TREKËNDËSHI I PASKALIT

Trekëndëshi i Paskalit është një grup trekëndëshi i pafund i numrave të plotë me shumë lidhje interesante me aritmetikën e numrave të plotë, duke përfshirë koeficientët binomialë dhe numrat Fibonacci[1]. Megjithëse trekëndëshi ishte studiuar shekuj më parë nga matematikanët indianë, grekë, persianë, kinezë dhe italianë, ai u emërua trekëndëshi i Paskalit sipas matematikanit francez Blaise Pascal, i cili zhvilloi shumë nga përdorimet e tij dhe organizoi rezultatet e tij në traktatin e tij, Traité du treangle arithmétique.[2]

Ndërtimi i trekëndëshit të Paskalit

Çdo numër në këtë grup mund të identifikohet duke përdorur rreshtin e tij dhe pozicionin e tij specifik me rreshtin. Rreshtat numërohen nga lart poshtë, duke filluar me n = 0, ndërsa termat në çdo rresht numërohen nga e majta në të djathtë, duke filluar me k = 0. Për të ndërtuar këtë trekëndësh, fillojmë duke shkruar vetëm numrin 1 në rreshtin 0 Më pas, për të gjetur elementet e rreshtave të mëposhtëm, shtojmë numrin sipër dhe majtas (Rresht = n−1, Pozicioni = k−1) dhe numrin lart dhe djathtas (Rreshti = n−1, Pozicioni = k) të pozicionit tonë aktual (Rresht = n, Pozicioni = k) për të marrë numrin që i takon këtu. Nëse jemi në skajin e trekëndëshit, ku numri djathtas ose majtas nuk është i pranishëm, ne zëvendësojmë një 0 në vend të tij, prandaj çdo rresht fillon dhe mbaron me 1 (0+1 =1 në anën e majtë. dhe 1 + 0=1 në anën e djathtë për çdo rresht).

Për shembull:

Për të ndërtuar rreshtin 1, imagjinojmë rreshtin 0 të ketë formën '0 1 0' dhe kështu numri në pozicionin 0 të rreshtit 1 është 0+1 =1 dhe numri në pozicionin 1 të rreshtit një është 1 + 0=1. Kjo i jep rreshtit 1 formën '1 1'.

Për të ndërtuar rreshtin 2, imagjinojmë rreshtin 1 të ketë formën '0 1 1 0' dhe kështu numri në pozicionin 0 të rreshtit 2 është 0+1 =1, numri në pozicionin 1 të rreshtit 2 është 1 + 1 =2 , dhe numri në pozicionin 2 të rreshtit 2 është 1 + 0=1. Kjo i jep rreshtit 2 formën '1 2 1'.

---

[1] është një seri numrash në të cilat çdo numër është shuma e dy numrave që i paraprinë. Duke filluar nga 0 dhe 1, sekuenca duket kështu: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, e kështu me radhë përgjithmonë. Vargu i Fibonacit mund të përshkruhet duke përdorur një ekuacion matematik: Xn + 2 = Xn + 1 + Xn.

[2] është një vepër matematikore nga Blaise Pascal, e shkruar në vitin 1654 (dhe e shtypur vitin e ardhshëm), kur autori, vetëm 31 vjeç (ai ka lindur në 1623), njihej tashmë në matematikën e mesme nga ai Traktati mbi seksionet konike u botua kur ai ishte 17 vjeç.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Koeficientët binomialë

Shqyrtojmë zgjerimet e mëposhtme të fuqisë $(x+y)^n$ në një shumë termash:

$(x+y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + y^2$

$(x+y)^4 = x^4 + 4\cdot x^3\cdot y + 6\cdot x^2\cdot y^2 + 4\cdot x\cdot y^3 + y^4$

Ky zgjerim mund të shprehet më kompakt duke përdorur Formulën Binomiale:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Koeficienti binomial C(n,k) ose nCk dhe i shqiptuar n mbi k, është numri i mënyrave të zgjedhjes së një nëngrupi k objektesh nga një grup prej n objektesh. Vlera e tij mund të jepet më qartë si:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-1+k)}{k(k-1)\ldots1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \text{për } k \le n.$$

Siç mund ta kemi vënë re, koeficientët e zgjerimit të fuqisë së n-të $(x+y)^n$ korrespondojnë drejtpërdrejt me numrat në rreshtin e n-të të trekëndëshit të Paskalit.

$(x+y)^2 = 1\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y + 1\cdot y^2$

$(x+y)^3 = 1\cdot x^3 + 3\cdot x^{2\cdot}y + 3\cdot x\cdot y^2 + 1\cdot y^2$

$(x+y)^4 = 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3\cdot y + 6\cdot x^2\cdot y^2 + 4\cdot x\cdot y^3 + 1\cdot y^4$

Me fjalë të tjera, numri në pozicionin k të rreshtit të n-të të Trekëndëshit të Paskalit është n mbi k. Për shembull, numri në pozicionin 0 të rreshtit 1 është C(1,0)=1 ndërsa numri në pozicionin 2 të rreshtit 5 është C(5,2)=10.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}$$

Gjithashtu, për shkak të simetrisë së trekëndëshit të Paskalit, mund të shohim lehtësisht se C(n,k) = (n,n−k). Së fundi, duke parë përsëri mënyrën origjinale të ndërtimit të trekëndëshit, në të cilin dy numrat në rreshtin e mësipërm mblidhen së bashku për të marrë vlerën aktuale, për n>0 dhe 0≤k≤n shohim se:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= (n-1)!\left[\frac{n-k}{k!(n-k)!} + \frac{k}{k!(n-k)!}\right] \\
&= (n-1)!\frac{n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$