

トナルカラ、 $r_0$  デ圓ノ中心 O カラ質點 P ニ向ツタ  
單位動徑ヲ表ハスト

$$\mathbf{R} = -m \left( \frac{v^2}{l} + g \cos \psi \right) \mathbf{r}_0 \quad (43.18)$$

トナル. (43.7), (43.8) ニ依テ

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2n^2 l^2 (\cos \psi - 1) \\ &= v_0^2 - 2gl(1 - \cos \psi) \end{aligned} \quad (43.19)$$

デアルカラ、之レハ

$$\mathbf{R} = -m \{ v_0^2/l - g(2 - 3 \cos \psi) \} \mathbf{r}_0 \quad (43.20)$$

トナル.

$v_0^2 = 4gl$  ノ場合ニハ

$$\mathbf{R} = -mg(2 + 3 \cos \psi) \mathbf{r}_0$$

トナリ、 $\cos \psi = -2/3$  ノトキ、即チ  $\psi$  ガ約  $131^\circ 48'$  ノトキ  
ニ  $R=0$  トナリ、圓周ハ拘束力ヲ働カサナイコトニナ  
ル。隨テ若シ質點ガ圓周ノ内部ヲ沿ツテ動イテキ  
ルトキ、或ハ單振子ノ様ニ圓ノ中心カラ絲デ吊サレ  
テキルトキニハ、上述ノ所デ質點ガ圓周ヲ離レルコ  
トニナル。質點ガ圓管内ヲ動イテキル如キ場合ニ  
ハ、尙ホ最高點ニ向ツテ進ンテ行クノデアアル。

#### 44. 鉛直面内ノ Cycloid 運動

質點ガ曲線上ニ拘束サレテ動イテキルトキ、其

ノ曲線ノ方程式ガ直角坐標等ヲ用キテ (35.11) ノ形  
デ表ハサレルトキハ、前節デ示シタ様ニ第35節ノ方  
法ヲ用キテ其ノ運動ヲ知ルコトガ出來ルガ、曲線ノ  
方程式ガ他ノ形デ與ヘラレテキルガタメニ、第35節  
ノ方法ヲ適用スルニ不便ナ場合ガアル。例ヘバ、質  
點ガ鉛直面内ニアル **Cycloid**<sup>(1)</sup> ト呼バレル曲線上ニ  
拘束運動ヲシテキルトシ、其ノ曲線ノ方程式ガ

$$s = 4a \sin \psi \quad (44.1)$$

デ與ヘラレタ様ナ場合デアアル。s ハ曲線上ノ一定  
點カラ曲線ニ沿フテ測ツタ任意ノ曲線上ノ點ニ至  
ル距離ヲ表ハシ、a ハ常數、 $\psi$  ハ其ノ點ニ於ケル曲  
線ヘノ切線ガ水平線トナス角ヲ表ハシテキルモノ  
デアアル。<sup>(2)</sup> 此ノ種ノ曲線ノ方程式ヲ其ノ陰方程式ト

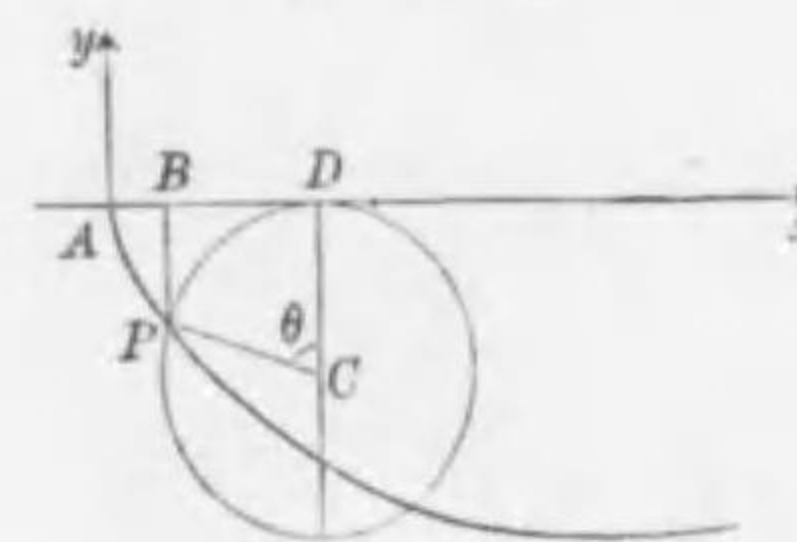
(1) 擺線トモ云フ。

(2) 此ノ曲線ハ半徑 a ノ圓ガ一直線上ヲ廻轉シテ行ツタトキニ、其ノ圓周上ノ一點  
ガ畫ク路ヲ示スモノデアアル。第36圖ニ於テ、ABD ヲ其ノ直線トシ、C ヲ廻  
轉スル圓ノ中心、P ヲ圓周上ノ一點トシ、始メ A ニ合シテキタトスル。A ヲ原  
點トシ AD ヲ x 軸トシ、之レニ垂直上方ニ y 軸ヲトル、CD ヲ鉛直線トシ、PC

ガ之レト爲ス角ヲ  $\theta$  トスル。P カ  
ラ x 軸ニ下シタ垂線ノ足ヲ B ト  
スル。圓カラ P 點ノ坐標トシテ

$$\begin{aligned} x &= AB \\ &= AD - BD \\ &= \widehat{PD} - BD \\ &= a(\theta - \sin \theta), \\ y &= -PB \\ &= -a(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

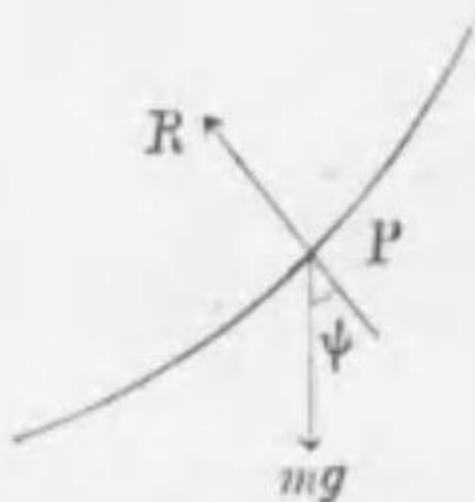
第 36 圖



稱シテキル。

此ノ種ノ場合ニハ、質點ノ運動方程式ハ曲線ノ切線ノ方向ト、其レニ垂直ナ方向ニ分ケテ取扱フノガ便利デアル。即チ加速度ヲ (14.8) ニ示ス切線加速度ト法線加速度トニ分チ、質點ニ働イテキル力モ其等ノ方向ニ分ツテ運動方程式ヲ作ル。

今ノ場合ニ、質點 P ニ働イテキル力ハ下方ニ向ツテ働イテキル重力ト、曲線ニ垂直デ其ノ曲率中心ニ向ツテ働イテキル拘束力 **R** トデアルカラ、質點ノ運動方程式ハ (14.5), (14.7) ヲ用キテ



ヲ得ル。随テ

$$dx = a(1 - \cos \theta) d\theta, \quad dy = -a \sin \theta d\theta,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1} = -\cot \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\theta} = -a \sin \theta, \quad \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\theta} = a(1 - \cos \theta)$$

ヲ得ル。  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  デアルカラ、最後ノ二式カラ

$$\frac{ds}{d\theta} = 2a \sin \frac{\theta}{2}$$

ヲ得、之レヲ積分シテ

$$s = C - 4a \cos \frac{\theta}{2}$$

ヲ得ル。  $dy/dx$  ハ P ノ畫ク曲線ノ切線ガ  $x$  軸ト爲ス角ノ正切ヲ與ヘルカラ  $dy/dx = \tan \psi$  トナル。故ニ  $\psi$  ト  $\theta$  トノ關係ハ

$$\tan \psi = -\cot \frac{\theta}{2} = \tan \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

デ與ヘラレル。随テ

$$s = C + 4a \sin \psi$$

トナル。  $\psi = 0$  ノ點カラ  $s$  ヲ測ルトスレバ  $C = 0$  トナル

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \psi, \quad (44.2)$$

$$m \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = R - mg \cos \psi \quad (44.3)$$

トナル。但シ曲率半径ヲ  $\rho$  デ表ハシタ。

(44.1) ノ關係ガアルカラ、(44.2) ハ

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{4a} s \quad (44.4)$$

トナル。之レハ (22.2) ト同形ノ微分方程式デアルカラ直チニ

$$s = \alpha \cos \left( \sqrt{\frac{g}{4a}} t + \epsilon \right) \quad (44.5)$$

ヲ得、此ノ質點ノ運動ガ

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}} \quad (44.6)$$

ノ週期ヲ有スル單振動デアルコトヲ示ス。  $\alpha, \epsilon$  ハ積分常數デ始メノ條件カラ決マル。

(44.6) ハ週期ガ振幅ニ無關係デアルコトヲ示シテキル。此ノ場合ハ  $s$  ノ大サ如何ニ拘ラズ單振動ヲスルノデアルカラ、單振子ノ場合ニ反シテ、完全ナ等時性ヲ有シテキル。<sup>(1)</sup>

質點ノ速サヲ  $v$  トスレバ、  $ds/dt = v$  デアルカラ、

(1) 此ノ性質ハ Huyghens ニ依テ發見サレタ。1673. 第38圖ノ cycloid ALE ノ曲率中心ノ軌跡、即チ捲付線ハ、其ノ最低點 L ノ直上デ  $4a$  ノ距離ニアル F ヲ通ル

(44.4) ハ

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{g}{4a} s \quad (44.7)$$

ト書ケル。之レヲ積分シテ

$$\begin{aligned} v^2 &= C - \frac{g}{4a} s^2 \\ &= C - 4ag \sin^2 \psi \end{aligned}$$

ヲ得ル。質點ガ静止状態カラ動き出シタ點ニ對スル  $\psi$  ヲ  $\psi_0$  トスルト

$$v^2 = 4ag (\sin^2 \psi_0 - \sin^2 \psi) \quad (44.8)$$

トナル。

曲率半径  $\rho$  ハ  $ds/d\psi$  デアルカラ, (44.1) = 依テ

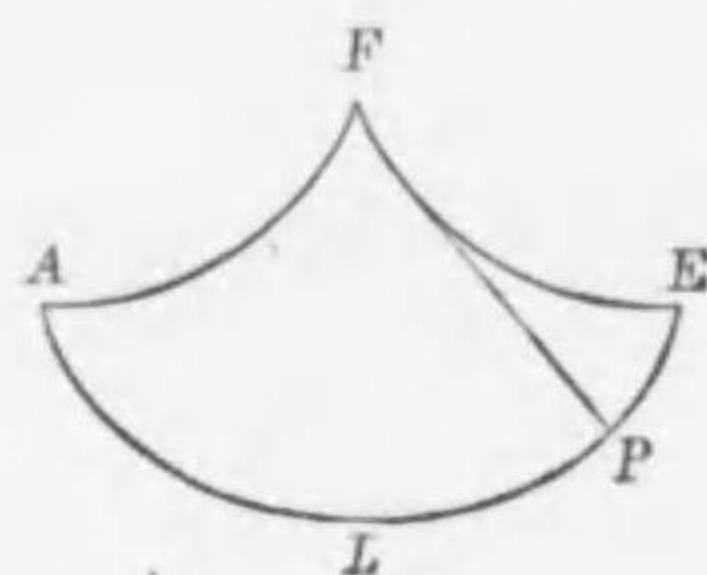
$$\rho = 4a \cos \psi \quad (44.9)$$

トナリ, (44.3) ハ (44.8), (44.9) = 依テ

$$R = mg \frac{\cos 2\psi + \sin^2 \psi_0}{\cos \psi} \quad (44.10)$$

トナル。

第 35 圖



元ノ cycloid ノ半分ニ等シイモノヲ接合シタ  $\triangle AFE$  デアルコトガ證明出來ル。故ニ  $F$  點カラ  $4a$  ノ長さノ絲ヲ質點ヲ吊シ cycloid 形ノ固體ヲ  $AFE$  ノ位置ニ置クト、コノ質點ハ  $ALE$  上ヲ動く様ニナル。此ノ様ヲ装置ヲ Cycloid 振子ト稱スル。

第 35 節ニ於テ拘束運動ニ就テ考ヘタトキハ、質點ガ表面若シクハ曲線上ニ拘束セラレテキルト言フコトノミヲ考ヘテ、表面若シクハ曲線ノ性質ニ就テハ少シモ考ヘナカッタ。併シ實際ニ物體ガ他ノ物體ノ上ヲ動く場合ニハ、其ノ運動ヲ阻止スル様ニ働ク力ガ現ハレル。其レヲ**摩擦力**ト稱シテキル。實驗ノ結果ニヨルト、摩擦力ノ大サハ拘束力ノ大サ  $R$  ニ比例シ  $\mu R$  デ表ハスコトガ出來ル。<sup>(1)</sup>  $\mu$  ハ其ノ表面ノ性質ニ依ルモノデ、乾イタ表面デハ略ホ常數トシ見テヨイモノデアリ、之レヲ**摩擦係數**ト呼ンデキル。 $\mu$  ガ極メテ小デ摩擦力ガ現ハレナイト見ラレル表面ヲ**滑力ナ表面**、 $\mu$  ガ大デ摩擦力ヲ考慮スル必要ノアル面ヲ**粗イ表面**ト稱スル。

Cycloid ガ粗イトシテ、質點ガ其ノ上ヲ落ちテ行く場合ニ就テ考ヘテ見ヨウ。此ノ場合ノ運動方程式ハ

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \mu R - mg \sin \psi,$$

$$\frac{m}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = R - mg \cos \psi$$

トナル。之等ノ式デ  $s$  ハ落ち始メタ點カラ測ルモ

<sup>(1)</sup> 此ノ關係ハ 1785 年 Coulomb = 依テ實驗的ニ見出サレタモノデアル。Charles Augustin Coulomb (1736—1806), 佛國ノ物理學、工學者。

ノトシテキルカラ,  $s$  ト  $\psi$  トノ關係ハ

$$s = 4a (\sin \psi - \sin \psi_0)$$

ト與ヘラレ. 隨テ運動方程式ハ (44.9) ヲ用キテ

$$m \frac{d}{dt} (4a \cos \psi \cdot \dot{\psi}) = \mu R - mg \sin \psi, \quad (44.11)$$

$$m \cdot 4a \cos \psi \cdot \dot{\psi}^2 = R - mg \cos \psi \quad (44.12)$$

ト書ケル.  $R$  ハ未知ノ量デアルカラ, 此ノ兩式カラ  
消去シテ

$$\frac{d}{dt} (\cos \psi \cdot \dot{\psi}) - \mu \cos \psi \cdot \dot{\psi}^2 = -\frac{g}{4a} (\sin \psi - \mu \cos \psi)$$

ヲ得ル.  $e^{-\mu\psi}$  ヲ兩邊ニ掛ケルト

$$\frac{d}{dt} (e^{-\mu\psi} \cos \psi \cdot \dot{\psi}) = -\frac{g}{4a} (\sin \psi - \mu \cos \psi) e^{-\mu\psi} \quad (44.13)$$

トナル.

$$(\sin \psi - \mu \cos \psi) e^{-\mu\psi} = \xi \quad (44.14)$$

トシ, 之レヲ  $t$  ニ就テ微分スルト

$$\frac{d\xi}{dt} = (1 + \mu^2) e^{-\mu\psi} \cos \psi \cdot \dot{\psi} \quad (44.15)$$

トナリ, 尙ホ一回微分シテ (44.13) ヲ用キ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g}{4a} (1 + \mu^2) \xi$$

ヲ得ル. 之レハ (44.4) ト同形ノ微分方程式デア  
カラ, 其ノ一般解トシテ

$$\xi = A \cos \left( \sqrt{g \frac{1 + \mu^2}{4a}} t + \beta \right) \quad (44.16)$$

ヲ得ル.  $A, \beta$  ハ始メノ條件カラ決マル積分常數  
デアル.

(44.16) ヲ  $t$  ニ就テ微分シ, (44.15) ヲ用キテ

$$(1 + \mu^2) e^{-\mu\psi} \cos \psi \cdot \dot{\psi} = -A \sqrt{g \frac{1 + \mu^2}{4a}} \sin \left( \sqrt{g \frac{1 + \mu^2}{4a}} t + \beta \right)$$

ヲ得ルガ, 質點ノ速サ  $v$  ハ  $4a \cos \psi \cdot \dot{\psi}$  デアルカラ, 之  
レハ

$$v^2 = \frac{4ag}{1 + \mu^2} A^2 \sin^2 \left( \sqrt{g \frac{1 + \mu^2}{4a}} t + \beta \right) e^{2\mu\psi}$$

ヲ與ヘ, (44.16), (44.14) ニ依テ

$$v^2 = \frac{4ag}{1 + \mu^2} \{ A^2 e^{2\mu\psi} - (\sin \psi - \mu \cos \psi)^2 \} \quad (44.17)$$

トナル.

$\psi$  ト  $t$ , 隨テ質點ノ位置ト時トノ關係ハ (44.14),  
(44.16) ヲ得ラレ,  $R$  ハ (44.12), (44.17), (44.9) ヲ用キ  
テ容易ニ得ラレル.

#### 45. Foucault 振子

重イ物體ヲ絲デ吊シテ, 其ノ絲ノ他端ヲ固定シ  
テ, 質點ヲ自由ニ動キ得ル様ニシテ置ケバ, 質點ハ其  
ノ絲ノ長サヲ半徑トスル球面上ニ運動ヲスル. 此  
ノ様ナ装置ヲ球振子ト稱スル.

絲ノ固定點ヲ原點トシ, 質點ノ直角坐標ヲ  $x, y$ ,

z トスルト, 拘束方程式ハ

$$\varphi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (45.1)$$

デアアル.

z 軸ヲ鉛直上方ニ向ツテトリ, 質點ノ質量ヲ m トスルト重力ハ

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -mg \quad (45.2)$$

デアアルカラ, 球振子ノ運動方程式ハ (35.5) = (45.1) ノ

φ 及ビ (45.2) ノ  $\mathbf{F}$  ヲ入レテ

$$-m\ddot{x} + 2\lambda x = 0,$$

$$-m\ddot{y} + 2\lambda y = 0,$$

$$-mg - m\ddot{z} + 2\lambda z = 0$$

トナル. 之等ヲ第35節ニ示シタ方法ニ依テ解イテ球振子ノ運動ヲ知ルコトガ出來ルノデアアルガ, 此ノ球振子ガ地球上ニアルモノトシ, 地球ガ廻轉シテキルコトモ考慮ニ入レテ, ドノ様ナ運動ヲスルカヲ考ヘテ見ヨウ.

其ノタメニ先ヅ, 坐標系ガ z 軸ヲ軸トシテ  $\omega \mathbf{k}$  ノ等角速度ヲ廻轉シテキルトスレバ, (29.8) = 依テ, ソウシテ其レト同理ニ依テ拘束力モ見掛ケノカトシテ取扱ツテ

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c + \mathbf{R}$$

トシ, (29.9), (29.10), (35.7), (45.1), (45.2) ヲ用キテ

$$m\mathbf{a} = -\mathbf{k}mg - m\omega[\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{r}]] - 2\omega[\mathbf{k}\mathbf{v}] + 2\lambda\mathbf{r},$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} -\ddot{x} + 2\omega\dot{y} + \omega^2x + 2\lambda x/m &= 0, \\ -\ddot{y} - 2\omega\dot{x} + \omega^2y + 2\lambda y/m &= 0, \\ -\ddot{z} + 2\lambda z/m - g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45.3)$$

ヲ此ノ場合ノ質點ノ運動方程式トシテ得ル.

(45.3) ノ各式ニソレゾレ  $-\dot{x}$ ,  $-\dot{y}$ ,  $-\dot{z}$  ヲ乗ジタモノヲ加ヘ合セテ

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} - \omega^2(x\dot{x} + y\dot{y})$$

$$- 2\frac{\lambda}{m}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + g\dot{z} = 0$$

ヲ得ル. 然ルニ (45.1) = 依テ

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$$

デアアルカラ, 上式ハ

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) - \omega^2 \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) + 2g \frac{dz}{dt} = 0$$

トナル. 故ニ質點ノ速サヲ  $v$  トスレバ, 上式ヲ積分シテ

$$v^2 - \omega^2(x^2 + y^2) + 2gz = A \quad (45.4)$$

ヲ得ル. 但シ A ハ積分常數デアアル.

(45.3) ノ第一式ニ  $y$  ヲ乗ジタモノカラ, 第二式ニ  $x$  ヲ乗ジタモノヲ引クト

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} + 2\omega(y\dot{y} + x\dot{x}) = 0$$

ヲ得, 之レヲ積分シテ

$$x\dot{y} - y\dot{x} + w(x^2 + y^2) = B \quad (45.5)$$

ヲ得ル。Bハ積分常數デアル。

直角坐標ノ代リ極坐標ヲ用キ

$$\left. \begin{aligned} x &= l \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= l \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= l \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (45.6)$$

トスルト

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l^2 \sin^2 \theta, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \\ v^2 &= l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

トナルカラ, (45.4), (45.5)ハ

$$l^2 \dot{\theta} + l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - l^2 \sin^2 \theta w^2 + 2gl \cos \theta = A \quad (45.7)$$

$$l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + l^2 \sin^2 \theta w = B \quad (45.8)$$

トナル。

$$l \sin \theta = r, \quad \theta = \pi - \delta$$

トシ,  $\delta$ ハ極メテ小サク

$$\sin \delta = \delta, \quad \cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

トシテヨイモノト考ヘヨウ。即チ振子ノ振幅が大デナイトスル。此ノ様ナトキニハ

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) \cong \pi - \theta = \frac{r}{l}, \quad (45.9)$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta) \cong -1 + \frac{(\pi - \theta)^2}{2} = -1 + \frac{r^2}{l^2},$$

トシテヨイカラ, (45.7), (45.8)ハ

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - r^2 w^2 - 2gl + g \frac{r^2}{l} = A,$$

$$r^2 \dot{\varphi} + r^2 w = B$$

トナル。

質點ガ静止ノ状態ニアルトキヲ  $t=0$ トシ, 其ノ時ニ  $r=r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ デアルトスレバ

$$A = -r_0^2 w^2 - 2gl + g \frac{r_0^2}{l},$$

$$B = r_0^2 w$$

トナルカラ

$$g/l = n^2 \quad (45.10)$$

トスレバ

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - r^2 w^2 + n^2 r^2 = -r_0^2 w^2 + n^2 r_0^2,$$

$$r^2 \dot{\varphi} + r^2 w = r_0^2 w \quad (45.11)$$

ヲ得ル。此ノ兩式カラ  $\dot{\varphi}$ ヲ消去シテ

$$(r\dot{r})^2 = -r^4 n^2 + r^2(n^2 + w^2)r_0^2 - r_0^4 w^2 \quad (45.12)$$

ヲ得ル。之レヲ零ニ等シクセシメル  $r$ ノ値ヲ  $r_1, r_2$

トスルト

$$r_1^2 = r_0^2 w^2 / n^2, \quad r_2^2 = r_0^2 \quad (45.13)$$

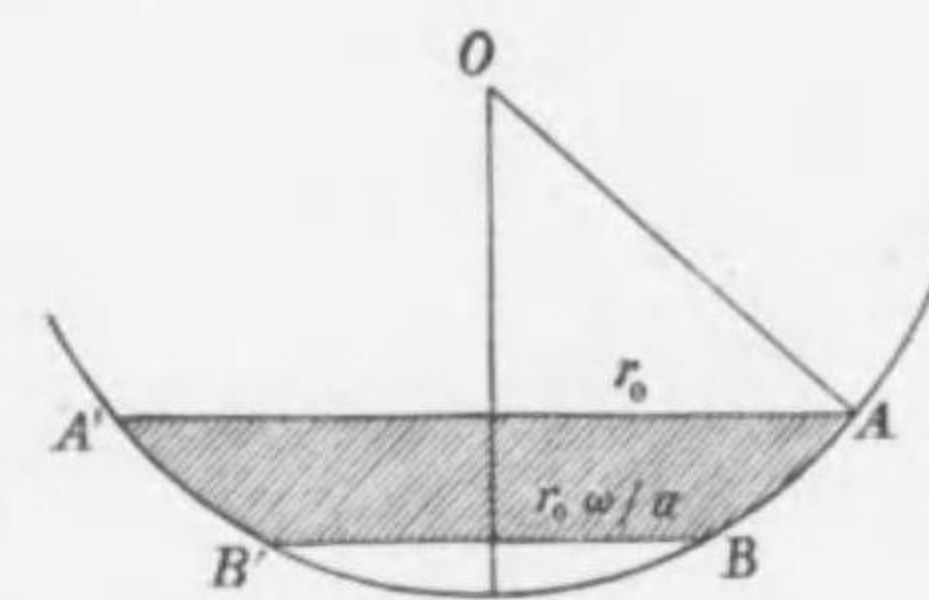
ヲ得ル。此ノ  $r_1, r_2$ ハ  $r$ ノ

極大値及ビ極小値デアル。

隨テ質點ハ  $z$ 軸ヲ軸トシ,

$r_1, r_2$ ヲ半徑トスル圓帶

第 39 圖



ABB'A' ノ中ニ運動スルモノデアアルコトガ分カル。

(45.12) ハ

$$\begin{aligned}(r\dot{r})^2 &= -n^2(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) \\ &= -n^2r^4 + n^2(r_1^2 + r_2^2)r^2 - n^2r_1^2r_2^2 \\ &= -n^2\left(r^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right)^2 + n^2\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)^2\end{aligned}$$

トナルカラ

$$r^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)R \quad (45.14)$$

トスルト

$$2r\dot{r} = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\dot{R},$$

$$(r\dot{r})^2 = n^2\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)^2(1 - R^2),$$

$$\therefore \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{4}\dot{R}\right)^2 = n^2\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)^2(1 - R^2),$$

$$\frac{\pm dR}{\sqrt{1 - R^2}} = 2n dt$$

ヲ得ル。  $t=0$  ノトキニ  $r=r_0$  デアツテ、之レガ  $r$  ノ極大値デアアルカラ、  $\frac{dr}{dt} < 0$  デナケレバナラヌ。ソウシテ  $\frac{dR}{dr} = \frac{4r}{r_1^2 - r_2^2} < 0$  デアルカラ、  $\frac{dR}{dt} > 0$  デナケレバナラヌ。故ニ

$$2n dt = \frac{dR}{\sqrt{1 - R^2}}$$

ヲ得ル。之レヲ積分シテ

$$2nt = \sin^{-1} R + C$$

$$= \sin^{-1} \frac{2r^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + C$$

ヲ得ル。  $C$  ハ積分常數デアアル。

$t=0$  ノトキニハ、  $r=r_0=r_2$  デアルカラ

$$C = -\sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2}$$

トナル。故ニ

$$2nt = \sin^{-1} \frac{2r^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \frac{2r^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} = \sin\left(2nt - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\cos 2nt$$

$$= \sin^2 nt - \cos^2 nt,$$

随テ

$$r^2 = r_1^2 \sin^2 nt + r_2^2 \cos^2 nt \quad (45.15)$$

ヲ得ル。

(45.11) = (45.15) ノ  $r^2$  ノ値ヲ代入シテ

$$\dot{\varphi} + w = \frac{w}{\cos^2 nt + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sin^2 nt} \quad (45.16)$$

ヲ得ル。

$$\varphi + wt = \psi, \quad \tan nt = \tau$$

トスルト

$$(\dot{\varphi} + w)dt = d\psi, \sec^2 nt dt = d\tau/n$$

デアルカラ, (45.16) ハ

$$d\psi = \frac{w}{n} \frac{d\tau}{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \tau^2}$$

トナリ, 之ヲ積分シテ

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{w}{n} \frac{r_2}{r_1} \tan^{-1}\left(\frac{r_1 \tau}{r_2}\right) + D \\ &= \tan^{-1}(w\tau/n) + D \end{aligned}$$

ヲ得ル.  $t=0$  ノトキニ  $\varphi=0$  デアルトスルト  $D=0$

トナルカラ

$$\tan(\varphi + wt) = \frac{w}{n} \tan nt$$

ヲ得ル. 随テ

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi + wt) &= \frac{\frac{w}{n} \tan nt}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{n}\right)^2 \tan^2 nt}}, \\ \cos(\varphi + wt) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{n}\right)^2 \tan^2 nt}} \end{aligned} \right\} \quad (45.17)$$

ヲ得ル.

$$\xi = r \cos(\varphi + wt), \quad \eta = r \sin(\varphi + wt) \quad (45.18)$$

トスルト

$$\xi^2 = r^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{n}\right)^2 \tan^2 nt}, \quad \eta^2 = r^2 \frac{\left(\frac{w}{n}\right)^2 \tan^2 nt}{1 + \left(\frac{w}{n}\right)^2 \tan^2 nt}$$

トナルカラ, (45.15) ノ  $r^2$  ノ値ヲ置キ換ヘテ

$$\xi^2 = r_2^2 \cos^2 nt, \quad \eta^2 = r_1^2 \sin^2 nt \quad (45.19)$$

ヲ得ル. 随テ  $t$  ヲ消去シテ

$$\frac{\xi^2}{r_2^2} + \frac{\eta^2}{r_1^2} = 1 \quad (45.20)$$

トナルカラ,  $\xi\eta$  平面内デハ, 質點ハ  $\xi, \eta$  ヲ軸トシ,  $\xi$  ノ方ニ  $r_2$  ノ半長徑,  $\eta$  ノ方ニ  $r_1$  ノ半短徑ヲ有スル楕圓ヲ畫クコトガ知ラレル.

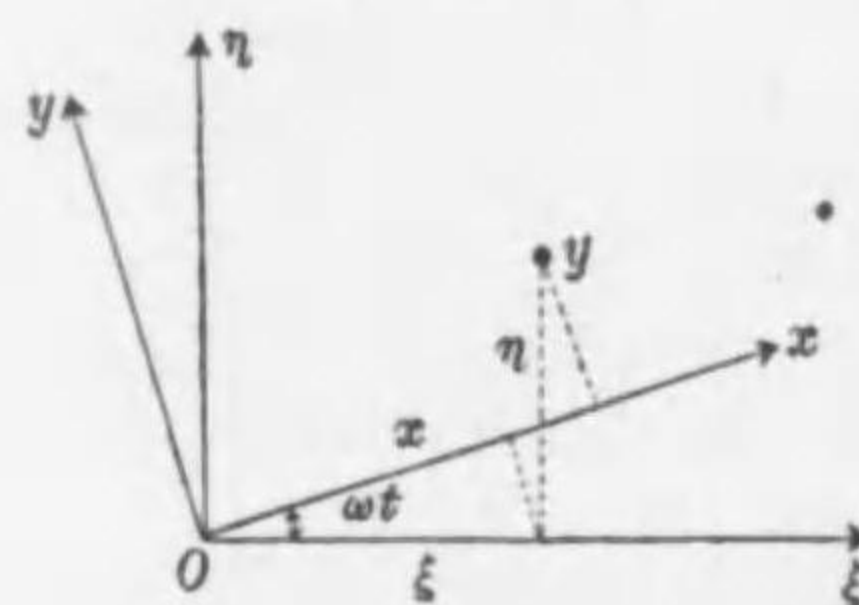
(45.18), (45.10), (45.7) = 依テ

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi \cos wt - r \sin \varphi \sin wt, \\ \eta &= r \sin \varphi \cos wt + r \cos \varphi \sin wt, \\ \xi &= l \sin \theta \cos \varphi \cos wt - l \sin \theta \sin \varphi \sin wt, \\ \eta &= l \sin \theta \sin \varphi \cos wt + l \sin \theta \cos \varphi \sin wt, \\ \xi &= x \cos wt - y \sin wt, \\ \eta &= x \sin wt + y \cos wt \end{aligned} \right\} \quad (45.21)$$

トナルカラ

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos wt + \eta \sin wt, \\ y &= -\xi \sin wt + \eta \cos wt \end{aligned} \right\} \quad (45.22)$$

第40圖



ヲ得ル. 第40圖カラ明カナ様ニ  $xy$  坐標系ハ  $\xi\eta$  坐標系ニ對シテ  $+wk$  ノ角速度テ廻轉シテキル. 故ニ  $O\xi\eta\zeta$  ( $O\xi\eta z$ ) ハ, 其レニ對シテ  $Oxyz$  坐標



系ガ  $+wk$  ノ角速度デ廻轉シテキル静止坐標系デア  
アル。隨テ  $Oxyz$  坐標系ニ對シテハ  $O\xi\eta$  坐標系ハ  
 $-wk$  ノ角速度デ廻轉シテキル。

我ガ地球ハ地軸ヲ軸トシテ、日々西カラ東ノ方  
ニ一定ノ角速度デ廻轉シテキルノデアアルカラ、振子  
ノ支點ガ地軸上ニアルトシ、 $z$  軸ハ地軸ト一致シ、  
 $Oxyz$  系ガ地球ト共ニ廻轉シテキルトスレバ、之レ迄  
ニ得タ結果ガ其ノ儘ニ當テハマルベキ筈デアアル。  
故ニ絲デ吊サレタ質點ノ水平面上ヘノ射影ハ、其ノ  
軸ガ地球ノ廻轉ト反對ノ方向ニ等速デ廻轉スル  
(45.20) デ示サレル楕圓ヲ畫クコトニナル。此ノ楕  
圓ノ軸ハ、極デハ一日デ一周スル。北半球ノ緯度  $\psi$   
ノ點デハ、地球ノ廻轉速度ノ其點ニ於ケル鉛直線ニ  
關スル分値ガ  $w \sin \psi$  トナルカラ、此ノ楕圓ノ軸ハ東  
カラ南、南カラ西、西カラ北ト云フ方向ニ  $24/\sin \psi$  時間  
デ一廻轉ヲスルコトニナル。

若シ  $r_1 = r_0 w/n = r_0 w \sqrt{l/g}$  ヲ極メテ小ニシ、殆ド  
零ニ等シクナル様ニシタナラバ、(45.19) ハ

$$\xi = r_0 \cos nt, \eta = 0 \quad (45.23)$$

トナリ、質點ガ  $z$  軸上ニ  $r_0$  ヲ振幅トスル單振動ヲス  
ルコトヲ示ス。故ニ此ノ場合ニハ、振子ハ一ツノ鉛  
直面内ニ振動シテ、其ノ振動平面ガ地球ノ廻轉ト反

對ノ方向ニ廻轉シテキル様ニ現ハレル。

此ノ様ナ現象ノアルベキコトハ、1850年ニ **Fou-**  
**cault** ニ依テ見出サレタノデ、此ノ現象ヲ見得ル様  
ニシタ装置ヲ **Foucault 振子** ト稱スル。<sup>(1)</sup>

Kamerlingh-Onnes ガ 1879 年ニ Groningen デ精密ニ  
實驗シタトコロニ據ルト、振動面ノ一時間ノ廻轉角  
度トシテ、 $12.04^\circ$  及ビ  $11.99^\circ$  ヲ得テキル。同所ノ  $\psi$   
カラ、算出シタ値ハ  $12.03^\circ$  トナルノデアアルカラ、實際  
ト相當ニヨク一致シテキルト云ツテヨイ。

#### 46. 遊星運動

**Tycho Brahe** <sup>(2)</sup> ガ遊星 <sup>(3)</sup> ノ運動ニ就テ觀測シテ得  
タ結果ヲ研究シテ **Kepler** <sup>(4)</sup> ハ次ノ三法則ヲ發見シタ  
之レヲ **Kepler ノ法則** <sup>(5)</sup> ト稱シテキル。

第一法則. 遊星ノ太陽ニ關シテノ位置 vector ハ、  
同時間内ニ同大面積ヲ畫ク。

第二法則. 遊星ノ軌道ハ太陽ヲ焦點トスル楕圓

(1) Jean Bernard Léon Foucault (1819—1868), 佛國ノ物理學者. Foucault ガ最初ニ  
用キタ振子ハ直徑 1mm, 長サ 2m ノ鋼線デ 5kg ノ質點球ヲ吊シタモノデアアル。

(2) 1546—1601. Denmark ノ星學者。

(3) 惑星トモ云フ。

(4) Johann Kepler (1571—1630), 獨逸ノ星學者。

(5) 第一法則及ビ第二法則ハ 1609 年ニ、第三法則ハ 1619 年ニ發表セラレタノデ  
アル。正確ニハ第三法則ハ少シク修正ヲ要スル。之レニ就テハ第 62 節ヲ參照  
セヨ。

デアル。

第三法則、二遊星ノ週期<sup>(1)</sup>ノ自乗ハ其ノ軌道ノ半長徑ノ三乗ニ比例スル。

此ノ事實ヲ基礎トシテ、遊星ニハ如何ナルカガ働イテキルカニ就テ研究シテ見ヨウ。

Kepler ノ第一法則ハ、遊星ノ面積速度ガ一定デアルコトヲ言ヒ表ハシテキル。故ニ此ノ面積速度ヲ  $c$  トスルト、(40.1)ニ依テ

$$[rv]=2c \quad (46.1)$$

トナル。  $r$  ハ太陽ニ關シテノ遊星ノ位置 vector,  $v$  ハ其ノ速度デアアル。

(46.1)ヲ  $t$ ニ就テ微分シテ

$$\frac{d}{dt}[rv]=0$$

ヲ得ル。  $\frac{dr}{dt}=v$ デアリ、 $[vv]=0$ デアルカラ、之レハ

$$\left[r\frac{dv}{dt}\right]=0 \quad (46.2)$$

ト書クコトガ出來ル。

遊星ノ質量ヲ  $m$  トシ、之レニ働イテキル力ヲ  $F$  トスルト、其ノ運動方程式ハ

$$m\frac{dv}{dt}=F \quad (46.3)$$

デアアル。之レニ  $r$ ヲ vector 的ニ掛ケテ

<sup>(1)</sup> 遊星ガ其ノ軌道ヲ一周スルニ要スル時間ヲ遊星運動ノ週期ト言フ。

$$m\left[r\frac{dv}{dt}\right]=[rF]$$

ヲ作ツテ見ルト、此ノ左邊ハ (46.2)ニ依テ零ニ等シイカラ

$$[rF]=0$$

トナリ、 $F$ ト  $r$ トガ同方向若シクハ反對ノ方向ヲ有スル vector デアルコトヲ示シテキル。此ノ様ナ場合ニハ、 $F$ ヲ中心力ト稱スル。

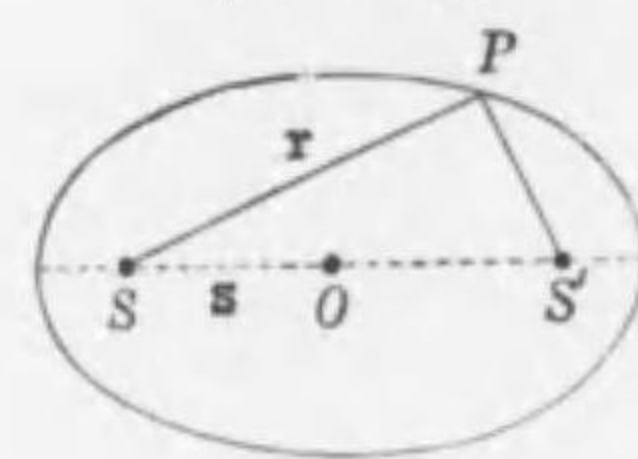
遊星ハ太陽ヲ周轉シテ、決シテ之レカラ離レ去ラナイカラ、太陽ノ方ニ引カレテキルト見ルノガ自然デアアル。故ニ

$$F=-f(r)r \quad (46.4)$$

ト假定シヨウ。  $r$ ハ遊星ノ太陽ニ關シテノ位置 vector ヲ表ハシ、 $f(r)$ ハ太陽カラ遊星ニ至ル距離  $r$ ノ未知函數ヲ表ハシテキル。此ノ  $f(r)$ ハ第二、第三法則ニ依テ求メナケレバナラナイモノデアアル。

第41圖ノ楕圓ハ遊星ノ軌道ヲ表ハスモノトシ、

第 41 圖



$P$ ヲ遊星、 $S$ ヲ太陽、 $S'$ ヲ楕圓ノ他ノ焦點、 $O$ ヲ楕圓ノ中心トシヨウ。  $\vec{SO}=\vec{s}$ トスレバ圖カラ明カナ様ニ

$$\vec{S'P}=\vec{r}-2\vec{s}$$

デアアル。楕圓ノ半長徑ヲ  $a$ トスレバ、 $SPS'$ ハ常ニ

2a デアルカラ, S'P ノ長サハ  $2a-r$  デアル故ニ

$$(r-2s)^2 = (2a-r)^2,$$

$$r^2 - 4(rs) + 4s^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

$$\therefore (rs) = s^2 - a^2 + ar$$

ヲ得ル.  $b$  ヲ楕圓ノ半短徑,  $e$  ヲ其ノ離心率ヲ表ハ  
スモノトスレバ

$$s^2 = a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

デアルカラ, 上式ハ

$$(rs) = ar - b^2 \quad (46.5)$$

トナル.

(46.5) ヲ  $t$  ニ就テ微分シテ

$$s \frac{dr}{dt} = a \frac{dr}{dt},$$

$$s \frac{d^2r}{dt^2} = a \frac{d^2r}{dt^2}$$

ヲ得, 之レニ  $m$  ヲ掛ケ, (46.3), (46.4) ヲ用キテ

$$-f(r)(rs) = am \frac{d^2r}{dt^2}$$

ヲ得ル. (46.5) ニ依テ, 之レハ

$$-f(r)(ar - b^2) = am \frac{d^2r}{dt^2} \quad (46.6)$$

トナル.

遊星ノ運動-energy ヲ  $T$  トスレバ

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

デアルカラ, (7.8) ニ依テ

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right\} \quad (46.7)$$

ト書クコトガ出来ル.

(10.2) ニ依テ

$$|[rv]| = r^2 \frac{d\psi}{dt}$$

デアルカラ, (46.1) ニ依テ

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = 2c$$

ヲ得ル.  $\tau$  ヲ遊星ノ週期, 即チ遊星ガ其ノ軌道ヲ一  
周スルニ要スル時間ヲ表ハスモノトスルト

$$c = \frac{\pi ab}{\tau} \quad (46.8)$$

デアルカラ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2c}{r^2} = \frac{2\pi ab}{r^2 \tau}$$

ヲ得ル.

此ノ  $d\psi/dt$  ノ値ヲ (46.7) ニ代用シタ後ニ (46.7)

ヲ  $t$  ニ就テ微分シテ

$$\frac{dT}{dt} = m \left\{ \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3} \frac{dr}{dt} \right\}$$

ヲ得ル. 然ルニ又

$$\frac{dT}{dt} = m v \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}$$

デアアルカラ, (7.7) 及ビ (46.4) = 依テ之レハ

$$\frac{dT}{dt} = -f(r)\frac{dr}{dt}r$$

トナリ, 隨テ

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3}\right) = -f(r)r$$

ヲ得ル.

(46.6) = 依テ上式カラ  $d^2r/dt^2$  ヲ消去シテ

$$f(r) = \frac{4amc^2}{b^2r^3}$$

ヲ得ル.(46.8) ノ  $c$  ノ値ヲ上式ニ置キ換ヘルト

$$f(r) = \frac{4\pi^2a^3m}{r^3c^2} \quad (46.9)$$

トナル.

第三法則 = 依テ,  $a^3/c^2$  ハ凡テノ遊星 = 對シテ同ジデアアルカラ

$$\frac{4\pi^2a^3}{c^2} = k \quad (46.10)$$

トスレバ, (46.9) ハ

$$f(r) = k\frac{m}{r^3}$$

トナル. 隨テ (46.4) ハ

$$\mathbf{F} = -k\frac{m}{r^3}\mathbf{r} \quad (46.11)$$

トナル.

故ニ「遊星ニ働イテキル力ハ, 遊星ノ質量ニ比例シ, 太陽ヨリノ距離ノ自乗ニ逆比例シ, 太陽ノ方ニ向ッテキル中心力デアアル」ト言フコトガ分カル.<sup>(1)</sup>

#### 47. 中心運動

前節デ述べタ様ニ, 質點ノ運動ノ性質ガ分カツテヲツテ, 其ノ原因トナッテキル力ノ性質ヲ知リタイ場合ガアル. 前節ノ問題ヲ少シク一般化シテ, 質點ノ運動ガ, Kepler ノ第一法則ヲ満足シテキルコトカラ, 其レガ中心運動デアリ, 隨テ之レニ働イテキル力ノ中心點ト, 質點ノ路ノ方程式トガ既知ノ場合ニ, 中心力ノ大サヲ見出す方法ニ就テ考ヘテ見ヨウ.

便宜ノタメニ質點ノ質量ヲ單位質量トシ, 之レニ働イテキル中心力ハ力ノ中心ニ向ヒ,  $\varphi(r)$  ノ大サヲ持ッテキルモノトシヨウ. 質點ノ路ガ極坐標ノ  $r, \theta$  デ表ハサレテキル場合ニハ, (24.9), (24.10), (24.11) カラ容易ニ  $\varphi(r)$  ガ求メラレル. 即チ

$$\varphi(r) = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \quad u = \frac{1}{r} \quad (47.1)$$

デアアル.

<sup>(1)</sup> Kepler ノ法則カラ, 遊星ニハ太陽ヨリノ距離ニ逆比例スル中心力ガ働イテキルト言フコトヲ歸納シタノハ Newton デアル. 有名ナ彼レノ著書 Principia = 發表セラレテキル. 1687.

質點ノ路ガ、原點カラ質點ニ至ル距離  $r$  ト、原點カラ質點ノ位置ニ於ケル切線ヘ下シタ垂線ノ長サ  $p$  トデ表ハサレテキル場合ニハ、此ノ際ノ energy 方程式

$$v^2 + 2 \int \varphi(r) dr = \text{const.}$$

ト面積速度ノ大サガ不変デアルコトヲ表ハス

$$pv = h$$

トカラ

$$\frac{h^2}{p^2} + 2 \int \varphi(r) dr = \text{const.}$$

ヲ得、之レヲ  $r$  ニ就テ微分シテ得ラレル

$$\varphi(r) = \frac{h^2}{p^2} \frac{dp}{dr} \quad (47.2)$$

ヲ用キテ  $\varphi(r)$  ヲ求メルコトガ出來ル。

若シ質點ノ路ガ直角坐標  $x, y$  ヲ用キテ

$$f(x, y) = 0 \quad (47.3)$$

トシテ與ヘラレテキル場合ニハ

$$\varphi(r) = \frac{h^2 r (f_v^2 f_{xx} - 2f_x f_v f_{xy} + f_x^2 f_{vv})}{(x f_x + y f_v)^3} \quad (47.4)$$

カラ求メルノガ都合ガヨイ。此式中デ  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_v = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $f_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  ヲ表ハシ、 $r^2 = x^2 + y^2$  デアル。此ノ (47.4) ハ次ノ様ニシテ容易ニ證スル

コトガ出來ル。

(47.3) カラ

$$f_x \dot{x} + f_v \dot{y} = 0$$

ヲ得、之レト

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

トカラ

$$\dot{x} = \frac{-h f_v}{x f_x + y f_v}, \quad \dot{y} = \frac{h f_x}{x f_x + y f_v}$$

ヲ得ル。然ルニ

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}$$

デアルカラ、之レニ上記ノ  $\dot{x}, \dot{y}$  ノ値ヲ代入シ、容易ニ

$$\ddot{x} = \frac{h^2 x (-f_v^2 f_{xx} + 2f_x f_v f_{xy} - f_x^2 f_{vv})}{(x f_x + y f_v)^3}$$

ヲ得ル。之レハ

$$\ddot{x} = -\varphi(r) \frac{x}{r}$$

トシテモ表ハサレル筈ノモノデアルカラ、此ノ兩式

ヲ相等シト置イテ (47.4) ヲ得ラレルノデアル。

## 第五章 質点系ノ力学

### 48. 反作用ノ法則

一直線上ヲ動イテキル質点Aノ後方カラ同一  
直線上ヲ他ノ質点Bガ之レヲ追ツカケテ行ツテ、之  
レト衝突シタトシヨウ。A, Bノ質量ヲソレゾレ  $m_A$ ,  
 $m_B$  トシ、衝突ノ直前、直後ニ於ケルA, Bノ速度ヲ  $v_A$ ,  
 $v_A'$ ;  $v_B$ ,  $v_B'$  トスレバ、第25節ニ述ベタ様ニ

$$\frac{v_A' - v_A}{v_B - v_B'} = \frac{m_B}{m_A} \quad (48.1)$$

ナル關係ガアル。之レハ

$$m_A(v_A' - v_A) = -m_B(v_B' - v_B)$$

ト書ケル。随テ

$$m_A(\mathbf{v}_A' - \mathbf{v}_A) = -m_B(\mathbf{v}_B' - \mathbf{v}_B) \quad (48.2)$$

ヲ得ル。

此ノ衝突ノ際、A, Bニ働イテキル力積ヲソレゾ  
レ  $\mathbf{I}_A$ ,  $\mathbf{I}_B$  トスレバ

$$\left. \begin{aligned} m_A(\mathbf{v}_A' - \mathbf{v}_A) &= \mathbf{I}_A \\ m_B(\mathbf{v}_B' - \mathbf{v}_B) &= \mathbf{I}_B \end{aligned} \right\} \quad (48.3)$$

デアルカラ、(48.2)ハ

$$\mathbf{I}_A = -\mathbf{I}_B \quad (48.4)$$

トナル。

此ノ衝突ノ間ノ任意ノ時刻ニ、Aニ働イテキル  
力ヲ  $\mathbf{F}_{AB}$  トシ、Bニ働イテキル力ヲ  $\mathbf{F}_{BA}$  トスレバ  
(36.1)ニ依テ

$$\mathbf{I}_A = \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_{AB} dt, \quad \mathbf{I}_B = -\int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_{BA} dt$$

デアルカラ、(48.4)ハ

$$\int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_{AB} dt = -\int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_{BA} dt \quad (48.5)$$

ト書ケル。  $t$ ハ衝突ノ始マツタ時刻、 $t+\tau$ ハ衝突ノ  
終ツタ時刻ヲ表ハス。衝突ハ瞬間的ニ終ル現象デ  
アルカラ、 $\tau$ ハ極メテ小サナ量デアル。

此ノ衝突ノ際ニ(48.5)ガ成立スルノデアルカ  
ラ、其ノ瞬間的ダト思ハレル極メテ短カイ時間内ノ  
各瞬時ニ於テ

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \quad (48.6)$$

ガ成立シテキルト見ルベキデアル。

Aヲ主トシテ考ヘタトキ、 $\mathbf{F}_{AB}$ ヲBガAニ及ボ  
ス作用ノカト稱シ、 $\mathbf{F}_{BA}$ ヲ其ノ際AガBニ及ボス  
反作用ノカト稱スル。Bヲ主トシテ考ヘタトキ、  
 $\mathbf{F}_{BA}$ ヲAガBニ及ボス作用ノカト稱シ、 $\mathbf{F}_{AB}$ ヲBガ

A = 及ボス反作用ノカト稱スル。

衝突ノ場合ニ限ラズ、二質點ガアツテ、一方が他方ニカヲ働カス場合ニハ、必ラズ後者が前者ニカヲ働カシ、其等ノ間ニハ (48.6) ノ示ス關係ガ成立シテキルト見ラレル。之レハ Newton ガ運動ノ第三法則<sup>(1)</sup>トシテ擧ゲタモノデアツテ、**反作用ノ法則**トモ呼バレテキル。

二ツ以上ノ質點ガアルトキ、此等ヲ一ツノ仲間ト考ヘタトキハ、此等ハ一ツノ系ヲ爲シテキルト言ヒ、之レヲ**質點系**ト稱スル。

今、1, 2, 3, ……*n* ノ *n* 箇ノ質點ガ一ツノ系ヲ爲シテキルトキニハ、各質點間ニ働イテキル力ニ就テハ (48.6) ガ成立スルカラ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} &= 0, \\ \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31} &= 0, \\ \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48.7)$$

等ガ成リ立ツテキル。故ニ之等ヲ加ヘ合セテ

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = 0 \quad (48.8)$$

ヲ得ル。  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$  ハ *i* 及ビ *j* = 1 カラ *n* マデノ整数ヲ代入シタモノ、和ヲ取ルベキコトヲ表ハス。  $\frac{1}{2}$  ヲ

<sup>(1)</sup> 第27節102頁。

附ケタノハ、(48.7) 中ニハ、例ヘバ  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$  ハ一回シカナイニ拘ラズ、(48.8) ノ  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji})$  中ニハ  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$ 、 $\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32}$  トシテ都合二回現ハレテ來ルカラデアアル。勿論  $\mathbf{F}_{11}$ 、 $\mathbf{F}_{22}$ 、……等同ジ數字ヲ附ケタモノハ (48.7) ノ中ニハナイカラ (48.8) ニ於テモ *i* = *j* ノモノハ取除カナケレバナラス。然シ乍ラ、 $\mathbf{F}_{11} = \mathbf{F}_{22} = \dots = \mathbf{F}_{nn} = 0$  デアルカラ (48.8) 中ニハ *i* ≠ *j* ノ條件ヲ書キ表ハシテキナイ。

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_{v1} + \mathbf{F}_{v2} + \dots + \mathbf{F}_{vn} \quad (48.9)$$

トスレバ、(48.8) ハ

$$\sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v = 0 \quad (48.10)$$

ト書クコトガ出來ル。 $\mathbf{F}_v$  ハ *v* 質點ニ他ノ凡テノ質點カラ働クカヲ合成シタモノデアアル。

〔一般ニ *n* 箇ノ質點ガアルトキニ、質點 *v* ニ働イテキルカヲ  $\mathbf{K}_v$  トスレバ、其レヲ二種類ニ分ケテ

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}'_v \quad (48.11)$$

トシ、 $\mathbf{F}_v$  ハ (48.10) ヲ満足シテキルガ、 $\mathbf{F}'_v$  ハ其レヲ満足シテキナイモノデアルトスルコトガ出來ル。ソウシタトキ、 $\mathbf{F}_v$  ヲ**内力**ト稱シ、 $\mathbf{F}'_v$  ヲ**外力**ト稱スル。〕  
 $\mathbf{F}_v$  ハ系内ノ質點ガ質點 *v* ニ働イテキル力デ、 $\mathbf{F}'_v$  ハ系外ノモノガ質點 *v* ニ働イテキル力デアアル。〕

外力ガ少シモ働イテキナイ様ナ質點系ハ**自由**

<sup>(1)</sup>系デアルト呼バレル。

#### 49. 質量中心

1, 2, 3, …,  $\nu$ , …,  $n$  ノ  $n$  箇ノ質點ガ一ツノ質點系ヲ爲シテキルトシヨウ。此等ノ質量ヲソレゾレ  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_\nu, \dots, m_n$  トシ, 任意ノ原點  $O$  ニ關スル此等ノ質點ノ位置 -vector ヲソレゾレ  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_\nu, \dots, \mathbf{r}_n$  トシヨウ。ソウスレバ

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu} \quad (49.1)$$

デ與ヘラレル  $\mathbf{R}$  ナル vector ヲ見出スコトガ出キル。 $O$  點ニ關スル位置 -vector ガ此ノ  $\mathbf{R}$  デアル點ヲ, 此ノ質點系ノ質量中心ト稱スル。

$O$  點ヲ原點トスル直角坐標軸ヲトリ, 其ノ基本 vector ヲ  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  トシ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{i}\xi + \mathbf{j}\eta + \mathbf{k}\zeta, \\ \mathbf{r}_\nu &= \mathbf{i}x_\nu + \mathbf{j}y_\nu + \mathbf{k}z_\nu \end{aligned} \right\} \quad (49.2)$$

トスレバ, (49.1) ハ

$$\xi = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu}, \quad \eta = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu y_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu}, \quad \zeta = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu z_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu} \quad (49.3)$$

<sup>(1)</sup> 完全系トモ言フ。

ヲ與ヘル。此ノ  $\xi, \eta, \zeta$  ハ質點中心ノ直角坐標デア  
ル。

$O$  點ニ關シテノ位置 -vector ガ  $\mathbf{a}$  デアル點  $O'$  ヲ原點トシ, 此ノ  $O'$  點ニ關シテノ各質點ノ位置 -vector ヲ  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3, \dots, \mathbf{r}'_\nu, \dots, \mathbf{r}'_n$  デ表ハシタナラバ,

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \mathbf{a} \quad (49.4)$$

ノ關係ガアル。

(49.1) ニ依テ

$$\mathbf{R}' = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu \mathbf{r}'_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu} \quad (49.5)$$

ヲ  $O'$  點ヲ原點トシタトキノ此ノ質點系ノ質量中心デアルト言ツテヨイ。

(49.4) ニ依テ上式ハ

$$\mathbf{R}' = \frac{\sum_{\nu=1}^n m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^n m_\nu} - \mathbf{a}$$

トナリ, (49.1) ニ依テ

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{a} \quad (49.6)$$

トナル。故ニ  $O$  點ヲ原點トシタトキノ質點系ノ質量中心ハ,  $O'$  點ヲ原點トシタトキノ其レト一致スル。即チ, 質點系ノ質量中心ハ其ノ系ニ固有ノモノデア  
ツテ, 原點ノ位置採用スル坐標系ノ如何ニ關係シナ



イモノデアルコトガ分カル。

質量中心ヲ原點トシ、各質點ノ之レニ關シテノ位置-vector ヲ  $\mathbf{r}_1'', \mathbf{r}_2'', \mathbf{r}_3'', \dots, \mathbf{r}_v'', \dots, \mathbf{r}_n''$  トスレバ

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{R} + \mathbf{r}_v'' \quad (49.7)$$

デアル。此ノ兩邊ニ  $m_v$  ヲ乘ジ、凡テノ質點ニ就テノ相當量ヲ加ヘ合スト

$$\sum_{v=1}^n m_v \mathbf{r}_v = \mathbf{R} \sum_{v=1}^n m_v + \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{r}_v''$$

トナル。然ルニ此ノ左邊ハ (49.1) ニ依テ  $\mathbf{R} \sum_{v=1}^n m_v =$  等シイノデアルカラ

$$\sum_{v=1}^n m_v \mathbf{r}_v'' = 0 \quad (49.8)$$

ヲ得ル。

### 50. 質量中心ノ運動法則

$n$  箇ノ質點ヨリナル質點系ニ於テ、各質點ノ質量ヲソレゾレ  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_v, \dots, m_n$  トシ、此等ニソレゾレ  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \dots, \mathbf{K}_v, \dots, \mathbf{K}_n$  ノ力ガ働イテキルトスレバ、各質點ノ運動方程式ハ

$$m_v \frac{d^2 \mathbf{r}_v}{dt^2} = \mathbf{K}_v, \quad (v=1, 2, 3, \dots, n)$$

デアル。故ニ此ノ質點系ニ對シテハ

$$\sum_{v=1}^n m_v \frac{d^2 \mathbf{r}_v}{dt^2} = \sum_{v=1}^n \mathbf{K}_v \quad (50.1)$$

ガ成立スル。

此ノ質點系ノ質量中心ノ位置-vector ヲ  $\mathbf{R}$  トスレバ、(49.1) ニ依テ

$$\mathbf{R} \sum_{v=1}^n m_v = \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{r}_v$$

デアル。

此ノ質點系ノ全質量ヲ  $M$  トスレバ

$$M = \sum_{v=1}^n m_v \quad (50.2)$$

デアルカラ、上式ハ

$$M \mathbf{R} = \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{r}_v \quad (50.3)$$

ト書ケル。之レヲ  $t$  ニ就テ微分シテ

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_{v=1}^n m_v \frac{d^2 \mathbf{r}_v}{dt^2}$$

ヲ得ル。之レハ (50.1) ニ依テ

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_{v=1}^n \mathbf{K}_v \quad (50.4)$$

トナル。

$$\sum_{v=1}^n \mathbf{K}_v = \mathbf{K} \quad (50.5)$$

トスレバ、上式ハ

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{K} \quad (50.6)$$

トナル。之レハ質量中心ニ  $M$  ナル質量ヲ持ツ質點

ガアツテ、其レニ  $\mathbf{K}$  ナル力ガ働イテキルト假想シタトキニ、此ノ質點ノ運動ヲ表ハス方程式デアル。故ニ「質點系ノ質量中心ハ、其ノ質點系ノ全質量ガ其ノ點ニ集中シ、各質點ニ働イテキル力ノ合成力ガ之レニ働イテキルト考ヘタトキニ、其ノ假想質點ガスル<sup>(1)</sup>ト同ジ運動ヲスルノデアル」。

$\mathbf{F}_v$  ヲ内カトシ、 $\mathbf{F}'_v$  ヲ外カトスレバ、(48.11) 及ビ (48.10) ニ依テ

$$\sum_{v=1}^n \mathbf{K}_v = \sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v + \sum_{v=1}^n \mathbf{F}'_v = \sum_{v=1}^n \mathbf{F}'_v$$

デアルカラ、(50.5) ハ單ニ

$$\mathbf{K} = \sum_{v=1}^n \mathbf{F}'_v \quad (50.7)$$

トナル。故ニ「質量中心ニ働イテキルト見ルベキ合成力ハ、外力ノ合成力ノミデアルトシテ差支ガナイ」。

若シ外力ガ少シモ働イテキナイナラバ、即チ此ノ系ガ自由系デアルナラバ、 $\mathbf{K} = 0$  デアルカラ (50.6) ハ

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0$$

トナル。之レヲ積分シテ

(1) 質點系ニ働イテキル力ガ重力デアルトキハ、此ノ系ノ質量中心ハ其ノ合成力ガ質量中心ニ働イテキルト見做シタトキト同ジ運動ヲスルワケデアル。故ニ質量中心ノコトヲ屢々重心トモ稱スルノデアル。

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}$$

ヲ得ル。 $\mathbf{v}$  ハ一定ノ速度-vectorデアル。

故ニ「質點系ニ外力ガ少シモ働イテキナイナラバ、其ノ質量中心ハ静止シテキルカ、又ハ等速度運動ヲシテキル」コトガワカル。之レヲ**質量中心ノ運動ノ保存法則**ト呼ンデキル。

### 51. カノ能率

第10節デ述べタ様ニ、任意ノ vector  $\mathbf{A}$  ノ始點ヲ  $P$  トシ、 $P$  ノ任意ノ原點  $O$  ニ關スル位置-vectorヲ  $\mathbf{r}$  トスレバ、 $[\mathbf{r}\mathbf{A}]$  ヲ  $\mathbf{A}$  ノ  $O$  點ニ關スル能率ト稱スル。

質點  $P$  ノ質量ヲ  $m$ 、速度ヲ  $\mathbf{v}$ 、運動量ヲ  $\mathbf{B}$  トスレバ  $\mathbf{B} = m\mathbf{v}$  デアリ、 $P$  ノ原點  $O$  ニ關スル位置-vectorヲ  $\mathbf{r}$  トスレバ、 $O$  點ニ關スル此ノ質點  $P$  ノ**運動量ノ能率**ハ

$$\mathbf{U} = [\mathbf{r}\mathbf{B}] \quad (51.1)$$

デアル。

上式ヲ  $t$  ニ就テ微分スレバ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{B} \right] + \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]$$

トナル。然ルニ此ノ右邊ノ第一項ハ  $m[\mathbf{v}\mathbf{v}]$  ニ等シ

16  
A  
P  
O  
A = mv

イ、之レハ (9.4) = 依テ零トナルカラ、上式ハ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]$$

トナル。

此ノ質點ノ運動方程式ハ、質點ニ働イテキル力ヲ  $\mathbf{K}$  トスレバ

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{K} \quad (51.2)$$

デアルカラ、上式ハ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{K}] \quad (51.3)$$

トナル。

力  $\mathbf{K}$  ハ質點ニ働イテキルノデアルカラ、其ノ始點ハ、運動量  $\mathbf{B}$  ト同様ニ、質點ニアルモノトスル。此ノ場合ニ質點ハ又  $\mathbf{K}$  ノ着力點デアルト言ハレル。

$[\mathbf{r}\mathbf{K}]$  ハ原點  $O$  = 關スル  $\mathbf{K}$  ノ能率デアル。之レヲ  $\mathbf{N}$  デ表ハスコトニスル。即チ

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}\mathbf{K}] \quad (51.4)$$

ハ原點  $O$  = 關スル質點ニ働イテキル力ノ能率デア  
ル。

(51.3) ハ (51.4) = 依テ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N} \quad (51.5)$$

ト書ケル。之レハ「運動量ノ能率ノ變化率ハ力ノ能

率ニ等シイ」コトヲ示シテキルモノデ、(51.2) ト全ク同形デア  
ル。

原點  $O$  = 關シテ  $\mathbf{a}$  ノ位置 -vector ノ終點ヲ  $O'$  トシ、 $O'$  點 = 關スル質點ノ位置 -vector ヲ  $\mathbf{r}'$  トスルト

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$$

デアル。(51.6) 及ビ (51.4) = 此ノ  $\mathbf{r}$  ヲ代入シテ

$$\mathbf{U} = [\mathbf{a}\mathbf{B}] + [\mathbf{r}'\mathbf{B}],$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}\mathbf{K}] + [\mathbf{r}'\mathbf{K}]$$

ヲ得ル。

$$\mathbf{U}' = [\mathbf{r}'\mathbf{B}], \quad \mathbf{N}' = [\mathbf{r}'\mathbf{K}]$$

トスレバ、之等ハ

$$\mathbf{U} = [\mathbf{a}'\mathbf{B}] + \mathbf{U}',$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}\mathbf{K}] + \mathbf{N}'$$

トナル。  $\mathbf{U}'$  ハ  $O'$  點 = 關シテノ運動量ノ能率デアリ、 $\mathbf{N}'$  ハ  $O'$  點 = 關シテノ力ノ能率デア  
ル。之等ヲ (51.5) = 代入スルト

$$\left[ \mathbf{a} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + \frac{d\mathbf{U}'}{dt} = [\mathbf{a}\mathbf{K}] + \mathbf{N}'$$

トナリ、(51.2) = 依テ

$$\frac{d\mathbf{U}'}{dt} = \mathbf{N}'$$

ヲ得ル。之レハ (51.2) ト全ク同形デア  
ル。故ニ「運動量ノ能率ト力ノ能率トノ關係ヲ示ス (51.5) ハ原

點ノ如何ニ拘ハラズ成立スルモノデアルコトガ分カル。

$n$  箇ノ質點カラ成ツテキル質點系ニ於テ、各質點ニソレゾレ  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_\nu, \dots, \mathbf{K}_n$  ノ力ガ働イテキルトキニハ、之等ノ力ノ原點  $O$  ニ關スル能率ハ (51.4) ト同様ニ

$$\mathbf{N}_\nu = [\mathbf{r}, \mathbf{K}_\nu], \quad (\nu=1, 2, \dots, n) \quad (51.6)$$

デアル。各質點ノ運動量ノ原點  $O$  ニ關スル能率ハ (51.1) ト同様ニ

$$\mathbf{U}_\nu = [\mathbf{r}, \mathbf{B}_\nu], \quad (\nu=1, 2, \dots, n) \quad (51.7)$$

デアル。之等ノ  $\mathbf{U}_\nu$  ト  $\mathbf{N}$  トノ間ニハ (51.5) ト同様ニ

$$\frac{d\mathbf{U}_\nu}{dt} = \mathbf{N}_\nu, \quad (\nu=1, 2, \dots, n) \quad (51.8)$$

ノ關係ガ成立シテキル。

(51.7), (51.6) ヲ此ノ質點系ノ凡テノ質點ニ就テ總和シタモノ

$$\mathbf{U} = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{U}_\nu, \quad (51.9)$$

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{N}_\nu, \quad (51.10)$$

ヲソレゾレ、此ノ系ノ原點  $O$  ニ關スル運動量ノ能率及ビ力ノ能率ト稱スル。

(51.8) ヲ此ノ系ノ凡テノ質點ニ就テ總和シテ (51.9), (51.10) ヲ用キテ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N} \quad (51.11)$$

ヲ得ル。即チ質點系ニ對シテモ、質點ニ對シテ成立スル (51.5) ト全く同ジ關係ガ成立スルコトガ分カル。

## 52. 運動量及ビ運動量ノ能率ノ保存法則

$n$  箇ノ質點ヨリナル質點系ノ運動量ノ能率ト同様ニ、各質點ノ運動量  $\mathbf{B}_\nu$  ノ總和

$$\mathbf{B} = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{B}_\nu, \quad (52.1)$$

ヲ其ノ質點系ノ運動量ト稱スル。

質點  $\nu$  ニ働イテキル力ヲ  $\mathbf{K}_\nu$  トスレバ

$$\frac{d\mathbf{B}_\nu}{dt} = \mathbf{K}_\nu, \quad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

ガ成リ立ツテキルカラ

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{d\mathbf{B}_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{K}_\nu,$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{K} \quad (52.2)$$

ガ質點系ニ對シテ成立スル。但シ (50.7) ニ示ス様ニ

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{K}_\nu = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}_\nu + \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}'_\nu = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{F}'_\nu$$

デアル。

故ニ、若シ質點系ニ外力ガ少シモ働イテキナイ場合ニハ

$$\mathbf{F}_\nu' = 0, (\nu=1, 2, \dots, n) \quad (52.3)$$

デアアルカラ

$$\mathbf{K} = 0$$

デアリ、随テ (52.2) ハ

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0 \quad (52.4)$$

トナル。之レハ  $\mathbf{B}$  ガ  $t =$  無關係ナ一定不變ノ vector  
デアアルコトヲ示シテキル。即チ「外力ガ少シモ働イ  
テキナイ質點系ノ運動量ハ常ニ一定不變デアアル」ト  
言フコトガ出來ル。コレヲ**運動量ノ保存法則**ト稱  
スル。

此ノ質點系ニ働イテキル力ノ任意ノ點  $O$  ニ關  
スル能率ハ、(51.10), (52.3) ニ依テ

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^n [\mathbf{r}_\nu, \mathbf{K}_\nu] = \sum_{\nu=1}^n [\mathbf{r}_\nu, \mathbf{F}_\nu] \quad (52.5)$$

デアアル。然ルニ此ノ系ノ任意ノ質點  $i$  ガ他ノ質點  
 $j$  ニ及ボスカヲ  $\mathbf{F}_{ij}$  トシ、 $j$  ガ  $i$  ニ及ボスカヲ  $\mathbf{F}_{ji}$  ト  
スルト、(48.6) ニ依テ

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (52.6)$$

ノ關係ガアル。  $j$  ニ關シテノ  $i$  ノ位置-vector ヲ  $\mathbf{r}_{ij}$   
トシ、 $i$  ニ關シテノ  $j$  ノ位置-vector ヲ  $\mathbf{r}_{ji}$  トスレバ

$$\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$$

デアアル。  $O$  ニ關シテノ  $i$  及ビ  $j$  ノ位置-vector ヲ夫々

$\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  トスレバ、明カニ

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ij}$$

デアアル。故ニ

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ij}] &= [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ij}), \mathbf{F}_{ij}] \\ &= [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ij}] - [\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}] \end{aligned}$$

トナル。然ルニ  $\mathbf{r}_{ij}$  ト  $\mathbf{F}_{ij}$  トハ

$$[\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}] = 0$$

デアアル様ナ方向ヲ有シテキル。故ニ上式ハ

$$[\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ij}] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ij}]$$

トナル。(52.6) ニ依テ、之レハ

$$[\mathbf{r}_j, \mathbf{F}_{ij}] + [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ji}] = 0$$

ト書ケル。故ニ (52.5) ハ

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^n [\mathbf{r}_\nu, \mathbf{F}_\nu] = \sum_i \sum_j [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ji}] = 0$$

トナル。

此ノ質點系ノ  $O$  點ニ關スル運動量ノ能率  $\mathbf{U}$  ト  
 $\mathbf{N}$  トノ間ニハ (51.11) ノ示ス

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N}$$

ノ關係ガアルカラ、今ノ場合ニハ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = 0 \quad (52.)$$

トナル。故ニ  $\mathbf{U}$  ハ  $t =$  無關係ナ一定不變ノ大サ及

ビ方向ヲ有スル vector デアル。即チ「外力ガ少シモ働イテキナイ質點系ノ運動量ノ任意ノ點ニ關スル能率ハ一定不變デアアル」ト言フコトガ出來ル。之レヲ運動量ノ能率ノ保存法則ト稱スル。Uノ方向ヲ不變軸ト稱シ、之レニ垂直ナ平面ヲ不變平面ト稱スル。

(51.7), (51.9)ニ依テ

$$\mathbf{U} = \sum_{v=1}^n [\mathbf{r}_v \mathbf{B}_v] = \sum_{v=1}^n m_v [\mathbf{r}_v \mathbf{v}_v]$$

デアアルガ、(10.1)ニ依テ質點 $v$ ノ面積速度ハ

$$\frac{d\mathbf{S}_v}{dt} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_v \mathbf{v}_v]$$

デアアルカラ、上式ハ

$$\mathbf{U} = 2 \sum_{v=1}^n m_v \frac{d\mathbf{S}_v}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{S}_v$$

ト書クコトガ出來ル。(52.7)ハ此ノUガ時ニ無關係ナ定-vectorデアアルコトヲ示シテキルノデアアル。此ノ式ヲ $t$ ニ就テ積分スレバ

$$\sum_{v=1}^n m_v \mathbf{S}_v = \frac{1}{2} \mathbf{U} t + \mathbf{C}$$

ヲ得ル。Cモ亦 $t=0$ ニハ無關係ナ vector デアル。各質點ノ位置-vectorガ畫ク面積ヲ測リ始メタ時刻ヲ $t=0$ トスレバC=0トナルカラ、上式ハ

$$\sum_{v=1}^n m_v \mathbf{S}_v = \frac{1}{2} \mathbf{U} t \quad (52.8)$$

トナル。之レハ「一定ノ時間内ニ、各質點ノ位置-vectorガ畫ク面積ヲ其ノ質量ダケ倍シタモノ、總和ハ一定デアアル」コトヲ示シテキル。故ニ運動量能率ノ保存法則ヲ又面積法則トモ稱スル。

### 53. 變分

第42圖ニ示ス様ニ、 $xy$ 平面内ニ極メテ接近シタ二ツノ曲線1, 2ガアルトシ、之等ハソレゾレ

$$y=f(x), \quad y=g(x) \quad (53.1)$$

デアアルサレ、

$$y=f(x) + \epsilon \{g(x) - f(x)\}$$

ニ於ケル媒介變數 $\epsilon$ ヲ連續的ニ0カラ1マデ變化スルコトニ依テ、1ノ曲線カラ2ノ曲線ニ移リ得ル様ナモノデアアルトスル。其ノ場合ニ $g(x) - f(x) = \eta$ トシ、此ノ $\eta$ ヲ $y$ ノ變分ト稱シ、之レヲ $\delta y$ デアアル<sup>(1)</sup>。即チ

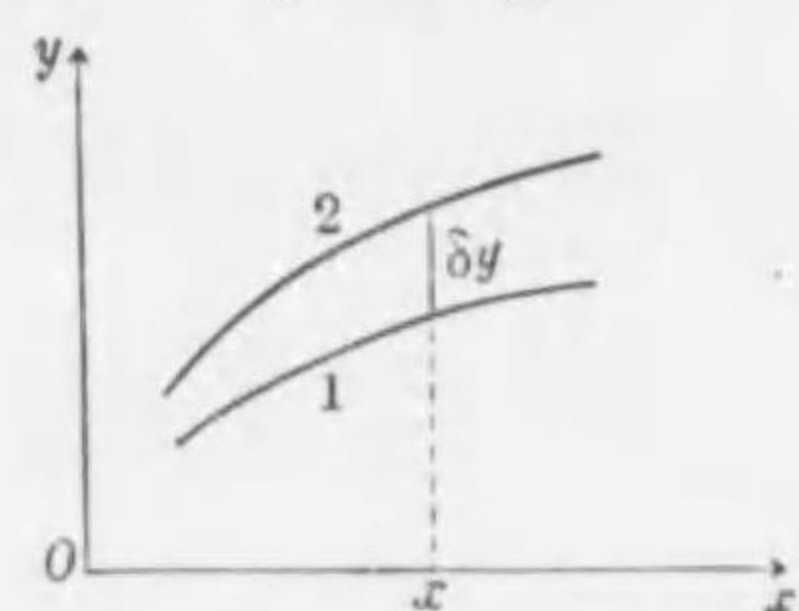
$$\delta y = g(x) - f(x) \equiv \eta(x) \quad (53.2)$$

デアアル。 $\delta y$ ハ明カニ $x$ ノ函數デアアル。

(53.2)ヲ $x$ ニ就テ微分スルト

<sup>(1)</sup> 此ノ記號ハ1762年項ニLagrangeニ依テ始テ用キラレタモノデアアル。δハ恐ラクハ $d$ ヲ眞似テ作ツタモノデアラウ。

第 42 圖



$$\frac{d}{dx} \delta y = \frac{d}{dx} \eta(x)$$

ヲ得ル。又 (53.2) ト同様ニ  
 $\frac{dy}{dx}$  ノ變分ハ

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} g(x) - \frac{d}{dx} f(x)$$

デアル。之レハ (53.2) ニ依テ

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{f(x) + \eta(x)\} - \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \eta(x)$$

トナルカラ

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \delta y \quad (53.3)$$

ヲ得ル。故ニ「 $x$  ガ獨立變數デアルトキ、其ノ從屬變數デアル  $y$  ノ變分ヲ  $x$  ニ就テ微分シタモノハ、 $y$  ノ  $x$  ニ就テ微分シタモノ、變分ニ等シ」ト言フコトガ出來ル。

$\varphi(y)$  ノ  $y$  ノ函數トスル。  $y$  ガ  $\delta y$  ダケ増加シタトキハ、之レハ  $\varphi(y + \delta y)$  トナル。之レヲ展開スルト

$$\varphi(y + \delta y) = \varphi(y) + \frac{d}{dy} \varphi(y) \cdot \delta y + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} \varphi(y) \cdot \delta y^2 + \dots$$

トナル。故ニ  $\delta y^2$  以上ノ小サナ項ヲ無視スルト

$$\varphi(y + \delta y) - \varphi(y) = \frac{d}{dy} \varphi(y) \cdot \delta y$$

ト書ケル。之レヲ  $\varphi(y)$  ノ變分ト稱シ  $\delta \varphi$  デ表ハス。

即チ

$$\delta \varphi(y) = \frac{d}{dy} \varphi(y) \cdot \delta y \quad (53.4)$$

デアル。

$y' = \frac{dy}{dx}$  トスルト、(53.4) ト同様ニ

$$\delta \varphi(y, y') = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, y') \cdot \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(y, y') \cdot \delta y' \quad (53.5)$$

$$\delta \varphi(x, y, y') = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, y') \cdot \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(x, y, y') \cdot \delta y' \quad (53.6)$$

ヲ得ル。

(53.4), (53.5) ニ於テ、 $\delta$  ヲ  $d$  トスルト

$$d\varphi(y) = \frac{d}{dy} \varphi(y) \cdot dy,$$

$$d\varphi(y, y') = \frac{d}{dy} \varphi(y, y') \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y'} \varphi(y, y') \cdot dy'$$

ニナル。之レハ  $\varphi(y)$  及ビ  $\varphi(y, y')$  ノ微分デアル。

故ニ「微分ト變分トハ全ク同様ニ取扱ツテヨイ」コトガ分カル。ガ「微分ハ函數ノ形ヲ變ヘズニ、獨立變數  $x$  ガ微カニ變ツタトキノ函數ノ値ノ變化ヲ表ハシ、變分ハ  $x$  ガ不變デアツテ函數ノ形ガ微カニ變ツタトキノ函數ノ値ノ變化ヲ表ハスモノデアル」。

$x$  ガ獨立變數デナク、 $y$  モ  $x$  モ共ニ獨立變數  $t$  ノ從屬變數デアルトキハ

$$\delta \frac{dy}{dx} = \delta \left( \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} \right)$$

トスベキデアアル。變分ハ微分ト同様ニシテ取扱フテヨイカラ

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{\frac{dx}{dt} \delta \left( \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dy}{dt} \delta \left( \frac{dx}{dt} \right)}{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2} \\ &= \frac{\delta \left( \frac{dy}{dt} \right)}{\frac{dx}{dt}} - \frac{\frac{dy}{dt}}{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2} \delta \left( \frac{dx}{dt} \right) \end{aligned}$$

トナル。然ルニ今ノ場合ニハ  $t$  ガ獨立變數デ、 $x, y$  ガ其ノ從屬變數デアアルカラ、(53.3)ニ依テ

$$\delta \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta y, \quad \delta \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta x$$

デアアル。故ニ上式ハ

$$\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \delta y}{\frac{dx}{dt}} - \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \frac{\frac{d}{dt} \delta x}{\frac{dx}{dt}}$$

即チ

$$\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \delta y - \frac{dy}{dx} \frac{d \delta x}{dx} \quad (53.7)$$

トナル。故ニ「若シ  $x$  ガ獨立變數デナイナラバ、(53.3)ハ成リ立たナイノデアアル。即チ微分ト變分トハ互換シ得ナイノデアアル。」

次ニ

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx \quad (53.8)$$

ニ於テ、 $y, y'$  フソレゾレ  $y + \delta y, y' + \delta y'$  トシテ見ルト

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \delta y' dx \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

トナル。此ノ右邊ノ第四項以下ノモノハ無視シテモヨイ。

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx \equiv \delta I \quad (53.9)$$

トシ、之レヲ積分  $I$  ノ變分ト稱スル。上式ニ依テ之レハ

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

ト書クコトガ出來ル。即チ

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

デアアル。然ルニ、(53.6)ニ依テ、之レハ

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta \varphi(x, y, y') dx \quad (53.10)$$

ト書ケル。故ニ「積分ノ變數ガ獨立變數デアリ、其ノ兩限ガ一定ニ保タレテキルトキハ、積分ト變分トノ



順序ハ交換スルコトガ出来ル。

積分ノ變數ガ獨立變數デナイトキニハ

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x, y, y') \frac{dx}{dt} dt \\ &= \delta \int_{t_0}^{t_1} (\varphi \cdot \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta(\varphi \cdot \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta\varphi \cdot \dot{x} + \varphi \cdot \delta\dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta\varphi dx + \varphi d\delta x) \end{aligned} \quad (53.11)$$

トセナケレバナラス。

積分ノ兩限ガ變分ノ際ニ變ル場合ニハ、其レニ依テ生ジタ積分ノ變化ヲモ附加セナケレバナラス。(53.8)ノ上限ガ變化シタトキ、及ビ下限ガ變化シタトキ、其レニ依テ附加スベキ量ヲソレゾレ  $\delta_1 I, \delta_0 I$  トスルト

$$\begin{aligned} \delta_1 I &= \int_{x_0}^{x_1 + \delta x_1} \varphi dx - \int_{x_0}^{x_1} \varphi dx \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} \varphi dx = \varphi(x_1) \delta x_1, \\ \delta_0 I &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1} \varphi dx - \int_{x_0}^{x_1} \varphi dx \\ &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_0} \varphi dx = - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} \varphi dx \end{aligned} \quad (53.12)$$

$$= -\varphi(x_0) \delta x_0 \quad (53.13)$$

デアル。

#### 54. Hamilton ノ 法 則

$n$  箇ノ質點ヨリナル質點系ニ於テ、各質點ノ質量ヲソレゾレ  $m_1, m_2, \dots, m_\nu, \dots, m_n$  トシ、之等ニソレゾレ  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_\nu, \dots, \mathbf{K}_n$  ノ力ガ働イテキルトシヨウ。此ノ場合ニ、各質點ニ對スル運動方程式ハ

$$m_\nu \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt^2} = \mathbf{K}_\nu, \quad (\nu=1, 2, \dots, n) \quad (54.1)$$

デアルカラ、之等ヲ總テ加ヘ合セテ

$$\sum_{\nu=1}^n m_\nu \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{K}_\nu \quad (54.2)$$

ヲ得ル。

此ノ質點系ノ各質點ニソレゾレ假想變位  $\delta \mathbf{r}_\nu$  ヲサセタトスレバ、此ノ際ニ各質點ニ働イテキル力ガスル仕事ノ總和ハ

$$\delta W = \sum_{\nu=1}^n \mathbf{K}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu \quad (54.3)$$

デアル。之レハ (54.1) ニ依テ

$$\delta W = \sum_{\nu=1}^n m_\nu \frac{d^2 \mathbf{r}_\nu}{dt^2} \delta \mathbf{r}_\nu \quad (54.4)$$

トシテ表ハサレル。

$\mathbf{r}_\nu$  ハ獨立變數  $t$  ノ函數デアリ、 $\delta \mathbf{r}_\nu$  ハ  $\mathbf{r}_\nu$  ノ變分

ヲ表ハスモノト見得ルカラ, (53.3) = 依テ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \delta\mathbf{r}_v \right) &= \frac{d^2\mathbf{r}_v}{dt^2} \delta\mathbf{r}_v + \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r}_v \\ &= \frac{d^2\mathbf{r}_v}{dt^2} \delta\mathbf{r}_v + \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \delta \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \\ &= \frac{d^2\mathbf{r}_v}{dt^2} \delta\mathbf{r}_v + \frac{1}{2} \delta \left( \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

ヲ得ル. 故 = (54.4) ハ

$$\delta W = \sum_{v=1}^n m_v \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \delta\mathbf{r}_v \right) - \sum_{v=1}^n \frac{1}{2} m_v \delta \left( \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \right)^2$$

ト書ケル.

$$\frac{d\mathbf{r}_v}{dt} = \mathbf{v}_v$$

デアルカラ, 之レハ

$$\delta W = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta\mathbf{r}_v - \delta \sum_{v=1}^n \frac{1}{2} m_v \mathbf{v}_v^2 \quad (54.5)$$

トナル.

$$T_v = \frac{1}{2} m_v \mathbf{v}_v^2$$

ハ質點 $v$ ガ有スル運動-energy デアルカラ

$$T = \sum_{v=1}^n \frac{1}{2} m_v \mathbf{v}_v^2 \quad (54.6)$$

ハ此ノ質點系ノ有スル運動-energy ヲ表ハスモノデア  
ル. 此ノ $T$ ヲ用キルト, (54.5) ハ

$$\delta W + \delta T = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta\mathbf{r}_v$$

トナル. 之レヲ $t$ ニ就テ $t_0$ カラ $t_1$ マデ積分スレバ

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta T) dt = \left[ \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta\mathbf{r}_v \right]_{t_0}^{t_1}$$

ヲ得ル. 之レハ (53.10) = 依テ

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W + T) dt = \left[ \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta\mathbf{r}_v \right]_{t_0}^{t_1} \quad (54.7)$$

ト書ケル. 實際此ノ質點系ガスル運動ノ際ニハ, 各  
質點ハソレゾレニ其ノ實際ノ位置ニアルベキデア  
ルカラ,  $t=t_0$  及ビ  $t=t_1$  ニ於テ凡テノ  $\delta\mathbf{r}_v$  ハ零デア  
ルベキデアル. 故 = (54.7) ハ

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W + T) dt = 0 \quad (54.8)$$

トナル.

此ノ質點系ニ働イテキル力ガ保存的ノモノデア  
ルナラバ, 此ノ質點系ノ各質點ニ働イテキル力ハ

$$\mathbf{K}_v = -\text{grad } V_v, \quad (v=1, 2, \dots, n)$$

デアハサレルカラ, (54.3) ハ

$$\begin{aligned} \delta W &= - \sum_{v=1}^n \text{grad } V_v \delta\mathbf{r}_v \\ &= - \sum_{v=1}^n \left( \frac{\partial V_v}{\partial x_v} \delta x_v + \frac{\partial V_v}{\partial y_v} \delta y_v + \frac{\partial V_v}{\partial z_v} \delta z_v \right) \\ &= - \sum_{v=1}^n \delta V_v \\ &= - \delta \sum_{v=1}^n V_v \end{aligned}$$

トナル。  $V_v$  ハ質點  $v$  ノ有スル位置-energy デアルカラ

$$V = \sum_{v=1}^n V_v \quad (54.9)$$

ハ此ノ質點系ノ位置-energy ニナル。 隨テ

$$\delta W = -\delta V \quad (54.10)$$

デアリ、(54.8) ハ

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0 \quad (54.11)$$

トナル。

(54.10) ヲ満足スル  $W$  ヲ力函数ト稱スルコトガアル。(54.11) ノ  $T - V$  ハ **Kinetic-Potential**<sup>(1)</sup> ト稱スル。

(54.8) ハ「質點系ノ状態ガ  $t=t_0, t=t_1$  ノトキニ與ヘラレテキルトスレバ、質點系ノ運動-energy ト力函数トノ和ヲ此ノ時間内ニ時ニ關シテ積分シタモノ即チ時積分ハ實際ノ路ニ就テハ、他ノ之レニ近イ種々ノ假想的ノ路ニ就テノモノヨリモ小デアルカ又ハ大デアル」ト言フコトヲ示シテキル。(54.11) ハ kinetic potential ノ時積分ニ就テ同様ノコトヲ示シテキル。之等ノコトヲ **Hamilton**<sup>(2)</sup> ノ法則ト稱スル。

例題 Hamilton ノ法則ヨリ D'Alembert ノ法則ヲ誘導セヨ。

(1) Helmholtz = 依テ名ヅケラレタノデアル。1886.

(2) 此ノ法則ハ Philosophical Transaction, 1834. = 依テ發表セラレタモノデアル。此ノ法則ハ又、變分法則ト呼バレル。

Hamilton ノ法則ハ(54.8)ニ依テ

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W + T) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta T) dt = 0 \quad (1)$$

デアル。  $v$  質點ニ働イテキル力ヲ  $\mathbf{F}_v$  トスレバ

$$\delta W = \sum_{v=1}^n \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v$$

トスルコトガ出来、又(54.6)ニ依テ

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta V_v \\ &= \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \\ &= \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_v \end{aligned}$$

ト書ケルカラ(1)ハ

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^n \left( \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v + \underbrace{m_v \mathbf{v}_v \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_v}_{\text{total derivative}} \right) dt = 0$$

トスルコトガ出来ル。第二積分ニ部分積分法ヲ應用シテ

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^n \left( \mathbf{F}_v \delta \mathbf{r}_v - m_v \frac{d\mathbf{v}_v}{dt} \delta \mathbf{r}_v \right) dt + \left[ \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{v}_v \delta \mathbf{r}_v \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

ヲ得ル。然ルニ  $t_0, t_1$  ニ於テハ  $\delta \mathbf{r}_v$  ハ凡テ零デアルカラ上式ハ

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^n \left( \mathbf{F}_v - m_v \frac{d\mathbf{v}_v}{dt} \right) \delta \mathbf{r}_v dt = 0 \quad (2)$$

トナル。此ノ式ガ成立スル爲メニハ、被積分ガ或時ハ正量トナリ、或時ハ負量トナリ、結局此ノ積分ガ零トナル様デナケレバナラス。然ルニ  $\delta \mathbf{r}_v$  ハ任意ノ vector デアルカラ、其レト  $\mathbf{F}_v - m_v \frac{d\mathbf{v}_v}{dt}$  トノ scalar 積ガ凡テノ時刻ヲ通ジテ同ジ符號ヲトル様ニ  $\delta \mathbf{r}_v$  ヲ選ムコトガ出来ル。其ノ様ニシタトスレバ、(2)ガ成立スル爲メニハ常ニ

$$\sum_{v=1}^n \left( \mathbf{F}_v - m_v \frac{d\mathbf{v}_v}{dt} \right) \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (3)$$

デアルコトヲ要スル。之レ則チ質點系ニ對スル D'Alembert ノ法則ヲ表ハスモノデアル。

### 55. Lagrange ノ運動方程式 其ノ一

$m$  箇ノ質點ヨリナル質點系ニ於テ、各質點ガ任意ノ運動ヲ爲シ得ル場合ニハ、其ノ質點系ハ  $3m$  ノ自由度ヲ有シテキル。隨テ其ノ質點系ノ各質點ノ位置ヲ表ハサンガ爲メニハ  $3m$  箇ノ坐標ガ要ル。質點系ノ各質點ノ位置ヲ完全ニ示スノニ必要ナ坐標ヲ一般ニ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  デ表ハシ、之等ヲ一般坐標ト稱スル。凡テノ質點ガ自由ニ動キ得ル質點系デハ  $n=3m$  デアル。

各質點ガ任意ノ運動ヲシ得ナイトキハ、其ノ運動ハ所謂拘束運動デアル。此場合ニハ、質點ノ  $3m$  ノ坐標ハ拘束運動ノ條件デアル拘束方程式ヲ満足セナケレバナラスカラ、之等ノ間ニハ若干ノ關係ガアル。拘束方程式ノ數ガ  $p$  箇アルトキハ、坐標ノ中デ  $3m-p$  ダケハ全ク任意ニ變化シ得ル。此ノ場合ノ質點ノ自由度ハ  $3m-p$  デアル。

質點系ノ一般坐標ノ數ガ其ノ自由度ノ數ト同ジトキニハ、其ノ質點系ハ holonomic デアルト稱シ一般坐標系ノ數ガ自由度ノ數ヨリモ大デアルトキニハ、其ノ質點系ハ non-holonomic デアルト稱スル。

$m$  箇ノ質點カラナツテキル質點系ニ於テ、其ノ一般坐標ヲ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  トシ、質量  $m_\nu$  ノ質點  $\nu$  ノ任意ノ定點ニ關スル位置-vector ヲ  $\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$  トシヨウ。ソウスレバ、 $\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$  ハ一般坐標及ビ時  $t$  ノ函數トシテ

$$\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (55.1)$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \dots, m)$$

デ表ハスコトガ出來ル。

之等ノ式ノ内ニ、 $t$  ガ陽ハニ入ツテ來ナイコトガアル。其ノ様ナ場合ニハ、一般坐標  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ヲ scleronomic 坐標ト稱スル。 $t$  ガ(55.1)ニ示ス様ニ陽ハニ入ツテキルトキニハ、直角坐標ト一般坐標トノ間ノ關係ガ、時ノ變化スルニ從ツテ變ツテ來ルコトヲ示シテキルノデアル。此ノ場合一般坐標ヲ rheonomic 坐標ト稱スル。

今考ヘテキル質點系ハ holonomic デアルトスル。(55.1) カラ

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (\nu = 1, 2, \dots, m) \quad (55.2)$$

ヲ得ル。但シ  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  ハ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ヲ  $t$  ニ就テ一回微分シタモノデアツテ、之等ヲ一般速度ノ分値ト稱スル。

質點  $\nu$  ノ假想變位ヲ  $\delta r_\nu$  トシ、此ノ變位ハ  $\delta t=0$ ニ行ハレタト見テヨイモノトスル。ソウスレバ (55.2) ト同様ニ

$$\delta r_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (\nu=1, 2, \dots, m) \quad (55.3)$$

ヲ得ル。

$\nu$  質點ニ働イテキル力ヲ  $\mathbf{K}_\nu$  トスレバ、其ノ運動方程式ハ

$$m_\nu \ddot{r}_\nu = \mathbf{K}_\nu, \quad (\nu=1, 2, \dots, m)$$

デアアルカラ、D'Alembert ノ法則ハ

$$\sum_{\nu=1}^m m_\nu \ddot{r}_\nu \delta r_\nu = \sum_{\nu=1}^m \mathbf{K}_\nu \delta r_\nu \quad (55.4)$$

ヲ與ヘル。此ノ際ニ此ノ系ノ假想變位ニ對シテ仕事ヲ爲ナイ様ナカノ影響ハナイワケデアアルカラ、其ノ種ノ力ハ始メカラ考慮外ニ置イテヨイ。

(55.3) ニヨリ、上式ノ左邊ハ

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m m_\nu \ddot{r}_\nu \delta r_\nu &= \sum_{\nu=1}^m m_\nu \ddot{r}_\nu \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^n m_\nu \ddot{r}_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \end{aligned}$$

トナル。然ルニ (55.2) カラ

$$\frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \quad (55.5)$$

ヲ得ルカラ

$$\begin{aligned} \ddot{r}_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} &= \ddot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{r}_\nu \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{r}_\nu \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{r}_\nu \left( \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{r}_\nu \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial r_\nu}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \end{aligned}$$

トナル。之レハ又 (55.2) ニ依テ

$$\begin{aligned} \ddot{r}_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{r}_\nu \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \dot{r}_\nu^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \dot{r}_\nu^2 \right) \end{aligned}$$

トナル。故ニ

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m m_\nu \ddot{r}_\nu \delta r_\nu &= \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} m_\nu \dot{r}_\nu^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} m_\nu \dot{r}_\nu^2 \right) \right\} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{2} m_\nu \dot{r}_\nu^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{2} m_\nu \dot{r}_\nu^2 \right\} \delta q_i \end{aligned}$$

トナル。

此ノ質點系ノ運動-energy ヲ  $T$  トスレバ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m m_\nu \dot{r}_\nu^2 \quad (55.6)$$

デアアルカラ上式ハ

$$\sum_{v=1}^m m_v \ddot{\mathbf{r}}_v \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i \quad (55.7)$$

トナル.

(55.4) ノ右邊ハ

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^m \mathbf{K}_v \delta \mathbf{r}_v &= \sum_{v=1}^m \mathbf{K}_v \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^m \mathbf{K}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i \end{aligned}$$

デアアルカラ

$$\sum_{v=1}^m \mathbf{K}_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = Q_i \quad (55.8)$$

トスレバ, 上式ハ

$$\sum_{v=1}^m \mathbf{K}_v \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (55.9)$$

トナル. 之レハ此ノ系ニ働イテキル力ガ, 此ノ系ノ假想變位ノ際ニ爲ス仕事ヲ表ハスモノデアツテ, 其レハ一般坐標  $q_i$  ノ假想變位  $\delta q_i$  ノ爲ス仕事  $Q_i \delta q_i$  ノ和デアサレルモノデアルト見テヨイコトヲ示シテキル.

$q_i$  ガ長サヲ示ス坐標デアアルナラバ,  $Q_i$  ノ元ハ仕事ノ元  $[ML^2T^{-2}]$  ヲ長サノ元  $[L]$  デ除シタモノ即チ  $[MLT^{-2}]$  トナルカラ, 之レハ力ヲ表ハシテキルモノト見ラレル.  $q_i$  ガ角ヲ示ス坐標デアアルナラバ,  $Q_i$  ノ元ハ  $[ML^2T^{-2}]$  デアルカラ,  $Q_i$  ハ力トハ見ラレナイ. 此

ノ場合ニハ  $Q_i$  ハ力ノ能率ヲ表ハスモノデアルト見ラレル. ガ, 其ノ何レノ場合ヲ問ハズ, 一般ニ  $Q_i$  ノコトヲ  $q_i$  ノ方向ニ於ケル一般力ノ分値ト稱スル. ダカラ,  $Q_i$  ガ力ヲ表ハシテキルモノカ, 力ノ能率ヲ表ハシテキルモノカハ,  $q_i$  ノ性質カラ判断スベキデ.

(55.7), (55.9) = 依テ, (55.4) ハ

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

トナル. 假想變位ノ如何ニ拘ラズ, 此ノ式ガ成立シテキルベキデアアルカラ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (55.10)$$

ヲ得ル. 之レヲ Lagrange<sup>(1)</sup> ノ運動方程式<sup>(2)</sup> ト稱スル.

質點ニ働イテキル力ガ保存的ノモノデアアルナラバ

$$\mathbf{K}_v = -\text{grad } V_v$$

デアアルカラ

$$\sum_{v=1}^m \mathbf{K}_v \delta \mathbf{r}_v = - \sum_{v=1}^m \text{grad } V_v \delta \mathbf{r}_v$$

(1) Joseph Louis Lagrange (1736—1813). 佛國ノ大數學者. 1736年1月25日伊太利 Turin = 生レ, 1813年4月10日 Paris = テ逝去. 國葬ヲ以テ Pantheon = 葬ラレル.

(2) (35.6), (35.14) ヲ第一種ノ Lagrange ノ方程式ト稱スルコトガアル. 其レニ對シテ, 之レヲ第二種ノ Lagrange ノ方程式ト言フコトガアル

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{v=1}^m \left( \frac{\partial V_v}{\partial x_v} \delta x_v + \frac{\partial V_v}{\partial y_v} \delta y_v + \frac{\partial V_v}{\partial z_v} \delta z_v \right) \\
&= -\sum_{v=1}^m \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V_v}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + \frac{\partial V_v}{\partial y_v} \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + \frac{\partial V_v}{\partial z_v} \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{v=1}^m V_v \right) \delta q_i
\end{aligned}$$

ト書ケルカラ, (55.9) = 依テ

$$Q_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{v=1}^m V_v \right)$$

ヲ得ル. 然ルニ (54.9) = 依テ, 之等ノ力ニヨル此ノ質點系ノ位置-energy ハ

$$V = \sum_{v=1}^m V_v \quad (55.11)$$

デアルカラ

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (55.12)$$

トナル. 隨テ此ノ場合ノ Lagrange ノ運動方程式ハ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (55.13)$$

デアル.

位置-energy  $V$  ハ坐標ノ函數デアツテ, 速度ニハ關係シナイカラ

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

デアル. 故ニ上式 (55.13) ハ

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T-V) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i} (T-V) = 0$$

トシテヨイ.

$$T-V=L \quad (55.14)$$

トスレバ, 之レハ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (55.15)$$

トナル.  $L$  ハ所謂 kinetic potential ヲ一般坐標及ビ一般速度分値ヲ用キテ表ハシタモノデ Lagrange 函數ト呼バレテキル.

例題 1. Hamilton ノ法則ヨリ Lagrange ノ運動方程式ヲ誘導セヨ.

Hamilton ノ法則ハ (54.11) ノ

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T-V) dt = 0$$

デアル.  $T$  ハ一般坐標及ビ一般速度分値ノ函數デアリ,  $V$  ハ一般坐標ノ函數デアルト見テ, 上式ハ

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \right\} dt = 0, \\
&\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right\} dt = 0
\end{aligned}$$

ト書ケル. 然ルニ

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

デアリ,  $\delta q_i$  ハ  $t=t_0, t=t_1$  = 於テ零トナルカラ

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

デアル. 隨テ Hamilton ノ法則ハ

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \right\} \delta q_i dt = 0$$

トナル。之レガ常ニ成立スルタメニハ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

デアコトヲ要スル。

例題2. 空間内ヲ自由ニ動キ得ル質點ノ運動方程式ヲ極坐標  $(r, \theta, \phi)$  ヲ用キテ表ハセ。

質點ノ直角坐標ヲ  $(x, y, z)$  トシ、質量ヲ  $m$  トスル。

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

デアカラ、質點ノ運動-energy ハ

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \end{aligned}$$

トナル。故ニ

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= m\dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, & \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned}$$

ヲ得ル。  $r, \theta, \phi$  ノ増加スル方向ノ力ノ分値ヲ夫々  $F_r, F_\theta, F_\phi$  トスルト、其ノ方向ノ一般力ノ分値トハ次ノ關係ガアル。

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta, \quad Q_\phi = r \sin \theta F_\phi.$$

隨テ Lagrange ノ運動方程式ニ依テ

$$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 - m\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = F_r,$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = rF_\theta,$$

$$mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2mr \sin^2 \theta \dot{\phi} \dot{r} + 2mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} = r \sin \theta F_\phi$$

ヲ得ル。此ノ質點ノ極坐標ヲ表ハシタ加速度分値  $a_r, a_\theta, a_\phi$  ハ上式ノ左邊ヲ夫々  $m, mr, mr \sin \theta$  デ割ツタモノデア。其ノ結果ハ (18.2) ト一致シテキル。

例題3. 固定滑車Aノ溝ヲ通ジル絲ノ一端ニハ質量  $4m$  ノ物體Pガ吊シテアリ、其ノ他端ニハ質量  $m$  ノ動滑車Bガ吊シテアル。Bノ溝ヲ通ジル絲ノ兩端ニハ質量  $m$  ノ物體Qト質量  $2m$  ノ物體Rトガ吊シテアルトセヨ。此ノ時Pハ如何ナル運動ヲスルカ。

Aノ軸カラPニ至ル鉛直距離ヲ  $x$  トシ、Bノ軸カラRニ至ル鉛直距離ヲ  $y$  トスレバ

$$\begin{array}{ll} \text{Pノ下降ノ速サハ} & \dot{x}, \\ \text{B} & \text{''} \quad -\dot{x}, \\ \text{Q} & \text{''} \quad -\dot{x} - \dot{y}, \\ \text{R} & \text{''} \quad -\dot{x} + \dot{y} \end{array}$$

デア。故ニ此ノ質點系ノ運動-energy ハ

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{ 4m\dot{x}^2 + m\dot{x}^2 + m(\dot{x} + \dot{y})^2 + 2m(\dot{y} - \dot{x})^2 \} \\ &= \frac{m}{2} (8\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}) \end{aligned}$$

トナル。隨テ

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m(8\dot{x} - \dot{y}), \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m(3\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

デア。此ノ質點系ノ位置-energy ハ

$$V = -4mgx + mgx + mgy(x+y) - 2mg(y-x)$$



$$= -mgy$$

デアルカラ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -mg$$

トナル. 随テ Lagrange ノ運動方程式ハ

$$8\ddot{x} - \ddot{y} = 0, \quad 3\ddot{y} - \ddot{x} = g$$

トナル. 故ニ

$$\ddot{x} = g/23, \quad \ddot{y} = 8g/23$$

ヲ得ル. P ハ  $g/23$  ノ大サノ等加速度ヲ以テ降下スルノデアル.

### 56. 激衝運動ノ Lagrange 方程式

$m$  箇ノ質點カラナツテキル質點系ニ於テ, 質點ノ質量ヲ  $m_1, m_2, \dots, m_m$  トシ, 之レニソレゾレ  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m$  ノ撃力ガ働イテキルトシ, 其等ノ力積ヲソレゾレ  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_m$  トシヨウ. 質點  $\nu$  ノ撃力  $\mathbf{K}_\nu$  ガ働イタ時刻ノ前後ニ於テノ速度ヲソレゾレ  $\mathbf{v}_{\nu 0}, \mathbf{v}_\nu$  トスレバ, (36.2) ニ依テ

$$m_\nu(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_{\nu 0}) = \mathbf{I}_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (65.1)$$

ノ關係ガアル.

$q_1, q_2, \dots, q_n$  ヲ此ノ質點系ノ一般坐標トシヨウ.

$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$  ヲ上式ニ scalar 的ニ乗ジテ, 其ノ積ヲ凡テノ質點ニ就テ加ヘルト

$$\sum_{\nu=1}^m m_\nu(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_{\nu 0}) \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^m \mathbf{I}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$$

ヲ得ル. 此ノ右邊ニ於テハ, 内力ニ基因スルモノハ互ニ消シ合ツテ零トナルカラ, 外力ニ關スルモノノミヲトレバ充分デアル.

$$\sum_{\nu=1}^m \mathbf{I}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = R_i \quad (56.2)$$

トスルト, 上式ハ

$$\sum_{\nu=1}^m m_\nu(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{v}_{\nu 0}) \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = R_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (56.3)$$

トナル. (56.2) ノ  $R_i$  ハ, (55.8) ト同様ニ一般力積ノ分値ト言ハレルベキモノデアル.

(55.5) ノ

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$$

ノ關係ヲ用キルト

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \dot{\mathbf{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 \right)$$

ヲ得ル. 故ニ

$$\sum_{\nu=1}^m m_\nu \mathbf{v}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{2} m_\nu \mathbf{v}_\nu^2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (56.4)$$

デアル. 但シ  $T$  ハ此ノ質點系ノ運動-energy ヲ表ハス.

撃力ノ働ク場合ニハ, 其レニ依テ質點ノ速度ハ變化スルガ, 其ノ位置ハ瞬間的ニハ變ラナイモノデアルカラ,  $\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$  ハ撃力ノ働イタ直前直後ニ於テ其ノ

値及ビ方向ヲ變ヘナイモノト見テヨイ。故ニ

$$\sum_{v=1}^m m_v \mathbf{v}_{v0} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_0 \quad (56.5)$$

トシテヨイ。  $\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_0$  ハ  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$  ノ撃力ノ働イタ直前ノ値ヲ表ハスモノデアアル。

(56.3) ハ (56.4), (56.5) ニ依テ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_0 = R_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (56.6)$$

トナル。之レヲ激衝運動ノ Lagrange 方程式ト稱スル。

例題 前節ノ例題3ニ於テ、Pガロノ速サデ下方ニ突然降下セシメラレタトスレバ、此ノ質點系ハドノ様ナ運動ヲスルカ?

此ノ場合ニハ(56.6)ハ

$$m(8\dot{x} - \dot{y}) = R_p, \quad m(5\dot{y} - \dot{x}) = 0$$

トナル。故ニ

$$\dot{y} = \frac{1}{3}\dot{x}, \quad \frac{23}{3}\dot{x} = \frac{R_p}{m}$$

ヲ得ル。然ルニ  $\dot{x} = v$  デアルカラ、 $\dot{y} = v/3$  トナル。即チ Pガロノ速サデ突然降下セシメラレルト、Bハロノ速サデ突然ニ上昇ヲ始メ、Qハ  $\frac{4}{3}v$  ノ速サデ上昇シ、Rハ  $\frac{2}{3}v$  ノ速サデ上昇スル。ソウシテ Pガロノ速サデ突然下降セシメル撃力  $R_p$  トロトノ關係ハ

$$v = 3R_p/23m$$

デアラレルノデアアル。

## 57. Lagrange ノ運動方程式 其ノ二

質點系ガ non-holonomic ノ場合即チ質點系ヲ表ハス一般坐標  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ノ數  $n$  ガ、其ノ自由度ノ數ヨリ多イ場合ニ就テ考ヘテ見ヨウ。此ノ場合ニハ一般坐標ハ積分スルコトノ出來ナイ

$$A_{1j} dq_1 + A_{2j} dq_2 + \dots + A_{nj} dq_n + T_j dt = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad (57.1)$$

デ示サレル關係ヲ結ビツケラレテキル。  $A_{1j}, A_{2j}, \dots, T_j$  ハ  $q_1, q_2, \dots, q_n, t$  ノ函數デアアル。何トナレバ若シ(57.1)ガ積分シ得ル様ナモノデアラナラバ、一般坐標ノ間ニ幾ツカノ關係ガ常ニ存シテキルコトニナリ、之等ハ互ニ無關係デアルベキ一般坐標ノ性質ヲ満足シナイカラデアアル。

一般坐標ノ間ニ(57.1)ノ關係ガアルト言フコトハ、此ノ系ガ一種ノ拘束ヲ受ケテキルト解スルコトガ出來ル。此ノ拘束ハ仕事ヲシナイモノデアルト假定シテ置カウ。

此ノ場合ノ運動方程式ヲ得ルタメニハ、此ノ系ガ(57.1)式ノ示ス拘束ヲ受ケテキルトシテ、第35節ニ於テ爲シタト同様ナ方法ヲ第55節ノ結果ヲ修正シテモヨイ。又此ノ系ガ拘束運動ヲシテキルノデアルト見ル代リニ、(57.1)ノ條件ヲ満足スル様ニ假想上ノ力ガ實際ノ力以外ニモ加ハツテキルモノデア

ルトシテ論ジテモヨイ。今、此ノ後ノ方法ヲ取ツテ見ヨウ。

此ノ方法デハ、質點系ハ何等ノ拘束ヲモ受ケテキナイト見ルノデアルカラ、其ノ系ハ第55節デ論ジタ holonomic 系デアルトシテヨイ。ガ、一般力ノ分値  $Q_i$  ノ代リニ、實際其ノ系ニ働イテキル強制力カラ生ジル  $Q_i$  ト、見掛ケノ力カラ生ジル  $Q_i'$  トノ和ヲ用キナケレバナラス。故ニ、(55.10) ノ代リニ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_i', \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (57.2)$$

ヲ得ル。

$Q_i'$  ハ未知ノモノデアルガ、瞬間的拘束ト一致スル任意ノ假想變位ニ對シテハ仕事ヲシナイ様ナモノデアルト言フコトダケハ分ツテキルモノデアル。故ニ (57.1) ノ  $dt=0$  トシタ

$$A_{1j} dq_1 + A_{2j} dq_2 + \dots + A_{nj} dq_n = 0, \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad (57.3)$$

ヲ満足スル  $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$  ニ對シテノ假想ノ仕事デハ其レガ零ニナラネバナラス。即チ

$$Q_1' dq_1 + Q_2' dq_2 + \dots + Q_n' dq_n = 0 \quad (57.4)$$

デアル。

(57.3) ノ  $p$  箇ノ方程式ノソレゾレニ未知ノ函數  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  ヲ乘ジタモノヲ (57.4) カラ引クト

$$\begin{aligned} & (Q_1' - \lambda_1 A_{11} - \lambda_2 A_{12} - \dots - \lambda_p A_{1p}) dq_1 \\ & + (Q_2' - \lambda_1 A_{21} - \lambda_2 A_{22} - \dots - \lambda_p A_{2p}) dq_2 \\ & + \dots + (Q_n' - \lambda_1 A_{n1} - \lambda_2 A_{n2} - \dots - \lambda_p A_{np}) dq_n = 0 \end{aligned}$$

ヲ得ル。  $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$  ハ任意ノ假想變位デ互ニ無關係ノモノデアルカラ、其等ニ對シテ上式ガ常ニ成立スルタメニハ、其等ノ係數ガ凡テ零ニナレバヨイ。即チ

$$Q_i' = \lambda_1 A_{i1} + \lambda_2 A_{i2} + \dots + \lambda_p A_{ip}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (57.5)$$

トスレバ、(57.3), (57.4) ガ同時ニ満足セラレル。

隨テ (57.2) ハ (57.5) ニ依テ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 A_{i1} + \lambda_2 A_{i2} + \dots + \lambda_p A_{ip}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (57.6)$$

トナル。(57.1) カラハ

$$A_{1j} \dot{q}_1 + A_{2j} \dot{q}_2 + \dots + A_{nj} \dot{q}_n + T_j = 0, \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad (57.7)$$

ヲ得ル。之等ノ  $n+p$  箇ノ方程式カラ  $q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  ノ  $n+p$  箇ノ量ヲ定メルコトガ出來ル。

## 58. Hamilton ノ運動方程式

質點系ノ一般坐標ヲ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  トシ、其ノ kinetic-potential ヲ  $L$  トスルト、Lagrange ノ運動方程式ハ (55.15) ニ示シタ様ニ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (58.1)$$

デアル。  $L$  は  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t$  ノ函数デア  
ツテ Lagrange 函数トモ呼バレテキルノデアル。此  
ノ  $L$  ヲ  $\dot{q}_i$  テ微分シタモノヲ  $p_i$  トスル。即チ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (58.2)$$

トスル。此ノ  $p_i$  ヲ一般運動量ノ分値ト稱スル。

(58.2) ハ  $p_i$  ヲ  $q_i, \dot{q}_i, t$  ノ函数トシテ表ハシテキ  
ルノデアルカラ、之等カラ  $\dot{q}_i$  ヲ  $q_i, p_i, t$  ノ函数トシテ  
表ハスコトガ出来ル。故ニ、 $q_i, \dot{q}_i, t$  ヲ變數トシテ取  
扱フコトノ代リニ、 $q_i, p_i, t$  ヲ變數トシテ取扱ツテモ  
差支ガナイ。ソウシタトキニ、 $q_i, p_i$  ヲ正規坐標<sup>(1)</sup>ト稱  
シテキル。

Lagrange 函数  $L$  ノ變分ハ

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i \right) \end{aligned}$$

デアル。然ルニ、(58.2)、(58.1)ニ依テ

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (58.3)$$

ヲ得、隨テ上式ハ

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) \quad (58.4)$$

(1) 基準坐標ト呼ンデキル者モアル。

$$= \sum_{i=1}^n \delta(p_i \dot{q}_i) + \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i \delta q_i - \dot{q}_i \delta p_i)$$

ト書クコトガ出来

$$\delta \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right\} = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i) \quad (58.5)$$

ヲ得ル。

上式左邊ノ括弧内ノ量ヲ正規坐標ヲ用キテ表  
ハシタモノヲ  $H$  トスル。即チ

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (58.6)$$

トスル。此ノ  $H$  ヲ Hamilton ノ函数ト稱スル。

(58.5) ハ

$$\delta H = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i)$$

トナリ、 $H$  ハ  $p_i, q_i$  ノ函数デアルカラ

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

即チ

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (58.7)$$

ヲ得ル。之等ヲ Hamilton ノ正規方程式<sup>(1)</sup>ト言フ。

Lagrange ノ運動方程式ハ第二階級ノ微分方程式デア  
アルガ、正規方程式ハ第一階級ノ微分方程式デアル。

(1) 基準方程式ト稱スル者モアル。Philosophical Transaction, 1835. = 發表セラ  
レタモノデアル。

例題1. 質点系ノ一般坐標ガ scleronomic デアルトキニハ,  
Hamilton 函數ハ總-energy = 等シク, H ツ energy 法則ガ成立スルコ  
トヲ證セヨ.

質点系ノ任意ノ一質点ノ直角坐標ヲ  $x_v, y_v, z_v$  トスルト一  
般坐標  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ガ scleronomic デアルカラ

$$x_v = f_v(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

$$y_v = \varphi_v(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

$$z_v = \psi_v(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

ヲ表ハサレ, 其ノ速度分値ハ

$$\dot{x}_v = \frac{\partial f_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_v}{\partial q_n} \dot{q}_n,$$

$$\dot{y}_v = \frac{\partial \varphi_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_v}{\partial q_n} \dot{q}_n,$$

$$\dot{z}_v = \frac{\partial \psi_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \psi_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \psi_v}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

トナル. 故ニ此ノ系ノ運動-energy T ハ

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_{v=1}^m m_v (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + \dot{z}_v^2) \\ &= A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + A_{nn} \dot{q}_n^2 \\ &\quad + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2A_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (1)$$

トナル. 但シ, 質点ノ數ハ  $m$ , 一般坐標ノ數ハ  $n$ , 任意質点ノ質量  
ヲ  $m_v$  トシタ.  $A_{ij}$  ハ一般坐標ノミノ函數デアツテ, 慣性係數ト  
呼バレテキル.

位置-energy ヲ  $V$  トスルト, 普通ニハ  $V$  ハ一般坐標ノミノ函數  
デアアルカラ,  $\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) デアル. 隨テ一般運動量ノ分

値  $p_i$  ハ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

デアアル.

(1), (2) = 依テ

$$p_i = A_{i1} \dot{q}_1 + A_{i2} \dot{q}_2 + \dots + A_{in} \dot{q}_n, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ヲ得ル. 之レヲ解イテ

$$\dot{q}_i = B_{j1} p_1 + B_{j2} p_2 + \dots + B_{jn} p_n, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

ヲ得ル.  $B_{ji}$  ハ一般坐標ノミノ函數デアツテ, 之等ヲ運動度係數  
ト稱シテキル.

(1) = 示ス様ニ  $T$  ハ一般速度分値  $\dot{q}_i$  ノ二次ノ同次函數デア  
ルカラ, Euler ノ定理ニ依テ

$$2T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n$$

デアアル. (2) = 依テ, 之レハ

$$2T = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i$$

トナリ. (3) = 依テ  $p_i, \dot{q}_i$  ノ函數トシテ表ハサレル. 隨テ (58.6)  
ノ Hamilton ノ函數ハ

$$H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V$$

トナル. 即チ此ノ場合ノ  $H$  ハ總-energy = 他ナラス.

此ノ場合ニ  $H$  モ亦  $t$  ヲ陽ハニ含ンデキナイカラ,  $p_i, q_i$  ノミ  
ノ函數デアアル. 故ニ

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

トナル. 之レハ正規方程式 (58.7) = 依テ, 明カニ

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \text{即チ } H = \text{const.}$$

トナツテ, energy ノ保存サレテキルコトヲ示シテキル.

例題2. 単振子ノ運動方程式ハ

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q$$

デ與ヘラレルコトヲ示セ. 但シ  $m$  ハ質點ノ質量,  $l$  ハ振子ノ長さ,  $q$  ハ  $t$  時ニ於ケル振子ノ絲ガ垂直線ト爲ス角ヲ表ハシテキルモノトスル.  $p$  ハ此ノ場合ノ一般運動量ヲ表ハス.

單振子ノ運動-energy ハ  $T = \frac{1}{2} m(l\dot{q})^2$  デアリ, 位置-energy ハ

$V = -mgl \cos q$  デアルカラ

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q$$

トナル. 隨テ

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q},$$

$$\therefore \dot{q} = \frac{p}{ml^2} \quad (1)$$

ヲ得ル. 此ノ  $\dot{q}$  ノ値ヲ  $L$  ニ入レテ

$$L = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl \cos q$$

ヲ得ル.

$$H = p\dot{q} - L = \text{此ノ } L \text{ 及ビ上式ノ } \dot{q} \text{ ヲ入レテ} \quad (2)$$

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q$$

ヲ得ル. 隨テ

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = mgl \sin q \quad (3)$$

デアル. 此ノ第一式ハ(1)ニ依テ

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (4)$$

ヲ與ヘル.

單振子ノ運動方程式ハ(3), (1)ニ依テ與ヘラレテキル. 即チ

$$l\ddot{q} = -g \sin q$$

デアル. 之レハ(1)ト(3)ノ第二式トニ依テ

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (5)$$

トナル.

### 59. 最小作用ノ法則

一質點ノ位置ヲ定メルノニハ, 其ノ坐標デアル三ツノ量ヲ知ルコトガ必要デアリ, 且ツ充分デアル故ニ, 吾々ノ空間ハ三次空間デアルト言フ.

一般坐標ガ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  デアル質點系ノ位置ハ, 之等ノ  $n$  箇ノ量ヲ知ルコトニ依テ完全ニ決マル. 故ニ,  $x, y, z$  軸ヲ有スル三次空間ト同様ニ,  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ノ  $n$  箇ノ坐標軸ヲ有スル  $n$  次空間ヲ想像スルナラバ, 此ノ  $n$  次空間内ノ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ノ坐標ヲ有スル一點ニ依テ, 質點系ノ位置ヲ代表セシメルコトガ出來ル. 此ノ點ヲ質點系ノ代表點ト呼ブコトニスル.

質點系ガ運動スルニ從ツテ, 質點系ノ代表點ハ  $n$  次空間内ニ其ノ位置ヲ變ヘテ連續曲線ヲ畫ク.

此ノ曲線ヲ質點系ノ路<sup>(1)</sup>ト稱スル。尚ホ分リ易クスルタメニ、横軸上ニ時  $t$  ヲ表ハシ、縦軸上ニ  $q$  ヲトリ、第43圖ニ於ケル AA'BB' デ此ノ質點系ノ路ヲ示シ、其レヲ

第43圖

$$q=f(t) \quad (59.1)$$

ヲ表ハスコトニシヨウ。

第43圖ノ C''CD''D'' ハ質點ノ路 AA'BB' ニ極メテ近イ任意ノ曲線

$$q=g(t) \quad (59.2)$$

ヲ表ハスモノトシ、適當ナ拘束ヲ此ノ質點系ニ加ヘルト、其ノ代表點ガ此ノ曲線上ヲ動キ得ルモノデアルトスル。

A, B ヲソレゾレ任意ノ時刻  $t_0, t_1$  ニ質點系ノ代表點ガトル位置ヲ表ハスモノトスル。  $\Delta t_0, \Delta t_1$  ヲ極メテ短イ時間ヲ表ハスモノトシ、A', B' ヲソレゾレ  $t_0+\Delta t_0, t_1+\Delta t_1$  ニ於ケル質點系ノ代表點ノ位置ヲ表ハスモノトスル。同様ニ、C'', C, D'', D ヲ時刻  $t_0, t_0+\Delta t_0, t_1, t_1+\Delta t_1$  ニ於テ CD 曲線上ヲ動ク代表點ガ占メル位置ヲ表ハスモノトシヨウ。ソウスレバ、A, A', C, C'' ニ於ケル  $q$  ハ、(59.1), (59.2) ニ依テ

(1) 英語デ之レヲ trajectory ト稱シ、質點ノ路 path ト區別シテキル。

$$q_A=f(t_0),$$

$$q_{A'}=f(t_0+\Delta t_0)=f(t_0)+\frac{df}{dt}\Delta t_0,$$

$$q_C=g(t_0+\Delta t_0)=g(t_0)+\frac{dg}{dt}\Delta t_0,$$

$$q_{C''}=g(t_0)$$

トナル。

$$q_{C''}-q_A=(\delta q)_A, \quad q_C-q_A=(\Delta q)_A \quad (59.3)$$

トスレバ、上式カラ

$$(\Delta q)_A=(\delta q)_A+(\dot{q})_A\Delta t_0 \quad (59.4)$$

ヲ得ル。同様ニ

$$(\Delta q)_B=(\delta q)_B+(\dot{q})_B\Delta t_1 \quad (59.5)$$

ノ關係ガ成リ立ツテキル。  $\delta q$  ハ、(59.3) ヲ (59.2) ト比較シテ、 $t$  ヲ獨立變數ト見タトキノ  $q$  ノ變分ヲ表ハシテキルモノデアルコトガ分カル。  $\Delta q$  ハ  $t$  ヲ從屬變數デアルト見テ、其ノ變分  $\delta t$  ガ  $\Delta t$  デアルトキノ  $q$  ノ變分ヲ表ハスモノデアルコトモ容易ニ理解シ得ルデアラウ。尚ホ (59.4), (59.5) ノ關係ハ一般坐標  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ノ總テニ通ジテ成立スルコトモ明カデアル。即チ

$$\Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\Delta t, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (59.6)$$

ガ任意ノ時刻ニ於テ成リ立ツテキルコトガ分カル。

今、此ノ質點系ノ Lagrange 函數ヲ  $L$  トシ、 $L$  ノ時  $t$  ニ就テノ積分ヲ、此ノ系ノ路  $AB$  ニ沿フテ、 $A$  カラ  $B$  マデトツタモノト、 $CD$  ノ路ニ沿フテ  $C$  カラ  $D$  マデトツタモノトノ差ヲ求メヨウ。

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (59.7)$$

トスルト、 $\int_{CD} L dt$  ト  $\int_{AB} L dt$  トノ差ハ上式ニ依テ與ヘラレル  $S$  ノ積分ノ兩限ガ  $\Delta t_0, \Delta t_1$  ノ變化ヲシタトキノ變分ニ相當スル。故ニ (53.10), (53.12), (53.13) ニ依テ

$$\int_{CD} L dt - \int_{AB} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt + L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0$$

ヲ得ル。

$$\Delta S = \int_{CD} L dt - \int_{AB} L dt \quad (59.8)$$

トスレバ上式ハ

$$\Delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt + L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0$$

トナリ、Lagrange ノ運動方程式 (55.15) ニ依テ

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right\} dt + L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_B - \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)_A + L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 \end{aligned}$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + L \Delta t \right]_A^B$$

トナル。(59.6) ニ依テ、之レハ

$$\Delta S = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i + \left( L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \Delta t \right]_A^B \quad (59.9)$$

トナル。

一般運動量ノ分値ヲ  $p_i$  トスレバ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

デアリ、(58.6) ニ依テ

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

デアルカラ、(59.9) ハ

$$\Delta S = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - H \Delta t \right]_A^B \quad (59.10)$$

ト書クコトガ出來ル。

$C, D$  ガソレゾレ  $A, B$  ニ一致シ、其ノ時刻モ夫々ニ  $t_0, t_1$  トナツテキルナラバ、 $A, B$  ニ於テノ  $\Delta q_i$  モ  $\Delta t$  モ共ニ零トナルカラ、(59.10) ノ右邊ハ零ニナル。此ノ場合ニハ  $\Delta S$  ハ  $\delta S$  ニ他ナラヌカラ、(59.10) ハ

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (59.11)$$

トナル。之レハ Hamilton ノ法則 (54.11) デアル。

Lagrange 函數ガ  $t$  ヲ陽ハニ含ンデキナイトキ



ニハ、第58節例題1ニ示シタ様ニ、Hハ總-energyトナリ、且ツenergy法則ガ成立スル。故ニ質點系ノ代表點ガAB曲線上ヲ動クトキノ總-energyヲ $h$ トシ、CD線上ヲ動クトキノ其レヲ $h+\Delta h$ トシ、 $\Delta h$ ハ極メテ小サナ量デアルトシヨウ。此ノ場合ニ、 $\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i$ ヲ時 $t$ ニ就テCD線上ヲCカラDマデ積分シタモノト、AB線上ヲAカラBマデ積分シタモノトノ差ヲ求めルト、(59.8)、(59.10)ニ依テ

$$\begin{aligned} \int_{CD} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt - \int_{AB} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt &= \int_{CD} (h+\Delta h) dt \\ &\quad - \int_{AB} h dt + \Delta S \\ &= (h+\Delta h)(t_1+\Delta t_1-t_0-\Delta t_0) - h(t_1-t_0) \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^n p_i \Delta q_i - H \Delta t \right]_A^B \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n p_i \Delta q_i + t \Delta h \right]_A^B \end{aligned} \quad (59.12)$$

トナル。但シ $\Delta h \Delta t_0$ 、 $\Delta h \Delta t_1$ ノ項ハ高次ノ微小量デアルカラ無視シタ。

C、Dガ夫々A、Bト一致シ、 $\Delta h=0$ デアルトスレバ、(59.12)ハ

$$\int_{CD} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt - \int_{AB} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt = 0,$$

即チ

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt = 0$$

トナル。

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt \quad (59.13)$$

トスレバ、上式ハ

$$\delta A = 0 \quad (59.14)$$

トナル。此ノAヲ作用<sup>(1)</sup>ト稱シテキル。

(59.14)ハ「同ジ兩端ヲ持チ、同ジenergy方程式ヲ満足スル様ニ、質點系ノ代表點ガ働イテキル種々ノ極メテ接近シタ質點系ノ路ニ就テトツタ作用ヲ比較シテ見ルト、實際ノ質點系ノ路ニ就テノ作用ガ極端値ヲ持ツテキル」コトヲ示スモノデアアル。作用ヲトル質點系ノ路ノ長サガ充分ニ小デアルナラバ其レガ極小ニナルコトヲモ證明スルコトガ出來ル。故ニ(59.14)ガ示シテキルコトヲ、**最小作用ノ法則**<sup>(2)</sup>ト稱スル。

例題1. 運動-energyガ一般速度分値ノ二次ノ同次函數デアリ、位置-energyガ一般坐標ノミノ函數デアル様ナ質點系デハ作用ハ

$$A = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt$$

(1) 第48節ニ述べタ作用ト混同シナイ様ニ注意スルコトヲ要スル。

(2) 此ノ法則ハ最初 Maupertuis (1698-1759)ニ依テ Mémoires de l'Acad. de Paris, 1447.ニ不完全ニ發表セラタモノデアアル。

デ與ヘラレルコトヲ證セヨ。但シTハ其ノ系ノ運動-energyヲ表ハス

例題2. 質點系ノ總-energyヲ $h$ トシ、位置-energyヲ $V$ トシ、質點系ニ屬スル任意ノ質點ノ質量ヲ $m_r$ トシ、之レガ微小時間 $dt$ 間ニ畫ク路ノ長サヲ $ds_r$ トスレバ此ノ質點系ノ作用 $\Lambda$ ハ次式デ與ヘラレルコトヲ證セヨ。但シ $m$ ハ質點ノ數ヲ表ハス。

$$\Lambda = \int \sqrt{2(h-V) \sum_{r=1}^m m_r ds_r^2}$$

### 60. 變作用ノ法則

Hamiltonノ法則及ビ最小作用ノ法則デハ、ソレゾレニ(59.7)ノ $S$ 及ビ(59.13)ノ $\Lambda$ ニ依テ表ハサレル積分ヲ、質點系ノ實際ノ路ニ就テトツタモノト、其ノ積分ノ兩限デアアル時刻ニ於テハ其ノ質點系ノ状態ト同ジ状態ヲ持ツ種々ノ假想的ノ路ニ就テトツタモノトヲ比較シタ。

今、其ノ代リニ、(59.17)ノ積分即チ

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (60.1)$$

ヲ、質點系ノ實際ノ路ニ就テトツタモノト同ジ質點系ガ同ジ力ノ下ニ運動シテキル場合ニ、其ノ始メノ條件ガ極メテ僅カニ違ツテキルガ爲メニ生ジテ來ル種々ノ違ツタ質點系ノ路ニ就テトツタモノトヲ比較シテ見ル。

第43圖ノAB及ビCDガ、ソレゾレ此ノ場合ノ質

點系ノ實際ノ路及ビ其レト比較セラレル路ヲ表ハシテキルモノト見得ルカラ、(59.10)ノ

$$\Delta S = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial I_i}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - H \Delta t \right]_A^B$$

ガ此ノ場合ニモ成立スル。

$t_0, t_1$ ニ於ケル $p_i, \Delta q_i, H, \Delta t$ ヲソレゾレ $p_i^0, \delta q_i^0, H^0, \delta t^0; p_i', \delta q_i', H', \delta t'$ トシ、此ノ場合ノ $\Delta S$ ヲ $\delta S$ デ表ハスト、上式ハ

$$\delta S = \sum_{i=1}^n p_i' \delta q_i' - \sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0 - H' \delta t' + H^0 \delta t^0$$

トナル。

尙ホ比較セラルベキ路ハ、實際ノ質點系ノ路ト同ジ時刻ニ始マツテキルモノトスレバ、 $\delta t^0 = 0$ デアアル。積分ノ上限デアアル $t_1$ ヲ、一般ニ任意ノ時刻 $t$ デアルトシ、隨テ其ノ時ノ量ヲ表ハスタメノ添號'ヲ省略スルト上式ハ

$$\delta S = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0 - H \delta t \quad (60.2)$$

トナル。此ノ式ガ示スコトヲHamiltonノ變作用ノ法則ト稱ス。

質點系ノ運動ヲ知ルタメニLagrangeノ運動方程式ヲ用キテモ、Hamiltonノ正規方程式ヲ用キテモイヅレニシテモ其等ヲ解イテ一般坐標 $q_i$ ヲ $t$ ノ函數トシテ表ハシ得タナラバ、其時ニハ $2n$ 箇ノ積分常

數が入ツテ來ル。其等ヲ  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  トシ

$$q_i = q_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (60.3)$$

トシテ表ハシ得タトシヨウ。ソウスレバ、之等ヲ  $t$ ニ就テ微分シテ一般速度分値  $\dot{q}_i$  ヲ亦  $t, c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ ノ函數トシテ表ハスコトガ出來、其等ヲ用ヒテ一般運動量ノ分値  $p_i$  ヲ

$$p_i = p_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (60.4)$$

トシテ表ハスコトガ出來ル。

$t=t_0$  トスレバ、(60.3), (60.4) ハ

$$q_i = q_i^0(t_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$p_i = p_i^0(t_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

トナル。故ニ

$$t, q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0,$$

$$p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$$

ノ  $4n+1$  箇ノ變數ガ (60.3), (60.4) ノ  $2n$  箇ノ關係式デ關係付ケラレテキルモノト見ルコトガ出來ル。隨テ又、之等ノ  $4n+1$  箇ノ變數中ノ任意ノ  $2n+1$  ヲ以テ、殘リノ  $2n$  箇ノ變數ヲ表ハシ得ル筈デアアル。故ニ  $t, q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0, q_1, q_2, \dots, q_n$  ノ  $2n+1$  箇ヲ變數トシテ他ヲ表ハシタトスレバ、 $S$  モ亦其等ノ函數トシテ表ハスコトガ出來ル。此ノ様ニシテ表ハサレタ  $S$  ヲ、Hamilton ノ方法デ表ハサレタ主函數ト稱シ、 $S_H$  デ

表ハスコトニスル。此ノ様ニシタトキ

$$\delta S_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S_H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S_H}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial S_H}{\partial t} \delta t \quad (60.5)$$

トシテ表ハシ得ルコトハ明カデアアル。

(60.2) ノ  $S$  ト (60.5) ノ  $S_H$  トハ全ク同ジモノデアアルカラ、兩式ヲ比較シテ

$$\frac{\partial S_H}{\partial q_i} = p_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (60.6)$$

$$\frac{\partial S_H}{\partial q_i^0} = -p_i^0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (60.7)$$

$$\frac{\partial S_H}{\partial t} = -H \quad (60.8)$$

ヲ得ル。

$S_H$  ハ  $q_i^0, q_i, t$  ノ函數トシテ表ハサレテキルノデアアルカラ、 $\partial S_H / \partial q_i$  ノ内ニハ  $t$ ニ就テノ微分係數ハ含まレテキナイ。  $p_i$  ハ  $\dot{q}_i$  ノ線型函數トシテ表ハサレルモノデアアルカラ、(60.6) ノ右邊ハ  $q_i$  ノ  $t$ ニ就テノ一次微分係數ノミヲ含ンデキル。故ニ (60.6) ハ運動方程式ヲ  $t$ ニ就テ一度積分シタ第一積分ニナツテキル。同様ニ (60.7) ハ  $t$ ニ就テノ微分係數ヲ少シモ含ンデキナイモノデアツテ、一般坐標  $q_i$  ヲ  $p_i^0, q_i^0, t$  ノ函數トシテ表ハシテキルモノデアアルカラ、之等ハ運動方程式ヲ  $t$ ニ就テ二回積分シテ得ラレル第二積分ヲ表ハシテキルモノデアアル。

(60.8) ノ  $H$  ハ Hamilton 函數デアツテ  $t, q_i, p_i$  ノ函數トシテ表ハサレテキルモノデアルカラ、其ノ  $p_i$  ニ (60.6) ノ  $p_i$  ヲ代入シテ

$$\frac{\partial S_{II}}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial S_{II}}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (60.9)$$

ヲ得ル。此ノ式ハ  $S_{II}$  ノ  $t$  ニ就テノ偏微分係數  $\partial S_{II}/\partial t$  ト  $q_i$  ニ就テノ偏微分係數  $\partial S_{II}/\partial q_i$  トヲ含ンデキル。此ノ種ノ微分方程式ヲ **偏微分方程式** ト稱スル。之レニ對シテ、一ツノ變數ニ關スル微分係數ノミヲ含ンデキル方程式ヲ **常微分方程式** ト言フ。

(60.9) ハ  $S_{II}$  ノ一次微分係數ノミヲ含ンデキル。且ツ一般運動量ノ分値  $p_i$  ハ  $L$ 、從ツテ  $H$  ノ中ニ二次ノ項トシテ入ツテ來ルカラ、 $\partial S_{II}/\partial q_i$  ノ二次ノ項ヲ含ンデキル。故ニ (60.9) ハ  $S_{II}$  ニ就テノ第一階級ノ二次ノ微分方程式デアル。此ノ式ヲ **Hamilton ノ微分方程式** ト稱スル。故ニ「Hamilton ノ方法デアサレタ主函數  $S_{II}$  ハ Hamilton ノ微分方程式 (60.9) ヲ満足スル」ト言フコトガ出來ル。之レヲ **Hamilton ノ定理**<sup>(1)</sup> ト稱スル。

例題 質點ヲ鉛直上方ニ投ゲタ場合ニ Hamilton ノ定理ノ成立シテキルコトヲ示セ。

鉛直上方ニ向ツテ軸ノ正ノ方向ヲトル。  $t=0$  ノトキノ質

(1) Philosophical Transaction 1834, p. 247.

點ノ位置ヲ  $z_0$ 、速サヲ  $\dot{z}_0$  トスレバ、(20.2) ハ

$$\dot{z} = -gt + \dot{z}_0$$

トナルカラ、之レヲ積分シテ

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0 \quad (1)$$

ヲ得ル。質點ノ質量ヲ  $m$  トスレバ、其ノ運動-energy ハ

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{z}_0 - gt)^2$$

トナリ、位置-energy ハ

$$V = mgz = mg\left(z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

トナルカラ、Lagrange 函數ハ

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}_0^2 - mgz_0 - 2mg\dot{z}_0 t + mg^2 t^2$$

トナル。隨テ

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L = \frac{1}{2}m\dot{z}_0^2 + mgz_0 \quad (2)$$

トナリ

$$S = \int_0^t L dt = \left(\frac{1}{2}m\dot{z}_0^2 - mgz_0\right)t - mg\dot{z}_0 t^2 + \frac{1}{3}mg^2 t^3 \quad (3)$$

トナル。

(1) ヲ用キテ (2), (3) カラ  $z_0$  ヲ消去スルト Hamilton ノ方法デアサレシタ  $H$  及ビ  $S_{II}$  ヲ得ル。即チ

$$H = \frac{m}{2} \frac{\left(z - z_0 + \frac{1}{2}gt^2\right)^2}{t^2} + mgz_0 \quad (4)$$

$$S_{II} = -\frac{m}{2t} \left(z - z_0 + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 - mgz_0 t - mg \left(z - z_0 + \frac{1}{2}gt^2\right) + \frac{m}{3}g^2 t^3 \quad (5)$$

デアル。(5)ヲ $t$ ニ就テ微分スレバ(4)ノ符號ヲ變ヘタモノヲ得ル。

### 61. Hamilton-Jacobi ノ微分方程式

$H$ ヲ質點系ノ正規坐標 $q_i, p_i$ ヲ用ヒテ表ハシタ Hamilton 函數トシ, Hamilton ノ微分方程式ト同形ノ

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

ヲ満足シ,且ツ

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.1)$$

ヲ満足スル $S$ ガアルトスレバ,其レハ當然

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0 \quad (61.2)$$

ノ偏微分方程式ヲ満足スル。

(61.2)ノ完全解ヲ得タトスレバ,其レガ含ム任意ノ $n$ 箇ノ積分常數ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ トシ,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.3)$$

デ與ヘラレル $n$ 箇ノ $\beta_i$ ヲ,他ノ任意ノ常數トシヨウ。

(61.3)ヲ $t$ ニ就テ微分スルト, $\beta_i$ ハ常數デアルカラ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = 0$$

トナル。然ルニ, $S$ ハ $t, q_i, \alpha_i$ ノ函數デアルカラ,之レ

ハ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} \dot{q}_j = 0 \quad (61.4)$$

ト書ケル。

$\alpha_j$ ハ(61.2)ノ積分常數デアルカラ, $\alpha_j$ ニ任意ノ値ヲ入レテモ(61.2)ハ満足セラレネバナラヌ。故ニ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (61.5)$$

デアラネバナラヌ。然ルニ $H$ ニ於ケル $\alpha_i$ ハ其ノ $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ カラ現ハレテ來ル外ハナイモノデアルカラ

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial S}{\partial q_j} \right)} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}$$

デアリ,(61.1)ニ依テ之レハ

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}$$

ト書クコトガ出來,隨テ(61.5)ハ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} = 0$$

トナル。故ニ(61.4)ト之レトヲ比較シテ

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (61.6)$$

ヲ得ル。

(61.1)ヲ $t$ ニ就テ微分スルト

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \quad (61.7)$$

ヲ得ル。(61.2) ヲ  $q_j$  ニ就テ微分スルト、 $H$  ハ  $t, q_i$ 、 $\partial S / \partial q_j$  ノ函數デアリ、シカモ亦  $\partial S / \partial q_j$  ハ  $q_i$  ノ函數デアルカラ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial S}{\partial q_j} \right)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} = 0$$

ヲ得ル。之レハ (61.1) ニ依テ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ト書ケ、(61.6) ニ依テ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

トナルカラ、(61.7) ハ之レニ依テ

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.8)$$

トナル。

(61.6), (61.8) ハ Hamilton ノ正規方程式デアルカラ (61.2) ノ完全解  $S$  ヲ以テ作ツタ (61.1), (61.3) ハ Hamilton ノ正規方程式ノ解ニナツテキルコトガ分ル。之レヲ **Jacobi ノ定理**<sup>(1)</sup> ト稱シ、(61.2) ヲ **Hamilton-**

(1) 此ノ定理ハ彼レノ死後 1866 年 Clebsch ニ依テ出版セラレタ彼レノ講義 Vorlesungen über Dynamik ニモ載セラレテキル。彼レガ Crelle's Journ. 27, 1837, p. 97; Liouville's Journ. 3, 1837, pp. 60, 161 ニ發表シタモノデアル。

**Jacobi ノ微分方程式** ト言フ。故ニ力學的ノ問題ヲ解クコトハ、此ノ Hamilton-Jacobi ノ微分方程式ヲ解クコトニ歸結スル。

質點系ガ保存的デアル場合ニハ、其ノ系ノ運動-energy  $T$  ト位置-energy  $V$  トノ和ハ常ニ一定デアルカラ

$$T + V = h \quad (61.9)$$

トスルト、Hamilton ノ主函數  $S$  ハ上式ニ依テ

$$S = \int_{t_0}^t I dt = \int_{t_0}^t (T - V) dt = \int_{t_0}^t 2T dt - h(t - t_0)$$

トナリ、第 59 節例題 1 ニ依テ

$$S = A - h(t - t_0) \quad (61.10)$$

トナル。  $A$  ハ作用ヲ表ハス。  $S$  ガ  $t, q_i, \alpha_i$  ノ函數デアル様ニ  $A$  モ亦其等ノ函數デアルカラ、之レヲ **作用函數**<sup>(1)</sup> ト言フ。此ノ  $A$  ガ  $t$  ヲ陽ハニ含ンデキナイトキハ、(61.10) ヲ  $t$  及ビ  $q_i$  ニ就テ偏微分シテ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.11)$$

ノ關係ヲ得ル。

質點系ガ保存的デアル場合ニハ、Hamilton 函數  $H$  ハ總-energy  $h$  ヲ表ハシ、 $t$  ヲ陽ハニハ含ンデキナ

(1) Hamilton ノ示性函數トモ言フ。

イ (61.2) ハ (61.11) = 依テ

$$H\left(q_i, \frac{\partial A}{\partial q_i}\right) = h. \quad (61.12)$$

トナル。之レハ energy 方程式 = 他ナラヌ。

此ノ簡單ナ形ニナツタ Hamilton-Jacobi ノ微分方程式デアツテモ、任意ノ場合ノ解ヲ得ルコトハ困難デアル。作用函数 A ガ

$$A(q_i) = A_1(q_1) + A_2(q_2) + \dots + A_n(q_n) \quad (61.13)$$

ト言フ形デアルトキニハ、(61.12) ハ

$$F_i\left(q_i, \frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right) = \alpha_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.14)$$

ノ  $n$  箇ノ常微分方程式ニ分ケラル。随ツテ、之レヲ

$\frac{\partial A}{\partial q_i}$  = 就テ解イテ

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = p_i(q_i, \alpha_i), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.15)$$

ヲ得、之レヲ積分シテ

$$A_i(q_i) = \int p_i(\alpha_i, q_i) dq_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (61.16)$$

ヲ得、之等ヲ (61.13) = 入レテ A ヲ得、(61.10) = 依テ S

ヲ得ル。

題例 一質點ヲ重力場内デ任意ノ方向ニ投ゲタトキノ拋物線運動ヲ本節ノ方法デ解ケ。

質點ノ質量ヲ  $m$  トシ、質點ノ運動ヲ含ム平面ヲ  $zx$  面トシ、 $x$  軸ヲ水平ニ、 $z$  軸ヲ鉛直上方ニ向ツテトル。質點ノ運動-energy

及ビ位置-energy ハ

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad V = mgz$$

デアルカラ、kinetic-potential ハ

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

随テ一般運動量ノ分値ハ

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_2 = m\dot{z}$$

トナリ、Hamilton 函数ハ

$$H = T + V = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + mgz = h = x \quad (1)$$

トナル。

(61.12) = 依テ、(1) =  $p_1, p_2$  ノ代リニ  $\frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial x}$  ヲ入レテ

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + mgz = x_1$$

ヲ得ル。(61.13) = 従ツテ

$$A(z, x) = A_1(z) + A_2(x) \quad (2)$$

トシ、上式ヲ

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)^2 + mgz = x_1 - x_2, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)^2 = x_2$$

= 分離スル。之等ヲ積分スルト

$$A_1(z) = -\frac{2\sqrt{2}}{3g\sqrt{m}} (x_1 - x_2 - mgz)^{3/2}, \quad A_2(x) = \sqrt{2m} x_2 x \quad (3)$$

ヲ得ル。

(61.10) ハ (2), (3) = 依テ

$$S = -\frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (x_1 - x_2 - mgz)^{3/2} + \sqrt{2m} x_2 x - x_1 t \quad (4)$$

トナル。但シ (61.10) ノ  $t_0$  ハ 0 トシタ。

(16.13) = (4) ノ  $S$  ヲ入レテ

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = -\frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (x_1 - x_2 - m y z)^{1/2} - t = \beta_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = +\frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (x_1 - x_2 - m y z)^{1/2} + \sqrt{\frac{m}{2}} x_2^{-1/2} z = \beta_2 \quad (6)$$

ヲ得ル。之等ガ求メル問題ノ解デアル。  $x_1, x_2, \beta_1, \beta_2$  ハ始メノ條件ヲ決マル。

(5) ヲ  $z$  ニ就テ解イテ

$$z = \frac{x_1 - x_2}{mg} - \frac{1}{2} g \beta_1^2 - \beta_1 g t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (7)$$

ヲ, (5), (6) カラ

$$x = \sqrt{\frac{2}{m}} \alpha_2^{1/2} (\beta_1 + \beta_2 + t) \quad (8)$$

ヲ得ル。  $t=0$  ノトキ  $x=z=0$  トスレバ

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{2} \beta_1^2 m g, \quad \beta_1 + \beta_2 = 0$$

トナリ, (7), (8) ハ

$$z = -\beta_1 g t - \frac{1}{2} g t^2, \quad x = \sqrt{\frac{2}{m}} \alpha_2^{1/2} t$$

トナル。  $t=0$  ノトナキノ質點ノ速度分値ヲ  $v_{0z}, v_{0x}$  トスレバ之等ハ

$$v_{0z} = -\beta_1 g, \quad v_{0x} = \sqrt{\frac{2}{m}} \alpha_2^{1/2}$$

ヲ與ヘ

$$z = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2, \quad x = v_{0x} t$$

トナリ, (21.5) ト全ク相等シイコトヲ示シテキル。(5) ハ任意ノ時刻  $t$  ニ於ケルニヲ與ヘ, (6) ハ質點ノ路ヲ與ヘテキル。

## 第六章

### 質點系ノ特別ナル運動

#### 62. 二體問題

(46.11) ニ於テ太陽ガ一遊星ニ及ボスカ  $\mathbf{F}$  ハ

$$\mathbf{F} = -k \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

デアルコトヲ證シ得タ。此式ニ於テ  $m$  ハ遊星ノ質量,  $\mathbf{r}$  ハ太陽ニ關シテノ遊星ノ位置-vector,  $k$  ハ比例常數ヲ表ハシテキル。勿論太陽及ビ遊星ハ共ニ質點トシテ取扱ツテキル。今若シ遊星ノ質量ヲ  $m_2$ , 遊星ノ太陽ニ關スル位置-vector ヲ  $\mathbf{r}_{12}$ , 太陽ガ遊星ニ及ボスカヲ  $\mathbf{F}_{12}$  ヲ以テ表ハスコトニスルト, 上式ハ

$$\mathbf{F}_{12} = -k \frac{m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (62.1)$$

トナル。

運動ノ第三法則ガ示ス様ニ, 太陽ガ遊星ニ及ボスト同ジ大サデ, 方向ガ反對デアルカヲ遊星ガ太陽ニ及ボシテキル。故ニ之レヲ  $\mathbf{F}_{21}$  トシ, 太陽ノ質量ヲ  $m_1$  トシ, 遊星ニ關シテノ太陽ノ位置-vector ヲ  $\mathbf{r}_{21}$  トスレバ, (62.1) ト同様ニ

$$\mathbf{F}_{21} = -k' \frac{m_1}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} \quad (62.2)$$



デアル。但シ、 $k'$ ハ比例常數デアツテ、 $k$ トハ異ツテ  
キルモノデアアル。

運動ノ第三法則、即チ (48.7)ニ依テ

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \quad (62.3)$$

デアリ、且ツ

$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{21} = 0$$

デアルカラ、(62.1)及ビ(62.2)ニ依テ上式(62.3)ハ

$$km_2 = k'm_1$$

ヲ與ヘル。故ニ

$$k = \kappa m_1, \quad k' = \kappa m_2 \quad (62.4)$$

トスレバ、(62.1)、(62.2)ハ

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \quad (62.5)$$

デ表ハスコトガ出來ル。 $\kappa$ ハ太陽及ビ遊星ノ性質  
ニハ無關係ナ常數デアツテ、C.G.S.單位ヲ用キルト、  
略ボ  $6.658 \times 10^{-8}$ デアルコトガ知ラレテキル。

(62.5)ハ「太陽ト遊星トハ其ノ質量ノ相乗積ニ  
比例シ、距離ノ自乗ニ逆比例スル大サノ力ヲ以テ互  
ニ相引イテキル」コトヲ示スモノデアアル。

太陽ト遊星ノミナラズ、凡テノ天體間、例ヘバ地  
球ト月、或ハ遊星ト遊星トノ間ニモ (62.5)ニ示ス引  
力ガ働イテキルモノト考ヘラレル。Newtonハ尙ホ

之レヲ擴張シテ、凡テノ物體ハ(62.5)ニ示ス引力ヲ相  
互ニ及ボシテキルモノデアラウト言フコトヲ唱ヘ  
タ。之レヲNewtonノ萬有ノ引力法則ト稱スル。

今、 $m_1, m_2$ ノ質量ヲ有スル二質點ガ互ニ萬有引  
力ニ依テ牽引シテキル場合ニ、此等ガドノ様ナ運動  
ヲスルカニ就テ研究シテ見ヨウ。此ノ問題ヲ二體  
問題ト言フ。

任意ノ原點Oニ關シテノ質點1及ビ2ノ位置  
-vectorヲソレゾレ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ トシ、1カラ2及ビ2カラ1  
ニ向ツテキル單位-vectorヲソレゾレ $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}$ トシヨ  
ウ。ソウシタトキニハ、此ノ兩質點ノ運動方程式ハ

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_{21} = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{21}^2} \mathbf{r}_{21}, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_{12} = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \end{aligned} \right\} \quad (62.6)$$

デアアル。之等ヲ加ヘルト、(62.3)ニ依テ

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 0,$$

即チ

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = 0 \quad (62.7)$$

ヲ得ル。

Oヲ原點トシテノ、此ノ質點系ノ質量中心ノ位  
置-vectorヲ $\mathbf{R}$ トスレバ

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (62.8)$$

デアルカラ,上式ハ

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0 \quad (62.9)$$

トナル. 即チ質量中心ノ加速度ガ零ニ等シイノデア  
アルカラ,之レハ質量中心ガ一定ノ方向ニ等速運動  
ヲシテキルコトヲ示ス. 計算ヲ簡便ニスルタメニ,  
此ノ速サヲ零トシ,質量中心ガ静止シテキルモノト  
假定シヨウ.

(62.6) カラ

$$\left. \begin{aligned} m_1 \left[ \mathbf{r}_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \right] &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_{21}] = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{21}^2} [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{21}] \\ m_2 \left[ \mathbf{r}_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \right] &= [\mathbf{r}_2 \mathbf{F}_{12}] = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{12}^2} [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{12}] \end{aligned} \right\} \quad (62.10)$$

ヲ得ル. 隨テ

$$\begin{aligned} m_1 \left[ \mathbf{r}_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \right] + m_2 \left[ \mathbf{r}_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \right] \\ = \frac{\kappa m_1 m_2}{r_{12}^3} \{ [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{12}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{21}] \} \end{aligned}$$

ヲ得ル. 然ルニ

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{21}$$

デアアルカラ

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{12}] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_{21}] = [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{12}] + [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_{21}] - [\mathbf{r}_{21} \mathbf{r}_{21}] = 0$$

デアリ,上式ハ

$$\frac{d}{dt} \left\{ m_1 \left[ \mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right] + m_2 \left[ \mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right] \right\} = 0$$

トナル. 之レヲ積分シテ

$$m_1 \left[ \mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right] + m_2 \left[ \mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right] = \mathbf{A} \quad (62.11)$$

ヲ得ル.  $\mathbf{A}$  ハ積分常數-vector デアル.

質點 1, 2 ノ運動量ヲソレゾレ  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  トスレバ

$$\mathbf{B}_1 = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \mathbf{B}_2 = m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \quad (62.12)$$

デアアルカラ,(62.11) ハ

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{B}_1] + [\mathbf{r}_2 \mathbf{B}_2] = \mathbf{A} \quad (62.13)$$

トナル.

質點 1, 2 ノ原點ニ關シテノ運動量ノ能率ヲソ  
レゾレ  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  トシ,質點系ノ其レヲ  $\mathbf{N}$  トスルト

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{B}_1], \quad \mathbf{N}_2 = [\mathbf{r}_2 \mathbf{B}_2] \\ \mathbf{N} &= \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \end{aligned} \right\} \quad (62.14)$$

デアアルカラ,上式ハ

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \quad (62.15)$$

トナル. 即チ「此ノ質點系ノ原點ニ關スル運動量ノ  
能率ハ一定不變デアアル」コトヲ示シテキル. 此ノ  $\mathbf{N}$   
即チ  $\mathbf{A}$  ノ方向ガ不變軸デ,之レト垂直ナ平面ガ不變  
平面デアアル. 不變軸ヲ  $z$  軸トスレバ,不變平面ハ  $xy$ -  
平面ニ平行ナ平面デアアル. 質點ノ初メノ速度ヲ含  
ム平面ヲ  $xy$  平面ニトツタトスレバ,  $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$  ガ常ニ此  
ノ平面内ニアルカラ,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}, \mathbf{R}$  ハ凡テ常ニ此

ノ平面内ニアルコトニナル. 此ノ $xy$ -平面ヲ特ニ此ノ場合ノ不變面ト稱スル.

質量中心ヲ原點ニトルト,  $\mathbf{R}=0$  デアルカラ,

(62.8) カラ

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 \quad (62.16)$$

ヲ得ル. 隨テ (62.15) ハ

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left[ m_1 \mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right] + \left[ m_2 \mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right] \\ &= \left[ m_1 \mathbf{r}_1 \left( \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) \right] \\ &= \left[ m_1 \mathbf{r}_1 \frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt} \right] \end{aligned}$$

トナル. 然ルニ

$$m_2 \mathbf{r}_1 - m_1 \mathbf{r}_2 = m_2 \mathbf{r}_{21}.$$

デアアルカラ, 之レヲ (62.16) ニ加ヘテ

$$(m_1 + m_2) \mathbf{r}_1 = m_2 \mathbf{r}_{21} \quad (62.17)$$

ヲ得. 上式  $\mathbf{A}$  ハ

$$\mathbf{A} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[ \mathbf{r}_{21} \frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt} \right] = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[ \mathbf{r}_{12} \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} \right] \quad (62.18)$$

トナル.  $\left[ \mathbf{r}_{21} \frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt} \right]$  ハ 2 ヲ中心トシテ 1 ガ畫ク面積速度ニ比例シ,  $\left[ \mathbf{r}_{12} \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} \right]$  ハ 1 ヲ中心トシテ 2 ガ畫ク面積速度ニ比例シテキルモノデアアル. 故ニ此式ハ之等ノ面積速度ガ一定デアアルコトヲ示シテキルノデ

アル. 之レハ Kepler ノ第一法則ト一致シテキル.

(62.6) ノ  $\mathbf{r}_1$  ヲ (62.17) ノ  $\mathbf{r}_1$  デ置キ換ヘテ

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_{21}}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{F}_{21} \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_{12}}{dt^2} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{F}_{12} \end{aligned} \right\} \quad (62.19)$$

ヲ得ル. 故ニ 2 ニ對シテノ 1 ノ相對運動ハ, 2 ガ固定シテ 1 =  $\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{F}_{21}$  ノ力ガ働イテキルト考ヘタトキノ運動ト同ジク, 1 ニ對スル 2 ノ相對運動ハ 1 ガ静止シテ 2 ガ其レカラ  $\frac{m_1 + m_2}{m_1} \mathbf{F}_{12}$  ノ力ヲ受ケテキルト假想シタトキノ運動ニ等シイコトガ分カル.

$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$  トスレバ, 上式ノ第二式ハ

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

トナルカラ

$$\kappa(m_1 + m_2) = M \quad (62.20)$$

ト置クト, 之レハ

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{M}{r^3} \mathbf{r}$$

トナリ, 隨テ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{M}{r^2} \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{M}{r^2} \frac{y}{r} \quad (62.21)$$

ヲ得ル.

(62.18) = 依テ

$$\mathbf{A} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[ \mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]$$

デアルカラ

$$A = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

トナル. 故ニ

$$\frac{A(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = h \quad (62.22)$$

トスルト

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h \quad (62.23)$$

ヲ得ル.  $h$  ハ明カニ常數デアツテ 1 ニ對スル 2 ノ  
畫ク面積速度ノ 2 倍ノ大サヲ表ハスモノデアル.

(62.23) ト (62.21) トカラ

$$\begin{aligned} h \frac{d^2 x}{dt^2} &= -M \left( \frac{x^2}{r^3} \frac{dy}{dt} - \frac{xy}{r^3} \frac{dx}{dt} \right) \\ &= -M \left( \frac{1}{r} \frac{dy}{dt} - \frac{y^2}{r^3} \frac{dy}{dt} - \frac{xy}{r^3} \frac{dx}{dt} \right) \\ &= -M \left( \frac{1}{r} \frac{dy}{dt} - \frac{y}{r^2} \frac{dr}{dt} \right) \\ &= -M \frac{d}{dt} \left( \frac{y}{r} \right), \\ h \frac{d^2 y}{dt^2} &= +M \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{r} \right) \end{aligned}$$

ヲ得ル. 之等ヲ積分スルト

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M}{h} \frac{y}{r} + a', \quad \frac{dy}{dt} = \frac{M}{h} \frac{x}{r} + b'$$

ヲ得, 之等ヲ (62.23) ニ入レテ

$$h = \frac{M}{h} r - a'y + b'x$$

ヲ得ル.  $a', b'$  ハ積分常數デアル.

直角坐標  $x, y$  ノ代リニ極坐標  $r, \theta$  ヲ用キテ

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

トスルト, 上式ハ

$$h = r(M/h - a' \sin \theta + b' \cos \theta)$$

トナル.

$$a' = -C \sin \alpha, \quad b' = C \cos \alpha$$

トスルト, 之レハ

$$r = \frac{1}{M/h^2 + C/h \cos(\theta - \alpha)} \quad (62.24)$$

ト書クコトガ出來ル.  $\theta - \alpha = 0$  ナラバ, 之レハ

$$r = h^2 / (M + Ch)$$

トナリ,  $\theta - \alpha = \pi$  ナラバ

$$r = h^2 / (M - Ch)$$

トナルカラ

$$h^2 / (M + Ch) = a(1 + e)$$

$$h^2 / (M - Ch) = a(1 - e)$$

トスレバ

$$M/h^2 = 1/a(1-e^2), C/h = e/a(1-e^2)$$

ヲ得ル。隨テ (62.24) ハ

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta-\alpha)} \quad (62.25)$$

トナル。之レハ長徑ガ  $2a$ , 離心率  $e$ , 直徑  $2a(1-e^2)$  デアル圓錐曲線ノ焦點ヲ原點トシタトキノ方程式デアアル。若シ  $e < 1$  ナラバ, 之レハ楕圓デアリ,  $e > 1$  ナラバ双曲線,  $e = 1$  ナラバ拋物線デアアル。故ニ 2 ハ 1 ヲ焦點トシタ圓錐曲線ヲ畫クコトガ分カル。之レト同様ニ, 1 ハ又 2 ヲ焦點トスル圓錐曲線ヲ畫クノデアアル。之レハ Kepler ノ第二法則ニ相當スル。

質點ノ運動方程式ガ (46.3), (46.4) ニ依テ

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -f(r) \mathbf{r}$$

テ與ヘラレルトキニハ, 其ノ質點ガ畫ク楕圓軌道ノ半長徑  $a$  ト週期  $\tau$  トハ (46.9) ノ示ス様ニ

$$f(r) = \frac{4\pi^2 a^3 m_2}{r^3 \tau^2}$$

ノ關係ガアル。今ノ場合ニハ, 質點 2 ノ 1 ニ對スル相對運動ハ

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\kappa(m_1+m_2)m_2}{r^2} \mathbf{r}$$

テ與ヘラレルノデアアルカラ, 上式ハ

$$\frac{\kappa(m_1+m_2)m_2}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m_2}{r^3 \tau^2}$$

トナル。故ニ

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\kappa(m_1+m_2)}{4\pi^2} \quad (62.26)$$

ヲ得ル。此ノ右邊ハ運動セル質點 2 ノ質量  $m_2$  ヲ含ンデキルカラ, 質點ノ質量ガ變レバ其レニ從ツテ變ツテ來ル量デアアル。故ニ Kepler ノ第三法則ハ一般ニハ成立シナイノデアアル。

質點 1 ヲ太陽トシ, 質點 2 ヲ一ツノ遊星トシヨウ。其ノ遊星ノ軌道ノ半長徑ノ三乗ト週期ノ自乗トノ比ヲ  $(a^3/\tau^2)_2$  トシヨウ。太陽ノ質量ヲ  $m_1$ , 此ノ遊星ノ質量ヲ  $m_2$  トスレバ,  $(a^3/\tau^2)_2$  ハ (62.26) デ表ハサレル。質量  $m_3$  ノ他ノ遊星ノ相當量ヲ  $(a^3/\tau^2)_3$  トスレバ

$$\left(\frac{a^3}{\tau^2}\right)_3 = \frac{\kappa(m_1+m_3)}{4\pi^2}$$

デアアル。故ニ

$$\left(\frac{a^3}{\tau^2}\right)_2 / \left(\frac{a^3}{\tau^2}\right)_3 = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_3} \quad (62.27)$$

ヲ得ル。  $m_2, m_3$  ヲ  $m_1$  ニ比シテ無視シ得タナラバ, 上式ノ右邊ハ 1 ト見テ差支ガナイ。此ノ様ナ場合ニハ Kepler ノ第三法則ガ成立スルノデアアル。

次表ハ吾ガ太陽系ノ各遊星ニ對スル諸星ヲ地球ヲ標準トシテ表ハシタモノデアアルガ, 之レニ依テ

(62.27) ノ正シイコトガ分ルデアラウ。表中ノ  $a$  ハ太陽カラノ平均距離ヲ表ハシテキル。<sup>(1)</sup> 此ノ表ノ示ス様ニ  $a^3 - \tau^2$  ノ  $a^3$  若シクハ  $\tau^2$  ニ對スル比ハ質量ノ最モ大キイ木星ガ最大デアアル。

	水 星	金 星	地 球	火 星
$m$	0.476	0.82	1	0.1073
$a$	0.387098	0.72333	1	1.52369
$\tau$	0.24084	0.61518	1	1.88082
$a^3$	0.0580046	0.378451	1	3.53746
$\tau^2$	0.0580049	0.378453	1	3.53747
$a^3 - \tau^2$	-0.0000003	-0.000002	0	-0.00001
	木 星	土 星	天王星	海王星
$m$	317	94.8	14.6	17
$a$	5.2028	9.5388	19.1824	30.037
$\tau$	11.8618	29.4560	84.0123	164.616
$a^3$	140.832	867.914	7058.44	27100.0
$\tau^2$	140.701	867.658	7058.07	27098.4
$a^3 - \tau^2$	+0.131	+0.256	+0.37	+1.6

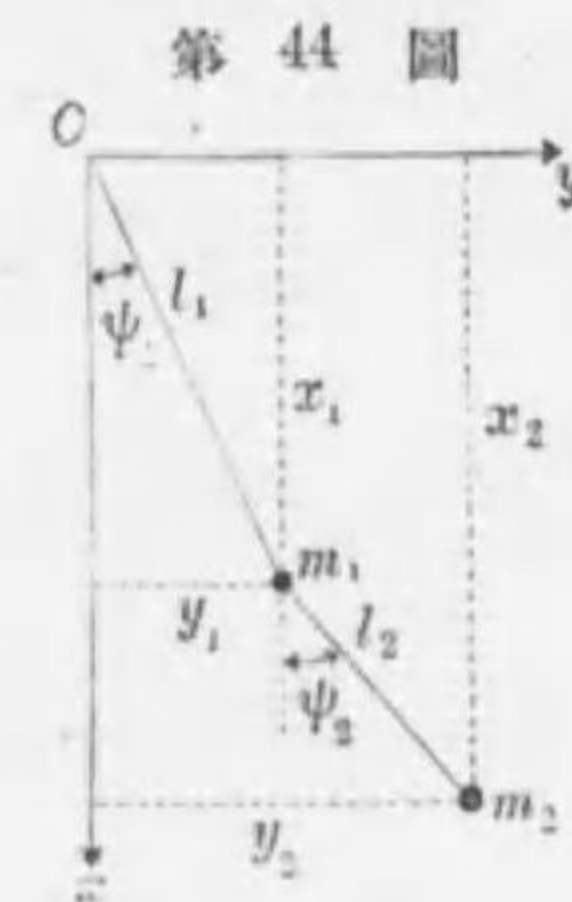
三ツノ質點ガ互ニ (62.5) ノ力ヲ働カセテキルトキノ運動ヲ研究スル問題ヲ三體問題ト稱シテキル。此ノ問題ハ多クノ學者ニ依テ研究セラレテキ

<sup>(1)</sup> Maxwell, Matter and Motion, p. 112, 1920, = 據ル

ルガ、未ダ完全ナ解決ニ到達シテキナイ。

### 63. 複振子

任意ノ一點  $O$  カラ  $l_1$  ノ長サノ絲デ質量  $m_1$  ノ質點ヲ吊シ、ソレカラ  $l_2$  ノ長サノ絲デ質量  $m_2$  ノ質點ヲ吊シテアルトシヨウ。此ノ様ナ装置ヲ複振子ト稱



スル。第44圖ニ示ス様ニ、 $Ox$ ヲ鉛直線トシ、 $m_1, m_2$ ニハ此ノ方向ニ重力ガ働イテキルトシヨウ。 $m_1, m_2$ ノ運動ガ  $xy$ -平面内ニ限ラレテキルトスレバ、 $m_1, m_2$ ノ位置ハ、 $O$ カラノ距離  $l_1, l_2$ ガ不變デアアルカラ、 $Ox$ 線ト絲ガ爲ス角  $\psi_1, \psi_2$ ノミテ定マル。故ニ  $\psi_1, \psi_2$ ヲ  $m_1, m_2$ ヨリナル此ノ質點系ノ一般坐標トシテヨイ。

圖カラ明カナ様ニ

$$x_1 = l_1 \cos \psi_1, \quad x_2 = l_1 \cos \psi_1 + l_2 \cos \psi_2,$$

$$y_1 = l_1 \sin \psi_1, \quad y_2 = l_1 \sin \psi_1 + l_2 \sin \psi_2$$

デアアル。 $\psi_1$ 及ビ  $\psi_2$ ガ極メテ小サナモノダトスレバ

$$x_1 = l_1, \quad x_2 = l_1 + l_2,$$

$$y_1 = l_1 \psi_1, \quad y_2 = l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2$$

トシテモヨイ。本節デハ此ノ様ニシテヨイ場合ニ就テ考ヘルコトニスル。ソウスレバ

$$\frac{dx_1}{dt}=0, \quad \frac{dx_2}{dt}=0,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=l_1 \frac{d\psi_1}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt}=l_1 \frac{d\psi_1}{dt} + l_2 \frac{d\psi_2}{dt}$$

トナルカラ、此ノ質點系ノ運動-energy T ハ

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left( l_1 \frac{d\psi_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_1 \frac{d\psi_1}{dt} + l_2 \frac{d\psi_2}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\psi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 \quad (63.1)$$

トナル。

此ノ系ノ位置-energy V ハ

$$V = m_1 g l_1 (1 - \cos \psi_1) + m_2 g \{ l_1 (1 - \cos \psi_1) + l_2 (1 - \cos \psi_2) \}$$

トスルコトガ出来ル。之レハ

$$\cos \psi = 1 - \frac{1}{2!} \psi^2 + \frac{1}{4!} \psi^4 - \frac{1}{6!} \psi^6 + \dots$$

ノ級數デ  $\psi$  ガ極メテ小サイコトカラ、其ノ第二項以下ヲ無視シテ

$$V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \psi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \psi_2^2 \quad (63.2)$$

ト書クコトガ出来ル。

(63.1), (63.2) カラ Lagrange 函數トシテ

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\psi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2$$

$$- \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \psi_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \psi_2^2 \quad (63.3)$$

ヲ得ル。隨テ

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\psi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \psi_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_2} = m_2 l_2^2 \dot{\psi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_2} = -m_2 g l_2 \psi_2$$

トナリ、Lagrange ノ運動方程式 (55.15) ハ

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\psi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \psi_1 = 0 \quad (63.4)$$

$$m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\psi}_2 + m_2 g l_2 \psi_2 = 0 \quad (63.5)$$

トナル。此ノ兩式ハ  $\psi_1, \psi_2$  ニ就テノ同時微分方程式ト呼バレテキルモノデアル。之等ハ線型デアルカラ、之ヲ解クタメニ

$$\psi_1 = A_1 e^{im\tau}, \quad \psi_2 = A_2 e^{im\tau}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (63.6)$$

ト假定シテ見ル。  $A_1, A_2$  及ビ  $n$  ハ未知ノ常數デアル。之等ノ値ヲ (63.4), (63.5) ニ代入シテ

$$A_1 (m_1 + m_2) l_1 (g - l_1 n^2) - A_2 m_2 l_1 l_2 n^2 = 0, \quad (63.7)$$

$$-A_1 m_2 l_1 l_2 n^2 + A_2 m_2 l_2 (g - l_2 n^2) = 0 \quad (63.8)$$

ヲ得ル。之等カラ  $A_1, A_2$  ヲ消去シテ

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1 n^2) & -m_2 l_2 n^2 \\ -l_1 n^2 & g - l_2 n^2 \end{vmatrix} = 0$$

ヲ得ル。此ノ行列式ヲ解クト

$$n^4 m_1 l_1 l_2 - n^2 g (m_1 + m_2) (l_1 + l_2) + (m_1 + m_2) g^2 = 0 \quad (63.9)$$

トナル。之レハ  $n$  ヲ與ヘル方程式デアリ、 $n$  ハ振動數ニ比例シテキルモノデアルカラ此ノ式又ハ此ノ

行列式ヲ振動數ノ方程式ト稱シテキル。

(63.9) ヲ解イテ

$$n^2 = g \frac{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)}{2m_1 l_1 l_2} \pm g \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{2m_1 l_1 l_2} \sqrt{m_1(l_1 - l_2)^2 + m_2(l_1 + l_2)^2} \quad (63.10)$$

ヲ得ル。隨テ  $n$  ノ値トシテハ  $n_1, n_2, -n_1, -n_2$  ヲ得、  
(63.6) ハ

$$\psi_1 = A_1^{(1)} e^{in_1 t} + A_1^{(-1)} e^{-in_1 t} + A_1^{(2)} e^{in_2 t} + A_1^{(-2)} e^{-in_2 t},$$

$$\psi_2 = A_2^{(1)} e^{in_1 t} + A_2^{(-1)} e^{-in_1 t} + A_2^{(2)} e^{in_2 t} + A_2^{(-2)} e^{-in_2 t},$$

ノ一般解ヲ與ヘル。此ノ  $A_1^{(1)}, A_1^{(-1)}$  等ハ積分常數デア  
ル。之等ノ 8 個ノ積分常數ノ代リニ

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} + A_1^{(-1)} &= B_1^{(1)} \cos \epsilon_1, & A_1^{(2)} + A_1^{(-2)} &= B_1^{(2)} \cos \epsilon_2, \\ i(A_1^{(-1)} - A_1^{(1)}) &= B_1^{(1)} \sin \epsilon_1, & i(A_1^{(-2)} - A_1^{(2)}) &= B_1^{(2)} \sin \epsilon_2, \\ A_2^{(1)} + A_2^{(-1)} &= B_2^{(1)} \cos \epsilon_1', & A_2^{(2)} + A_2^{(-2)} &= B_2^{(2)} \cos \epsilon_2', \\ i(A_2^{(-1)} - A_2^{(1)}) &= B_2^{(1)} \sin \epsilon_1', & i(A_2^{(-2)} - A_2^{(2)}) &= B_2^{(2)} \sin \epsilon_2' \end{aligned} \right\} (63.11)$$

デ決メラレル  $B_1^{(1)}, \epsilon_1$  等ノ 8 箇ノ常數ヲ用キルト

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= B_1^{(1)} \cos(n_1 t + \epsilon_1) + B_1^{(2)} \cos(n_2 t + \epsilon_2), \\ \psi_2 &= B_2^{(1)} \cos(n_1 t + \epsilon_1') + B_2^{(2)} \cos(n_2 t + \epsilon_2') \end{aligned} \right\} (63.12)$$

ヲ得ル。  $B_1^{(1)}, \epsilon_1$  等ノ常數ハ始メノ條件カラ決マツ  
テ來ルモノデアル。

(63.10) ノ根號内ノモノハ決シテ零デハナイカ  
ラ、 $n_1$  ト  $n_2$  トハ決シテ等シクハナイ。  $l_1 = l_2 = l$  デアリ、

且ツ  $m_2$  ガ  $m_1$  ニ比シテ極メテ小ナラバ、(63.10) ハ

$$n^2 = \frac{g}{l} \pm \frac{g}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

トシテヨイ。隨テ此ノ場合ニハ

$$n_1^2 = \frac{g}{l} \left(1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right), \quad n_2^2 = \frac{g}{l} \left(1 - \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)$$

トナル。

$$g/l = n_0^2, \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \delta \quad (63.13)$$

トスルト、上式ハ

$$n_1 = n_0(1 + \delta), \quad n_2 = n_0(1 - \delta)$$

トシテヨイ。

(63.14)

(63.7) ニ於テ  $l_1 = l_2 = l$ ,  $n = n_1$  トシ、 $m_2$  ヲ  $m_1$  ニ比シ  
テ無視スルト

$$A_1^{(1)} m_1 (g - l n_1^2) - A_2^{(1)} m_2 l n_1^2 = 0,$$

$$\therefore \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{m_1}{m_2} \frac{g - l n_1^2}{l n_1^2} = \frac{1}{4\delta^2} \left(\frac{n_0^2}{n_1^2} - 1\right)$$

ヲ得ル。(63.14) ニ依テ

$$\frac{n_0^2}{n_1^2} = \left(\frac{1}{1 + \delta}\right)^2 = (1 + \delta)^{-2} = 1 - 2\delta$$

デアルカラ、上式ハ

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{1}{2\delta}$$

トナル。同様ニ  $n = -n_1$  トシテ



$$\frac{A_2^{(-1)}}{A_1^{(-1)}} = -\frac{1}{2\delta}$$

ヲ得ル。即チ

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{A_2^{(-1)}}{A_1^{(-1)}} = -\frac{1}{2\delta} \quad (63.15)$$

ノ關係ガアル。

(63.7)ニ於テ  $l_1=l_2=l$ ,  $n=\pm n_2$  トシ,  $m_2$  ヲ  $m_1$  ニ比シテ無視シ, (63.14)ヲ用キテ

$$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{A_2^{(-2)}}{A_1^{(-2)}} = +\frac{1}{2\delta} \quad (63.16)$$

ヲ得ル。<sup>(1)</sup>

(63.11)カラ

$$2A_1^{(1)} = B_1^{(1)}(\cos \epsilon_1 + i \sin \epsilon_1) = B_1^{(1)}e^{i\epsilon_1},$$

$$2A_1^{(-1)} = B_1^{(1)}(\cos \epsilon_1 - i \sin \epsilon_1) = B_1^{(1)}e^{-i\epsilon_1},$$

$$2A_2^{(1)} = B_2^{(1)}(\cos \epsilon_1' + i \sin \epsilon_1') = B_2^{(1)}e^{i\epsilon_1'},$$

$$2A_2^{(-1)} = B_2^{(1)}(\cos \epsilon_1' - i \sin \epsilon_1') = B_2^{(1)}e^{-i\epsilon_1'}$$

$$\therefore \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} e^{i(\epsilon_1' - \epsilon_1)}, \quad \frac{A_2^{(-1)}}{A_1^{(-1)}} = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} e^{i(\epsilon_1 - \epsilon_1')}$$

ヲ得ル。故ニ (63.15)ニ依テ

$$\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} e^{i(\epsilon_1' - \epsilon_1)} = \frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} e^{i(\epsilon_1 - \epsilon_1')} = -\frac{1}{2\delta},$$

隨テ

<sup>(1)</sup> (63.7)ノ代リニ (63.8)ヲ用キテモ (63.15), (63.16)ノ結果ヲ得ル。

$$\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}} = -\frac{1}{2\delta}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_1'$$

ヲ得ル。同様ニ (63.11)ノ残リノ式ト (63.16)トカラ

$$\frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}} = +\frac{1}{2\delta}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_2'$$

ヲ得ル。隨テ (63.12)ハ

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= B_1^{(1)} \cos(n_1 t + \epsilon_1) + B_1^{(2)} \cos(n_2 t + \epsilon_2), \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2\delta} B_1^{(1)} \cos(n_1 t + \epsilon_1) + \frac{1}{2\delta} B_1^{(2)} \cos(n_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (63.17)$$

トナル。

始メニ  $m_1$ ヲ持ツテ, 絲ヲ張ツタマ、デ, 其レガ  $Ox$ 線ト小サイ角  $\psi_{10}$ ヲ爲スマデ上グ,  $m_2$ ハ自然ニ垂レタマ、靜カニ手ヲ離シタ場合ヲ考ヘテ見ヨウ。此ノ時ヲ  $t=0$ トスルト, 始メノ條件ハ

$$t=0 \text{ノトキ, } \psi_1 = \psi_{10}, \quad \psi_2 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$$

トナル。 (63.17)ニ此ノ條件ヲ入レルト

$$\psi_{10} = B_1^{(1)} \cos \epsilon_1 + B_1^{(2)} \cos \epsilon_2,$$

$$0 = -\frac{1}{2\delta} B_1^{(1)} \cos \epsilon_1 + \frac{1}{2\delta} B_1^{(2)} \cos \epsilon_2,$$

$$0 = -n_1 B_1^{(1)} \sin \epsilon_1 - n_2 B_1^{(2)} \sin \epsilon_2,$$

$$0 = \frac{1}{2\delta} n_1 B_1^{(1)} \sin \epsilon_1 - \frac{1}{2\delta} n_2 B_1^{(2)} \sin \epsilon_2,$$

$$\therefore B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = \frac{1}{2} \psi_{10}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0 \quad (63.18)$$

ヲ得ル。故ニ (63.17)ハ

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \psi_{10} (\cos n_1 t + \cos n_2 t) = \psi_{10} \cos \frac{n_1 + n_2}{2} t \cos \frac{n_1 - n_2}{2} t,$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4\delta} \psi_{10} (-\cos n_1 t + \cos n_2 t) = \frac{1}{2\delta} \psi_{10} \sin \frac{n_1 + n_2}{2} t \sin \frac{n_1 - n_2}{2} t,$$

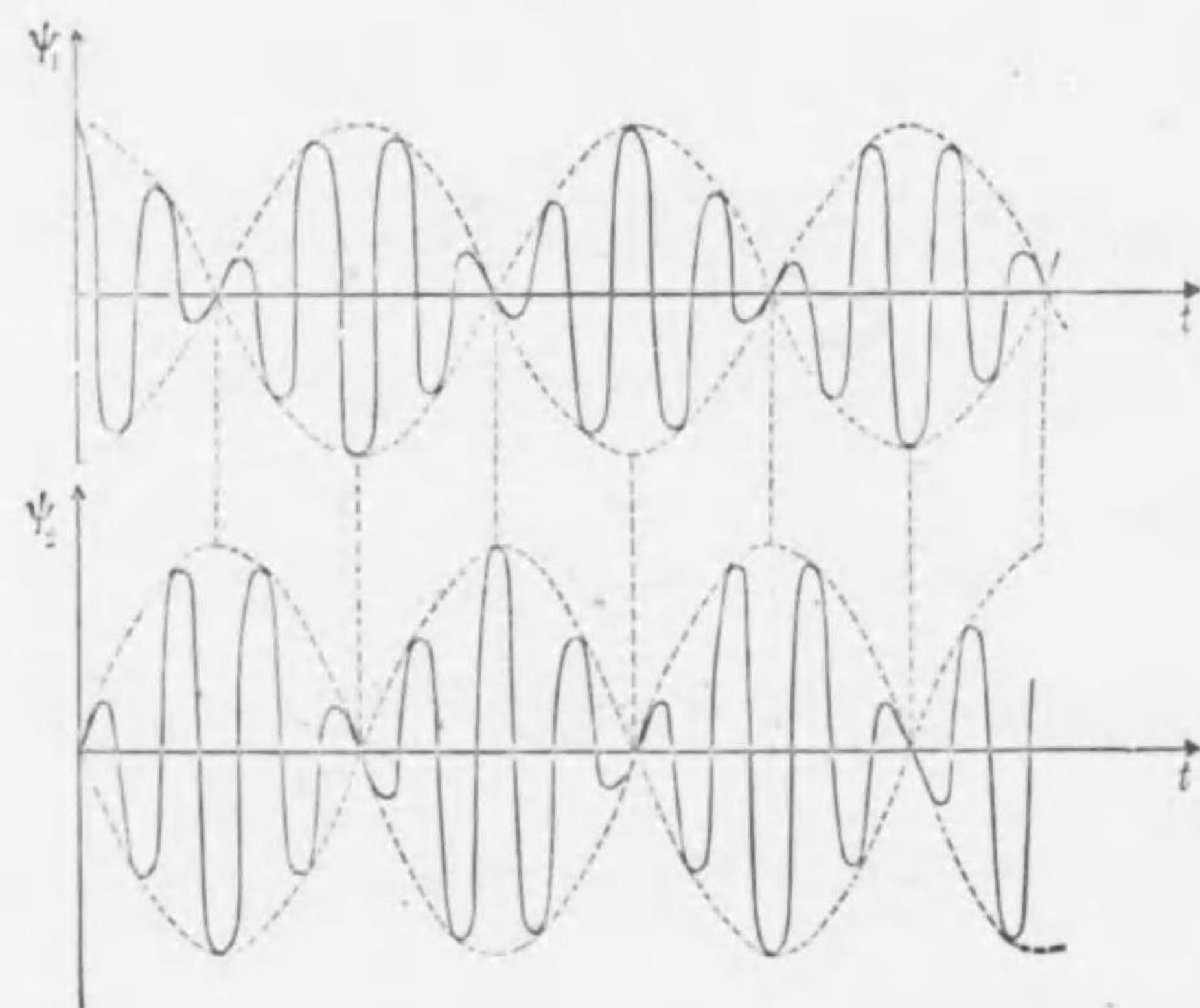
トナリ, (63.14) = 依テ

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{10} \cos n_0 t \cos n_0 \delta t, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2\delta} \psi_{10} \sin n_0 t \sin n_0 \delta t \end{aligned} \right\} \quad (63.19)$$

トナル.

$\delta$  ハ極メテ小サイモノデアルカラ,  $\cos n_0 \delta t$  ノ振動週期ハ  $\cos n_0 t$  ノソレヨリモ大デアル. 故ニ (63.19) ニ示ス  $\psi_1, \psi_2$  ハ週期ガ  $\tau_0 = 2\pi/n_0 \delta$  ノ振動ヲシ, 其ノ振

第 45 圖



幅ガ又  $\tau = 2\pi/n_0$  ノ週期テ振動的ニ變化スルモノト見ルコトガ出來ル. (63.19) ノ  $\psi_2$  ハ (41.7) ノ  $\psi$  ト全ク同様デアル. 第45圖ハ横軸上ニ  $t$  ヲトリ, 縦軸上ニ  $\psi_1$  及ビ  $\psi_2$  ヲ取ツテ其ノ變化ノ模様ヲ略示シタモノデアル.

#### 64. 弦ヲ連結セラレタ質點系ノ振動

同シ質量  $m$  ノ  $n$  箇ノ質點ガ, 等距離  $a$  ヲ隔テ、一ツノ弦ヲ連結セラレ, 其ノ弦ガ引キ張ラレタ状態デ, 其ノ兩端ガ固定セラレテキルトスル. 弦ノ兩端カラ最近ノ質點ニ至ル距離モ亦  $a$  デアルトシ, 弦ノ全長ハ  $l$  デアルトスル. 弦ハ伸縮性ヲ持ツテキルトシ, ドレカノ質點ヲ少シク變位セシメタ後ニ放スト, 弦ノ彈性ニ依テ, 質點ハ元ノ位置ニ歸ラウトシテ此ノ質點系ガ運動ヲスル. 此ノ運動ニ就テ考ヘテ見ヨウ.

弦ノ一端ヲ原點トシ, 引キ張ラレタ弦ノ長サニ沿フテ  $x$  軸ヲトリ, 其レト垂直ニ  $y$  軸及ビ  $z$  軸ヲトル. 弦上ノ質點ノ  $x$  坐標ヲ  $x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots, x_n$  トスル. 任意ノ時刻  $t$  ニ於ケル任意ノ質點  $x_\mu$  ノ變位ノ分値ヲ  $\xi_\mu, \eta_\mu, \zeta_\mu$  トシ, 隨テ其ノ速度分値ヲ  $\dot{\xi}_\mu, \dot{\eta}_\mu, \dot{\zeta}_\mu$  トシヨウ.

弦ノ質量ハ質點ノ質量ニ比シテ無視シ得ルモノトシテ置クト、此ノ時刻ニ於ケル此ノ系ノ運動ノ energy T ハ

$$2T = m \sum_{\mu=1}^n (\dot{\xi}_{\mu}^2 + \dot{\eta}_{\mu}^2 + \dot{\zeta}_{\mu}^2) \quad (64.1)$$

テ與ヘラレル。

此ノ時ノ  $x_{\mu}$  ト  $x_{\mu+1}$  トノ間ノ弦ノ長サハ幾分伸ビテ  $a'$  ニナツテキル。

$$a'^2 = (a + \xi_{\mu+1} - \xi_{\mu})^2 + (\eta_{\mu+1} - \eta_{\mu})^2 + (\zeta_{\mu+1} - \zeta_{\mu})^2$$

デアアルカラ

$$a' = (a + \xi_{\mu+1} - \xi_{\mu}) \left\{ 1 + \frac{(\eta_{\mu+1} - \eta_{\mu})^2}{(a + \xi_{\mu+1} - \xi_{\mu})^2} + \frac{(\zeta_{\mu+1} - \zeta_{\mu})^2}{(a + \xi_{\mu+1} - \xi_{\mu})^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

デアアル。質點ノ平衡状態カラノ變位ガ極メテ小サク、隨テ二質點間ノ相對變位ノ大サガ、其ノ相互距離ニ比シテ極メテ小サイト考ヘルト、上式ハ

$$a' = a \left( 1 + \frac{\xi_{\mu+1} - \xi_{\mu}}{a} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{\mu+1} - \eta_{\mu}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_{\mu+1} - \zeta_{\mu}}{a} \right)^2 \right\} \quad (64.2)$$

トスルコトガ出ル。

此ノ質點系ノ平衡状態カラノ變位ニ依テ生ジタ、時刻  $t$  ニ於ケル、弦ノ單位ノ長サニ就テノ延長、即チ延長率ヲ  $\Delta x$  トスルト

$$a' = a(1 + \Delta x) \quad (64.3)$$

デアアル。故ニ (64.2), (64.3) カラ

$$\Delta x = \frac{\xi_{\mu+1} - \xi_{\mu}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{\mu+1} - \eta_{\mu}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_{\mu+1} - \zeta_{\mu}}{a} \right)^2 \quad (64.4)$$

トシテ差支ガナイコトガ分カル。

質點ノ變位ニ依テ、弦ニハ (64.4) ガ示ス歪ヲ生ジタノデアアル。此ノ歪ニ依テ現ハレル歪力ハ Hooke ノ法則<sup>(1)</sup>ニ從ツテ

$$P = E \Delta x \quad (64.5)$$

トシテヨイ。E ハ此ノ弦ノ Young 率ト稱スルモノデアアル。

弦ヲ引キ張ツテキル力、普通ニ弦ノ張力<sup>(2)</sup>ト呼バレテキルモノ、大サヲ S トシ、弦ノ切斷面積ヲ  $\omega$  トスルト、歪力ノ大サ P ハ單位面積ニ就テノ力ノ大サヲ表ハシテキルモノデアアルカラ、弦ノ長サノ方向ニ働イテキル力ノ大サハ

$$F = S + \omega E \Delta x$$

トナル。故ニ弦ヲ此ノ状態カラ尙ホ變位セシメヨウトスルニハ、此ノ大サノ力ニ反對シテ仕事ヲシナケレバナラス。

(1) 歪力ノ元ハ [ML<sup>-1</sup>T<sup>-2</sup>] デアル。

(2) Robert Hooke (1635—1703) 英國ノ實驗物理學者。此ノ法則ハ一般ニ「歪ハ歪力ニ比例スル」トシテ知らレテキル。1660 年ニ發見セラレタモノデアアル。

(3) 此ノ張力ノ元ハ [MLT<sup>-2</sup>] デアル。

弦ヲ變位セシメ、 $x_\mu$  ト  $x_{\mu+1}$  トノ間ノ長サヲ  $a d(\Delta x)$  ダケ伸バスタメニ要スル仕事ハ

$$dW = F a d(\Delta x)$$

トナル。故ニ  $a$  ノ長サヲ  $a'$  ノ長サニスルニ要スル仕事ハ

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{a'} F a d(\Delta x) \\ &= S a \int_0^{a'} d(\Delta x) + \omega E a \int_0^{a'} \Delta x d(\Delta x) \\ &= S a \Delta x + \frac{1}{2} \omega E a (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

トナル。之レニ (64.4) ノ  $\Delta x$  ノ値ヲ入レテ

$$\begin{aligned} W \cong S(\xi_{\mu+1} - \xi_\mu) + \frac{a}{2} \left\{ \omega E \left( \frac{\xi_{\mu+1} - \xi_\mu}{a} \right)^2 \right. \\ \left. + S \left( \frac{\eta_{\mu+1} - \eta_\mu}{a} \right)^2 + S \left( \frac{\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu}{a} \right)^2 \right\} \quad (64.6) \end{aligned}$$

ヲ得ル。

此ノ仕事ハ弦ガ變位シタトキニ有スル位置-energy ノ一部分ニナル。之レヲ  $V_\mu$  トシ、弦ノ有スル位置-energy ヲ  $V$  トスルト

$$V = \sum_{\mu=0}^n V_\mu$$

トナルコトハ明カデアラウ。故ニ

$$V = \sum_{\mu=0}^n S(\xi_{\mu+1} - \xi_\mu) + \frac{a}{2} \sum_{\mu=0}^n \left\{ \omega E \left( \frac{\xi_{\mu+1} - \xi_\mu}{a} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + S \left( \frac{\eta_{\mu+1} - \eta_\mu}{a} \right)^2 + S \left( \frac{\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu}{a} \right)^2 \right\}$$

トナル。

弦ノ兩端ハ固定セラレテキルノデアラカラ、 $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ ,  $\xi_{n+1} = \eta_{n+1} = \zeta_{n+1} = 0$  デアル。故ニ

$$\begin{aligned} 2V &= a \sum_{\mu=1}^{n+1} \left\{ \omega E \left( \frac{\xi_{\mu+1} - \xi_\mu}{a} \right)^2 + S \left( \frac{\eta_{\mu+1} - \eta_\mu}{a} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + S \left( \frac{\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu}{a} \right)^2 \right\} \quad (64.7) \end{aligned}$$

ガ時刻  $t$  ニ於ケル此ノ質點系ノ持ツ位置-energy ヲ與ヘルコトニナル。

(64.1), (64.7) ヲ用キテ此ノ質點系ニ對スル Lagrange ノ運動方程式ヲ作ルト

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 \xi_\mu}{dt^2} &= \frac{\omega E}{a} (\xi_{\mu+1} - 2\xi_\mu + \xi_{\mu-1}), \\ m \frac{d^2 \eta_\mu}{dt^2} &= \frac{S}{a} (\eta_{\mu+1} - 2\eta_\mu + \eta_{\mu-1}), \\ m \frac{d^2 \zeta_\mu}{dt^2} &= \frac{S}{a} (\zeta_{\mu+1} - 2\zeta_\mu + \zeta_{\mu-1}) \end{aligned} \right\} \quad (64.8)$$

ノ3箇ノ微分方程式ヲ得ル。之等ハ又

$$\frac{d^2 q_\mu}{dt^2} = c^2 (q_{\mu+1} - 2q_\mu + q_{\mu-1}) \quad (64.9)$$

ヲ代表スルコトガ出來ル。但シ  $q_\mu = \xi_\mu$  トスレバ、 $c^2 = \omega E / ma$  デアリ、 $q_\mu$  ヲ  $\eta_\mu$  若シクハ  $\zeta_\mu$  トスレバ、 $c^2 = S / ma$  トスベキデアル。尙ホ  $q_0 = q_{n+1} = 0$  トスベキ

デアル.

(64.8) ノ第一式ハ弦ノ長サノ方向ノ運動ヲ示シ,第二,第三式ハ弦ノ長サト垂直ナ方向ノ運動ヲ示スモノデアル. 前者ヲ縦運動,後者ヲ横運動ト稱スル.  $c^2$ ノ値ガ此ノ二種ノ運動ニ對シテ異ツテキルコト,及ビ違ツタ方向ノ坐標ヲ含ンデキナイコトハ特ニ注意スベキデアル. 之等ハ此二種ノ運動ガ互ニ無關係デアルコトヲ示シテキル.

(64.9)ヲ解クタメニ

$$q_\mu = A_\mu e^{i\lambda t} \tag{64.10}$$

トシテミルト, (64.9)ハ

$$A_{\mu+1} + \left(\frac{\lambda^2}{c^2} - 2\right)A_\mu + A_{\mu-1} = 0 \tag{64.11}$$

トナル. 故ニ

$$\frac{\lambda^2}{c^2} - 2 = C \tag{64.12}$$

トシ, (64.11)ノ  $n$  箇ノ方程式ヲ作ルト

$$\left. \begin{aligned} CA_1 + A_2 + 0 + \dots &= 0, \\ A_1 + CA_2 + A_3 + 0 + \dots &= 0, \\ 0 + A_2 + CA_3 + A_4 + \dots &= 0, \\ \dots & \end{aligned} \right\} \tag{64.13}$$

等ノ  $n$  箇ノ方程式ヲ得ル. 之等カラ  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ヲ消去シテ

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} C & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & C & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & C & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \tag{64.14}$$

ヲ得ル. 此ノ行列式  $D_n$ ハ其ノ行及ビ列ガ共ニ  $n$  箇アルモノデアル

$D_n$ ト同形デ,其ノ列及ビ行ガ  $n-1, n-2$ ノモノヲ  $D_{n-1}, D_{n-2}$ トシ, (64.14)ヲ展開スルト

$$D_n = CD_{n-1} - D_{n-2} \tag{64.15}$$

ヲ得ル.

三角法ノ公式

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

ニ於テ,  $a = n\theta, b = \theta$ トスレバ

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin n\theta \cos \theta$$

トナル. 之レヲ (64.15)ト比較シテ

$$C = 2 \cos \theta, D_n = c \sin(n+1)\theta \tag{64.16}$$

トスレバヨイコトガ分カル. 但シ  $c$ ハ未知ノ常數デ之レヲ定メルタメニ  $n=1$ トシテ見ルト (64.16)ハ

$$D_1 = c \sin 2\theta$$

トナリ, (64.13)ハ

$$D_1 = C$$

トナルカラ、之等ノ  $D_1$  ノ値ト (64.16) ノ第一式トカラ

$$c=1/\sin \theta$$

トスベキコトガ知ラレル。隨テ (64.16) ノ第二式ハ

$$D_n = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} \quad (64.17)$$

トナル。然ルニ (64.14) ニ依テ、 $D_n=0$  デアルベキデア  
ルカラ

$$(n+1)\theta = \nu\pi, \quad (\nu=1, 2, 3, \dots) \quad (64.18)$$

デアルコトヲ要スル。

(64.12), (64.16), (64.18) ニ依テ

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= c^2(2+2\cos \theta) \\ &= 2c^2\left(1+\cos \frac{\nu\pi}{n+1}\right), \quad (\nu=1, 2, 3, \dots) \quad (46.19) \end{aligned}$$

ヲ得ル。即チ (64.19) ハ  $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_n$  ノ  $2n$  箇ノ  
根ヲ與ヘル。之等ノ中ノ任意ノ  $\lambda_\nu$  ニヨル  $q_\mu$  ヲ  $q_{\mu\nu}$   
デ表ハスト、(64.10) ニ依テ

$$q_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i\lambda_\nu t}, \quad (\mu=1, 2, 3, \dots, n)$$

ガ (64.9) ノ一ツノ特解ニナル。

(64.12) ノ  $\lambda = \lambda_\nu$  ヲ入レタモノヲ  $C_\nu$  トスルト

(64.13) ニ依テ

$$C_\nu A_{1\nu} + A_{2\nu} + 0 + \dots = 0,$$

$$A_{1\nu} + C_\nu A_{2\nu} + A_{3\nu} + 0 + \dots = 0,$$

$$0 + A_{2\nu} + C_\nu A_{3\nu} + A_{4\nu} + \dots = 0,$$

.....

等ノ關係ガ充サルベキデア  
ル。故ニ之等ノ關係式  
ニ依テ  $A_{1\nu} : A_{2\nu} : \dots : A_{n\nu}$  ガ定マル。同様ニ  $-\lambda_\nu$  ニ就テ  
ハ

$$q_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} e^{-i\lambda_\nu t}, \quad (\mu=1, 2, 3, \dots, n)$$

ガ (64.9) ノ特解ヲ與ヘ、且ツ  $B_{1\nu} : B_{2\nu} : \dots : B_{n\nu}$  モ (64.13)  
ニ依テ定マルコトガ分カル。故ニ (64.9) ノ一般解  
ハ

$$q_\mu = \sum_{\nu=1}^n (A_{\mu\nu} e^{i\lambda_\nu t} + B_{\mu\nu} e^{-i\lambda_\nu t}), \quad (\mu=1, 2, 3, \dots, n) \quad (64.20)$$

トナリ、 $\mu$  ノ異ツタ  $A_{\mu\nu}$  及ビ  $B_{\mu\nu}$  ノ比ハ知ラレテキ  
ルカラ、 $n$  箇ノ質點ノ始メノ條件ニ依テ、之等ノ積分  
常數ハ完全ニ決メラレル。(64.20) ハ又

$$q_\mu = \sum_{\nu=1}^n C_{\mu\nu} \cos (\lambda_\nu t + \epsilon_\nu) \quad (64.21)$$

ト書クコトガ出來ル。之レハ一般ニ  $n$  箇ノ異ツタ  
振動數ヲ有スル振動ノ組合サレタ運動ヲスルモノ  
デア  
ルコトヲ示シテキル。

## 65. 衝突

一直線上ヲ質量  $m_1$  ノ質點ガ動イテキルトキ其  
ノ後方カラ質量  $m_2$  ノ質點ガ、之レヲ追ツカケテ行ッ  
テ之レト衝突シタトキニハ、之等ノ質點ノ衝突ノ直

前ノ速サ  $v_1, v_2$  衝突直後ノ速サ  $v_1', v_2'$  トノ間ニハ,  
(48.1)ニ示ス様ニ

$$\frac{v_1' - v_1}{v_2 - v_2'} = \frac{m_2}{m_1} \quad (65.1)$$

ナル關係ガアル。

質點ト見做スベキモノガ衝突シタ直前直後ノ速サノ間ニハ,上記(65.1)ノ關係ノ他ニ

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e \quad (65.2)$$

ノ關係ガアツテ,  $e$ ハ物質ノ性質ニノミ關係スル常數デアルコトガ實驗ノ結果トシテ知ラレテキル。<sup>(1)</sup>

此ノ  $e$ ヲ其ノ物質ノ回復係數ト稱シ,普通ニハ0ト1トノ間ニアル値ヲ有シテキルモノデアアル。 $e=0$ ノトキハ其ノ物體ハ非弾性體デアルト言ツテキル。

(65.1), (65.2)ノ兩式カラ容易ニ

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - em_2)v_1 + m_2(1+e)v_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2' &= \frac{m_1(1+e)v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (65.3)$$

ヲ得ル。

若シ  $e=0$  ナラバ

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (65.4)$$

<sup>(1)</sup> 此ノ關係ハ John Wallis 及ビ Christopher Wren (1632—1723)ニ依テ見出サレタモノデアアル。1668.

トナリ,二質點ハ衝突後ハ離レルコトナシニ,共ニ同ジ速サデ同方向ニ進ンデ行クコトヲ示シテキル。

二ツノ球ガ,其等ノ中心ヲ連結スル直線上ヲ動イテ衝突シタ場合ニ, $e \neq 0$ デナイ様ナ物質デアルトキ,其等ノ衝突直後ノ速サハ(65.3)デ與ヘラレル。

兩球ノ衝突直前ノ速度ヲ  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  トシ,之等ノ方向ガ兩球ノ中心ヲ連結シタ直線ト一致シテキナカタトキニハ,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ヲ中心ノ連結線ノ方向ノ分速度  $\mathbf{v}_{1\parallel}, \mathbf{v}_{2\parallel}$  ト,之レト垂直ナ方向ニ於ケル分速度  $\mathbf{v}_{1\perp}, \mathbf{v}_{2\perp}$  トニ分ツタトスレバ,  $\mathbf{v}_{1\parallel}, \mathbf{v}_{2\parallel}$ ニ對シテハ(65.3)ヲ適用シテ衝突直後ノ分速度  $\mathbf{v}_{1\parallel}', \mathbf{v}_{2\parallel}'$ ヲ見出スコトガ出來ル。即チ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{1\parallel}' &= \frac{(m_1 - em_2)\mathbf{v}_{1\parallel} + m_2(1+e)\mathbf{v}_{2\parallel}}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}_{2\parallel}' &= \frac{m_1(1+e)\mathbf{v}_{1\parallel} + (m_2 - em_1)\mathbf{v}_{2\parallel}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (65.5)$$

デアアル。

兩球ノ中心ノ連結線ト垂直ナ方向ニ於ケル衝突直後ノ速度ノ大サハ,兩球ノ表面ノ性質ニ關係スル。表面ガ少シノ摩擦モナイ滑カナモノナラバ,衝突直後ノ此ノ方面ノ速度ハ直前ノ其等トハ變ラナイ。即チ

$$\mathbf{v}_{1\perp}' = \mathbf{v}_{1\perp}, \quad \mathbf{v}_{2\perp}' = \mathbf{v}_{2\perp} \quad (65.6)$$

デ衝突直後ノ速度ガ與ヘラレル。

(65.5)ノ第一,第二式ニ, (65.6)ノ第一,第二式ヲソ  
レゾレ加ヘテ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+e)(\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}), \\ \mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1+e)(\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}), \end{aligned} \right\} \quad (65.7)$$

ヲ得ル。随テ

$$\begin{aligned} & m_1(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1' + e\mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_2' + e\mathbf{v}_2) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+e)(\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}) \{(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2') + e(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\} \end{aligned}$$

ヲ得ル。然ルニ (65.2)ノ相當式

$$\mathbf{v}_{11}' - \mathbf{v}_{21}' = -e(\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{21}) \quad (65.8)$$

ト (65.6)トニ依テ

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' + e(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_{1\perp}' - \mathbf{v}_{2\perp}' + e(\mathbf{v}_{1\perp} - \mathbf{v}_{2\perp}) \\ &= (1+e)(\mathbf{v}_{1\perp} - \mathbf{v}_{2\perp}) \end{aligned}$$

トナル。  $\mathbf{v}_{21} - \mathbf{v}_{11}$  ト  $\mathbf{v}_{1\perp} - \mathbf{v}_{2\perp}$  トハ互ニ垂直ナ vector  
デアルカラ, 其ノ scalar 積ハ零トナル。故ニ

$$m_1(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1' + e\mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_2' + e\mathbf{v}_2) = 0$$

トナル。之レハ

$$\begin{aligned} & (m_1 \mathbf{v}_1'^2 + m_2 \mathbf{v}_2'^2) - e(m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2) \\ & - (1-e)(m_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2') = 0 \end{aligned} \quad (65.9)$$

ト書ケル。此ノ兩邊ニ

$$e(m_1 \mathbf{v}_1'^2 + m_2 \mathbf{v}_2'^2) - (m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2)$$

ヲ加ヘルト

$$\begin{aligned} & (1+e)\{(m_1 \mathbf{v}_1'^2 + m_2 \mathbf{v}_2'^2) - (m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2)\} \\ & - (1-e)(m_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2') = e(m_1 \mathbf{v}_1'^2 + m_2 \mathbf{v}_2'^2) \\ & \quad - (m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2) \end{aligned}$$

トナリ, 之レニ (65.9)ヲ加ヘ適當ニ移項シテ

$$\begin{aligned} & (1+e)\{(m_1 \mathbf{v}_1'^2 + m_2 \mathbf{v}_2'^2) - (m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2)\} \\ & = -(1-e)\{m_1(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)^2 + m_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2)^2\} \end{aligned} \quad (65.10)$$

ヲ得ル。

T, T'ヲ此ノ兩球カラナツテキル質點系ノ衝  
突前後ニ於ケル運動-energyトスレバ

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2), \quad T' = \frac{1}{2}(m_1 \mathbf{v}_1'^2 + m_2 \mathbf{v}_2'^2)$$

デアルカラ, (65.10)ハ

$$T' - T = -\frac{1-e}{1+e} \frac{1}{2} \{m_1(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1)^2 + m_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2)^2\} \quad (65.11)$$

トナル。普通ノ物體デハ  $e > 1$ デアルカラ, 上式ハ衝  
突ニ依テ其ノ系ノ運動-energyハ減少スルモノデア  
ルコトヲ示シテキル。

$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2$ ハ,  $m_1, m_2$ ノ衝突後ノ速度ヲ得ン  
ガタメニ, 其等ノ衝突前ノ速度ニ加フベキ速度デア  
ル。故ニ (65.11)ハ「此ノ系ノ衝突ニヨル運動-energy  
ノ減少ハ衝突後ノ各球ノ速度ヲ得ンガタメニ各球



ニ加フベキ速度デ各球ガ運動シテキルトキ、此ノ系ガ有スル運動-energy ノ  $\frac{1-e}{1+e}$  倍デアルコトヲ示スモノデアルト言ツテヨイ。

$v_{1\perp} = v_{2\perp} = 0$  ノトキハ直衝突ト稱シ、 $v_{1\perp}$ 、 $v_{2\perp}$  或ハ其ノイヅレカガ存在シテキルトキハ斜衝突ト稱スル。

## 第七章

### 相對性力學

#### 66. Einstein ノ相對性理論

第46節及ビ第62節ニ於テ述ベタ様ニ、地球ハ太陽ヲ其ノ焦點トシタ楕圓軌道上ヲ動イテキルト見ルコトガ出來ル、此ノ地球ノ太陽ニ對スル相對速度ヲ決定スルコトハ容易デアルガ、第28節ニ於テ述ベタ様ニ、地球ノ絶對速度ヲ決定スルコトハ不可能デアル。

十七世紀ノ後半ニ於テ、光ガ空間ヲ傳播スルニハ有限ノ時間ヲ要スルコトガ知ラレ、其ノ傳播現象ヲ説明スルタメニ媒質 **Aether** ノ存在ガ假定セラレタ。1728年ニ **Bradley**<sup>(1)</sup> ガ發見シタ光行差ノ現象ハ、此ノ **aether** ガ絶對的靜止ノ標準系デアルト想像シ得ベキコトヲ示シタ。故ニ地球ノ絶對速度ハ光學的方法ヲ用キテ、此ノ假想媒質 **aether** ニ對スル速度ヲ測定スルコトニ依テ決定セラレルデアラウトノ考ヘガ、1886年ニ **Michelson**<sup>(2)</sup> ノ實驗トナツテ現ハレタ

(1) James Bradley (1693—1762), 英國 Oxford 大學ノ天文學教授。

(2) Albert Abraham Michelson (1852—1931) 米國 Chicago 大學ノ物理學教授。

ガ、ソノ結果ハ豫想ニ反シテ地球ノ aether ニ對スル速度ハ殆ド零ニ等シト解スベキコトヲ示シタノデアツタ。

Aether ハ又電氣ノ媒質デアルト考ヘラレテキタカラ、電氣學的ノ方法ニ依テ、地球ノ絶對速度ヲ求メルコトガ試ミラレタガ、其等ノ凡テノ結果モ亦 aether ニ對スル地球ノ速度ガ殆ド零ニ等シイコトヲ示シタノデアツタ。

之等ノ事實ヲ Einstein<sup>(1)</sup> ハ絶對的ノ運動ナルモノハ力學的ノ方法ノミナラズ、如何ナル物理學的方法ニ依テモ決定スルコトガ出來ナイコトヲ示スモノダト解シタ。ソウスレバ、「運動ハ絶對的ノモノデナク、相對的ノモノデアアル」ト言フ Galilei ノ相對性法則ハ力學的現象ニ於テノミナラズ、凡テノ物理學的現象ニ於テモ眞實デアルト思惟スルコトガ出來ル故ニ Einstein ハ 1905 年ニ「物理的現象ニ關スル法則ハ任意ノ坐標系 S ニ關シテモ、其レニ對シテ等速度運動ヲシテキル坐標系 S' ニ關シテモ、全く同ジ形デ表ハサレルモノデアアル」ト言フ法則ヲ發表シタ。之レヲ Einstein ノ相對性ノ法則<sup>(2)</sup> ト言フ。例ヘバ、所謂眞

(1) Albert Einstein (1879—). 獨逸 Berlin 大學教授 Kaiser-Wilhelm Institut ノ所長。

(2) Postulate トモ稱サレテキル。

空中ニ於テ、一點カラ出タ光ノ影響ガ同時ニ到達スル點ノ軌跡ハ、光源ヲ中心トスル球面トナリ、其ノ球ノ半徑ハ時ト共ニ一定ノ大サデ増大スル。即チ一ツノ點光源カラ出タ光ハ球面波トナツテ傳播スル。此ノ光ノ傳播ノ現象ハ、S 系ニ於テ觀測シテモ、S' 系ニ於テ觀測シテモ、全く同様デアリ、隨テ其ノ現象ヲ記載スルナラバ、S 系ニ於テハ其ノ波面ハ

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (66.1)$$

デ表ハサレ、S' 系ニ於テハ

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2 t'^2 \quad (66.2)$$

トナリ、之等ハ全く同形トナルノデアアル。但シ光源ハ  $t=t'=0$  ノトキ S 及ビ S' 系ノ原點ニアツタトシ、S 及ビ S' 系デ測ツタ光ノ傳播ノ速サヲソレゾレ  $c$  及ビ  $c'$  デ表ハシタ。

尙ホ Einstein ハ「光ノ真空中ニ於ケル傳播ノ速サ  $c$  ハ、光源ガ靜止シテキルトキモ、光源ガ等速度運動ヲシテキルトキモ、全く同ジデアアル」トノ假定ヲ置イタ。此ノ假定ヲ光速不變ノ法則ト稱スル。

相對性ノ法則ト光速不變ノ法則トヲ基礎トシテ組ミ立テラレタ理論ヲ Einstein ノ相對性理論<sup>(1)</sup> ト

(1) 此ノ理論ハ Einstein ガ Annalen der Physik, 1905 年ニ始メテ發表シタモノデアアル。等速度運動ノ場合ニ限ラレテキルカラ、1916 年ニ發表セラレタ一般相對性理論ニ對シテ、特殊相對性理論ト呼バレテキル。

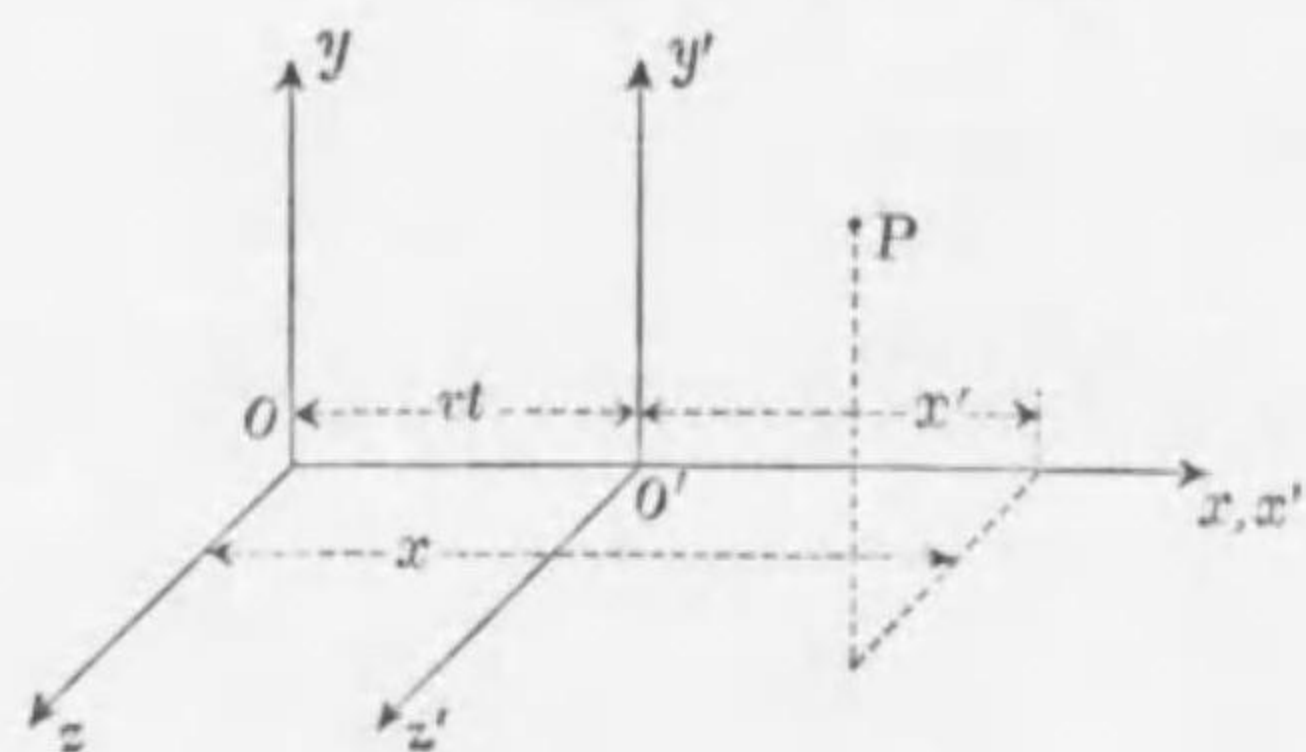
稱シテキル。

### 67. Lorentz-Einstein / 變換式

相對性理論ニ於ケル基礎ノ二ツノ法則ヲ假定シテ、一ツノ坐標系 S ニ對シ、其ノ  $x$  軸ノ正ノ方向ニ  $v$  ノ大サノ等速度運動ヲシテキル運動坐標系  $S'$  ガアルトシ、S 系ニ於ケル坐標  $x, y, z$ 、時  $t$  ト、 $S'$  系ニ於ケル坐標  $x', y', z'$  及ビ時  $t'$  トノ間ニトノ様ナ關係ガ成立シテキルカラ求メテ見ヨウ。

$t=t'=0$  ノトキ、S 系ト  $S'$  系トガ全ク合致シ、 $t>0$ 、 $t'>0$  ノトキ、 $S'$  系ノ原點  $O'$  ハ  $x$  軸上ヲ動キ、 $y', z'$  軸ハ常ニ  $y, z$  軸ニ平行シテキルトスル。今、Galilei ノ變

第 46 圖



換式 (28.2) ヲ一般化シテ

$$\left. \begin{aligned} x' &= k(x - vt), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \\ t' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t \end{aligned} \right\} \quad (67.1)$$

ト假定シテ見ル。  $k, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  ハコレカラ求メヨ

ウトスル未知ノ函數デアル。

$t=t'=0$  ノトキ、原點  $O$  ニアル光源カラ光ガ出タトスレバ、其ノ光波面ハ S 系ニ於テハ (66.1)、即チ

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (67.2)$$

デア表ハサレル。

相對性ノ法則ニ依テ、 $S'$  系ニ於テハ此ノ光波面ハ (66.2)、

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2 t'^2$$

デア表ハサレルガ、光速不變ノ法則ニ依テ

$$c = c' \quad (67.3)$$

デアアルカラ、之レハ

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (67.4)$$

トナル。

故ニ (67.1) ヲ (67.4) ニ代入スレバ

$$\begin{aligned} & (k^2 - \alpha^2 c^2)x^2 + (l^2 - \beta^2 c^2)y^2 + (l^2 - \gamma^2 c^2)z^2 \\ &= 2c^2(\alpha\beta xy + \beta\gamma yz + \gamma\alpha zx) \\ &+ 2(k^2 vx + c^2 \alpha \delta x + c^2 \beta \delta y + c^2 \gamma \delta z)t \\ &+ (-k^2 v^2 + c^2 \delta^2)t^2 \end{aligned}$$

トナル。之レハ光ノ傳播現象ヲ S 系ニ關シテ表ハシタモノニ外ナラヌカラ、(67.2) ト全ク同ジモノデアラネバナラヌ。其ノタメニハ

$$\left. \begin{aligned} \beta = \gamma = 0, \quad k^2 - \alpha^2 c^2 = l^2, \\ k^2 v + c^2 \alpha \delta = 0, \\ -k^2 v^2 + c^2 \delta^2 = c^2 l^2 \end{aligned} \right\} \quad (67.5)$$

デアアルコトガ必要デアアル。

$$\delta = \lambda k$$

トスルト, (67.5)ノ第三式ハ

$$\alpha = -k v / c^2 \lambda$$

ヲ與ヘ, 第二式ト第四式トハ

$$k^2 (1 - v^2 / c^2 \lambda^2) = l^2,$$

$$k^2 (\lambda^2 - v^2 / c^2) = l^2$$

トナル。故ニ此ノ兩式ガ同時ニ成立スルタメニハ

$$\lambda = 1$$

トスベキコトガ分カル。隨テ

$$\left. \begin{aligned} \alpha = -k v / c^2, \quad \beta = \gamma = 0, \\ \delta = k = \frac{l}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (67.6)$$

ヲ得ル。

SトS'トニ於テハ, 共ニ同ジ長サノ單位ヲ用キテキルトスレバ,  $l=1$ トスベキデアアルカラ, (67.6)ニ於テ  $l=1$ トシタモノヲ (67.1)ニ入レテ

$$\left. \begin{aligned} x' = k(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' = k\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \\ k = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (67.7)$$

ヲ得ル。之レヲ Lorentz-Einstein<sup>(1)</sup>ノ變換式ト稱スル。之等ヲ  $x, y, z, t$ ニ就テ解クト

$$\left. \begin{aligned} x = k(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \\ t = k\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (67.8)$$

ヲ得ル。之レハ逆變換式デアアル。

$(v/c)^2$ ガ1ニ比シテ無視シ得ル程小サナ場合ニハ  $k=1$ トシテ差支ガナイ。此ノ様ナ場合ニハ, (67.7)ハ

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

トナル。之レハ (28.2)ノ Galileiノ變換式デアアル。

任意ノ點PノO點ニ關スル位置-vectorヲ  $\mathbf{r}$ トシ, O'點ニ關スル位置-vectorヲ  $\mathbf{r}'$ トスレバ, (67.7)ノ第一式ハ

$$\mathbf{r}'\mathbf{i} = k\{(\mathbf{r}\mathbf{i}) - vt\} \quad (67.9)$$

ト書ケ, 第二式ト第三式トヲ組合セタモノハ

$$\mathbf{r}' - (\mathbf{r}'\mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{i})\mathbf{i} \quad (67.10)$$

ト書ケル。iハ  $x$ ノ正ノ方向ノ單位 vectorデアツテ今ハ S'系ノ運動ノ速度  $\mathbf{v}$ ヲ表ハス單位 vectorデアアル。(67.9)ト(67.10)トカラ

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{i})\mathbf{i} + k\{(\mathbf{r}\mathbf{i}) - vt\}\mathbf{i}$$

(1) Hendrik Antoon Lorentz (1853—1928) オランダ Leidenノ數理物理學教授

$$= \mathbf{r} + (k-1)(\mathbf{r}\mathbf{i}) - k\mathbf{v}t$$

$$= \mathbf{r} + \left\{ \frac{k-1}{v^2}(\mathbf{r}\mathbf{v}) - kt \right\} \mathbf{v}$$

ヲ得ル。(67.7)ノ第四式ハ

$$t' = k \left\{ t - \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{c^2} \right\}$$

デアアル。故ニ S'系ガ S系ニ對シテ  $\mathbf{v}$ ノ等速度運動ヲシテキルトキノ Lorentz-Einstein 變換式ハ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \left\{ \frac{k-1}{v^2}(\mathbf{v}\mathbf{r}) - kt \right\} \mathbf{v}, \\ t' &= k \left\{ t - \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{c^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (67.11)$$

トナル。

### 68. 同時,長サ及ビ時

Lorentz-Einstein ノ變換式(97.7)ニヨルト,靜止坐標系 Sト,其レニ對シテ S系ノ  $x$ ノ正ノ方向ニ  $v$ ノ等速度運動ヲシテキル運動系 S'トテ測ツタ時ノ間ニハ

$$t' = k \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (68.1)$$

ナル關係ガアル。'ガ  $t$ ノミナラズ,  $x$ ニモ關係スルト云フコトハ極メテ重大ナ意義ヲ有シテキルモノデアアル。故ニ次ニ其ノ二三ニ就テ説明シヨウ。

S系ノ異ツタ任意ノ二點  $x_1, x_2$ ニ於テ,同時刻ニ時ヲ測ツタトスレバ,  $x_1$ ニ於テ測ツタ時  $t_1$ ト  $x_2$ ニ於テ測ツタ時  $t_2$ トハ相等シク

$$t_1 - t_2 = 0 \quad (68.2)$$

デアアル。然ルニ其ノ時刻ニ, S'系ニ於ケル S系ノ  $x_1, x_2$ ニ相當シタ二點  $x'_1, x'_2$ テ測ツタ時ハ  $t'_1, t'_2$ デアッタトスレバ, (68.1)ニ依テ

$$t'_1 = k \left( t_1 - \frac{vx_1}{c^2} \right),$$

$$t'_2 = k \left( t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \right)$$

デアアルカラ

$$t'_1 - t'_2 = k \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \neq 0 \quad (68.3)$$

トナル。之レハ S系ノ異ツタ任意ノ二點テ同時刻ダト稱シテキル時ハ, S'系ノ相當點テハ同時刻ニナツテキナイコトヲ示シテキル。即チ「同時ト言フコトハ, 坐標系ノ異ルニ從ツテ違ツテキルモノデアアル」コトガ分カル。

次ギニ, S系ノ軸上ニ長サ  $l$ ノ棒ガ置カレテキテ, 其ノ兩端ヲ  $x_1, x_2$ デアルトスレバ

$$x_2 - x_1 = l \quad (68.4)$$

デアアル。此ノ棒ノ長サヲ S'系テ測ルタメニハ, S'系ニ於テ同時刻ニ棒ノ兩端ヲ記シ付ケテ, 其レヲ  $x'_1,$

$x_2'$  トシ、 $S'$  系ニ於ケル物指テ  $x_1'$  ト  $x_2'$  トノ距離

$$x_2' - x_1' = l' \quad (68.5)$$

ヲ測レバ、此ノ  $l'$  ガ  $S'$  系デ測ツタ棒ノ長さヲ表ハスモノニナル。然ルニ (67.8) ニ依テ

$$x_1 = k(x_1' + vt')$$

$$x_2 = k(x_2' + vt')$$

ナル關係ガアルカラ

$$x_2 - x_1 = k(x_2' - x_1')$$

トナリ、(68.4)、(68.5) ニ依テ

$$l = kl'$$

即チ

$$l' = l\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (68.6)$$

ヲ得ル。

同様ニ  $S'$  系ノ軸上ニ  $l$  ノ長さノ棒ガアリ、其ノ兩端ノ坐標ヲ  $x_1'$ 、 $x_2'$  トスルト

$$x_2' - x_1' = l$$

デアアル。此ノ運動シテキル棒ノ長さヲ  $S$  系デ測ルタメニハ、 $S$  系ニ於テ同時ニ其ノ棒ノ兩端ト一致スル點  $x_1$ 、 $x_2$  ヲ記シ付ケ、 $S$  系ニアル物指テ其ノ距離ヲ測レバヨイ。之レヲ  $l'$  トスレバ

$$x_2 - x_1 = l'$$

デアアル。(67.7) ニ依テ

$$x_1' = k(x_1 - vt), \quad x_2' = k(x_2 - vt),$$

デアアルカラ

$$x_2' - x_1' = k(x_2 - x_1),$$

即チ

$$l = kl',$$

$$l' = l\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

トナリ、(68.6) ト同ジモノヲ得ル。

棒ト同ジ状態ニアル觀測者ガ測ツタ棒ノ長さ  $l$  ヲ其ノ固有ノ長さト稱スルナラバ、(68.6) ハ「棒ト異ツタ状態ニアル觀測者ガ測ツタ棒ノ長さハ、常ニ其ノ固有ノ長さヨリモ小デアアル」コトヲ示シテキル。故ニ其ノ觀測者ニハ棒ノ長さが短縮シタカノ如キ觀ヲ呈スルノデアアル。之レヲ **Fitz-Gerald<sup>(1)</sup>ノ短縮**ト呼ンデキル。

$S$  系ノ一定點  $x$  ニアル時計デ、異ツタ時刻  $t_1$  ト  $t_2$  トノ間ノ時間ヲ測ツテ  $\Delta t$  ヲ得タトスレバ

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (68.7)$$

デアアル。此ノ時間ヲ  $S'$  系デ測ツタモノヲ  $\Delta t'$  トシ、 $t_1$ 、 $t_2$  ニ相當スル  $S'$  系デ測ツタ時刻ヲ  $t_1'$ 、 $t_2'$  トスレバ (67.7) ニ依テ

(1) George Francis Fitz-Gerald (1851—1901) 英國 Dublin 大學ノ物理學教授

$$t'_1 = k\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right), \quad t'_2 = k\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right),$$

デアアルカラ

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \quad (68.8)$$

ハ

$$\Delta t' = k(t_2 - t_1) = k\Delta t$$

トナル。即チ静止坐標系デ測ツタ時間  $\Delta t$  ト運動坐標系デ測ツタ時間  $\Delta t'$  トノ間ニハ

$$\Delta t' \sqrt{1 - (v/c)^2} = \Delta t \quad (68.9)$$

ノ關係ガアル。

以上ニ述ベタコトニ依テ「時及ビ長さハ、坐標系ノ運動状態ガ異ルニ從ツテ變ルモノデアアル」コトガ分カル。此ノ意味ニ於テ「時及ビ長さハ絶対性ノモノデナクテ相對性ノモノデアアル」ト言ヒ得ルノデアアル。

## 69. 四次元空間

今  $\sqrt{-1} = i$  トシ

$$\left. \begin{aligned} ict &= l, \quad ict' = l', \\ \beta &= v/c \end{aligned} \right\} \quad (69.1)$$

トスレバ、(67.7)ノ Lorentz-Einstein 變換式中ノ  $x', l'$  ハ

$$x' = k(x + i\beta l), \quad l' = k(l - i\beta x) \quad (69.2)$$

ヲ與ヘル。

$$k = \cos \psi, \quad ki\beta = \sin \psi, \quad i\beta = \tan \psi \quad (69.3)$$

トスレバ、上式(69.2)ハ

$$x' = x \cos \psi + l \sin \psi, \quad l' = l \cos \psi - x \sin \psi$$

ト書クコトガ出來ル。之レハ  $(x, l)$  坐標系カラ  $(x', l')$  坐標系ヘノ變換ハ、之等ノ平面ニ垂直ナ直線ヲ軸トスル虚角  $\psi$  ノ廻轉ニ等シイコトヲ示シテキル。故ニ  $x, y, z$  ノ坐標デ表ハサレル三次元空間ヲ考ヘルト同様ニ、 $x_1, x_2, x_3, x_4$  ノ四ツノ量デ表ハサレル四次元空間ヲ想像シ

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \quad (69.4)$$

トスレバ、Lorentz-Einstein 變換ハ此ノ四次元空間ニ於ケル坐標軸ノ廻轉ニ相當スルコトガ分カル。

此ノ四次元空間ノ重要性ハ、始メテ Minkowski<sup>(1)</sup>ニ依テ指摘セラレタガタメニ、之レヲ Minkowskiノ世界<sup>(2)</sup>又ハ略シテ單ニ世界ト稱シテキル。

任意ノ時刻  $t$  ニ於テ、 $(x, y, z)$  ナル位置ニ於テ起ツタ任意ノ出來事ハ、 $(x, y, z, t)$  ニ相當シタ世界内ノ一點  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  デ表ハスコトガ出來ル。其ノ點ヲ世界點ト稱スル。世界點ノ軌跡ヲ世界線ト呼

(1) Hermann Minkowski (1864—1909) 獨逸 Göttinger 大學ノ數學教授

(2) 時空世界トモ言フ。

ブ。例へバ、一質點ガ等速度運動ヲシテキルトスレバ、此ノ出来事ヲ表ハス世界線ハ  $x_4$  軸ト一定ノ傾キヲシテキル一ツノ直線ニナル。

此ノ四次元空間ニ於ケル任意ノ世界點ノ坐標原點ニ關スル位置-vector ハ  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  ヲ分値トスル四次元ノ vector デアル。之レヲ**四次元位置 vector** ト稱シ、三次元ノ位置-vector ト區別スルタメニ

$$x_i, (i=1, 2, 3, 4)$$

デ表ハスコトニスル。ソウスレバ、之レニ極メテ接近シテキル世界點  $x_i + dx_i$  ノ世界點  $x_i$  ニ關スル四次元位置-vector ハ  $dx_i$  デ表ハサレル。此ノ  $dx_i$  ヲ**時空微距離-vector** ト稱シ、其ノ大サヲ單ニ**時空微距離**<sup>(1)</sup>ト稱シ、 $ds$  デ表ハスト

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (69.5)$$

ノ關係ガアル。之レハ (69.4) ニ依テ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (69.6)$$

ト書ケル。Lorentz-Einstein ノ逆變換式ヲ用キテ (69.6) ノ右邊ヲ書キ換ヘルト

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \quad (69.7)$$

トナルコトガ容易ニ分カル。即チ時空微距離ハ S 系ニ關シテ表ハシテモ、S' 系ニ關シテ表ハシテモ、同

(1) Interval トモ稱スル。

ジデアル。此ノ様ニ坐標系ヲ變ヘテモ、少シモ變ラナイ量ヲ**不變量**ト稱スル。 $dx_i$  ガ四次元空間ニ於ケル vector デアルカラ、vector 其レ自身及ビ其ノ大サデアル  $ds$  ガ、原點ヲ同ジクスル S 系及ビ S' 系ニ無關係ニ同一ノ方向及ビ大サヲ持ツテキルノハ自明ノコトデアル。併シナガラ其ノ  $(x_1, x_2, x_3)$  方向ノ分値デアル長サ、及ビ  $x_4$  ノ方向ノ分値デアル時ハ坐標系ノ如何ニ依テ其ノ大サヲ變ヘル。此ノ事ガ長サ及ビ時ガ相對性ヲ有スルコトニ相等スルノデアル。

## 70. Minkowski 速度

質點ト同ジ状態ニアル時空坐標系ヲ、其ノ質點ノ**固有坐標系**ト稱スル。此ノ固有坐標系ニ關シテ表ハサレタ諸量ヲ、他ノ系ニ關シテ表ハサレタ諸量ト區別スルタメニ、固有ナル形容詞ヲツケルコトニスル。固有坐標系ニ對シテハ其ノ質點ハ靜止シテキルコトニナル。故ニ**固有時**ヲ  $\tau$  トスレバ、(69.6) ニ於テ  $dx=dy=dz=0, dt=d\tau$  トシテ

$$ds = icd\tau \quad (70.1)$$

ナル關係ヲ得ル。

質點ガ運動シテキルトキ、其ノ時空位置-vector



ノ固有時ニ關スル微分係數ヲ其ノ質點ノ Minkowski 速度ト稱シ、 $q_i$  デ表ハスコトニスレバ

$$q_i = \frac{dx_i}{d\tau}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (70.2)$$

デアル。之レハ明カニ四次元-vector デアル。

(70.1) = 依テ (70.2) ハ

$$q_i = ic \frac{dx_i}{ds} \quad (70.3)$$

トナル。然ルニ (69.6) = 依テ

$$ds^2 = \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 - c^2 \right\} dt^2$$

デアルカラ

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z$$

トスレバ

$$ds^2 = (u^2 - c^2) dt^2,$$

故ニ

$$\frac{ds}{dt} = ic \sqrt{1 - (u/c)^2} \quad (70.4)$$

トナリ、(70.3) ハ

$$q_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{dx_i}{dt} \quad (70.5)$$

トナル。即チ

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{dx_1}{dt} = \frac{u_x}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{dx_2}{dt} = \frac{u_y}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \\ q_3 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{dx_3}{dt} = \frac{u_z}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \\ q_4 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \frac{dx_4}{dt} = \frac{ic}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (70.6)$$

デアリ

$$q^2 = -c^2 \quad (70.7)$$

デアル。

S 系ノ  $x$  軸ニ沿フテ、 $x$  ノ増ス方向ニ、 $v$  ノ大サノ等速度運動ヲシテキル S' 系ニ於テノ Minkowski 速度ヲ  $q'_i$  トスレバ、(69.2) ト同様ニ

$$\left. \begin{aligned} q'_1 &= k(q_1 + i\beta q_4), \\ q'_2 &= q_2, \\ q'_3 &= q_3, \\ q'_4 &= k(q_4 - i\beta q_1), \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \\ \beta &= v/c \end{aligned} \right\} \quad (70.8)$$

ノ關係ガアル。故ニ、之レニ (70.6) ノ  $q_i$  ノ値ヲ入レテ

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{k}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} (u_1 - v), \\ q'_2 &= \frac{u_2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} & q'_3 &= \frac{u_3}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{aligned}$$

$$q_4' = \frac{ikc}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)$$

ヲ得ル。然ルニ, (70.6) ト同様ニ

$$q_1' = \frac{u_1'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}, \quad q_2' = \frac{u_2'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}},$$

$$q_3' = \frac{u_3'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}, \quad q_4' = \frac{ic}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}$$

デアルカラ

$$u_1' = \sqrt{\frac{c^2-u'^2}{c^2-u^2}} k(u_1 - v),$$

$$u_2' = \sqrt{\frac{c^2-u'^2}{c^2-u^2}} u_2, \quad u_3' = \sqrt{\frac{c^2-u'^2}{c^2-u^2}} u_3,$$

$$\sqrt{\frac{c^2-u^2}{c^2-u'^2}} = k \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right),$$

随テ

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}} \\ u_2' &= \frac{u_2}{k \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \\ u_3' &= \frac{u_3}{k \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (70.9)$$

ヲ得ル。之レハ同一ノ質點ノ速度ヲ S 系ニ於テ測定シタ  $\mathbf{u}$  ト, S' 系ニ於テ測定シタ  $\mathbf{u}'$  トノ關係ヲ與ヘルモノデアル。即チ速度ノ變換式デアル。

(70.9) カラ容易ニ

$$u_1 = \frac{u_1' + v}{1 + \frac{u_1' v}{c^2}},$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{k \left(1 + \frac{u_1' v}{c^2}\right)},$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{k \left(1 + \frac{u_1' v}{c^2}\right)}$$

ヲ得ル。之等ヲ自乗シテ加ヘルト

$$u^2 = \frac{u'^2 + 2u_1' v + v^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 (u'^2 - u_1'^2)}{\left(1 + \frac{u_1' v}{c^2}\right)^2}$$

トナルカラ,  $\mathbf{u}'$  ガ S' 系ノ速度  $\mathbf{v}$  トナス角ヲ  $\theta$  トスレバ

$$u^2 = \frac{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \theta - \left(\frac{v}{c}\right)^2 u'^2 \sin^2 \theta}{\left(1 + u'v \cos \theta / c^2\right)^2} \quad (70.10)$$

トナル。之レハ  $\mathbf{v}$  ト  $\mathbf{u}'$  トノ合成速度  $\mathbf{u}$  ノ大サヲ與ヘルモノデアツテ Einstein ノ速度合成ノ公式ト呼バレテキルモノデアル。  $u', v$  ガ  $c$  ニ比シテ極メテ小ナルトキハ (70.10) ハ Newton 力學ニ於ケル速度合成ノ公式ニナル。

## 71. 質量と Energy

質点ノ質量ヲ  $\mu$ , 速度ヲ  $\mathbf{u}$ , 之レニ働イテキル力ヲ  $\mathbf{F}$ , 時ヲ  $\tau$  トスレバ Newton ノ運動方程式ハ

$$\frac{d}{d\tau}(\mu\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (71.1)$$

デ表ハサレル。此ノ關係ハ質点ノ固有坐標系ニ於テハ成立スルモノト考ヘテ差支ヘガナイ。此ノ關係ヲ四次元空間ニ擴張シテ, 三次元-vector  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{F}$  ノ代リニ四次元-vector  $q_i$ ,  $K_i^{(1)}$  ヲ用キ

$$\frac{d}{d\tau}(\mu q_i) = K_i \quad (71.2)$$

トシテ見ル。

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad (71.3)$$

トスレバ, (70.1), (70.4) ニ依テ (71.2) ハ

$$\kappa \frac{d}{dt}(\mu q_i) = K_i \quad (71.4)$$

トナル。

(71.4) ノ  $i=1, 2, 3$  ノ部分ヲトツテ見ルト, (70.6) (71.3) ニ依テ

$$\kappa \frac{d}{dt}(\mu\kappa\mathbf{u}) = \mathbf{K} \quad (71.5)$$

ヲ得ル。但シ  $\mathbf{K}$  ハ  $K_x, K_y, K_z$  ヲ分値トスル三次元

(1) 此ノ  $K_i$  ヲ Minkowski ノカト稱スル。

vector デアル。故ニ, 今

$$\mathbf{K} = \kappa\mathbf{F}, \quad (71.6)$$

$$\mu\kappa = m \quad (71.7)$$

トスルト, (71.5) ハ

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (71.8)$$

トナル。

固有系デハ  $u=0$  トナルカラ, (71.3) ハ  $\kappa=1$  トナリ, (71.7) ハ  $\mu=m$  トナル。故ニ (71.8) ハ固有系デハ (71.1) トナル。隨テ (71.8) ハ質点ガ  $\mathbf{u}$  ノ速度デ運動シテキルト觀測サレル坐標系ニ於テ成立シテキル運動方程式デアルコトガ分カル。

(71.8) ハ之レ迄用キテ來タ Newton ノ運動方程式ト全ク同形デアルガ, 質量  $m$  ガ質点ノ速度ノ函數デアルコトヲ異ニシテキル。固有質量  $\mu$  ヲ其ノ速度ガ  $u=0$  ノトキノ質量デアルコトヲ明示スルタメニ  $m_0$  デ表ハスコトニスレバ, 速度ガ  $u \neq 0$  ノトキノ質量  $m$  ハ (71.7), (71.3) ニ依テ

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad (71.9)$$

デ表ハサレル。

(71.4) ニ於テノ  $i$  ヲ 4 トシタモノハ

$$K_4 = \kappa \frac{d}{dt}(\mu q_4)$$

デアリ、之レニ (70.6) ノ  $q_4$  ノ 値ヲ 入レ、(71.3), (71.7) ヲ 用キテ

$$K_4 = ic\kappa \frac{dm}{dt} \quad (71.10)$$

ヲ 得ル。

(71.1) =  $q_i$  ヲ 乗ジ、 $i = 1, 2, 3, 4$  ト シタモノヲ 加ヘルト

$$\begin{aligned} & K_1 q_1 + K_2 q_2 + K_3 q_3 + K_4 q_4 \\ &= q_1 \frac{d}{d\tau}(\mu q_1) + q_2 \frac{d}{d\tau}(\mu q_2) \\ &\quad + q_3 \frac{d}{d\tau}(\mu q_3) + q_4 \frac{d}{d\tau}(\mu q_4) \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{2} \mu (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \right\} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} \mu q^2 \right) \end{aligned}$$

ト ナリ、(70.7) = 依テ

$$K_1 q_1 + K_2 q_2 + K_3 q_3 + K_4 q_4 = 0$$

ト ナル。之レハ 又 (70.6), (71.6) = 依テ

$$K_4 q_4 = -\kappa^2 \mathbf{F} \mathbf{u}$$

ト ナル。然ルニ  $\mathbf{F} \mathbf{u}$  ハ (30.5) = 依テ  $\mathbf{F}$  ノ ナス工率ヲ 表ハス。之レニ 依テ 其ノ 質點ノ 有スル energy  $E$

ガ 増加スルカラ 其ノ 時ニ 對スル 増加ノ 割合ヲ  $dE/dt$  ト スレバ

$$K_4 q_4 = -\kappa^2 \frac{dE}{dt} \quad (71.11)$$

ト ナル。隨テ (70.6), (71.10) ノ  $q_4, K_4$  ノ 値ヲ 入レテ

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$$

ヲ 得ル。之レヲ 積分シ、 $m=0$  ノ トキ  $E=0$  ト スレバ

$$\frac{E}{c^2} = m \quad (71.12)$$

ヲ 得ル。之レハ 質量ト energy ト ノ 間ニ 存在スル 極メテ 重要ナ 關係ヲ 示シテ キルモノデアアル。<sup>(1)</sup>

(71.9) ト (71.12) ト = 依テ

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \quad (71.13)$$

ヲ 得ル。 $u=0$  ト スレバ、其ノ トキノ 質點ノ 有スル energy ハ 所謂 位置-energy デアルカラ、ソレヲ  $V$  ト スレバ

$$V = m_0 c^2 \quad (71.14)$$

ト ナル。運動-energy ヲ  $T$  ト スレバ

$$T = E - V$$

デアリ、(71.13), (71.14) = 依テ

(1) 此ノ 關係ハ 1905 年ニ Einstein = 依テ 始メテ 求メラレタモノデアアル。

$$T = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - 1 \right\} \quad (71.15)$$

ヲ得ル。之レハ又

$$T = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots$$

ト展開シ得ルカラ、 $u$ ガ $c$ ニ比シテ極メテ小サナトキハ Newton 力學ニ於ケル運動-energy ト一致スルコトガワカル。

(71.9)ガ示ス様ニ、質量ハ其ノ運動状態ニ依テ變ルモノデアル。(71.13)モ亦、energyガ運動状態ニ依テ變ルモノデアルコトヲ示シテキル。即チ、之等ハ共ニ絶對性ノモノデナクテ相對性ヲ有スルモノデアル。質量及ビ energyノ保存ノ法則ハ其ノ運動ノ速サガ光ノ傳播ノ速サニ比シテ極メテ小ナルトキニ於テノミ成立スルモノデアルコトガ分カル。

## 附 録

### Vector ト Scalar トノ 對照表

#### I. Vector 法ニ於ケル公式

Vector	Scalar
1. Vector 和 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ . (3.1)	1. Vector 和 $c_x = a_x + b_x, c_y = a_y + b_y, c_z = a_z + b_z$ .
2. Scalar 積 $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ . (5.2)	2. Scalar 積 $ab \cos(\hat{\mathbf{ab}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ . (5.1), (5.9)
3. Vector 積 $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$ $= -[\mathbf{ba}]$ . (9.3)	3. Vector 積 $c = ab \sin(\hat{\mathbf{ab}})$ . (9.2) $c_x = a_y b_z - a_z b_y, c_y = a_z b_x - a_x b_z,$ $c_z = a_x b_y - a_y b_x$ . (9.8)
4. $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$ $= \mathbf{b}[\mathbf{ca}]$ $= \mathbf{c}[\mathbf{ab}]$ , (16.4) $= \mathbf{abc}$ . (16.5)	4. $a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z)$ $+ a_z(b_x c_y - b_y c_x)$ $= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ (16.3)
5. $\mathbf{S} = [\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]$ $= \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ .	5. $S_x = b_x(c_z a_x + c_y a_y + c_z a_z)$ $- c_x(a_z b_x + a_y b_y + a_z b_z),$

$$\begin{aligned}
 (16.7) \quad S_y &= b_y(c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z) \\
 &\quad - c_y(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z), \\
 S_z &= b_z(c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z) \\
 &\quad - c_z(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).
 \end{aligned}$$

6. 線積分

$$W = \int_A^B \mathbf{F} ds. \quad (30.4)$$

7. 勾配

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \text{grad } V \\
 &= \nabla V. \quad (31.9)
 \end{aligned}$$

6. 線積分

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (30.4)$$

7. 勾配

$$K_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad K_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad K_z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (31.3)$$

II. 質点ノ運動學ニ於ケル公式

Vector

1. 速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (6.3)$$

(i) 直角坐標系

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z. \quad (6.6)$$

(ii) 圆柱坐標系

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\rho + \mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_z. \quad (7.9)$$

(iii) 極坐標系

Scalar

1. 速度

(i) 直角坐標系

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (6.5)$$

(ii) 圆柱坐標系

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_\psi = \rho \frac{d\psi}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (7.8)$$

(iii) 極坐標系

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta + \mathbf{v}_\phi. \quad (8.5)$$

(iv) 廻轉坐標系

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + [\mathbf{w}\mathbf{r}]. \quad (13.2)$$

2. 加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (14.1)$$

(i) 直角坐標系

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z. \quad (14.2)$$

(ii) 圆柱坐標系

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\psi + \mathbf{a}_z. \quad (17.6)$$

(iii) 極坐標系

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad v_\phi = r \sin\theta \frac{d\phi}{dt} \quad (8.3), (8.6), (8.7)$$

(iv) 廻轉坐標系

$$\left. \begin{aligned}
 v_x &= \frac{d\xi}{dt} + w_y \zeta - w_z \eta, \\
 v_y &= \frac{d\eta}{dt} + w_z \xi - w_x \zeta, \\
 v_z &= \frac{d\zeta}{dt} + w_x \eta - w_y \xi.
 \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

2. 加速度

(i) 直角坐標系

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (14.2)$$

(ii) 圆柱坐標系

$$\left. \begin{aligned}
 a_\rho &= \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \\
 a_\psi &= 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \rho \frac{d^2\psi}{dt^2}, \\
 a_z &= \frac{d^2z}{dt^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

(iii) 極坐標系

*v = \frac{dr}{dt} dw*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\varphi. \quad (18.2)$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

$$a_\theta = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left( r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (18.2)$$

(iv) 運動坐標系

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}_t + \bar{\mathbf{a}}_r + \bar{\mathbf{a}}_c. \quad (15.7)$$

運搬加速度

$$\bar{\mathbf{a}}_t = \mathbf{a}_1 + \left[ \frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{r} \right] + [\mathbf{w}[\mathbf{w}\mathbf{r}]]. \quad (15.4)$$

相對加速度

$$\bar{\mathbf{a}}_r = \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2}.$$

(iv) 運動坐標系

$$a_x = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{d\xi}{dt} - \eta w_z + \zeta w_y \right) - w_z \left( \frac{d\eta}{dt} - \zeta w_x + \xi w_y \right)$$

$$+ w_y \left( \frac{d\xi}{dt} - \xi w_y + \eta w_x \right),$$

$$\text{etc., etc.} \quad (17.11)$$

運搬加速度

$$\bar{a}_{tx} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{dw_y \zeta}{dt} - \frac{dw_z \eta}{dt}$$

$$+ w_x (w_x \xi + w_y \eta + w_z \zeta)$$

$$- \xi (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2),$$

$$\text{etc., etc.} \quad (9.8), (16.7)$$

相對加速度

$$\bar{a}_{rx} = \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad \bar{a}_{ry} = \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad \bar{a}_{rz} = \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

$$(15.1)$$

Coriolis の 加速度

$$\bar{\mathbf{a}}_c = 2 \left[ \mathbf{w} \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \right]. \quad (15.6)$$

(v) 切線加速度

法線加速度

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n. \quad (14.8)$$

Coriolis の 加速度

$$\bar{a}_{cx} = 2 \left( w_y \frac{d\xi}{dt} - w_z \frac{d\eta}{dt} \right), \quad \text{etc., etc.} \quad (9.8)$$

(v) 切線加速度

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (14.5)$$

$$a_n = \frac{1}{R} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (14.8)$$

## III. 質點ノ力學ニ於ケル公式

Vector

1. 運動方程式

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \quad (27.2)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (27.3)$$

2. D'Alembert の 法則

ト 假想變位ノ 法則

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a})\delta\mathbf{r} = 0.$$

Scalar

1. 運動方程式

$$\frac{dB_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dB_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dB_z}{dt} = F_z.$$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x, & m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z. \end{aligned} \right\}$$

2. D'Alembert の 法則

ト 假想變位ノ 法則

$$(F_x - ma_x)\delta x + (F_y - ma_y)\delta y +$$

(34. 2)

## 3. 質點ノ拘束運動

方程式

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a} + \lambda \nabla \varphi) \delta \mathbf{r} = 0. \quad (35. 3)$$

## 4. 質點系ノ質量中心

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{v=1}^n m_v \mathbf{r}_v}{\sum_{v=1}^n m_v}.$$

(49. 1)

$$+(F_z - ma_z) \delta z = 0.$$

## 3. 質點ノ拘束運動方程式

$$\begin{aligned} & (F_x - ma_x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \delta x \\ & + (F_y - ma_y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \delta y \\ & + (F_z - ma_z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}) \delta z = 0. \end{aligned}$$

## 4. 質點系ノ質量中心

$$\xi = \frac{\sum_{v=1}^n m_v x_v}{\sum_{v=1}^n m_v}, \quad \eta = \frac{\sum_{v=1}^n m_v y_v}{\sum_{v=1}^n m_v},$$

$$\zeta = \frac{\sum_{v=1}^n m_v z_v}{\sum_{v=1}^n m_v}. \quad (49. 3)$$

## 索 引

## A

Aether	エーテル	aether	315
Amplitude	アムプリチユド	amplitude	173, 178
Arai Hyōmen	粗イ表面	rough surface	191

## B

Ba	場	field	"Dyo" wo miyo
Ban'yū-inryoku no Hōsoku	萬有引力ノ法則	law of universal attraction	283
Bernoulli	Bernoulli	Bernoulli	125
Bibun-hōteisiki	微分方程式	differential equation	69
Daiiti-kaikyū no	第一階級ノ	— of the first or der	70
Daini-kaikyū no	第二階級ノ	— of the second order	70
Dōzi- —	同時—	simultaneous—	295
Hamilton no	Hamiltonノ	Hamilton's —	272
Hamilton-Jacobi no —	Hamilton-Jacobiノ	Hamilton-Jacobi's —	274, 276
Hen- —	偏—	partial —	272
Itizi- —	一次—	— of the first order	70
Nizi- —	二次—	— of the second order	70
Zyō- —	常—	ordinary —	272
Bibun-keisū	微分係數	differential coefficient	18
Vector no	ベクトルノ	— of a vector	19
—vector	—ベクトル	—vector	19
Bradley	Bradley	Bradley	315
Brahe	Brahe	Brahe	203
Bun-hen'i	分變位	component displacement	7
Bun-sokudo	分速度	component velocity	20
Bunti	分値	component value	16
Ippanryoku no	一般力ノ	— of generalized force	245
Ippan-rikiseki no —	一般力積ノ	— of generalized impulse	231



Ippan-sokudo no—	一般速度ノ—	—of generalized velocity	241
Ippan-undôryô no—	一般運動量ノ—	—of generalized momentum	256
Bun-vector	分ベクトル	component vector	7

## C

Cel.	セル	Cel.	101
Celeritas	セレリタス	Celeritas	101
C. G. S.-tan'i	C. G. S. 單位	C. G. S. unit	99
Clebsch	Clebsch	Clebsch	276
Coriolis	Coriolis	Coriolis	55, 123
—no Kasokudo	—ノ加速度	—'s acceleration	55
—no Teiri	—ノ定理	—'s theorem	55
—no Tikara	—ノ力	—'s force	110
Coulomb	Coulomb	Coulomb	191
Cycloid	サイクロイド	cycloid	187
—sinsi	—振り子	—pendulum	190
—undo	—運動	—motion	186

## D

Daen-kansu	楕圓函數	elliptic function	179
Jacobi no —	Jacobiノ—	Jacobi's —	179
Daen-sekibun	楕圓積分	elliptic integral	173
Daiissyu—	第一種—	—of the first kind	173
Daiissyu-kanzen—	第一種完全—	complete—of the first kind	174
Daen-sindo	楕圓振動	elliptic oscillation	86, 89
Daihyôten, sitten kei no	代表點, 質點系ノ	representative point of a system of particles	261
Daiissyu-daen-sekibun	第一種楕圓積分	elliptic integral of the first kind	173
Daiissyu-kanzen-daen-sekibun	第一種完全楕圓積分	complete elliptic integral of the first kind	174
Daiissyu no Lagrange no hôteisiki	第一種ノLagrange方程式	Lagrange's equation of the first kind	245
Daiiti-kaikyô no Bibun-hôteisiki	第一階級ノ微分方程式	differential equation of the first order	70

Daiiti-kaikyô no Bibun-hôteisiki	第二階級ノ微分方程式	differential equation of the second order	70
Daiissyu no Lagrange no Hôteisiki	第二種ノLagrange方程式	Lagrange's equation of the second kind	245
D'Alembert	D'Alembert	D'Alembert	123, 127, 238
—no Hôsoku	—ノ法則	—'s principle	126, 127, 238
Descartes	Descartes	Descartes	102
Diku	軸	axis	
Huben—	不變—	invariable—	228
Dikusei-vector	軸性ベクトル	axial vector	32
Dôataryoku	動壓力	kinetic pressure	132
Dôkei	動徑	radius vector	4
Dôrikigaku	動力學	kinetics	124
Dôzi	同時	simultaneity	323
Dôzi-bibun-hôteisiki	同時微分方程式	simultaneous differential equations	295
Dyne	ダイン	dyne	105
Dyô	場	field	
Dyôryoku—	重力—	gravity —	114
Riki—	力—	—of force	114
Vector no —	ベクトルノ—	—of a vector	114
Dyûroku	重力	gravity	114
—dyô	—場	—field	114
Dyûsin	重心	centre of gravity	220

## E

Einstein	Einstein	Einstein	316
Lorentz—no Henkwansiki	Lorentz—ノ變換式	Lorentz—'s transformation equations	316, 321
—no sokudo-gôsei no Kosiki	—ノ速度合成ノ公式	—'s formula of composition of velocities	333
—no sôtasei no Hôsoku	—ノ相對性ノ法則	—'s principle of relativity	316
—no sôtasei-riron	—ノ相對性理論	—'s theory of relativity	317
Energy	エネルギー	energy	118, 120, 123
Iti—	位置—	potential—	118, 120, 123

sô—	總—	total—	123
undô—	運動—	kinetic—	123
—hôsoku	—法則	law of—	123
—no Hozon no Hôsoku	—ノ保存ノ法則	law of conservation of—	123
Ensin-kasokudo	遠心加速度	centrifugal acceleration	50
Ensinryoku	遠心力	centrifugal force	111
Entô-zahyô	圓錐坐標	cylindrical coordinates	3
Entyôku-men	鉛直面	vertical plane	
—nai no Cycloid-undô	—内ノサイクロイド運動	cycloid motion in a—	185
—nai no En-undô	—内ノ圓運動		179
Entyoku-sokudo	鉛直速度	vertical velocity	24
Entyôritu	延長率	elongation	206
Entyû-zahyô	圓柱坐標	cylindrical coordinates	3
En-undô	圓運動	circular motion	24, 89, 179
Entyokumen nai no	鉛直面内ノ—	—	179
Erg	エルグ	erg	113
Euler	Euler	Euler	115

## F

Fitz-Gerald	Fitz-Gerald	Fitz-Gerald	325
—no Tansyuku	—ノ短縮	—s' contraction	325
Foucault	Foucault	Foucault	203
—sinsi	—振子	—'s pendulum	193, 203

## G

g		g	73
Gal.		Gal.	101
Galilei	Galilei	73, 101, 105, 107, 114, 156	
—no Henkwansiki	—ノ變換式	Galilei's transformation equations	107
—no Sôtasei-hôsoku	—ノ相對性法則	—'s principle of relativity	108, 150
Geki ryoku	撃力	impulsive force	135
Gekisyôryoku	激衝力	impulsive force	135
Gekisyô-undô	激衝運動	impulsive motion	136, 205

—no Lagrange-hôteisiki	—ノLagrange方程式	Lagrange's equation of—	250, 252
Gen	元	dimension	98, 100
Gen de renketu sareta sittenkei	弦ヲ連結サレタ質點系	system of particles connected by a string	305
Gensui-	減衰	damping	
—-insi	—因子	—factor	100
—-keisû	—係數	—coefficient	160
—ritu	—率	modulus of decay	160
—-sindô	—振動	damped oscillation	157
Genten	原點	origin	2
Gibbs	Gibbs	Gibbs	13, 28
Gizi-scalar	擬似スケーラー	pseudo-scalar	59
Gôsei-hen'i	合成變位	resultant displacement	7
Gôsei-vector	合成ベクトル	resultant vector	7
Gradient	勾配	gradient	117
Grassmann	Grassmann	Grassmann	13, 28, 59, 90
Gudermann	Gudermann	Gudermann	179
Gwairyoku	外力	external force	215
Gwaiseki	外積	external product	28
Gyaku-henkansiki	逆變換式	inverse transformation equation	107, 321

## H

Haas	Haas	Haas	101
Haibun no Hôsoku	配分ノ法則	distributive law	15
Haisen	擺線	cycloid	187
Hamilton	Hamilton	Hamilton 4, 115, 116, 235, 258, 255, 257, 269, 272	
—Jacobi no Bibun-hôteisiki	—Jacobiノ微分方程式	—Jacobi's differential equation	274, 276
—no Bibun-hôteisiki	—ノ微分方程式	—'s differential equation	272
—no Hensayô no Hôsoku	—ノ變作用ノ法則	—'s principle of varying action	269
—no Hôsoku	—ノ法則	—'s principle	235, 238, 247, 265
—no Kansû	—ノ函數	—'s function	257
—no Operator	—ノオペレーター	—'s operator	116

—no Seiki-hôteisiki	—ノ正規方程式	—'s canonical equations	257
no Sisei-kansū	—ノ示性函數	—'s characteristic function	277
no Teiri	—ノ定理	—'s theorem	272
no Undō-hôteisiki	—ノ運動方程式	—'s equations of motion	255
Hankei	半徑	radius	
Kyokuritu—	曲率—	—of curvature	49
Hansayō	反作用	reaction	213
—no Hōsoku	—ノ法則	law of reaction	214
Hayasa	速サ	speed	19
Hazimeno Zyōken	始メノ條件	initial condition	71
Heikō-zyōtai	平衡状態	equilibrium state	124
Heimen	平面	plane	
Huhen—	不變—	invariable—	228
Kyokuritu—	曲率	—of curvature	49
Kyokusyoteki—	局所的—	local—	49
Sessyoku—	切觸—	osculating—	49
Heisin-undō	並進運動	translation	36
Helmholtz	Helmholtz	Helmholtz	238
Henbibun-hôteisiki	微分方程式	partial differential equation	272
Henbun	變分	variation	229
—-hōsoku	—法則	principle of—	238
Sekibun no—	積分ノ—	—of integrals	233
Hen'i	變位	displacement	6
Bun—	分—	component—	6
Gōsei—	合成—	resultant—	7
Kasetu—	假設—	virtual—	125
Kasō	假想—	virtual—	125
Kasō—no Hōsoku	假想—ノ法則	principle of virtual—	125
Henkwansiki	變換式	transformation equations	
Galilei no	Galileiノ—	Galilei's—	107
Gyaku—	逆—	inverse—	107
Lorentz-Einstein no—	Lorentz-Einsteinノ—	Lorentz-Einstein's—	321
Hensayō on Hōsoku	變作用ノ法則	principle of varying action	268, 269
Hamilton no—	Hamiltonノ—	Hamilton's—	269

Hensūbunri-kanōkei	變數分離可能型	type of variables separable	81
Hensū-bunritu no katati	變數分立ノ形	type of variables separable	87
Hi-danseitai	非彈性體	inelastic body	314
Hidumi	歪	strain	307
Hodograph	ホドグラフ	hodograph	51
Holonomie	ホロノミック	holonomic	240
Non—	非ホロノミック	non-holonomic	240
Hōbutusen-undō	拋物線運動	parabolic motion	76, 78, 278
Hooke no Hōsoku	Hookeノ法則	Hooke's law	307
Hōkō	方向	direction	4
—yogen	—餘弦	—cosines	13
Hōsen	法線	normal	
—-kasokud o	—加速度	—acceleration	50, 62
—-vector	—ベクトル	—vector	49
Hōsoku	法則	law, principle	
Ban'yō-inryoku no—	萬有引力ノ—	law of universal attraction	283
D'Alembert no—	D'Alembertノ—	D'Alembert's principle	126, 127, 238
Einstein no Sōtaisei no—	Einsteinノ相對性ノ—	Einstein's principle of relativity	316
Energy no—	エネルギーノ—	law of energy	123
Energy no Hozon no—	エネルギーノ保存ノ—	—of conservation of energy	123
Galilei no Sōtaisei no—	Galileiノ相對性ノ—	Galilei's principle of relativity	105, 108
Haibun no—	配分ノ—	distributive law	15
Hamilton no Hensayō no—	Hamiltonノ變作用ノ—	Hamilton's principle of varying action	269
Hamilton no—	Hamiltonノ—	Hamilton's principle	235, 238, 247, 295
Hansayō no—	反作用ノ—	law of reaction	214
Henbun—	變分—	principle of variation	238
Hensayō no—	變作用ノ—	principle of varying action	208, 209
Hooke no—	Hookeノ—	Hooke's law	307
Kasō-hen'i no—	假想變位ノ—	principle of virtual displacement	123, 125
Kasō-sigoto no—	假想仕事ノ—	principle of virtual work	125

<i>Kepler</i> no —	Keplerノ	Kepler's law 203, 287, 290, 191
<i>Ketugô</i> no —	結合ノ	law of association 9
<i>Kôkwan</i> no —	交換ノ	commutative law 9, 14
<i>Kwôsoku-huhen</i> no —	光速不變ノ	principle of constancy of light speed 317
<i>Kwansei</i> no —	慣性ノ	law of inertia 102
<i>Menseki</i> —	面積	law of area 229
<i>Saieyôenyô</i> no —	最小作用ノ	principle of least action 201, 207
<i>Situryô-tyûsin</i> no undo —	質量中心ノ運動	law of motion of the centre of mass 218
<i>Situryô-tyûsin</i> no undô no Hozon —	質量中心ノ運動ノ保存	principle of conservation of motion of the centre of mass 218
<i>Sôtaisei</i> no —	相對性ノ	principle of relativity 103, 316
<i>Tikara</i> no —	力ノ	law of force 103
<i>Undô on Daiiti</i> —	運動ノ第一	the first law of motion 101
<i>Undô no Daini</i> —	運動ノ第二	the second law of motion 102
<i>Undô no Daisan</i> —	運動ノ第三	the third—of motion 102, 214
<i>Undôryô no Hozon</i> —	運動量ノ保存	law of conservation of momentum 226
<i>Undoryô no Nôritu</i> no Hozon —	運動量ノ能率ノ保存	law of conservation of moment of momentum 228
<i>Hôteisiki</i>	方程式	equation
<i>Bitun</i> —	微分	differential—"Bibun"—wo niyo
<i>Hamilton</i> no Seiki —	Hamiltonノ正規	Hamilton's canonical —s 257
<i>In</i> —	陰	intrinsic — 187
<i>Kizyun</i> —	基準	canonical — 257
<i>Kôsoku</i> —	拘束	—of constraint 129
<i>Lagrange</i> —	Lagrange	Lagrange's—"Lagrange"wo niyo canonical —s 257
<i>Seiki</i> —	正規	—s of motion "Undô"—wo niyo 296
<i>Sindôsai</i> no —	振動數ノ	frequency —
<i>Undô</i> —	運動	—s of motion "Undô"—wo niyo
<i>Hozon-hôsoku</i>	保存法則	law of conservation
<i>Energy</i> no —	エネルギーノ	— of energy 123
<i>Situryô-tyûsin</i> no undô no —	質量中心ノ運動ノ	—of motion of the centre of mass 221
<i>Undôryô</i> no —	運動量ノ	— of momentum 226

<i>Undôryô no Nôritu</i> no —	運動量ノ能率ノ	— of moment of momentum 228
<i>Hozontekino Tikara</i>	保存的ノ力	conservative force 123
<i>Hozonteki Rikidyô</i>	保存的力場	conservative field of force 123
<i>Huhendiku</i>	不變軸	invariable axis 228
<i>Huhenheimen</i>	不變平面	invariable plane 228
<i>Huhenyô</i>	不變量	invariant 329
<i>Hukugô-kyûsin-kasokudo</i>	複合求心加速度	compound centripetal acceleration 58
<i>Huku-sinsi</i>	複振り子	double pendulum 293
<i>Huyghens</i>	Huyghens	Huyghens 189
<i>Hyômen</i>	表面	surface
<i>arai</i> —	アラキ	rough — 191
<i>namerakana</i> —	ナメラカナ	smooth — 191

## I

<i>Idoken-kasokudo</i>	緯度圈加速度	acceleration along a latitude circle 65
<i>Idoken-sokudo</i>	緯度圈速度	velocity along a latitude circle 26
<i>Ikwan-kasokudo</i>	移換加速度	acceleration of transportation 54
<i>Ikwan-sokudo</i>	移換速度	velocity of transportation 41
<i>In-hôteisiki</i>	陰方程式	intrinsic equation 187
<i>Insi</i>	因子	factor
<i>Gensai</i> —	減衰	damping — 160
<i>Interval</i>		interval 328
<i>Ippankai</i>	一般解	general solution 70
<i>Ippan-rikiseki no Bunti</i>	一般力積ノ分値	component value of generalized impulse 281
<i>Ippanryoku no Bunti</i>	一般力ノ分値	component value of generalized force 245
<i>Ippan-sokudo no Bunti</i>	一般速度ノ分値	component value of generalized velocity 241
<i>Ippan-sôtaisei-riron</i>	一般相對性理論	general theory of relativity 317
<i>Ippan-undôryô no Bunti</i>	一般運動量ノ分値	component value of generalized momentum 256

Ippan-zahô	一般坐標	generalized coordinate	240
Iti	位置	position	1
Sitten no —	質點ノ —	position of a material point	1
—energy	—エネルギー	potential energy	120, 121
—vector	—ベクトル	position vector	4
Sizigen — vector	四次元—ベクトル	four dimensional—vector	328
Sôtai — vector	相對—ベクトル	relative—vector	36
Zettai — vector	絶對—ベクトル	absolute—vector	36
Itizi-bibun-hôteisiki	一次微分方程式	differential equation of the first order	70

## J

Jacobi	Jacobi	Jacobi	173, 179, 276
Hamilton — no	Hamilton — ノ微分方程式	Hamilton — 's differential equation	274, 276
Bibun-hôteisiki	— ノ楕圓函數	— 's elliptic function	179
— no Daen-kansû	— ノ定理	— 's theorem	276
— no Teiri			

## K

Kaku-sokudo	角速度	angular velocity	25, 34
Kamerlingh-Onnes	Kamerlingh-Onnes	Kamerling-Onnes	203
Kansû	函數	function	238
Daen —	楕圓 —	elliptic —	179
Jacobi no Daen —	Jacobi ノ楕圓 —	Jacobi's elliptic —	179
Hamilton no —	Hamilton ノ —	Hamilton's —	257
Hamilton no sisei —	Hamilton ノ示性 —	Hamilton's characteristic —	277
Lagrange no —	Lagrange —	Lagrange's —	287
Potential —	ポテンシャル —	potential —	115
Sayô —	作用 —	action —	277
Sisei —	示性 —	characteristic —	277
Sôkyokusen —	双曲線 —	hyperbolic —	143
Syu —	主 —	principal —	270
Ten —	點 —	point —	114
Tikara —	力 —	force —	238
Kasetu-hen'i	假設變位	virtual displacement	125

Kasokudo	加速度	acceleration	47
Coriolis no —	Coriolis ノ —	Coriolis' —	55
Ensin —	遠心 —	centrifugal —	50
Hôsen —	法線 —	normal —	50, 62
Hukugô-kyûsin —	複合求心 —	compound centripetal —	53
Idoken —	緯度圈 —	— along a latitude circle	65
Ikwan —	移換 —	— of transportation	54
Kei —	系 —	system —	54
Kei —	徑 —	radial —	65
Keidoken —	經度圈 —	— along a longitude circle	65
Kyûsin —	求心 —	centripetal —	50
Fukugô kyûsin —	複合求心 —	compound centripetal —	53
Sessen —	切線 —	tangential —	48
Sôtai —	相對 —	relative —	53
Tate —	縱 —	longitudinal —	62
Unpan —	運搬 —	— of transportation	54
Oô —	横 —	transverse —	62, 65
Yoko —	横 —	transverse —	62, 65
Zettai —	絶對 —	absolute —	53
Kasô-	假想	virtual	
—hen'i	—變位	—displacement	125
—hen'i no Hôsoku	—變位ノ法則	principle of —displacement	123, 125
—sigoto	—仕事	—work	125
—sigoto no Hôsoku	—仕事ノ法則	principle of —work	125
Kei	系	system	214
Kwansei —	慣性 —	inertia —	106
Kwanzen —	完全 —	perfect —	216
Uyû —	右手 —	right handed —	28
Ziyû —	自由 —	free —	216
(Kei)	(系)		
—kasokudo	—加速度	—acceleration	54
—sokudo	—速度	—velocity	41
Kei-	徑	radial	
—Kasokudo	—加速度	—acceleration	65

—sokudo	—速度	—velocity	24, 25
Keidoken-kasokudo	經度圈加速度	acceleration along a longitude circle	65
Keidoken-sokudo	經度圈速度	velocity along a longitude circle	26
Keiro	徑路	path	17
Keisū	係數	coefficient	
bibun	微分—	differential—	18
Gensui—	減衰—	damping—	160
Kwaihuku—	回復—	—of restitution	314
Kwansei—	慣性—	—of inertia	258
Masatu—	摩擦—	—of friction	191
Undōdo—	運動度—	—of mobility	259
Kepler	Kepler	Kepler	203, 209, 287
—no Hōsoku	—ノ法則	—'s law	203, 287, 290, 291
Ketugō no Hōsoku	結合ノ法則	law of association	9
Kidō	軌道	orbit	17
Kihon-tan'i	基本單位	fundamental unit	99
Kihon-vector	基本ベクトル	fundamental vector	12
Kinetic-potential	運動ポテンシャル	kinetic potential	238
Kizyun-hōteisiki	基準方程式	canonical equation	257
Kizyun-zahyō	基準坐標	canonical coordinates	256
Kōbai	勾配	gradient	117
Kōkwan no Hōsoku	交換ノ法則	commutative law	9, 14
Kōritu	工率	power	113
Kōryoku, undō—	抗力, 運動—	reaction, kinetic—	128
Kōsoku-	拘束	constraint	
—hōteisiki	—方程式	equation of—	129
—ryoku	—力	force of—	132
—undō	—運動	constrained motion	128, 129
Koyū no Nagasa	固有ノ長さ	proper length	325
Koyū-sindō	固有振動	proper oscillation	165
Koyū-situryō	固有質量	proper mass	335
Koyū-zahyōkei	固有坐標系	proper coordinate system	329
Koyūzi	固有時	proper time	329

Kōkan	空間	space	
Sanzi—	三次—	three dimensional—	261
Sizigen—	四次元—	four dimensional—	323
Kwaihuku-keisū	回復係數	coefficient of restitution	314
Kwaiten-undō	迴轉運動	rotation	37
Kwaiten-zahyōkei	迴轉坐標系	rotating coordinates system	37
Kwansei	慣性	inertia	102
—kei	—系	—system	106
—keisū	—係數	coefficient of—	253
—hōsoku	—法則	law of—	102
—ryoku	—力	force of—	128
—situryō	—質量	—mass	104
—teikō	—抵抗	resistance due to—	128
Kwanzenkei	完全系	perfect system	216
Kwaturyoku	活力	vis viva	123
Kwōsoku-huhen no Hōsoku	光速不變ノ法則	principle of constancy of light speed	317
Kyokuritu-	曲率	curvature	
—hankei	—半徑	radius of—	49
—heimen	—平面	plane of—	49
—tyūsin	—中心	centre of—	49
Kyokusei-vector	極性ベクトル	axial vector	32
Kyokusen-undō	曲線運動	curvilinear motion	46
Kyokusyoteki-heimen	局所的平面	local plane	49
Kyoku-zahyō	極坐標	polar coordinate	2
Kyōseiryoku	強制力	impressed force	108, 110
Kyōsei-sindō	強制振動	forced oscillation	164, 105
Kyūsin-kasokudo	求心加速度	centripetal acceleration	50
Hukugō—	複合—	compound—	58
Kyū-sinsi	球振り	spherical pendulum	193

## L

Lagrange	Lagrange	Lagrange	115, 229, 240, 253
—no Hōteisiki	—ノ方程式	—'s equation	240, 245, 247, 253

Daiissyū no — no Hōteisiki	第一種ノ — ノ 方程式	—'s equation of the first kind	245
Dainisyū no — no Hōteisiki	第二種ノ — ノ 方程式	—'s equation of the second kind	245
Gekisyō-undō no — Hōteisiki	激衝運動ノ — ノ 方程式	—'s equation of impulsive motion	250, 252
— no Kansū	— ノ 函數	—'s function	247
— no Undō-hōteisiki	— ノ 運動方程式	—'s equations of motion	230, 245, 247, 253
Gekisyō-undō no — no Undō-hōteisiki	激衝運動ノ — ノ 運動方程式	—'s equations of impulsive motion	250, 252
Laplace	Laplace	Laplace	115
Lamy no Teiri	Lamyノ 定理	Lamy's theorem	126
Legendre	Legendre	Legendre	173, 176
Leibnitz	Leibnitz	Leibnitz	123
Lorentz	Lorentz	Lorentz	321
— Einstein no Henkwan-siki	— Einsteinノ 變換式	— Einstein's transformation equation	321

## M

Masatu	摩擦	friction	
— keisū	— 係數	coefficient of —	191
— ryoku	— 力	force of —	191
Maupertuis	Maupertuis	Maupertuis	267
Maxwell	Maxwell	Maxwell	292
Menseki-hōsoku	面積法則	law of area	229
Menseki-sokudo	面積速度	areal velocity	33
Michelson	Michelson	Michelson	315
Mikakeno Tikara	見掛ケノ 力	apparent force	108, 110
Minkowski	Minkowski	Minkowski	327
— no Sekai	— ノ 世界	—'s world	327
— no Sokudo	— ノ 速度	—'s velocity	330
— no Tikara	— ノ 力	—'s force	334
Miti	路	path	17
Sittenkei no —	質點系ノ —	— of a system of particles	262
Modulus	モヂュラス	modulus	173

## N

Nabla	ナブラ	nabla	115
Nagasa	長さ	length	
— Koyū no —	固有ノ —	proper —	325
Nairyoku	内力	internal force	215
Naiseki	内積	internal product	13
Namerakana Hyōmen	ナメラカナ表面	smooth surface	191
Newton	Newton	Newton	191, 108, 209, 283
Nitai-mondai	二體問題	two points problem	282, 283
Nizi-bibun-hōteisiki	二次微分方程式	differential equation of the second order	70
Non-holonomic	非ホロノミック	non-holonomic	240
Nōritu	能率	moment	34, 221
— Tikara no —	力ノ —	— of force	221, 222
— Undōryō no —	運動量ノ —	— of momentum	221
— Undōryō no — no Hozon-hōsoku	運動量ノ — ノ 保存法則	law of conservation of — of momentum	228

## O

Onnes	Onnes	Onnes	203
Operator	オペレーター	operator	
— Hamilton no —	Hamiltonノ —	Hamilton's —	116

## P

Postulate	ポスチュレート	postulate	316
Potential	ポテンシアル	potential	113
— Kinetic —	運動 —	kinetic —	238
— To — men	等 — 面	equi — surface	116
— kansū	— 函數	— function	115

## R

Rakka-undō	落下運動	motion of a falling body	73, 137
Rankine	Rankine	Rankine	123

Rheonomic-zahyô	rheonomic 坐標	rheonomic coordinate	241
Rikidyô	力場	field of force	114
—no Tuyosa	—ノ強サ	intensity of —	114
Hozonteki—	保存的—	conservative—	123
Rikigaku	力學	dynamics	
Dô—	動—	kinetics	124
Sei—	靜—	statics	124
Rikiseki	力積	impulse	135
Ippan—no Bunti	一般—ノ分値	generalized—, component value of	281
Riron	理論	theory	
Einstein no sôtaisei—	Einsteinノ相對性—	Einstein's—of relativity	317
Ippan-sôtaisei—	一般相對性—	general—of relativity	317
Tokusyn-sôtaisei—	特殊相對性—	special—of relativity	317
Ritu	率	modulus	
Entyô—	延長—	elongation	306
Gensui—	減衰—	—of decay	160

## S

Sa	差	difference	
Vector no —	ベクトルノ—	vector —	10
Saisyô-sayô no Hôsoku	最小作用ノ法則	principle of least action	261, 267
Santai-mondai	三體問題	three points problem	292
Sanzi-kûkan	三次空間	three dimensional space	261
Sayô	作用	action	213, 267
Saisyô—no Hôsoku	最小—ノ法則	principle of least —	270
—kansû	—函數	—function	277
Scalar	スケーラー	scalar	4
Gizi-	擬似—	pseudo—	59
—seki	—積	—product	13
Scleronomic-zahyô	scleronomic坐標	scleronomic coordinate	241
Seiki-hôteiski	正規方程式	canonical equations	257
Seiki-zahyô	正規坐標	canonical coordinate	256
Sei-rikigaku	靜力學	statics	124

Seiryoku	勢力	energy	120
Seisi-	静止	rest	17
zahyôkei	—坐標系	stationary coordinate system	36
Sekai	世界	world	
Minkowski no —	Minkowski—	Minkowski's —	327
Zikû—	時空—	space-time —	327
—sen	—線	—line	327
—ten	—點	—point	327
Seki	積	product	
Gwai—	外—	external —	28
Nai—	内—	internal —	13
Riki—	力—	impulse	135
Scalar—	スケーラー—	scalar —	13
Vector no —	ベクトルノ—	—of vectors	28
Sekibun	積分	integral	
Daen—	楕圓—	elliptic —“Daen-sekibun” wo niyo	112
Sen—	線—	line —	112
—no Henbun	—ノ變分	variations of —	233
—zyôsû-vector	—常數ベクトル	integration constant vector	70
Sen	線	line	
Sekai—	世界—	world—	327
—sekibun	—積分	—integral	112
Sessen-kasokudo	切線加速度	tangential acceleration	48
Sessen-vector	切線ベクトル	tangent vector	18, 21
Sessyoku-heimen	接觸平面	osculating plane	49
Sigoto	仕事	work	111
Kasô—	假想—	virtual —	125
Kasô—no Hôsoku	假想—ノ法則	principle of virtual —	125
Sindô	振動	oscillation	
Daen-sindô	楕圓—	elliptic —	86, 89
Gensui—	減衰—	damped —	157
Koyû—	固有—	proper —	165
Kyôsei—	強制—	forced —	104, 165
Tan—	單—	simple —	85
Tangen—	單弦—	simple harmonic —	85



Ziyû—	自由—	free—	165
Sindōsu	振動數	frequency	86
— no Hôteisiki	—ノ方程式	—equation	296
Sinpuku	振幅	amplitude	85
— no ōkii sinsi-undō	—ノ大キイ振子運動	pendulum motion of finite—	170
Sinsi	振子	pendulum	85
Cycloid—	サイクロロイド—	cyloid—	190
Foucault—	Foucault—	Foucault's—	193, 203
Huku—	複—	double—	293
Kyū—	球—	spherical—	193
Sitten—	質點—	simple—	154
Tan—	單—	simple—	154
Sinsi-undō	振子運動	pendulum motion	170
Sinpuku no ōkii—	振幅ノ大キイ	— of finite amplitude	170
Sisei-kansū	示性函數	characteristic function	277
Hamilton no	Hamiltonノ—	Hamilton's—	277
Siten	支點	point of suspension	5
Sitten	質點	material particle	1
— no Iti	—ノ位置	position of a—	1
— -sinsi	—振子	simple pendulum	154
Sittenkei	質點系	system of material particles	214, 261
Gen de renketu sareta—	弦ヲ連結サレタ—	— connected by a string	305
— no Daihyōten	—ノ代表點	representative point of a—	161
— no miti	—ノ路	projectile	262
Sitaryō	質量	mass	97, 98
Koyū—	固有—	proper—	335
Kwansei—	慣性—	inertia—	104
Sitaryō-tyūsin	質量中心	centre of mass	216
— no Undō-hōoku	—ノ運動法則	law of motion of the—	218
— no Undō no Hozon-hōoku	—ノ運動ノ保存法則	law of conservation of motion of the—	231
Sizigen-iti-vector	四次元位置ベクトル	four dimensional position vector	328
Sizigen-kūkan	四次元空間	four dimensional space	326
Sokudo	速度	velocity	19
Bun—	分—	component—	20

Entyoku—	鉛直—	vertical—	24
Idoken—	緯度圈—	— along a latitude circle	26
Ikwan—	移換—	— of transportation	41
Ippan— no Bunti	一般—ノ分値	component value of general ized—	241
Kaku—	角—	angular—	25, 34
Kei—	系—	system—	41
Kei—	徑—	radial—	24, 25
Keidoken—	經度圈—	— along a longitude circle	26
Menseki—	面積—	areal—	33
Minkowski no	Minkowskiノ—	Minkowski's—	329
Sōtai—	相對—	relative—	39
Syū—	終—	final—	5
Unpaw—	運搬—	— of transportation	41
Yoko—	橫—	transverse—	24
Zettai—	絕對—	absolute—	33
— gōsei no Kōeki, Einstein no	—合成ノ公式, Einsteinノ	Einstein's formula of composition of velocities	333
Sō-energy	總エネルギー	total energy	123
Sōkyokusen-kansū	双曲線函數	hyperbolic function	143
Sōtai-iti-vector	相對位置ベクトル	relative position vector	36
Sōtai-kasokudo	相對加速度	relative acceleration	53
Sōtaisei	相對性	relativity	
— no Hōsoku	—ノ法則	principle of—	103, 321
Einstein no— no Hōsoku	Einstein—ノ法則	Einstein's principle of—	316
Galilei no— no Hōsoku	Galilei—ノ法則	Galilei's principle of—	105, 108
— riron, Einstein no	—理論, Einstein	Einstein's theory of—	317
Ippan— -riron	一般—理論	general theory of—	317
Tokusyu— -riron	特殊—理論	special theory of—	317
Sōtai-sokudo	相對速度	relative velocity	39
Speed	速サ	speed	86
Syasyōtotu	斜衝突	oblique impact	318
Syoki-zyōken	初期條件	initial condition	71

20	索引		
Syōgekiryoku	衝撃力	impulsive force	135
Syōtotu	衝突	impact	318
Sya—	斜—	oblique —	318
Tyoku—	直—	direct—	318
Syuhōsen-vector	主法線ベクトル	principal normal vector	49
Syukansū	主函數	principal function	270
Syunkanryoku	瞬間力	instantaneous force	135
Syūki	週期	period	85, 204, 156
Syūsoku	終速	final speed	139, 142, 147, 150
Syūten	終點	end point	5

T

Taisū-gensūdo	對數減衰度	logarithmic decrement	160
Tangen-sindō	單弦振動	simple harmonic motion	85
Tan'i	單位	unit	98
C. G. S.—	C. G. S.—	C. G. S.—	99
Kihon—	基本—	fundamental—	99
Yūdō—	誘導—	derived—	99
—vector	—ベクトル	—vector	12
Tansindō	單振動	simple oscillation	79, 85
Tansinsi	單振子	simple pendulum	154
Tansyuku, Fitz-Gerald no	短縮, Fitz-Gerald /	Fitz-Gerald's contraction	326
Tate-kasokudo	縱加速度	longitudinal acceleration	325
Tate-undō	縱運動	longitudinal motion	62
Taylor	Taylor	Taylor	
—no Teiri	—ノ定理	—'s theorem	129
Teikō	抵抗	resistance	
Kwansei—	慣性—	— due to inertia	128
—ryoku	—力	resisting force	137
Teiri	定理	theorem	
Coriolis no—	Coriolis /	Coriolis'—	55
Hamilton no—	Hamilton /	Hamilton's—	272
Jacobi no—	Jacobi /	Jacobi's—	276
Lamy no	Lamy /	Lamy's—	126

	索引		21
Taylor no—	Taylor /	Taylor's—	129
Wallis no—	Wallis /	Wallis'—	177
Ten	點	point	
Gen—	原—	origin	2
Sekai—	世界—	world—	327
Si—	始—	initial—	5
Sitten	質—	material—	1
Syū—	終—	end—	5
Tyakuryoku—	着力—	— of application	222
—kansū	—函數	—function	114
Thomson	Thomson	Thomson	86
Tikara ("Ryoku" wa sita ni)	力		
Coriolis no—	Coriolis /	Coriolis'—	110
Hozontekino—	保存的 /	conservative—	123
Mikakeno—	見掛ケ /	apparent—	108, 110'
Minkowski no	Minkowski /	Minkowski's—	334
Usinawareta—	失ハレタ—	lost—	128
"Ryoku"	力		
Dōatu—	動壓—	kinetic pressure	132
Dyū—	重—	gravity	114
Ensin—	遠心—	centrifugal—	111
Geki—	擊—	impulsive—	135
Gekisyō—	激衝—	impulsive—	135
Gwai—	外—	external—	215
Jppan — no Bunti	一般— / 分値	generalized—, component value of	245
Kō—, Undō-	抗—, 運動	reaction, kinetic	128
Kōsoku—	拘束—	— of constraint	132
Kwansei—	慣性—	— of inertia	128
Kyōsei—	強制—	imposed—	108, 110
Masatu—	摩擦—	— of friction	191
Nai—	内—	internal—	215
Syōgeki—	衝撃—	impulsive—	135
Syunkan—	瞬間—	instantaneous—	135
Teikō—	抵抗—	resisting—	137

Tyô—	張—	tension	307
Tyûsin—	中心—	central—	205
Undô-kô—	運動抗—	kinetic reaction	128
Unpan—	運搬—	—of transportation	110
Wai—	歪—	stress	307
Yûkô—	有効—	effective—	128
Tikara-	力—	force	
—kansû	—函數	— function	238
—no Dyô	—ノ場	field of—	114
—no Hôsoku	—ノ法則	law of—	103
—no Nôritu	—ノ能率	moment of—	221, 222
Toki [Zi]	時	time	
Dôzi	同—	simultaneity	323
Koyûzi	固有—	proper—	329
Tokukai	特解	particular solution	70
Tokusyu-sôtai-sei-riron	特殊相対性理論	special theory of relativity	317
Tomobure	共振レ	resonance	108
Tô-potential-men	等ポテンシャル面	equi-potential surface	116
Tôsokudo-undô	等速度運動	motion of constant velocity	40
Tôsoku-undô	等速運動	motion of constant speed	46
Tôzisei	等時性	isochronism	156, 159
Trajectory	路	trajectory	262
Turi atte iru	釣合ツテキル	in balance	124
Tyakuryokuten	着力點	point of application	222
Tycho Brahe	Tycho Brahe	Tycho Brahe	203
Tyokkaku-zahyô	直角坐標	rectangular coordinate	1, 2
Tyokusen-undô	直線運動	rectilinear motion	46
Tyokusyôtôtu	直衝突	direct impact	318
Tyôryoku	張力	tension	307
Tyûmen-zahyô	柱面坐標	cylindrical coordinates	3
Tyûsin	中心	centre	
Kyokuritu—	曲率—	—of curvature	49
Situryô—	質量—	—of mass, "Situryô"—wo miyo	205
—ryoku	—力	central force	205
—undô	—運動	central motion	89, 209

## U

Unari	ウナリ	beats	168
—no Kazu	—ノ數	number of—	168
Undô	運動	motion	13
Cycloid—	サイクロイド—	cycloid—	186
En—	圓—	circular—	24, 89, 179
Gekisyô—	激衝—	impulsive—	136, 252
Gekisyô—no Lagrange-hôteisiki	激衝ノLagrange方程式	Lagrange's equation of impulsive—	250, 252
Heisin—	並進—	translation	36
Hôbutusen-undô	拋物線—	parabolic—	26, 78, 278
Kôsoku—	拘束—	constrained—	128, 129
Kwaiten—	廻轉—	rotation	37
Kyokusen—	曲線—	curvilinear—	46
Rakka-	落下—	falling—	73, 137
Sinsi—	振子—	pendulum—	170
Tate—	縱—	longitudinal—	310
Tôsoku—	等速—	—of constant speed	46
Tôsokudo—	等速度—	—of constant velocity	46
Tyokusen—	直線—	rectilinear—	46
Tyûsin—	中心—	central—	89, 209
Yoko—	横—	transverse—	310
Ziyû—	自由—	free—	128
—energy	—エネルギー	kinetic energy	123
-hôsoku, Situryô-tyûsin no	—法則, 質量中心ノ	law of—of the centre of mass	218
—hôteisiki	—方程式	equations of—	101, 103, 108
Hamilton no—	Hamiltonノ	Hamilton's equations of—	255
-hôteisiki	方程式		
Lagrange no—	Lagrangeノ	Lagrange's equations of—	240, 245, 247, 253
-hôteisiki	方程式		
—kôryoku	—抗力	kinetic reaction	128
—no Daiiti-hôsoku	—ノ第一法則	the first law of—	101
—no Daini-hôsoku	—ノ第二法則	the second law of—	102
—no Daisan-hôsoku	—ノ第三法則	the third law of—	102, 214

— no. Hozon-hōsoku, Sitaryō-tyūsin no	—ノ保存法則, 質量中心ノ	law of conservation of motion of the centre of mass	221
Undōdo-keisū	運動度係數	coefficient of mobility	259
Undōgaku	運動學	kinematics	72
Undōryō	運動量	momentum	103
Ippan— no Buntō	一般—ノ分値	component value of generalized—	256
—no Hozon-hōsoku	—ノ保存法則	law of conservation of—	226
—no Nōritu	—ノ能率	moment of—	221
—no Nōritu no Hozon-hōsoku	—ノ能率ノ保存 法則	law of conservation of moment of—	228
Undō-zahyōkei	運動坐標系	moving coordinate system	36
Unpan-kasokudo	運搬加速度	acceleration of transportation	54
Unpanryoku	運搬力	force of transportation	110
Unpan-sokudo	運搬速度	velocity of transportation	41
Usenkei	右旋系	right-handed system	26
Usinawareta Tikara	失ハレタ力	lost force	128
Usynkei	右手系	right-handed system	28

## V

Vector	ベクトル	vector	4
Bibun-keisū—	微分係數—	differential coefficient—	19
Bun—	分—	component—	19
Dikusei—	軸性—	axial—	32
Gōsei—	合成—	resultant—	7
Hōsen—	法線—	normal—	49
Syuhōsen—	主法線—	principal normal—	49
Iti—	位置—	position—	4
Kihon—	基本—	fundamental—	12
Kyokusei—	極性—	polar—	32
Sekibun-zyōsū—	積分常數—	integration constant—	70
Sessen—	切線—	tangent—	18, 21
Sizigen-iti—	四次元位置—	four dimensional position—	328
Sōtai-iti—	相對位置—	relative position—	36
Syuhōsen—	主法線—	principal normal—	49
Tan'i—	單位—	unit—	12

Zettai-iti—	絕對位置—	absolute position—	36
Zikū-bikyori—	時空微距離—	infinitesimal space time—	328
—no Bibun-keisū	—ノ微分係數	differential coefficient of a—	19
—no Ba	—ノ場	field of a—	114
—no Sa	—ノ差	difference of—s	10
—no Seki	—ノ積	product of—s	28
—no Sitei	—ノ始點	initial point of a—	5
—no Syūten	—ノ終點	end point of a—	5
—no Wa	—ノ和	sum of vectors	7

## W

Wa	和	sum	
Vector—	ベクトル—	vector—	7
Wairyoku	歪力	stress	307
Wakusei	惑星	planet	203
Wallis	Wallis	Wallis	177
—no Teiri	—ノ定理	—theorem	177
Wren	Wren	Wren	314

## Y

Yoko-kasokudo	橫加速度	transverse acceleration	62, 65
Yoko-sokudo	橫速度	transverse velocity	24
Yoko-undō	橫運動	transverse motion	310
Young	Young	Young	123
Yūdō-tan'i	誘導單位	derived unit	99
Yūkōryoku	有効力	effective force	128
Yūsei	遊星	planet	203

## Z

Zahyō	坐標	coordinate	1
Entō—	圓錐—	cylindrical—	3
Entyū—	圓柱—	cylindrical—	3
Ippan—	一般—	generalized—	240
Kizyun—	基準—	canonical—	256

Kyoku —	極 —	polar —	2
Rheonomic —	レオノミツク —	rheonic —	241
Scleronomic —	スクレロノミツク —	scleronomic —	241
Seiki —	正規 —	canonical —	256
Tyokkaku —	直角 —	rectangular —	1, 2
Tyūmen —	柱面	cylindrical —	3
Zahyō-diku	坐標軸	coordinate axis	2
Zahyōkei	坐標系	coordinate system	4
Koyū —	固有 —	proper —	329
Kwaiten —	廻轉 —	rotating —	37
Seisi —	静止 —	stationary —	36
Undō —	運動 —	moving —	36
Zettai —	絶対 —	absolute —	36, 106
Zahyō-men	坐標面	coordinate plane	2
Zettai-iti-vector	絶対位置ベクトル	absolute position vector	36
Zettai-kasokudo	絶対加速度	absolute acceleration	52
Zettai-sokudo	絶対速度	absolute velocity	38
Zettaiti	絶対値	absolute value	5
Zettai-zahyōkei	絶対坐標系	absolute coordinate system	36, 106
Zikū-bikyori	時空微距離	infinitesimal space time	323
Zikū-bikyori vector	時空微距離ベクトル	infinitesimal space time vector	328
Zikū-sekai	時空世界	space time world	327
Ziyūdo	自由度	degree of freedom	128
Ziyūkei	自由系	free system	216
Ziyū-sindō	自由振動	free oscillation	163
Ziyū-undo	自由運動	free motion	128
Zyō-bibun-hōteisiki	常微分方程式	ordinary differential equation	272
Zyōken	條件	condition	
Hazimeno	始メノ —	initial —	71

—(終)—

昭和七年五月五日印刷  
昭和七年五月十日發行

## 版權所有

著者	發行者

質點ノ力學・奥附  
定價金四圓五拾錢

著者 玉城嘉十郎

東京市日本橋區大傳馬町三丁目六番地  
發行者 內田作藏

東京市京橋區銀座西二丁目三番地  
印刷所 三協印刷會社

## 發行所

內田老鶴圃

東京市日本橋區大傳馬町二丁目  
振替東京一二一四六番  
電話浪花一八六五番

玉城嘉十郎氏著

## 弾性體及流體の力學

定價4圓50錢 送料30錢

久しく多くの物理學徒に依つて期待されて居つた、玉城博士の理論物理學第二卷が出現した。「本書は弾性體及び流體の力學に関する基礎原理と、其の應用とを、簡明に論じたものである」。質點及び剛體の力學を論じた書は、充棟も嘗ならざるに反し、弾性體及び流體の力學は物理學に於て、必要缺く可からざる一分科を爲し、工學に於いても亦極めて應用の廣いものであるに拘らず、吾々純正理學の立場から之を論じた邦文書を殆んど持つて居ないと云つても過言ではないであらう。即ち本書の出現は物理學徒及び基礎觀念の正確を欲する工學界の人達の渴を醫するに足ることを疑はない。

菊判特製本函入 紙數320餘頁

玉城嘉十郎氏著

## 剛體の力學

目下改版進行中

(東京 内田老鶴圃 刊行)

46-372



1200501260363



終