圖) 上長度之增加如下,

因
$$y = R_0 \sin \theta,$$

故
$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR_0}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{1}{2} \sin \theta \right) R_0 \sin \theta \cdot R_0 d\theta$$

$$= \frac{2PR_0^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{A}{A_1} - \frac{\pi}{8} \right) \dots\dots\dots(214)$$

但長度之減少視為正, 故此增加為負值.

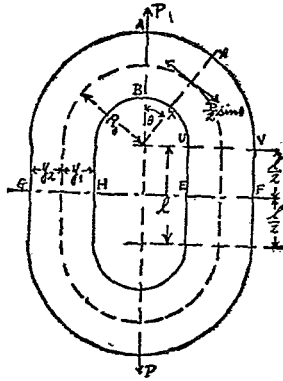
87. 簡單形之鏈環. 鏈環之最簡單形者為半圓形兩端, 與直線形兩邊. 可用圓環之計算以求近似的內力之計算式.

第 138 圖上 R_0 為兩端半圓部之平均半徑, l 為兩側直邊之長. 設 UV 斷面上彎曲能率為 M_1 , 而直線部各斷面亦與此相同. XX 斷面上彎曲能率 M 為

$$M = M_1 + \frac{P}{2} R_0 (1 - \sin \theta) \dots\dots\dots(a)$$

A 與 F 間方向變更之總和為零, 故

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} ds + \frac{M_1}{EI} \times \frac{l}{2} = 0$$



第 138 圖

但上式第二項表示 V 至 F 間之角度變化。由此得

$$\frac{R_0}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ M_1 + \frac{PR_0}{2}(1 - \sin \theta) \right\} d\theta + \frac{M_1 l}{2EI} = 0$$

$$\text{或} \quad R_0 M_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{PR_0^2 \pi}{4} - \frac{PR_0^2}{2} + M_1 \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\text{故} \quad M_1 = \frac{PR_0^2}{2} \left(\frac{2 - \pi}{\pi R_0 + l} \right), \quad \text{或} \quad \frac{PR_0}{2} \left(\frac{2R_0 - \pi R_0}{\pi R_0 + l} \right) \dots\dots (b)$$

將此代入於 (a), 得

$$M = \frac{PR_0^2}{2} \cdot \frac{2-\pi}{\pi R_0+l} + \frac{P}{2} \cdot R_0(1-\sin \theta)$$

$$= \frac{PR_0}{2} \left(\frac{2R_0+l}{\pi R_0+l} \sin \theta \right) \dots\dots\dots(c)$$

AB斷面上 $\theta=0$, 故 $M_0 = \frac{PR_0}{2} \cdot \frac{2R_0+l}{\pi R_0+l} \dots\dots\dots(d)$

此值常為正, 而較(b)式為大. 且與 l 同增加.

彎曲能率既知後可求各斷面上內側與外側之彎曲內力. 其他尚有 $\frac{P}{2A} \sin \theta$ 之直接內力. 故 AB斷面上 B處之壓內力為

$$\frac{M_0}{R_0(A_1-A)} \left(\frac{R_0}{R_0-y_1} - \frac{A_1}{A} \right)$$

$$= \frac{P(2R_0+l)}{2(\pi R_0+l)(A_1-A)} \left(\frac{R_0}{R_0-y_1} - \frac{A_1}{A} \right) \dots\dots\dots(e)$$

UV以下直線部斷面上, 則上式中 M_0 易以 M_1 所得之值與直接拉內力 $\frac{W}{2A}$ 之代數和.

AB斷面上 A處拉內力為

$$\frac{M_0}{R_0(A_1-A)} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{y_2+R_0} \right)$$

$$= \frac{P(2R_0+l)}{2(\pi R_0+l)(A_1-A)} \left(\frac{A_1}{A} - \frac{R_0}{y_2+R_0} \right) \dots\dots\dots(f)$$

UV以下直線部斷面上之外側內力同樣亦可知。

以上所述為近似的計算法。若精確之法則如前節圓環時，就四分之一部分，角度變化在變形後為

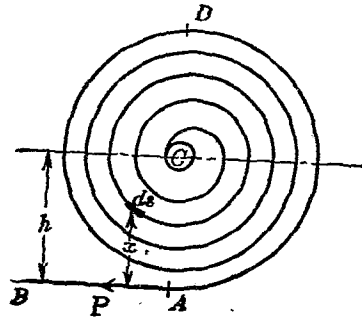
$$\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{(1+e_0)ds}{R} = \frac{\pi}{\pi} - \frac{M_1 l}{2EI} \quad \left(\text{不為} \frac{\pi}{2} \right)$$

由§S3之(196)式，取其第一次近似值，則

$$M_0 = \frac{PR_0}{2} \cdot \frac{2R_0+l}{\frac{A_1}{A}\pi R_0+l}$$

88. 渦卷彈條。渦卷彈條(spiral spring)多用於時計等，為各種機構動力之用。

第139圖上彈條一端A為自由，沿AB方向加P力拉之。他端C固定於心棒。距AB線x處微小部分ds上所作用之彎曲能率為



第 139 圖

$$M = Px$$

因 ds 部分之變位所生傾斜為

$$\frac{di}{ds} = \frac{M}{EI}$$

或

$$di = \frac{M}{EI} ds = \frac{Px}{EI} ds$$

故因拉力 P 所生全角度變化 i 為

$$i = \frac{P}{EI} \int x ds \dots\dots\dots(215)$$

但普通斷面為均一，而 I 為常數。上之積分為彈條中心線對於 AB 線之能率，故等於彈條中心線全長與其重心至 AB 之距之乘積。然彈條

重心可視為在心棒之中心。故

$$\int x ds = hl$$

但 l 為彈條全長, h 為中心至 AB 之距。故

$$i = \frac{P}{EI} hl = \frac{M_0 l}{EI} \dots\dots\dots (216)$$

但

$$M_0 = Ph$$

實際上 A 為固定而 C 與心棒同迴轉。故略與 AB 平行之力加於 A 上, 而同時等大反向之力加於 C , 成偶力 Ph 。但作用於 A 之力 P 略垂直於 AC , 彈條各部不相接觸, 而彈條重心略在 C 時, 則上述關係可成立。角 i 與 M_0 或 P 成比例。彈條中所藏之勢力為

$$\frac{1}{2} M_0 i = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_0^2 l}{EI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2 h^2 l}{EI} \dots\dots\dots (217)$$

彈條各部作用之內力由彎曲能率與斷面係數可求。普通彈條材料之厚極小, 故可由直樑公式而計算之。但彎曲能率最大部分為自 AB 線最遠之 D 部分。而近似的

$$M_D = 2Ph$$

彈條斷面爲矩形，故 $Z = \frac{1}{6}bt^2$

但 b 爲斷面寬， t 爲厚。故

$$f = \frac{12Ph}{bt^2} = \frac{12M_0}{bt^2} \dots\dots\dots(218)$$

或設 f 爲最大可容內力，則最大拉力 P_{max} 或最大偶力 M_{max} 爲

$$P_{max} = \frac{fbt^2}{12h} \quad \text{或} \quad M_{max} = \frac{fbt^2}{12} \dots\dots\dots(218a)$$

故所可藏最大之勢力爲

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{1}{2} \left(\frac{fbt^2}{12} \right)^2 \cdot \frac{l}{EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{f^2}{E} \cdot btl \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{f^2}{E} \times (\text{彈條容積}) \dots\dots\dots(219) \end{aligned}$$

例 3. 厚 $\frac{1}{40}$ 吋寬 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼條所成渦卷彈條，全長 10 呎。一端固定於心棒，他端固定於一定點。該彈條全在寬放狀態時，捲以三捲，則心棒上所加偶力幾何？此時彈條上所加之勢力幾何？又彈條上作用之最大內力幾何？但對

於鋼 $E=3 \times 10^7$ 磅/平方吋。

彈條斷面爲矩形, 故

$$I = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{40}\right)^3 = \frac{1}{1,536,000} (\text{吋})^4$$

三捲時角度爲 $i=6\pi$ (radian), 故由 (216),

$$M_0 = \frac{EIi}{l} = \frac{3 \times 10^7 \times 6\pi}{1,536,000 \times 120} = 3.068 \text{ 吋磅}$$

勢力 U 爲

$$U = \frac{1}{2} M_0 i = \frac{1}{2} \times 3.068 \times 6\pi = 28.91 \text{ 吋磅}$$

最大內力由 (218)

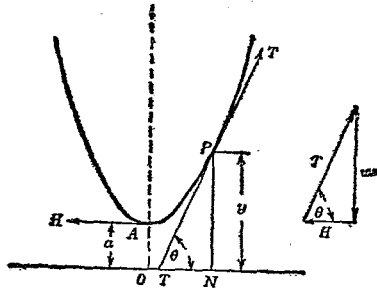
$$f = \frac{12M_0}{b^2} = \frac{12 \times 3.068}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{40}\right)^2} = 117,800 \text{ 磅/平方吋}$$

89. 懸垂鏈或懸垂線. 支持兩端之鏈或線因自己重量受垂直荷重. 此時線生寬垂 (sag), 成一種曲線. 可視爲曲樑. 但一般對於線之尺寸, 其長度極大. 故彎曲內力甚小, 可略去之, 其強度可僅由直接內力以決定之.

自兩端支持點自由懸垂之均一斷面之線或鏈，其所取形狀成懸垂曲線 (catenary)。第 140 圖上曲線之單位長重量設為 w ，任意一點 P 處張力為 T 。其水平分力 H 設有一定之值。今就 AP 部平衡考察之。 PA 之長設為 s ，原點取於 A 之下方，而 A 之坐標為 a 。則

$$ws = H \tan \theta,$$

$$s = \frac{H}{w} \tan \theta = a \tan \theta \dots \dots \dots (220)$$



第 140 圖

但 $a = \frac{H}{w}$ ，即長 a 之線垂直懸於 A 點時，因其重量所生張力，適與 A 點之 H 相等。但

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}, \quad \cos \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds}$$

又就(220)式對於 θ 取微分,則

$$\frac{ds}{d\theta} = a \sec^2 \theta$$

故
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \sin \theta \cdot a \sec^2 \theta = a \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

因之
$$y = a \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta + y_0 = a \sec \theta + y_0 \cdots (221)$$

但 $\theta=0$ 時, $y=a$, $\therefore y_0=0$.

又
$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \cdot a \sec^2 \theta = a \sec \theta$$

故
$$\begin{aligned} x &= a \int \sec \theta d\theta + x_0 = a \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= a \log_e (\sec \theta + \tan \theta) + x_0 \end{aligned}$$

但 $\theta=0$ 時, $x=0$, 故 $x_0=0$.

因之
$$e^{\frac{x}{a}} = \sec \theta + \tan \theta \cdots (222)$$

若取反數, 則
$$e^{-\frac{x}{a}} = \sec \theta - \tan \theta \cdots (223)$$

上二式相加, 以2除之, 則

$$\frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \sec \theta = \frac{y}{a}$$

或
$$\cosh \frac{x}{a} = \frac{y}{a}$$

或
$$y = a \cosh \frac{x}{a} \dots\dots\dots(224)$$

此即懸垂曲線之式也。將上式展開之，則

$$y = a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{12a^4} + \dots \right) \dots\dots\dots(224a)$$

x 若小時，略去 $\left(\frac{x}{a}\right)$ 之高次乘方項，

$$y = a + \frac{x^2}{2a} = a + \frac{wx^2}{2H} \dots\dots\dots(224b)$$

此表示拋物線之式也。故寬垂比跨徑小時，普通視懸垂線形為拋物線。若取最下點為原點，

則
$$y = \frac{wx^2}{2H} \dots\dots\dots(225)$$

此為通常電線，懸橋纜 (suspension-bridge cable) 等所用之式。任意點上之張力可由圖知

$$T = H \sec \theta = wy$$

即等於 y 長度之線垂直懸垂時之重量也。

自頂點 A 之曲線長 s 為

$$\begin{aligned}
 s &= \int \frac{ds}{dx} dx = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{\left(1 + \sinh^2 \frac{x}{a}\right)} dx \\
 &= \int \cosh \frac{x}{a} dx = a \sinh \frac{x}{a}
 \end{aligned}$$

上之積分常數爲零，蓋 $x=0$ 時 $s=0$ 故也。

問 題

1. 寬 2 吋高 3 吋之矩形斷面棒，於高之平行平面上彎成曲樑，平均曲率半徑爲 4 吋。若受 15 噸之彎曲能率，使減少曲度時，求最大之拉與壓之彎曲內力。

2. 直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋之圓形斷面棒彎成平均直徑 $1\frac{1}{4}$ 吋之曲棒。若受 4000 磅吋之彎曲能率增加棒之曲率時，其拉伸與壓縮內力之最大值幾何？

3. 鉤之主斷面爲梯形，高 3 吋，內側寬 3 吋，外側寬 1 吋。曲率中心離內側距 $2\frac{3}{4}$ 吋。外力作用線通過於距內側 $2\frac{1}{4}$ 吋處。若最大拉內力不超過 7 噸/平方吋時，求此鉤之安全荷重。

4. 直徑 1 吋之圓鋼棒所成之圓環，平均直徑爲 5 吋。若受拉力 2000 磅時，求最大之拉內力。

與壓內力.

5. 第四題之圓環,沿拉力方向直徑之增加,及其垂直方向直徑之縮小各幾何? 但 $E=30 \times 10^6$ 磅/平方吋.

6. 矩形斷面之渦卷彈條,寬1吋,厚 $\frac{1}{16}$ 吋,長20吋. 若彎曲內力不超過100,000磅/平方吋時,求其作用於心棒上之迴轉能率幾何?

第十四章

歪能

90. 拉伸歪能。因拉伸內力生其相當之歪。若拉伸荷重漸增加時，該方向上之歪亦漸增。故必須相當量之功。力之大小常有變化，故對於全體伸長所需之功，不能以簡單之積表之。今對於微小伸長 dx ，則其間之力可視為一定。設為 P 磅，則其間所費之功為

$$dW = P \cdot dx \text{ 吋磅}$$

對於全體伸長 ϵ 吋所費之功為

$$W = \int_0^{\epsilon} P \cdot dx \text{ 吋磅}$$

但 $P = f(x)$

將荷重 (load) 及伸長 (elongation)，取為直角坐標，作荷重伸長線圖，則荷重曲線與橫坐標軸

間之面積即表伸長時所需功量。其單位因荷重與伸長兩單位而定之。

全功量中與彈性歪相當之部，藏蓄為歪能 (strain energy)。取去荷重，該功量同時放出於外界。例如撓曲鋼板，放寬時可彈物等是也。反之對於彈性限界以上之歪所費之功，消費於打破材料分子之結合力。其結果熱與變形同生，而不能回收之。屬於呼克法則之材料，則彈性部分之荷重曲線為一直線。故藏蓄為歪能之功量，可以三角形面積表之。其值為

$$\frac{1}{2} \times (\text{荷重}) \times (\text{伸長})$$

但上式僅於彈性限界以內可成立。超過彈性限界時，則須用前示之一般式。

今於彈性限界以內，受均一強度之拉內力 p 之材料片，其橫斷面積為 A ，長為 l ，則全荷重為 pA ，而伸長量 ε 為

$$\varepsilon = \frac{p}{E} l$$

但 E 為材料之縱彈性係數。此時歪能之量為

$$\frac{1}{2} \cdot pA \cdot \frac{p}{E} l = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \cdot lA = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}) \dots (226)$$

或單位體積所貯蓄之歪能為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{E} \dots \dots \dots (226a)$$

91. 最大彈性歪能。未生永久變形以前，材料中所可貯蓄之最大歪能，曰最大彈性歪能 (proof resilience)。設 p_e 為彈性限界處內力之強，則最大彈性歪為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p_e^2}{E} \cdot Al \dots \dots \dots (227)$$

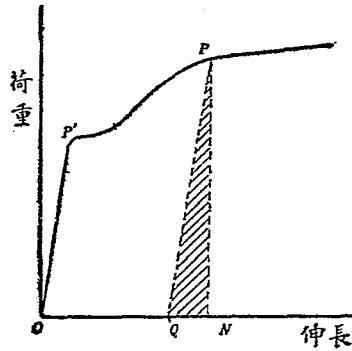
或對於單位體積為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p_e^2}{E} \dots \dots \dots (227a)$$

超過彈性限界後，加內力時，對於其歪所需之功一部分，當內力除去時亦同時放出。此亦稱為歪能。如第 141 圖中，面積 $OP'PNO$ 為對於歪所需功之總量，面積 $QPNQ$ 為歪能。而 PQ 平行於 $P'O$ 。設與 PN 相當之內力為 p ，則 $QPNQ$ 之

面積爲

$$\frac{1}{2} \times \frac{P^2}{E} \times (\text{體積}).$$



第 141 圖

92. 彈性限界以內之活荷重。一棒上急激加以荷重，使生不超過彈性限界之內力，則該棒宛如彈條，生振動於荷重之方向。其平均位置之上下振幅與同一大小靜荷重所生伸長之量相等。故瞬間的最大歪爲同一大小靜荷重所生歪之二倍。

設橫斷面積 A 之棒上，急激加以拉力 W ，則瞬間的歪爲

$$e = 2 \cdot \frac{W}{A} \times \frac{1}{E}$$

與此相當之瞬間內力爲

$$p = Ee = 2 \cdot \frac{W}{A}$$

卽爲靜荷重 W 所生內力之二倍。 E 之值因荷重作用方法亦相異，但實際上可視爲相同。

靜荷重 W_0 作用之棒上，加以同一性質之活荷重 W ，若合成內力不超過彈性限界時，則最大內力爲

$$\frac{W_0}{A} + \frac{2W}{A} = \frac{W_0 + W}{A} + \frac{W}{A}$$

卽等於兩荷重和之靜荷重所生內力與荷重變化量所生內力之和。

若活荷重 W 爲反對方向，則瞬間的內力爲

$$\frac{W_0}{A} - 2\frac{W}{A} = \frac{W_0 - W}{A} - \frac{W}{A}$$

此與同一方向時之結論相同。

例 1. 求與次二項生同樣歪時，靜荷重之值。

(a) 受 40 噸拉靜荷重與 10 噸拉活荷重。

(b) 受 20 噸拉靜荷重與 30 噸壓活荷重。

(a) $W_0 = 40$ 噸, $W = 10$ 噸

$$W_0 + W = 40 + 10 = 50 \text{ 噸,}$$

$$(W_0 + W) + W = 50 + 10 = 60 \text{ 噸 (拉)}$$

(b) $W_0 = 20$ 噸, $W = -30$ 噸

$$W_0 + W = 20 - 30 = -10 \text{ 噸,}$$

$$(W_0 + W) + W = -10 - 30 = -40 \text{ 噸 (壓)}$$

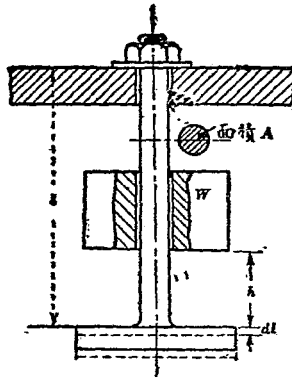
生拉力之衝擊。此時如落下重錘急激所生張力等是也。內力若在彈性限界以內，則棒吸收之歪能與重錘失去之運動能相等。但棒以外部分剛性設為極大。

今設第 142 圖上重錘 W 磅落下 h 吋，擊於棒之鏢上，使棒生 dl 吋之伸長而靜止。則重錘所失去之運動能為 $W(h+dl)$ 吋磅。

設棒長 l 吋，斷面積 A 平方吋，縱彈性係數為 E ，則棒所吸收之歪能為

$$\frac{1}{2} EeAdl = \frac{1}{2} F \cdot dl \text{ 吋磅}$$

但 $Ee \cdot A$ 為與歪相當之靜荷重，以 F 磅表之。



第 142 圖

故 $W(h+dl) = \frac{1}{2} Ee^2 \times Al = \frac{1}{2} Ee^2 \times (\text{體積})$

或 $W(h+dl) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{E} \times (\text{體積})$

故 $p^2 = \frac{2E \times W(h+dl)}{(\text{體積})} \dots\dots\dots (228)$

dl 為極小, 若略去之, 則

$$p^2 = \frac{2EWh}{(\text{體積})}, \text{ 或 } p = \sqrt{\frac{2EWh}{Al}} \dots\dots\dots (229)$$

故 E 若已知時, 則由 W 及 h, 可求 p.

(228) 式中 h=0, 即為急激所加荷重. 此時

$$p^2 = \frac{2EW \cdot dl}{Al} = 2 \cdot \frac{W}{A} \cdot E \cdot \frac{dl}{l} = 2 \cdot \frac{W}{A} Ee = 2 \frac{W}{A} p$$

故
$$p = 2 \cdot \frac{W}{A}$$

此與前之結果相符。

例2. 224磅重錘落下2吋,使直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋長10呎之鋼棒伸長,求伸長量及內力之值。但鋼之縱彈性係數為 3×10^7 磅/平方吋。

設伸長為 x 吋,內力為 p 磅/平方吋,則

$$224(2+x) = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^7 \times \frac{x}{120} \times \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times x$$

故
$$x^2 - 0.001x - 0.00203 = 0$$

即
$$x = 0.0455 \text{ 吋}$$

$$p = \frac{0.0455}{120} \times 3 \times 10^7 = 11,370 \text{ 磅/平方吋}$$

93. 樑之歪能。樑若不超過彈性限界而彎曲時,其材料因其位置而受種種之拉內力或壓內力,生其相當之歪,而蓄積歪能。其量可表之如次:

$$e \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (230)$$

但 p 爲樑所受之最大垂直內力, c 爲關於樑之荷重及支持狀態之常數. 其值常小於 $\frac{1}{2}$. 又設 p_e 爲樑材料在彈性限界時內力之強, 則最大彈性歪能爲

$$c \times \frac{p_e^2}{E} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (230a)$$

若僅有一集中荷重之樑, 則歪能爲

$$\frac{1}{2} \times W \times (\text{荷重點之撓屈}) \dots \dots \dots (231)$$

故對於荷重 W 作用於自由端之突出樑, 則自由端之撓屈爲

$$\frac{Wl^3}{3EI}$$

因之歪能之量爲

$$c \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積}) = \frac{1}{2} \cdot W \times \frac{Wl^3}{3EI}$$

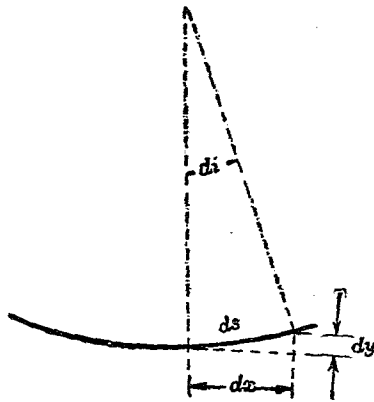
若樑之橫斷面爲矩形, 寬爲 b , 厚爲 h , 則

$$p = \frac{M}{Z} = \frac{6Wl}{bh^2}, \quad I = \frac{1}{12}bh^3$$

$$(\text{體積}) = bhl$$

故
$$c = \frac{1}{2} \times \frac{12W^2l^3}{3Ebh^3} \times \frac{Eb^2h^4}{36W^2l^2 \cdot bhl} = \frac{1}{18} \dots \dots \dots (232)$$

或
$$\text{歪能} = \frac{1}{18} \times \frac{p^2}{E} \cdot bhl \dots \dots \dots (232)$$



第 143 圖

歪能一般可以彎曲能率之式表之。即第143圖上取樑之微小部 dx , 設其上之彎曲能率為 M , 傾斜之變化為 di , 則歪能量為

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot di$$

故對於樑之全長為

$$\frac{1}{2} \int M di$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{2} \int M \frac{di}{dx} dx = \frac{1}{2} \int M \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx \dots \dots (234)$$

故 E, I 為常數, 則

$$\frac{1}{2EI} \int M^2 dx \dots \dots \dots (234a)$$

由此式可計算任意梁之歪能。但積分範圍當於每 M 值同一之範圍內取之。故受單一彎曲作用時, M 對於全長為一定。故

$$\frac{M^2}{2EI} \int_0^l dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 l}{EI} \dots \dots \dots (235)$$

若梁為矩形斷面, 寬為 b , 高為 d 。則 $p = \frac{6M}{bd^2}$ 。故

歪能為 $c \times \frac{p^2}{E} \times (\text{體積})$ 。或

$$c \times \frac{36M^2}{Eb^2d^4} \times bdl = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 l \times 12}{Ebd^3}$$

故 $c = \frac{1}{6}$, 而歪能為

$$\frac{1}{6} \times \frac{p^2}{E} \cdot bdl$$

例 3. 矩形斷面之梁支於兩端, 受均布荷重。試以最大內力及梁之體積表示歪能之量。

設 w 為均布荷重強度, l 為跨徑, 則

$$M = \frac{wl}{2}(lx - x^2)$$

歪量爲

$$\frac{1}{2EI} \int M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int \frac{w^2}{4} (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx = \frac{w^2 l^5}{240EI}$$

若樑之斷面之寬爲 b , 高爲 h , 則最大內力在樑之中央. 其值爲

$$p = \frac{1}{8} wl^2 \times \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{4} \frac{wl^2}{bh^2}$$

故
$$\frac{w^2 l^5}{240EI} = \frac{w^2 l^5}{20Ebh^3} = \frac{c}{E} \times p^2 \times (\text{體積})$$

$$= \frac{c}{E} \times \frac{9}{16} \times \frac{w^2 l^4}{b^2 h^4} \times bhl$$

故 $c = \frac{4}{45}$, 或歪能爲

$$\frac{4}{45} \frac{p^2}{E} \times (\text{體積})$$

94. 樑之橫方向上曲率. 若水平樑彎曲之, 使向上成凹形, 則上側面壓縮而下側面拉伸. 其橫方向上伸縮使上側面增寬而下側面減狹. 此橫方向上之歪與縱方向上之歪成比例, 而與自中性面距離成比例. 故橫向彎曲與縱向彎

曲同生。今橫向歪爲縱向歪之 $\frac{1}{m}$ 倍 (但 $\frac{1}{m}$ 爲包生比), 故橫向曲率亦爲縱向曲率之 $\frac{1}{m}$ 倍。設縱向曲率半徑爲 R , 橫向曲率半徑爲 R' , 則

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{mR}, \text{ 或 } R' = mR \quad (\text{第 144 圖})$$

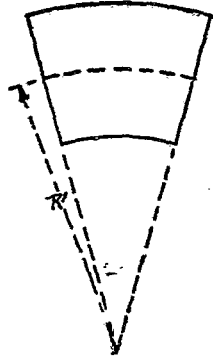
但上式假定橫向各纖維運動自由, 不受相隣層間之妨礙。若橫斷面之高較寬大時, 此假定可視爲真。但寬度大者, 實際上無橫向彎曲。惟上下側邊緣因運動自由少有彎曲耳。此時與 § 77 之例相當, 卽一方向之橫向歪受妨礙時是也。設樑之縱方向上歪爲 e_1 , 寬之方向上爲 e_2 , 而第三主內力爲零。故

$$e_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{p_2}{mE}$$

$$e_2 = \frac{p_2}{E} - \frac{p_1}{mE}$$

故
$$e_1 = \frac{p_1}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{p_1(m^2 - 1)}{m^2 E}$$

或
$$p_1 = e_1 \times E \frac{m^2}{m^2 - 1}$$

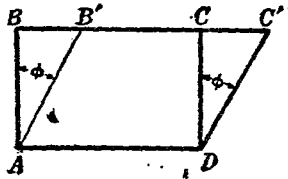


第 144 圖

95. 剪斷歪能. 彈性限界以內, 物體受剪歪時, 貯蓄剪斷歪能 (shearing resilience). 與垂直內力時相同. 剪力分布簡單時, 其歪能可易求. 例如第 145 圖上垂直於紙面方向上長 l 之材料片, 面 BC 上有均布強度 q 之剪內力之作用, 而剪斷歪 ϕ , B 移於 B' . 則歪能之量爲

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \times (\overline{BC} \cdot lq) \times (\overline{BB'}) &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \cdot lq \times \overline{AB} \cdot \phi \\
 &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot l \cdot \frac{q^2}{N} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{N} \times (\text{體積}) \dots \dots \dots (236)
 \end{aligned}$$

但 N 為材料之橫彈性係數，故均布剪內力時歪能之式與垂直內力時之形相同。



第 145 圖

扭轉軸時，橫斷面剪內力之分布不為均一，不能直接應用上式。今設平均半徑 r ，厚 dr ，長 l 之筒形體，扭轉之使生彈性限界以內之剪內力。今 dr 為甚小，故剪內力可視為平均分布。因之由 (236) 式，

$$\begin{aligned} \text{歪能} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{N} \times (\text{體積}) = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{N} \times 2\pi r \cdot dr \cdot l \\ &= \frac{\pi l}{N} q^2 r \cdot dr \end{aligned}$$

但此筒形體為軸之一部，故

$$q = \frac{f_s}{R} \cdot r$$

$$\begin{aligned} \text{故 歪能全量} &= \frac{\pi l f_s^2}{N R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi l f_s^2 R^2}{4 N} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{f_s^2}{N} \times (\text{體積}) \cdots \cdots (237) \end{aligned}$$

若中空軸時, 則

$$\begin{aligned} \text{歪能全量} &= \frac{\pi l f_s^2}{N R^2} \int_{R_0}^{R^2} r^3 dr = \frac{\pi l f_s^2}{4 N R^2} (R^4 - R_0^4) \\ &= \frac{R^2 + R_0^2}{R^2} \times \frac{1}{4} \times \frac{f_s^2}{N} \times (\text{體積}) \cdots \cdots (238) \end{aligned}$$

若上二式中 f_s 表彈性限界處剪內力時, 則上二式表最大彈性歪能。

求軸之歪能之別法可由扭轉能率 T 及扭角 θ 以計算之。蓋彈性限界內扭轉時所費之功爲

$$\frac{1}{2} \cdot T \cdot \theta \cdots \cdots (239)$$

以 § 48 及 § 49 之 (76), (77) 公式代入之, 可得上之結果。

對於圓形以外諸斷面可同法求之。

96. 樑因剪作用所起之撓屈。樑之撓屈，自彎曲能率外，單純彎曲以外之水平樑，尙因垂直之剪內力而生撓屈。

例如長 l 之突出樑，一端受荷重 W 之作用。若剪力 $F (= W)$ 均布於橫斷面，則自由端因剪斷所生撓屈爲

$$l \times (\text{剪斷歪之角度})$$

$$\text{或} \quad \phi \cdot l = \frac{q}{N} \cdot l = \frac{Wl}{AN}$$

但 A 爲橫斷面積。若斷面爲矩形，其寬爲 b ，高爲 h ，則對於均布剪內力，撓屈爲

$$\frac{Wl}{bhN}$$

但由 § 40，剪內力並非均布於樑之橫斷面。中性面上爲極大，最上側與最下側爲極小。因之撓屈尙較 $\frac{Wl}{AN}$ 爲大。但其值較彎曲能率所生之撓屈爲甚小。今設剪內力分布如 § 40 所示，而就數例計算如下。

(a) 一端受荷重之矩形斷面突出樑。今設

一薄層，長 l ，寬 b ，厚 dy 。與中性面平行，距中性面為 y 。則其剪斷歪能為

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{N} \cdot bl \cdot dy$$

但由 § 40,

$$q = \frac{6F}{b^2h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

而 $F = W$ ，故

$$q^2 = \frac{36W^2}{b^2h^6} \left(\frac{h^4}{16} + y^4 - \frac{h^2y^2}{2} \right)$$

因之，

$$\begin{aligned} \text{歪能全量} &= \frac{bl}{2N} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q^2 \cdot dy \\ &= \frac{18W^2l}{Nb^2h^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2y^2}{2} + y^4 \right) \cdot dy \dots (239) \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad = \frac{36W^2l}{Nb^2h^6} \left(\frac{yh^4}{16} - \frac{y^3h^2}{6} + \frac{y^5}{5} \right)_0^{\frac{h}{2}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{W^2l}{Nb^2h}$$

若 δ 為自由端因剪斷所生之撓屈，則

$$\frac{1}{2} \cdot W\delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{W^2l}{Nb^2h}$$

$$\text{因之, } \delta = \frac{6}{5} \cdot \frac{Wl}{Nbh} = \frac{6}{5} \times \left(\frac{q \text{ 之平均值}}{N} \right) \times (l) \dots \dots (240)$$

此值較均布剪內力時之撓屈大 20%。

若長 l 之支持樑, 受中央荷重 W , 則上式中以 $\frac{l}{2}$ 代 l , $\frac{W}{2}$ 代 W 即可。其因剪斷所生撓屈為

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{Wl}{Nbh} \dots \dots \dots (241)$$

此樑因彎曲與剪斷所生二種撓屈之總量為

$$\frac{Wl^3}{48EI} + \frac{3}{10} \cdot \frac{Wl}{Nbh} = \frac{Wl^3}{4Ebh^3} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{E}{N} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right\} \dots \dots (242)$$

(b) 圓形斷面。若圓形斷面之突出樑, 則由 § 40,

$$q = \frac{4F}{3\pi R^2} \cos^2 \theta$$

但 $y = R \sin \theta$, $z = 2R \cos \theta$, $dy = R \cos \theta \cdot d\theta$

因之,

$$\begin{aligned} \text{歪能全量} &= 2 \cdot \frac{l}{2N} \cdot \frac{16W^2}{9\pi^2 R^4} \cdot 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \cdot d\theta \\ &= \frac{5}{9} \cdot \frac{W^2 l}{\pi N R^2} = \frac{1}{2} W \delta \end{aligned}$$

故
$$\delta = \frac{10}{9} \cdot \frac{W}{\pi R^2} \cdot \frac{l}{N} = \frac{10}{9} \times \frac{q \text{ 之平均值}}{N} \times l \dots (243)$$

撓屈總量爲

$$\frac{Wl^3}{3EI} + \frac{10}{9} \cdot \frac{W}{\pi R^2} \cdot \frac{l}{N} = \frac{64Wl^3}{3\pi d^4 E} \left\{ 1 + \frac{5}{24} \cdot \frac{E}{N} \cdot \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right\} \dots (244)$$

若爲支持樑，則

$$\frac{4Wl^3}{3\pi d^4 E} \left\{ 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{E}{N} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (245)$$

97. 用歪能可解決之問題。普通物體在平衡狀態時，外力之代數和及外力能率之代數和各爲零。因之未知量之數若在條件數以上時，問題爲不定，而可生無數解答。但不定之自然現象當變化時，使所費功量爲最小而變化。此法則由實驗上而得，稱曰最小功法則 (principle of least work)。由此法則可解決不定問題。即設物體生某種歪時，由此算出其物體內所貯蓄之歪能。今設使歪能之量爲最小時而生歪，可解決問題。舉例如下。

今水平支持不變形矩形板之四隅，置某重量於板上，則支持力之值有四種，不能由平衡條

件求之。

若支點均為剛性，不生變形，則此問題全屬不定。今若支點皆為彈性，而可生歪，則由歪能全量為最小之法則，可算出各支持力。

第146圖上PQRS處支持力設各為 W_1, W_2, W_3, W_4 ，則

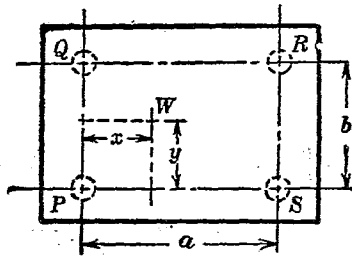
$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = W \dots\dots\dots(246)$$

但板設無重量，而荷重為 W 。對於PQ線取能率，則

$$Wx = (W_3 + W_4)a \dots\dots\dots(247)$$

對於PS線取能率，則

$$Wy = (W_2 + W_3)b \dots\dots\dots(248)$$



第 146 圖

若各支點之歪皆為彈性歪，則四支點即四個之腳所貯蓄歪能全量如下。設長各為 l ，其橫斷面積各為 A 時，

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{1}{E} \times \left(\frac{W_1^2}{A^2} + \frac{W_2^2}{A^2} + \frac{W_3^2}{A^2} + \frac{W_4^2}{A^2} \right) \times Al$$

故視 W_1 為變數，則歪能為最小之條件為

$$\frac{dU}{dW_1} = 0$$

$$\text{即 } W_1 + W_2 \cdot \frac{dW_2}{dW_1} + W_3 \cdot \frac{dW_3}{dW_1} + W_4 \cdot \frac{dW_4}{dW_1} = 0 \dots (249)$$

由(246), (247), (248)及(249)之四式，可求 W_1 , W_2 , W_3 及 W_4 。

$$\text{由 (247), } \quad W_4 = W \frac{x}{a} - W_3$$

$$\text{由 (248), } \quad W_2 = W \frac{y}{b} - W_3$$

代入於(246),

$$W_1 + W \cdot \frac{y}{b} - W_3 + W_3 + W \frac{x}{a} - W_3 = W$$

$$\text{或 } \quad W_1 - W_3 + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} \right) = W$$

因之，

$$\left. \begin{aligned}
 W_3 &= W_1 + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 W_4 &= W \cdot \frac{x}{a} - W_1 - W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 &= W \left(1 - \frac{y}{b} \right) - W_1 \\
 W_2 &= W \cdot \frac{y}{b} - W_1 - W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 &= W \left(1 - \frac{x}{a} \right) - W_1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (250)$$

此式對於 W_1 取微分, 則 W 爲常數, 故

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dW_3}{dW_1} &= +1 \\
 \frac{dW_4}{dW_1} &= -1 \\
 \frac{dW_2}{dW_1} &= -1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (251)$$

代入於 (249),

$$\begin{aligned}
 &W_1 + W_1 - W \left(1 - \frac{x}{a} \right) + W_1 + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right) \\
 &+ W_1 - W \left(1 - \frac{y}{b} \right) = 0
 \end{aligned}$$

或
$$4W_1 = W \left(3 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} \right)$$

即
$$W_1 = W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right) \dots\dots\dots (252)$$

故
$$W_2 = W \left(1 - \frac{x}{a} \right) - W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right)$$

$$= W \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} \right) \dots\dots\dots (253)$$

$$W_3 = W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right) + W \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 \right)$$

$$= W \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - \frac{1}{4} \right) \dots\dots\dots (254)$$

$$W_4 = W \left(1 - \frac{y}{b} \right) - W \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right)$$

$$= W \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \right) \dots\dots\dots (255)$$

若重量置於四脚中央，則各支持力相等，而皆為 $\frac{1}{4}W$ 。上式中 $x = \frac{a}{2}$ ， $y = \frac{b}{2}$ 即得。

又若置於一脚上，例如置於 P 處，則 $x=0$ ， $y=0$ 。

故
$$W_1 = \frac{3}{4}W$$

$$W_2 = W_4 = \frac{1}{4}W$$

$$W_3 = -\frac{1}{4}W$$

B脚受拉力。若各脚固定於下,可得此狀態。若非固定,僅放置時,則無拉力作用,故僅以三脚支持。可用普通解法求之。

第十五章

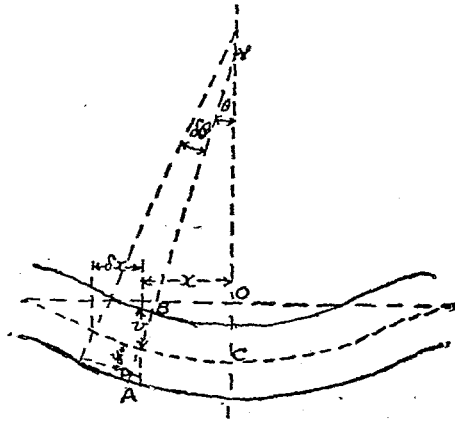
平面板

98. 平面板. 平面板支持於邊緣而受垂直外力, 平面生屈曲. 其研究法與直樑相似. 但彎曲不皆在一平面或非平行於一平面, 而可在板之任何垂直平面中.

圓板受對稱荷重時, 理論最簡單, 且最為實用. 其邊緣或固着或支持.

99. 圓板之內力與歪. 今設平面板厚度較直徑甚小, 且荷重為對稱. 故內力與歪對於通過中心之垂直軸亦為對稱. 板可視為水平, 而荷重為垂直. 板中垂直線當變形後, 可視為仍為直線, 而傾斜於垂直軸. 同半徑處垂直線之變形後傾斜, 由對稱條件可知其相同. 且必與垂直軸同交於一點. 如第147圖上 COV 為軸之

圓筒面變形後成爲圓錐面。設任一點 P 當變形前離中心垂直軸爲 x ，該點離板之中央面爲 y ，向下者取爲正。半徑 x 處垂直線當變形後之傾斜設爲 θ 。設 e_x 及 p_x 爲半徑方向之歪與內力， e_z 及 p_z 爲圓周之歪與內力，而拉內力視爲正。



第 147 圖

變形後，半徑與圓周方向上，凹側受壓縮，凸側受拉伸。中央平面則不生歪而爲中性面。 P 處半徑增加爲 $x + \theta y$ 。故離中性面 y 處之圓周歪爲

$$e_x = \frac{2\pi(x + \theta y) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{\theta y}{x}$$

若 $\rho = \frac{x}{\theta}$, 則 $e_x = \frac{y}{\rho}$. 但 ρ 為 P 點在通過 BV 而垂直於 BVO 面之平面內之曲率半徑. 半徑 $x + \delta x$ 處對於垂直位置之傾斜設為 $\theta + \delta\theta$, 則距中央面 y 處之 δx 增加而為 $\delta x + y\delta\theta$. 故半徑方向之歪為

$$e_x = y \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

若 $\rho' = \frac{dx}{d\theta}$, 則 $e_x = \frac{y}{\rho'}$. 但 ρ' 為 BVC 平面內之曲率半徑. 今軸向之主內力為零, 故由 §77,

$$e_x = \frac{\theta y}{x} = \frac{1}{E} \left(p_x - \frac{p_x}{m} \right) \dots \dots \dots (256)$$

$$e_x = y \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{E} \left(p_x - \frac{p_x}{m} \right) \dots \dots \dots (257)$$

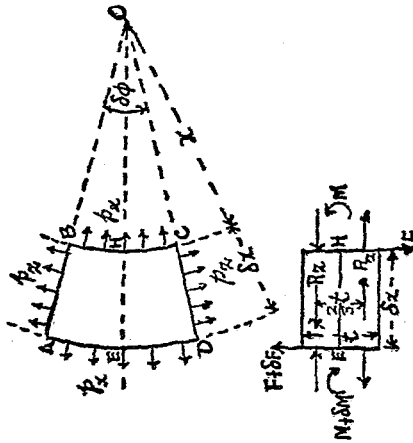
解此聯立方程式, 得

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \cdot y \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (258)$$

$$p_x = \frac{Em}{m^2 - 1} \cdot y \left(\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (259)$$

由此知 AB 斷面上半徑與周圍兩方向之內力之強與自中性面距離 y 成比例。與樑之彎曲內力之強相同。

今就第 148 圖上一微小部分之平衡考察之。圖之上部為水平斷面，在中性面下方。故 p_x 與 p_z 為拉內力，而中性面上方之內力為壓內力。



第 148 圖

(I) 微小部分上周圍內力之合成力。 AB , CD 面上 p_x 對於中央半徑線 OHE 之傾斜為

$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\phi}{2}\right)$. 各側面微小面積 δa 上作用之力為 $p_z \cdot \delta a$. 分解之為平行及垂直於 EH . 垂直分力之合力為零, 蓋 AB, CD 兩面上垂直分力相等而反向故也. 平行於 EH 之力為

$$2p_z \cdot \delta a \cdot \sin \frac{\delta\phi}{2} = p_z \cdot \delta a \cdot \delta\phi$$

中性面兩側之 p_z 有反對符號. 故平行於 EH 之分力之合力亦為零. 對於中性面上垂直於 OH 之軸, 上之偶力之總能率為

$$\delta\phi \Sigma(y \cdot p_z \cdot \delta a)$$

但就 AB 或 CD 面上取其總和. 由 (258) 式得

$$\delta\phi \cdot \frac{Em}{m^2 - 1} \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) \Sigma(y^2 \cdot \delta a) \dots \dots \dots (260)$$

若 t 為板之厚度, 則 $\Sigma(y^2 \cdot \delta a)$ 為矩形 AB 之慣性能率, 即等於 $\frac{1}{12} \cdot \delta x \cdot t^3$. 而周圍內力對於垂直於 EH 之軸之能率為

$$\frac{1}{12} \cdot \delta x \cdot \delta\phi \cdot t^3 \cdot \frac{Em}{m^2 - 1} \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) \dots \dots \dots (260a)$$

上之能率又可書為

$$R_z \times \frac{2}{3}t \dots\dots\dots(261)$$

但 $R_z = \delta\phi \Sigma(p_z \cdot \delta a)$, 即中性面一側 EO 方向之總內力, 由 AB 及 DC 面上周圍內力所生. 而 $\frac{2}{3}t$ 為拉力中心與壓力中心間偶力之臂. 若 θ 為正, 即圓錐頂點 V 在板上方, 而 $\frac{d\theta}{dx}$ 為正, 即板向下凸出, 則 (260a) 之值自 DC 側視之為反時針方向.

(II) 微小部分上半徑內力之合成力. BC 面上微小部分 δa 上作用之力分解為平行於 EH , 則略為

$$p_z \cdot \delta a$$

BC 面上半徑內力之總和為零, 中性面兩側內力為反對方向, 合成力為偶力. 其能率為

$$\Sigma(p_z \cdot y \cdot \delta a)$$

但就 BC 面上取總和. 而 BC 面之面積為 $t \cdot x \cdot \delta\phi$. 由 (259) 式得

$$M = \frac{Em}{m^2 - 1} \left(\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \Sigma(y^2 \cdot \delta a)$$

$$= \frac{x \cdot \delta\phi \cdot t^3}{12} \cdot \frac{Em}{m^2 - 1} \left(\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \dots\dots\dots (262)$$

同樣 AD 面上能率 $M + \delta M$ 亦可以 $x + \delta x$ 及 $\theta + \delta\theta$ 表之。 M 與 $M + \delta M$ 之相差 δM 爲 $\frac{dM}{dx} \cdot \delta x$ 。 其值由 (262) 取微分而得

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{\delta x \cdot \delta\phi \cdot t^3 \cdot Em}{m^2 - 1} \left(\frac{d\theta}{dx} + m \frac{d^2\theta}{dx^2} + m \cdot x \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \dots\dots (263)$$

若 θ 與 $\frac{d\theta}{dx}$ 爲正，則 (262) 式之 M 爲反時針方向，與 (260a) 相一致。 今若 $\frac{dM}{dx}$ 亦爲正，即 M 與 x 同增加，則 AD 面之時針向能率 $M + \delta M$ 大於 BC 面上反時針向能率。 而 (263) 爲時針向能率，與 (260a) 之能率相反對。

(260a) 及 (263) 所示偶力之合力必與外力平衡。 此外力即荷重與反作用力是也。 今就各例論之。

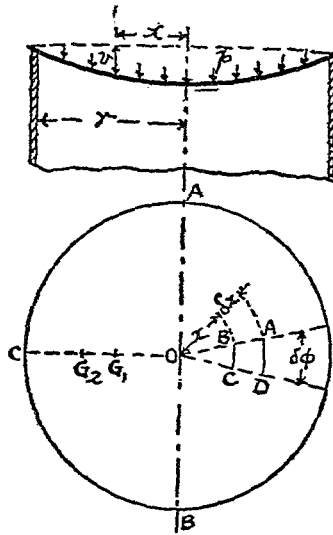
100. 周緣支持而面上受均布壓力之圓板。
 設 p 爲板之單位面積上均布壓力， r 爲圓板半徑， t 爲板之厚度。 第 149 圖上半徑 x 處同心圓

部分之垂直外力爲 $p \cdot \pi x^2$ ，故該圓所成垂直圓筒面上受 $p\pi x^2$ 之剪力。而第 148 或 149 圖上 BC 面之垂直剪力爲

$$F = p\pi x^2 \times \frac{\delta\phi}{2\pi} = \frac{px^2}{2} \cdot \delta\phi$$

同樣 AD 面上之剪力 $F + \delta F$ 爲

$$\frac{p}{2}(x + \delta x)^2 \delta\phi$$



第 149 圖

對於中性面內垂直於 EH 之軸 (第 148 圖), 外力之能率近似值為

$$F \cdot \delta x = \frac{px^2}{2} \cdot \delta\phi \cdot \delta x \dots\dots\dots (264)$$

由 DC 側視之為時針方向.

就微小部 $ABCD$ 之平衡言之, 則 (264) 之能率與 (260a) 及 (263) 之能率相平衡. 故

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{Emt^3}{m^2-1} \cdot \delta x \cdot \delta\phi \left\{ \left(m \frac{\theta}{x} + \frac{d\theta}{dx} \right) - \left(mx \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} + m \frac{d\theta}{dx} \right) \right\} - \frac{px^2}{2} \cdot \delta\phi \cdot \delta x = 0$$

或以 $\frac{Em^2t^3}{12(m^2-1)} \cdot \delta x \cdot \delta\phi$ 除之, 得

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{x} = - \frac{6(m^2-1)p}{Em^2t^3} x^2 \dots\dots\dots (265)$$

此與 § 62 之 (j) 式同形, 其解如下:

$$\frac{\theta}{x} = A + \frac{B}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot x^2 \dots\dots\dots (266)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = A - \frac{B}{x^2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot x^2 \dots\dots\dots (267)$$

積分常數 A, B 可自中央與周緣之條件定之. 在

中心則 $x=0$, $\theta=0$. 故由 (266) 式 $B=0$. 在邊緣則 $x=r$, $p_x=0$. 將 (266) 及 (267) 代入 (259), 得

$$0 = \frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} = A(m+1) - (3m+1) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot r^2.$$

$$\therefore A = \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)pr^2}{Em^2t^3}$$

以此代入, 則 (266) 及 (267) 爲

$$\frac{\theta}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2 \right) \dots\dots\dots (268)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right) \dots\dots\dots (269)$$

故由 (258), 則周圍內力之強爲

$$p_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} \left\{ (3m+1)r^2 - (m+3)x^2 \right\} \dots\dots\dots (270)$$

又由 (259), 則半徑內力之強爲

$$p_r = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} (3m+1) (r^2 - x^2) \dots\dots\dots (271)$$

此二種內力當中心即 $x=0$ 時, 在板之兩側, 即 $y = \pm \frac{t}{2}$ 處爲極大. 其值爲

$$(\max.) p_x = (\max.) p_r = \pm \frac{3pr^2}{8t^2} \cdot \frac{3m+1}{m} \dots\dots\dots (272)$$

若 $m=3$, 則

$$(\max.) p_x = (\max.) p_z = \frac{5}{4} p \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (272a)$$

若 $m=4$, 則

$$(\max.) p_x = (\max.) p_z = \frac{39}{32} p \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (272b)$$

若 r 與 t 之單位相同, 例如吋, 則內力之強 p_x 與 p_z 之單位與 p 相同, 例如磅/平方吋。

由 (268) 與 (269), 則

$$e_z = y \cdot \frac{\theta}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)py}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2 \right) \dots\dots (273)$$

$$e_x = y \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right) \dots\dots (274)$$

$x=0, y=\pm \frac{t}{2}$ 處均為極大。其值為

$$\begin{aligned} (\max.) E \cdot e_x &= (\max.) E \cdot e_z \\ &= \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \cdot p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots (275) \end{aligned}$$

若 $m=3$, 則 $(\max.) E e_x = (\max.) E e_z = \frac{5}{6} \cdot p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots (275a)$

若 $m=4$, 則 $(\max.) E e_x = (\max.) E e_z = \frac{117}{128} \cdot p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots (275b)$

半徑 x 處平均剪力強為 $F \div t \cdot x \cdot \delta\phi$, 或

$$p\pi x^2 \div 2\pi xt = \frac{px}{2t}$$

若其分布如矩形斷面直樑時之變化，則中央面 $y=0$ 處有極大強度，其值為平均值之 $\frac{3}{2}$ 。故為 $\frac{3}{4} \cdot \frac{px}{t}$ 。而其最大值在周緣，即 $x=r$ 處。此時其值為 $\frac{3}{4} \cdot \frac{pr}{t}$ 。

設半徑 x 處板之中性面自原位置之撓屈為 v ，則 $-\frac{dv}{dx} = \tan \theta$ 。傾斜與撓屈為甚小時，則近似為

$$-\frac{dv}{dx} = \theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2x - x^3 \right) \dots (276)$$

$$\therefore v = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \right) \dots (277)$$

$x=r$ 時， $v=0$ 。故

$$C = -\frac{r^4}{4} \cdot \frac{5m+1}{m+1}$$

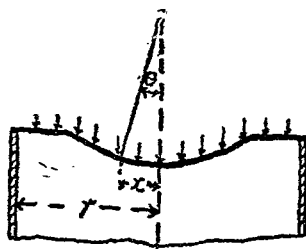
故
$$v = -\frac{3}{8} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{5m+1}{m+1} \cdot \frac{r^4}{2} \right) \dots (278)$$

中心 $x=0$ 處, 撓屈為極大, 其值為

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{(m-1)(5m+1) \cdot pr^4}{m^2 Et^3} \dots\dots\dots(279)$$

若 $m=3$, 則為 $\frac{2}{3} \cdot \frac{pr^4}{Et^3} \dots\dots\dots(279a)$

101. 周緣固着, 一面受均布壓力之圓板. 水平圓板固着其周緣於水平方向時, 其對於周緣支持圓板之關係與固着樑及支持樑之關係相同. 上節 (266) 與 (267) 以前諸式均可成立.



第 150 圖

今 $x=0$, 則 $\theta=0$. 故 $B=0$. 周緣上 $x=r$, 則 $\theta=0$.
故由 (266),

$$A = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot r^2$$

代入於(266)與(267),得

$$\frac{\theta}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot (r^2-x^2) \dots \dots \dots (280)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} (r^2-3x^2) \dots \dots \dots (281)$$

代入於(258), (259), 得

$$p_z = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} \left\{ (m+1)r^2 - (m+3)x^2 \right\} \dots \dots \dots (282)$$

$$p_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{py}{mt^3} \left\{ (m+1)r^2 - (3m+1)x^2 \right\} \dots \dots \dots (283)$$

此二種內力在中央 $x=0$ 與周緣 $x=r$ 處, 在板之兩側, 達其正負符號之極大值. 彎曲內力之最大值之強為周緣之半徑內力. 若 $x=r$, 則

$$p_x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{pyr^2}{t^3} \dots \dots \dots (284)$$

$y = \pm \frac{t}{2}$ 時,

$$(\max.) p_x = \mp \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{t^2} \cdot p \dots \dots \dots (285)$$

當 $x=0, y = \pm \frac{t}{2}$ 時,

$$p_x = p_z = \frac{3}{8} \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r^2}{t^2} \cdot p \dots \dots \dots (286)$$

最大歪起於 $x=r$ 處半徑方向之歪。 $x=r$,
 $y = \pm \frac{t}{2}$ 時,

$$(\max.)e_x = \pm y \cdot \frac{d\theta}{dx} = \mp \frac{3}{4} \cdot \frac{m^2-1}{Em^2} \cdot \frac{r^2}{t^2} \cdot p \dots\dots (287)$$

$x=0$ 處符號相反,而其值爲上之半。且 e_x 與 e_y 有同值。又

$$-\frac{dv}{dx} = \theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} (r^2x - x^3) \dots\dots (288)$$

$$\therefore v = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)p}{E^2mt^3} \left(\frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \right) \dots\dots (289)$$

$x=r$ 時, $v=0$. 故 $C = -\frac{r^4}{4}$.

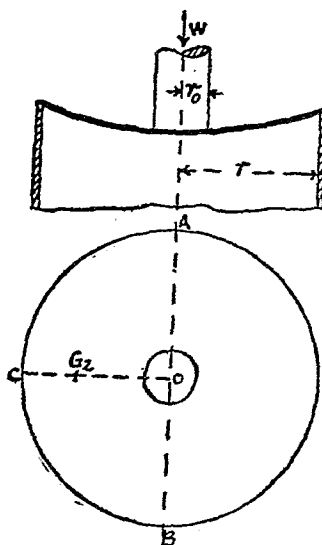
$$\therefore v = \frac{3}{16} \cdot \frac{(m^2-1)p}{Em^2t^3} \cdot (r^2 - x^2)^2 \dots\dots (290)$$

中心 $x=0$ 時有極大值。其值爲

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{(m^2-1)}{Em^2t^3} \cdot pr^4 \dots\dots (290a)$$

若 $m=3$, 則爲 $\frac{1}{6} \cdot \frac{pr^4}{Et^3} \dots\dots (290b)$

102. 周緣支持,中央受荷重之圓板。若荷重集中於板之中心一點,則材料爲完全彈性時,



第 151 圖

板之中心上內力與歪爲無限大。故中心上集中荷重假定其均布於半徑 r_0 之同心小圓內。如第 151 圖所示。設 W 爲全荷重，受荷重部分之每單位面積上均布荷重設爲 p ，則

$$p = \frac{W}{\pi r_0^2}$$

§100 之 (265) 式之解爲

$$\frac{\theta}{x} = A + \frac{B}{x^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W}{Em^2t^3\pi r_0^2} \cdot x^2 \dots \dots \dots (291)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = A - \frac{B}{x^2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W}{Em^2t^3\pi r_0^2} \cdot x^2 \dots \dots \dots (292)$$

對於受荷部以外之部分，則第 148 圖上微小部分 ABCD 之外力能率為

$$F \times \delta x = \frac{pr_0^2}{2} \cdot \delta\phi \cdot \delta x$$

故對於此部分，§100 之 (265) 式為

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{x} = - \frac{6(m^2-1)W}{\pi Em^2t^3} = \text{常數} \dots \dots (293)$$

其解為

$$\frac{\theta}{x} = C + \frac{D}{x^2} - \frac{3(m^2-1)W}{\pi Em^2t^3} \log_e x \dots \dots \dots (294)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = C - \frac{D}{x^2} - \frac{3(m^2-1)W}{\pi Em^2t^3} (\log_e x + 1) \dots \dots (295)$$

常數 A, B, C, D 由下之四條件定之。

- (a) $x=0$ 則 $\theta=0$ ，故 (291) 式中 $B=0$ 。
- (b) $x=r_0$ 則 (291) 與 (294) 兩式之 θ 相同。
- (c) $x=r_0$ 則 (292) 與 (295) 兩式之 $\frac{d\theta}{dx}$ (曲率) 相同。

上之三條件,當板之邊緣或固着或支持,均可成立。對於支持邊緣,則第四條件爲

(d) $x=r$ 時, $p_x=0$ 。故由(259)式,

$$\frac{\theta}{x} + m \frac{d\theta}{dx} = 0$$

由(b), (c), (d)三條件,得

$$A = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \left(\frac{m}{m+1} + \log_e \frac{r}{r_0} - \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$C = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \left(\frac{m}{m+1} + \log_e r - \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$D = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W r_0^2}{\pi E m^2 t^3}$$

將此代入於(291), (292), (293), (294), (295)諸式並由§99之(258), (259)及 e_z , e_x 諸式,可求板中任何部分之內力與歪。其最大值起於中心。

$x=0$, $y=\pm \frac{t}{2}$ 處,

$$\begin{aligned} (\max.) p_x &= (\max.) p_x = \frac{E m y}{m^2-1} (m+1) A \\ &= \pm \frac{3(m+1)W}{2\pi m t^2} \left(\frac{m}{m+1} + \log_e \frac{r}{r_0} - \frac{(m-1)}{(m+1)} \cdot \frac{r_0^2}{4r^2} \right), \quad (296) \end{aligned}$$

若 $r_0=r$, 則與 (272) 式相一致. 若 $\frac{r_0}{r}$ 甚小時, 上式最後之項可略去之, 而 r_0 漸趨近於零時, $\log_e \frac{r}{r_0}$ 漸為無限大.

103. 周緣固着, 中央受荷重之圓板. 上節中第四條件為 $x=r$, 則 $\theta=0$. 故

$$A = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \left(\log_e \frac{r}{r_0} + \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$C = \frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \left(\log_e r + \frac{r_0^2}{4r^2} \right)$$

$$D = -\frac{3}{4} \cdot \frac{(m^2-1)W r_0^2}{\pi E m^2 t^3}$$

由此可求各部分之內力與歪. $x=0, y=\pm \frac{t}{2}$ 時,

$$\begin{aligned} p_x = p_z &= \frac{E m y}{m^2-1} (m+1) A \\ &= \frac{3(m+1)W}{2\pi m t^2} \left(\log_e \frac{r}{r_0} + \frac{r_0^2}{4r^2} \right) \dots\dots\dots(297) \end{aligned}$$

$\frac{r_0}{r}$ 若小時最後項可略去. $r_0=r$ 時上式與 (286)

式相一致. $x=r$ 時,

$$p_x = \frac{E m y}{m^2-1} \left[(m+1)C - (m-1) \frac{D}{r^2} \right]$$

$$-\frac{3(m^2-1)W}{\pi E m^2 t^3} \{ (m+1) \log_e r + m \}]$$

$y = \pm \frac{t}{2}$ 時, 以 C, D 之值代入, 則

$$p_z = \mp \frac{3}{2} \cdot \frac{W}{\pi t^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{2r^2} \right) \text{ 或 } \frac{W}{\pi t^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} \right) \dots (298)$$

若 $r_0 = r$ 則與 (285) 式相一致。

104. 對於圓板之近似方法. 用下之近似方法可求對稱形板之最大彎曲內力. 其法由荷重與反作用力而求對稱軸側一部分之彎曲能率. 故僅適用於周緣支持之板, 不可用於固着者.

(a) 單位面積受均布荷重 p (第 149 圖). 就 ACD 半部分之板考察之. 其上壓力為 $\frac{\pi r^2}{2} \cdot p$, 合成力作用線通過於重心 G_1 , 而 $OG_1 = \frac{4r}{3\pi}$. 邊緣 ACB 反作用力亦為 $\frac{\pi r^2}{2} \cdot p$, 其作用中心為 G_2 , OG_2 為 $\frac{2r}{\pi}$. 荷重與反作用力對於 AOB 斷面之彎曲能率為

$$M = \frac{\pi r^2}{2} \cdot p \left(\frac{2r}{\pi} - \frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{pr^3}{3} \dots\dots\dots(299)$$

斷面 AOB 上兩外側面垂直於 AB 之彎曲內力平均強可以 AB 上斷面係數 $\frac{1}{6} \cdot 2r \cdot t^2$ 或 $\frac{1}{3}rt^2$ 除彎曲能率而求得。即

$$\frac{pr^3}{3} \div \frac{1}{3}rt^2 = p \cdot \frac{r^2}{t^2} \dots\dots\dots(300)$$

但由 §100 之 (272) 式，則 O 點之最大內力之強為上之平均值乘以 $\frac{3}{8} \cdot \frac{3m+1}{m}$ ，或 $m=3$ 時，乘以 1.25 而得。即最大內力之強為 $1.25p \frac{r^2}{t^2}$ 。

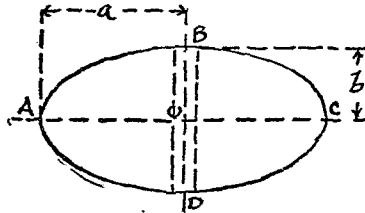
(b) 中央受荷重 W (第 151 圖)，若中央荷重 W 均布於半徑 r_0 之同心圓，則對於 AB 之能率為

$$\frac{W}{2} \left(\frac{2r}{\pi} - \frac{4r_0}{3\pi} \right) = \frac{W}{\pi} \left(r - \frac{2r_0}{3} \right)$$

而斷面係數為 $\frac{1}{3}rt^2$ ，故彎曲內力平均強為

$$\frac{W}{\pi t^2} \left(3 - 2 \frac{r_0}{r} \right) \dots\dots\dots(301)$$

由 §102 之 (296), 則求最大內力強之所乘係數與 $\frac{r_0}{r}$ 有關係. 若 $\frac{r_0}{r}$ 為大, 而 $m=3$, 則近於 1.25. 若 $\frac{r_0}{r} = \frac{1}{10}$, 則其值為 2.2.



第 152 圖

105. 周緣支持, 受均布壓力之橢圓板. 第 152 圖上 $ABCD$ 為橢圓板, 支於其周圍. 最大撓屈 δ 起於中心 O , 其傾斜 θ 為零. OB 上平均傾斜為 $\frac{\delta}{b}$, 平均曲度或單位長之傾斜變化為 $\frac{\delta}{b^2}$, 而最大曲度在 O 處. 同樣 OA 間平均曲度為 $\frac{\delta}{a^2}$, 而最大在 O 點. 中心 O 上彎曲內力之強因各方向而異, 由 (259) 式, 其值與 $\frac{d\theta}{dx}$ 為比例. 若 OA , OB 上內力變化依同一法則, 則 O 點上 OB 方向

內力爲其直角方向上內力之 $\frac{a^2}{b^2}$ 倍。若 a 大於 b , O 點上 OB 方向內力較其直角方向爲大, 而爲各方向中最大者。

今設 a 爲甚大而 b 爲甚小之橢圓。若以 BD 爲中心線, 切取單位寬之狹片, 則均布壓力 p 對於 O 所生之彎曲能率爲 $\frac{1}{8}p(2b)^2$ 或 $\frac{1}{2}pb^2$ 。而斷面¹係數爲 $\frac{1}{6}t^2$, 故 OB 方向之彎曲內力之強爲

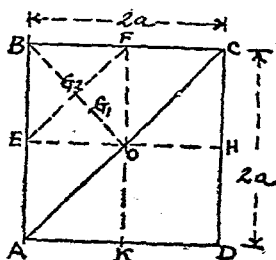
$$\frac{1}{2}pb^2 \div \frac{1}{6}t^2 = 3p \frac{b^2}{t^2}.$$

但實際上因受隣近諸狹片之影響, 內力之值較上尙小。而上示之值爲甚長橢圓之上限。

若 $a=b$, 則由 (272 a), 中心上內力爲 $1.25p \frac{b^2}{t^2}$ 。對於上述二者中間之橢圓, 則由實驗而定係數。此係數爲 $\frac{b}{a}$ 之直線函數。 $\frac{b}{a}=0$ 時爲 $2\frac{1}{2}$, $\frac{b}{a}$ 爲 1 時爲 1.25。故彎曲內力之最大值略爲

$$1.25\left(2 - \frac{b}{a}\right)p \cdot \frac{b^2}{t^2} \dots\dots\dots(302)$$

106. 周緣支持, 受均布壓力之方板. 第 153 圖 $ABCD$ 示方板, 沿其周緣支持. 彎曲能率可對於一對角線或垂直於邊之一對稱軸取之. 但後者周緣反動力之分布為未知, 故就對角線 AC 之斷面而論之. O 點彎曲內力之強由對稱知 OC 與 OB 方向為同一. 又 OF 與 OH 方向之內



第 153 圖

力亦由對稱知其相同. 故內力橢圓為圓. 因之彎曲內力無有過於斷面 AC 之垂直方向者. 若每邊長 $2a$, 單位面積上均布內力為 p , 則正方形半分之壓力為 $2a^2p$. BC 邊上反作用力 pa^2 之合成力必通過邊之中點 F . 同樣 AB 邊上反作用力 pa^2 必通過 E 點. 故二反作用力合成力必

通過 EF 中點 G_2 , 而 $OG_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. ABC 三角形上壓力中心必為 G_1 , 而 $OG_1 = \frac{1}{3}OB = \frac{\sqrt{2}}{3}a$. 故 AC 斷面上彎曲能率為

$$2a^2p \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}a \right) = \frac{2a^3p}{3\sqrt{2}}$$

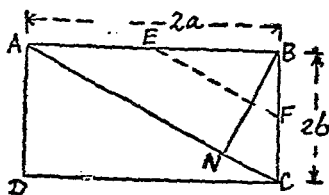
設板厚為 t , 則 AC 之斷面係數為

$$\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2}a \cdot t^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a \cdot t$$

故垂直於 AC 之表面彎曲內力之平均強為

$$\frac{2a^3p}{3\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{2}}{3}at^2 = p \cdot \frac{a^2}{t^2} \dots\dots\dots(303)$$

107. 周緣支持, 受均布壓力之矩形板. 第 154 圖上矩形 $ABCD$ 之 AB 與 BC 邊之長設各為



第 154 圖

2a 與 2b. 若兩邊非甚差, 則垂直於對角線 AC 之內力可視為與任何他方向之內力相等. 設 NB 垂直於 AC . AB 及 BC 兩邊之反作用力各通過中點 E 與 F . 二反作用力合成力必通過 EF 線, 故作用點距 AC 為 $\frac{1}{2}BN$. ABC 三角形上壓力中心在其重心, 其距 AC 為 $\frac{1}{3}BN$. 而壓力與反作用力之值為 $2abp$, 故對於 AC 之彎曲能率為

$$2abp\left(\frac{1}{2}BN - \frac{1}{3}BN\right) = \frac{1}{3}ab \cdot p \cdot BN$$

$$\text{又 } \frac{BN}{BC} = \frac{AB}{AC}, \text{ 或 } BN = \frac{4ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

AC 斷面之斷面係數為

$$\frac{1}{6} \times 2\sqrt{a^2+b^2} \times t^2 = \frac{t^2}{3} \sqrt{a^2+b^2}$$

故垂直於 AC 之彎曲內力之平均強為

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot p \div \frac{t^2}{3} \sqrt{a^2+b^2} = \frac{2a^2}{a^2+b^2} \cdot p \cdot \frac{b^2}{t^2} \dots\dots (304)$$

若甚長矩形, 則 $\frac{a}{b}$ 甚大, 上式漸近於 $2p \cdot \frac{b^2}{t^2}$.

問 題

1. 直徑 20 吋厚 $\frac{3}{4}$ 吋之圓板, 支持於周緣. 若內力之強不過於 10,000 磅/吋² 時, 則該板可耐之每平方吋上壓力幾何? (包生比為 0.3)
2. 上例之周緣若固着則如何?
3. 厚 $\frac{1}{2}$ 吋圓板, 支持其邊緣, 受 100 磅/吋² 之壓力, 若內力限於 5 噸/吋² 以內時, 板之最大可容直徑若干? (包生比 = 0.3).

材料強度學術名

中英對譯表

Strength of materials	… …	材	料	強	度	學
Stress	… … … …	內				力
Structure	… … … …	構		造		物
Load	… … … …	荷				重
Intensity of stress	… … …	內	力		之	強
Normal stress	… … … …	垂	直		內	力
Direct stress	… … … …	縱		內		力
Tensile stress	… … … …	拉		內		力
Compressive stress	… … … …	壓		內		力
Tangential stress	… … … …	切	線		內	力
Shearing stress	… … … …	剪		內		力
Simple stress	… … … …	簡		單	內	力
Combined stress	… … … …	合		成	內	力
Strain	… … … …				歪	
Tensile strain	… … … …	拉			伸	歪
Elongation	… … … …	伸				長
Compressive strain	… … … …	壓			縮	歪
Shearing strain	… … … …	剪			斷	歪
Elasticity	… … … …	彈				性

Elastic limit	彈	性	限	界
Elastic strain	彈	性	歪	
Permanent set	不	復	歪, 永	久 變 形
Hooke's law	呼	克	法	則
Modulus of elasticity	彈	性	係	數
Modulus of direct elasticity	縱	彈	性	係 數
Modulus of transverse elasticity	橫	彈	性	係 數
Young's modulus	楊	氏	係	數
Modulus of rigidity	剛	性	係	數
Load deformation diagram	荷	重	變	形 線 圖
Load elongation diagram	荷	重	伸	長 線 圖
Load compression diagram	荷	重	壓	縮 線 圖
Stress-strain diagram	內	力	歪	線 圖
Yield point	降	伏		點
Limit of proportionality	比	例	限	界
Limit of elasticity	彈	性	限	界
Plasticity	萎			性
Local elongation	局	部	伸	長
Ultimate strength	最	大	強	度
Breaking strength	破	壞	強	度
Test piece	試	驗		棒
Dead load	死	荷		重
Live load	活	荷		重

Repeated load	反	覆	荷	重
Alternate load	交	變	荷	重
Allowable stress	可	容	內	力
Safe working stress	安	全	內	力
Allowable load	可	容	荷	重
Safe working load	安	全	荷	重
Factor of safety	安	全		率
Shock	衝			擊
Mechanical property	機	械	的	性
Ductility	延			性
Malleability	可	鍛		性
Brittleness	脆			性
Pig iron	生			鐵
White pig iron	白	生		鐵
Gray pig iron	灰	生		鐵
Cast iron	鑄			鐵
Malleable iron	可	鍛		鐵
Wrought iron, Wrought steel	鍊	鐵, 鍊		鋼
Ingot iron, Ingot steel	鑄	鐵, 鑄		鋼
Slag	熔			滓
Longitudinal strain	縱			歪
Transverse strain	橫			歪
Poisson's ratio	包	生		比
Normal component stress	垂	直	分	內

Tangential component stress...	切	線	分	內	力
Inclined stress	傾	斜	內	力	
Angle of repose... ..	靜	止	角		
Shear	剪,	剪	斷		
Volumetric strain	容	積	歪		
Bulk modulus	容	積	彈	性	係
Turning moment	迴	轉	能	率	
Moment	能			率	
Energy			能		
Work			功		
Power	功			率	
Complementary shear stress ...	共	衡	剪	內	力
Simple shear	單		純	剪	
Bolt	螺		帽	釘	
Rivet	鉚			釘	
Lap joint	疊		接	縫	
Butt joint	對		接	縫	
Butt straps	縫			板	
Single shear	單			剪	
Double shear	複			剪	
Pitch	心	距,	步	距	
Beam			樑		
Reaction	反	作	用	力	
Shearing force	剪			力	

Bending	彎,	彎	曲
Bending stress	彎	內	力
Bending moment	彎	曲 能	率
Moment of resistance	抵	抗 能	率
Bending moment diagram	彎	曲 能 率	圖
Shearing force diagram	剪	力	圖
Canti-lever	突	出	樑
Supported beam	支	持	樑
Fixed beam, Built-in beam,							
Encasté beam	固	着	樑
Continuous beam	連	續	樑
Span	跨		徑
Concentrated load	集	中 荷	重
Distributed load	分	布 荷	重
Uniformly distributed load	均	布 荷	重
Free end	自	由	端
Fixed end	固	着	端
Dangerous section	危	險 斷	面
Simple bending	單	純 彎	曲
Neutral surface	中	性	面
Neutral axis	中	性	軸
Geometrical moment of area	面積之幾何學的	能	率
Moment of inertia	慣	性 能	率
Skin stress	表	皮 內	力

Modulus of section	斷面係數
Radius of gyration	迴轉半徑
Polar moment of inertia... ..	極慣性能率
Planimeter	面積計
Elastic curve	彈性曲線
Curvature	曲率
Radius of curvature... ..	曲率半徑
Slope	傾斜
Deflection of beam	梁之撓屈
Fixing moment	固着能率
Theorem of three moments	三能率定理
Diagram	線圖
Beam of uniform strength	均一強度之梁
Laminated spring	疊板彈條
Knuckle joint	叉接合
Pin	釘
Long column	長柱
Strut	撐
Tie rod	拉棒
Hinged end, Rounded end	活動附着端, 自由端
Fixed end, Flat end	固着端
Euler's formula	屋伊勒公式
Gordon-Rankine's formula	古爾屯藍慶公式
Johnson's formula	江遜公式

Lilly's formula...	李里公式
Axial load ...	軸線荷重
Eccentric load ...	偏心荷重
Eccentricity ...	偏心
Torsion ...	扭, 扭轉
Helix ...	螺旋
Angle of shear ...	歪角
Angle of twist ...	扭角
Polar resisting moment ...	極抵抗能率
Twisting moment ...	扭轉能率
Shaft ...	軸
Solid shaft...	實體軸
Hollow shaft ...	中空軸
Crank shaft ...	曲柄軸
Crank effort diagram ...	曲柄迴轉力線圖
Shaft horse power, Brake horse power ...	軸馬力
Key ...	縱栓
Helical spring ...	螺旋彈條
Hoop tension, Circumferential tension ...	周圍張力
Spherical shell ...	球形殼
Cylinders ...	筒
Collapse ...	凹陷

Flue	焰			管
Radial compressive stress	半徑	方向	壓內	力
Pulley	滑			輪
Belt	拖			帶
Wheel rim	輪			邊
Ring	圓			環
Disc	圓			板
Rivet head	鉚		釘	頭
Rivet joint	鉚	釘	接	縫
Shank	鉚	釘		頸
Joint	接	縫,	接	合
Single rivetted lap joint	一	列	鉚	釘
Chain rivetting	並	列	鉚	釘
Zig-zag rivetting	間	列	鉚	釘
Caulking	搗			緊
Efficiency	効			率
Longitudinal seams	縱	向	接	縫
Screw joint	螺	絲	接	合
Screw thread	螺			絲
Element	部			體
Male screw	雄		螺	旋
Female screw	雌		螺	旋
Permanent joint	永	久	接	合
Temporary joint	一	時	接	合

Whitworth standard thread ...	魏垣氏標準螺絲
Sellers standard thread ...	守巒氏標準螺絲
Nut ...	釘帽
Stud ...	端入螺帽釘
Spanner ...	迴螺器
Pin joint ...	串釘接合
Forked joint ...	叉接合
Cotter joint ...	楔接合
Wedge ...	楔
Cotter ...	楔
Socket ...	承孔
Friction key ...	摩擦縱栓
Key on the flat ...	平面上縱栓
Key way ...	栓溝
Sunk key ...	嵌入縱栓
Principal plane ...	主平面
Principal stress ...	主內力
Compound stress ...	聯合內力
Principal strain ...	主歪
Elastic failure ...	彈性的破損
Equivalent simple stress ...	相當單純內力
Equivalent twisting moment ...	相當扭轉能率
Equivalent bending moment ...	相當彎曲能率

Maximum principal stress					
theory	最	大	主	內	力 說
Maximum principal strain					
theory	最	大	主	歪	說
Maximum shear stress theory	最	大	剪	內	力 說
Curved beam	曲				樑
Hook				鉤	
Link				環	
Chain link	鏈				環
Catenary	懸	垂	曲		線
Suspension-bridge cable	懸	橋			纜
Strain energy, Resilience ...	歪				能
Proof resilience	彈	性	歪		能
Shearing resilience	剪	斷	歪		能
Principle of least work	最	小	功	法	則

表簡合折位單本基衡量度外中(二)

量 重		量 容						量 度				舊制及外國基本單位名稱	新制名稱	標準	市制	用制	
日	俄	美	英	舊營造庫平制	日	俄	美	英	舊營造庫平制	日	俄						美
制	制	制	制	斤	制	制	制	制	制	制	制	制	制	尺	尺	磅	磅
貫	分特	磅(常權)	磅(常權)		升	維得維(液量)	蒲式耳(乾量)	加倫(液量)	蒲式耳(乾量)	加倫	尺	阿爾申	依亞(磅)	依亞(磅)			
	Funt	Pound	Pound			Vedro	Tebutvenik	Gallon	Bushel	Gallon		Arshine	Yard	Yard			
	三·三三〇〇〇公斤	〇·四〇肆三公斤	〇·四五三六公斤	〇·五九六六公斤	一·〇三九〇七公升	三·二五三三三公升	三·三三六三六公升	三·六三三三三公升	三·三三六三三公升	四·五三三三三公升	一·〇三三三三公升	〇·七三三三三公尺	〇·九三三三三公尺	〇·九三三三三公尺			
	七·五三〇〇市斤	〇·八一九〇市斤	〇·九二七〇市斤	一·一九〇七市斤	三·三三三三市升	三·五三三三市升	三·八三三三市升	四·一三三三市升	四·四三三三市升	一·〇三三三市升	〇·七三三三市尺	〇·九三三三市尺	〇·九三三三市尺	〇·九三三三市尺			

申531
20.1/744



中華民國二十三年十月初版

(64913)

工學叢書 材料強度學 二冊

每部定價大洋壹元

外埠酌加運費匯費

著者 陸志鴻

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版 翻
權 印
所 必
有 究

(五)

四九八二上

