$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

この聯立程式を解くには $\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$ をそのまゝ各一つの未知數と見做して

(1)+(2)+(3) を作れば

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\cdots\cdots\quad(4)$$

(4)−(2) を作りて

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{20}\qquad\therefore\quad x=20$$

(4)−(3) を作りて

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{30}\qquad\therefore\quad y=30$$

(4)−(1) を作りて

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{60}\qquad\therefore\quad z=60$$

答　甲 20日、乙 30日、丙 60日

【注意】 聯立一次方程式にて解く事を得る應用問題には又一元一次方程式にて解き得るものあり、然れども一般には未知數を多く選びて聯立方程式にて解く方易き事多し。

問　　題

1、三位の數あり、其數字の和は 14 にして、一の位の數字は十の位の數字の 2 倍なり、又其數字の順序を逆にして得る所の數は原數の 3 倍よりも 98 多しと云ふ、原數如何。

註、一の位の數字を z、十の位の數字を y、百の位の數字を x とすれば此數は $100x+10y+z$ なる事に注意すべし、何となれば例へば 365 は $3\times100+6\times10+5$ なればなり。

2、林檎 45個を甲乙丙の三人に分配するに、乙の所得の 2 倍は甲丙の所得の和に等しく、丙の 8倍は甲乙の和よりも 3個多しといふ、各の所得何程なるか。

(1) 248　　(2) 甲 18、乙 15、丙 12

第三編　整式の四則續き

第一章　重要なる乘法公式

整式の乘法に於て同じ形式の掛算を幾回も屢々繰り返さなければならぬ場合には一つ一つの掛算をする代りに其の形式の代表となるものゝ結果を公式として記憶しおき直に其積を求むる方が便である、夫等の重要なる形式の公式の二三を下に示さう。

二數の和及差の平方（二項式の平方）

公式　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

は掛算をすれば容易に右邊を出す事の出來る恒等式である。尙(2) は (1) の b の代りに $-b$ を置けば得らるゝものである。

$(cx+dy)^2$

を計算するには掛算をしないで直に (1) の公式によつて

$$(cx+dy)^2=(cx)^2+2(cx)(dy)+(dy)^2$$
$$=c^2x^2+2cdxy+d^2y^2$$

となるのである。即ち公式 (1) の a 代りに cx を b の代りに dy を置いて考へるのである。又

$(3x-5y)^2$

を計算するには公式 (2) に於て a の代りに $3x$ を b の代りに $5y$ を置けば直に下の如くなる。

$$(3x-5y)^2=(3x)^2-2(3x)(5y)+(5y)^2$$
$$=9x^2-30xy+25y^2$$

又 $(a+b+c)^2$

を求むるには先づ $b+c$ を一つの文字の如く取扱へば公式 (1) によつて

$$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2$$
$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

となる。之も又公式として記憶しておくべきものである。即

公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \cdots\cdots (3)$

問　　題

1、$(x+5)^2$　　2、$(5x-2)^2$

3、$(a^2+2b)^2$　　4、$(2x^2-3xy)^2$

5、$(x+a-b)^2$　　6、$(-x+y-z)^2$

(1) $x^2+10x+25$　　(2) $25x^2-20x+4$

(3) $a^4+4a^2b+4b^2$　　(4) $4x^4-12x^3y+9x^2y^2$

(5) $x^2+a^2+b^2+2ax-2ab-2bx$

(6) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

二數の和と差との積

公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

此の公式の應用は例へば

$(3x+1)(3x-1)$

を求むるには公式に於て a の代りに $3a$ を b の代りに 1 を置きて考ふれば

$$(3x+1)(3x-1)=(3x)^2-1^2$$
$$=9x^2-1$$

となる。又

$(ax+by)(ax-by)$　を求むれば

$$(ax+by)(ax-by)=(ax)^2-(by)^2$$
$$=a^2x^2-b^2y^2$$

である。又

$$(ab+c+a)(a-b+c-a)$$
$$=\{(a+c)+(b+a)\}\{(a+c)-(b+a)\}$$
$$=(a+b)^2-(b+a)^2$$
$$=a^2+2ac+c^2-(b^2+2ba+a^2)$$
$$=a^2+2ac+c^2-b^2-2ba-a^2$$

である。これは $(a+c)$、$(b+a)$ を一つの文字の如く考へてやればよい。

問　題

1、$(m+n)(m-n)$　　2、$(3a-2b)(3a+2b)$

3、$(a+\frac{2}{3})(a-\frac{2}{3})$　　4、$(-a+b)(-a-b)$

5、$(a+2b-c))(a-2b+c)$　　6、$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

(1)　m^2-n^2　　(2)　$9a^2-4b^2$

(3)　$a^2-\frac{4}{9}$　　(4)　a^2-b^2

(5)　$(a+2b-c)(a-2b+y)$
$$=\{a+(2b-c)\}\{a-(2b-c)\}$$
$$=a^2-(2b-c)^2$$
$$=a^2-(4b^2-4bc+c^2)$$
$$=a^2-4b^2+4bc-c^2$$

(6)　$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

$$=\{(x^2+y^2)-xy\}\{(x^2+y^2)+xy\}$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=x^4+x^2y^2+y^4$$

同じ初項を有する二項式の積

公式　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$……………(5)

此公式に於て a 又は b の一方又は兩方の符號を $-$ とすれば

$$(x-a)(x+b)=x^2+(-a+b)x-ab$$
$$(x+a)(c-b)=x^2+(a-b)x-ab$$
$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$$

となる。此公式の應用は

$(x+5)(x+3)$　を求むるには

$$(x+5)(x+3)=x^2+(5+3)x+5\times3$$
$$=x^2+8x+15$$

である。又

$$(x-5)(x+3)=x^2+(-5+3)x-5\times3$$
$$=x^2-2x-15$$

となり。又

$$(x+5)(x-3)=x^2+(5-3)-5\times3$$
$$=x^2+2x-15$$

となり。又

$$(x-5)(x-3)=x^2-(5+3)x+5\times3$$
$$=x^2-8x+15$$

となる。又

$$(2x+5)(3-2x)=-(2x+5)(2x-3)$$
$$=-\{(2x)^2+(5-3)\times2x-5\times3\}$$
$$=-(4x^2+4x-15)$$
$$=-4x^2-4x+15$$

である。

問　　題

1、 $(2a+3b)(2a-b)$　　2、 $(3a-2)(3a+5)$

3、 $(a+b+c)(a+b-3c)$　　4、 $(x-3y+z)(x-3y-4z)$

(1) $4a^2+4ab-3b^2$　　(2) $9a^2+9a-10$

(3) $a^2+b^2+2ab-2ca-2bc-3c^2$

(4) $(x-3y+z)(x-3y-4z)$

$$=\{(x-3y)+z\}\{(x-3y)-4z\}$$
$$=(x-3y)^2-3z(x-3y)-4z^2$$
$$=x^2-6xy+9y^2-3xz+9yz-4z^2$$

第二章　因數分解

因數　一つの整式が他の幾つかの整式の積に等しき時は、それらの掛け合されたる各の整式を元の整式の因數といふ。

與へられたる整式を變形して幾つかの整式の積に書き直す事を因數に分解するといふ。

因數分解と割り算とは異る、割り算は幾つかの因數の積と一つの因數を與へて他の因數を求むるものなるも因數分解は因數の積のみを與へて、それらの因數を求むるものなり。

各項に共通する因數

與へられたる整式の各項に共通なる因數あるときは先づ之を括り出すべし。

$$ax^3-bx^2+cx=x(ax^2-bx+c)$$

の如くすることを x にて括り出すといふ。又

$$a^2-ab+ac-bc=a(a-b)+c(a-b)$$
$$=(a-b)(a+c)$$

となる。

【注意】 或整式を因數分解するに當りては先づ各項に共通なる因數なきや否やをたしかむ可し、而して共通なる因數あらば括り出して後又他の因數を求むべし。

問　　題

1、 $a^2bc-ab^2c+abc^2$　　2、 $a(x+y)+b(x+y)$

3、 $1+x+x^2+x^3$　　4、 $2ax+3bx+2ay+3by$

(1) $abc(a-b+c)$　　(2) $(x+y)(a+b)$

(3) $(1+x)(1+x^2)$　　(4) $(2a+3b)(x+y)$

前章の公式 (1) 及 (2) を用ふること

x^2+6x+9 を因数分解するには

$$x^2+6x+9=x^2+2(x\times3)+3^2=(x+3)^2$$

又 $4x^2+20x+25=(2x)^2+2(2x\times5)+5^2=(2x+5)^2$

である。次に

$a^2-6ab+9b^2$ を因数分解するには

$$a^2-6ab+9b^2=a^2-2(a\times3b)+(3b)^2=(a-3b)^2$$

となり。又

$-5abx^2+20a^2bx-20a^3b$

を因数に分解するには、先づ各項の共通因数を括り出して後の(2)の公式により即

$$-5abx^2+20a^2bx-20a^3b$$
$$=-5ab(x^2-4ax+4a^2)$$
$$=-5ab(x-2a)^2$$

となる。

問　　題

1、a^2+4a+4　　2、$9x^2-6x+1$

3、$12x^2+36ax+27a^2$　4、$-12ax^2+36ax-27a$

5、$(x+y)^2-2(a-b)(x+y)+(a-b)^2$

(1) $(a+2)^2$　　(2) $(3x^2-1)$

(3) $3(2x+3a)^2$　　(4) $-3a(2x-3)$

(5) $(x+y)$、$(a-b)$ を一つの文字の如く見做せばよし、

$(x+y-a+b)^2$

公式 (3) を用ふる事あるも此場合は比較的少なければ其必要の場合に述ぶべし

前章の公式 (4) を用ふる事

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

にして二つの數又は二つの式の平方の差は之を夫等の數又は式の和と差との積になす事を得べし。例へば

$$x^2-25=x^2-(5)^2=(x+5)(x-5)$$

となり。又

$$16a^2-b^2=(4a)^2-b^2=(4a+b)(4a-b)$$

となる。又

$$25-x^2+6xy-9y^2=25-(x^2-6xy+9y^2)$$
$$=5^2-(x-3y)^2$$
$$=(5+x-3y)(5-x+3y)$$

なり。又數の平方の差を見出す爲には

$$195^2-25=195^2-5^2=(195+5)(165-5)$$
$$=200\times190=38000$$

とすべし。

問　　題

1、x^2-1　　2、$\frac{4}{25}a^2-\frac{1}{9}b^2$

3、 a^4-b^4　　　4、 $a^2x^2-(2ax-by)^2$

(1) $(x+1)(x-1)$　　(2) $(\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}b)(\frac{2}{5}a-\frac{1}{3}b)$

(3) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

(4) $(3ax-by)(-ax+by)$

(3) の如く一度因數に分解したる式が又因數に分解せらるゝときには又分解すべし、一般に因數に分解すると云ふ事は出來るだけ分解する事なり。

公式 (5) を用ふる事

公式 (5) により $a^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x-b)$ なり。即 x の係數は a と b との代數和にして x を含まざる項は a と b との積なり。依つて今 x に關する二次三項式

$$x^2+px+q$$

を因數に分解するには q を二つの因數に分ち、分たれたる二つの因數の代數和が p に等しくなる樣にすべし。此二因數は觀察によつて求むべきものなり。然れども一般に二次三項式は常にかく分解さるゝものに非ず。これに就きては後章に述ぶべし。

$$x^2+5x+6$$

を因數に分解するには 6 を二つの數の積に直し其二つの數の和をして 5 ならしむればよし。即 6 は 1 と 6 との積なり。然れども 1+6 は 5 ならず。又 6 は 2 と 3 との積なり、而して 2+3 は 5 なり。故に適するによ次の如く因數に分解するを得べし。

$$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3$$
$$=(x+2)(x+3)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

又　$x^2-7x+12=x^2+\{(-3)+(-4)\}x+(-3)\times(-4)$
$$=(x-3)(x-4)$$

である。又

$$a^2-2ab-24b^2$$

を因數に分解するには $-24b^2$ を $-6b$ と $+4b$ との積にすれば $-6b+4b=-2b$ であるから

$$a^2-2ab-24b^2=a^2+\{(-6b)+4b\}a+(-6b)\times4b$$
$$=(a-6b)(a+4b)$$

である。

x^2 の係數が 1 でない二次三項式の因數分解は一般に困難である之に就ては後章に述べる事とする。

問　　題

1、 x^2+x-20　　　2、 a^2+3a+2

3、 $a^2x^2+3ax-28$　　4、 $x^2+(m-n)x-mn$

(1) $(x+5)(x-4)$　　(2) $(a+1)(a+2)$

(3) $(ax+7)(ax-4)$　　(4) $(x+m)(x-n)$

二數の三乘 (立方) の和及差

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

なる公式は右邊の掛け算を實行する事により容易に證明せらるゝものにして因數分解に屢々用ひらるゝものなり。

例へば

x^3+27y^3

を因數に分解するには

$$x^3+27y^3=x^3+(3y)^3$$

$$=(x+3y)\{x^2-x\times3y+(3y)^2\}$$

$$=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$$

とすべし。又

$1-a^3$ を因數に分解すれば

$1-a^3=(1-a)(1+a+a^2)$ となる。

問　　題

1、$27a^3-64$　　2、x^4+a^3x

3、$(a-b)^3+c^3$　　4、x^6-a^6

(1) $(3a-4)(9a^2+12a+16)$

(2) $x(x+a)(x^2-ax+a^2)$

(3) $(a-b+c)(a^2-2ab+b^2-ac+bc+c^2)$

(4) $x^6-a^6=(x^2)^3-(a^2)^3$

$$=(x^2-a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)\text{ ※}$$

$$=(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$$

又は原式$=(x^3)^2-(a^3)^2=(x^3+a^3)(x^3-a^3)$

$$=(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$=(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$$

※乘法の公式（4）の項の問題 6 を見よ。

特別なる工夫によつて因數分解をする事

前揭の公式を直に應用する事により容易に因數分解する事を得ざる時は、項を適當の順に列べ更へ、又は或同じ數を加減する事により因數分解をなしうるもの往々あり。

例へば

a^2+ac-b^2+bc

を因數に分解するには何れの公式も直ちには適用する事能はず然れども共項を列べ更へて $a^2-b^2+ac+bc$ とするときは、第二項迄には公式（4）により、又第三項及第四項には共通因數 c ある事により、次の如く因數に分解し得べし。

原式 $=a^2-b^2+ac+bc$

$$=\underline{(a+b)}(a-b)+c\underline{(a+b)}$$

$$=(a+b)(a-b+c)\text{………………答}$$

又

x^2-6x+5

を因數に分解するには公式（5）の應用として分解し得るも又下の如くに因數分解しうる事も注意すべし。

$$x^2-6x+5=x^2-6x+9-4$$
$$=(x-3)^2-2^2$$
$$=(x-3+2)(x-3-2)$$
$$=(x-1)(x-5)$$

原式に4を加へて x^2-6x+9 としたる故に -4 を加へざれば原式に等しからず。又

$$x^4+x^2y^2+y^4$$

を因數に分解するには原式に x^2y^2 を加へ更に又 $-x^2y^2$ を加へて次の如くなる。

原式 $=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=\underline{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$$

前問題4を見よ。

問　題

1、$x^2-8x-20$　　2、$4x^2-4x-3$

3、$a^2-ab-ac+bc$　　4、$a(a+c)-b(b-c)$

(1) $x^2-8x-20=x^2-8x+16-36$
$$=(x-4)^2-(6)^2$$
$$=(x-4+6)(x-4-6)$$
$$=(x+2)(x-10)\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

又は原式 $=x^2+\{2+(-10)\}x+2\times(-10)$

$$=(x+2)(x-10)\cdots\cdots\cdots\text{公式5の應用}$$

(2) $4x^2-4x-3=4x^2-4x+1-4$
$$=(2x-1)^2-2^2$$
$$=(2x-1+2)(2x-1-2)$$
$$=(2x+1)(2a-3)\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

(3) $a^2-ab-ac+bc=a(a-b)-c(a-b)$
$$=(a-b)(a-c)\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

(4) $a(a+c)-b(b-c)=a^2+ac-b^2+bc$
$$=a^2-b^2+ac+bc$$
$$=(a+b)(a-b)+c(a+b)$$
$$=(a+b)(a-b+c)\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

第三章　約數及倍數

約數、公約數、最大公約數

或整式Aが他の整式Bにて割り切るゝときは、BをAの約數なりといふ。

例へば ax、by は共に abx^2y の約數にして、又 $x+y$、x^2-xy+y^2 は何れも x^3+y^3 の約數なり。

二つ以上の整式に共通なる約數を公約數といひ公約數中にて次數の最大なるものを最大公約數といふ。

例へば a^3bx^2y、$acxy^2$、$a^2x^3y^2$ に共通なる約數即公約數を全部列擧すれば a、x、y、ax、ay、xy、axy 等なり。此の中にて次

の最高なるものは axy なる故 axy は最大公約數なり。

【注意】 最大公約數を G、C、M、と略記することあり。

單項式の最大公約數

二つ以上の單項式の最大公約數を求むるには、各單項式に共通なる、相異なる總ての文字を列擧し、共各に共等の式中にある各文字の最小指數を附すべし、若し各式に數係數あるときは共等の絕對値（-3、$+8$ 等に於て $-$、$+$、の符號を取除きて數を考ふるとき、3 は -3 の絕對値、8 は $+8$ の絕對値なりといふ）の最大公約數を以て所要の最大公約數の係數とす。

例へば

$$18x^3y^2z^4、9x^2yz^2、-33x^2y^3z^3$$

の最大公約數を求むるには、先此等の式に共通なる文字は x、y、z にして、共各文字の最小指數は夫々 2、1、2 なる故 x^2yz^2 を作り、次に18、9、33 なる各式の係數の最大公約數 9 を求めて、$\underline{9x^2yz^2}$ とすれば即求むる最大公約數なり。

問　　　題

1、 $3a^2b^2$、$4ab^3$、$-2ab^2$

2、 $6a^3bx^4y^5$、$4a^2b^3x^3y^4$、$2ab^2x^2y$

(1) ab^2　　　(2) $2abx^2y$

多項式の最大公約數

二つ以上の多項式の最大公約數を求むるには、各式を因數に分

解し、後各式に共通なる總ての相異なる因數を列擧し、共各に式中にある各因數の最小指數を附すべし。數字因數ある場合は單項式の場合に同じ。

例へば

$$a^2-b^2、a^2+ab-2b^2、a^3-a^2b$$

の最大公約數を求むるには

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2+ab-2b^2=(a+2b)(a-b)$$

$$a^3-a^2b=a^2(a-b)$$

の如く各式を因數に分解して各式に共通なる因數 $\underline{a-b}$ を取れば之求むる G、C、M、なり。

問　　　題

1、 x^3-a^2x、$x^3+ax^2-bx^2-abx$

2、 $yz(x-y)(x-z)$、$zx(y-z)(y-x)$

(1) $x(x+a)$　　　(2) $z(x-y)$

二つの多項式の最大公約數を求むる一般なる方法

二つの多項式A、B の最大公約數を求むるには、先づ與へられた各式を或る文字に付きて降冪の順（次數の高きより順次右方に低きに並べること）に並べ、後 A が Bより高次なるときは、A を B にて除すべし、若し割り切るれば Bは最大公約數なり、割り切れざるときは剩餘を除數として、B を割り、尙割り切れざるときは

其時の剰餘を以て前の除數を割る可し、順次是くの如くして遂に割り切れたるときは最後の除數が即求むる最大公約數なり、此方法を連除法といふ。

與へられたるA、B式が或文字によつて括り出さるゝ場合は先づ括り出して後之を取去りて上の方法を行ひ、後括り出したる因數の最大公約數を附しおくべし。

例へば

$x^4+3x^3-4x^2$ と $x^4-x^3-26x^2-24x$

とのG、C、Mを求むるには先づ各式を共通因數にて括り出し

$$x^4+3x^3-4x^2=x^2(x^2+3x-4)$$

$$x^4-x^3-26x^2-24x=x(x^3-x^2-26x-24)$$

として後

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & x+2 \\
x^2+4x-4 & & x^3-x^2-26x-24 \\
 & & x^3+3x^2-4x \\
\text{※} & & \\
-2\text{にて除す}\cdots\cdots & & -4x^2-22x-24 \\
 & & 2x^2+11x+12 \\
 & & 2x^2+6x-8 \\
\text{※} & & \\
5\text{にて除す}\cdots\cdots & 5x+20 & x-1 \\
 & x+4 & x^2+3x-4 \\
 & & x^2+4x \\
 & & -x-4 \\
 & & -x-4 \\
 & & 0
\end{array}
$$

故に x^2+3x-4 と $x^3-x^2-26x-24$ とのG、C、Mは $x+4$

なり、然るに前に兩式を夫々 x^2、x にて括り出し置きたる故に x^2 と x とのG、C、M、x を取りて $x(x+4)$ としたるものが所要の最大公約數なり。

※ -2、5 にて $-4x^2-22x-24$、$5x+20$ を夫々除したるは分數の形の商の生ずる事を避けんが爲めなり。

三つの多項式の最大公約數を求むるには、先づ二つの多項式の最大公約數を求め、次に之れと第三式とし最大公約數を求むれば可なり。四つ以上の多項式最大公約數を求むる時も之に準ず。

例へば

$$x^3-11x^2+39x-45、x^2-5x+6、x^3-8x^2+19x-12$$

の最小公倍數を求むるには次の如くす。

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & x+2 \\
x^2-5x+6 & & x^3-11x^2+39x-45 \\
 & & x^3-5x^2+6x \\
-3\text{にて除して}\cdots & & -6x^2+33x-45 \\
 & & 2x^2\ \ 11x+15 \\
 & & 2x^2-10x+12 \\
-1\text{にて除して}\cdots\cdots\cdots & -x+3 & x-2 \\
 & \underline{\underline{x-3}} & x^2-5x+6 \\
 & & x^2-3x \\
 & & -2a+6 \\
 & & -2x+6 \\
 & & 0
\end{array}
$$

次に

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x+4 \\
\hline
x-3 & x^3-8x^2+19x-12 \\
 & x^3-3x^2 \\
\cline{2-2}
 & -5x^2+19x \\
 & -5x^2+15x \\
\cline{2-2}
 & 4x-12 \\
 & 4x-12 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

答　最大公約數　$x-3$

倍數、公倍數、最小公倍數

或整式Ａが或他の整式Ｂにて割り切るゝときは、ＡをＢの**倍數**なりといふ。

例へば abx^2y は ax、by 等にて割り切るる故に abx^2y は ax 又は by の倍數にして、又 x^3+y^3 は、$x+y$、x^2-xy+y^2 の倍數なり。

【注意】 或整式Ａが或他の整式Ｂにて割り切るゝときＡはＢの倍數にして、ＢはＡの約數なり。

二つ以上の整式に共通なる倍數を**公倍數**といひ、公倍數中にて次數の最小なるものを**最小公倍數**といふ。

例へば a^2bx^2y、$acxy^2$、$a^2x^3y^2$ の共通なる倍數即公倍數は限り無くあれども、次數の最小なるものは、$a^2bx^3y^2$ なる故、$a^2bx^3y^2$ が此等の最小公倍數なり。

【注意】 最小公倍數をＬ、Ｃ、Ｍ、と略記することあり。

單項式の最小公倍數

二つ以上の單項式の最小公倍數を求むるには、各單項式中の相異なる總ての文字を列擧し、其各に其等の式中にある各文字の最大指數を附すべし。若し各式に數係數あるときは其等の絕對値の最小公倍數を以て所要の最小公倍數の數係數とす。

例へば

$18x^3y^2z^4$、$9x^2yz^2$、$-36x^2y^3z^3$

の最小公倍數を求むるには、先づ此等の式中にある相異なる總ての文字は x、y、z にして、其各文字の最大指數は夫々 3、3、4 なるを以て、$x^3y^3z^4$ を作り、次に 18、9、36 の最小公倍數36を得て、$36x^3y^3z^4$ とすれば即求むる最小公倍數なり。

問　題

1、 $2a^2b$、$3ab^3$、　　2、 $-3ax^2y$、$7abxy^3$

(1) $6a^2b^3$　　(2) $21abx^2y^3$

多項式の最小公倍數

二つ以上の多項式の最小公倍數を求むるには、各式を因數に分解し、後各式中にある總ての相異なる因數を列擧し、其各に式中にある各因數の最大指數を附すべし、數字因數ある場合は單項式に同じ。

例へば

a^2-b^2、$a^2+ab-2b^2$、a^3-a^2b

の最小公倍數を求むるには

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2+ab-2b^2=(a+2b)(a-b)$$

$$a^3-a^2b=a^2(a-b)$$

の如く各式を因數に分解して、各式中の相異なる因數を列擧して L、C、M、を得る事次の如し。

$$\underline{a^2(a-b)(a+b)}(a+2b)$$

又乘法の公式により $a^2\underline{(a^2-b^2)}(a+2b)$ とするもよし。

問　題

1、$(x+a)^2$、x^2-a^2　　2、a^3+b^3、$a^4+a^2b^2+b^4$

3、x^3-3x^2+2x、x^2-5x+6、$x^2-7x+12$

(1) $(x+a)^2(x-a)$　　(2) $(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$

(3) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

二つの多項式の最小公倍數を求むる一般なる方法

二つの多項式の最小公倍數を求むるには、先づ與へられた二式の最大公約數を求め、後之を以て與へられた二式中の何れか一方を除したる商を他の一式に乘ずべし。

例へば

$$x^2+2x-24、x^3-3x^2-76x-132$$

二式の最小公倍數を求むるには次の如くす。

先づ二式の最大公約數を求めて $x+6$ をう。

故に

$$x^2+2x-24=(x+6)(x-4)$$

$$x^3-3x^2-76x-132=(x+6)(x^2-9x-22)$$

故に求むる最小公倍數は

$$(x-4)(x+6)(x^2-9x-22)$$

となる。

三つの多項式の最小公倍數を求むるには、先づ任意の二つの多項式の最小公倍數を求め、次に之れと第三式との最小公倍數を求むれば可なり。四つ以上の多項式の最小公倍數を求むる時も之に準ず。

第四編　分　數　式

第一章　約分及通分

分數式

整式Aを零に等しからざる整式Bにて割りたる商を$\frac{A}{B}$の如き形にて表したるものを分數式といひ、Aを分子、Bを分母といふは算術に於けると同樣なり。而して除法に於ける被除數は分子に除數は分母に當る事明かなり。

分數式の重要なる性質

分數式の分母及び分子に零にあらざる同一なる數又に整式を乘ずるも、分數式の値は變らず。

例へば

$$\frac{\frac{x}{2}-y}{x-\frac{y}{2}}=\frac{2\left(\frac{x}{2}-y\right)}{2\left(x-\frac{y}{2}\right)}=\frac{x-2y}{2x-y}$$

なり。從つて又

分數式の分母及び分子を零にあらざる同一なる數又は整式にて除するも、分數式の値は變らず。

例へば

$$\frac{3x^2y^3z}{6xy^2z^2}=\frac{3x^2y^3z\div3xy^2z}{6xy^2z^2\div3xy^2z}=\frac{xy}{2z}$$

なり。又 $\frac{b}{a}=\frac{b\div(-1)}{a\div(-1)}=\frac{-b}{-a}$ なる故に分數式の分母及び分子の符號を同時に變ふるも其値は變らざる事を注意すべし。

約分

分數式の分母及び分子が公約數を有するときは、此公約數にて分母及び分子を除して簡單なる分數式となす事をうべし、かく分數式の値を變へずに簡單なる分數式に變形する事を約分すといふ。故に

分數式を約分するには分數式の分母及び分子より、公約數を取り去る可し。

而して分母、分子が公約數を有せざるに至るときは、之を既約分數式といふ。

例へば

$$\frac{-9ab^2x^2y}{3bxy}=-3abx$$

$$\frac{2(x^2-y^2)}{4(x^2+2xy-3y^2)}=\frac{2(x+y)(x-y)}{4(x-y)(x+3y)}=\frac{x+y}{2(x+3y)}$$

問　　題

1、 $\frac{a+b}{a^3+b^3}$　　2、 $\frac{x^3-y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$

3、 $\frac{x^3-x^2-12x}{x^4+2x^3-24x^2}$　　4、 $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^4-b^4}$

(1) $\frac{1}{x^2-ab+b^2}$　　(2) $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

(3) $\frac{x+3}{x(x+6)}$　　(4) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

通分

二つ以上の分數式あるとき、夫等の値を變へずに、同一なる分母を有する分數に變形する事を通分するといふ。

分母の相異なる二つ以上の分數式の分母を通分するには、總ての分母の最小公倍數を求めて之を各分數の分母となし、之を與へられたる分數式の各分母にて割りたる商を夫々の各分子に乘じたるものを以て各分數式の分子とすべし。

注意　與へられたる分數式に既約分數式ならざるものあるときは、先づ之を既約分數式に直して後通分すべし。

$$\frac{2}{3a^2bxy^3}\text{、}\frac{5}{7abx^2y}$$

を通分するには、$3a^2bxy^3$ と $7abx^2y$ との最小公倍數 $21a^2bx^2y^3$

を共通の分母となし、

$$21a^2bx^2y^3 \div 3a^2bxy^3 = 7x$$

$$21a^3bx^2y^3 \div 7abx^2y = 3ay^2$$

を夫々、第一、第二の分數式の分子、分母に乘じて

$$\frac{2}{3a^2bxy^3} = \frac{2\times 7x}{3a^2bxy^3\times 7x} = \frac{14x}{21a^2bx^2y^3}$$

$$\frac{5}{7abx^2y} = \frac{5\times 3ay^2}{7abx^2y\times 3ay^2} = \frac{64x}{21a^2bx^2y^3}$$

となすべし。又

$$\frac{a}{x+y}\text{、}\frac{b}{x-y}\text{、}\frac{c}{x^2-y^2}$$

を通分するには、$x+y$、$x-y$、x^2-y^2 の最小公倍數は x^2-y^2 なる故次の如くなる。

$$\frac{a}{x+y} = \frac{a(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{a(x-y)}{x^2-y^2}$$

$$\frac{b}{x-y} = \frac{b(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{b(x+y)}{x^2-y^4}$$

故に

$$\frac{a(x-y)}{x^2-y^2}\text{、}\frac{b(x+y)}{x^2-y^2}\text{、}\frac{c}{x^2-y^2}\cdots\cdots\text{答}$$

問　　題

1、$\dfrac{y}{x^2}$、$\dfrac{z}{x^3}$　　2、$\dfrac{a}{xy}$、$\dfrac{b}{yz}$、$\dfrac{c}{zx}$

3、$\dfrac{x}{a-b}$、$\dfrac{y}{b-a}$　　4、$\dfrac{1}{x^3-a^3}$、$\dfrac{1}{x^2+ax+a^2}$

5、$\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}$、$\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}$、$\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

(1) $\dfrac{xy}{x^3}$、$\dfrac{z}{x^3}$　　2、$\dfrac{az}{xyz}$、$\dfrac{bx}{xyz}$、$\dfrac{cy}{xyz}$

(3) $\dfrac{x}{a-b}$、$-\dfrac{y}{a-b}$　　4、$\dfrac{1}{x^3-a^3}$、$\dfrac{x-a}{x^3-a^3}$

(5) $$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+c+b)(a+c-b)} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$\frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2} = \frac{(b+c-a)(b-c+a)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{-a+b+c}{a+b+c}$$

$$\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{a-b+c}{a+b+c}$$

$$\therefore \frac{a+b-c}{a+b+c}\text{、}\frac{-a+b+c}{a+b+c}\text{、}\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

第二章　分數式の四則

分數式の加法及減法

同分母の分數式の和或差を求めるには、之等の分數式の分子の和或差を求め、之を分子とし元の分母を分母とする分數式を作るべし。

異分母の分數式の和或差を求めるには、先づ之等の分數式を通分したる後上の規則を適用すべし。

例へば

$$\frac{x}{ab} + \frac{y}{ab} = \frac{x+y}{ab}$$

又 $$\frac{a}{xy}-\frac{b}{xy}=\frac{a-b}{xy}$$

又 $$\frac{a}{xy}+\frac{b}{yz}+\frac{c}{zx}=\frac{az}{xyz}+\frac{bx}{xyz}+\frac{cy}{xyz}$$

$$=\frac{az+bx+cy}{xyz}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

又 $$\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{1-(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{1-a+b}{a^2-b^2}\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

問　　題

1、 $\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{x}$　　2、 $\frac{x}{a+b}-\frac{x}{a-b}$

3、 $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

4、 $\frac{1}{(x-3)(x-4)}-\frac{1}{(x-2)(x-4)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

5、 $\frac{y-z}{(z+x)(x+y)}+\frac{z-x}{(x+y)(y+z)}+\frac{x-y}{(y+z)(z+x)}$

(1) $\frac{2a}{x}$　　(2) $-\frac{2bx}{a^2-b^2}$

(3) 原式 $=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

$$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{8}{1-a^8}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

(4) $\frac{1}{(x-2)(x-4)}$　　(5) 0

乘　法

二つ以上の分數式の積を求むるには、各分數式の分子の積を分子とし、分母の積を分母とする分數式を作るべし。

例へば

$$\frac{4a^2}{9x^2y}\times\frac{3xy}{2ab}=\frac{4a^2\times 3xy}{9x^2y\times 2ab}=\frac{2a}{3bx}$$

實際には掛け算を行ふ前に積の分母及分子が公約數を有するときは之を除きて次の如くする。

$$\frac{\overset{2a}{\cancel{4a^2}}}{\underset{3x}{\cancel{9x^2y}}}\times\frac{\cancel{3xy}}{\cancel{2a}b}=\frac{2a}{3bx}$$

又 $$\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+6}$$

を求むるに

$$\text{原式}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{(x-1)\cancel{(x-2)}}\times\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x-6)}$$

$$=\frac{(x-4)(x-3)}{(x-1)(x-6)}=\frac{x^2-7x+12}{x^2-7x+6}$$

問　　題

1、 $\frac{ax}{by}\times\frac{bz}{cx}\times\frac{cy}{az}$　　2、 $-\frac{b-a}{a+3b}\times\frac{x^2-9b^2}{a^2-b^2}$

3、 $\frac{x^2-x-6}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-12}\times\frac{x^2+3x-4}{x^2-4}$

4、 $\dfrac{x+y}{x^4+x^2y^2+y^4}\times\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\times\dfrac{1}{x^2-y^2}$

(1) 1　　(2) $\dfrac{a-3b}{a+b}$

(3) 1　　(4) $\dfrac{1}{(x^2-xy+y^2)(x^3+y^3)}$

除　　法

或分數式（一般に式を）を他の或分數式にて除するには、除數の分數式の分母と分子とを置き代へたる分數式を被除數の分數式（又は式に）に乘ずべし。

【注意】 被除數又は除數が整式なるときは分母を1と見做せばよし。

或式にて1を割りたるものを其式の逆數といふ。故に分數式の分母と分子とを置き代へたるものを乘ずとは、即其分數式の逆數を乘ずる事なり。

例へば

$$x\div\frac{z}{y}$$

は　$x=\dfrac{z}{y}$ の逆數 $\dfrac{y}{z}$ をかけて

$$x\div\frac{z}{y}=x\times\frac{y}{z}=\frac{xy}{z}$$

又　$\dfrac{z}{y}\div x$

は x の逆數 $\dfrac{1}{x}$ を $\dfrac{z}{y}$ に乘じて

$$\frac{z}{y}\div x=\frac{z}{y}\times\frac{1}{x}=\frac{z}{xy}$$

となる。

$$\frac{a^2x^3}{b^3y^2}\div\frac{a^2x^2}{b^2y^2}$$

を計算すれば

$$\frac{a^2x^3}{b^3y^2}\div\frac{a^2x^2}{b^2y^2}=\frac{a^2x^3}{b^3y^2}\times\frac{b^2y^2}{a^2x^2}=\frac{x}{b}$$

となる。又

$$\frac{(a+b)^2}{x^2-9y^2}\div\frac{a+b}{x+3y}=\frac{(a+b)^2}{(x+3y)(x-3y)}\times\frac{x+3y}{a+b}$$

$$=\frac{a+b}{x-3y}\text{……………答}$$

となる。

問　　題

1、 $\dfrac{yz}{x^2}\div\dfrac{y^2z^2}{x^4}$　　2、 $\dfrac{x^2-9}{x^2+2x}\div\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

3、 $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}\div\dfrac{a+b}{c+d}$　4、 $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left\{1-\dfrac{x^2+y^2}{(9+y)^2}\right\}$

(1) $\dfrac{a^2}{yz}$　　(2) $\dfrac{a^2+a-6}{a^2}$

(3) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{c^2-cd+d^2}$　(2) $\dfrac{2(x+y)}{x-y}$

繁分數式

例へば $\dfrac{(a+b)^2}{x^2-9y^2}\div\dfrac{a+b}{x+3y}$ を $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2}{x^2-9y^2}}{\dfrac{a+b}{x+3y}}$ にて表し

又 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\div\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)$ を $\dfrac{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}}{\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}}$ にて表す事あり

斯の如く分母、分子の一方又は双方が分數式を含むとき之を繁分數式といふ。

繁分數式を簡單にするには

例へば

$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}=\frac{\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}{\dfrac{2ab}{(a+b)^2}}$$

$$=\frac{4ab}{a^2-b^2}\times\frac{(a+b)^2}{2ab}=\frac{2(a+b)}{a-b}\text{……………答}$$

なり。又繁分數式の分母、分子別々に簡單にして後結果を求むるもよし。即

$$\text{分子}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$\text{分母}=1-\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=\frac{2ab}{(a+b)^2}$$

$$\therefore\ \text{原式}=\frac{\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}{\dfrac{2ab}{(a+b)^2}}=\frac{4ab}{(a+b)(a-b)}\times\frac{(a+b)^2}{2ab}$$

$$=\frac{2(a+b)}{a-b}$$

なり。又

$$\frac{x}{x-\dfrac{\dfrac{1}{x^2-1}}{x}}$$

を簡單にするには

$$\text{原式}=\frac{x}{x-\dfrac{\dfrac{1}{x^2-1}}{x}}=\frac{x}{x-\dfrac{x}{x^2-1}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x(x^2-1)-x}{x^2-1}}=\frac{x}{\dfrac{x(x^2-2)}{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{x^2-2}$$

なり

問　　題

1、 $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$ 　　2、 $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{x-1}}}$

---

(1) $\text{原式}=\dfrac{\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}}{\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$

(2) $\text{原式}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{\dfrac{x^2-1+2x^2}{x-1}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x(x-1)}{3x^2-1}}$

$$=\frac{1}{\dfrac{3x^2-1+x^2-x}{3x^2-1}}=\frac{3x^2-1}{4x^2-x-1}$$

第三章　分數法程式

分母に未知數を有する分數式を含む分程式を分數方程式といふ分數方程式に對し前述せる方程式を整方程式といふ。

注意　方程式にして分數式を有するも分母に未知數を有するに非ざれば分數方程式といはず。

例へば　$\frac{3}{x}=6$　、$\frac{2}{x+3}=7$ 等は分數方程式にして

$\frac{7x}{120}+2x=\frac{3}{4}+5x^2$ 等は整方程式なり。

例 1、$\frac{x+5}{x-10}=\frac{x+10}{x-5}=2$ を解け。

先づ分母の最小公倍數 $(x-10)(x-5)$ を兩邊に乘ずれば（分母を拂ふといふ）

$$(x+5)(x-5)+(x+10)(x-10)=2(x-10)(x-5)$$

なる方程式をう。次に兩邊の括弧をときて

$$x^2-25+x^2-100=2x^2-30x+100$$

左邊に移項して整頓すれば

$$30x-225=0$$

之より　$30x=225$

$$\therefore\quad x=7\frac{1}{2}$$

を得。而して此値は元の方程式中の合母を零ならしめず。故に求

むる根は $7\frac{1}{2}$ なり。

$$験、左邊=\frac{\frac{15}{2}+5}{\frac{15}{2}-10}+\frac{\frac{15}{2}+10}{\frac{15}{2}-5}=\frac{\frac{25}{2}}{-\frac{5}{2}}+\frac{\frac{35}{2}}{\frac{5}{2}}$$

$$=-5+7=2$$

右邊$=2$

注意　分數方程式に於ては常に必ず、分母を拂ひて得たる根が原方程式の含む分母を零ならしめざる事を確むるを要す。零ならしめざる時は元方程式の根にして、零ならしむる時は根にあらず。故に此場合には元方程式は根を有せず。

例2、$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{8}{x}$ をとけ。

分母の最小公倍數 $x(x-1)(x+3)$ を兩邊に乘じて分母を拂へば

$$x(x-1)(x+3)-x(x-1)(x-3)=8(x-1)(x+3)$$

なる方程式を得。次に兩邊の括弧をとけば

$$x^3+4x^2+3x-x^3+4x^2-3x=8x^2+16x-24$$

整頓して　$16x=24$

をう。之より　$x=\frac{3}{2}$

を得。而して此値は元方程式の含む分母を零ならしめず。故に求むる根は $1\frac{1}{2}$ なり。

$$験、左邊=\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}-\frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}+3}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}-\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}$$

$$=5+\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}$$

$$右邊=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$$

例3、 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x-8}{x-6}+\frac{x+1}{x-1}$ をとけ。

此分數方程式は例1、例2の如く、分母の最小公倍數を兩邊に掛けて分母を拂ふときは x^4、x^3 の項を生じ甚だ複雑になる、依て次の如くする方簡便なり。

先づ兩邊の各項より1を減じて

$$\frac{x}{x-2}-1+\frac{x-9}{x-7}-1=\frac{x-8}{x-6}-1+\frac{x+1}{x-1}-1$$

$$\therefore\quad \frac{x-x+2}{x-2}+\frac{x-9-x+7}{x-7}=\frac{x-8-x+6}{x-6}+\frac{x+1-x+1}{x-1}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{x-2}-\frac{2}{x-7}=\frac{-2}{x-6}+\frac{2}{x-1}$$

兩邊を2にて除せば

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6}$$

即 $\frac{x-7-x+2}{(x-2)(x-7)}=\frac{x-6-x+1}{(x-1)(x-6)}$

$$\therefore\quad \frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)}$$

兩邊を−5にて除し、後分母を拂ひて

$$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-7)$$

即 $x^2-7x+6=x^2-9x+14$

之を解きて $x=4$

而して此値は元方程式の分母を零ならしめず。故に求むる根は4なり。

驗。左邊 $=\frac{4}{4-2}+\frac{4-9}{4-7}=2+1\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}$

右邊 $=\frac{4-8}{4-6}+\frac{4+1}{4+1}=2+1\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}$

═══ 問　　題 ═══

1、 $\frac{10}{x}-\frac{1}{2}=\frac{9}{x}-\frac{4}{9}$

2、 $\frac{8}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

3、 $\frac{x-8}{x-3}+\frac{x-3}{x-5}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-13}{x-5}+\frac{x-6}{x-7}$

(1) $x=18$　　(2) $x=4$

(3) 兩邊の各項より1を減ずべし、

$x=10$

聯立分數方程式

例1、 $\frac{x-3}{y}=\frac{1}{3}$…………(1)

$\frac{x}{y-2}=\frac{1}{2}$…………(2)

先づ(1)、(2) の分母を拂へば

$3x-9=y$…………(1)′

$$2x=y-2 \cdots\cdots(2)'$$

(1)′ −(2)′ を作れば

$$x-9=2 \qquad \therefore\ x=11$$

此値を(1)′ に代入して$y=24$を得。而して此等の値は元方程式の分母を零ならしめざる事明かなり。故に求むる根なり。

例2、 $$\frac{2y-1}{2x}=\frac{y-1}{x-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{4x+7}{x+1}=1+\frac{3y+5}{y+1}\cdots\cdots(2)$$

(1) の分母を拂へば

$$2xy-x-2y+1=2xy-2x$$

即 $$x-2y+1=0\cdots\cdots\cdots(1)'$$

(2) の分母を拂へば

$$4xy+4x+7y+7=4xy+4y+6x+6$$

即 $$2x-3y-1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)'$$

(1)′ ×2−(2)′ を作れば

$$-y+3=0 \qquad \therefore\ y=3$$

此値を(1)に代入して $\qquad x=5$

此等の値は何れも明かに元方程式の分母を零ならしめず、故に求むる根なり、

═══ 問　　題 ═══

1、 $$2x-4y=7\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{2x}{5y}+\frac{11}{10}=\frac{8x-5y}{5y}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

2、 $$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=7\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=6\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) $x=5\frac{1}{18}$、$y=\frac{7}{9}$

(2) $\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$を夫々一の未知數と見做して解くべし。

$x=\frac{1}{3}$、$y=1$、$z=\frac{1}{2}$

第四章　應用問題

例1、 上下二種の白米あり、11圓04錢にては下は上よりも1升多く買ひ得べく、且2圓40錢にて上米を買ひ、2圓30錢にて下米を買ふときは其分量相等しと云ふ、上下兩米各一升の價如何。

解。上米1升の價をx錢、下米1升の價をy錢とすれは、11圓04錢にして買ひ得る上米の升數は$\frac{1104}{x}$にして、又下米の升數は$\frac{1104}{y}$なり、故に題意により次の方程式をう。

$$\frac{1104}{y}-\frac{1104}{x}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又2圓40錢にて買ひ得る上米の升數は$\frac{240}{x}$にして、2圓30錢にて買ひ得る下米の升數は$\frac{230}{y}$なり、故に題意により次の方程式を得。

$$\frac{240}{x}=\frac{230}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及(2)よりなれる聯立方程式を解きて

$x=48$ 、 $y=46$

答上米1升48錢

下米1升46錢

例2、 或分數の分子に5を加へ、分母より4を減じて得る分數は其分子の2倍に3を加へ、分母の2倍より11を減じて得る分數に等しく、又其分數の分母より3を減じたるものは$\frac{1}{2}$に等しいといふ、其分數を求む。

解。或分數の分子をx、分母をyとすれば此の分數は$\frac{x}{y}$にして分子に5を加へ、分母より4を減じたる分數は$\frac{x+5}{y-4}$となり、分子の2倍に3を加へ、分母の2倍より11を減じたる分數は$\frac{2x+3}{2y-11}$となる故題意により次の方程式をう。

$$\frac{x+5}{y-4}=\frac{2x+3}{2y-11}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又其分數の分母より3を減じたるものは$\frac{x}{y-3}$なる故題意により次の方程式を得。

$$\frac{x}{y-3}=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 及(2)より成れる聯立方程式を解きて

$x=2$、$y=7$

を得るが故に求むる分數は$\frac{2}{7}$なり。

例3、 旅客二人にて560斤の手荷物を託送するに1人は3圓10錢他の1人は5圓90錢を拂へり、もし此荷物が唯1人の手荷ならんには11圓50錢を拂ふべき筈なりしといふ、然らば手荷物幾斤までは無賃にて託送せらるゝか。

解。x斤迄は無賃なりとし、1人の手荷物をy斤なりとすれば、他の1人の手荷物の重さは $(560-y)$ 斤となる、而してx斤迄は何れも無賃なる故、賃錢を取られたる斤數は夫々$(y-x)$斤、$\{560-(x+y)\}$斤、又560斤を1人の荷物と見做すときは$(560-x)$斤なり、故に$\frac{590}{y-x}$錢、$\frac{310}{560-(x+y)}$錢、$\frac{1150}{560-x}$錢は何れも1斤當りの賃銀を表す事となる故に次の聯立方程式を得。

$$\frac{590}{y-x}=\frac{310}{560-(x+y)}=\frac{1150}{560-x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之を解くに

$$\frac{950}{y-x}=\frac{1150}{560-x}$$

$$\frac{310}{560-(x+y)}=\frac{1150}{560-x}$$

とおきて分母を拂ひ簡單にすれば

$115y-56x=59\times560$

$84x+115y=84\times560$

を得。求むるものはxなる故、之より

$x=100$

となる。　　答100斤。

注意 (1) を解く場合には何れの二つを相等しと置きても差支

へなけれど、簡單なるものと複雜なるものと、簡單なるものと簡單なるものと結びたる二つの聯立方程式を解く樣に心懸くべし。

問　題

1、分數あり、分母に5を加へ、分子より3を減じて得る分數は分母より2を減じ分子より5を減じて得る分數に等しく、又分母の3倍に1を加へ分子を2倍して得る分數は$\frac{1}{2}$に等しといふ。其分數を求む。

2、甲の速さは乙よりも毎分15間大なり、今周圍300間の競走場を甲が11回廻る間に乙は10回廻るべしといふ、甲乙の速さ各毎分幾間か。

(1) $\frac{7}{9}$　(2) 甲毎分165間、乙毎分150間

第五章　文字方程式

既知數として文字を以て表されたる、方程式を文字方程式といふ。

例1、$a(x-b^2)=b(x-a^2)$をとけ、

先づ括弧を去れば

$$ax-ab^2=bx-a^2b$$

xの項を左邊に、xを含まざる項を右邊に移項すれば

$$ax-bx=-a^2b+ab^2$$

即　$(a-b)x=-ab(a-b)$…………(1)

今　$a-b\neq 0$　即　$a\neq b$なりとして兩邊を$a-b$にて割れば

$x=-ab$　答　$x=-ab$

驗、左邊$=a(-ab-b^2)=-ab(a+b)$

右邊$=b(-ab-a^2)=-ab(a+b)$

注意　$a-b\neq 0$　、$a-b$は零に等しからずの意　$a\neq b$又同樣

(1) の兩邊を$a-b$にて割るに$a-b=0$ならば零にて割る事となり、意味なし、故に

$a-b\neq 0$とせしなり。

例2、$ax+by=c$…………(1)

$a'x+b'y=c'$……(2)

を解くに　$(1)\times b'-(2)\times b$を作れば

$$ab'x+bb'y=cb'$$
$$a'bx+bb'y=c'b$$

$$(ab'x-a'b)x=cb'-c'b$$

$$\therefore\ x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$$

又　$(2)\times a-(1)\times a'$を作れば

$$aa'x+ab'y=ac'$$
$$aa'x+a'by=a'c$$

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c$$

$$\therefore\ y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

を得。此等のx、yの分母の式$ab'-a'b \fallingdotseq 0$なるときは、x、yの値を求むる事を得。もし$ab'-a'b=0$なるときx、yの分子が$cb'-c'c \fallingdotseq 0$又$ac'-a'c \fallingdotseq 0$なるときは不能なりといひ、$cb'-c'b=0$、$ac'-a'c=0$ なるときは不定なりといふ。

問　題

1、 $ax+b^2=bx+a^2 \qquad (a \fallingdotseq b)$

2、 $x+ay+a^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$
$x+by+b^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \qquad (a \fallingdotseq b)$

3、 $\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2 \qquad (a+b \fallingdotseq 0)$

(1) $x=a+b$

(2) $x=ab$、$y=-(a+b)$

(3) $x=\dfrac{a+b}{2}$

文字方程式の應用問題の例1、2

例1、 鶴龜合せてa頭あり、其足數はb本なりといふ、鶴龜各幾頭なるか。

解。今鶴の頭數をxとすれば龜は$a-x$なり、而して其足數は鶴はx頭にて$2x$本、龜は$x-x$頭にて$4(a-x)$本なり、故に題意により次の方程式をう。

$$2x+4(a-x)=b$$

之をときて

$$x=\frac{4a-b}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{鶴}$$

從つて龜は

$$a-\frac{4a-b}{2}=\frac{b-2a}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{龜}$$

となる。今之が成立するためのaとbとの關係を考ふれば$4a>b>2a$なるを要すべし。其理由は各自考ふべし。

例2、a年前には弟の年齢は兄の年齢のn分の一なりしが、今年はm分の一なりといふ。兄弟の年齢各幾許なるか。

解。兄の今年の年齢をxとすれば、弟の年齢は$\dfrac{x}{m}$にして、兄弟のa年前の年齢は夫々$x-a$、$\dfrac{x}{m}-a$なり、故に題意により次の方程式を得。

$$\frac{1}{n}(x-a)=\frac{x}{m}-a$$

之を解きて

$$x=\frac{am(n-1)}{n-m}$$

を得。從つて弟の年齢は

$$\frac{am(n-1)}{n-m}\times\frac{1}{m}=\frac{a(n-1)}{n-m}$$

答　兄$\dfrac{am(n-1)}{n-m}$、$\dfrac{a(n-1)}{n-m}$

注意　例1、に用ひたる$>$、$<$なる記號は不等號と稱し、大小關係を表すに用ひ開ける方にある數が大なるを示す。

第五編　羃及根

第一章　羃　及　根

羃の計算に就きて

既に前述せる同じ数の數多の羃の計算に就きて、最も重要なる指數の定則及び其擴張に就き、其公式を列擧すれば次の如し。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

又一般に$a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots = a^{m+n+p+\cdots\cdots}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

故に$(a^m)^n = (a^n)^m$なる事明かなり。

$$(ab)^m = a^m b^m$$

又　$(abc \cdots\cdots)^m = a^m b^m c^m \cdots\cdots$なり。

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ …… $m>n$なるとき。

$a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ …… $m<n$なるとき。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

尙正數及負數の羃の符號は正數の羃は恒に正數にして、負數の偶數乘羃は正數にして其奇數乘羃は負數なり。即次の如し。

今nにて整數を表せば、一般に偶數は2n、奇數は2n+1にて表す事を得る故にaを正數とすれば、

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

なり。

$$(-4a^3 b^4 c^2)^3$$

を計算すれば、

原式$=(-4)^3 (a^3)^3 (b^4)^3 (c^2)^3$

$= -64a^9 b^{12} c^6$ ………… 答

又　$\left(\dfrac{2a^3 b^4}{3x^2 y}\right)^2 = \dfrac{(2a^3 b^4)^2}{(3x^2 y)^2} = \dfrac{4a^6 b^8}{9x^4 y^2}$ ………… 答

又　$(-a^5 x^3 y^5)^3 = a^{40} x^{24} y^{40}$ ………… 答

多項式の羃

前述せる二乘の公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

等、尙

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac$$
$$+ 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

によりて、一般に

多項式の二乘を作るには、先づ各項の二乘を作り、次に二つゝの項の積の二倍を作りて之等を全部加ふればよし。

$$(x^2 + x - 1)^2$$

を計算すると

原式$=(x^2)^2+x^2+(-1)^2+2x^3-2x^2-2x$

$=x^4+2x^3-x^2-2x+1$

なり。

【注意】 かく多項式の冪の計算に於て乘法の結果を得る事を<u>展開する</u>といふ。

尙二項式の冪の計算に於ては次の二三の公式をも記憶しおくを便とす。

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(1+x)^4$を展開すれば

$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

又$(ax-by)^3$を展開すれば

$(ax-by)^3=(ax)^3+3(ax)^2(-by)+3(ax)(-by)^2+(-by)^3$

$=a^3x^3-3a^2bx^2xy^2\times3ab^2xy^2-b^3y^3$

又$(x^2-3x+2)^2$を展開すれば

$(x^2-3x+2)^2=(x^2)^2+(-3x)^2+2^2+2x^2(-3x)+2\times2x^2$

$+2\times2(-3x)$

$=x^4+9x^2+4-6x^3+4x^2-12x$

$=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$……………答

問　　　題

1、$(a-2b-3c)^2$　　2、$(x-y^2)^5$

3、$(3x^2-2a)^3$　　4、$(x-y+z)^2$

(1) $a^2+4b^2+9c^2-4ab-6ac+12bc$

(2) $x^5-5x^4y^2+10x^3y^4\ 10x^2y^6+5xy^8-y^{10}$

(3) $27x^6-36ax^4+24a^2x^2-8a^3$

(4) $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$

根

$2^2=4$、$(-2)^2=4$、

又 $3^2=9$、$(-3)^2=9$、

又 $5^3=125$

等に於ける如く、一般に A 及 B は各一つの數又は式にして、n を正の整數とするとき

$A^n=B$……………(1)

なるときは、A を B の <u>n乘根</u>又は<u>第n冪根</u>なりといふ。

此場合特に二乘根のことを<u>平方根</u>、三乘根の事を<u>立方根</u>といふ。

故に上の例にて 2 又 −2 は 4 の平方根、3 又 −3 は 9 の平方根にして、5 は 125 の立方根なり。又 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\{-(a+b)\}^2=a^2+2ab+b^2$ なる故に $a^2+2ab+b^2$ の平方根は $a+b$ 及び $-(a+b)$ なり。

或數又は或式Bのn乘根を示すに $\sqrt[n]{B}$ なる記號を用ふ。此nを根指數といひ、$\sqrt{}$ を根號といふ。故に(1)は變形すれば

$$A=\sqrt[n]{B}$$

となるなり。

又 $\sqrt[2]{4}=\pm 2$, $\sqrt[2]{9}=\pm 3$, $\sqrt[3]{125}=5$ なる事も明かなり。

【注意】 ± 2、± 3 等の$\pm$なる記號は$+$と$-$とを重ねて記したるものにして「ぷらす、まいなす」と呼び複號といふ。

$\sqrt[2]{4}$, $\sqrt[2]{9}$, 一般に $\sqrt[2]{a}$ なるとき即平方根を表すときに限り根指數2を省略す。依て $\sqrt{a}$ はaの平方根を表すものと知るべし。

冪根に關する法則

或數の冪根を求むる事は、冪を求むる事の逆算なり、故に冪根に關する法則は冪に關する法則より直に了解し得べし。

1. $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

2. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}\quad \sqrt[mn]{a}$

3. $\sqrt[m]{abc\cdots\cdots\cdots}=\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\cdots\cdots\cdots$

4. $\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

例1. $\sqrt[5]{a^9}=a^{\frac{9}{5}}=a^5$

例2. $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[3\times 2]{a}=\sqrt[6]{a}$

例3. $\sqrt{25\times 9}=\sqrt{25}\times\sqrt{9}\;(=\mathbf{15})$

又 $\sqrt[5]{abcd}=\sqrt[5]{a}\,\sqrt[5]{b}\,\sqrt[5]{b}\,\sqrt[5]{d}$

例4 $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$

又 $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}=\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\dfrac{3}{4}$

冪根の正負

$$A=\sqrt[n]{B}$$

に於て

nが偶數なるとき、Bが正數ならば、Bのn乘根即Aは常に二つあり。其二つは絕對值相等しく、符號相反す。

$$A^n=B,\qquad (-A)^n=B$$

故にBの乘根は $+A$ と $-A$ との二つなり。

Bが負數なるときは其n乘根は存在せず。

何となれば如何なる負數も偶數乘して負數になる事なければなり。

$$(-3)^2=9\ \text{、}\ (-2)^4=16$$

故に $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-16}$ は意味を有せざる事となる。

nが奇數なるとき、Bが正數ならばBのn乘根即Aは一つありて正數なり。又Bが負數ならば一つありて負數なり。

$$\sqrt[3]{27}=3\ ,\quad \sqrt[5]{-32}=-2$$

【注意】 前述せる如く、正數の偶數乘根即nが偶數にしてBが

正數なるときAは+A、−Aの二つあれど、其の中正なる方を $\sqrt[n]{B}$ にて表はし、特に負の場合には $-\sqrt[n]{B}$ とする。よつて $\sqrt{25}=+5$, $-\sqrt[n]{25}=-5$

なり。

開法

冪根を求むる方法を開法といふ。特に平方根を求むる開法を開平方又は開平、立方根を求むる開法を開立方又は開立といふ。

一般にn乘根を求むることをn乘に開くといひ、特に平方根を求むる事を平方に開く又立方根を求むる事を立法に開くといふ。

數の平方根、立方根を求むるには基數の平方及び立方を記憶し置かば、之によりて簡單なる數の平方根及立方根は容易に求むることを得べし。

基數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
平方	1	4	9	16	25	36	49	64	81
立方	1	8	27	64	125	216	343	512	729

例へば

$$\sqrt{1600}=\sqrt{16\times100}=\sqrt{16}\times\sqrt{100}$$

$$=4\times10=40\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

又 $\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}}=\frac{4}{9}$ ……………………答

又 $\sqrt[3]{343}=7$

又 $\sqrt[3]{125000}=\sqrt[3]{125\times1000}=\sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{1000}$

$$=5\times10=50\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

問題

1. $\sqrt{361}$　　2. $\sqrt[4]{4^8}$

3. $\sqrt[3]{\frac{125}{729}}$　　4. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{8a^3}}$

5. $\sqrt[n]{a^{n+1}a^{n-1}}$　　6. $\sqrt[3n]{a^{15n}}$

(1) $\sqrt{361}=\sqrt{19\times19}=19$

(2) 16　　(3) $\frac{5}{9}$　　(4) $\frac{x}{2a}$

(5) $\sqrt[n]{a^{n+1}a^{n-1}}=\sqrt[n]{a^{2n}}=a^{\frac{2n}{n}}=a^2$

(6) a^5

數の開平法

一般なる數を平方に開く方法を例に就き說明せんに、例へば5184の平方根を求むるには

運算

```
 51|84 (72
 49     7
 ----  ---
  284  142
  284    2
  ---
    0
```

一の位より始めて二桁毎に區切る。區切りの數は其數の平方根の桁數を示す事となる。5184にては51|84なる故、平方根は二桁の數なる事を示すなり。次に51だけに着目して、其中に含まるゝ最大の平方數は $7^2=49$ なる事を知る故に、先づ平方根の十の位の數7なる事を知り、運算の如くして、51−49=2と共に次の區切り84を下す。次に7を2倍して14となし、14に

て 284 の 28 を割る如く考へて、2 を得、2 を 14 に書き加へて 142 となし、$142 \times 2 = 284$ として引けは剩餘なし、故に平方根の一の位の數は 2 なる事を知る、依て求むる 5184 の平方根は 72 となる

【注意】 -72 も 5184 の平方根なるも茲にては正の平方根を求む。

又 180625 の平方根を求めむに

```
              (一)(四)(七)
   18|06|25 | 4  2  5
(二)16       | 4
------------  ---------
    206   (三)8  2
(五)164         2
  ----------  ---------
     4225 (六)8  4  5
 (八)4225          5
  ----------
      0
```

(一)に於て 18 に含まるる最大平方數 16 にて 4 を知り、(二)にて 18 より引き次の區切りと共に 206 を下し、4 を 2 倍して (三) で 8 となし、次に 8 にて 206'20 を割る如く考へ(四)に 2 を得て(三)の 82 を作り、82×2 を 206 より引きて (五) となし、共殘りと共に次の區切りを下して 4225 となし、(三)の 82 に 2 を加へて 84 となし、84 にて 4 2 を割る如く考へ 5 を得て (七) となし、84 に 5 を書き加へて(六)の 845 となし、845×5 を 4225 より引けば (八) 剩余なし、故に 180625 の平方根は 425 なる事を知るなり。

又 0,1024 の平方根を求むるには

```
  0,10 | 24 | 0,32
     9           62
------------      2
   124
   124
  -----
     0
```

此例の如く 1 より小なる數の平方根を求むる場合も其の方法は前例と異なるところなし。此場合平方根に於て

小數第何位に初めて有效數字があらはるゝかを知るには、元の數の小數點の位置より下位に向つて二つづに區分し、その有效數字を含む迄の區分の數を見ればよし。

例へば此例に於ては 0,10|24 なる故、小數第一位、又 0,00576 等に於ては 0,00|57|6 なる故、小數第二位なるが如し。

又 $\sqrt{3}$ を小數第四位迄求むる場合を示さむに、

```
   3              | 1,7320……
   1              ---------
------------      2 7
  200                7
  189             ------
--------          3 43
   1100              3
   1029           -------
   -------        3 462
     7100              2
     6924         -------
   -------        3 4640
    17600
```

答 1,7320

之は開き切れぬ場合なり。剩余を開平剩餘といふ。此例の開平剩餘は 0,000176 なり。

又 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ の如き分數の平方根を求むる場合は先づ分數を小數に直して後、上例に倣ふべし。

次に多項式の平方根を求むる方法を說明せむに

$9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1$

の平方根を求めむには、其の方法は全く數の場合と同樣なり。先づ初項 $9x^4$ の平方根 $3x^2$ を求め、次に第二、

$$\begin{array}{l}
9x^4-12x^3+10x^2-4x+1 \\
9x^4 \\
\hline
\quad -12x^3+10x^2 \\
\quad -12x^3+4x^2 \\
\hline
\qquad\qquad 6x^2-4x+1 \\
\qquad\qquad 6x^2-4x+1 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
3x^2-2x+1 \\
\hline
6x^2-2x \\
\quad -2x \\
\hline
6x^2-4x+1 \\
\qquad\quad 1
\end{array}$$

答　$\pm(3x^2-2x+1)$

第三項を下して$-12x^3+10x^2$となし、$3x^2$の二倍$6x^2$にて$-12x^3$を割りて、平方根の第二項を$-2x$となし、$6x^2-2x$を作り、$(6x^2-2x)\times(-2x)$を$-12x^3+10x^2$より引き、殘りと共に殘りの項を下して$6x^2-4x+1$となし、$6x^2-2x$に$-2x$を加へたる$6x^2-4x$にて$6x^2-4x+1$を割りて、1を得て前の如くして$6x^2-4x+1$より引けば剩餘なし。故に求むる平方根は$3x^2-2x+1$となるなり。勿論$-(3x^2-2x+1)$も又平方根なり。

問　題

1、$\sqrt{8649}$　　2、$\sqrt{6084}$

3、$\sqrt{0,0625}$　　4、$\sqrt{0,000441}$

5、$\sqrt{3,14159}$　　6、$\sqrt{\frac{5}{13}}$

7、$16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$ の平方根を求む。

(1) 93　(2) 78　(3) 0,25

(4) 0,021　(5) 1,7724……　(6) 0,62017……

(7) $\pm(4x^2-4x+1)=\pm(2x-1)^2$

第二章　無理數及無理式

無理數

9、25、$\frac{4}{9}$、$\frac{25}{36}$、の如きは其の平方根として夫々±3、±5、$\pm\frac{2}{3}$、$\pm\frac{5}{6}$を有す。斯くの如く或整數又は分數の二乘に等しき數を完全なる平方數と云ふ。然れども前例にも示せし如く或整數又は分數の二乘に等しからざる數の平方根は所謂開き切れぬで夫れに等しき整數又は分數を求むる事を得ず。即$\sqrt{3}$の如き整數にも分數にもあらず、然れども又小數を用ふる時は如何程にても$\sqrt{3}$と近き數を求むる事を得。斯くの如き數を無理數といふ。故に$\sqrt{5}$、$\sqrt{\frac{2}{3}}$の如き又無理數なり。無理數に對して正負の整數、分數及零を總稱して有理數といふ。而して$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$等の如く開法により生ずる無理數を不盡根數ともいふ。

注意　圓周率 3,14159……も亦無理數なれど不盡根數とは別なり。

前述せる如く、無理數は之を整數又は分數にて表す事は出來ざるも、小數を用ふるときは如何程にても眞の位に接近す。此の眞の値に近き數を近似値といひ、眞の値より小なる近似値を不足なる近似値、眞の値より大なる近似値を過剩なる近似値といふ、例へば$\sqrt{2}$に於て 1,4142 は不足なる近似値にして 1,4143 は過剩なる近似値なり。

無理式

$\sqrt{(a+b)^2}$、$\sqrt{(a-b)^2}$等は其平方根として$\pm(a+b)$、$\pm(a-b)$を有す。然れども$\sqrt{a}$、$\sqrt{a^2+b^2}$等は開き切れず斯く如きものを<u>無理式</u>といふ。然れども無理式の數値は必ずしも無理數にあらず。何となれば$\sqrt{a}$に於て$a=25$なるときは$\sqrt{25}=5$となればなり。

無理式に對し整式及分數式を有理式といふ。

無理數及び無理式に關する演算は第一章に述べたる冪根に關する諸法則は皆a、b、c等が無理數又は無理式なるときにも適用し得べし。

無理數又は無理式の加減乘除

例1、$b\sqrt{a}+c\sqrt{x}=(b+c)\sqrt{a}$

例2、$2\sqrt{a}+\sqrt{9a}-6\sqrt{a}$

$=2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-6\sqrt{a}=-\sqrt{a}$……答

例3、$3\sqrt{20}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=3\sqrt{4\times5}+4\sqrt{5}-$

$6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=4\sqrt{5}$……答

例4、$4\sqrt{2}\times3\sqrt{7}=12\sqrt{2}\sqrt{7}=12\sqrt{14}$

例5、$(\sqrt{a}-2\sqrt{b})(3\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=3a-6\sqrt{ab}+\sqrt{ab}-2b=3a-2b-5\sqrt{ab}$

例6、$\frac{4\sqrt{8}}{2\sqrt{6}}=2\frac{\sqrt{2}\sqrt{4}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(=\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

分母を有理化すること

例へば前例6の$\frac{4}{\sqrt{3}}$を$\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$とするときは、與へられた$\frac{4}{\sqrt{3}}$の値を變ずる事なく分母の$\sqrt{\quad}$を去りて$\frac{4\sqrt{3}}{3}$となしたり。かくの如くする事を<u>分母を有理化する</u>といふ。又

$$\frac{2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1}$$

$$=2(\sqrt{2}+1)$$

なり。此の場合、分母、分子に掛けたる$\sqrt{2}+1$を有理化乘數といふ。

$\frac{3+\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$の分母を有理化せよ。

$$\frac{3+\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}{(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}=$$

$$\frac{15+6+5\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{25-18}=\frac{21+14\sqrt{2}}{7}=$$

$3+2\sqrt{2}$……答

注意　$\frac{4}{\sqrt{3}}$、$\frac{3+\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$等の如く、分母に根數を含む數の近似値を求むるには、先づ分母を有理化したる後計算すべし。

問　題

1、$\sqrt{x}\div\sqrt{ax}$　　2、$(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$

次の式の分母を有理化せよ。

3、$\frac{10}{\sqrt{5}}$、　4、$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$、　5、$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(1)　$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$　(2)　$2(a-\sqrt{a^2-b^2})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (4) $5+2\sqrt{6}$ (5) $\frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

第六編　二次方程式

第一章　一元二次方程式

二次方程式

既に學びたる $3x=15$、$9x-36=0$、$2x+3y=14$ 等は何れも、未知數に關して一次の項のみよりなる、一元一次方程式又は二元一次方程式なりたり。然るに、$x^2-25=0$、$3x^2+2x-1=0$、$x^2-3xy^2=0$ 等は何れも未知數に關して二次項を含むものにして前述せると異なる、斯の如く未知數に關して二次項を含む方程式を二次方程式と云ひ、二次方程式にして未知數一つなるものを一元二次方程式、未知數二つなるものを、二元二次方程式と云ふ。一元二次方程式に於て $x^2=36$ 等の如く、x の一次の項を欠けるものを純二次方程式といひ、$3x^2+2x-1=0$ の如く、x^2 の項、x の項及び x を含まざる項を有するものを雑二次方程式といふ。

注意　方程式に於て未知數に關し一般に n 次のものなるとき、之を n 次方程式といひ、n を方程式の次數といふ。

さて、雑二次方程式 $3x^2+2x-1=0$ の如きものを一般の形に改むれば

$$ax^2+bx+c=0$$

と書くを得べく、雑二次方程式に於て x の係數、$b=0$ なるときは

$$ax^2+c=0\text{、}\quad 即\quad ax^2=-c$$

となり、純二次方程式の一般の形となる、玆に x^2 の係數 a は決して零に等しからざるものとす。

純二次方程式の解法

例1、$x^2=25$ を解け。

求むる x は之を平方すれば、25となると云ふ、故に x は25の平方根にして即

$$x=\sqrt{25}\qquad 或\quad x=-\sqrt{25}$$

$$即\quad x=5\qquad 或\quad x=-5$$

複號を用ひて $x=\pm5$ と記す。

例2、$4x^2-3=0$ を解け。

-3 を移項して、兩邊を4にて割れば

$$x^2=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad x=+\sqrt{\frac{3}{4}}\quad 即\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

純二次方程式にあらずして、之と同様な方法にて解き得るものあり。

例3、$(2x-3)^2=4$ を解け。

$2x-3$ の平方は4となるべきにより $2x-3$ は4の平方根なり。よつて

$$2x-3=\pm\sqrt{4}=\pm2$$

$\therefore$ $2x-3=2$ より $x=\frac{5}{2}$ 即 $2\frac{1}{2}$

或 $2x-3=-2$ より $x=\frac{1}{2}$

答 $x=2\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$

問 題

1、 $6x^2-49=0$　　2、 $25=9x^2$

3、 $(x+1)^2=64$　　4、 $7-(3-x)^2=0$

(1) $x=\pm\frac{7}{\sqrt{6}}$　　(2) $x=\pm1\frac{2}{3}$

(3) $x=7$ 或 -9　　(4) $x=3\pm\sqrt{7}$

雜二次方程式の解法

例1、 $x^2+4x-5=0$ を解け。

-5 を移項すれば

$x^2+4x=5$

此の左邊を完全平方式となす爲めに、兩邊に 4 を加ふれば

$x^2+4x+4=9$

即 $(x+2)^2=9$

$\therefore$ $x+2=\pm3$ 之より $x=1$ 或 -5 を得。

注意 此例の如く x^2+4x を完全平方式にする爲に何を加ふ可きかと云ふに、一般に $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ なる故に x^2+2ax には x の係數 $2a$ の半分 a の平方を加ふればよき事を知る。故

に x^2+4x には x の係數4の半分2の平方4を加へたるなり、

又此例に於ては原方程式の左邊を因數分解する事により

$(x-1)(x+5)=0$

となる。二つの因數の積たる左邊が零となる爲めには其等因數の中何れか一つが零となればよし。よつて

$x-1=0$ 或 $x+5=0$

なり。よつて

$x-1=0$ より $x=1$

又 $x+5=0$ より $x=-5$

となる故に根は $x=1$ 或 -5 なり。

かくの如く、與へられた方程式を左邊に移項して整頓したるものが、容易に因數に分解さるゝ場合には、此の方法を利用すべし。

例2、 $4x^2+25=-20x$ を解け。

x を含む項を左邊に、x を含まざる項を右邊に移項すれば

$4x^2+20x=-25$

兩邊を x^2 の係數4にて割りて

$x^2+5x=-\frac{25}{4}$

此左邊を完全平方にする爲に、x の係數5の半分 $\frac{5}{2}$ の平方 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を兩邊に加ふれば

$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{25}{4}+\frac{25}{4}$

$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=0$ ……(1)

$$\therefore \quad x+\frac{5}{2}=5$$

$$\therefore \quad x=-2\frac{1}{2}$$…………答

注意　一般に一元二次方程式の根には二つあり、此例の如きは(1)の左邊を變形して

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=0$$

となさば、前例の注意により、何れの因數を零とおくも $x=-\frac{5}{2}$ を得て相當し、即相等しき二つの根を得る事となる。此根の事を等根又は二重根と云ふ。

問　　題

1、 $x^2+x=20$　　2、 $x^2--1=20x-97$

3、 $x^2+5x=14$　　4、 $50x^2-30x+1=0$

5、 $x^2-2ax=1-a^2$

(1) $x=5$或-4　　(2) $x=12$或8

(3) $x=2$或-7　　(4) $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{10}$

(5) $x^2-2ax+a^2-1=0$

左邊を因數分解すれば

$$(x-a-1)(x-a+1)=0$$

$$\therefore \quad x=a+1 \text{ 或 } x=a-1$$

一元二次方程式の根の公式

前述せる如く一元二次方程式の一般の形は

$$ax^2+bx+c=0$$

なり、玆に$a\neq 0$なり。

今此方程式の根を求めむに

先づ未知數xを含まざる項(之を絕對項とも云ふ)を右邊に移項すれば

$$ax^2+bx=-c$$

なり。此兩邊をa ($a\neq 0$) にて除すれば

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

此の左邊を完全平方にするために、xの係數$\frac{b}{a}$の半分$\frac{b}{2a}$の平方$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$を兩邊に加ふれば

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b_2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

即 $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　　或は$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

即 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

之即一元二次方程式の根の公式にして良く記憶して其運用を學ばざるべからず。

又一元二次方程式のxの係數bが偶數即方程式が $ax^2+2b'x+c=$

0 なる形にて表さるる時は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

となる故に、此の公式を用ふる方便利なり。

例1、$2x^2+13x+15=0$を解け。

$a=2$、$b=13$、$c=15$ として公式に代入すれば

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\times2\times15}}{2\times2}=\frac{-13\pm7}{4}$$

即 $x=\frac{-13+7}{4}=-\frac{3}{2}$

又は$x=\frac{-13+7}{4}=-5$

答$x=-1\frac{1}{2}$或-5

例2、$3x^2+4x-7=0$を解け。

xの係數は偶數なる故に

$a=3$、$b'=2$、$c=-7$として後の公式に代入すれば

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\times(-7)}}{3}=\frac{-2\pm5}{3}$$

即 $x=\frac{-2+5}{3}=1$

又は $x=\frac{-2-5}{3}=-\frac{7}{3}$

答 $x=1$ 或$-\frac{7}{3}$

分數方程式にて二次方程式に導かるゝもの

$1+\frac{8}{x^2-1}=\frac{4}{x-1}$を解くに

分母を拂へば $x^2-1+8=4(x+1)$

即 $x^2-4x+3=0$

∴ $(x-3)(x-1)=0$

∴ $x=3$ 或1

$x=1$は原方程式に含まるゝ分數式の分母を0ならしむる故に根にあらず

$x=3$は分母を0ならしめず、故に根なり

答 $x=3$

注意 $x=1$は原方程式の分母を拂ひたる $x^2-4x+3=0$ の根ではあるなり。

問　題

1、$5x^2+14x=55$　2、$3x^2-4x=39$

3、$2x^2-4x=x+4$　4、$(x+1)(2x+3)=4x^2-22$

5、$x^2-2ax+a^2=b^2$　6、$a(x^2+1)=x(a^2+1)$

7、$x^2+1+\frac{m^2+n^2}{mn}x=0$　8、$\frac{n+3}{x+2}+\frac{x+3}{x+4}=\frac{22}{15}$

(1) $x=\frac{11}{5}$或-5、　(2) $x=\frac{13}{3}$或-3

(3) $x=\frac{5\pm\sqrt{57}}{4}$　(4) $x=5$ 或$-\frac{5}{2}$

(5) $x=a\pm b$　(6) $x=a$ 或$-\frac{1}{a}$

(7) $x=\frac{n}{m}$或$-\frac{n}{m}$　(8) $x=1$ 或$-\frac{13}{4}$

第二章　一元二次方程式應用問題

例1、 矩形の地面あり、其周圍は62米にして、面積234平方米なりといふ。各邊の長さ如何。

解、周圍は62米なる故に、相隣れる二邊の和は $62米\div2=31米$ なり、今一邊をx米とすれば、他の邊は$31米-x米$となる、故に題意により次の方程式を得。

$$x(31-x)=234$$

即　$$x^2-31x+234=0$$

之を解けば　$x=18$　又は$x=13$

今$x=18$とすれば$31-18=13$

もし$x=13$とすれば$31-13=18$

故に、何れにしても求むる矩形は同一にして、即相隣れる二邊は18米及13米なり。

例2、 二桁の數あり、一の位の數字は十の位の數字よりも4だけ大なり、又此の數は數字の積の2倍よりも5だけ小なりと云ふ、此の數を求む。

解。十の位の數字をxとすれば、一の位の數字は$x+4$となる。而して數字の積は $x(x+4)$にして、此の數字は $10x+(x+4)$となる故に、題意により次の方程式を得。

$$2x(x+4)-5=10x+(x+4)$$

移項して簡約すれば

$$2x^2-3x-9=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

之を解けば　$x=3$　或$-\frac{3}{2}$

然るにxは十の位の數字にして、正の整數なる事勿論なり、故に$x=-\frac{3}{2}$は(1)なる方程式の根にてはあれど、此問題には適合せず、故に之を棄てゝ　$x=3$をとれば$x+4=7$となる故に求むる數は37なり。

注意　此例の如く方程式の根なれども、應用問題の答としては不適當なるものの出る事往々なり、故に注意して取捨せざるべからず。

例3、 周圍84米、斜邊37米なる直角三角形の直角を挾む二邊各如何。

解。周圍84米、斜邊37米なるにより、直角を挾む二邊の長さの和は$84米-37米=47米$なるを以て、今直角を挾む一邊をx米とすれば他の一邊は$(47-x)$米となる。よつて「ぴたごらす」の定理により次の方程式を得。

$$x^2+(47-x)^2=37^2$$

之を簡約すれば

$$x^2-47x+420=0$$

之を解きて $x=12$ 或 $x=35$ となる。

故に $x=12$ なるとき $47-12=35$

或　$x=35$ なるとき $47-35=12$

よつて何れにしても求むる二邊は 12米 及 35米 なり。

注意 「ぴたごらす」の定理とは幾何學に於ける直角三角形の面

積に關しての定理にして次の如し「直角三角形に於て斜邊の上の正方形は他の二邊（直角を挾む二邊）の上の正方形の和に等し」

例4、 或仕事をなすに、甲は乙よりも10日早く成就すべし、今甲乙共同して12日間働きたる後甲は休みて乙のみにてなしたるに尙12日を要したりといふ、甲乙別々になさば各幾日かゝるか。

解。甲1人にて此仕事をなすに要する日數をx日とすれば、乙1人にてなすに要する日數は$(x+10)$日なり。よつて甲は1日に其仕事の$\frac{1}{x}$をなし、乙は1日に其仕事の$\frac{1}{x+10}$をなす。故に甲乙共に働かば1日に其仕事の$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}$即$\frac{2x+10}{x(x+10)}$をなすよつて甲乙共に12日間働きては其仕事の$\frac{12(2x+10)}{x(x+10)}$をなしたる事となる故、甲が休みて乙1人にてなしたる仕事の量は$1-\frac{24(x+5)}{x(x+10)}$なり、故に題意により次の方程式を得。

$$\frac{1-\frac{24(x+5)}{x(x+10)}}{\frac{1}{x+10}}=12$$

よつて之を簡約すれば

$$x^2-26x-120=0$$

之を解きて

$$x=30\quad 或-4$$

然るにxは甲1人で其仕事をなすに要する日數なる故に負數は題意に適せざる故に棄つ。故に$x=30$、從て$x+10=40$

即甲1人にては30日、乙1人にては40日なり。

第三章　一元二次方程式の理論

虛數

$(-2)^2=4$、$(+2)^2=4$にして、正數も負數も之を二乘すれば正數となる。如何なる數も之を二乘すれば正數になりて、負數となる事なし。よつて吾人は負數の平方根を考ふる事能はず。然れども二次方程式を解く場合に往々にして負數の平方根を必要とする事あり。例へば

$$x^2=-9$$

を解かんとするに、如何なるxの値と雖も之を二乘すれば正數となる故に此の方程式の未知數xを滿足する値なし、即$x^2=-9$は解けざる事となる。即二次方程式は如何なる場合も之を解き得とは云へざるなり。故に吾人は此不便を去り如何なる時をも二次方程式の解法をして可能ならしめむが爲めに、即$x^2=-9$をも尙滿足せしむるxを有せしめんが爲めに、數の範圍を擴張し、玆に新しき數iを作り

$$i^2=-1\qquad 即\ i=\sqrt{-1}$$

と定め、aを以て任意の有理數若くは無理數とするときai即$a\sqrt{-1}$を虛數と名付く。而してi即$\sqrt{-1}$を虛數單位と云ふ。虛數の計算は之を實數（虛數に對して有理數及無理數を實數と云ふ）と同樣に取扱ふものとし、aiに於けるaはiの係數の如くに取

扱ふ。

故に$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$となる。而して負數の平方根も二つあり、即$-9$の平方根は$3i$と$-3i$となり、尙　aが正數なるとき$\sqrt{-a}$は$\sqrt{a}\,i$を表し、$-\sqrt{-a}$は$\sqrt{a}\,i$を表はす事實數の場合の如くす。

虛數の四則は實數の場合と同樣に取扱ふ事は前述せしも特に乘法には注意を必要とするものあり。即

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

なる法則はa、b共に正數なるときに適用さるべきものにして負數の場合には然らず、故に　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-6}=\sqrt{(-4)(-6)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$となすは誤なり。$\sqrt{-4}\times\sqrt{-6}=2i\times\sqrt{6}\,i=2\sqrt{6}\,i^2=-2\sqrt{6}$となすべきなり。

例へば　$x^2+2x+5=0$　を解かんに公式により

$$x=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i$$

となるなり。

$i=\sqrt{-1}$なる故　　$i^2=-1$なる事前述せし如し、從つて$i^3=i^2\times i=-i=-\sqrt{-1}$にして　$i^4=i^2\times i^2=-1\times(-1)=+1$となるなり。

一元二次方程式の根の吟味

一元二次方程式の根の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

によつて二根の性質を吟味せんに、今a、b、c、は實數を表すものとすれば、二つの根が實數なる根(實根)なるか、又は虛數なる根(虛根)なるかは、$\sqrt{b^2-4ac}$　の　b^2-4ac　の値如何によつて定まる。

(1)　$b^2-4ac>0$なる場合

此場合は根號內の數は正數なり。よつて二根は共に實數にして相異なる。

(2)　$b^2-4ac=0$なる場合

此場合は二根は　$x=-\dfrac{b}{2a}$　となりて、實數にして相等し。

(3)　$b^2-4ac<0$なる場合。

此場合は根號內の數は負數なり。よつて二根は共に虛數にして相異なる。

斯の如く二次方程式の根の性質は　b^2-4acによつて判別する事を得るを以て、此式を二次方程式　$ax^2+bx+c=0$の判別式と稱し普通Dを以て表はす。

例1、　$3x^2-5x+2=0$　の根の性質を判別せんに、判別式を作れば、

$$D=(-5)^2-4\times3\times2=1>0$$

故に此の方程式の二根は實數にして相異なる。

例2、$4x^2-36x+81=0$の根の性質を判別せんに判別式を作れば

$$D=(-18)^2-4\times81=324-324=0$$

故に此方程式の根は實數にして等根なり。

注意　xの係數が偶數なるときは判別式はb'^2-acとする方簡單なり。

例3、$2x^2+3x+5=0$ の根の性質を判別せむに

$$D=3^2-4\times2\times5=-31<0$$

故に此方程式は相異なる二つの虚根を有す。

例4、$9x^2-12x+c=0$が等根を有する爲には c は如何なる數値を取るべきか。

解。此方程式が等根を有する爲には判別式が0なるを要す。故に

$$D=(-6)^2-9c=0$$

之より　$c=4$　となる。故に求むる c の値は4なり。

實際=$c=4$なるときは方程式は$9x^2-12+4=0$となる故に$(3x-2)^2=0$　∴　$x=\frac{2}{3}$なる等根を有す。

例5、方程式 $ax^2-(2a+b)x+2b=0$ は實根を有することを證明せよ、但 a、b は實數とす。

證明。$ax^2-(2a+b)x+2b=0$が實根を有するときは其の判別式は0より大なるか又は0に等しかるべし。即判別式は

$$\begin{aligned}D&=\{-(2a+b)\}^2-4\times a\times2b\\&=4a^2+4ab+b^2-8ab\\&=4a^2-4ab+b^2\\&=(2a-b)^2\end{aligned}$$

にして、$2a-b>0$或は$2a-b<0$なりとも共二乘は0より大なり、又

$2a-b=0$ 即 $2a=b$ の時にても0より小とはならず、故に原方程式は實根を要す。

根と係數との關係

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二根

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の一方を α、他方を βにて表はし即

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\beta-4ac}}{2a}\qquad\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

として$\alpha+\beta$及$\alpha\beta$を作り見るに

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\&=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

即　$\underline{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$、　$\underline{\alpha\beta=\frac{c}{a}}$

斯の如く二根の和及積は原方程式の　a、b、c　にて簡單に表はす事を得。此關係を$ax^2+bx+c=0$の根と係數との關係といふ。

若し二次方程式が $x^2+px+q=0$ なる形にて表されたるときは

$$\alpha+\beta=-p、\quad\alpha\beta=q$$

となる。

之により與へられたる二數を根とする方程式は直ちに次の如く求むるを得。即與へられたる二數を m、n とせば

$$-(m+n)=p、mn=q$$

とすることにより

$$x^2-(m+n)x+mn=0$$

なり。

例1、 $3x^2-5x+6=0$の二根の和及積を求めむに $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ なるにより

$$\left.\begin{array}{l}\text{二根の和}=-\frac{-5}{3}=1\frac{2}{3}\\ \text{二根の積}=\frac{6}{3}=2\end{array}\right\}\text{答}$$

例2、 $x^2-3x+1=0$の二根を、$\alpha\beta$として$\alpha^2+\beta^2$及$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$の値を求む。

解。 $\alpha+\beta=3$、$\alpha\beta=1$にして

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=3^2-2\times1=7$$

又 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{1}=3$

例3、 $\frac{1}{2}$、$\frac{5}{6}$の二數を根とする方程式は$x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{6}=0$

即 $x^2-\frac{1}{3}x-\frac{5}{12}=0$

即 $12x^2-4x-5=0$…………答

例4、 二數あり其和は4にして積は -221 なりといふ。此等の二數を求む。

解。所要の二數を根とする方程式を作れば

$$x^2-4x-221=0$$

なり、之れを解きて

$$x=-13 \text{ 或 } 17$$

因て二數は -13 及 17 なり。

二次三項式の因數分解

既に前述せる二次三項式の因數分解は極く簡單なるもののみに止まれり。次に一般なる場合を述べん。

今二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二根を α、β にて表せば根と係數との關係により $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$、$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ なり。さて此關係を用ふれば

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となる故に、一般に二次三項式 ax^2+bx+c を因數に分解するには之を0に等しとおきたる方程式の根を公式によつて求むれば上の如く因數に分解する事を得るなり。

例1、 $6x^2+x-15$ を因數に分解せよ。

方程式 $6x^2+x-15=0$ を解けば

$$x=\frac{3}{2} \quad \text{又は} \quad x=-\frac{5}{3}$$

なり。故に

$$6x^2+x-15=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left\{x-\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}$$

$$=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)$$

$$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)3\left(x+\frac{5}{3}\right)$$

$$=(2x-3)(3x+5)\cdots\cdots\text{答}$$

例2、$2a^2-7ab-9b^2$ を因數に分解せよ。

方程式 $2a^2-7ab-9b^2=0$ を解きて

$$a=\frac{9b}{2}\ \text{或}\ -b$$

を得。故に

$$2a^2-7ab-9b^2=2\left(a-\frac{9b}{2}\right)\{a-(-b)\}$$

$$=(2a-9b)(a+b)\cdots\cdots\text{答}$$

問　題

1、$2x^2-15x+18$　　2、$3x^2+5x+2$

3、$5x^2-38x+48$　　4、$48x^2-38xy+5y^2$

(1) $(x-6)(2x-3)$　　(2) $(x+1)(3x+2)$

(3) $(x-6)(5x-8)$　　(4) $(8x-5y)(6x-y)$

第四章 聯立二次方程式

例1、$x-2y=8\cdots\cdots(1)$

$xy=24\cdots\cdots(2)$

解。(1) より $x=2y+8\cdots\cdots(1)'$

を得、之を (2) に代入すれば

$(2b+8)y=24$ 即 $y^2+4y-12=0$

之をときて $y=2$ 或 -6

$y=2$ なるとき $(1)'$ = より

$x=2\times2+8=12$

$y=-6$ なるとき $(1)'$ により

$x=2\times(-6)+8=-4$

答 $x=12$、$y=2$ 或 $x=-4$、$y=-6$、

例2、$x+y=15\cdots\cdots(1)$

$xy=56\cdots\cdots(2)$

解。(1) より $y=15-x$ を出し、之を (2) に代入して x に就きて、二次方程式を得て例1の如くして解き得べし。

別解。(1) の兩邊を二乘すれば

$x^2+2xy+y^2=225\cdots\cdots(1)'$

(2) の兩邊を4倍すれば

$4xy=224\cdots\cdots(2)'$

$(1)'-(2)'$ を作れば

$x^2-2xy+y^2=1$

即 $(x-y)^2=1$

平方に開きて $x-y=\pm1$

之と (1) とを組合せて

$$\left.\begin{array}{l}x+y=15\\ x-y=1\end{array}\right\}\text{或}\left.\begin{array}{l}x+y=15\\ x-y=-1\end{array}\right\}$$

之を解きて

$$\left.\begin{array}{l}x=8\\ x=7\end{array}\right\}\text{或}\left.\begin{array}{l}x=7\\ y=8\end{array}\right\}$$

別解。與へられたる方程式は、二數の和と積と與へられたる事となる故、前章に述べし事により、二數は

$$t^2-15t+56=0$$

の根なるべし。之を解きて、x、y を求むる事を得べし。

例3、 $xb+4x-5y=8$ ……………(1)

$2xy-3x+2y=7$ ……………(2)

(1)×2−(2) を作れは

$11x-12y=9$ $\therefore$ $y=\dfrac{11x-9}{12}$ …………(3)

之を (1) に代入すれば

$$x\frac{11x-9}{12}+4x-5\frac{11x-9}{12}=8$$

即 $11x^2-16x-51=0$

之を解きて $x=3$ 或 $-\dfrac{17}{11}$

$x=3$ なるとき (3) に代入して

$$y=\frac{11\times3-9}{12}=2$$

$x=-\dfrac{17}{11}$ なるとき (3) に代入して

$$y=\frac{11\times\left(-\frac{17}{11}\right)-9}{12}=-\frac{13}{6}$$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l}x=3\\ y=2\end{array}\right\}\text{或}\left.\begin{array}{l}x=-\frac{17}{11}\\ y=-\frac{13}{6}\end{array}\right\}$$

例4、 $2x^2+xy-20y^2=16$ ……………(1)

$3x^2+3xy-24y^2=36$ ……………(2)

(1)×9−(2)×4 を作るに

$18x^2+9xy-180y^2=144$ ……………(1)′

$12x^2+12xy-96y^2=144$ ……………(2)′

$6x^2-3xy-84y^2=0$

兩邊を3にて割れば

$2x^2-xy-28y^2=0$

因數に分解すれば

$(x-4y)(2x+7y)=0$

從つて $x=4y$ 或は $x=-\dfrac{7}{2}y$

$x=4y$ を (1) に代入すれば

$2(4y)^2+4y^2-20y^2=16$ 即 $y^2=1$

之より $y=\pm1$ を得。よつて $x=\pm4$ となる。

或 $x=-\frac{7}{2}y$ を (1) に代入すれば

$$2\left(-\frac{7}{2}y\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)y-20y^2=16$$

即 $\frac{49}{2}y^2-\frac{7}{2}y^2-20y^2=16$ 即 $y^2=16$

之より $y=\pm4$ を得。よつて $x=\pm14$ となる。

故に求むる根は次の4組なり。

$$\left.\begin{matrix}x=4\\y=1\end{matrix}\right\}\text{或}\left.\begin{matrix}x=-4\\y=-1\end{matrix}\right\}\text{或}\left.\begin{matrix}x=-14\\y=4\end{matrix}\right\}\text{或}\left.\begin{matrix}x=14\\y=-4\end{matrix}\right\}$$

例5、$2x^2-5xy-3y^2=33$ ……………(1)

$2x^2-11xy-6y^2=60$ ……………(2)

$(1)\times5-(2)\times3$ を作るに

$$\begin{array}{r}10x^2-25xy-15y^2=180\\ 6x^2-33xy-18y^2=180\\ \hline 4x^2+8xy+3y^2=0\end{array}$$

因数に分解すれば

$$(2x+y)(2x+3y)=0$$

従つて $x=-\frac{y}{2}$ 或 $x=-\frac{3}{2}=y$

$x=-\frac{y}{2}$ を (1) に代入すれば

$$2\left(-\frac{y}{2}\right)^2-5\left(-\frac{y}{2}\right)y-3y^2=36$$

即 $\frac{y^2}{2}+\frac{5}{2}y^2-3y^2=36$ 即 $6y^2-9y^2=72$

即 $0=72$ となりて不能なり。依て $x=-\frac{y}{2}$ なる事なし。次に

$x=-\frac{3}{2}y$ を (1) に代入すれば

$$2\left(-\frac{3}{2}y\right)^2-5\left(-\frac{3}{2}y\right)y-3y^2=36$$

即 $\frac{9}{2}y^2+\frac{15}{2}y^2-3y^2=36$ 即 $y^2=4$

之より $y=\pm2$ を得。よつて $x=\pm3$ となる。

故に求むる根は次の二組なり。

$$\left.\begin{matrix}x=-3\\y=2\end{matrix}\right\}\text{或}\left.\begin{matrix}x=3\\y=-2\end{matrix}\right\}$$

別解 $y=mx$ とおきて、(1)、(2) に代入すれば

$2x^2-5mx^2-3m^2x^2=36$

$2x^2-11mx^2-6m^2x^2=60$

即 $(2-5m-3m^2)x^2=36$

$(2-11m-6m^2)x^2=60$

邊々割り算をすれば

$$\frac{2-5m-3m^2}{2-11m-6m^2}=\frac{3}{5}$$

分母を拂ひ整頓すれば

$3m^2+8m+4=0$

$\therefore\ (3m+2(m+2)=0$

$\therefore\ m=-\frac{2}{3}$ 或 $m=-2$

從つて $y=-\frac{2}{3}$ 或 $y=-2x$ となる。

之等を (1) 或 (2) に代入して前解同様に x、y を求め得べし。

注意 $x=my$ とおきてもと $y=mx$ おきても何れにてもよし。

例6、 $x^2+y^2+2(x+y)=43$……………(1)

$10(x+y)=7xy$……………(2)

解。今 $x+y=X$、$xy=Y$ とおけば

$x^2y^2=(x+y)^2-2xy$ なる故 (1) は變形されて

$(x+y)^2-2xy+2(a+y)=43$

$\therefore\ X^2-2Y+2X=43$……………(1)′

$10X=7Y$……………(2)′

となる。よつて (2)′ より $Y=\frac{10}{7}X$ を得 (1)′ に代入すれば

$X^2-2\left(\frac{10}{7}X\right)+2X=43$

即 $7X^2-6X-301=0$

之より $X=7$ 或 $-\frac{43}{7}$ を得。

よつて $X=7$ なるとき $Y=10$

$X=-\frac{43}{7}$ なるとき $Y=-\frac{430}{49}$

となる。然るに $X=x+y$、$Y=xy$ なる故

$\left.\begin{array}{r} x+x+=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{r} x+y=-\frac{43}{7} \\ xy=-\frac{430}{49} \end{array}\right\}$

之等より例1又は例2の方法によつて、x,y の値を求むれば次の四組を得。

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=\frac{-43+\sqrt{3569}}{14} \\ y=\frac{-43-\sqrt{3569}}{14} \end{array}\ \left.\begin{array}{l} x-\frac{-43-\sqrt{3569}}{14} \\ y=\frac{-43+\sqrt{3569}}{14} \end{array}\right\}$

例7、 $x+y=7$……………(1)

$x^3+y^3=91$……………(2)

解。(2) の左邊を因數に分解すれば

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=91$

(1) と邊々割り算をすれは

$x^2-xy+y^2=13$……………(3)

$(1)^2-(3)$ を作れば

$3xy=36$ 即 $xy=12$

之と (1) とより

$x=3$、$y=4$ 或 $x=4$、$y=3$ を得。

例8、 $xy=2$……………(1)

$yz=6$……………(2)

$zx=3$……………(3)

解。(1)×(2)×(3)を作れば

$$x^2y^2z^2=36$$

平方に開けば

$$xyz=\pm 6\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(0)÷(2) を作れば

$$x=\pm 1$$

(0)÷(3) を作れば

$$y=\pm 2$$

(0)÷(1) を作れば

$$z=\pm 3$$

答 $\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\\z=3\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-2\\z=-3\end{matrix}\right\}$

例9、 $x(x+y+z)=8\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$y(x+y+z)=16\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$z(x+y+z)=00\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)+(2)+(3) を作れば

$$x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)=60$$

即 $(x+y+z)^2=64$

平方に開けば

$$x+y+z=\pm 8\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) にて順次 (1)、(2)、(3) を割れば夫々

$x=\pm 1$、 $y=\pm 2$、 $z=\pm 5$ を得。

故に所要の根は次の二組なり。

$\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\\z=5\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-2\\z=-5\end{matrix}\right\}$

例10、 $z^2-xy-7=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$x+y+z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$3x-2y+2z+2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解。(2) より $x+y=-z\cdots\cdots\cdots\cdots(2)'$

(3) より $3x-2y=-2z-2\cdots(3)'$

$(2)'\times 2+(3)'$ を作れば

$$5x=-4z-2\quad\therefore\quad x=\frac{-4z-2}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$(2)'\times 3-(3)'$ を作れば

$$5y=-z+2\quad\therefore\quad y=\frac{-z+2}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4) 及 (5) を (1) に代入すれば

$$z^2-\left(\frac{-4z-2}{5}\right)\left(\frac{-z+2}{5}\right)-7=0$$

簡約すれば $7z^2+2z-57=0$

因數に分解すれば

$$(z+3)(7z-19)=0$$

之より $z=-3$ 或 $z=\frac{19}{7}$

$z=-3$ なるとき (4) 及 (5) に代入して

$$x=\frac{-4\times(-3)-2}{5}=2、\quad y=\frac{-(-3)+2}{5}=1$$

又 $z=\frac{19}{7}$ なるとき (4) 及 (5) に代入して

$$x=\frac{-4\left(\frac{19}{7}\right)-2}{5}=-\frac{18}{7}\ \text{、}\ y=\frac{-\left(\frac{19}{7}\right)+2}{5}=-\frac{1}{7}$$

故に所要の根は次の二組なり。

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x=-\frac{18}{7} \\ y=-\frac{1}{7} \\ z=\frac{19}{7} \end{array}\right\}$$

問　　題

1、 $x^2+xy+y^2=13$ ……………………(1)

$x^2-xy+y^2=7$ ……………………(2)

2、 $x=a(x^2+y^2)$ ……………………(1)

$y=b(x^2+y^2)$ ……………………(2)

3、 $x(y+z)=13$ ……………………(1)

$y(z+x)=10$ ……………………(2)

$z(x+y)=15$ ……………………(3)

(1) (1、3) (3、1) (−1、−3) (−3、−1)

(2) $x^2+y^2=k$ とおき、$x=ak$　$y=bk$ より x、y を求むべし

$$(0、0)、\left(\frac{a}{a^2+b^2}、\frac{b}{a^2+b}\right)$$

(3) 括弧をとき、全部を加へ、例 8 に導くべし

$$\left(6、\frac{3}{2}、\frac{2}{3}\right)、\left(-6、-\frac{3}{2}、-\frac{2}{3}\right)$$

第五章　無理方程式

未知數に關する無理數を含む方程式を無理方程式といふ。

例へば

$$x-\sqrt{x+2}=0$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{9x+7}$$

の如し

解　法

$x-\sqrt{x+2}=0$ を解くには $-\sqrt{x+2}$ を移項して、

$x=\sqrt{x+2}$ となし、兩邊を平方すれば

$x^2=x+2$　　即　$x^2-x-2=0$

$\therefore$ $(x-2)(x+1)=0$ 之より $x=2$ 或 -1

今 $x=2$ とすれば原方程式の

左邊 $=2-\sqrt{4}=2-2=0$ となり滿足す。

又 $x=-1$ とすれば

左邊 $=-1-\sqrt{-1+2}=-1-1=-2$ となりて滿足せず。故に原方程式の根は $x=2$ のみなり。

無理方程式を解く爲に、斯の如く兩方を平方する事は屢々あり然るときは此の例の如く原方程式の根にあらざる無緣根を生ずる事ある故、必ず得たる結果は果して原方程式の根なるや否やを驗

せざるべからず。

$\sqrt{x+2}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{9x+7}$　を解け。

兩邊を平方して

$$x+2-2\sqrt{x+2}\sqrt{4x+1}+4x+1=9x+7$$

$\sqrt{\quad}$ を含まざる項を右邊に移項して兩邊を2にて割れば

$$-\sqrt{x+2}\sqrt{4x+1}=2x+2$$

再び兩邊を平方すれば

$$(x+2)(4x+1)=4x^2+8x+4$$

括弧を去り左邊に移項して簡約せば

$x-2=0$　之より $x=2$ を得。

$x=2$ なるとき原方程式の

左邊$=\sqrt{2+2}-\sqrt{4\times2+1}=2-3=-1$

右邊$=\sqrt{9\times2+7}=5$

$\therefore$ $x=2$ は原方程式の根ならず。よつて原方程式は根を有せず

斯の如く最後に得たる方程式の根が原方程を滿足せざる時は原方程式は根を有せざるなり。

$x^2-5x+6\sqrt{x^2-5x-3}=10$　を解け。

前例の如く移項して根號を去る爲に兩邊を平方すれば、四次の項を含む事となる。然るに吾人は一般なる三次以上の方程式は此の程度の代數學にては解き得ざるを以て、四次の項を得ざる如く工夫するを要す。

x^2-5x と根號内とに注目すれば x^2-5x-3 を作れば全く根號

內と一致す。故に今兩邊より3を減すれば

$$x^2-5x-3+6\sqrt{x^2-5x-3}=7$$

となる。ここに於て $\sqrt{x^2-5x-3}$ の平方が x^2-5x-3 となるにより　$\sqrt{x^2-5x-3}=y$

とおけば原方程式は

$y^2+6y=7$　移項して $y^2+6y-7=0$

之を解きて $y=1$ 或 -7 を得。

然るに根號は正を表はすと云ふ規約によれば y 即 $\sqrt{x^2-5x-3}$ の値は正（又は〇）なるべきにより -7 となる事なし。故に

$$\sqrt{x^2-5x-3}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊を平方すれば

$$x^2-5x-3=1$$

之を解きて

$$x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$$

此根は兩方とも (1) を滿足す。(1) を滿足する値は又原方程式を滿足すべき事明かなり。

問　題

1、$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}+1$

2、$\sqrt{5x+4}-\sqrt{3x+1}\quad\sqrt{4x-3}$

(1) 5、1　　(2) 1

第七編　比及比例

第一章　比

或量（又或數）Aが或量（又或數）Bの幾倍なるかを見る事をAのBに對する比を見るといふ。

AのBに對する比のことを

A : B

と書き之をAのBに對する比又はA對Bと呼ぶ。

A及Bを比の項と云ひ、Aを比の前項、Bを比の後項といふ

AのBに對する比を考ふるときはAはBの3倍なり、又AはBの$\frac{2}{7}$倍なり等不名數を以て答ふべく、此の幾倍なるかを表はす數を比の値といふ。又比の値の事を單に比と云ふ事あり。

二量の比を考ふるときは二量は必ず同種類の量ならざるべからず。

二量の比は其各を同じ單位にて計りて得る數値の比に等し。

例へば

3圓 : 5圓＝3 : 5

なり。

比の性質

(1) 比の兩項に零にあらざる同じ數を乘ずるも比の値は變ぜず。

何となれば A : B の値は $\frac{A}{B}$ にして兩項に m (m≠0) を乘ずれば mA : mB となり其の値は $\frac{mA}{mB}$ 即 $\frac{A}{B}$ なり。

(2) 比の兩項を零にあらざる同じ數にて除するも比の値は變ぜず。

何となれば兩項を m(m≠0) にて除するは尙兩項に $\frac{1}{m}$ を乘ずるに等し。

注意　比の大小は比の値の大小による。

例へば $3abc^2 : 27abc^3$ を簡單にするには (2) により、兩項の最大公約數 $3abc^2$ にて兩項を除して $3abc^2 : 27abc^3 = 1 : 9c$ とすればよし。又 $\frac{2a}{3}(x+2y) : \frac{5a}{12}(x^2-4y^2)$ を簡單にするには、(1)、(2) を用ひて

$$\frac{2a}{3}(x+2y) : \frac{5a}{12}(x^2-4y^2) = 2 : \frac{5}{4}(x-2y)$$
$$= 8 : 5(x-2y)$$

となる。

反　比

比の前項と後項とを取り代へて作りたる比を、もとの比の反比（或逆比）といふ。

A : Bの反比はB : Aなり。

反比はもとの比の兩項の逆數の比に等し

B : A は $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} =$ B : A なり

反比の値はもとの比の値の逆數に等し。

複　比

幾つかの比の前項の積を前項とし、後項の積を後項としたる比を、それらの比の複比（或相乘比）といふ。

例へば $a:b$ と $c:d$ との複比は $ac:bd$ にして

$$\left.\begin{matrix} a:b \\ c:d \end{matrix}\right\} = ac:bd$$ と記す。

複比の値はもとの各比の値の積に等し。

何となれば $ac:bd$ の値は $\frac{ac}{bd}$ にして $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ なればなり。

同一なる二つの比の複比を特に二乘比又は平方比といひ、同一なる三つの比を特に三乘比又は立方比といふ。

例へば $a:b$ の二乘比は $a^2:b^2$ にして、三乘比は $a^3:b^3$ なり。

第二章　比　例

比例式

二つの比を等號にて結びたるものを比例式といふ。

例へば　$a:b=c:d$

又　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

の如し、此場合四數 a、b、c、d は比例をなすと云ふ。a、b、c、d を比例の項と云ひ a と d を外項、b と c を內項、又 d を a、b、c の第四比例項と云ふ。

比例に關する定理

(1)　四つの數が比例をなすときは、その外項の積と內項の積とは相等し。

即　$a:b=c:d$ なるときは $ad=bc$

(2)　二數の積が他の二數の積に等しきときは一方の二數を外項（或は內項）にし、他の二數を內項（或は外項）とする比例式が成立す。

即　$ad=bc$ なるときは $a:b=c:d$ なり。

注意　$ad=bc$　なるとき生ずる比例式は次の八通りあり。其の內一つが成立すれば他の七つも成立するものなり。即

$a:b=c:d$………1	$c:d=a:b$………5
$d:c=b:a$………2	$b:a=d:c$………6
$a:c=b:d$………3	$b:d=a:c$………7
$d:b=c:a$………4	$c:a=d:b$………8

(3)　$a:b=c:d$ なるときは

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$　が成立す。

例1、$3+x:3x-4=7:5$ より x を求む。

(1) により　　$5(3+x)=7(3x-4)$

之より　　$x=\frac{43}{16}$

注意 此例の如くして未知數xの値を求むる事を比例式を解くといふ。

例2、 $a:b=c:d$ なるときに

$$ma+nb : pa+qb=mc+nd : pc+qd$$

の成立する事を證せ。

證明 $a:b=c:d$ なる故に

即 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此の兩邊に $\frac{m}{n}$ を乘ずれば $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$

(3) により $\frac{ma+nb}{nb}=\frac{mc+nd}{nd}$

$$\therefore \quad \frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{nb}{nd}=\frac{b}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 (1) の兩邊に $\frac{q}{n}$ を乘ずれば $\frac{pa}{pb}=\frac{pc}{qd}$

(3) により $\frac{pa+qb}{qb}=\frac{pc+qd}{qd}$

$$\therefore \quad \frac{pa+qb}{pc+qd}=\frac{qb}{qd}=\frac{b}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) と (3) とより

$$\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{pa+qb}{pc+qd}$$

$$\therefore \quad \frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}$$

即 $ma+nb : pa+qb=mc+nd : pc+qd$

比例中項

a、b、c 三數が

$$a:b=b:c$$

なる關係を有するとき、b を a、c の比例中項といひ、c を a、b の第三比例項と云ふ。

$a:b=b:c$ なる故

$$b^2=ac$$

故に $b=\pm\sqrt{ac}$

即二數 a、c の比例中項は a、c の積の平方根なり。

連　比

一郡の數 A、B、C………に對して他の一郡の數 a、b、c………ありて、其の間に

$$A:B=a:b、B:C=b:c\cdots\cdots\cdots$$

なる關係あるときは之を

$$A:B:C\cdots\cdots=a:b:c\cdots\cdots$$

と書く、之を連比といふ。又次の如くに書く事を得。

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\cdots\cdots$$

今、これらの値をKに等しとおけば

$$A=aK、B=bK、C=cK\cdots\cdots$$

故に $(A+B+C+\cdots\cdots)=K(a+b+c+\cdots\cdots)$

$$\therefore \quad K=\frac{A+B+C+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}$$

よつて $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\cdots\cdots=\frac{A+B+C+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}$

例 $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=K$ なるとき、次の式を證明せよ。

(1) $K=\frac{A^2+B^2+C^2}{aA+bB+cC}$

(2) $(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+c^2)=(aA+bB+cC)^2$

證明 (1) $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=K$ なる故に

$A=aK$、$B=bK$、$C=cK$ なり

よつて $a=\frac{A}{K}$、$b=\frac{B}{K}$、$c=\frac{C}{K}$を得、之等を證明すべき式の右邊に代入すれば

$$右邊=\frac{A^2+B^2+C^2}{\frac{A^2}{K}+\frac{B^2}{K}+\frac{C^2}{K}}=\frac{A^2+B^2+C^2}{\frac{1}{K}(A^2+B^2+C^2)}=\frac{1}{\frac{1}{K}}=K$$

故に $K=\frac{A^2+B^2+C^2}{aA+bB+cC}$

(2) $A=aK$、$B=bK$、$C=cK$ を左邊、右邊別々に代入すれば

$$左邊=(a^2K^2+b^2K^2+c^2K^2)(a^2+b^2+c^2)$$
$$=K^2(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\underline{K^2(a^2+b^2+c^2)^2}$$
$$右邊=(a.\,aK+b.\,bK+c.\,cK)^2$$
$$=(a^2K+b^2K+c^2K)^2$$
$$=\underline{K^2(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$\therefore$ $(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+c^2)=(aA+bB+cC)^2$

第三章　比例の應用問題

比例配分

例、A を三つの部分に分ち、その各部分の連比を $1:m:n$ ならしめよ。

解。所要の三つの部分を x、y、z とすれば

$x+y+z=A$ ……………(1)

又 $\frac{x}{1}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ………(2)

$\therefore$ (2) より $\frac{x}{1}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=\frac{x+y+z}{1+m+n}$

(1) により $\frac{A}{1+m+n}$ なり

$\therefore$ $x=\frac{1A}{1+m+n}$、$y=\frac{mA}{1+m+n}$、$z=\frac{nA}{1+m+n}$

なり。

かく、與へられたる數を幾部分かに分ち、其の各部分の比又連比を與へられた比又連比に等しからしむる事を<u>比例配分</u>又は<u>按分比例</u>といふ。

混 合 法

例1、上中下三種の酒あり、一升の價上は a 錢、中は b 錢、下は c 錢なり、今之等の酒を夫々 1 升、m 升、n 升づつ混合するときは混合酒 1 升の價何程となるか。

解。求むる混合酒 1 升の價を x 錢とす。題意により、混合酒の

全量は $(l+m+n)$ 升にして其價は$(4al+bm+cn)$ 錢なり。よつて次の方程式を得。

$$(l+m+n)x=al+bm+cn$$

$$\therefore \quad x=\frac{al+bm+cn}{l+m+n}(\text{錢})$$

例2、 上下二種の酒あり、1 升の價上は a 錢、下は b 錢なり、之を混合して1升の價 m 錢の酒を作らんとす。混合の割合を求む

解。上酒を x 升、下酒を y 升混合すとせば混合酒の全量は $(x+y)$ 升にして、其の價は $(ax+by)$ 錢 なり、故に次の方程式を得。 $m(x+b)=ax+by$

之より、移項して

$$y(m-b)=x(a-m)$$

$$\therefore \quad x : y=(m-b) : (a-m)$$

注意 此問題にては $a>b$ より大にして又 $a>m>b$ なる事勿論なり。

かく、同種類にして品位の異なるものの混合に關する計算を混合法と云ふ。

而して例1は混合すべき各原料の品位と混合の割合を與へて混合物の品位を求むるものにして、例2は混合すべき各原料の品位と混合物の品位とを與へて原料の混合の割合を求むるものなり。

互に比例する量

例へば1時間25粁の速さにて走る汽車は2時間にては50粁、

3時間にては75粁となり、一般にn時間には25n粁を走る、即其走る粁數と時間との比は25 : n にして、其値は常に一定數25に等し、かくの如きとき粁数と時間とは互に比例すると云ふ。

比 $a : b$ の一定なる値を比例の常數といひ、之を k にて表せば $\frac{a}{b}=k$ $\therefore$ $a=bk$ なる關係あり、上例にては a は粁數、b は時間數にて k は 25 なり。

例、 一定の速さを以て進行する船あり、5 時間に75哩を行きたりとすれば、12 時間には幾哩を行くか。

解。 行程哩數を x、時間數を y とすれば、此二數は互に比例するを以て

$$x=ky \qquad (\text{k は常數})$$

なる關係あり。然るに今 $y=5$ なる時、$x=75$ なるを以て

$$75=5k$$

即 $$k=15$$

なり。故に $y=12$ なるとき、x は

$$x=12k=12\times15=180$$

即ち求むる答は180哩なり。

互に反比例する量

例へば36粁の距離を1時間4粁の速にて行く時は行くに要する時間は9時間にして、1 時間8粁の速さにて行く時は行くに要する時間は $\frac{9}{2}$ 時間、又1時間12粁の速さにて行く時は行くに要する時間は $\frac{9}{3}$ 時間、一般に 4n 粁の速さにて行くときは行く

に要する時間は$\frac{36}{4n}$即$\frac{9}{n}$時間となる、此場合時間と速さとの積は一定にして即$\frac{9}{n}\times 4n=36$なり。かくの如き場合一定の距離を行くに要する時間と速さとは互に反比例すと云ふ。

互に反比例する二量に於て、一方の數値をa他の數値をbとすれば $ab=k$ (kは常數) なる關係あり。

例、6人の職工が24時間にて仕上け得る仕事を同じ能力の職工8人にては幾時間にて仕上け得るか。

解。同じ仕事を仕上ける に要する人數と時間とは互に反比例す、今人數をx、要する時間をyとすれば

$$xy=k \quad (k\text{は常數})$$

なる關係あり。然るに今 $x=6$ なるとき$y=24$なるを以て

$$k=6\times 24=144$$

なり、故に $x=8$ なるときの y は

$$y=\frac{144}{8}=18$$

即求むる答は 18時間 なり。

複比例

例へば三角形の底邊、高さ及面積を表す數を夫々 b、h、A とすれば

$$A=\frac{1}{2}bh$$

なる關係あり、即三角形の面積を表す數Aは其底邊と高さとを表す數の積 bh に比例す。

かくの如きとき、例へば三角形の面積を表す數は共底邊と高さとを表す二數に複比例すといふ。

今cがa及bに複比例することを式にて

$$c=kab \quad (k\text{は常數})$$

と書く。

例、間口15間、奥行10間の矩形の地所の價3150圓なり、然らば間口18間、奥行12間の矩形の地所の價如何。

解。地所の價は間口及奥行に複比例す。故に今間口をx間、奥行をy間、價をz圓とすれば

$$z=kxy \quad (k\text{は常數})$$

なる關係あり。然るに

$x=15$、$y=10$ なるとき $z=3150$

なるを以て

$$3150=k\times 15\times 10 \quad \text{即} \quad k=21$$

を得。故に $x=18$、$y=12$ なるとき z を求むれば

$$z=21\times 18\times 12=4536$$

故に求むる答は4536圓なり。

第八編 級數

第一章 等差級數

例へば

1、2、3、4、5、6、……………… ………(1)

又　9、6、3、0、−3、−6、−9、……………(2)

等の如き一列の數の任意の相隣れる二數間の關係を見るに(1)の方に於ては或る任意番目の數は其の前の數に1を加へたるものなる事を知り、(2)に於ては其の前の數に −3 を加へたるものなる事を知る。斯の如き關係を有して並べられたる一列の數を等差級數或算術級數といふ。而して、其の各數を項と云ひ、最初の項を初項、最後の項を末項といふ。等差級數の任意の項と直ぐ前の項との差を公差といふ。

公差を求むるには任意項より直ぐ前の項を引けばよし。

又、任意の項に公差を加ふれば其次の項を得べし。

一般に初項を a、公差を d、項數を n、末項を l とすれば、等差級數は

a、a+d、a+2d、……………………………、a+(n−1)d

となる。よつて

$$l=a+(n-1)d$$

なり。又此式の右邊の n に 1、2、3、………… を代入する事により其の番目の項を得べきにより之を一般項とも云ふ。

例、等差級數

1、3、5、7、…………

1、公差、一般項、第150項を求む。

公差を d とすれば

d=3−1=(5−3=)2

故に一般項は

1+2(n−1)

にして第150項は

1+2(150−1=299

等差中項

等差級數の初項と末項との間の項を等差中項と云ふ。

今 a、b、c 三數が等差級數をなすときは、b は a と c との等差中項なり。

而して a と c との等差中項 b は

$$b-a=c-b$$

$$\therefore\ b=\frac{a+c}{2}$$

なり、依て二數の等差中項の事を相加平均又は算術平均とも云ふ

等差級數の和を求むる公式

一般に等差級數の初項を a、公差を d、項數を n、末項を l とし等差級數の和を S とすれば

$$S=\overbrace{a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots\cdots+(l-d)+l}^{n個}$$

今此の右邊の順序を轉倒したるものを求むれば

$$S=\overbrace{l+(l-d)+(l-2d)+(l-3d)+\cdots\cdots+(a+d)+a}^{n個}$$

兩式を邊々相加ふれば

$$2S=\overbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)}^{n個}$$

$$=n(a+l)$$

故に　$S=\dfrac{n(a+l)}{2}$ ……………(1)

を得。(1) なる公式の l に、$l=a+(n-1)d$ として代入すれば

$$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2}$$

即　$S=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ ……………(2)

なる公式を得。

注意 (1) の方は初項、末項、項數の與へられたる場合に、(2) の方は末項を與へずに公差の與へられたる場合に用ふるを便とす。

例、自然數 1、2、3、4、………………の n 項迄の和を求む。

初項=1、公差=2−1=1、末項=n、項數 n として公式 (1) に代入すれば

$$S=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

今 n=50 なるときは

$$S=\frac{50\times(1+50)}{2}=\frac{50\times51}{2}=1275$$

となる。

例、4+7+10+13+ ……… なる等差級數幾項の和が 246 となるか。

公式 (2) に於て

$a=4$、$d=7-4=3$、$S=246$ にして n を求むるなり。よつて

$$246=\frac{n\{2\times4+(n-1)\times3\}}{2}$$

n に就きて整頓すれば

$$3n^2+5n-492=0$$

之れを解きて

$$n=12 \quad 或 \quad -\frac{82}{6}$$

然るに項數が $-\dfrac{82}{6}$ とは意味を有せず。故に 12 項が求むる答なり。

例、100 と 200 との間にある 3 にて割り切るゝ數の總和を求む。

100=3×33+1 なる故、100 より大にして 100 に最も近き 3 の倍數は 3×34=102 にして、200=3×66+2 なる故、200 より小にして 200 に最も近き 3 の倍數は 3×66=198 なり。而して 100 と 200 との間にある 3 の倍數の數は

66−33=33 にして、明かに、初項=102、末項 198、項數 33 なる等差級數の和を求むれば可なり、故に和を S とせば

$$S=\frac{33(102+198)}{2}=4950$$ ………………… 答

例、或人初年には金 20 圓を貯金し、次年には金 30 圓、三年目

には金40圓等、毎年貯金高を10圓宛增すときは幾年後貯金總額1700圓となるか。

此人の毎年の貯金高は10圓宛增す故に初項を20圓、公差10圓なる等差級數をなす。故に題意により求むる年數をnとすれば等差級數の公式により次の方程式を得。

$$1700=\frac{n\{2\times20+(n-1)\times10\}}{2}$$

nに就きて整頓すれば

$$n^2+3n-340=0$$

之を解きて

$$n=17 \quad \text{或} \quad -20$$

を得。-20は題意に適せず、故に求むる答は17年後なり。

第二章　等比級數

例へば

$1、2、4、8、16、32、64、\cdots\cdots(1)$

又　$12、-4、\frac{4}{3}、-\frac{4}{9}、\frac{4}{27}、-\frac{4}{81}\cdots\cdots(2)$

等の如き一列の數の任意の相隣れる二數間の關係を見るに、(1)の方に於ては或る任意番目の數は其前の數に2を掛けたるものなる事を知り(2)に於ては其前の數に$-\frac{1}{3}$を掛けたるものなる事を知る。斯の如き關係を有して並べられたる一列の數を等比級數或幾何級數といふ。而して等比級數をなす一列の數の各數を等

級數の項、最初の項を初項、最後の項を末項と云ふ。而して等比級數の任意番目の項は其前の項に一定數を掛けたるものなるを以て、任意番目の項の其前の項に對する比は一定なり。此一定なる比を公比といふ。

公比を求むるには任意番目の項の其前の項に對する比を求むべし。

又、任意番目の項に公比を乘ずれば、其次の項を得べし。

一般に等比級數の初項をa、公比をr、項數をn、末項をlとすれば、等比級數は

$$a、ar、ar^2、ar^3、\cdots\cdots ar^{n-2}、ar^{n-1}$$

となる。よつて

$$l=ar^{n-1}$$

なり。又此式の右邊のnに1、2、3、……を代入する事により其番目の項を得べきにより、之を一般項とも云ふ。

等比中項

等比級數の初項と末項との間の項を等比中項といふ。

今a、b、c、三數が等比級數をなす時はbはaとcとの等比中項なり。

而してaとcとの等比中項bは

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \qquad \text{從つて} \quad b^2=ac$$

$$\therefore \quad b=\pm\sqrt{ac}$$

なり。よつて、二數の等比中項のことを相乘平均又は幾何平均とも云ふ。

等比級數の和を求むる公式

等比級數の初項を a、公比を r、項數を n、末項を l、和を S とすれば

$$S=\overbrace{a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}}^{\text{n個}}$$

今此兩邊に r を乘ずれば

$$rS=\overbrace{ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n}^{\text{n個}}$$

二式の邊々引き算をすれば

$$(1-r)S=a(1-r^n)$$

$$\therefore\quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或は $$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今 $l=ar^{n-1}$ として (1) に代入すれば

$$S=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a-ar^{n-1}r}{1-r}=\frac{a-lr}{1-r}\cdots\cdots\cdots(3)$$

或は $$S=\frac{lr-a}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

注意 (1)、(3) は公比が1より小なるときに、(2)、(4) は公比が1より大なるときに便なり。

例、 等比級數 8、12、18、…………の八項の和を求む

公式 (2) に於て

$a=8$、$n=8$、$r=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ とをけば

$$S=\frac{8\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^8-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$$

$$=8\times\frac{\frac{6561}{256}-1}{\frac{1}{2}}=\frac{6305}{16}=394\frac{1}{16}\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

無限等比級數の和の公式

等比級數の項數が限りなく多きものを無限等比級數といふ。

前述の公式 (1) を變形して

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

に於て、今公比 r の絶對値が1より小なる場合に於ては r^n の絶對値は n が增大するに從ひ限りなく小となりて0に近づく。從つて S は限り無く $\frac{a}{1-r}$ に近づく。此事柄を稱して、n が無限に增大するときの S の極限の値は $\frac{a}{1-r}$ なりと云ふ。

故に無限等比級數の和 S は

$$S=\frac{a}{1-r}$$

なり。

例、 無限等比級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ の和を求む。

公式に於て

$a=1$、$r=\frac{1}{2}$ とすれば

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

例、 無限級數 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{32}\cdots\cdots\cdots\cdots$ の

和を求む。

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$$

$$=1\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

例、 循環小數 $0.\dot{3}\dot{6}$ を分數に直せ。

$$0.\dot{3}\dot{6}=0.36\ 36\ 36\ 36\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=0.36+0.0036+0.000036+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{36}{100}+\frac{36}{10000}+\frac{36}{1000000}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{36}{100}+\frac{36}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{36}{100}\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots\cdots$$

となる故に初項 $\frac{36}{100}$ の公比 $\frac{1}{100}$ なる無限等比級數の和と考ふるを得。故に

$$0.\dot{3}\dot{6}=\frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{36}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$$

即 $0.\dot{3}\dot{6}=\frac{4}{11}$ なり。

第九編 對數

第一章 一般なる指數

既に學びたる指數に關する諸法則

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $(ab)^m=a^mb^m$ (4) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$

等は今 m、n が正負の整數、分數又は零の何れを表すとも一般に成立するものと定む。

特別なるものとして

a が零ならざる任意の數なるとき、a° は1を表すものと定む。

例へば　$4^\circ=1$、$\left(-\frac{3}{8}\right)^\circ=1$ なるが如し。

此の擴張されたる指數法則の應用次の如し。

例へば

$$a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{3}}\times a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}=a'=a$$

$$\left(a^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{-3\times\frac{2}{3}}=a^{-2}\left(=\frac{1}{a^2}\right)$$

等の如し。

第二章　對　　數

對　　數

一般に a は1ならざる正數にして

$$a^x=N$$

なるとき、x は a を底とする N の對數といふ。a を底とする N の對數を表すに $\log_a N$ なる記號を用ふ。

例へば　$10^2=100$ なり、よつて2は10を底とする100の對數にして、$2=\log_{10}100$ なり。

注意　正數の冪は指數の正負に關せず、恒に正數なる故、負數は對數を有せず。

對數に關する法則

(1)　底の對數は1なり。

$a'=a$　　　$\therefore$　$\log_a a=1$

(2)　1の對數は0なり。

$a^\circ=1$　　　$\therefore$　$\log_a 1=0$

(3)　積の對數は其各因數の對數の和に等し。

即　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(4)　商の對數は實の對數より法の對數を減じたる差に等し。

即　$\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

注意　$\log_a\left(\frac{1}{N}\right)=\log_a 1-\log_a N$

$=0-\log_a N$

$=-\log_a N$

(5)　或數の冪の對數は其數の對數に其指數を乘じたる積に等し。

即　$\log_a N^p=p\log_a N$

又　$\log_a\sqrt[p]{N}=\log_a N^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{p}\log_a N$

常用對數

10を底とする對數を常用對數といふ。通常對數計算には專ら

常用對數を用ひ、$\log_{10} N$ とすべきを略して $\log N$ と記す。

指標及假數

對數の整數部を指標と云ひ、小數部を假數といふ。對數が負數なるときは、假數は常に正數にて記し、指標のみを負數にて表すものとす。

例へば $\log 500=2.6990$ なり、玆に整數部 2 は指標にして、0.6990 は假數なり。又 $\log 0.5=0.6990-1=-0.3010$ なれども假數は正數にて記するものなる故

$\log 0.5=-0.3010-1=\overline{1}.6990$

とするなり。

指數の定め方

或數の對數の指標を定むるには

整數部分が 0 ならずしてその整數部分が n 位なる數の對數の指標は $n-1$ なり。

整數部分が 0 にして小數第 n 位に始めて有効數字を有する數の對數の指標は $\overline{n}$ なり。

例へば $\log 1234=3.0913$

$\log 123.4=2.0913$

$\log 12.34=1.0913$

$\log 0.1234=\overline{1}.0913$

$\log 0.001234=\overline{3}.0913$

なり。又

此等の例にて明かなる如く、其の小數點の位置のみ異なる數の對數の假數は相等し。

計算の例一二

例1、 $\log 2=0.3010$、$\log 3=0.4771$ を知りて $\frac{27}{64}$ の對數を出せ

$\frac{27}{64}=\frac{3^3}{2^6}=N$ とおけば

$$\log N=\log\frac{3^3}{2^6}=\log 3^3-\log 2^6$$
$$=3\log 3-6\log 2$$
$$=3\times 0.4771-6\times 0.3010$$
$$=1.4313-1.8060$$
$$=-0.3747$$
$$=\overline{1}.6263\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

例2、 $\log 2=0.3010$、$\log 3.973=0.5991$ なることを知り $\sqrt[7]{25^3}$ を計算せよ。

$$\sqrt[7]{25^3}=25^{\frac{3}{7}}=(5^2)^{\frac{3}{7}}=5^{\frac{6}{7}}=\left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{6}{7}}$$

今之を N とをけば

$$N=\left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{6}{7}}$$

$$\therefore \log N=\frac{6}{7}\log\frac{10}{2}=\frac{6}{7}(\log 10-\log 2)$$
$$=\frac{6}{7}(1-0.3010)$$

$=0.5991$

$\therefore\ N=3.973$…………………答

例3、3^{50} は幾桁の數なるか、但し $\log 3=0.4771$ とす。

$N=3^{50}$ とおき、兩邊の對數を取れば

$\log N=50\times\log 3$

$=50\times 0.4771$

$=23.8550$

$\therefore\ 3^{50}$ は $23+1=24$ 即 24 桁の數なり。

例4、$\left(\frac{50}{49}\right)^{100}$ は 10 より大なるか小なるか。

但し $\log 2=0.301$、$\log 7=0.845$ なり。

$\left(\frac{50}{49}\right)^{100}=\left(\frac{\frac{100}{2}}{49}\right)^{100}=\left(\frac{100}{2\times 7^2}\right)^{100}=N$ とおき兩邊の

對數を取れば

$\log N=100\{\log 100-(\log 2+2\log 7)\}$

$=100\{2-(0.301+2\times 0.845)\}$

$=100\times(2-1.991)$

$=100\times 0.009$

$=0.9$

$\therefore\left(\frac{50}{49}\right)^{100}<10$

第十編 歩合算

歩合算の公式

歩合、歩合高、元高等の意義は既に算術にて知れり。

今元高を A、歩合高を R、歩合を r とすれば

$$r=\frac{R}{A}$$

之より

$$R=Ar,\ A=\frac{R}{r}$$

なり。又合計高を S、殘高を D とすれば

$$S=A+R=A(1+r)$$

$$D=A-R=A(1-r)$$

よつて $A=\frac{S}{1+r}=\frac{D}{1-r}$

なり。

單利法の公式

金元……………元高……………A

利率……………歩合……………r

利子……………歩合高…………R

元利合計………合計高…………S

利子が元金にも期間にも比例するものとして計算する法を單利法といふ。

今期間を t とすれば、單利法に關する重なる公式は下の如し。

$R=Art$

$S=A+R=A(1+rt)$

手形の割引

額面高……………元高……………A

割引步合…………步合……………r

割引高……………步合高…………R

手取金……………殘高……………D

期間……………………………………t

とすれば

$R=Art$

$D=A-R=A(1-rt)$

此計算法による割引を銀行割引といひ、之に對し眞割引は合理的なり。眞割引による手取金を P とすれば

$P(1+rt)=A$

$\therefore\quad P=\dfrac{A}{1+rt}$

此 P を現價と云ふ。

複利法

每期の終りに於て、その期間に生じたる利子を元金に加へ、その和を次の期間の元金として利子を計算し、次第にかくして每期元金を增加せしめて、利子を計算する方法を複利法と云ふ。

今元金を A、利率を r とし、n 年後の元利を求めむに、第一年後の元利合計は $A(1+r)$ にして、之れは第二年目の元金なる故に第二年後の元利合計は $A(1+r)^2$、次第にかくするときは第 n 年後に於ける元利合計は夫れを S とすれば

$S=A(1+r)^n$

となる。故に一般には對數計算により

$\log S=\log A+n\log(1+r)$

又 A を求めむには

$\log A=\log S-n\log(1+r)$

又 r を求めむには

$\log(1+r)=\dfrac{1}{n}(\log S-\log A)$

又 n を求むるには

$n=\dfrac{\log S-\log A}{\log(1+r)}$

なり。

A の事を n 年後に受取るべき S の現價と云ふ事あり。

【終り】

印刷日　昭和三年二月十五日
發行日　昭和三年二月二十日
第二版　昭和三年十一月十日

遞信受驗就職準備書續編

定價金　參　圓

發行兼編輯人　東京府王子町上十條一四七八　吉田房

印刷人　東京市芝區宇田川町一三　松井巳壽

印刷所　東京市芝區宇田川町一三　松壽堂印刷所

發行所　東京・十條驛前　受驗ト就職社
電話王子五一番
振替東京七七八九四番

本會卒業生にして鐵道就職希望者は第二教務課にて盡力を爲す

自宅に於て

旅費
寄宿舍料
小遣費

も一切不要にて

鐵道局教習所受驗講習會の

各講師の講義を聽く事が出來る!!

鐵道局教習所受驗通信講習會

本會獨特の教壇
教育の誌上放送

◈遠路のため上京出來ざる諸君
◈家庭の都合で上京出來ざる諸君
◈在學中のため上京出來ざる諸君

今直ぐ入學せよ!!

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一番

鐵道局教習所受驗通信講習會に入學すれば

「プリント
（鐵道局教習所受驗通信講義全集）」

が送附されます。

鐵道局教習所受驗通信講義全集

（總クロース、金文字入、箱入約一千頁の大册）

内容目次

◈英語擔任講師（久保田先生・吉田先生）の講義集（十五日間）
◈國語擔任講師（山本先生・副島先生）の講義集（十五日間）
◈作文擔任講師（矢野先生）の講義集（十五日間）
◈算術擔任講師（黑川先生・植松先生）の講義集（十五日間）

附錄

◈算術合格の秘訣（上・中・下卷）　伊藤先生講述

▼讀んで下さい▲

この講義全集は講習會に於ける各講師の講義を速記印刷したる本會獨特のプリントである。各講師の講義を耳で聽くことを全部眼で見ることが講義全集の大特徴である。これは最も懇切丁寧に面白く講述してあるから頁數は約（一千頁）の大册であるが十五日間あれば愉快に讀破することが充分出來、驚く樣な實力が養成されます。

▼見て下さい▲

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一番

鐵道局教習所受驗通信講習會 略則

一、目的　鐵道局教習所受驗通信講習會は鐵道局教習所受驗講習會に入學出來ざる者のための便宜を計ひ、鐵道局教習所受驗講習會と全然同樣なる受驗準備教育を施すを以て目的とす。

二、程度　◎學科及程度……各鐵道局教習所（電信科・普通科）入所試驗課目全般、算術、國語、作文、英語、ローマ字、鐵道一般學等、摸擬試驗も通信にて執行するものとす。

三、入學資格　尋常小學校卒業以上の學力あるものにして、本年十四歳以上滿二十五歳迄のものは、隨時入學を許可す。

四、學費　入學金、壹圓、講習會費、五圓（鐵道局教習所受驗通信講義全集を送附す）

五、教科書　受驗と就職社發行**鐵道受驗就職準備書**正編續編

六、願書　願書受付は、東京・十條驛前　受驗と就職社

七、手續　入學金及講習會費は別紙振替にて郵便局に拂込れたし。

八、入學許可　入學金及講習會費及教科書代金が振替貯金にて到着の上は、早速入學許可證をお送り致し、其後通信講座に依る、本會獨特のプリント（鐵道局教習所受驗通信講義全集）（各講師の講習會に於ける講義の速記全部を印刷したるもの）及摸擬試驗問題も順々送附す十五日目には鐵道局教習所受驗講習會修業證時も郵送す。

九、プリント　鐵道局教習所受驗講習會に於て各專門講師の講義其儘速記印刷製本したる本會獨特のプリントなれば、諸君は自宅に於て、名聲と經驗ある鐵道局教習所受驗講習會の講師に講義を受くることが出來る。あだかも、教壇教育を、紙上放送したるものである。

十、特典　鐵道局教習所受驗講習會に出席するには、多大の旅費及寄宿舍料及小遣等を要するものを受驗通信講習會に入會すれば全然不必要にて、其の教育を受くることが出來る。

◇特に大特典としてプリントの附錄に「鐵道受驗算術合格の秘訣」（上・中・下卷）を添附す。

學費總額金十一圓三十八錢　〔（一）鐵道局教習所受驗通信講義全集　（二）鐵道受驗就職準備書 正編・續編　（三）卒業證書〕

振替にて鐵道教習所受驗通信講習會の入學金及學費御送金の際には必ず『通信』の二字を通信文記欄に朱書して下さい。鐵道局教習所受驗講習會と一寸名稱が似て居るため間違ひがあると面倒でありますから、『通信』と赤インキで書いてあれば決して間違ひはありません。特にお願ひして置きますが、鐵道受驗就職準備書を持參しない諸君は、入學金及學費御送金の際一緒にお送り下さい。送料共金拾壹圓參拾八錢になります。

鐵道局教習所受驗講習會に於ては毎日、鐵道受驗就職準備書を教材とし、各講師が専門的に教授するのでありますから、教科書が無ければ講義の眞味が徹底しなくなります。

摸擬試驗について一言申上げますが試驗問題を受取つた上は必ず諸君の眞の實力で答案を作成して、必ず御返却下さい。答案は各科講師が採點訂正して、御返却致します。修業證書は、講習會に入學したるものには、一人も漏無くお渡し致します。決して試驗の成績の良否に依つてお渡しする樣なことはありません。試驗の結果、成績優秀なるものには鐵道局教習所受驗講習會同樣に、賞品を授與します。鐵道局教習所受驗通信講習會も鐵道局教習所受驗講習會も少しも異ることはありません。前者は、上京して直接教授を受くると後者は自宅に於て間接に教授を受くることであります。鐵道局教習所受驗講習會は年四回十二日開講十五日間であります。鐵道局教習所受驗通信講習會は年十二回、毎月一日開講十五日間であります。勿論、何時でも入學の手續は出來ますから、大至急振替貯金にてお送り下さい。(振替貯金に依る送金法を知らぬ人は郵便局にて教へて頂いて下さい。爲替で送金する場合は書留郵便にすることを忘れないで下さい、特に御注意しておきますが住所氏名は必ず楷書で明瞭に記載することが必要であります。亂暴な自己流の字で書いてあると其の判斷に苦しみ、甚だ相互に迷惑を掛けるものでありますから。

鐵道局教習所受驗通信講習會に關する入學や質問等は必ず往復ハガキで『東京、十條驛前、受驗と就職社第二教務課』宛に願ひます。往復ハガキの質問に對しては一週間内に必ず御返事を差上げます。第一教務課は鐵道局講習所受驗講習會でありますから第二教務課と必ず記載して下さい。

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一番

鐵道受驗就職準備書

〔內容說明〕

正編

◇**鐵道總論講座** 鐵道に關する一般の知識を授く。國有鐵道の組織、鐵道の教育機關及制度諸給與、鐵道官舍・休暇及忌引、運輸從業員の職務、車掌の服務、鐵道警察事務、下級從業員の監督、等鐵道の概念を懇切叮嚀に講義さる。鐵道に對して寸毫の豫備知識なくも本講座一讀に依つて鐵道の內容を悉く知ることを得。鐵道就職者は是非とも本講座の暗記を要す。鐵道局敎習所の受驗生は本講座一讀に依つて、口頭試驗の美事合格を保證す。

◇**鐵道國語講座** 第一篇試驗問題の講義—大正元年より昭和四年に倒るまで十七ケ年間全國の各鐵道局敎習所の試驗問題中最も重要なるものを拔出し、今後に於ても試驗に再び提出さるゝと豫想したる問題に對して懇切叮嚀なる講義を爲し居れり。特に語句解釋、語句の假名附け方、文の通譯、書取等一々區分して試驗の模範答案の如く解說を記載す。第二篇講讀法—獨學、那須與一高宗の扇の的、楠正成、書を讀む樂、旅行の樂の五章に別ち、語義、文意に區分して講義せり。講義の親切編輯の苦心讀者をして感嘆せしむ。

◇**鐵道算術講座** 大正元年より昭和四年に到るまで十七年間の全國鐵道局敎習所の試驗問題及本會講師の多年の經驗より得たる優秀問題に對して一々明細なる解釋を與へたるもの。算術の考へ方、學び方、研究の方法等實に懇切叮嚀なれば、算術のキライな者と雖も、何時か講義の面白さにて難問題を解答する事を得。

◇**鐵道漢文講座** 國語研究の補助として、漢文も講述す。諸言に漢文を學ぶ必要、漢文に就いて說明し、講義編には日本外史の平氏篇を主眼とす。讀方、語釋、講義に別ち、叮嚀至極の講義を爲せり。語釋の詳細ば本講座の特徵なれば局敎受驗生は必ず一讀せよ

◇**鐵道代數講座** 算術研究の補助として、代數も講述す。代數を全然知らざる者のため、最も初步より懇切叮嚀に講義を爲せり。師なくして充分に學ぶことを得。一元三次方程式の篇に於ては算術にて解くに困難なる問題も代數學にて解くことを得る最も簡便法も記載したり。

◇**鐵道作文講座** (作文についての注意事項)例へば表現の目的或は題意を考へること、すらすらと、わだかまりなく書くこと、言語、文字、普通文に對して講義を爲す(文例は口語體文例、文語體文例、書簡文體文例等三大別し、口語體文例は鐵道界に志せし所以、以下二十文例。文語體文例は「鐵道と通信」以下四十文例。書簡文體文例は「病氣のため鐵道局敎習所の試驗を受けざりし友に」以下五文例を掲載。掲載文は當代一流の文學博士、大學敎授、新聞社長、鐵道省高等官等二十有餘名の名士のものである

續編

◇**鐵道各編講座** 鐵道總論に於て鐵道の一般概念を講述し、本各論講座に於ては鐵道の手荷物、小荷物、運轉、通信、車輛、電話、貨物等官立の鐵道局敎習所にて敎育する學科全部の講義である。本講座の一讀は鐵道局敎習所の講師に依つて敎授を受くると同じ樣なものである。諸君は居ながらにして鐵道局敎習所の授業を受くることが出來る本講座の讀破後は鐵道局敎習所卒業生と同じ樣な鐵道の知識を得ることが出來るから鐵道に就職する場合に多大の影響がある。

◇**ローマ字講座** 鐵道員たらんとする者が學ばねばならぬローマ字である。そのローマ字を最も詳細に講義したる講座である。一讀後自分の姓名も易々として書け、各驛名も直ぐ讀むことが出來る。

◇**鐵道英語講座** 英語の初步のＡＢＣより中學四年程度まで講述したるものである。英文解釋、和文英譯、英文法會話、習字、聽取等英語に關する總ての講述である。日本鐵道敎育會編輯局の苦心の傑作は實に英語講座である。師なくしては獨學にて學び得られざるまで謂はれた英語の勉强が本講座では全然裏切つて講義の良方法に依れば英語を少しも知らぬ人が立派に英語が勉强出來ることを明確に表現して居る。

附錄

◇**鐵道受驗國語及歷史地理講座** 鐵道局敎習所受驗に最も必要なる國語及、日本歷史日本地理を、受驗問答的に講義したる講座である。

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

忽ち拾版

—必讀せよ—

鐵道局教習所の專門部・專修部・電信科・普通部を受驗せむとする諸君

□□□□□□□□

鐵道部内に就職せむとする諸君

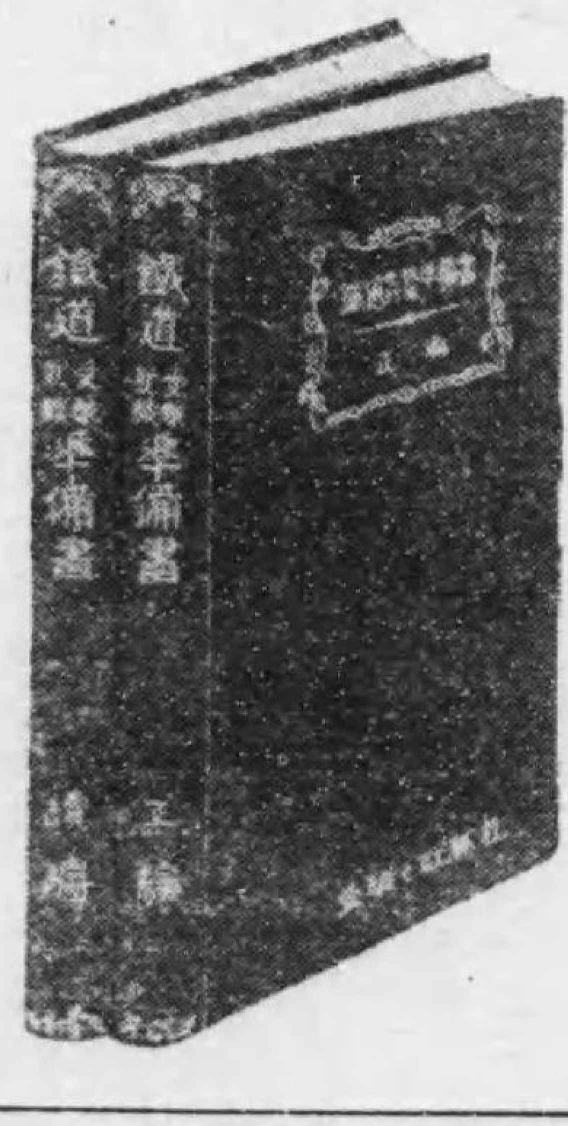
雇員採用試驗に應ぜむとする諸君

□□□□□□□□

車掌・車掌見習・機關手・機關助手・檢車手・檢車助手を志願する諸君

—必讀せよ—

鐵道受驗就職準備書



正編　定價金參圓（送料二十錢）

續編　定價金貳圓（送料十八錢）

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七八九四番　電話王子五六一番

遞信受驗唯一の著書

遞信官吏練習所（中學卒業程度）

遞信講習所（高等小學卒業程度）

普通科
高等科 を受驗する諸君よ

遞信受驗就職準備書

内容目次

- 遞信受驗算術講座
- 遞信特別算術講座
- 遞信受驗國語講座
- 遞信受驗作文講座
- 遞信受驗英語講座
- 遞信受驗ローマ字講座
- 遞信受驗代數講座
- 遞信受驗漢文講座
- 遞信受驗歷史講座
- 遞信受驗地理講座

一度の受驗で合格するには其の準備が最も肝要である。

それには本書を唯一の師として一ケ月間研究練磨せよ。

本書は　本書は

徹底せる講義書であり

模範的遞信界の參考書

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七八九四番　電話王子五六一番

鐵道局敎習所
受驗者の
通信模擬試驗執行

修業證書雛形

修業證書

右者日本鐵道敎育會講座ニ遵ヒ規ノ課程ヲ修業シタルコトヲ證ス

昭和　年　月　日

日本鐵道敎育會

◎諸君は金壹圓の模擬試驗料を送附して諸君の實力を練磨せよ　◎諸君は模擬試驗を受けて平均點六十點を得、名譽ある修業證書を受けよ　◎諸君は平均點數八十點以上を得る優等賞を受けよ　◎諸君が本會の優等賞を受くる實力あらば鐵道局敎習所の入所試驗は見事合格する事を保證す　◎諸君が本會の修業證書を受くるは諸君の實力ある事を證明する唯一の表徵である　◎諸君の修業證書は金錢で購つたものではない。諸君の實力で得たものではないか　◎諸君は未だ會て、眞の實力を檢査したることがあるか　◎諸君が模擬試驗を受くるは鐵道局敎習所の入所試驗を受くる一大指針である　◎鐵道受驗就職準備書を購讀したるものにして通信にて鐵道局敎習所模擬試驗に及第したるものには本會は職業證書を授與す。

規定

(一)模擬試驗科目　英語、算術、國語、作文の四科目

(二)模擬試驗程度　鐵道局敎習所電信科及普通部の入所試驗と同樣な程度

(三)模擬試驗標準　鐵道受驗就職準備書正編續編の内容記載のものを標準

(四)受驗資格　滿十四歳以上滿二十歳迄の男兒にて鐵道受驗就職準備書にて勉學せし者

(五)受驗法　金壹圓を、爲替或は振替貯金にて送金せし者に「遞信鐵道敎習所模擬試驗票」一を送附す

(六)模擬試驗　郵便にて、最初問題（印刷したるもの）を送附す、受驗者は答案を作製して本會に送附すべし、模擬答案を訂正採點の上送附す

(七)申込所　東京・十條驛前　受驗と就職社内遞信鐵道模擬試驗係のこと

遞信受驗生の羅針盤

◆日本遞信敎育會編◆　…大好評忽再版…

遞信官吏養成所 遞信局講習所 入學案內書 全

四六版洋製
定價 金壹圓五拾錢
送料十八錢

官費勉學の遞信官吏養成所及遞信講習所受驗生の入學案內として生れた「遞信入學案內書」は是非一讀しなければなりません。此書を讀まずに遞信界に受驗せんとして突進するは盲者が杖を持たずに山路を跋涉するが如く、失敗が必ずある。今直ぐ一讀せよ。

◎內容目次◎

教員受驗界唯一の準備書

小學校教員檢定受驗者及各府縣師範學校一部二部受驗者の必讀すべき

教員受驗就職準備書

⊠本書一册讀めばキット合格する⊠
⊠本書は合格出來る實力を養成⊠

四六版クロース箱入頗る美本
總頁數約七百頁
定價金參圓五拾錢　（送料廿錢）

【內容一斑】

◎小學校教員たらんとするには如何なる順序をたどるべきか
◎小學校教員の職務・待遇・昇進に關する記事
◎小學校教員檢定試驗に關する細大漏らさざる記事
◎師範學校入學志願者に關する記事
◎師範學校入學準備講座（算・國・作文）
◎最近の檢定規則及師範學校の校則一覽
◎最近の試驗問題及受驗案內

かゆい處に手がとゞく參考書

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一一番

警察受驗界唯一の準備書

警視廳警察練習所及地方各縣巡查教習所受驗者の必讀すべき

警察受驗就職準備書

⊠本書一册讀めばキット合格する⊠
⊠本書は合格出來る實力を養成⊠

四六版クロース箱入頗る美本
總頁數約七百頁
定價金參圓五拾錢　（送料廿錢）

【內容一斑】

◎警察官たらんとするには如何なる順序をたどるべきか
◎警察界の職務、待遇昇進に關する記事
◎警察練習所・巡查教習所の受驗方法
◎警察練習所・巡查教習所の受驗準備
◎國語の講座　◎地理の講座　◎歷史の講座
◎作文の講座　◎算術の講座
◎最近の試驗問題の解答及注意事項
◎各巡查教習所入學心得及志願者要覽

かゆい處に手がとゞく參考書

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一一番

◉鐵道受驗就職準備書を一度に購求出來ぬ諸君に一言呈す◉

鐵道受驗就職準備書の冊分として次の單行本が出現しました

鐵道局敎習所受驗講習會講師
開進英語學校主任講師 吉田先生著

初步 英語の一步一步

定價金八拾錢也（送料拾錢）

◉英語獨學者の最良書!!! ABCの初步より親切な講義！

編者曰く英語は邦語とは其の語系も異り文法も同じでないから初學者にとつては入り難く又解し難い所が甚だ多いのである。とは云へ、忍耐、刻苦其の勞をさへ惜しまねば又案外に速成し得らるゝものである、忍耐、刻苦の要を今更說くの必要はない。然し乍ら英語の獨習に於ては、その必要に大なるものがある。元來語學の研究は他人の口より自、己の耳に入れて記憶し反覆應用、初めて習熟し得るものであつて、筆に表はしたものを眼に入れて覺ゆべきものではない。故に本來から云へば語學は敎師なくして自修せんとするは誤りと云はねばならないのであるが、若し之を敎ふる者の解說は巧にしてよく口にする所を遺憾なく、筆に現はして學習者の了解を敏にし、記する處をよく理解せしめ、獨學者亦よく忍耐刻苦を厭ふ事なく常に絕えざる精勵を以て（小兒が邦語を覺ゆる時の如く急がずして而も倦まざる態度を以て）努むるに於ては必ず完全に習得し得るものである。

◉鐵道局敎習所受驗講習會數學部講師合著

自大正元年 至昭和貳年 各鐵道局敎習所電信科算術模範問題解答集

定價金六拾錢也（送料八錢）

◉鐵道局敎習所受驗講習會國語科講師合著

自大正元年 至昭和貳年 各鐵道局敎習所電信科國語模範問題解答集

定價金六拾錢也（送料八錢）

◆鐵道局敎習所の試驗に應ずる人
◆作文の下手で困つて居る人
◆手紙を上手に書きたい人
は必ず讀め!!

鐵道局敎習所
受驗講習會講師 山本先生著

作文の考へ方と文題集

定價金八拾錢也（送料拾錢）

編者曰く『作文は畢竟するに文字に依つて或る思想を表現する一の技術に外ならないのであるから、あまりやかましい理屈よりは先づ第一に練習である。』と。又曰く『無理に氣取つた書き方をしたり、殊更に六ケ敷い故事や熟語を引張り出して得意がつて、もそれは多くの場合失敗である。裸一貫、自分の力、自分の言葉でその言はんとする處を、氣取らずに、何の蟠りもなく、すら〳〵と書いて置く方がどれ程いゝか分らない。僞らざる自己の凡てを投出して正直に書くがよい。

【送金方法】

振替貯金なれば——東京七七八九四番 受驗と就職社宛

爲替なれば——必ず書留にて送金

振替より早く到着します

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

賣れる！ 飛ぶ樣に賣れる！

九ポイント新組

◉遞信講習所高等科・遞信官吏練習所・專檢・高檢・東京鐵道局敎習所專門部・陸軍士官學校・海軍兵學校 受驗者は必ず讀め

中學程度 代數解法及其着眼點

四六判箱入

定價金壹圓八拾錢也

（送料廿錢）

代數の參考書は書店の店頭には澤山並べられてあるどれを見ても、餘りに受驗的で、試驗問題の難問題の解答のみである。速成的に師なくして、代數の初步より中學卒業程度まで換言すれば整數、因數邊より、等差級數、等比級數對數まで懇切叮嚀に獨習者本位に講義したるものが、今日最も必要である。著者は——最初の一步より出來る限り懇切叮嚀に而も其の新式の解法と着眼點につき最も若心したるのが本書である。

必ず讀んで御覽なさい。キット代數は上達出來る。

—主要目次—

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

受驗と就職社

番號	書名	著譯者	定價	送料
一	鐵道受驗就職準備書 正編	日本鐵道敎育會	三・〇〇円	・二〇円
二	同 續編	同	二・〇〇	・二〇
三	遞信受驗就職準備書 正編	日本遞信敎育會	三・五〇	・二〇
四	同 續編	同	三・〇〇	・一八
五	敎育受驗就職準備書 全	受驗と就職社	三・五〇	・二〇
六	警察受驗就職準備書 全	同	三・五〇	・二〇
七	現代受驗就職大寶鑑 全	同	三・五〇	・二〇
八	鐵道局敎習所受驗通信講義全集	同	五・〇〇	・一八
九	官費學校遞信入學案內書	同	一・五〇	・一八
一〇	算術合格の秘訣 上卷	植松通文	一・二〇	・一八

發行所 東京・十條驛前 受驗こ就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

發行圖書一覽

番號	書名	著譯者	定價	送料
一一	同 中卷	同	一・二〇	・一八
一二	同 下卷	同	一・二〇	・一八
一三	中學程度代數解法及其着眼點	同	一・八〇	・二〇
一四	何でも鐵道のことならわかる鐵道一般學	日本鐵道敎育會	一・九〇	・二〇
一五	初等英語の一歩々々	吉田順則	・八〇	・〇八
一六	作文の考へ方と文題集	山本好三	・八〇	・〇八
一七	鐵道局敎習所電信科國語模範問題解答集	同	・六〇	・〇八
一八	鐵道局敎習所電信科算術模範問題解答集	同	・六〇	・〇八
一九	拾圓以下の資本で出來る新商賣及び內職の開業	小川忠三	一・五〇	・一八

發行所 東京・十條驛前 受驗こ就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

三五	戀愛心理の人々	中村古峽	一・三〇	・二〇	大阪屋號
三六	生れざりせば	沖野岩三郎	二・五〇	・二〇	同
三七	朝鮮語研究	山本正成	一・八〇	・二〇	同
三八	ペン青年書簡(正續編)	黑柳勳	一・六〇	・二〇	同
三九	圍碁勝敗此の一手	高橋清致	・九〇	・二〇	同
四〇	初心獨習將棋速成法	將棋新報社	・六〇	・二〇	同
四一	置碁秘傳 草薙の卷	雁金準一	一・四〇	・二〇	同
四二	最新六法全書(革製)	岡田朝太郎	二・〇〇	・二〇	岡村書店
四三	現代國語辭典	大町桂月	一・三〇	・二〇	同
四四	現代手紙大鑑	桑田春風	三・五〇	・二〇	同
四五	現代書翰文選	窪田空穗	一・八〇	・二〇	同
四六	新式珠算教本	神尾錠吉	・七五	・二〇	同
四七	音樂受驗者の爲めに	共益商社	一・三〇	・二〇	共益商社
四八	ヴイオリン奏法の秘訣	高階哲夫	一・八〇	・一〇	同
四九	(文官普通警部考試)能く出る問題と模範的な答案		一・五〇	・二〇	警眼社
五〇	藤村の歩める道	島崎藤村 山崎武	二・〇〇	・二〇	弘文社
五一	有島武郎の藝術と生涯	藤森成吉	一・七〇	・二〇	同
五二	猥談	井東憲 梅原北明	一・六〇	・二〇	同
五三	代書いらず注解諸願届書式大全	竹田英仁	一・六〇	・二〇	三進堂
五四	子孫寶典姓名獨判斷	海老名復一郎	一・〇〇	・二〇	同
五五	男女の性的研究	澤田順次郎	一・〇〇	・二〇	同
五六	掌中六法全書	至誠堂	二・二〇	・二〇	至誠堂
五七	掌中漢和新辭典	幸田露伴	一・八〇	・二〇	同

五八	井上ポケット英和辭典	井上十吉	三・三〇	・二〇	同
五九	井上ポケット和英辭典	同	二・八〇	・二〇	同
六〇	井上英和大辭典	同	五・八〇	・二〇	同
六一	井上英和中辭典	同	三・〇〇	・二〇	同
六二	井上和英中辭典	同	二・五〇	・二〇	同
六三	井上フオネチック英和辭典	同	三・〇〇	・二〇	同
六四	井上ハンデー英和辭典	同	二・五〇	・二〇	同
六五	一萬圓儲ける迄	實業日本社	一・七〇	・二〇	實業日本
六六	金の廻し方殖し方	長井修吉	一・七〇	・二〇	同
六七	利殖の問題 さて何れを選ばうか	同	一・五〇	・二〇	同
六八	新しい主義學說の字引	勝尾英造	三・〇〇	・二〇	同
六九	新しい法律知識の字引	河瀨蘇北	一・六〇	・二〇	同
七〇	新しい語原解釋の字引	服部嘉造	一・二〇	・二〇	同
七一	新しい時代語の字引	實業日本社	一・二〇	・二〇	同
七二	乃木と東鄉	高橋淡水	一・八〇	・二〇	下村書房
七三	東湖と象山	同	一・八〇	・二〇	同
七四	海舟と鐵舟	同	一・八〇	・二〇	同
七五	品川と雲井	同	一・八〇	・二〇	同
七六	大西鄉と大久保	同	一・八〇	・二〇	同
七七	大隈と山縣	同	一・八〇	・二〇	同
七八	陸奧と星	同	一・八〇	・二〇	同
七九	最新佛蘭西語獨修	前田越嶺	三・〇〇	・二〇	尙文堂
八〇	羅甸語初步獨修	同	二・八〇	・〇三	同

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

八一	哲學大系カントの哲學	松永城	三・八〇	・二〇	尙文堂
八二	新辭林	保科孝一	三・〇〇	・二〇	崇文堂
八三	文檢受驗用習字科研究の爲に	笠井義夫	二・五〇	・二〇	大同館
八四	同 圖書科研究の爲に	小堺宇市	二・五〇	・二〇	同
八五	同 生理衛生科研究の爲に	鈴木忠康	二・八〇	・二〇	同
八六	同 日本史東洋史研究の爲に	佐藤種治	三・五〇	・二〇	同
八七	文檢歷史科受驗法要解	小林博	三・五〇	・一〇	同
八八	文檢西洋史研究者の爲に	山上德信	四・八〇	・二〇	同
八九	文檢國語科研究者の爲に	石川誠	二・八〇	・二〇	同
九〇	文檢漢文科研究者の爲に	同	三・〇〇	・二〇	同
九一	文檢英語科研究者の爲に	伊東勇太郎	二・〇〇	・二〇	同
九二	高等教員檢定試驗國語科研究手引	檢定同志會	一・八〇	・二〇	同
九三	文檢受驗用國民道德要領	明治教育社	二・五〇	・二〇	同
九四	同 教育大意壇	同	二・五〇	・二〇	同
九五	壇上、紙上、街上の人	鶴見祐輔	二・七〇	・二〇	大日本雄辯會
九六	中道を歩む心	同	二・五〇	・二〇	同
九七	北米遊說記	同	二・五〇	・二〇	同
九八	永井柳太郎氏大演說集	大日本雄辯會	一・五〇	・二〇	同
九九	鶴見祐輔氏大講演集	同	二・二〇	・二〇	同
一〇〇	尾崎行雄氏大演說集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇一	賀川豐彥氏大講演集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇二	濱口雄幸氏大演說集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇三	谷本富氏大講演集	同	二・〇〇	・二〇	同

一〇四	加藤咄堂氏大講演集	同	二・〇〇	・二〇	大日本雄辯會
一〇五	犬養木堂氏大演說集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇六	高島米峰氏大演說集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇七	新井石禪氏大講演集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇八	高田早苗博士大講演集	同	二・〇〇	・二〇	同
一〇九	道重信教師大講演集	同	二・〇〇	・二〇	同
一一〇	青年雄辯集	同	二・〇〇	・二〇	同
一一一	泰西雄辯集	同	二・〇〇	・二〇	同
一一二	模範的式辭挨拶五分間演說集	同	二・〇〇	・二〇	同
一一三	ムッソリニ傳	澤田撫松	一・二〇	・二〇	同
一一四	プリュターク英雄傳	大山千代雄	一・〇〇	・二〇	東華堂
一一五	男女專檢受驗案內	受驗時代社	一・八〇	・二〇	同
一一六	普通文官受驗案內	同	一・七〇	・二〇	同
一一七	文檢各科實業教員檢定受驗案內	同	一・三〇	・二〇	同
一一八	最新全國看護婦受驗案內	森富	一・八〇	・二〇	同
一一九	最新全國產婆受驗案內	同	一・八〇	・二〇	同
一二〇	文檢各科受驗案內	中等教育社	二・八〇	・二〇	同
一二一	高等試驗口述問答集	第一輯	・六五	・二〇	弘文館
一二二	同	第二輯	・八〇	・二〇	同
一二三	高等各科辯護士試驗問題集	同	・七五	・二〇	同
一二四	資格認定專檢豫備試驗問題集	同	・六〇	・二〇	同
一二五	最近普通裁判所書記試驗問題集	同	・八〇	・二〇	同

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

受驗と就職社代理部取次書一覽

全國書籍商組合加入の信用ある書店發行名著を本社代理部で御取次致します

番號	書名	著譯者	定價	送料	發行所
一	正訂 算術學力增進法	松岡文太郎	円 二・五〇	円 ・二〇	青野書店
二	正訂 幾何學研究と受驗新法	松岡文太郎	二・〇〇	・二〇	青野書店
三	漢和新辭海	服部宇之吉	二・五〇	・二〇	淺見文林
四	教員生活の體驗	大元茂一郎	一・八〇	・二〇	同
五	獨習者の獨逸語	道部順	三・五〇	・二〇	郁文堂
六	簡易獨逸語自習書	石原質	一・八〇	・二〇	同
七	新獨逸語自修	早川文哉	一・三〇	・二〇	同
八	新川柳壹萬句集	川上三太郎	一・五〇	・二〇	陽甲堂
九	一平傑作集	岡本一平	三・〇〇	・二〇	同
一〇	食用鳩の飼ひ方	中村八郎	一・一〇	・二〇	博進堂
一一	必ず成功する 養鷄秘術雛の育て方	寺岡實博	一・二〇	・二〇	同
一二	三定式養鷄法	寺岡實博	一・五〇	・二〇	同
一三	草書日用語辭典	岸蘆風	・七五	・二〇	いろは書房
一四	實際上役に立つ實用書翰文	書翰文攻究會	一・一〇	・二〇	同
一五	家相寶鑑圖解	柄澤照覺	一・五〇	・二〇	永樂堂
一六	家相と方位の見方	松浦東楊	一・〇〇	・二〇	同
一七	選試參考高等數學	門一郎	三・八〇	・二〇	オーム社
一八	無線電信電話	中上豐吉 小野孝	五・五〇	・二〇	オーム社
一九	工業電熱	石川芳次郎	五・五〇	・二〇	同
二〇	新編水力發電	電氣學校	三・八〇	・二〇	同
二一	新編水力發電	同	四・〇〇	・二〇	同
二二	新編送電配電	同	四・〇〇	・二〇	同
二三	新編電氣機械 一編	電氣學校	四・二〇	・二〇	同
二四	同 同 二編	同	四・六〇	・二〇	同
二五	同 電氣通論 一編	同	四・三〇	・二〇	同
二六	新編 同 二編	同	四・三〇	・二〇	同
二七	新編電燈電熱	同	二・四〇	・二〇	同
二八	選試問題集	オーム社	二・〇〇	・二〇	同
二九	新式獨和大辭典	登張信一郎	五・五〇	・二〇	大倉書店
三〇	新譯露和辭典 ポケット判	同	二・八〇	・二〇	同
三一	オートバイ修繕と運轉	黑木蕃樹	三・〇〇	・二〇	同
三二	南洋に遊びて	遲塚麗水	二・〇〇	・二〇	大阪屋號
三三	女性と愛慾	田中香涯	二・三〇	・二〇	同
三四	愛慾に狂ふ痴人	同	一・八〇	・二〇	同

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

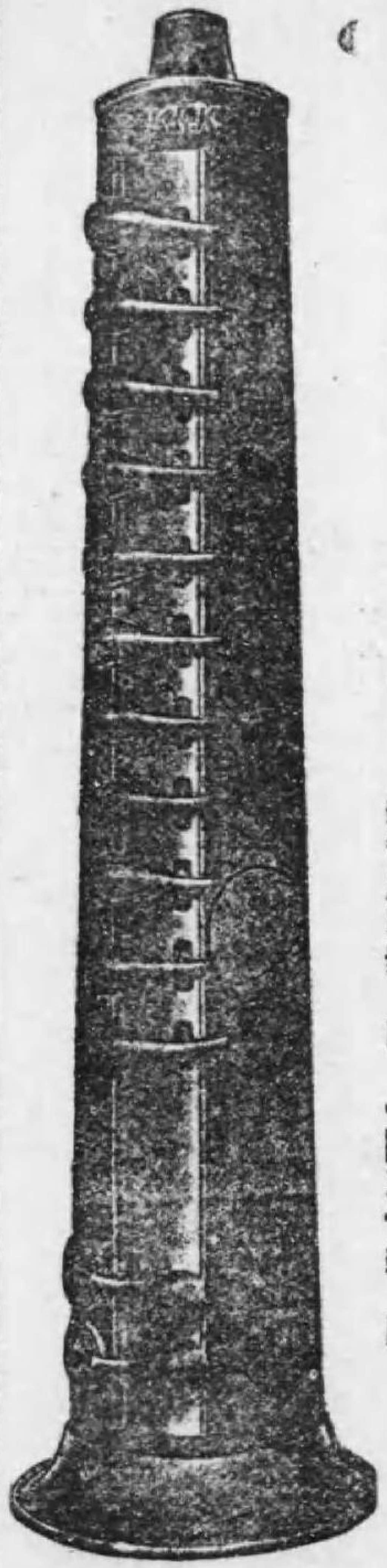
番號	書名	著譯者	定價	送料	發行所
一二六	性愛研究と初夜の知識	羽太鋭治	一・三〇	・二〇	南海書院
一二七	現代女性の性慾生活	同	一・三〇	・二〇	同
一二八	同春秘話	同	二・〇〇	・二〇	同
一二九	人肉異香	竹内讓	一・三〇	・二〇	同
一三〇	性的本能の眞相	澤田順次郎	一・三〇	・二〇	同
一三一	性の受難者	春樹繁	一・〇〇	・二〇	同
一三二	罪の子となるまで	前田誠孝	一・八〇	・二〇	同
一三三	性的誘惑の種々相	同	一・三〇	・二〇	同
一三四	自動車運轉手試驗問題集	秋野榮之助	一・七〇	・二〇	二松堂
一三五	自動車の實際知識	加藤正澄	三・五〇	・二〇	同
一三六	自動車操縱及調製法	白尾清次	三・五〇	・二〇	同
一三七	自動車運轉手と成る手引	里見時太郎	一・五〇	・二〇	同
一三八	中等教員農業科受驗提要	古瀬傳藏	二・〇〇	・二〇	同
一三九	柔道教範	坂山八段 大島四段	一・三〇	・二〇	同
一四〇	普通文官受驗全書	竹谷源太郎	三・五〇	・二〇	日英堂
一四一	巡查看守受驗案內	同	一・五〇	・二〇	同
一四二	巡查試驗問題模範答案集	杉本清作	一・〇〇	・二〇	同
一四三	考查試驗提要	竹谷源太郎	三・五〇	・二〇	同
一四四	最近飛行學原論	滑川昌章	一三・五	・二〇	自動車學校
一四五	自動車學講義	自動車學校	三・〇	・二〇	同
一四六	模範自動車試驗問題集	菅野勇	一・五〇	・二〇	同
一四七	生殖器新書	守矢新國	二・二〇	・二〇	博文館
一四八	結婚の危機	小田俊三	二・〇〇	・二〇	同
一四九	文藝大辭典	齋藤龍太郎	三・三〇	・二〇	文藝春秋社
一五〇	受難華(縮刷)	菊池寛	一・五〇	・二〇	同
一五一	新珠(縮刷)	同	一・五〇	・二〇	同
一五二	文檢教育大意	岡田治川	二・六〇	・二〇	文書堂
一五三	文檢國民道德要領	同	二・六〇	・二〇	同
一五四	諸稽古之心得	阪元雪馬	二・三〇	・二〇	わんや書店
一五五	鐵道工學大意	佐士原勳	四・五〇	・二〇	丸善株式會社
一五六	機械學通論	宮城音五郎	一一・五	・二〇	同
一五七	正解いろは引大辭典	物集高量	一・三〇	・二〇	芳文堂
一五八	文部檢定 國語漢文受驗提要	霜島勇氣男	二・〇〇	・二〇	同
一五九	一般電氣學	澤莊平	二・九〇	・二〇	同
一六〇	中學新作文辭典	大町桂月	一・三五	・二〇	富文館
一六一	音書・兩引新厚海	有馬祐致	一・六〇	・二〇	同
一六二	水彩スケッチの描き方	荻野光風	一・五〇	・二〇	同

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

専賣特許 川口音階式 KKKハーモニカ 新案特許

川口章吾先生御監製

ハーモニホン(寸法一尺立)



二十一穴(複音一圓五十錢 重音一圓六十錢)
二十二穴(複音一圓八十錢 重音二圓二十錢)
二十三穴(複音二圓 重音二圓五十錢也)
二十四穴(複音二圓五十錢 重音三圓也)

複音三號	定價三圓五十錢	送料一六錢
獨奏用五號	同二圓五十錢	同
練習用四號	同一圓五十錢	同

定價は從來通りで品質は見違へる樣に良くなりました。川口先生を始め一流のハーモニカ奏者は此のKKKを必ず御使用になります

川口章吾先生鑑製KKKハーモニカに就て御注意

一、ハーモニカKKKは川口先生の鑑製に係る底音4・高音7・3等ハーモニカとして極めて必要な音階が備つて居る樂器であつて他のハーモニカでは絶對に得られぬのであります。
二、KKKは品質大改良せられ而も上記の如き安値段でありますから番號と穴數をよく調べて代理部で買つて下さい。
三、注文の時は品代に送料を加へて御注文願いますれば、よき品を撰んで送ります。
四、近來いろ〳〵のハーモニカが出ますがKKK程完全な其して優秀なものが一つもありません。故に飽迄迷はずKKKを愛用して下さい。

ハーモニカ樂譜

ハーモニカ速習	定價一五	送料〇二
ハーモニカ獨習の友	同二五	同〇二
ハーモニカ讀本	同六〇	同〇四
ハーモニカ博士	定價六〇	送料〇四
ハーモニカ吹奏法	同八〇	同〇六
ハーモニカ吹方	同一六	同〇二

ハーモニカ修繕器 定價八十錢

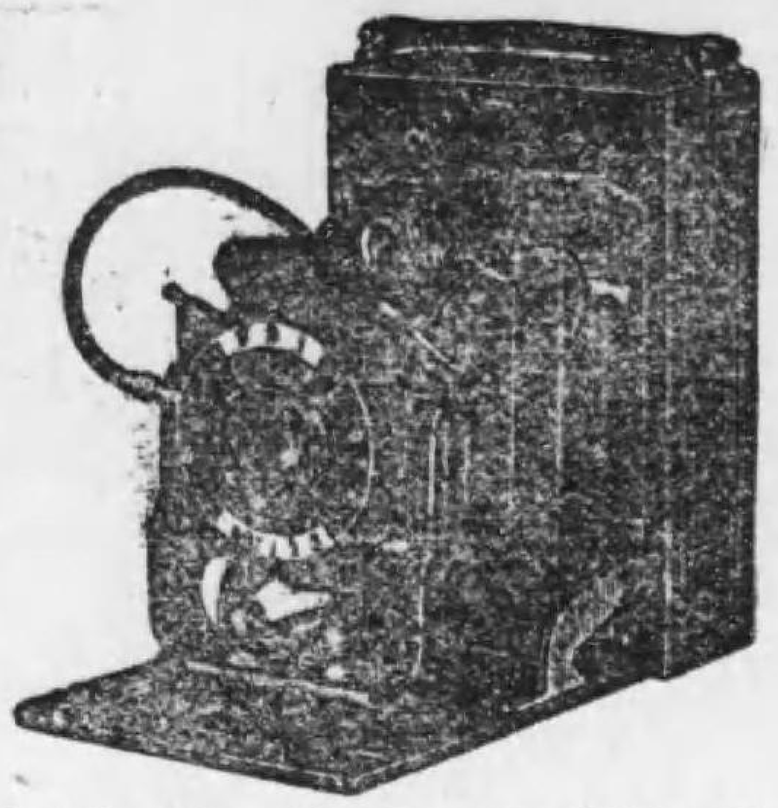
其他川口、松原、後藤諸氏のピース及新版樂譜續々發賣致居り候也

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

信用ある曾根春翠堂謹製品

體裁と實質と價格とに於て他の追從を許さぬ

イーストカメラ



東京カメラウオークスの奉仕的發奮に依つて新たに生れた學生用寫眞機で外部に金屬製シヤツターは速寫、バルブ、開放し等の自働式、レンズは例の「よく寫る要素」を應用した特種單玉に虹彩紋を備へ最大絞で軟焦點用、第二絞(1)以下で普通に極めて鮮鋭な描寫が出來ます。そして六センチ半に九センチの大名刺判乾板を入れる取枠三個と二吋四分の一、三吋四分の一のフヰルムパツクを使用するパシクホルダーが附屬された申分の無い出來榮であります。

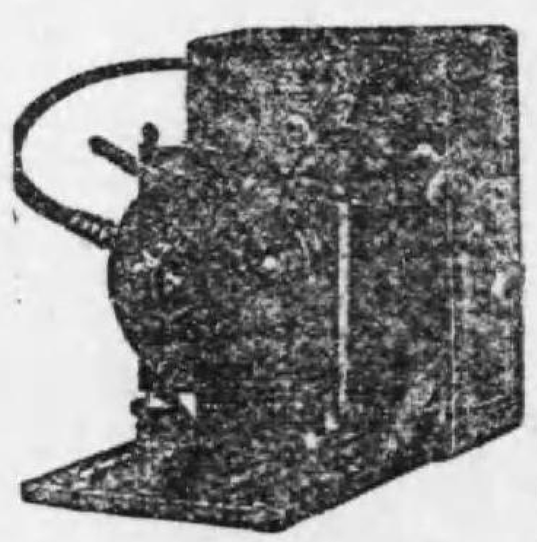
以上の一揃箱入で僅かに 金十五圓

別に取枠一個に付	金九拾錢
右用ロイド新乾板(一打)	金七十五錢
右用革鞄	金四圓

空前の新提供!!

◇不思議によく寫る◇
◇愛らして寫眞機◇

スヰートカメラ(手札四分の一判)



附屬用品共一揃御買上の方一千名樣限り

手札判引伸器 無料贈呈

寫眞機製造高空前のレコードを破つた本機六萬個突破の祝意を表す

カメラ、零番形取枠三個、板乾一打、現像紙一打、赤電球平皿二個、燒枠、原板掛、現像液三包、定着液六包、コツプ、臺紙一打、使用書。

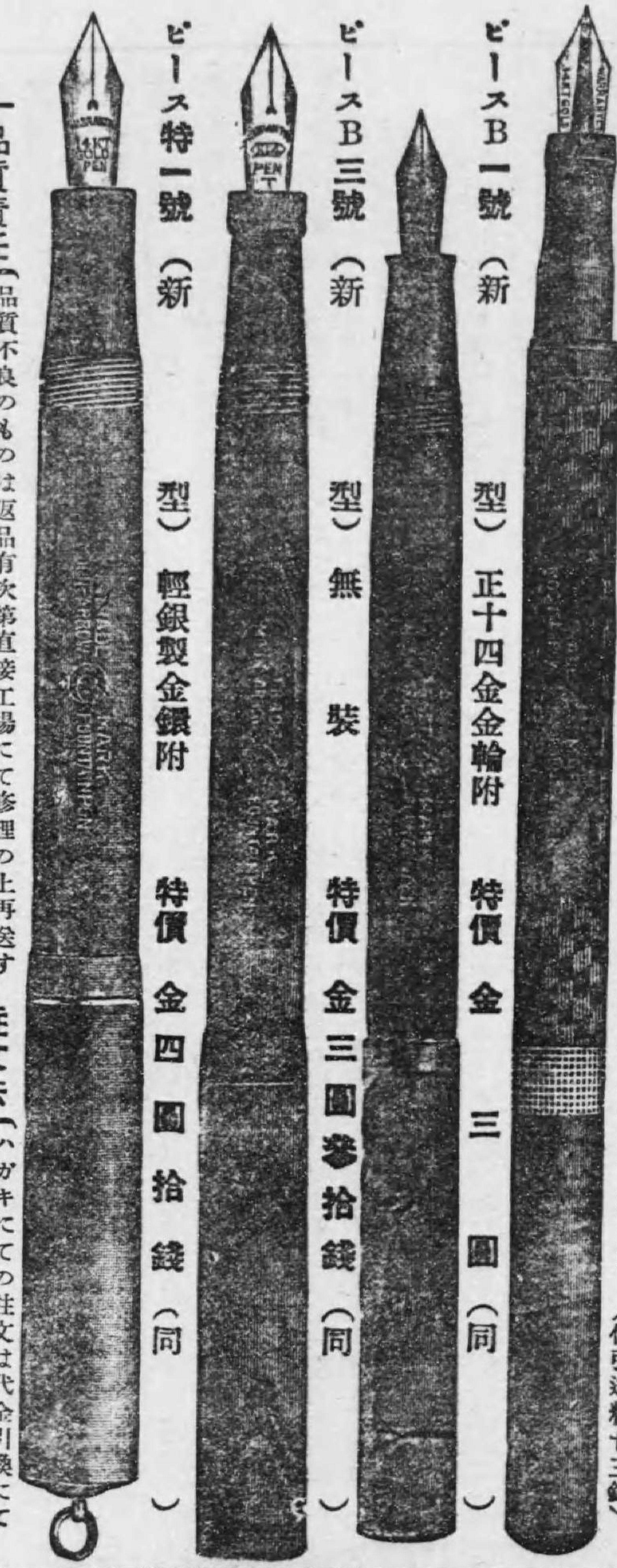
以上一揃金十圓御求めの方に引伸器定價金二圓及び臭素紙一打添呈。送料は市内二十六錢、内地五十錢、臺灣、樺太八拾四錢、朝鮮、滿洲一圓を加へて、振替又は爲替封入御送金下さい。

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一番

◈ステキに良く書けるピース高級萬年筆!!

ピース萬年筆の特徴

萬年筆の生命とする金ペンの硬度イリヂユームの裝置の如きは走筆上の快味に現はれ全然他の追從を許さず、其の堅牢にして耐久力に富み優美なる體裁と共に眞に實用上一頭地を擢んでたるこのピースをお奬めします。



ピースA一號（細軸徑三分三厘）無裝　特價金一圓九拾錢（前金送料十二錢 代引送料廿三錢）

ピースB一號（新型）正十四金金輪附　特價金三圓（同）

ピースB三號（新型）無裝　特價金三圓參拾錢（同）

ピース特一號（新型）輕銀製金鐶附　特價金四圓拾錢（同）

品質責任｛品質不良のものは返品有次第直接工場にて修理の上再送す
このピース萬年筆は大量製作販賣に付き市價の約三割安

註文法｛ハガキにての註文は代金引換にてお送りします、其時は送料が二十三錢かゝりますから御承知下さい。前金註文は振替か小爲替に願ひます。前金註文者は送料が十二錢であります。

陸軍海軍御用達　明治二十八年從軍紀念創業の皆兵合資會社工場製

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七八九四番　電話王子五六一一番

大日本帝國政府登録第五〇六二〇號

最大流行の文化的携帶品

月矢印シヤープペンシル

皆兵社工場謹製（携帶體上裁よく閃燦最も迅速鋭敏なる伯來品に優りて愛國的廉價なる）耐久無限體裁優美實用上便利經濟的にして一々尖端を削る煩なき

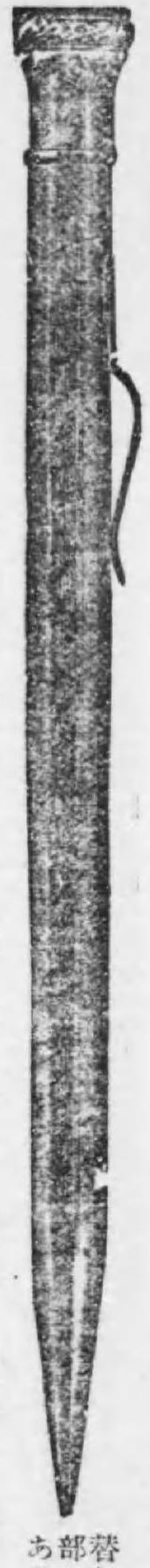
――◈金屬製繰出鉛筆◈――

□月矢シヤープ鉛筆は唯日本に一ツある分解式獨特優良、彼の有名なる世界的高級品と稱せらるゝ（エバーシヤープ）と同型同級、兄たり難く弟たり難く眞に實用的シヤープ界の覇王にして左の三大特長を有す。

一、構造の精緻　九個の部分品を組立てたものですから分解自由、精巧にして堅牢破損の虞なし（萬一損傷しても修理か出來ます）

一、繰出裝置の輕快　鉛芯の繰出裝置は獨特であります、雌螺旋と雄ネヂとの螺合進行の調子は申分ありません。

一、鉛芯把持裝置の微妙　鉛芯は左右前後些少の微動だにせず鉛芯に無駄を生ぜず最後の一分まで使用することが出來ます、



替鉛芯若干内部に收容しあります

◇A式（特許單管）

A〇號	ニツケル無地	特價金一圓
A一號	同　模樣附	特價金一圓二十錢
SA一號	ニツケル學用事務用	特價金五十錢

◇B式（特許双管）

B〇號	ニツケル無地	特價金一圓五十錢
B一號	同　模樣附	特價金一圓七十錢

發行所　東京・十條驛前　受驗と就職社　振替東京七八九四番　電話王子五六一一番

科學研究大家
小川忠三先生著

拾圓以下の小資本で出來る新商賣及び內職の開業

四六版・九ポイント新鑄組・總クロース・箱入り・金文字・頗る美本　定價壹圓五拾錢　送料貳拾錢

◇世の中は益々複雜となつて來た。就職難は各方面で叫ばれる。時事新報や東京日日新聞、東京朝日新聞國民新聞等の案內欄に五行の廣告で『人を求む』として、會社、銀行、商會等がたつた一日廣告すると、朝の六時といふに其の募集した、會社、銀行、商會に三百七八十名の人がワイ／＼とやつて來る人事の係りの者は一日、履歷書の整頓に二三人位は忙殺されてしまふといふ狀態だ。その人々の中には東京帝國大學を卒業した、法學士もあれば高等學校だけ卒業したもの、各種の大學の專門部大學部、を卒業したものが約半數以上に達するとのことである。

◇勿論中學校や商業學校卒業生はザラである。三百七八十名の採用申込者から大抵一、二名の採用をなれば三百七十有餘名の人が其の採用の落伍者となるのである。採用された人でも初任給はこの不景氣では四五十圓位のものとすれば、東京市內で生活するには相當、兩親或ひは兄姉からでも仕送りがなければ困難である。

◇といつて、勤人は駄目だ、何か商賣でも開業してみやうか――それには、家を借りる、商品を竝べるといつた樣な勘定で、それ相當な資本が無ければならぬ――イツタイどうしたらよいであらうか――

◇何の心配も苦勞も要りません、就職難もなければ大なる資本もいりません。タツタ十圓の資本があれば、世の中の人の考へない、今迄やつて居らないで必ず金儲けの出來る化學製造に依る販賣品がある。しかもゴロゴロころがつて居る。いつたい其の化學製造品とはどんなものか、靴クリーム製法、保存糊、蠶座紙、インキ、製圖用インキ、隱顯インキ、裝飾紙製造用塗料、自轉車の金屬部に使用すべき塗料、發光ペイント、中折帽子の洗濯法及び色揚法、美味飲料の製造法、家庭常備藥・齒磨、人造砥石、蠅取紙、アルミニユームの新合金、マグナリウム、アイスクリーム、研磨紙、研磨布、複寫紙、謄寫版用厚紙、消火劑、木材の電氣鍍金、マグネシヤセメント、石膏像、青色寫眞、清疊液、防水布、百度以下で溶解するハンダ製造法、鑢を鋭くする法、殺蟲劑、新鮮花の人工着色法、墨紙寫眞法等數十種に別る、新化學製造法を悉く記載したものである。

◇この數十項の製造法以外に著者は十圓以下の小資本で如何にして、成功するかの商法の極意を最も詳細に書き、讀者に對してこの製造法を知つた頭の活用法を嚙んで含めるやうに敎へて居る。

◇內職にでも結構、苦學勉強の一助にもよろしい、亦本職にやつても成功の出來る方法のみ記述したものであれば諸君の必讀すべきものである。然も著者は日頃この研究に沒頭して、他に何物も考へぬ熱心な大家である。著者は『說明についても勉めて平易にし何人にも解釋し易からしめ、又方法等は誤りを起さぬ樣に述べたつもりで出來得る限り、素人の方に間違ひの起らぬ樣にし、同時に何と何を加へたのはどうする爲で、化學的變化を起してどうなると云ふ理由迄書き添へてあると言つて居る。

●…一日も早く本書を一讀され生活の根本基礎を商業のコンクリートで堅められよ…

發行所　東京・十條驛前　受驗ご就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一番
發行所　東京・十條驛前　受驗ご就職社　振替東京七七八九四番　電話王子五六一番

本社出版部の

新刊

最新 代數の解法と其の着眼點

金壹圓八拾錢也
送料金貳拾錢也

『最新代數の解法と其着眼點』は、本社編輯局と綿引先生の苦心の著述である。內容は、代數學を初歩より研究せむとする人の爲、最も懇切叮寧に面白く講述したるもので、代數の解法や着眼點に特に注意したる新講義法は、本社專屬印刷所に於て新活字たる九ポ組と共に他書の追從を許さざるものである一寸解り難い數學を最も解り易く書いてあるのが本書の特徴である。代數研究者は一讀を要するものである

算術の研究を終つたならば代數の研究に轉ぜられよ
代數の研究には「最新代數の解法と其の着眼點」を讀まれよ

◎各學校の入學試驗に應ずる人よ
◎作文が下手で常に困つて居る人よ
◎手紙が上手に書きたいと思ふ人よ
諸君は必ず讀め!!

山本・古屋兩先生の著

再版

作文の考へ方と文題集

定價金八拾錢
送料拾錢

著者曰く『作文は畢意するに文字に依つて或る思想を表現する一の技術に外ならないのであるからあまりやかましい理屈よりは先づ第一に練習である。』と。又曰く『無理に氣取つた書き方をしたり殊更に六ケ敷、故事や熟語を引張り出して得意がつても、それ多くの場合は失敗である。裸一貫、自分の力、自分の言葉でその言はんとする處を氣取らずに何の矯りもなくすら〳〵と書いて置く方がどれ程いゝか分らない。僞らざる自己の凡てを投出し正直に書くがよい。』

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一一番

三大名著紹介欄

◇英語獨學者の最良書!
◇ABCの初歩より親切の講義!

開進英語學校主任教授 吉田先生著

忽三版 賣行絶大

初等 英語の一歩々々

定價金八拾錢
送料拾錢

英語の發音法・英語の習字
英語解釋法・英語の作文
英語の文法・英語の書取

▼タツタ八拾錢で英語が立派に讀めたり。書いたり。綴つたりが出來る▲
▼英語を勉强せむとすれば……「英語の一歩々々」……を必讀せられよ▲

著者曰く 英語は邦語とは其の語系も異り文法も同じでないから、初學者にとつて、は入り難く又解し難い所が甚だ多いのである。とは云へ忍耐刻苦の勞をさへ惜しまねば又案外に速成し得らるゝものである。忍耐刻苦の要を今更說くの必要はない。然し乍ら英語の獨習に於てはその必要に大なるものがある。元來語學の研究は他人の口より自己の耳に入れて記憶し反覆應用、初めて習熟し得るものであつて筆に表はしたものを眼に入れて覺ゆべきものではない。故に本來から云へば語學は教師なくして自修せんとするは誤りと云はねばならないのであるが、若し之を敎ふる者の解說巧にしてよく口にする所を遺憾なく筆に現はして學習者の了解を敏にし、記する處をよく理解せしめ、獨學者亦よく忍耐刻苦を厭ふ事なく常に絕えざる精勵を以て(小兒が邦語を覺ゆる時の如く急がずして而も倦ざる態度を以つて)努むるに於ては必ず完全に習得し得るものである。

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七七八九四番 電話王子五六一一番

川口式ハーモニカ全盛

日本樂器株式會社製
川口章吾先生御鑑製

――本社代理部には不正品は取扱ひません――

ハーモニカ界の最高權威

川口式「帝（ミカド）」二十一穴 二十三穴 ハーモニカ

川口章吾先生が御發明になり共して自ら御鑑製になつた日本樂器製造會社の川口式『ミカド』が出た低音に4・高音に・7・3等完備してありながら而も從來の音階配列法と大差がない。是れこそ日本一のハーモニカと云ふべきだ。川口式『ミカド』の獨特なる音量と其の耐久力とそキット諸君の滿足を充たすであらう。帝……ミカド販賣店は全國到る處にありますが本社代理部にすぐ振替で御註文願ひます。

二十一穴 定價金壹圓六拾錢
二十三穴 定價金貳圓貳拾錢

送料 ― 內地――十八錢 領土――四十錢

發行所 東京・十條驛前 受驗と就職社 振替東京七八九四番 電話王子五六一一番

終