トナルカラ, $\mathbf{r}_0$ デ圓ノ中心 O カラ質點 P ニ向ツタ單位動徑ヲ表ハスト

$$\mathbf{R}=-m\left(\frac{v^2}{l}+g\cos\psi\right)\mathbf{r}_0 \tag{43.18}$$

トナル. (43.7), (43.8) ニ依テ

$$v^2=v_0^2+2n^2l^2(\cos\psi-1)$$
$$=v_0^2-2gl(1-\cos\psi) \tag{43.19}$$

デアルカラ,之レハ

$$\mathbf{R}=-m\{v_0^2/l-g(2-3\cos\psi)\}\mathbf{r}_0 \tag{43.20}$$

トナル.

$v_0^2=4gl$ ノ場合ニハ

$$\mathbf{R}=-mg(2+3\cos\psi)\mathbf{r}_0$$

トナリ, $\cos\psi=-2/3$ ノトキ,卽チ ψ ガ約 131°48′ ノトキニ R=0 トナリ,圓周ハ拘束力ヲ働カサナイコトニナル. 隨テ若シ質點ガ圓周ノ内部ヲ沿ツテ動イテキルトキ,或ハ單振子ノ様ニ圓ノ中心カラ絲デ吊サレテキルトキニハ,上述ノ所デ質點ガ圓周ヲ離レルコトニナル. 質點ガ圓管内ヲ動イテキル如キ場合ニハ,尙ホ最高點ニ向ツテ進ンデ行クノデアル.

44. 鉛直面内ノ Cycloid 運動

質點ガ曲線上ニ拘束サレテ動イテキルトキ,其

ノ曲線ノ方程式ガ直角坐標等ヲ用キテ (35.11) ノ形デ表ハサレルトキハ,前節デ示シタ様ニ第35節ノ方法ヲ用キテ其ノ運動ヲ知ルコトガ出來ルガ,曲線ノ方程式ガ他ノ形デ與ヘラレテキルガタメニ,第35節ノ方法ヲ適用スルニ不便ナ場合ガアル. 例ヘバ,質點ガ鉛直面内ニアル **Cycloid**(1) ト呼バレル曲線上ニ拘束運動ヲシテキルトシ,其ノ曲線ノ方程式ガ

$$s=4a\sin\psi \tag{44.1}$$

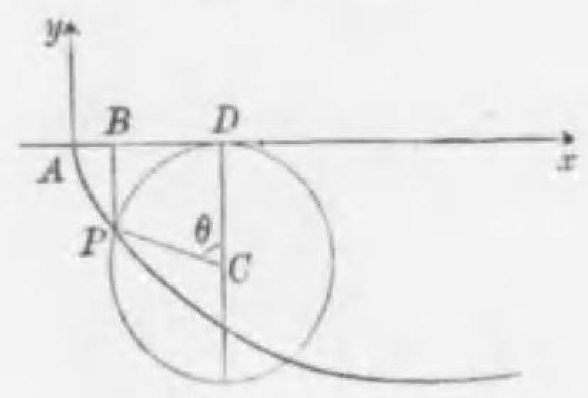
デ與ヘラレタ様ナ場合デアル. s ハ曲線上ノ一定點カラ曲線ニ沿フテ測ツタ任意ノ曲線上ノ點ニ至ル距離ヲ表ハシ, a ハ常數, ψ ハ其ノ點ニ於ケル曲線ヘノ切線ガ水平線トナス角ヲ表ハシテキルモノデアル.(2) 此ノ種ノ曲線ノ方程式ヲ其ノ**陰方程式**ト

(1) 擺線トモ云フ.

(2) 此ノ曲線ハ半徑 a ノ圓ガ一直線上ヲ廻轉シテ行ツタトキニ,其ノ圓周上ノ一點ガ畫ク路ヲ示スモノデアル. 第36圖ニ於テ, ABD ヲ其ノ直線トシ, C ヲ廻轉スル圓ノ中心, P ヲ圓周上ノ一點トシ,始メ A ニ合シテキタトスル. A ヲ原點トシ AD ヲ x 軸トシ,之レニ垂直上方ニ y 軸ヲトル. CD ヲ鉛直線トシ, PC ガ之レト爲ス角ヲ θ トスル. P カラ x 軸ニ下シタ垂線ノ足ヲ B トスル. 圖カラ P 點ノ坐標トシテ

$$x=\mathrm{AB}$$
$$=\mathrm{AD}-\mathrm{BD}$$
$$=\widehat{\mathrm{PD}}-\mathrm{BD}$$
$$=a(\theta-\sin\theta),$$
$$y=-\mathrm{PB}$$
$$=-a(1-\cos\theta)$$

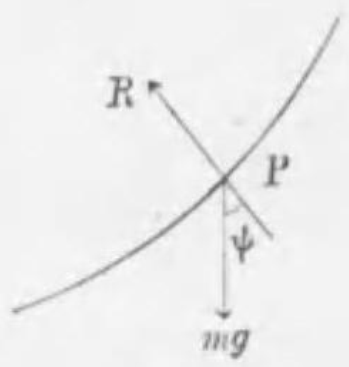
第36圖



稱シテキル.

此ノ種ノ場合ニハ,質點ノ運動方程式ハ曲線ノ切線ノ方向ト,其レニ垂直ナ方向ニ分ケテ取扱フノガ便利デアル. 即チ加速度ヲ (14.8) ニ示ス切線加速度ト法線加速度トニ分チ,質點ニ働イテキル力モ其等ノ方向ニ分ツテ運動方程式ヲ作ル.

第37圖



今ノ場合ニ,質點 P ニ働イテキル力ハ下方ニ向ツテ働イテキル重力ト,曲線ニ垂直デ其ノ曲率中心ニ向ツテ働イテキル拘束力 **R** トデアルカラ,質點ノ運動方程式ハ (14.5), (14.7) ヲ用キテ

ヲ得ル. 隨テ

$$dx=a(1-\cos\theta)d\theta,\quad dy=-a\sin\theta\,d\theta,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}=-\cot\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\theta}=-a\sin\theta,\quad \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

ヲ得ル. $ds^2=dx^2+dy^2$ デアルカラ, 最後ノ二式カラ

$$\frac{ds}{d\theta}=2a\sin\frac{\theta}{2}$$

ヲ得,之レヲ積分シテ

$$s=C-4a\cos\frac{\theta}{2}$$

ヲ得ル. dy/dx ハ P ノ畫ク曲線ノ切線ガ x 軸ト爲ス角ノ正切ヲ與ヘルカラ $dy/dx=\tan\psi$ トナル. 故ニ ψ ト θ トノ關係ハ

$$\tan\psi=-\cot\frac{\theta}{2}=\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

デ與ヘラレル. 隨テ

$$s=C+4a\sin\psi$$

トナル. $\psi=0$ ノ點カラ s ヲ測ルトスレバ C=0 トナル

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\psi,\tag{44.2}$$

$$m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=R-mg\cos\psi\tag{44.3}$$

トナル. 但シ曲率半徑ヲ ρ デ表ハシタ.

(44.1) ノ關係ガアルカラ, (44.2) ハ

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{4a}s\tag{44.4}$$

トナル. 之レハ (22.2) ト同形ノ微分方程式デアルカラ直チニ

$$s=\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t+\epsilon\right)\tag{44.5}$$

ヲ得,此ノ質點ノ運動ガ

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}\tag{44.6}$$

ノ週期ヲ有スル單振動デアルコトヲ示ス. α, ϵ ハ積分常數デ始メノ條件カラ決マル.

(44.6)ハ週期ガ振幅ニ無關係デアルコトヲ示シテキル. 此ノ場合ハ s ノ大サ如何ニ拘ラズ單振動ヲスルノデアルカラ,單振子ノ場合ニ反シテ,完全ナ等時性ヲ有シテキル.[1]

質點ノ速サヲ v トスレバ, $ds/dt=v$ デアルカラ,

(1) 此ノ性質ハ Huyghens ニ依テ發見サレタ. 1673. 第38圖ノ cycloid ALE ノ曲率中心ノ軌跡,即チ捲付線ハ,其ノ最低點 L ノ直上デ 4a ノ距離ニアル F ヲ通ル

(44.4) ハ

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{g}{4a}s \qquad (44.7)$$

ト書ケル．之レヲ積分シテ

$$v^2=C-\frac{g}{4a}s^2$$

$$=C-4ag\sin^2\psi$$

ヲ得ル．質點ガ靜止狀態カラ動キ出シタ點ニ對スル ψ ヲ ψ_0 トスルト

$$v^2=4ag(\sin^2\psi_0-\sin^2\psi) \qquad (44.8)$$

トナル．

曲率半徑 ρ ハ $ds/d\psi$ デアルカラ，(44.1) ニ依テ

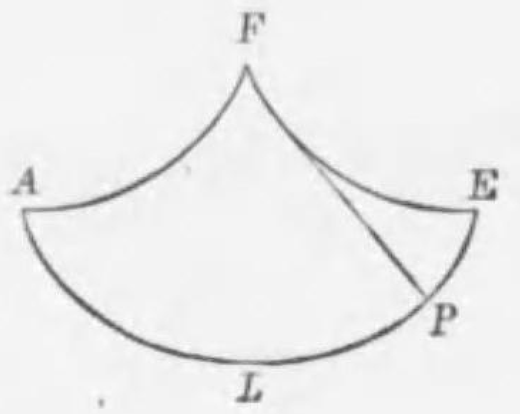
$$\rho=4a\cos\psi \qquad (44.9)$$

トナリ，(44.3) ハ (44.8)，(44.9) ニ依テ

$$R=mg\frac{\cos2\psi+\sin^2\psi_0}{\cos\psi} \qquad (44.10)$$

トナル．

第 38 圖



元ノ cycloid ノ半分ニ等シイモノヲ接合シタ AFE デアルコトガ證明出來ル．故ニ F 點カラ $4a$ ノ長サノ絲デ質點ヲ吊シ cycloid 形ノ固體ヲ AFE ノ位置ニ置クト，コノ質點ハ ALE 上ヲ動ク樣ニナル．此ノ樣ナ裝置ヲ **Cycloid 振子**ト稱スル．

第35節ニ於テ拘束運動ニ就テ考ヘタトキハ，質點ガ表面若シクハ曲線上ニ拘束セラレテキルト言フコトノミヲ考ヘテ表面若シクハ曲線ノ性質ニ就テハ少シモ考ヘナカツタ．併シ實際ニ物體ガ他ノ物體ノ上ヲ動ク場合ニハ，其ノ運動ヲ阻止スル樣ニ働ク力ガ現ハレル．其レヲ**摩擦力**ト稱シテキル．實驗ノ結果ニヨルト，摩擦力ノ大サハ拘束力ノ大サ R ニ比例シ μR デ表ハスコトガ出來ル[1]．μ ハ其ノ表面ノ性質ニ依ルモノデ，乾イタ表面デハ略ボ常數トシ見テヨイモノデアリ，之レヲ**摩擦係數**ト呼ンデキル．μ ガ極メテ小デ摩擦力ガ現ハレナイト見ラレル表面ヲ**滑カナ表面**，μ ガ大デ摩擦力ヲ考慮スル必要ノアル面ヲ**粗イ表面**ト稱スル．

Cycloid ガ粗イトシテ，質點ガ其ノ上ヲ落チテ行ク場合ニ就テ考ヘテ見ヨウ．此ノ場合ノ運動方程式ハ

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\mu R-mg\sin\psi,$$

$$\frac{m}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=R-mg\cos\psi$$

トナル．之等ノ式デ s ハ落チ始メタ點カラ測ルモ

[1] 此ノ關係ハ 1785 年 Coulomb ニ依テ實驗的ニ見出サレタモノデアル．Charles Augustin Coulomb (1736—1806)，佛國ノ物理學，工學者．

ノトシテキルカラ,s ト ψ トノ關係ハ

$$s = 4a(\sin\psi - \sin\psi_0)$$

デ與ヘラレ．隨テ運動方程式ハ (44.9) ヲ用キテ

$$m\frac{d}{dt}(4a\cos\psi.\dot{\psi}) = \mu R - mg\sin\psi, \tag{44.11}$$

$$m.4a\cos\psi.\dot{\psi}^2 = R - mg\cos\psi \tag{44.12}$$

ト書ケル．R ハ未知ノ量デアルカラ,此ノ兩式カラ消去シテ

$$\frac{d}{dt}(\cos\psi.\dot{\psi}) - \mu\cos\psi.\dot{\psi}^2 = -\frac{g}{4a}(\sin\psi - \mu\cos\psi)$$

ヲ得ル．$e^{-\mu\psi}$ ヲ兩邊ニ掛ケルト

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu\psi}\cos\psi.\dot{\psi}) = -\frac{g}{4a}(\sin\psi - \mu\cos\psi)e^{-\mu\psi} \tag{44.13}$$

トナル．

$$(\sin\psi - \mu\cos\psi)e^{-\mu\psi} = \xi \tag{44.14}$$

トシ,之レヲ t ニ就テ微分スルト

$$\frac{d\xi}{dt} = (1+\mu^2)e^{-\mu\psi}\cos\psi.\dot{\psi} \tag{44.15}$$

トナリ,尚ホ一回微分シテ (44.13) ヲ用キ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{g}{4a}(1+\mu^2)\xi$$

ヲ得ル．之レハ (44.4) ト同形ノ微分方程式デアルカラ,其ノ一般解トシテ

$$\xi = A\cos\left(\sqrt{g\frac{(1+\mu^2)}{4a}}\,t + \beta\right) \tag{44.16}$$

ヲ得ル．A, β ハ始メノ條件カラ決マル積分常數デアル．

(44.16) ヲ t ニ就テ微分シ,(44.15) ヲ用キテ

$$(1+\mu^2)e^{-\mu\psi}\cos\psi.\dot{\psi} = -A\sqrt{g\frac{1+\mu^2}{4a}}\sin\left(\sqrt{g\frac{1+\mu^2}{4a}}\,t+\beta\right)$$

ヲ得ルガ,質點ノ速サ v ハ $4a\cos\psi.\dot{\psi}$ デアルカラ,之レハ

$$v^2 = \frac{4ag}{1+\mu^2}A^2\sin^2\left(\sqrt{g\frac{1+\mu^2}{4a}}\,t+\beta\right)e^{2\mu\psi}$$

ヲ與ヘ,(44.16), (44.14) ニ依テ

$$v^2 = \frac{4ag}{1+\mu^2}\{A^2e^{2\mu\psi} - (\sin\psi - \mu\cos\psi)^2\} \tag{44.17}$$

トナル．

ψ ト t,隨テ質點ノ位置ト時トノ關係ハ (44.14), (44.16) ヨリ得ラレ,R ハ (44.12), (44.17), (44.9) ヲ用キテ容易ニ得ラレル．

45. Foucault 振子

重イ物體ヲ絲デ吊シテ,其ノ絲ノ他端ヲ固定シテ,質點ヲ自由ニ動キ得ル様ニシテ置ケバ,質點ハ其ノ絲ノ長サヲ半徑トスル球面上ニ運動ヲスル．此ノ様ナ裝置ヲ**球振子**ト稱スル．

絲ノ固定點ヲ原點トシ,質點ノ直角坐標ヲ x, y,

z トスルト,拘束方程式ハ

$$\varphi \equiv x^2+y^2+z^2-l^2=0 \tag{45.1}$$

デアル.

z 軸ヲ鉛直上方ニ向ツテトリ,質點ノ質量ヲ m トスルト重力ハ

$$F_x=F_y=0,\ F_z=-mg \tag{45.2}$$

デアルカラ,球振子ノ運動方程式ハ (35.5) ニ (45.1) ノ φ 及ビ (45.2) ノ $\mathbf{F}$ ヲ入レテ

$$-m\ddot{x}+2\lambda x=0,$$

$$-m\ddot{y}+2\lambda y=0,$$

$$-mg-m\ddot{z}+2\lambda z=0$$

トナル. 之等ヲ第35節ニ示シタ方法ニ依テ解イテ球振子ノ運動ヲ知ルコトガ出來ルノデアルガ,此ノ球振子ガ地球上ニアルモノトシ,地球ガ廻轉シテヰルコトモ考慮ニ入レテ,ドノ樣ナ運動ヲスルカヲ考ヘテ見ヨウ.

其ノタメニ先ヅ,坐標系ガ z 軸ヲ軸トシテ $w\mathbf{k}$ ノ等角速度デ廻轉シテヰルトスレバ, (29.8) ニ依テ,ソウシテ其レト同理ニ依テ拘束力モ見掛ケノ力トシテ取扱ツテ

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}+\mathbf{F}_t+\mathbf{F}_c+\mathbf{R}$$

トシ, (29.9), (29.10), (35.7), (45.1), (45.2) ヲ用キテ

$$m\mathbf{a}=-\mathbf{k}mg-mw[\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{r}]]-2w[\mathbf{k}\mathbf{v}]+2\lambda\mathbf{r},$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad -\ddot{x}+2w\dot{y}+w^2x+2\lambda x/m &=0,\\ -\ddot{y}-2w\dot{x}+w^2y+2\lambda y/m &=0,\\ -\ddot{z}\qquad\qquad +2\lambda z/m-g &=0\end{aligned}\right\} \tag{45.3}$$

ヲ此ノ場合ノ質點ノ運動方程式トシテ得ル.

(45.3) ノ各式ニソレゾレ $-\dot{x}$, $-\dot{y}$, $-\dot{z}$ ヲ乘ジタモノヲ加ヘ合セテ

$$\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}+\ddot{z}\dot{z}-w^2(x\dot{x}+y\dot{y})$$

$$-2\frac{\lambda}{m}(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})+g\dot{z}=0$$

ヲ得ル. 然ルニ (45.1) ニ依テ

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$$

デアルカラ,上式ハ

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-w^2\frac{d}{dt}(x^2+y^2)+2g\frac{dz}{dt}=0$$

トナル. 故ニ質點ノ速サヲ v トスレバ,上式ヲ積分シテ

$$v^2-w^2(x^2+y^2)+2gz=A \tag{45.4}$$

ヲ得ル. 但シ A ハ積分常數デアル.

(45.3) ノ第一式ニ y ヲ乘ジタモノカラ,第二式ニ x ヲ乘ジタモノヲ引クト

$$x\ddot{y}-y\ddot{x}+2w(y\dot{y}+x\dot{x})=0$$

ヲ得,之レヲ積分シテ

$$x\dot{y}-y\dot{x}+w(x^2+y^2)=\mathrm{B} \qquad (45.5)$$

ヲ得ル. B ハ積分常數デアル.

直角坐標ノ代リ極坐標ヲ用キ

$$\left.\begin{aligned} x&=l\sin\theta\cos\varphi,\\ y&=l\sin\theta\sin\varphi,\\ z&=l\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (45.6)$$

トスルト

$$x^2+y^2=l^2\sin^2\theta,$$

$$x\dot{y}-y\dot{x}=l^2\sin^2\theta.\dot{\varphi},$$

$$v^2=l^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2+l^2\dot{\theta}^2$$

トナルカラ, (45.4), (45.5) ハ

$$l^2\dot{\theta}+l^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2-l^2\sin^2\theta.w^2+2gl\cos\theta=\mathrm{A} \qquad (45.7)$$

$$l^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}+l^2\sin^2\theta.w=\mathrm{B} \qquad (45.8)$$

トナル.

$$l\sin\theta=r,\ \theta=\pi-\delta$$

トシ, δ ハ極メテ小サク

$$\sin\delta=\delta,\ \cos\delta=1-\frac{\delta^2}{2}$$

トシテヨイモノト考ヘヨウ. 卽チ振子ノ振幅ガ大デナイトスル. 此ノ樣ナトキニハ

$$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)\cong\pi-\theta=\frac{r}{l}, \qquad (45.9)$$

$$\cos\theta=-\cos(\pi-\theta)\cong-1+\frac{(\pi-\theta)^2}{2}=-1+\frac{r^2}{l^2},$$

トシテヨイカラ, (45.7), (45.8) ハ

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2-r^2w^2-2gl+g\frac{r^2}{l}=\mathrm{A},$$

$$r^2\dot{\varphi}+r^2w=\mathrm{B}$$

トナル.

質點ガ靜止ノ狀態ニアルトキヲ $t=0$ トシ,其ノ時ニ $r=r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ デアルトスレバ

$$\mathrm{A}=-r_0^2w^2-2gl+g\frac{r_0^2}{l},$$

$$\mathrm{B}=r_0^2w$$

トナルカラ

$$g/l=n^2 \qquad (45.10)$$

トスレバ

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2-r^2w^2+n^2r^2=-r_0^2w^2+n^2r_0^2,$$

$$r^2\dot{\varphi}+r^2w=r_0^2w \qquad (45.11)$$

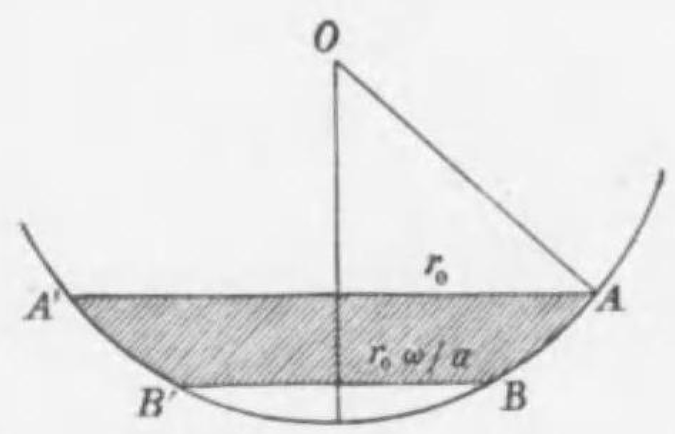
ヲ得ル. 此ノ兩式カラ $\dot{\varphi}$ ヲ消去シテ

$$(r\dot{r})^2=-r^4n^2+r^2(n^2+w^2)r_0^2-r_0^4w^2 \qquad (45.12)$$

ヲ得ル. 之レヲ零ニ等シクセシメル r ノ値ヲ r_1, r_2 トスルト

$$r_1^2=r_0^2w^2/n^2,\ r_2^2=r_0^2 \qquad (45.13)$$

第 39 圖



ヲ得ル. 此ノ r_1, r_2 ハ r ノ極大値及ビ極小値デアル. 隨テ質點ハ z 軸ヲ軸トシ, r_1, r_2 ヲ半徑トスル圓帶

ABB'A' ノ中ニ運動スルモノデアルコトガ分カル.

(45.12) ハ

$$(r\dot{r})^2 = -n^2(r^2-r_1^2)(r^2-r_2^2)$$

$$= -n^2r^4+n^2(r_1^2+r_2^2)r^2-n^2r_1^2r_2^2$$

$$= -n^2\left(r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\right)^2+n^2\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{2}\right)^2$$

トナルカラ

$$r^2-\frac{r_1^2+r_2^2}{2}=\frac{1}{2}(r_1^2-r_2^2)\mathrm{R} \qquad (45.14)$$

トスルト

$$2r\dot{r}=\frac{1}{2}(r_1^2-r_2^2)\dot{\mathrm{R}},$$

$$(r\dot{r})^2=n^2\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{2}\right)^2(1-\mathrm{R}^2),$$

$$\therefore \quad \left(\frac{r_1^2-r_2^2}{4}\dot{\mathrm{R}}\right)^2=n^2\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{2}\right)^2(1-\mathrm{R}^2),$$

$$\frac{\pm d\mathrm{R}}{\sqrt{1-\mathrm{R}^2}}=2n\,dt$$

ヲ得ル. $t=0$ ノトキニ $r=r_0$ デアッテ,之レガ r ノ極大値デアルカラ, $\dfrac{dr}{dt}<0$ デナケレバナラヌ. ソウシテ $\dfrac{d\mathrm{R}}{dr}=\dfrac{4r}{r_1^2-r_2^2}<0$ デアルカラ, $\dfrac{d\mathrm{R}}{dt}>0$ デナケレバナラヌ. 故ニ

$$2n\,dt=\frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{1-\mathrm{R}^2}}$$

ヲ得ル. 之レヲ積分シテ

$$2nt=\sin^{-1}\mathrm{R}+\mathrm{C}$$

$$=\sin^{-1}\frac{2r^2-r_1^2-r_2^2}{r_1^2-r_2^2}+\mathrm{C}$$

ヲ得ル. C ハ積分常數デアル.

$t=0$ ノトキニハ, $r=r_0=r_2$ デアルカラ

$$\mathrm{C}=-\sin^{-1}(-1)=\frac{\pi}{2}$$

トナル. 故ニ

$$2nt=\sin^{-1}\frac{2r^2-r_1^2-r_2^2}{r_1^2-r_2^2}+\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \quad \frac{2r^2-r_1^2-r_2^2}{r_1^2-r_2^2}=\sin\left(2nt-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\cos 2nt$$

$$=\sin^2 nt-\cos^2 nt,$$

隨テ

$$r^2=r_1^2\sin^2 nt+r_2^2\cos^2 nt \qquad (45.15)$$

ヲ得ル.

(45.11) ニ (45.15) ノ r^2 ノ値ヲ代入シテ

$$\dot{\varphi}+w=\frac{w}{\cos^2 nt+\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2\sin^2 nt} \qquad (45.16)$$

ヲ得ル.

$$\varphi+wt=\psi, \quad \tan nt=\tau$$

トスルト

$$(\dot{\varphi}+w)dt = d\psi,\quad \sec^2 nt\, dt = d\tau/n$$

デアルカラ,(45.16) ハ

$$d\psi = \frac{w}{n}\,\frac{d\tau}{1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\tau^2}$$

トナリ,之レヲ積分シテ

$$\psi = \frac{w}{n}\,\frac{r_2}{r_1}\tan^{-1}\left(\frac{r_1\tau}{r_2}\right)+\mathrm{D}$$
$$=\tan^{-1}(w\tau/n)+\mathrm{D}$$

ヲ得ル. $t=0$ ノトキニ $\varphi=0$ デアルトスルト $\mathrm{D}=0$ トナルカラ

$$\tan(\varphi+wt) = \frac{w}{n}\tan nt$$

ヲ得ル. 随テ

$$\left.\begin{aligned}\sin(\varphi+wt) &= \frac{\frac{w}{n}\tan nt}{\sqrt{1+\left(\frac{w}{n}\right)^2\tan^2 nt}},\\ \cos(\varphi+wt) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{w}{n}\right)^2\tan^2 nt}}\end{aligned}\right\}\tag{45.17}$$

ヲ得ル.

$$\xi=r\cos(\varphi+wt),\quad \eta=r\sin(\varphi+wt)\tag{45.18}$$

トスルト

$$\xi^2=r^2\frac{1}{1+\left(\frac{w}{n}\right)^2\tan^2 nt},\quad \eta^2=r^2\frac{\left(\frac{w}{n}\right)^2\tan^2 nt}{1+\left(\frac{w}{n}\right)^2\tan^2 nt}$$

トナルカラ,(45.15) ノ r^2 ノ値ヲ置キ換ヘテ

$$\xi^2 = r_2^2\cos^2 nt,\quad \eta^2 = r_1^2\sin^2 nt\tag{45.19}$$

ヲ得ル. 随テ t ヲ消去シテ

$$\frac{\xi^2}{r_2^2}+\frac{\eta^2}{r_1^2}=1\tag{45.20}$$

トナルカラ,$\xi\eta$ 平面内デハ,質點ハ ξ,η ヲ軸トシ,ξ ノ方ニ r_2 ノ半長徑,η ノ方ニ r_1 ノ半短徑ヲ有スル楕圓ヲ畫クコトガ知ラレル.

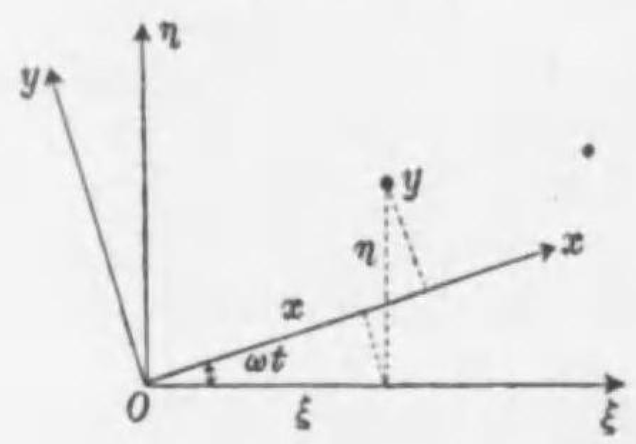
(45.18), (45.10), (45.7) ニ依テ

$$\left.\begin{aligned}\xi&=r\cos\varphi\cos wt-r\sin\varphi\sin wt,\\ \eta&=r\sin\varphi\cos wt+r\cos\varphi\sin wt,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}\xi&=l\sin\theta\cos\varphi\cos wt-l\sin\theta\sin\varphi\sin wt,\\ \eta&=l\sin\theta\sin\varphi\cos wt+l\sin\theta\cos\varphi\sin wt,\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}\xi&=x\cos wt-y\sin wt,\\ \eta&=x\sin wt+\varphi\cos wt\end{aligned}\right\}\tag{45.21}$$

トナルカラ

$$\left.\begin{aligned}x&=\xi\cos wt+\eta\sin wt,\\ y&=-\xi\sin wt+\eta\cos wt\end{aligned}\right\}\tag{45.22}$$

第 40 圖



ヲ得ル. 第40圖カラ明カナ様ニ xy 坐標系ハ $\xi\eta$ 坐標系ニ對シテ $+w\mathbf{k}$ ノ角速度デ廻轉シテキル. 故ニ $O\xi\eta\zeta$ $(O\xi\eta z)$ ハ,其レニ對シテ $Oxyz$ 坐標

系ガ $+w\mathbf{k}$ ノ角速度デ廻轉シテキル靜止坐標系デアル. 隨テ $Oxyz$ 坐標系ニ對シテハ $O\xi\eta\zeta$ 坐標系ハ $-w\mathbf{k}$ ノ角速度デ廻轉シテキル.

我ガ地球ハ地軸ヲ軸トシテ,日々西カラ東ノ方ニ一定ノ角速度デ廻轉シテキルノデアルカラ,振子ノ支點ガ地軸上ニアルトシ,z 軸ハ地軸ト一致シ,$Oxyz$ 系ガ地球ト共ニ廻轉シテキルトスレバ,之レ迄ニ得タ結果ガ其ノ儘ニ當テハマルベキ筈デアル. 故ニ絲デ吊サレタ質點ノ水平面上ヘノ射影ハ,其ノ軸ガ地球ノ廻轉ト反對ノ方向ニ等速デ廻轉スル (45.20) デ示サレル楕圓ヲ畫クコトニナル. 此ノ楕圓ノ軸ハ,極デハ一日デ一周スル. 北半球ノ緯度 ψ ノ點デハ,地球ノ廻轉速度ノ其點ニ於ケル鉛直線ニ關スル分値ガ $w\sin\psi$ トナルカラ,此ノ楕圓ノ軸ハ東カラ南,南カラ西,西カラ北ト云フ方向ニ $24/\sin\psi$ 時間デ一廻轉ヲスルコトニナル.

若シ $r_1=r_0w/n=r_0w\sqrt{l/g}$ ヲ極メテ小ニシ,殆ド零ニ等シクナル樣ニシタナラバ,(45.19) ハ

$$\xi=r_0\cos nt,\ \eta=0 \tag{45.23}$$

トナリ,質點ガ ξ 軸上ニ r_0 ヲ振幅トスル單振動ヲスルコトヲ示ス. 故ニ此ノ場合ニハ,振子ハ一ツノ鉛直面內ニ振動シテ,其ノ振動平面ガ地球ノ廻轉ト反對ノ方向ニ廻轉シテキル樣ニ現ハレル.

此ノ樣ナ現象ノアルベキコトハ,1850年ニ **Foucault** ニ依テ見出サレタノデ,此ノ現象ヲ見得ル樣ニシタ裝置ヲ **Foucault 振子**ト稱スル.[1]

Kamerlingh-Onnes ガ 1879 年ニ Groningen デ精密ニ實驗シタトコロニ據ルト,振動面ノ一時間ノ廻轉角度トシテ, 12.04° 及ビ 11.99° ヲ得テキル. 同所ノ ψ カラ,算出シタ値ハ 12.03° トナルノデアルカラ,實際ト相當ニヨク一致シテキルト云ツテヨイ.

46. 遊星運動

Tycho Brahe[2] ガ遊星[3]ノ運動ニ就テ觀測シテ得タ結果ヲ研究シテ **Kepler**[4] ハ次ノ三法則ヲ發見シタ之レヲ **Kepler ノ法則**[5]ト稱シテキル.

第一法則. 遊星ノ太陽ニ關シテノ位置 vector ハ,同時間內ニ同大面積ヲ畫ク.

第二法則. 遊星ノ軌道ハ太陽ヲ焦點トスル楕圓

(1) Jean Bernard Léon Foucault (1819—1868), 佛國ノ物理學者. Foucault ガ最初ニ用ヰタ振子ハ直徑 1mm, 長サ 2m ノ鋼線デ 5kg ノ眞鍮球ヲ吊シタモノデアル.

(2) 1546—1601. Denmark ノ星學者.

(3) 惑星トモ云フ.

(4) Johann Kepler (1571—1630), 獨逸ノ星學者.

(5) 第一法則及ビ第二法則ハ 1609 年ニ,第三法則ハ 1619 年ニ發表セラレタノデアル. 正確ニハ第三法則ハ少シク修正ヲ要スル. 之レニ就テハ第 62 節ヲ參照セヨ.

デアル.

第三法則. 二遊星ノ週期[1]ノ自乘ハ其ノ軌道ノ半長徑ノ三乘ニ比例スル.

此ノ事實ヲ基礎トシテ,遊星ニハ如何ナル力ガ働イテヰルカニ就テ研究シテ見ヨウ.

Kepler ノ第一法則ハ,遊星ノ面積速度ガ一定デアルコトヲ言ヒ表ハシテヰル. 故ニ此ノ面積速度ヲ $\mathbf{c}$ トスルト,(40.1) ニ依テ

$$[\mathbf{rv}]=2\mathbf{c} \qquad (46.1)$$

トナル. $\mathbf{r}$ ハ太陽ニ關シテノ遊星ノ位置 vector, $\mathbf{v}$ ハ其ノ速度デアル.

(46.1) ヲ t ニ就テ微分シテ

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{rv}]=0$$

ヲ得ル. $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$ デアリ,$[\mathbf{vv}]=0$ デアルカラ,之レハ

$$\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]=0 \qquad (46.2)$$

ト書クコトガ出來ル.

遊星ノ質量ヲ m トシ,之レニ働イテヰル力ヲ $\mathbf{F}$ トスルト,其ノ運動方程式ハ

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F} \qquad (46.3)$$

デアル. 之レニ $\mathbf{r}$ ヲ vector 的ニ掛ケテ

[1] 遊星ガ其ノ軌道ヲ一周スルニ要スル時間ヲ遊星運動ノ週期ト言フ.

$$m\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]=[\mathbf{rF}]$$

ヲ作ッテ見ルト,此ノ左邊ハ (46.2) ニ依テ零ニ等シイカラ

$$[\mathbf{rF}]=0$$

トナリ,$\mathbf{F}$ ト $\mathbf{r}$ トガ同方向若シクハ反對ノ方向ヲ有スル vector デアルコトヲ示シテヰル. 此ノ様ナ場合ニハ,$\mathbf{F}$ ヲ**中心力**ト稱スル.

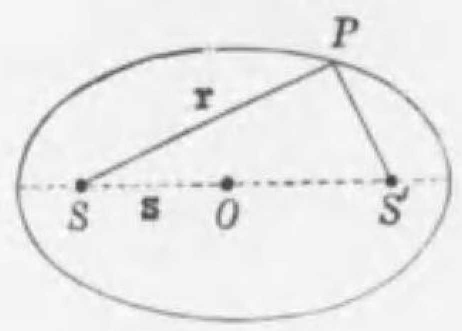
遊星ハ太陽ヲ周轉シテ,決シテ之レカラ離レ去ラナイカラ,太陽ノ方ニ引カレテヰルト見ルノガ自然デアル. 故ニ

$$\mathbf{F}=-f(r)\mathbf{r} \qquad (46.4)$$

ト假定シヨウ. $\mathbf{r}$ ハ遊星ノ太陽ニ關シテノ位置-vector ヲ表ハシ, $f(r)$ ハ太陽カラ遊星ニ至ル距離 r ノ未知函數ヲ表ハシテヰル. 此ノ $f(r)$ ハ第二,第三法則ニ依テ求メナケレバナラナイモノデアル.

第41圖ノ楕圓ハ遊星ノ軌道ヲ表ハスモノトシ,

第 41 圖



P ヲ遊星, S ヲ太陽, S′ ヲ楕圓ノ他ノ焦點, O ヲ楕圓ノ中心トシヨウ. $\overrightarrow{SO}=\mathbf{s}$ トスレバ圖カラ明カナ様ニ

$$\overrightarrow{S'P}=\mathbf{r}-2\mathbf{s}$$

デアル. 楕圓ノ半長徑ヲ a トスレバ, SPS′ ハ常ニ

$2a$ デアルカラ, S′P ノ長サハ $2a-r$ デアル故ニ

$$(\mathbf{r}-2\mathbf{s})^2=(2a-r)^2,$$

$$\mathbf{r}^2-4(\mathbf{rs})+4\mathbf{s}^2=4a^2-4ar+r^2,$$

$$\therefore \qquad (\mathbf{rs})=s^2-a^2+ar$$

ヲ得ル. b ヲ楕圓ノ半短徑, e ヲ其ノ離心率ヲ表ハスモノトスレバ

$$s^2=a^2e^2=a^2-b^2$$

デアルカラ, 上式ハ

$$(\mathbf{rs})=ar-b^2 \tag{46.5}$$

トナル.

(46.5) ヲ t ニ就テ微分シテ

$$\mathbf{s}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=a\frac{dr}{dt},$$

$$\mathbf{s}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=a\frac{d^2r}{dt^2}$$

ヲ得, 之レニ m ヲ掛ケ, (46.3), (46.4) ヲ用キテ

$$-f(r)(\mathbf{rs})=am\frac{d^2r}{dt^2}$$

ヲ得ル. (46.5) ニ依テ, 之レハ

$$-f(r)(ar-b^2)=am\frac{d^2r}{dt^2} \tag{46.6}$$

トナル.

遊星ノ運動-*energy* ヲ T トスレバ

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$$

デアルカラ, (7.8) ニ依テ

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right\} \tag{46.7}$$

ト書クコトガ出來ル.

(10.2) ニ依テ

$$|[\mathbf{rv}]|=r^2\frac{d\psi}{dt}$$

デアルカラ, (46.1) ニ依テ

$$r^2\frac{d\psi}{dt}=2c$$

ヲ得ル. τ ヲ遊星ノ週期, 卽チ遊星ガ其ノ軌道ヲ一周スルニ要スル時間ヲ表ハスモノトスルト

$$c=\frac{\pi ab}{\tau} \tag{46.8}$$

デアルカラ

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{2c}{r^2}=\frac{2\pi ab}{r^2\tau}$$

ヲ得ル.

此ノ $d\psi/dt$ ノ値ヲ (46.7) ニ代用シタ後ニ (46.7) ヲ t ニ就テ微分シテ

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=m\left\{\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{4c^2}{r^3}\frac{dr}{dt}\right\}$$

ヲ得ル. 然ルニ又

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=m\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{Fv}$$

デアルカラ,(7.7)及ビ(46.4)ニ依テ之レハ

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=-f(r)\frac{dr}{dt}r$$

トナリ,随テ

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{4c^2}{r^3}\right)=-f(r)r$$

ヲ得ル.

(46.6)ニ依テ上式カラ d^2r/dt^2 ヲ消去シテ

$$f(r)=\frac{4amc^2}{b^2r^3}$$

ヲ得ル.(46.8)ノ c ノ値ヲ上式ニ置キ換ヘルト

$$f(r)=\frac{4\pi^2a^3m}{r^3\tau^2} \tag{46.9}$$

トナル.

第三法則ニ依テ, a^3/τ^2 ハ凡テノ遊星ニ對シテ同ジデアルカラ

$$\frac{4\pi^2a^3}{\tau^2}=k \tag{46.10}$$

トスレバ,(46.9)ハ

$$f(r)=k\frac{m}{r^2}$$

トナル. 随テ(46.4)ハ

$$\mathbf{F}=-k\frac{m}{r^3}\mathbf{r} \tag{46.11}$$

トナル.

故ニ「遊星ニ働イテキル力ハ,遊星ノ質量ニ比例シ,太陽ヨリノ距離ノ自乘ニ逆比例シ,太陽ノ方ニ向ツテキル中心力デアル」ト言フコトガ分カル.(1)

47. 中心運動

前節デ述ベタ様ニ,質點ノ運動ノ性質ガ分カツテヲツテ,其ノ原因トナツテキル力ノ性質ヲ知リタイ場合ガアル. 前節ノ問題ヲ少シク一般化シテ,質點ノ運動ガ, Kepler ノ第一法則ヲ滿足シテキルコトカラ,其レガ中心運動デアリ,随テ之レニ働イテキル力ノ中心點ト,質點ノ路ノ方程式トガ既知ノ場合ニ,中心力ノ大サヲ見出ス方法ニ就テ考ヘテ見ヨウ.

便宜ノタメニ質點ノ質量ヲ單位質量トシ,之レニ働イテキル中心力ハ力ノ中心ニ向ヒ, $\varphi(r)$ ノ大サヲ持ツテキルモノトシヨウ. 質點ノ路ガ極坐標 r,θ デ表ハサレテキル場合ニハ,(24.9),(24.10),(24.11)カラ容易ニ $\varphi(r)$ ガ求メラレル. 卽チ

$$\varphi(r)=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right),\quad u=\frac{1}{r} \tag{47.1}$$

デアル.

(1) Kepler ノ法則カラ,遊星ニハ太陽ヨリノ距離ニ逆比例スル中心力ガ働イテキルト言フコトヲ歸納シタノハ Newton デアル. 有名ナ彼レノ著書 Principia ニ發表セラレテキル. 1687.

質點ノ路ガ,原點カラ質點ニ至ル距離 r ト,原點カラ質點ノ位置ニ於ケル切線ヘ下シタ垂線ノ長サ p トデ表ハサレテキル場合ニハ,此ノ際ノ energy 方程式

$$v^2+2\int\varphi(r)\,dr=\text{const.}$$

ト面積速度ノ大サガ不變デアルコトヲ表ハス

$$pv=h$$

トカラ

$$\frac{h^2}{p^2}+2\int\varphi(r)dr=\text{const.}$$

ヲ得,之レヲ r ニ就テ微分シテ得ラレル

$$\varphi(r)=\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} \tag{47.2}$$

ヲ用キテ $\varphi(r)$ ヲ求メルコトガ出來ル.

若シ質點ノ路ガ直角坐標 x, y ヲ用キテ

$$f(x,y)=0 \tag{47.3}$$

トシテ與ヘラレテキル場合ニハ

$$\varphi(r)=\frac{h^2r(f_y^2f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+f_x^2f_{yy})}{(xf_x+yf_y)^3} \tag{47.4}$$

カラ求メルノガ都合ガヨイ. 此式中デ $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ヲ表ハシ, $r^2=x^2+y^2$ デアル. 此ノ (47.4) ハ次ノ様ニシテ容易ニ證スルコトガ出來ル.

(47.3) カラ

$$f_x\dot{x}+f_y\dot{y}=0$$

ヲ得,之レト

$$h=r^2\frac{d\theta}{dt}=x\dot{y}-y\dot{x}$$

トカラ

$$\dot{x}=\frac{-hf_y}{xf_x+yf_y},\quad \dot{y}=\frac{hf_x}{xf_x+yf_y}$$

ヲ得ル. 然ルニ

$$\ddot{x}=\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}$$

デアルカラ,之レニ上記ノ $\dot{x}$, $\dot{y}$ ノ値ヲ代入シ,容易ニ

$$\ddot{x}=\frac{h^2x(-f_y^2f_{xx}+2f_xf_yf_{xy}-f_x^2f_{yy})}{(xf_x+yf_y)^3}$$

ヲ得ル. 之レハ

$$\ddot{x}=-\varphi(r)\frac{x}{r}$$

トシテモ表ハサレル筈ノモノデアルカラ,此ノ兩式ヲ相等シト置イテ (47.4) ヲ得ラレルノデアル.

第五章

質點系ノ力學

48. 反作用ノ法則

一直線上ヲ動イテヰル質點Aノ後方カラ同一直線上ヲ他ノ質點Bガ之レヲ追ツカケテ行ツテ,之レト衝突シタトシヨウ. A,Bノ質量ヲソレゾレ m_A, m_B トシ,衝突ノ直前,直後ニ於ケルA,Bノ速度ヲ $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_A'$; $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_B'$ トスレバ,第25節ニ述ベタ様ニ

$$\frac{v_A'-v_A}{v_B-v_B'}=\frac{m_B}{m_A} \tag{48.1}$$

ナル關係ガアル. 之レハ

$$m_A(v_A'-v_A)=-m_B(v_B'-v_B)$$

ト書ケル. 随テ

$$m_A(\mathbf{v}_A'-\mathbf{v}_B)=-m_B(\mathbf{v}_B'-\mathbf{v}_B) \tag{48.2}$$

ヲ得ル.

此ノ衝突ノ際,A,Bニ働イテヰル力積ヲソレゾレ $\mathbf{I}_A$, $\mathbf{I}_B$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned} m_A(\mathbf{v}_A'-\mathbf{v}_A)&=\mathbf{I}_A,\\ m_B(\mathbf{v}_B'-\mathbf{v}_B)&=\mathbf{I}_B\end{aligned}\right\} \tag{48.3}$$

デアルカラ,(48.2)ハ

$$\mathbf{I}_A=-\mathbf{I}_B \tag{48.4}$$

トナル.

此ノ衝突ノ間ノ任意ノ時刻ニ,Aニ働イテヰル力ヲ $\mathbf{F}_{AB}$ トシ,Bニ働イテヰル力ヲ $\mathbf{F}_{BA}$ トスレバ(36.1)ニ依テ

$$\mathbf{I}_A=\int_t^{t+\tau}\mathbf{F}_{AB}dt,\quad \mathbf{I}_B=-\int_t^{t+\tau}\mathbf{F}_{BA}dt$$

デアルカラ,(48.4)ハ

$$\int_t^{t+\tau}\mathbf{F}_{AB}dt=-\int_t^{t+\tau}\mathbf{F}_{BA}dt \tag{48.5}$$

ト書ケル. t ハ衝突ノ始マツタ時刻,$t+\tau$ ハ衝突ノ終ツタ時刻ヲ表ハス. 衝突ハ瞬間的ニ終ル現象デアルカラ τ ハ極メテ小サナ量デアル.

此ノ衝突ノ際ニ(48.5)ガ成立スルノデアルカラ,其ノ瞬間的ダト思ハレル極メテ短カイ時間内ノ各瞬時ニ於テ

$$\mathbf{F}_{AB}=-\mathbf{F}_{BA} \tag{48.6}$$

ガ成立シテヰルト見ルベキデアル.

Aヲ主トシテ考ヘタトキ,$\mathbf{F}_{AB}$ ヲBガAニ及ボス**作用**ノ力ト稱シ, $\mathbf{F}_{BA}$ ヲ其ノ際AガBニ及ボス**反作用**ノ力ト稱スル. Bヲ主トシテ考ヘタトキ, $\mathbf{F}_{BA}$ ヲAガBニ及ボス作用ノ力ト稱シ,$\mathbf{F}_{AB}$ ヲBガ

Aニ及ボス反作用ノ力ト稱スル.

衝突ノ場合ニ限ラズ,二質點ガアツテ,一方が他方ニ力ヲ働カス場合ニハ,必ラズ後者ガ前者ニ力ヲ働カシ,其等ノ間ニハ (48.6) ノ示ス關係ガ成立シテヰルト見ラレル. 之レハ Newton ガ運動ノ第三法則[1]トシテ擧ゲタモノデアツテ,**反作用ノ法則**トモ呼バレテヰル.

二ツ以上ノ質點ガアルトキ,此等ヲ一ツノ仲間ト考ヘタトキハ,此等ハ一ツノ**系**ヲ爲シテヰルト言ヒ,之レヲ**質點系**ト稱スル.

今, 1, 2, 3, ……, n ノ n 箇ノ質點ガ一ツノ系ヲ爲シテヰルトキニハ,各質點間ニ働イテヰル力ニ就テハ (48.6) ガ成立スルカラ

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}&=0,\\ \mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{31}&=0,\\ \mathbf{F}_{23}+\mathbf{F}_{32}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{48.7}$$

等ガ成リ立ツテヰル. 故ニ之等ヲ加ヘ合セテ

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji})=0 \tag{48.8}$$

ヲ得ル. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}$ ハ i 及ビ j ニ 1 カラ n マデノ整數ヲ代入シタモノヽ和ヲ取ルベキコトヲ表ハス. $\frac{1}{2}$ ヲ

[1] 第27節102頁.

附ケタノハ, (48.7) 中ニハ,例ヘバ $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}$ ハ一回シカナイニ拘ラズ, (48.8) ノ $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji})$ 中ニハ $\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}$, $\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{12}$ トシテ都合二回現ハレテ來ルカラデアル. 勿論 $\mathbf{F}_{11}$, $\mathbf{F}_{22}$, …… 等同ジ數字ヲ附ケタモノハ (48.7) ノ中ニハナイカラ (48.8) ニ於テモ $i=j$ ノモノハ取除カナケレバナラヌ. 然シ乍ラ, $\mathbf{F}_{11}=\mathbf{F}_{22}=\cdots\cdots=\mathbf{F}_{nn}=0$ デアルカラ (48.8) 中ニハ $i\neq j$ ノ條件ヲ書キ表ハシテヰナイ.

$$\mathbf{F}_{\nu}=\mathbf{F}_{\nu 1}+\mathbf{F}_{\nu 2}+\cdots\cdots+\mathbf{F}_{\nu n} \tag{48.9}$$

トスレバ, (48.8) ハ

$$\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_{\nu}=0 \tag{48.10}$$

ト書クコトガ出來ル. $\mathbf{F}_{\nu}$ ハ ν 質點ニ他ノ凡テノ質點カラ働ク力ヲ合成シタモノデアル.

「一般ニ n 箇ノ質點ガアルトキニ,質點 ν ニ働イテヰル力ヲ $\mathbf{K}_{\nu}$ トスレバ,其レヲ二種類ニ分ケテ

$$\mathbf{K}_{\nu}=\mathbf{F}_{\nu}+\mathbf{F}_{\nu}' \tag{48.11}$$

トシ, $\mathbf{F}_{\nu}$ ハ (48.10) ヲ滿足シテヰルガ, $\mathbf{F}_{\nu}'$ ハ其レヲ滿足シテヰナイモノデアルトスルコトガ出來ル. ソウシタトキ, $\mathbf{F}_{\nu}$ ヲ**內力**ト稱シ, $\mathbf{F}_{\nu}'$ ヲ**外力**ト稱スル.」 $\mathbf{F}_{\nu}$ ハ系內ノ質點ガ質點 ν ニ働イテヰル力デ, $\mathbf{F}_{\nu}'$ ハ系外ノモノガ質點 ν ニ働イテヰル力デアル. 」

外力ガ少シモ働イテヰナイ樣ナ質點系ハ**自由**

系[1]デアルト呼バレル.

49. 質量中心

1, 2, 3,……, ν, ……, n ノ n 箇ノ質點ガ一ツノ質點系ヲ爲シテキルトシヨウ. 此等ノ質量ヲソレゾレ $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, m_\nu, \cdots\cdots, m_n$ トシ, 任意ノ原點 O ニ關スル此等ノ質點ノ位置-vector ヲソレゾレ $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \cdots\cdots, \mathbf{r}_\nu, \cdots\cdots, \mathbf{r}_n$ トシヨウ. ソウスレバ

$$\mathbf{R}=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} \tag{49.1}$$

デ與ヘラレル **R** ナル vector ヲ見出スコトガ出キル. O 點ニ關スル位置-vector ガ此ノ **R** デアル點ヲ, 此ノ質點系ノ**質量中心**ト稱スル.

O 點ヲ原點トスル直角坐標軸ヲトリ, 其ノ基本 vector ヲ **i**, **j**, **k** トシ

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{R}&=\mathbf{i}\xi+\mathbf{j}\eta+\mathbf{k}\zeta,\\ \mathbf{r}_\nu&=\mathbf{i}x_\nu+\mathbf{j}y_\nu+\mathbf{k}z_\nu\end{aligned}\right\} \tag{49.2}$$

トスレバ, (49.1) ハ

$$\xi=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu},\quad \eta=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu},\quad \zeta=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} \tag{49.3}$$

(1) 完全系トモ言フ.

ヲ與ヘル. 此ノ ξ, η, ζ ハ質點中心ノ直角坐標デアル.

O 點ニ關シテノ位置-vector ガ **a** デアル點 O′ ヲ原點トシ, 此ノ O′ 點ニ關シテノ各質點ノ位置-vector ヲ $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2', \mathbf{r}_3', \cdots\cdots, \mathbf{r}_\nu', \cdots\cdots, \mathbf{r}_n'$ デ表ハシタナラバ

$$\mathbf{r}_\nu=\mathbf{r}_\nu'+\mathbf{a} \tag{49.4}$$

ノ關係ガアル.

(49.1) ニ依テ

$$\mathbf{R}'=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu'}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} \tag{49.5}$$

ヲ O′ 點ヲ原點トシタトキノ此ノ質點系ノ質量中心デアルト言ッテヨイ.

(49.4) ニ依テ上式ハ

$$\mathbf{R}'=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}-\mathbf{a}$$

トナリ, (49.1) ニ依テ

$$\mathbf{R}'=\mathbf{R}-\mathbf{a} \tag{49.6}$$

トナル. 故ニ O 點ヲ原點トシタトキノ質點系ノ質量中心ハ, O′ 點ヲ原點トシタトキノ其レト一致スル. 即チ「質點系ノ質量中心ハ其ノ系ニ固有ノモノデアッテ, 原點ノ位置, 採用スル坐標系ノ如何ニ關係シナ

イモノデアル」コトガ分カル.

質量中心ヲ原點トシ,各質點ノ之レニ關シテノ位置-vector ヲ $\mathbf{r}_1'', \mathbf{r}_2'', \mathbf{r}_3'', \cdots\cdots, \mathbf{r}_\nu'', \cdots\cdots \mathbf{r}_n''$ トスレバ

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{R} + \mathbf{r}_\nu'' \tag{49.7}$$

デアル. 此ノ兩邊ニ m_ν ヲ乘ジ,凡テノ質點ニ就テノ相當量ヲ加ヘ合スト

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu = \mathbf{R}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu''$$

トナル. 然ルニ此ノ左邊ハ (49.1) ニ依テ $\mathbf{R}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$ ニ等シイノデアルカラ

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu'' = 0 \tag{49.8}$$

ヲ得ル.

50. 質量中心ノ運動法則

n 箇ノ質點ヨリナル質點系ニ於テ,各質點ノ質量ヲソレゾレ $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, m_\nu, \cdots\cdots, m_n$ トシ,此等ニソレゾレ $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \cdots\cdots, \mathbf{K}_\nu, \cdots\cdots, \mathbf{K}_n$ ノ力ガ働イテキルトスレバ,各質點ノ運動方程式ハ

$$m_\nu \frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2} = \mathbf{K}_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

デアル. 故ニ此ノ質點系ニ對シテハ

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu \tag{50.1}$$

ガ成立スル.

此ノ質點系ノ質量中心ノ位置 -vector ヲ $\mathbf{R}$ トスレバ,(49.1) ニ依テ

$$\mathbf{R}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu$$

デアル.

此ノ質點系ノ全質量ヲ M トスレバ

$$\mathrm{M} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \tag{50.2}$$

デアルカラ,上式ハ

$$\mathrm{M}\mathbf{R} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu \tag{50.3}$$

ト書ケル. 之レヲ t ニ就テ微分シテ

$$\mathrm{M}\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}$$

ヲ得ル. 之レハ (50.1) ニ依テ

$$\mathrm{M}\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu \tag{50.4}$$

トナル.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu = \mathbf{K} \tag{50.5}$$

トスレバ,上式ハ

$$\mathrm{M}\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{K} \tag{50.6}$$

トナル. 之レハ質量中心ニ M ナル質量ヲ持ツ質點

ガアツテ,其レニ$\mathbf{K}$ナル力ガ働イテキルト假想シタトキニ,此ノ質點ノ運動ヲ表ハス方程式デアル．故ニ「質點系ノ質量中心ハ,其ノ質點系ノ全質量ガ其ノ點ニ集中シ,各質點ニ働イテキル力ノ合成力ガ之レニ働イテキルト考ヘタトキニ,其ノ假想質點ガスルト同ジ運動ヲスルノデアル」[1]

$\mathbf{F}_\nu$ヲ内力トシ, $\mathbf{F}_\nu'$ヲ外力トスレバ, (48.11) 及ビ (48.10) ニ依テ

$$\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{K}_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu'=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu'$$

デアルカラ, (50.5) ハ單ニ

$$\mathbf{K}=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu' \tag{50.7}$$

トナル．故ニ「質量中心ニ働イテキルト見ルベキ合成力ハ,外力ノ合成力ノミデアルトシテ差支ガナイ」

若シ外力ガ少シモ働イテキナイナラバ,即チ此ノ系ガ自由系デアルナラバ, $\mathbf{K}=0$ デアルカラ (50.6) ハ

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=0$$

トナル．之レヲ積分シテ

[1] 質點系ニ働イテキル力ガ重力デアルトキハ，此ノ系ノ質量中心ハ其ノ合成力ガ質量中心ニ働イテキルト見做シタトキト同ジ運動ヲスルワケデアル．故ニ質量中心ノコトヲ屢々重心トモ稱スルノデアル．

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{v}$$

ヲ得ル． $\mathbf{v}$ハ一定ノ速度 -vector デアル．

故ニ「質點系ニ外力ガ少シモ働イテキナイナラバ,其ノ質量中心ハ靜止シテキルカ,又ハ等速度運動ヲシテキル」コトガワカル．之レヲ**質量中心ノ運動ノ保存法則**ト呼ンデキル．

51. 力ノ能率

第10節デ述ベタ樣ニ,任意ノ vector $\mathbf{A}$ ノ始點ヲ P トシ, P ノ任意ノ原點 O ニ關スル位置 -vector ヲ $\mathbf{r}$ トスレバ, $[\mathbf{rA}]$ ヲ $\mathbf{A}$ ノ O 點ニ關スル能率ト稱スル．

質點 P ノ質量ヲ m, 速度ヲ $\mathbf{v}$, 運動量ヲ $\mathbf{B}$ トスレバ $\mathbf{B}=m\mathbf{v}$ デアリ, P ノ原點 O ニ關スル位置 -vector ヲ $\mathbf{r}$ トスレバ, O 點ニ關スル此ノ質點 P ノ**運動量ノ能率**ハ

$$\mathbf{U}=[\mathbf{rB}] \tag{51.1}$$

デアル．

上式ヲ t ニ就テ微分スレバ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{B}\right]+\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right]$$

トナル．然ルニ此ノ右邊ノ第一項ハ $m[\mathbf{vv}]$ ニ等シ

イ. 之レハ (9.4) ニ依テ零トナルカラ,上式ハ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right]$$

トナル.

此ノ質點ノ運動方程式ハ,質點ニ働イテキル力ヲ $\mathbf{K}$ トスレバ

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\mathbf{K} \qquad (51.2)$$

デアルカラ,上式ハ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=[\mathbf{rK}] \qquad (51.3)$$

トナル.

力 $\mathbf{K}$ ハ質點ニ働イテキルノデアルカラ,其ノ始點ハ,運動量 $\mathbf{B}$ ト同様ニ,質點ニアルモノトスル. 此ノ場合ニ質點ハ又 $\mathbf{K}$ ノ**着力**點デアルト言ハレル. $[\mathbf{rK}]$ ハ原點 O ニ關スル $\mathbf{K}$ ノ能率デアル. 之レヲ $\mathbf{N}$ デ表ハスコトニスル. 卽チ

$$\mathbf{N}=[\mathbf{rK}] \qquad (51.4)$$

ハ原點 O ニ關スル質點ニ働イテキル**力ノ能率**デアル.

(51.3) ハ (51.4) ニ依テ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\mathbf{N} \qquad (51.5)$$

ト書ケル. 之レハ「運動量ノ能率ノ變化率ハ力ノ能

率ニ等シイ」コトヲ示シテキルモノデ, (51.2) ト全ク同形デアル.

原點 O ニ關シテ $\mathbf{a}$ ノ位置 -vector ノ終點ヲ O′ トシ, O′ 點ニ關スル質點ノ位置 -vector ヲ $\mathbf{r}'$ トスルト

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{r}'$$

デアル. (51.6) 及ビ (51.4) ニ此ノ $\mathbf{r}$ ヲ代入シテ

$$\mathbf{U}=[\mathbf{aB}]+[\mathbf{r}'\mathbf{B}],$$
$$\mathbf{N}=[\mathbf{aK}]+[\mathbf{r}'\mathbf{K}]$$

ヲ得ル.

$$\mathbf{U}'=[\mathbf{r}'\mathbf{B}],\quad \mathbf{N}'=[\mathbf{r}'\mathbf{K}]$$

トスレバ,之等ハ

$$\mathbf{U}=[\mathbf{aB}]+\mathbf{U}',$$
$$\mathbf{N}=[\mathbf{aK}]+\mathbf{N}'$$

トナル. $\mathbf{U}'$ ハ O′ 點ニ關シテノ運動量ノ能率デアリ, $\mathbf{N}'$ ハ O′ 點ニ關シテノ力ノ能率デアル. 之等ヲ(51.5)ニ代入スルト

$$\left[\mathbf{a}\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right]+\frac{d\mathbf{U}'}{dt}=[\mathbf{aK}]+\mathbf{N}'$$

トナリ,(51.2) ニ依テ

$$\frac{d\mathbf{U}'}{dt}=\mathbf{N}'$$

ヲ得ル. 之レハ (51.2) ト全ク同形デアル. 故ニ「運動量ノ能率ト力ノ能率トノ關係ヲ示ス (51.5) ハ原

點ノ如何ニ拘ハラズ成立スルモノデアル」コトガ分カル.

n 箇ノ質點カラ成ツテキル質點系ニ於テ,各質點ニソレゾレ $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \cdots\cdots, \mathbf{K}_\nu, \cdots\cdots, \mathbf{K}_n$ ノ力ガ働イテキルトキニハ,之等ノ力ノ原點 O ニ關スル能率ハ (51.4) ト同樣ニ

$$\mathbf{N}_\nu = [\mathbf{r}_\nu \mathbf{K}_\nu], \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{51.6}$$

デ與ヘラレル. 各質點ノ運動量ノ原點 O ニ關スル能率ハ (51.1) ト同樣ニ

$$\mathbf{U}_\nu = [\mathbf{r}_\nu \mathbf{B}_\nu], \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{51.7}$$

デアル. 之等ノ $\mathbf{U}_\nu$ ト $\mathbf{N}$ トノ間ニハ (51.5) ト同樣ニ

$$\frac{d\mathbf{U}_\nu}{dt} = \mathbf{N}_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{51.8}$$

ノ關係ガ成立シテキル.

(51.7), (51.6) ヲ此ノ質點系ノ凡テノ質點ニ就テ總和シタモノ

$$\mathbf{U} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{U}_\nu, \tag{51.9}$$

$$\mathbf{N}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{N}_\nu \tag{51.10}$$

ヲソレゾレ,此ノ系ノ原點 O ニ關スル運動量ノ能率及ビ力ノ能率ト稱スル.

(51.8) ヲ此ノ系ノ凡テノ質點ニ就テ總和シテ (51.9), (51.10) ヲ用キテ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N} \tag{51.11}$$

ヲ得ル. 卽チ質點系ニ對シテモ,質點ニ對シテ成立スル (51.5) ト全ク同ジ關係ガ成立スルコトガ分カル.

52. 運動量及ビ運動量ノ能率ノ保存法則

n 箇ノ質點ヨリナル質點系ノ運動量ノ能率ト同樣ニ,各質點ノ運動量 $\mathbf{B}_\nu$ ノ總和

$$\mathbf{B} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{B}_\nu \tag{52.1}$$

ヲ其ノ質點系ノ運動量ト稱スル.

質點 ν ニ働イテキル力ヲ $\mathbf{K}_\nu$ トスレバ

$$\frac{d\mathbf{B}_\nu}{dt} = \mathbf{K}_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ガ成リ立ツテキルカラ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\mathbf{B}_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu,$$

$$\therefore \quad \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{K} \tag{52.2}$$

ガ質點系ニ對シテ成立スル. 但シ (50.7) ニ示ス樣ニ

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{K}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu' = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu'$$

デアル.

故ニ,若シ質點系ニ外力ガ少シモ働イテキナイ場合ニハ

$$\mathbf{F}_\nu' = 0, \ (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{52.3}$$

デアルカラ

$$\mathbf{K} = 0$$

デアリ,隨テ (52.2) ハ

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0 \tag{52.4}$$

トナル．之レハ $\mathbf{B}$ ガ t ニ無關係ナ一定不變ノ vector デアルコトヲ示シテヰル．即チ「外力ガ少シモ働イテヰナイ質點系ノ運動量ハ常ニ一定不變デアル」ト言フコトガ出來ル．コレヲ**運動量ノ保存法則**ト稱スル．

此ノ質點系ニ働イテヰル力ノ任意ノ點 O ニ關スル能率ハ,(51.10),(52.3) ニ依テ

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^{n} [\mathbf{r}_\nu \mathbf{K}_\nu] = \sum_{\nu=1}^{n} [\mathbf{r}_\nu \mathbf{F}_\nu] \tag{52.5}$$

デアル．然ルニ此ノ系ノ任意ノ質點 i ガ他ノ質點 j ニ及ボス力ヲ $\mathbf{F}_{ij}$ トシ,j ガ i ニ及ボス力ヲ $\mathbf{F}_{ji}$ トスルト,(48.6) ニ依テ

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \tag{52.6}$$

ノ關係ガアル．j ニ關シテノ i ノ位置-vector ヲ $\mathbf{r}_{ij}$ トシ,i ニ關シテノ j ノ位置-vector ヲ $\mathbf{r}_{ji}$ トスレバ

$$\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$$

デアル．O ニ關シテノ i 及ビ j ノ位置-vector ヲ夫々

$\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ トスレバ,明カニ

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ij}$$

デアル．故ニ

$$[\mathbf{r}_j \mathbf{F}_{ij}] = [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{F}_{ij}]$$
$$= [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ij}] - [\mathbf{r}_{ij} \mathbf{F}_{ij}]$$

トナル．然ルニ $\mathbf{r}_{ij}$ ト $\mathbf{F}_{ij}$ トハ

$$[\mathbf{r}_{ij} \mathbf{F}_{ij}] = 0$$

デアル様ナ方向ヲ有シテヰル．故ニ上式ハ

$$[\mathbf{r}_j \mathbf{F}_{ij}] = [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ij}]$$

トナル．(52.6) ニ依テ,之レハ

$$[\mathbf{r}_j \mathbf{F}_{ij}] + [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ji}] = 0$$

ト書ケル．故ニ (52.5) ハ

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^{n} [\mathbf{r}_\nu \mathbf{F}_\nu] = \sum_i \sum_j [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ji}] = 0$$

トナル．

此ノ質點系ノ O 點ニ關スル運動量ノ能率 $\mathbf{U}$ ト $\mathbf{N}$ トノ間ニハ (51.11) ノ示ス

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{N}$$

ノ關係ガアルカラ,今ノ場合ニハ

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = 0 \tag{52.\ }$$

トナル．故ニ $\mathbf{U}$ ハ t ニ無關係ナ一定不變ノ大サ及

ビ方向ヲ有スル vector デアル．即チ「外力ガ少シモ働イテヰナイ質點系ノ運動量ノ任意ノ點ニ關スル能率ハ一定不變デアル」ト言フコトガ出來ル．之レヲ**運動量ノ能率ノ保存法則**ト稱スル．$\mathbf{U}$ ノ方向ヲ**不變軸**ト稱シ,之レニ垂直ナ平面ヲ**不變平面**ト稱スル．

(51.7), (51.9) ニ依テ

$$\mathbf{U}=\sum_{\nu=1}^{n}[\mathbf{r}_\nu\mathbf{B}_\nu]=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu[\mathbf{r}_\nu\mathbf{v}_\nu]$$

デアルガ, (10.1) ニ依テ質點 ν ノ面積速度ハ

$$\frac{d\mathbf{S}_\nu}{dt}=\frac{1}{2}[\mathbf{r}_\nu\mathbf{v}_\nu]$$

デアルカラ,上式ハ

$$\mathbf{U}=2\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\frac{d\mathbf{S}_\nu}{dt}=2\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{S}_\nu$$

ト書クコトガ出來ル．(52.7) ハ此ノ $\mathbf{U}$ ガ時ニ無關係ナ定-vector デアルコトヲ示シテヰルノデアル．此ノ式ヲ t ニ就テ積分スレバ

$$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{S}_\nu=\frac{1}{2}\mathbf{U}t+\mathbf{C}$$

ヲ得ル．$\mathbf{C}$ モ亦 t ニハ無關係ナ vector デアル．各質點ノ位置-vector ガ畫ク面積ヲ測リ始メタ時刻ヲ $t=0$ トスレバ $\mathbf{C}=0$ トナルカラ,上式ハ

$$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{S}_\nu=\frac{1}{2}\mathbf{U}t \tag{52.8}$$

トナル．之レハ「一定ノ時間内ニ,各質點ノ位置-vector ガ畫ク面積ヲ其ノ質量ダケ倍シタモノヽ總和ハ一定デアル」コトヲ示シテヰル．故ニ運動量能率ノ保存法則ヲ又**面積法則**トモ稱スル．

53. 變　分

第42圖ニ示ス樣ニ,xy 平面内ニ極メテ接近シタ二ツノ曲線 1, 2 ガアルトシ,之等ハソレゾレ

$$y=f(x),\quad y=g(x) \tag{53.1}$$

デ表ハサレ,

$$y=f(x)+\epsilon\{g(x)-f(x)\}$$

ニ於ケル媒介變數 ϵ ヲ連續的ニ 0 カラ 1 マデ變化スルコトニ依テ,1 ノ曲線カラ 2 ノ曲線ニ移リ得ル樣ナモノデアルトスル．其ノ場合ニ $g(x)-f(x)=\eta$ トシ,此ノ η ヲ y ノ**變分**ト稱シ,之レヲ δy デ表ハス[1]．即チ

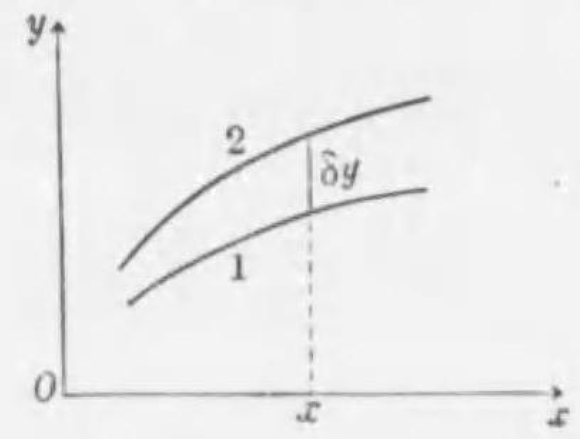
$$\delta y=g(x)-f(x)\equiv\eta(x) \tag{53.2}$$

デアル．δy ハ明カニ x ノ函數デアル．

(53.2) ヲ x ニ就テ微分スルト

[1] 此ノ記號ハ 1762 年項ニ Lagrange ニ依テ始テ用ヰラレタモノデアル．δ ハ恐ラクハ d ヲ眞似テ作ツタモノデアラウ．

第 42 圖



$$\frac{d}{dx}\delta y = \frac{d}{dx}\eta(x)$$

ヲ得ル. 又 (53.2) ト同樣ニ $\frac{dy}{dx}$ ノ變分ハ

$$\delta\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x)$$

デアル. 之レハ (53.2) ニ依テ

$$\delta\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x)+\eta(x)\} - \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\eta(x)$$

トナルカラ

$$\delta\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\delta y \qquad (53.3)$$

ヲ得ル. 故ニ「x ガ獨立變數デアルトキ,其ノ從屬變數デアル y ノ變分ヲ x ニ就テ微分シタモノハ,y ヲ x ニ就テ微分シタモノヽ變分ニ等シ」ト言フコトガ出來ル.

$\varphi(y)$ ヲ y ノ函數トスル. y ガ δy ダケ增加シタトキハ,之レハ $\varphi(y+\delta y)$ トナル. 之レヲ展開スルト

$$\varphi(y+\delta y) = \varphi(y) + \frac{d}{dy}\varphi(y).\delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\varphi(y).\delta y^2 + \cdots$$

トナル. 故ニ δy^2 以上ノ小サナ項ヲ無視スルト

$$\varphi(y+\delta y) - \varphi(y) = \frac{d}{dy}\varphi(y).\delta y$$

ト書ケル. 之レヲ $\varphi(y)$ ノ變分ト稱シ $\delta\varphi$ デ表ハス.

卽チ

$$\delta\varphi(y) = \frac{d}{dy}\varphi(y).\delta y \qquad (53.4)$$

デアル.

$y' = \frac{dy}{dx}$ トスルト,(53.4) ト同樣ニ

$$\delta\varphi(y, y') = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y, y').\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\varphi(y, y').\delta y', \qquad (53.5)$$

$$\delta\varphi(x, y, y') = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y, y').\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x, y, y').\delta y' \qquad (53.6)$$

ヲ得ル.

(53.4), (53.5) ニ於テ, δ ヲ d トスルト

$$d\varphi(y) = \frac{d}{dy}\varphi(y).dy,$$

$$d\varphi(y, y') = \frac{d}{dy}\varphi(y, y').dy + \frac{\partial}{\partial y'}\varphi(y, y').dy'$$

ニナル. 之レハ $\varphi(y)$ 及ビ $\varphi(y, y')$ ノ微分デアル.

故ニ「微分ト變分トハ全ク同樣ニ取扱ツテヨイ」コトガ分カル. ガ,「微分ハ函數ノ形ヲ變ヘズニ,獨立變數 x ガ微カニ變ツタトキノ函數ノ値ノ變化ヲ表ハシ,變分ハ x ガ不變デアツテ函數ノ形ガ微カニ變ツタトキノ函數ノ値ノ變化ヲ表ハスモノデアル」.

x ガ獨立變數デナク,y モ x モ共ニ獨立變數 t ノ從屬變數デアルトキハ

$$\delta\frac{dy}{dx}=\delta\left(\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}\right)$$

トスベキデアル．變分ハ微分ト同樣ニシテ取扱ッテヨイカラ

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{dx}{dt}\,\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dy}{dt}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}-\frac{\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

トナル．然ルニ今ノ場合ニハ t ガ獨立變數デ,x, y ガ其ノ從屬變數デアルカラ,(53.3) ニ依テ

$$\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\,\delta y,\quad \delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\,\delta x$$

デアル．故ニ上式ハ

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\delta y}{\frac{dx}{dt}}-\frac{dy}{dx}\,\frac{\frac{d}{dt}\delta x}{\frac{dx}{dt}}$$

即チ

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\,\delta y-\frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta x}{dx} \tag{53.7}$$

トナル．故ニ「若シ x ガ獨立變數デナイナラバ,(53.3) ハ成リ立タナイノデアル．即チ微分ト變分トハ互換シ得ナイノデアル」．

次ニ

$$\mathrm{I}=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y, y')dx \tag{53.8}$$

ニ於テ,y, y' ヲソレゾレ $y+\delta y, y'+\delta y'$ トシテ見ルト

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y, y')dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\delta y\,dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,\delta y'\,dx$$

$$+\cdots\cdots$$

トナル．此ノ右邊ノ第四項以下ノモノハ無視シテモヨイ．

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx-\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y, y')dx\equiv\delta\mathrm{I} \tag{53.9}$$

トシ,之レヲ積分 I ノ變分ト稱スル．上式ニ依テ之レハ

$$\delta\mathrm{I}=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,\delta y'\right)dx$$

ト書クコトガ出來ル．即チ

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y, y')dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,\delta y'\right)dx$$

デアル．然ルニ,(53.6) ニ依テ,之レハ

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, y, y')dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta\varphi(x, y, y')dx \tag{53.10}$$

ト書ケル．故ニ「積分ノ變數ガ獨立變數デアリ,其ノ兩限ガ一定ニ保タレテヰルトキハ,積分ト變分トノ

順序ハ交換スルコトガ出來ル.

積分ノ變數ガ獨立變數デナイトキニハ

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,y,y')\,dx=\delta\int_{t_0}^{t_1}\varphi(x,y,y')\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\delta\int_{t_0}^{t_1}(\varphi.\dot{x})\,dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\delta(\varphi.\dot{x})\,dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}(\delta\varphi.\dot{x}+\varphi.\delta\dot{x})dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}(\delta\varphi dx+\varphi d\delta x) \qquad (53.11)$$

トセナケレバナラヌ.

積分ノ兩限ガ變分ノ際ニ變ル場合ニハ,其レニ依テ生ジタ積分ノ變化ヲモ附加セナケレバナラヌ. (53.8)ノ上限ガ變化シタトキ,及ビ下限ガ變化シタトキ,其レニ依テ附加スベキ量ヲソレゾレ $\delta_1\mathrm{I}, \delta_0\mathrm{I}$ トスルト

$$\delta_1\mathrm{I}=\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}\varphi\,dx-\int_{x_0}^{x_1}\varphi\,dx$$
$$=\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}\varphi\,dx=\varphi(x_1)\,\delta x_1, \qquad (53.12)$$
$$\delta_0\mathrm{I}=\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1}\varphi\,dx-\int_{x_0}^{x_1}\varphi\,dx$$
$$=\int_{x_0+\delta x_0}^{x_0}\varphi\,dx=-\int_{x_0}^{x_0+\delta x_0}\varphi\,dx$$

$$=-\varphi(x_0)\delta x_0 \qquad (53.13)$$

デアル.

54. Hamilton ノ法則

n 箇ノ質點ヨリナル質點系ニ於テ,各質點ノ質量ヲソレゾレ $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_\nu, \cdots\cdots, m_n$ トシ,之等ニソレゾレ $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \cdots\cdots, \mathbf{K}_\nu, \cdots\cdots, \mathbf{K}_n$ ノ力ガ働イテキルトショウ. 此ノ場合ニ,各質點ニ對スル運動方程式ハ

$$m_\nu\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}=\mathbf{K}_\nu,\ (\nu=1,2,\cdots,n) \qquad (54.1)$$

デアルカラ,之等ヲ總テ加ヘ合セテ

$$\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{K}_\nu \qquad (54.2)$$

ヲ得ル.

此ノ質點系ノ各質點ニソレゾレ假想變位 $\delta\mathbf{r}_\nu$ ヲサセタトスレバ,此ノ際ニ各質點ニ働イテキル力ガスル仕事ノ總和ハ

$$\delta\mathrm{W}=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{K}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu \qquad (54.3)$$

デアル. 之レハ (54.1) ニ依テ

$$\delta\mathrm{W}=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}\delta\mathbf{r}_\nu \qquad (54.4)$$

トシテ表ハサレル.

$\mathbf{r}_\nu$ ハ獨立變數 t ノ函數デアリ, $\delta\mathbf{r}_\nu$ ハ $\mathbf{r}_\nu$ ノ變分

ヲ表ハスモノト見得ルカラ,(53.3) ニ依テ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\partial\mathbf{r}_\nu\right)=\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}\partial\mathbf{r}_\nu+\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\frac{d}{dt}\partial\mathbf{r}_\nu$$

$$=\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}\partial\mathbf{r}_\nu+\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\partial\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}$$

$$=\frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2}\partial\mathbf{r}_\nu+\frac{1}{2}\partial\left(\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\right)^2$$

ヲ得ル. 故ニ (54.4) ハ

$$\partial W=\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\partial\mathbf{r}_\nu\right)-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu\partial\left(\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\right)^2$$

ト書ケル.

$$\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}=\mathbf{v}_\nu$$

デアルカラ,之レハ

$$\partial W=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\mathbf{v}_\nu\partial\mathbf{r}_\nu-\partial\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu\mathbf{v}_\nu^2 \qquad (54.5)$$

トナル.

$$T_\nu=\frac{1}{2}m_\nu\mathbf{v}_\nu^2$$

ハ質點 ν ガ有スル運動-energy デアルカラ

$$T=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}m_\nu\mathbf{v}_\nu^2 \qquad (54.6)$$

ハ此ノ質點系ノ有スル運動-energy ヲ表ハスモノデアル. 此ノ T ヲ用ヰルト, (54.5) ハ

$$\partial W+\partial T=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\mathbf{v}_\nu\partial\mathbf{r}_\nu$$

トナル. 之レヲ t ニ就テ t_0 カラ t_1 マデ積分スレバ

$$\int_{t_0}^{t_1}(\partial W+\partial T)dt=\left[\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\mathbf{v}_\nu\partial\mathbf{r}_\nu\right]_{t_0}^{t_1}$$

ヲ得ル. 之レハ (53.10) ニ依テ

$$\partial\int_{t_0}^{t_1}(W+T)dt=\left[\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu\mathbf{v}_\nu\partial\mathbf{r}_\nu\right]_{t_0}^{t_1} \qquad (54.7)$$

ト書ケル. 實際此ノ質點系ガスル運動ノ際ニハ,各質點ハソレゾレニ其ノ實際ノ位置ニアルベキデアルカラ, $t=t_0$ 及ビ $t=t_1$ ニ於テ凡テノ $\partial\mathbf{r}_\nu$ ハ零デアルベキデアル. 故ニ (54.7) ハ

$$\partial\int_{t_0}^{t_1}(W+T)dt=0 \qquad (54.8)$$

トナル.

此ノ質點系ニ働イテヰル力ガ保存的ノモノデアルナラバ,此ノ質點系ノ各質點ニ働イテヰル力ハ

$$\mathbf{K}_\nu=-\mathrm{grad}\,V_\nu,\quad(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$$

デ表ハサレルカラ,(54.3) ハ

$$\partial W=-\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{grad}\,V_\nu\partial\mathbf{r}_\nu$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\nu}\partial x_\nu+\frac{\partial V_\nu}{\partial y_\nu}\partial y_\nu+\frac{\partial V_\nu}{\partial z_\nu}\partial z_\nu\right)$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{n}\partial V_\nu$$

$$=-\partial\sum_{\nu=1}^{n}V_\nu$$

トナル. V_ν ハ質點 ν ノ有スル位置-energy デアルカラ

$$V=\sum_{\nu=1}^{n}V_\nu \tag{54.9}$$

ハ此ノ質點系ノ位置-energy ニナル. 隨テ

$$\delta W=-\delta V \tag{54.10}$$

デアリ, (54.8) ハ

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)dt=0 \tag{54.11}$$

トナル.

(54.10) ヲ滿足スル W ヲ**力函數**ト稱スルコトガアル. (54.11) ノ T−V ハ **Kinetic-Potential**[(1)] ト稱スル.

(54.8) ハ「質點系ノ狀態ガ $t=t_0$, $t=t_1$ ノトキニ與ヘラレテヰルトスレバ,質點系ノ運動-energy ト力函數トノ和ヲ此ノ時間內ニ時ニ關シテ積分シタモノ卽チ時積分ハ實際ノ路ニ就テハ,他ノ之レニ近イ種々ノ假想的ノ路ニ就テノモノヨリモ小デアルカ又ハ大デアル」ト言フコトヲ示シテヰル. (54.11) ハ kinetic potental ノ時積分ニ就テ同樣ノコトヲ示シテヰル. 之等ノコトヲ **Hamilton**[(2)] **ノ法則**ト稱スル.

例題 Hamilton ノ法則ヨリ D' Alembert ノ法則ヲ誘導セヨ.

(1) Helmholtz ニ依テ名ヅケラレタノデアル. 1886.

(2) 此ノ法則ハ Philosophical Transaction, 1834, ニ依テ發表セラレタモノデアル. 此ノ法則ハ又, 變分法則ト呼バレル.

Hamilton ノ法則ハ(54.8)ニ依テ

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(W+T)dt=\int_{t_0}^{t_1}(\delta W+\delta T)dt=0 \tag{1}$$

デアル. ν 質點ニ働イテヰル力ヲ $\mathbf{F}_\nu$ トスレバ

$$\delta W=\sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{F}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu$$

トスルコトガ出來,又(54.6)ニ依テ

$$\begin{aligned}\delta T&=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{v}_\nu\delta V_\nu\\&=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{v}_\nu\delta\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\\&=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{v}_\nu\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_\nu\end{aligned}$$

ト書ケルカラ (1) ハ

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\mathbf{F}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu+m_\nu\mathbf{v}_\nu\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_\nu\right)dt=0$$

トスルコトガ出來ル. 第二積分ニ部分積分法ヲ應用シテ

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\mathbf{F}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu-m_\nu\frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}\delta\mathbf{r}_\nu\right)dt+\left[\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\mathbf{v}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu\right]_{t_0}^{t_1}=0$$

ヲ得ル. 然ルニ t_0, t_1 ニ於テハ $\delta\mathbf{r}_\nu$ ハ凡テ零デアルカラ上式ハ

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\mathbf{F}_\nu-m_\nu\frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}\right)\delta\mathbf{r}_\nu dt=0 \tag{2}$$

トナル. 此ノ式ガ成立スル爲メニハ,被積分ガ或時ハ正量トナリ,或時ハ負量トナリ,結局此ノ積分ガ零トナル樣デナケレバナラヌ. 然ルニ $\delta\mathbf{r}_\nu$ ハ任意ノ vector デアルカラ,其レト $\mathbf{F}_\nu-m_\nu\frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}$ トノ scalar 積ガ凡テノ時刻ヲ通ジテ同ジ符號ヲトル樣ニ $\delta\mathbf{r}_\nu$ ヲ選ムコトガ出來ル. 其ノ樣ニシタトスレバ,(2) ガ成立スル爲メニハ常ニ

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\mathbf{F}_\nu-m_\nu\frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt}\right)\delta\mathbf{r}_\nu=0 \tag{3}$$

デアルコトヲ要スル. 之レ則チ,質點系ニ對スル D'Alembert ノ法則ヲ表ハスモノデアル.

55. Lagrange ノ運動方程式　其ノ一

m 箇ノ質點ヨリナル質點系ニ於テ,各質點ガ任意ナ運動ヲ爲シ得ル場合ニハ,其ノ質點系ハ $3m$ ノ自由度ヲ有シテヰル. 隨テ其ノ質點系ノ各質點ノ位置ヲ表ハサンガ爲メニハ $3m$ 箇ノ坐標ガ要ル. 質點系ノ各質點ノ位置ヲ完全ニ示スノニ必要ナ坐標ヲ一般ニ $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ デ表ハシ,之等ヲ**一般坐標**ト稱スル. 凡テノ質點ガ自由ニ動キ得ル質點系デハ $n=3m$ デアル.

各質點ガ任意ノ運動ヲシ得ナイトキハ,其ノ運動ハ所謂拘束運動デアル. 此場合ニハ,質點ノ $3m$ ノ坐標ハ拘束運動ノ條件デアル拘束方程式ヲ滿足セナケレバナラヌカラ,之等ノ間ニハ若干ノ關係ガアル. 拘束方程式ノ數ガ p 箇アルトキハ,坐標ノ中デ $3m-p$ ダケハ全ク任意ニ變化シ得ル. 此ノ場合ノ質點ノ自由度ハ $3m-p$ デアル.

質點系ノ一般坐標ノ數ガ其ノ自由度ノ數ト同ジトキニハ,其ノ質點系ハ **holonomic** デアルト稱シ一般坐標系ノ數ガ自由度ノ數ヨリモ大デアルトキニハ,其ノ質點系ハ **non-holonomic** デアルト稱スル.

m 箇ノ質點カラナツテヰル質點系ニ於テ,其ノ一般坐標ヲ $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ トシ,質量 m_ν ノ質點 ν ノ任意ノ定點ニ關スル位置-vector ヲ $\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ トシヨウ. ソウスレバ, $\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ ハ一般坐標及ビ時 t ノ函數トシテ

$$\mathbf{r}_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)=\mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), \qquad (55.1)$$
$$(\nu=1, 2, 3, \cdots, m)$$

デ表ハスコトガ出來ル.

之等ノ式ノ内ニ, t ガ陽ハニ入ツテ來ナイコトガアル. 其ノ樣ナ場合ニハ,一般坐標 $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ ヲ **scleronomic 坐標**ト稱スル. t ガ (55.1) ニ示ス樣ニ陽ハニ入ツテヰルトキニハ,直角坐標ト一般坐標トノ間ノ關係ガ,時ノ變化スルニ從ツテ變ツテ來ルコトヲ示シテヰルノデアル. 此ノ場合一般坐標ヲ **rheonomic 坐標**ト稱スル.

今考ヘテヰル質點系ハ holonomic デアルトスル. (55.1) カラ

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu=\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\nu}q_\nu, (\nu=1, 2, \cdots, m) \qquad (55.2)$$

ヲ得ル. 但シ $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ ハ $q_1, q_2, \cdots, q_n$ ヲ t ニ就テ一回微分シタモノデアツテ,之等ヲ**一般速度ノ分値**ト稱スル.

質點 ν ノ假想變位ヲ $\delta\mathbf{r}_\nu$ トシ,此ノ變位ハ $\delta t=0$ ニ行ハレタト見テヨイモノトスル. ソウスレバ (55.2) ト同樣ニ

$$\delta\mathbf{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i,\quad(\nu=1,2,\cdots,m)\tag{55.3}$$

ヲ得ル.

ν 質點ニ働イテヰル力ヲ $\mathbf{K}_\nu$ トスレバ,其ノ運動方程式ハ

$$m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu=\mathbf{K}_\nu,\quad(\nu=1,2,\cdots,m)$$

デアルカラ, D'Alembert ノ法則ハ

$$\sum_{\nu=1}^{m}m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu=\sum_{\nu=1}^{m}\mathbf{K}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu\tag{55.4}$$

ヲ與ヘル. 此ノ際ニ此ノ系ノ假想變位ニ對シテ仕事ヲ爲ナイ樣ナ力ノ影響ハナイワケデアルカラ,其ノ種ノ力ハ始メカラ考慮外ニ置イテヨイ.

(55.3) ニヨリ,上式ノ左邊ハ

$$\sum_{\nu=1}^{m}m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu=\sum_{\nu=1}^{m}m_\nu\mathbf{r}_\nu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i$$

$$=\sum_{\nu=}^{m}\sum^{n}m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i$$

トナル. 然ルニ (55.2) カラ

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\tag{55.5}$$

ヲ得ルカラ

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\ddot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial^{\cdot}{}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dot{\mathbf{r}}_\nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}_\nu}{\partial t\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

トナル. 之レハ又 (55.2) ニ依テ

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\right)-\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right)$$

トナル. 故ニ

$$\sum_{\nu=1}^{m}m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu\delta\mathbf{r}_\nu=\sum_{\nu,i=1}^{m,n}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right)\right\}\delta q_i$$

$$=\sum_{i=}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right\}\delta q_i$$

トナル.

此ノ質點系ノ運動-energy ヲ T トスレバ

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\tag{55.6}$$

デアルカラ上式ハ

$$\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right\}\delta q_i \tag{55.7}$$

トナル.

(55.4) ノ右邊ハ

$$\sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{K}_\nu \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{K}_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{K}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i$$

デアルカラ

$$\sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{K}_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = Q_i \tag{55.8}$$

トスレバ,上式ハ

$$\sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{K}_\nu \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \tag{55.9}$$

トナル. 之レハ此ノ系ニ働イテキル力ガ,此ノ系ノ假想變位ノ際ニ爲ス仕事ヲ表ハスモノデアツテ,其レハ一般坐標 q_i ノ假想變位 δq_i ノ爲ス仕事 $Q_i\delta q_i$ ノ和デ表ハサレルモノデアルト見テヨイコトヲ示シテキル.

q_i ガ長サヲ示ス坐標デアルナラバ, Q_i ノ元ハ仕事ノ元 $[ML^2T^{-2}]$ ヲ長サノ元 $[L]$ デ除シタモノ即チ $[MLT^{-2}]$ トナルカラ,之レハ力ヲ表ハシテキルモノト見ラレル. q_i ガ角ヲ示ス坐標デアルナラバ,Q_i ノ元ハ $[ML^2T^{-2}]$ デアルカラ, Q_i ハ力トハ見ラレナイ. 此ノ場合ニハ Q_i ハ力ノ能率ヲ表ハスモノデアルト見ラレル. ガ,其ノ何レノ場合ヲ問ハズ,一般ニ Q_i ノコトヲ q_i ノ方向ニ於ケル**一般力ノ分値**ト稱スル. ダカラ, Q_i ガ力ヲ表ハシテキルモノカ,力ノ能率ヲ表ハシテヰルモノカハ,q_i ノ性質カラ判斷スベキデアル.

(55.7), (55.9) ニ依テ, (55.4) ハ

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right\}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

トナル. 假想變位ノ如何ニ拘ラズ,此ノ式ガ成立シテキルベキデアルカラ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{55.10}$$

ヲ得ル. 之レヲ **Lagrange**[1] **ノ運動方程式**[2] ト稱スル.

質點ニ働イテキル力ガ保存的ノモノデアルナラバ

$$\mathbf{K}_\nu = -\operatorname{grad} V_\nu$$

デアルカラ

$$\sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{K}_\nu \delta\mathbf{r}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{m} \operatorname{grad} V_\nu \, \delta\mathbf{r}_\nu$$

(1) Joseph Louis Lagrange (1736—1813). 佛國ノ大數學者. 1736 年 1 月 25 日伊太利 Turin ニ生レ, 1813 年 4 月 10 日 Paris ニテ逝去. 國葬ヲ以テ Pantheon ニ葬ラレル.

(2) (35.6), (35.14) ヲ第一種ノ Lagrange ノ方程式ト稱スルコトガアル. 其レニ對シテ,之レヲ第二種ノ Lagrange ノ方程式ト言フコトガアル

$$=-\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\nu}\partial x_\nu+\frac{\partial V_\nu}{\partial y_\nu}\partial y_\nu+\frac{\partial V_\nu}{\partial z_\nu}\partial z_\nu\right)$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V_\nu}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}+\frac{\partial V_\nu}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_i}+\frac{\partial V_\nu}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_i}\right)\partial q_i$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\nu=1}^{m}V_\nu\right)\partial q_i$$

ト書ケルカラ,(55.9) ニ依テ

$$Q_i=-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\nu=1}^{m}V_\nu\right)$$

ヲ得ル. 然ルニ (54.9) ニ依テ,之等ノ力ニヨル此ノ質點系ノ位置-energy ハ

$$V=\sum_{\nu=1}^{m}V_\nu \tag{55.11}$$

デアルカラ

$$Q_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i} \tag{55.12}$$

トナル. 隨テ此ノ場合ノ Lagrange ノ運動方程式ハ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i},\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{55.13}$$

デアル.

位置-energy V ハ坐標ノ函數デアツテ,速度ニハ關係シナイカラ

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}=0,\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

デアル. 故ニ上式 (55.13) ハ

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T-V)\right\}-\frac{\partial}{\partial q_i}(T-V)=0$$

トシテヨイ.

$$T-V=L \tag{55.14}$$

トスレバ,之レハ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{55.15}$$

トナル. L ハ所謂 kinetic potential ヲ一般坐標及ビ一般速度分値ヲ用キテ表ハシタモノデ **Lagrange 函數** ト呼バレテキル.

例題1. Hamilton ノ法則ヨリ Lagrange ノ運動方程式ヲ誘導セヨ.

Hamilton ノ法則ハ (54.11) ノ

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)dt=0$$

デアル. T ハ一般坐標及ビ一般速度分値ノ函數デアリ,V ハ一般坐標ノ函數デアルト見テ,上式ハ

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i-\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i\right\}dt=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\,q_i\right\}dt=0$$

ト書ケル. 然ルニ

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i dt=\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt$$

デアリ,δq_i ハ $t=t_0$, $t=t_1$ ニ於テ零トナルカラ

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i dt=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt$$

デアル. 隨テ Hamilton ノ法則ハ

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}\right\}\delta q_i dt=0$$

トナル. 之レガ常ニ成立スルタメニハ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0$$

デアルコトヲ要スル.

例題2. 空間内ヲ自由ニ動キ得ル質點ノ運動方程式ヲ極坐標 (r, θ, φ) ヲ用ヰテ表ハセ.

質點ノ直角坐標ヲ (x, y, z) トシ,質量ヲ m トスル.

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

デアルカラ,質點ノ運動-energy ハ

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2)$$

トナル. 故ニ

$$\frac{\partial T}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+mr\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=m\dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=mr^2\sin\theta\ \cos\theta.\dot{\varphi}^2,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}$$

ヲ得ル. r, θ, φ ノ増加スル方向ノ力ノ分値ヲ夫々 F_r, F_θ, F_φ トスルト,其ノ方向ノ一般力ノ分値トハ次ノ關係ガアル.

$$Q_r=F_r,\ Q_\theta=rF_\theta,\ Q_\varphi=r\sin\theta.F_\varphi.$$

隨テ Lagrange ノ運動方程式ニ依テ

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mr\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2=F_r,$$

$$mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}-mr^2\sin\theta\cos\theta.\dot{\varphi}^2=rF_\theta,$$

$$mr^2\sin^2\theta.\ddot{\varphi}+2mr\sin^2\theta.\dot{\varphi}.\dot{r}+2mr^2\sin\theta\cos\theta.\dot{\varphi}.\dot{\theta}=r\sin\theta.F_\varphi$$

ヲ得ル. 此ノ質點ノ極坐標デ表ハシタ加速度分値 a_r, a_θ, a_φ ハ上式ノ左邊ヲ夫々 $m, mr, mr\sin\theta$ デ割ッタモノデアル. 其ノ結果ハ (18.2) ト一致シテヰル.

例題3. 固定滑車Aノ溝ヲ通ジル絲ノ一端ニハ質量 $4m$ ノ物體Pガ吊シテアリ,其ノ他端ニハ質量 m ノ動滑車Bガ吊シテアル. Bノ溝ヲ通ジル絲ノ兩端ニハ質量 m ノ物體Qト質量 $2m$ ノ物體Rトガ吊シテアルトセヨ. 此ノ時Pハ如何ナル運動ヲスルカ.

Aノ軸カラPニ至ル鉛直距離ヲ x トシ,Bノ軸カラRニ至ル鉛直距離ヲ y トスレバ

Pノ下降ノ速サハ		$\dot{x}$,
B	〃	$-\dot{x}$,
Q	〃	$-\dot{x}-\dot{y}$,
R	〃	$-\dot{x}+\dot{y}$

デアル. 故ニ此ノ質點系ノ運動-energy ハ

$$T=\frac{1}{2}\{4m\dot{x}^2+m\dot{x}^2+m(\dot{x}+\dot{y})^2+2m(\dot{y}-\dot{x})^2\}$$

$$=\frac{m}{2}(8\dot{x}^2+3\dot{y}^2-2\dot{x}\dot{y})$$

トナル. 隨テ

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m(8\dot{x}-\dot{y}).$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m(3\dot{y}-\dot{x})$$

デアル. 此ノ質點系ノ位置-energy ハ

$$V=-4mgx+mgx+mg(x+y)-2mg(y-x)$$

$$=-mgy$$

デアルカラ

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y}=-mg$$

トナル. 隨テ Lagrange ノ運動方程式ハ

$$8\ddot{x}-\ddot{y}=0,\ 3\ddot{y}-\ddot{x}=g$$

トナル. 故ニ

$$\ddot{x}=g/23,\ \ddot{y}=8g/23$$

ヲ得ル. P ハ $g/23$ ノ大サノ等加速度ヲ以テ降下スルノデアル.

56. 激衝運動ノ Lagrange 方程式

m 箇ノ質點カラナツテヰル質點系ニ於テ,質點ノ質量ヲ $m_1, m_2, \cdots, m_m$ トシ,之レニソレゾレ $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \cdots, \mathbf{K}_m$ ノ撃力ガ働イテヰルトシ,其等ノ力積ヲソレゾレ $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \cdots, \mathbf{I}_m$ トショウ. 質點 ν ノ撃力 $\mathbf{K}_\nu$ ガ働イタ時刻ノ前後ニ於テノ速度ヲソレゾレ $\mathbf{v}_{\nu 0}$, $\mathbf{v}_\nu$ トスレバ, (36.2) ニ依テ

$$m_\nu(\mathbf{v}_\nu-\mathbf{v}_{\nu 0})=\mathbf{I}_\nu,\ (\nu=1, 2, 3, \cdots, m) \tag{65.1}$$

ノ關係ガアル.

$q_1, q_2, \cdots, q_n$ ヲ此ノ質點系ノ一般坐標トショウ. $\dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$ ヲ上式ニ scalar 的ニ乘ジテ,其ノ積ヲ凡テノ質點ニ就テ加ヘルト

$$\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu(\mathbf{v}_\nu-\mathbf{v}_{\nu 0})\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\sum_{\nu=1}^{m}\mathbf{I}_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$$

ヲ得ル. 此ノ右邊ニ於テハ,內力ニ基因スルモノハ互ニ消シ合ツテ零トナルカラ,外力ニ關スルモノノミヲトレバ充分デアル.

$$\sum_{\nu=1}^{m}\mathbf{I}_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\mathrm{R}_i \tag{56.2}$$

トスルト,上式ハ

$$\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu(\mathbf{v}_\nu-\mathbf{v}_{\nu 0})\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\mathrm{R}_i,\quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{56.3}$$

トナル. (56.2) ノ R_i ハ,(55.8) ト同樣ニ**一般力積ノ分値**ト言ハレルベキモノデアル.

(55.5) ノ

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$$

ノ關係ヲ用キルト

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\dot{\mathbf{r}}_\nu\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_\nu^2\right)$$

ヲ得ル. 故ニ

$$\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu\mathbf{v}_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2}m_\nu\mathbf{v}_\nu^2=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} \tag{56.4}$$

デアル. 但シ T ハ此ノ質點系ノ運動-energy ヲ表ハス.

撃力ノ働ク場合ニハ,其レニ依テ質點ノ速度ハ變化スルガ,其ノ位置ハ瞬間的ニハ變ラナイモノデアルカラ, $\dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$ ハ撃力ノ働イタ直前直後ニ於テ其ノ

値及ビ方向ヲ變ヘナイモノト見テヨイ. 故ニ

$$\sum_{\nu=1}^{m} m_\nu \mathbf{v}_{\nu 0} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 \tag{56.5}$$

トシテヨイ. $\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right)_0$ ハ $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}$ ノ撃力ノ働イタ直前ノ値ヲ表ハスモノデアル.

(56.3) ハ (56.4), (56.5) ニ依テ

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i} - \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right)_0 = \mathrm{R}_i, \ (i=1, 2, \cdots, n) \tag{56.6}$$

トナル. 之レヲ**激衝運動ノ Lagrange 方程式**ト稱スル.

例題　前節ノ例題3ニ於テ, P ガ v ノ速サデ下方ニ突然降下セシメラレタトスレバ,此ノ質點系ハドノ樣ナ運動ヲスルカ?

此ノ場合ニハ (56 6) ハ

$$m(8\dot{x}-\dot{y})=\mathrm{R}_p, \ m(5\dot{y}-\dot{x})=0$$

トナル. 故ニ

$$\dot{y}=\frac{1}{3}\dot{x}, \ \frac{23}{3}\dot{x}=\frac{\mathrm{R}_p}{m}$$

ヲ得ル. 然ルニ $\dot{x}=v$ デアルカラ, $\dot{y}=v/3$ トナル. 即チ P ガ v ノ速サデ突然降下セシメラレルト, B ハ v ノ速サデ突然ニ上昇ヲ始メ, Q ハ $\frac{4}{3}v$ ノ速サデ上昇シ, R ハ $\frac{2}{3}v$ ノ速サデ上昇スル. ソウシテ P ヲ v ノ速サデ突然下降セシメル撃力 R_p ト v トノ關係ハ

$$v=3\mathrm{R}_p/23m$$

デ與ヘラレルノデアル.

57. Lagrange ノ運動方程式　其ノ二

質點系ガ non-holonomic ノ場合,卽チ質點系ヲ表ハス一般坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ ノ數 n ガ,其ノ自由度ノ數ヨリ多イ場合ニ就テ考ヘテ見ヨウ. 此ノ場合ニハ一般坐標ハ積分スルコトノ出來ナイ

$$\mathrm{A}_{1j}\,dq_1+\mathrm{A}_{2j}\,dq_2+\cdots+\mathrm{A}_{nj}\,dq_n+\mathrm{T}_j\,dt=0$$

$$(j=1, 2, \cdots, p) \tag{57.1}$$

デ示サレル關係デ結ビツケラレテキル. $\mathrm{A}_{1j}, \mathrm{A}_{2j}, \cdots, \mathrm{T}_j$ ハ $q_1, q_2, \cdots, q_n, t$ ノ函數デアル. 何トナレバ若シ (57.1) ガ積分シ得ル樣ナモノデアルナラバ,一般坐標ノ間ニ幾ツカノ關係ガ常ニ存シテキルコトニナリ, 之等ハ互ニ無關係デアルベキ一般坐標ノ性質ヲ滿足シナイカラデアル.

一般坐標ノ間ニ (57.1) ノ關係ガアルト言フコトハ,此ノ系ガ一種ノ拘束ヲ受ケテキルト解スルコトガ出來ル. 此ノ拘束ハ仕事ヲシナイモノデアルト假定シテ置カウ.

此ノ場合ノ運動方程式ヲ得ルタメニハ,此ノ系ガ (57.1) 式ノ示ス拘束ヲ受ケテキルトシテ,第35節ニ於テ爲シタト同樣ナ方法デ第55節ノ結果ヲ修正シテモヨイ. 又此ノ系ガ拘束運動ヲシテキルノデアルト見ル代リニ, (57.1) ノ條件ヲ滿足スル樣ニ假想上ノ力ガ實際ノ力以外ニモ加ハツテキルモノデア

ルトシテ論ジテモヨイ. 今,此ノ後ノ方法ヲ取ッテ見ヨウ.

此ノ方法デハ,質點系ハ何等ノ拘束ヲモ受ケテキナイト見ルノデアルカラ,其ノ系ハ第55節デ論ジタ holonomic 系デアルトシテヨイ. ガ,一般力ノ分値 Q_i ノ代リニ,實際其ノ系ニ働イテキル强制力カラ生ジル Q_i ト,見掛ケノ力カラ生ジル Q_i' トノ和ヲ用キナケレバナラヌ. 故ニ, (55.10) ノ代リニ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+Q_i', \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{57.2}$$

ヲ得ル.

Q_i' ハ未知ノモノデアルガ,瞬間的拘束ト一致スル任意ノ假想變位ニ對シテハ仕事ヲシナイ様ナモノデアルト言フコトダケハ分ッテキルモノデアル. 故ニ (57.1) ノ $dt=0$ トシタ

$$A_{1j}\,dq_1+A_{2j}\,dq_2+\cdots\cdots+A_{nj}\,dq_n=0, \quad (j=1,2,\cdots,p) \tag{57.3}$$

ヲ滿足スル $dq_1, dq_2, \cdots, dq_n$ ニ對シテノ假想ノ仕事デハ其レガ零ニナラネバナラヌ. 卽チ

$$Q_1'\,dq_1+Q_2'\,dq_2+\cdots\cdots+Q_n'\,dq_n=0 \tag{57.4}$$

デアル.

(57.3)ノ p 箇ノ方程式ノソレゾレニ未知ノ函數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ ヲ乘ジタモノヲ (57.4) カラ引クト

$$\begin{aligned}&(Q_1'-\lambda_1A_{11}-\lambda_2A_{12}-\cdots\cdots-\lambda_pA_{1p})dq_1\\ &\quad+(Q_2'-\lambda_1A_{21}-\lambda_2A_{22}-\cdots\cdots-\lambda_pA_{2p})dq_2\\ &\quad+\cdots\cdots+(Q_n'-\lambda_1A_{n1}-\lambda_2A_{n2}-\cdots\cdots-\lambda_pA_{np})dq_n=0\end{aligned}$$

ヲ得ル. $dq_1, dq_2, \cdots, dq_n$ ハ任意ノ假想變位デ互ニ無關係ノモノデアルカラ,其等ニ對シテ上式ガ常ニ成立スルタメニハ,其等ノ係數ガ凡テ零ニナレバヨイ. 卽チ

$$Q_i'=\lambda_1A_{i1}+\lambda_2A_{i2}+\cdots+\lambda_pA_{ip}, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{57.5}$$

トスレバ, (57.3), (57.4) ガ同時ニ滿足セラレル.

隨テ (57.2) ハ (57.5) ニ依テ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\lambda_1A_{i1}+\lambda_2A_{i2}+\cdots+\lambda_pA_{ip}, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{57.6}$$

トナル. (57.1) カラハ

$$A_{1j}\dot{q}_1+A_{2j}\dot{q}_2+\cdots+A_{nj}\,\dot{q}_n+T_j=0, \quad (j=1,2,\cdots,p) \tag{57.7}$$

ヲ得ル. 之等ノ $n+p$ 箇ノ方程式カラ $q_1, q_2, \cdots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ ノ $n+p$ 箇ノ量ヲ定メルコトガ出來ル.

58. Hamilton ノ運動方程式

質點系ノ一般坐標ヲ $q_1, q_2, \cdots, q_n$ トシ,其ノ kinetic-potential ヲ L トスルト, Lagrange ノ運動方程式ハ (55.15) ニ示シタ様ニ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{58.1}$$

デアル. L ハ $q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t$ ノ函數デアッテ Lagrange 函數トモ呼バレテキルノデアル. 此ノ L ヲ $\dot{q}_i$ デ微分シタモノヲ p_i トスル. 卽チ

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (58.2)$$

トスル. 此ノ p_i ヲ**一般運動量ノ分値**ト稱スル.

(58.2) ハ p_i ヲ $q_i, \dot{q}_i, t$ ノ函數トシテ表ハシテキルノデアルカラ,之等カラ $\dot{q}_i$ ヲ q_i, p_i, t ノ函數トシテ表ハスコトガ出來ル. 故ニ,$q_i, \dot{q}_i, t$ ヲ變數トシテ取扱フコトノ代リニ,q_i, p_i, t ヲ變數トシテ取扱ッテモ差支ガナイ. ソウシタトキニ,q_i, p_i ヲ**正規坐標**[(1)]ト稱シテキル.

Lagrange 函數 L ノ變分ハ

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+p_i\delta \dot{q}_i\right)$$

デアル. 然ルニ,(58.2),(58.1) ニ依テ

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i},\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (58.3)$$

ヲ得,隨テ上式ハ

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}(\dot{p}_i\delta q_i+p_i\delta \dot{q}_i) \qquad (58.4)$$

(1) 基準坐標ト呼ンデキル者モアル.

$$=\sum_{i=1}^{n}\delta(p_i\dot{q}_i)+\sum_{i=1}^{n}(\dot{p}_i\delta q_i-\dot{q}_i\delta p_i)$$

ト書クコトガ出來

$$\delta\left\{\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L\right\}=\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i\delta p_i-\dot{p}_i\delta q_i) \qquad (58.5)$$

ヲ得ル.

上式左邊ノ括弧內ノ量ヲ正規坐標ヲ用キテ表ハシタモノヲ H トスル. 卽チ

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L \qquad (58.6)$$

トスル. 此ノ H ヲ **Hamilton ノ函數**ト稱スル.

(58.5) ハ

$$\delta H=\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i\delta p_i-\dot{p}_i\delta q_i)$$

トナリ,H ハ p_i, q_i ノ函數デアルカラ

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i,\quad \frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i,$$

卽チ

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (58.7)$$

ヲ得ル. 之等ヲ **Hamilton ノ正規方程式**[(1)]ト言フ. Lagrange ノ運動方程式ハ第二階級ノ微分方程式デアルガ,正規方程式ハ第一階級ノ微分方程式デアル.

(1) 基準方程式ト稱スル者モアル. Philosophical Transaction, 1835. ニ發表セラレタモノデアル.

例題1. 質點系ノ一般坐標ガ sa'eronomic デアルトキニハ, Hamilton 函數ハ總-energy ニ等シク,且ツ energy 法則ガ成立スルコトヲ證セヨ.

質點系ノ任意ノ一質點ノ直角坐標ヲ x_ν, y_ν, z_ν トスルト一般坐標 $q_1, q_2 \cdots, q_n$ ガ scleronom'c デアルカラ

$$x_\nu = f_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_n),$$

$$y_\nu = \varphi_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_n),$$

$$z_\nu = \psi_\nu(q_1, q_2, \cdots, q_n),$$

デ表ハサレ,其ノ速度分値ハ

$$\ddot{x}_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial f_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n,$$

$$\dot{y}_\nu = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n,$$

$$\dot{z}_\nu = \frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \psi_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

トナル. 故ニ此ノ系ノ運動-energy T ハ

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \sum_{\nu=1}^{m} m_\nu(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^3 + \dot{z}_\nu^2) \\ &= \mathrm{A}_{11}\dot{q}_1^2 + \mathrm{A}_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + \mathrm{A}_{nn}\dot{q}^2_n \\ &\qquad + 2\mathrm{A}_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\mathrm{A}_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \end{aligned} \tag{1}$$

トナル. 但シ,質點ノ數ハ m, 一般坐標ノ數ハ n, 任意質點ノ質量ヲ m_ν トシタ. A_{ij} ハ一般坐標ノミノ函數デアッテ**慣性係數**ト呼バレテヰル.

位置-energy ヲ V トスルト,普通ニハ V ハ一般坐標ノミノ函數デアルカラ, $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \dot{q}_i} = 0$, $(i=1, 2, \cdots, n)$ デアル. 隨テ一般運動量ノ分

値 p_i ハ

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

デアル.

(1), (2) ニ依テ

$$p_i = \mathrm{A}_{i1}\dot{q}_1 + \mathrm{A}_{i2}\dot{q}_2 + \cdots + \mathrm{A}_{in}\dot{q}_n, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

ヲ得ル. 之レヲ解イテ

$$\dot{q}_i = \mathrm{B}_{j1}p_1 + \mathrm{B}_{j2}p_2 + \cdots + \mathrm{B}_{jn}p_n, \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

ヲ得ル. B_{ji} ハ一般坐標ノミノ函數デアッテ,之等ヲ**運動度係數**ト稱シテヰル.

(1) ニ示ス樣ニ T ハ一般速度分値 $\dot{q}_i$ ノ二次ノ同次函數デアルカラ, Euler ノ定理ニ依テ

$$2\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_n}\dot{q}_n$$

デアル. (2) ニ依テ,之レハ

$$2\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{q}_i$$

トナリ. (3) ニ依テ $p_i, \dot{q}_i$ ノ函數トシテ表ハサレル. 隨テ (58. 6) ノ Hamilton ノ函數ハ

$$\mathrm{H} = 2\mathrm{T} - \mathrm{L} = 2\mathrm{T} - (\mathrm{T} - \mathrm{V}) = \mathrm{T} + \mathrm{V}$$

トナル. 即チ此ノ場合ノ H ハ總-energy ニ他ナラヌ.

此ノ場合ニ H モ亦 t ヲ陽ハニ含ンデヰナイカラ, p_i, q_i ノミノ函數デアル. 故ニ

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}$$

トナル. 之レハ正規方程式 (58. 7) ニ依テ,明カニ

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0, \text{ 即チ } \mathrm{H} = \mathrm{const.}$$

トナツテ,energy ノ保存サレテヰルコトヲ示シテヰル.

例題2. 單振子ノ運動方程式ハ

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q},$$

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\cos q$$

デ與ヘラレルコトヲ示セ. 但シ m ハ質點ノ質量, l ハ振子ノ長サ, q ハ t 時ニ於ケル振子ノ絲ガ垂直線ト爲ス角ヲ表ハシテヰルモノトスル. p ハ此ノ場合ノ一般運動量ヲ表ハス.

單振子ノ運動-energy ハ $T=\frac{1}{2}m(l\dot{q})^2$ デアリ, 位置-energy ハ $V=-mgl\cos q$ デアルカラ

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2+mgl\cos q$$

トナル. 隨テ

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=ml^2\dot{q},$$

$$\therefore\quad \dot{q}=\frac{p}{ml^2}\tag{1}$$

ヲ得ル. 此ノ $\dot{q}$ ノ値ヲ L ニ入レテ

$$L=\frac{p^2}{2ml^2}+mgl\cos q$$

ヲ得ル.

$H=p\dot{q}-L$ ニ此ノ L 及ビ上式ノ $\dot{q}$ ヲ入レテ　(2)

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\cos q$$

ヲ得ル. 隨テ

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{ml^2},\quad \frac{\partial H}{\partial q}=mgl\sin q\tag{3}$$

デアル. 此ノ第一式ハ(1)ニ依テ

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}\tag{4}$$

ヲ與ヘル.

單振子ノ運動方程式ハ(39.1)ニ依テ與ヘラレテヰル. 卽チ

$$l\ddot{q}=-g\sin q$$

デアル. 之レハ(1)ト(3)ノ第二式トニ依テ

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}\tag{5}$$

トナル.

59. 最小作用ノ法則

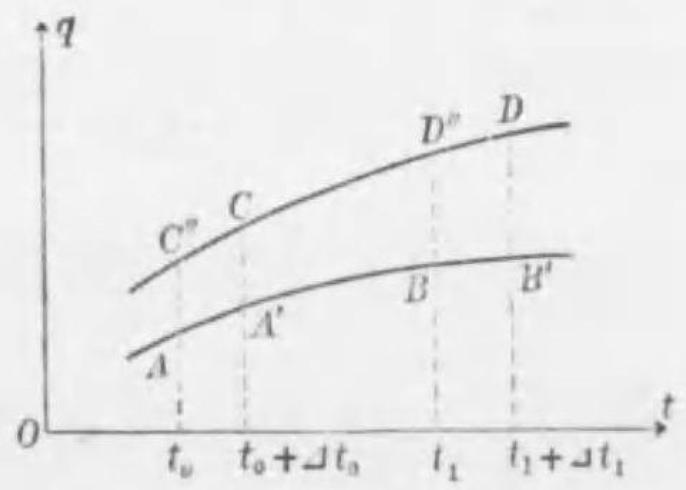
一質點ノ位置ヲ定メルノニハ,其ノ坐標デアル三ツノ量ヲ知ルコトガ必要デアリ,且ツ充分デアル故ニ,吾々ノ空間ハ**三次空間**デアルト言フ.

一般坐標ガ $q_1, q_2, \cdots, q_n$ デアル質點系ノ位置ハ,之等ノ n 箇ノ量ヲ知ルコトニ依テ完全ニ決マル. 故ニ, x, y, z 軸ヲ有スル三次空間ト同樣ニ, $q_1, q_2, \cdots, q_n$ ノ n 箇ノ坐標軸ヲ有スル n 次空間ヲ想像スルナラバ,此ノ n 次空間内ノ $q_1, q_2, \cdots, q_n$ ノ坐標ヲ有スル一點ニ依テ,質點系ノ位置ヲ代表セシメルコトガ出來ル. 此ノ點ヲ**質點系ノ代表點**ト呼ブコトニスル.

質點系ガ運動スルニ從ツテ,質點系ノ代表點ハ n 次空間内ニ其ノ位置ヲ變ヘテ連續曲線ヲ畫ク.

此ノ曲線ヲ**質點系ノ路**[1]ト稱スル. 尚ホ分リ易クスルタメニ,横軸上ニ時 t ヲ表ハシ,縦軸上ニ q ヲトリ,第43圖ニ於ケル AA′BB′ デ此ノ質點系ノ路ヲ示シ,其レヲ

第43圖



$$q=f(t) \qquad (59.1)$$

デ表ハスコトニシヨウ.

第43圖ノ C″CD″D ハ質點ノ路 AA′BB′ ニ極メテ近イ任意ノ曲線

$$q=g(t) \qquad (59.2)$$

ヲ表ハスモノトシ,適當ナ拘束ヲ此ノ質點系ニ加ヘルト,其ノ代表點ガ此ノ曲線上ヲ動キ得ルモノデアルトスル.

A, B ヲソレゾレ任意ノ時刻 t_0, t_1 ニ質點系ノ代表點ガトル位置ヲ表ハスモノトスル. Δt_0, Δt_1 ヲ極メテ短イ時間ヲ表ハスモノトシ, A′, B′ ヲソレゾレ $t_0+\Delta t_0$, $t_1+\Delta t_1$ ニ於ケル質點系ノ代表點ノ位置ヲ表ハスモノトスル. 同様ニ, C″, C, D″, D ヲ時刻 t_0, $t_0+\Delta t_0$, t_1, $t_1+\Delta t_1$ ニ於テ CD 曲線上ヲ動ク代表點ガ占メル位置ヲ表ハスモノトシヨウ. ソウスレバ, A, A′ C, C″ ニ於ケル q ハ, (59.1), (59.2) ニ依テ

[1] 英語デ之レヲ trajectory ト稱シ, 質點ノ路 path ト區別シテヰル.

$$q_A=f(t_0),$$

$$q_{A'}=f(t_0+\Delta t_0)=f(t_0)+\frac{df}{dt}\Delta t_0,$$

$$q_C=g(t_0+\Delta t_0)=g(t_0)+\frac{dg}{dt}\Delta t_0,$$

$$q_{C''}=g(t_0)$$

トナル.

$$q_{C''}-q_A=(\delta q)_A,\ q_C-q_A=(\Delta q)_A \qquad (59.3)$$

トスレバ,上式カラ

$$(\Delta q)_A=(\delta q)_A+(\dot{q})_A\Delta t_0 \qquad (59.4)$$

ヲ得ル. 同様ニ

$$(\Delta q)_B=(\delta q)_B+(\dot{q})_B\Delta t_1 \qquad (59.5)$$

ノ關係ガ成リ立ツテヰル. δq ハ, (59.3) ヲ (53.2) ト比較シテ, t ヲ獨立變數ト見タトキノ q ノ變分ヲ表ハシテヰルモノデアルコトガ分カル. Δq ハ t ヲ從屬變數デアルト見テ,其ノ變分 δt ガ Δt デアルトキノ q 變分ヲ表ハスモノデアルコトモ容易ニ理解シ得ルデアラウ. 尚ホ (59.4), (59.5) ノ關係ハ一般坐標 q_1, q_2, …, q_n ノ總テニ通ジテ成立スルコトモ明カデアル. 即チ

$$\Delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\,\Delta t, \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (59.6)$$

ガ任意ノ時刻ニ於テ成リ立ツテヰルコトガ分カル.

今,此ノ質點系ノ Lagrange 函數ヲ L トシ, L ノ時 t ニ就テノ積分ヲ,此ノ系ノ路 AB ニ沿フテ, A カラ B マデトツタモノト, CD ノ路ニ沿フテ C カラ D マデトツタモノトノ差ヲ求メヨウ.

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)\, dt \qquad (59.7)$$

トスルト, $\int_{CD} L dt$ ト $\int_{AB} L dt$ トノ差ハ上式ニ依テ與ヘラレル S ノ積分ノ兩限ガ $\Delta t_0, \Delta t_1$ ノ變化ヲシタトキノ變分ニ相當スル. 故ニ(53.10), (53.12), (53.13)ニ依テ

$$\int_{CD} L dt-\int_{AB} L dt=\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt+L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0$$

ヲ得ル.

$$\Delta S=\int_{CD} L dt-\int_{AB} L dt \qquad (59.8)$$

トスレバ上式ハ

$$\Delta S=\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt+L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0$$

トナリ, Lagrange ノ運動方程式 (55.15) ニ依テ

$$\Delta S=\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right\}dt+L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)dt+L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)_B-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)_A+L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i+L\Delta t\right]_A^B$$

トナル. (59.6) ニ依テ,之レハ

$$\Delta S=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i+\left(L-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\Delta t\right]_A^B \qquad (59.9)$$

トナル.

一般運動量ノ分値ヲ p_i トスレバ

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

デアリ, (58.6) ニ依テ

$$H=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-L=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L$$

デアルカラ, (59.9) ハ

$$\Delta S=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i-H\Delta t\right]_A^B \qquad (59.10)$$

ト書クコトガ出來ル.

C, D ガソレゾレ A, B ニ一致シ,其ノ時刻モ夫々ニ t_0, t_1 トナツテキルナラバ, A, B ニ於テノ Δq_i モ Δt モ共ニ零トナルカラ, (59.10) ノ右邊ハ零ニナル. 此ノ場合ニハ ΔS ハ δS ニ他ナラヌカラ, (59.10) ハ

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1} L\, dt=0 \qquad (59.11)$$

トナル. 之レハ Hamilton ノ法則 (54.11) デアル.

Lagrange 函數ガ t ヲ陽ハニ含ンデキナイトキ

ニハ,第58節例題1ニ示シタ様ニ, Hハ總-energy トナリ,且ツ energy 法則ガ成立スル. 故ニ質點系ノ代表點ガ AB 曲線上ヲ動クトキノ總-energy ヲ h トシ, CD 線上ヲ動クトキノ其レヲ $h+\Delta h$ トシ, Δh ハ極メテ小サナ量デアルトシヨウ. 此ノ場合ニ, $\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i$ ヲ時 t ニ就テ CD 線上ヲ C カラ D マデ積分シタモノト, AB 線上ヲ A カラ B マデ積分シタモノトノ差ヲ求メルト, (59.8), (59.10) ニ依テ

$$\int_{CD}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt-\int_{AB}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt=\int_{CD}(h+\Delta h)dt$$

$$-\int_{AB} h dt+\Delta S$$

$$=(h+\Delta h)(t_1+\Delta t_1-t_0-\Delta t_0)-h(t_1-t_0)$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i-H\Delta t\Big]_A^B$$

$$=\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta q_i+t\Delta h\Big]_A^B \qquad (59.12)$$

トナル. 但シ $\Delta h\Delta t_0$, $\Delta h\Delta t_1$ ノ項ハ高次ノ微小量デアルカラ無視シタ.

C, D ガ夫々 A, B ト一致シ, $\Delta h=0$ デアルトスレバ, (59.12) ハ

$$\int_{CD}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt-\int_{AB}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt=0,$$

即チ

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt=0$$

トナル.

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i dt \qquad (59.13)$$

トスレバ,上式ハ

$$\delta A=0 \qquad (59.14)$$

トナル. 此ノ A ヲ**作用**[1]ト稱シテヰル.

(59.14) ハ「同ジ兩端ヲ持チ,同ジ energy 方程式ヲ滿足スル様ニ,質點系ノ代表點ガ働イテヰル種々ノ極メテ接近シタ質點系ノ路ニ就テトツタ作用ヲ比較シテ見ルト,實際ノ質點系ノ路ニ就テノ作用ガ極端値ヲ持ツテヰル」コトヲ示スモノデアル. 作用ヲトル質點系ノ路ノ長サガ充分ニ小デアルナラバ其レガ極小ニナルコトヲモ證明スルコトガ出來ル. 故ニ (59.14) ガ示シテヰルコトヲ,**最小作用ノ法則**[2]ト稱スル.

例題1. 運動-energy ガ一般速度分値ノ二次ノ同次函數デアリ,位置-energy ガ一般坐標ノミノ函數デアル様ナ質點系デハ作用ハ

$$A=2\int_{t_0}^{t_1} T dt$$

(1) 第48節ニ述ベタ作用ト混同シナイ様ニ注意スルコトヲ要スル.

(2) 此ノ法則ハ最初 Maupertuis (1698-1759) ニ依テ Mémoires de l'Acad. de Paris, 1447. ニ不完全ニ發表セラタモノデアル.

デ與ヘラレルコトヲ證セヨ. 但シTハ其ノ系ノ運動-energyヲ表ハス

例題2. 質點系ノ總-energyヲhトシ,位置-energyヲVトシ,質點系ニ屬スル任意ノ質點ノ質量ヲm_νトシ,之レガ微小時間dt間ニ畫ク路ノ長サヲds_νトスレバ此ノ質點系ノ作用Aハ次式デ與ヘラレルコトヲ證セヨ. 但シmハ質點ノ數ヲ表ハス.

$$\mathrm{A}=\int\sqrt{2(h-\mathrm{V})\sum_{\nu=1}^{m}m_\nu ds_\nu^2}.$$

60. 變作用ノ法則

Hamilton ノ法則及ビ最小作用ノ法則デハ,ソレゾレニ(59.7)ノS及ビ(59.13)ノAニ依テ表ハサレル積分ヲ,質點系ノ實際ノ路ニ就テトツタモノト,其ノ積分ノ兩限デアル時刻ニ於テハ其ノ質點系ノ狀態ト同ジ狀態ヲ持ツ種々ノ假想的ノ路ニ就テトツタモノトヲ比較シタ.

今,其ノ代リニ,(59.17)ノ積分,卽チ

$$\mathrm{S}=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{L}(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)\,dt \tag{60.1}$$

ヲ,質點系ノ實際ノ路ニ就テトツタモノト同ジ質點系ガ同ジ力ノ下ニ運動シテヰル場合ニ,其ノ始メノ條件ガ極メテ僅カニ違ツテヰルガ爲メニ生ジテ來ル種々ノ違ツタ質點系ノ路ニ就テトツタモノトヲ比較シテ見ル.

第43圖ノAB及ビCDガ,ソレゾレ此ノ場合ノ質

點系ノ實際ノ路及ビ其レト比較セラレル路ヲ表ハシテヰルモノト見得ルカラ,(59.10)ノ

$$\Delta\mathrm{S}=\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\dot{q}_i}\Delta q_i-\mathrm{H}\Delta t\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$$

ガ此ノ場合ニモ成立スル.

t_0, t_1ニ於ケルp_i, Δq_i, H, Δtヲソレゾレp_i^0, δq_i^0, H^0, δt^0; p_i', $\delta q_i'$, H′, $\delta t'$トシ,此ノ場合ノΔSヲδSデ表ハスト,上式ハ

$$\delta\mathrm{S}=\sum_{i=1}^{n}p_i'\delta q_i'-\sum_{i=1}^{n}p_i^0\delta q_i^0-\mathrm{H}'\delta t'+\mathrm{H}^0\delta t^0$$

トナル.

尙ホ比較セラルベキ路ハ,實際ノ質點系ノ路ト同ジ時刻ニ始マツテヰルモノトスレバ,$\delta t^0=0$デアル. 積分ノ上限デアルt_1ヲ,一般ニ任意ノ時刻tデアルトシ,隨テ其ノ時ノ量ヲ表ハスタメノ添號′ヲ省略スルト上式ハ

$$\delta\mathrm{S}=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-\sum_{i=1}^{n}p_i^0\delta q_i^0-\mathrm{H}\delta t \tag{60.2}$$

トナル. 此ノ式ガ示スコトヲ**Hamiltonノ變作用ノ法則**ト稱ス.

質點系ノ運動ヲ知ルタメニ Lagrange ノ運動方程式ヲ用ヰテモ, Hamilton ノ正規方程式ヲ用ヰテモイヅレニシテモ其等ヲ解イテ一般坐標q_iヲtノ函數トシテ表ハシ得タナラバ,其時ニハ$2n$箇ノ積分常

數ガ入ツテ來ル. 其等ヲ $c_1, c_2, \cdots, c_{2n}$ トシ

$$q_i=q_i(t, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}), \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{60.3}$$

トシテ表ハシ得タトショウ. ソウスレバ,之等ヲ t ニ就テ微分シテ一般速度分値 $\dot{q}_i$ ヲ亦 $t, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}$ ノ函數トシテ表ハスコトガ出來,其等ヲ用ヒテ一般運動量ノ分値 p_i ヲ

$$p_i=p_i(t, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}), \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{60.4}$$

トシテ表ハスコトガ出來ル.

$t=t_0$ トスレバ, (60.3), (60.4) ハ

$$q_i=q_i^0(t_0, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}), \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$p_i=p_i^0(t_0, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}), \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

トナル. 故ニ

$$t, q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1^0, q_2^0, \cdots, q_n^0,$$
$$p_1^0, p_2^0, \cdots, p_n^0$$

ノ $4n+1$ 箇ノ變數ガ (60.3), (60.4) ノ $2n$ 箇ノ關係式デ關係付ケラレテヰルモノト見ルコトガ出來ル. 随テ又,之等ノ $4n+1$ 箇ノ變數中ノ任意ノ $2n+1$ ヲ以テ,殘リノ $2n$ 箇ノ變數ヲ表ハシ得ル筈デアル. 故ニ $t, q_1^0, q_2^0, \cdots, q_n^0, q_1, q_2, \cdots, q_n$ ノ $2n+1$ 箇ヲ變數トシテ他ヲ表ハシタトスレバ,S モ亦其等ノ函數トシテ表ハスコトガ出來ル. 此ノ様ニシテ表ハサレタ S ヲ, Hamilton ノ方法デ表ハサレタ**主函數**ト稱シ, S_H デ

表ハスコトニスル. 此ノ様ニシタトキ

$$\partial S_H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_H}{\partial q_i}\partial q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_H}{\partial q_i^0}\partial q_i^0+\frac{\partial S_H}{\partial t}\partial t \tag{60.5}$$

トシテ表ハシ得ルコトハ明カデアル.

(60.2) ノ S ト (60.5) ノ S_H トハ全ク同ジモノデアルカラ,兩式ヲ比較シテ

$$\frac{\partial S_H}{\partial q_i}=p_i, \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{60.6}$$

$$\frac{\partial S_H}{\partial q_i^0}=-p_i^0, \ (i=1, 2, \cdots, n) \tag{60.7}$$

$$\frac{\partial S_H}{\partial t}=-H \tag{60.8}$$

ヲ得ル.

S_H ハ q_i^0, q_i, t ノ函數トシテ表ハサレテヰルノデアルカラ, $\partial S_H/\partial q_i$ ノ内ニハ t ニ就テノ微分係數ハ含マレテヰナイ. p_i ハ $\dot{q}_i$ ノ線型函數トシテ表ハサレルモノデアルカラ, (60.6) ノ右邊ハ q_i ノ t ニ就テノ一次微分係數ノミヲ含ンデヰル. 故ニ (60.6) ハ運動方程式ヲ t ニ就テ一度積分シタ第一積分ニナッテヰル. 同様ニ (60.7) ハ t ニ就テノ微分係數ヲ少シモ含ンデヰナイモノデアッテ,一般坐標 q_i ヲ p_i^0, q_i^0, t ノ函數トシテ表ハシテヰルモノデアルカラ,之等ハ運動方程式ヲ t ニ就テ二回積分シテ得ラレル第二積分ヲ表ハシテヰルモノデアル.

(60.8) ノ H ハ Hamilton 函數デアッテ t, q_i, p_i ノ函數トシテ表ハサレテキルモノデアルカラ,其ノ p_i ニ (60.6) ノ p_i ヲ代入シテ

$$\frac{\partial S_H}{\partial t}+H\left(t, q_i, \frac{\partial S_H}{\partial q_i}\right)=0 \qquad (60.9)$$

ヲ得ル. 此ノ式ハ S_H ノ t ニ就テノ偏微分係數 $\partial S_H/\partial t$ ト q_i ニ就テノ偏微分係數 $\partial S_H/\partial q_i$ トヲ含ンデキル. 此ノ種ノ微分方程式ヲ**偏微分方程式**ト稱スル. 之レニ對シテ,一ツノ變數ニ關スル微分係數ノミヲ含ンデキル方程式ヲ**常微分方程式**ト言フ. (60.9) ハ S_H ノ一次微分係數ノミヲ含ンデキル. 且ツ一般運動量ノ分值 p_i ハ L, 從ッテ H ノ中ニ二次ノ項トシテ入ッテ來ルカラ, $\partial S_H/\partial q_i$ ノ二次ノ項ヲ含ンデキル. 故ニ (60.9) ハ S_H ニ就テノ第一階級ノ二次ノ微分方程式デアル. 此ノ式ヲ **Hamilton ノ微分方程式**ト稱スル. 故ニ「Hamilton ノ方法デ表ハサレタ主函數 S_H ハ Hamilton ノ微分方程式 (60.9) ヲ滿足スル」ト言フコトガ出來ル. 之レヲ **Hamilton ノ定理**[1]ト稱スル.

例題 質點ヲ鉛直上方ニ投ゲタ場合ニ Hamilton ノ定理ノ成立シテキルコトヲ示セ.

鉛直上方ニ向ッテ軸ノ正ノ方向ヲトル. $t=0$ ノトキノ質

(1) Philosophical Transaction 1834, p. 247.

點ノ位置ヲ z_0, 速サヲ $\dot{z}_0$ トスレバ, (20.2) ハ

$$\dot{z}=-gt+\dot{z}_0$$

トナルカラ,之レ�ヲ積分シテ

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+\dot{z}_0t+z_0 \qquad (1)$$

ヲ得ル. 質點ノ質量ヲ m トスレバ,其ノ運動-energy ハ

$$T=\frac{1}{2}m\dot{z}^2=\frac{1}{2}m(\dot{z}_0-gt)^2$$

トナリ,位置-energy ハ

$$V=mgz=mg(z_0+\dot{z}_0t-\frac{1}{2}gt^2)$$

トナルカラ, Lagrange 函數ハ

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{z}_0^2-mgz_0-2mg\dot{z}_0t+mg^2t^2$$

トナル. 隨テ

$$H=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z}-L=\frac{1}{2}m\dot{z}_0^2+mgz_0 \qquad (2)$$

トナリ

$$S=\int_0^t Ldt=\left(\frac{1}{2}m\dot{z}_0^2-mgz_0\right)t-mg\dot{z}_0t^2+\frac{1}{3}mg^2t^3 \qquad (3)$$

トナル.

(1) ヲ用キテ (2), (3) カラ z_0 ヲ消去スルト Hamilton ノ方法デ表ハシタ H 及ビ S_H ヲ得ル. 卽チ

$$H=\frac{m}{2}\frac{\left(z-z_0+\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{t^2}+mgz_0, \qquad (4)$$

$$S_H=\frac{m}{2t}\left(z-z_0+\frac{1}{2}gt^2\right)^2-mgz_0t$$
$$-mgt\left(z-z_0+\frac{1}{2}gt^2\right)+\frac{m}{3}g^2t^3 \qquad (5)$$

デアル. (5)ヲ t ニ就テ微分スレバ(4)ノ符號ヲ變ヘタモノヲ得ル.

61. Hamilton-Jacobi ノ微分方程式

H ヲ質點系ノ正規坐標 q_i, p_i ヲ用ヒテ表ハシタ Hamilton 函數トシ, Hamilton ノ微分方程式ト同形ノ

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H=0$$

ヲ滿足シ,且ツ

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.1}$$

ヲ滿足スル S ガアルトスレバ,其レハ當然

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0 \tag{61.2}$$

ノ偏微分方程式ヲ滿足スル.

(61.2)ノ完全解ヲ得タトスレバ,其レガ含ム任意ノ n 箇ノ積分常數ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ トシ,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i, \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.3}$$

デ與ヘラレル n 箇ノ β_i ヲ,他ノ任意ノ常數トショウ.

(61.3) ヲ t ニ就テ微分スルト, β_i ハ常數デアルカラ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right)=0$$

トナル. 然ルニ,S ハ t, q_i, α_i ノ函數デアルカラ,之レ

ハ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial \alpha_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\dot{q}_j=0 \tag{61.4}$$

ト書ケル.

α_j ハ (61.2) ノ積分常數デアルカラ,α_j ニ任意ノ値ヲ入レテモ (61.2) ハ滿足セラレネバナラヌ. 故ニ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial \alpha_i}+\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}=0 \tag{61.5}$$

デアラネバナラヌ. 然ルニ H ニ於ケル α_i ハ其ノ $\dfrac{\partial S}{\partial q_j}$ カラ現ハレテ來ル外ハナイモノデアルカラ

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}=\sum_{j=1}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial q_j}\right)}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}$$

デアリ, (61.1) ニ依テ之レハ

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}$$

ト書クコトガ出來,隨テ (61.5) ハ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial \alpha_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}=0$$

トナル. 故ニ (61.4) ト之レトヲ比較シテ

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}=\dot{q}_j, \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{61.6}$$

ヲ得ル.

(61.1) ヲ t ニ就テ微分スルト

$$\dot{p}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j \tag{61.7}$$

ヲ得ル. (61.2) ヲ q_j ニ就テ微分スルト, H ハ t, q_i, $\partial S/\partial q_j$ ノ函數デアリ, シカモ亦 $\partial S/\partial q_j$ ハ q_i ノ函數デルカラ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial q_j}\right)}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_j}=0$$

ヲ得ル. 之レハ (61.1) ニ依テ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_j}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ト書ケ, (61.6) ニ依テ

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

トナルカラ, (61.7) ハ之レニ依テ

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.8}$$

トナル.

(61.6), (61.8) ハ Hamilton ノ正規方程式デアルカラ「(61.2) ノ完全解 S ヲ以テ作ツタ (61.1), (61.3) ハ Hamilton ノ正規方程式ノ解ニナツテヰル」コトガ分ル. 之レヲ **Jacobi ノ定理**[1] ト稱シ, (61.2) ヲ **Hamilton-**

(1) 此ノ定理ハ彼レノ死後 1866 年 Clebsch ニ依テ出版セラレタ彼レノ講義 Vorlesungen über Dynamik ニモ載セラレテヰル. 彼レガ Crelle's Journ. 27, 1837, p. 97; Liouville's Journ. 3, 1837, pp. 60, 161 ニ發表シタモノデアル.

Jacobi ノ微分方程式 ト言フ. 故ニ力學的ノ問題ヲ解クコトハ, 此ノ Hamilton-Jacobi ノ微分方程式ヲ解クコトニ歸結スル.

質點系ガ保存的デアル場合ニハ, 其ノ系ノ運動-energy T ト位置-energy V トノ和ハ常ニ一定デアルカラ

$$T+V=h \tag{61.9}$$

トスルト, Hamilton ノ主函數 S ハ上式ニ依テ

$$S=\int_{t_0}^{t}L\,dt=\int_{t_0}^{t}(T-V)\,dt=\int_{t_0}^{t}2T\,dt-h(t-t_0)$$

トナリ, 第 59 節例題 1 ニ依テ

$$S=A-h(t-t_0) \tag{61.10}$$

トナル. A ハ作用ヲ表ハス. S ガ t, q_i, α_i ノ函數デアル様ニ A モ亦其等ノ函數デアルカラ, 之レヲ**作用函數**[1] ト言フ. 此ノ A ガ t ヲ陽ハニ含ンデヰナイトキハ, (61.10) ヲ t 及ビ q_i ニ就テ偏微分シテ

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-h,\quad \frac{\partial S}{\partial q_i}=\frac{\partial A}{\partial q_i},\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.11}$$

ノ關係ヲ得ル.

質點系ガ保存的デアル場合ニハ, Hamilton 函數 H ハ總-energy h ヲ表ハシ, t ヲ陽ハニハ含ンデヰナ

(1) Hamilton ノ示性函數トモ言フ.

イ (61.2) ハ (61.11) ニ依テ

$$H\left(q_i,\ \frac{\partial A}{\partial q_i}\right)=h. \tag{61.12}$$

トナル. 之レハ energy 方程式ニ他ナラヌ.

此ノ簡單ナ形ニナツタ Hamilton-Jacobi ノ微分方程式デアツテモ,任意ノ場合ノ解ヲ得ルコトハ困難デアル. 作用函數 A ガ

$$A(q_i)=A_1(q_1)+A_2(q_2)+\cdots+A_n(q_n) \tag{61.13}$$

ト言フ形デアルトキニハ,(61.12) ハ

$$F_i\left(q_i,\ \frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right)=\alpha_i,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.14}$$

ノ n 箇ノ常微分方程式ニ分ケラル. 隨ツテ,之レヲ $\dfrac{\partial A}{\partial q_i}$ ニ就テ解イテ

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i}=p_i(q_i,\alpha_i),\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.15}$$

ヲ得,之レヲ積分シテ

$$A_i(q_i)=\int p_i(\alpha_i,q_i)\,dq_i,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{61.16}$$

ヲ得,之等ヲ (61.13) ニ入レテ A ヲ得,(61.10) ニ依テ S ヲ得ル.

題例 一質點ヲ重力場内デ任意ノ方向ニ投ゲタトキノ拋物線運動ヲ,本節ノ方法デ解ケ.

質點ノ質量ヲ m トシ,質點ノ運動ヲ含ム平面ヲ xz 面トシ,x 軸ヲ水平ニ,z 軸ヲ鉛直上方ニ向ツテトル. 質點ノ運動-energy

及ビ位置-energy ハ

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2),\quad V=mgz$$

デアルカラ, kinetic-potential ハ

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{z}^2+\dot{x}^2)-mgz,$$

隨テ一般運動量ノ分値ハ

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=m\dot{z},\ p_2=m\dot{x}$$

トナリ, Hamilton 函數ハ

$$H=T+V=\frac{1}{2m}p_1^2+\frac{1}{2m}p_2^2+mgz=h\equiv\alpha \tag{1}$$

トナル.

(61.12) ニ依テ, (1) ニ p_1, p_2 ノ代リニ $\dfrac{\partial A}{\partial z}$, $\dfrac{\partial A}{\partial x}$ ヲ入レテ

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+mgz=\alpha_1$$

ヲ得ル. (61.13) ニ從ツテ

$$A(z,x)=A_1(z)+A_2(x) \tag{2}$$

トシ,上式ヲ

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)^2+mgz=\alpha_1-\alpha_2,\quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)^2=\alpha_2$$

ニ分離スル. 之等ヲ積分スルト

$$A_1(z)=-\frac{2\sqrt{2}}{3g\sqrt{m}}(\alpha_1-\alpha_2-mgz)^{3/2},\ A_2(x)=\sqrt{2m\alpha_2}\,x \tag{3}$$

ヲ得ル.

(61.10) ハ (2), (3) ニ依テ

$$S=-\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(\alpha_1-\alpha_2-mgz)^{3/2}+\sqrt{2m\alpha_2}\,x-\alpha_1 t \tag{4}$$

トナル．但シ(61.10)ノt_0ハ0トシタ．

(16.13)ニ(4)ノSヲ入レテ

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-\frac{1}{g}\sqrt{\frac{2}{m}}(\alpha_1-\alpha_2-myz)^{1/2}-t=\beta_1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=+\frac{1}{g}\sqrt{\frac{2}{m}}(\alpha_1-\alpha_2-mgz)^{1/2}+\sqrt{\frac{m}{2}}\alpha_2^{-1/2}x=\beta_2 \tag{6}$$

ヲ得ル．之等ガ求メル問題ノ解デアル．$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ハ始メノ條件デ決マル．

(5)ヲzニ就テ解イテ

$$z=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{mg}-\frac{1}{2}g\beta_1^2-\beta_1 gt-\frac{1}{2}gt^2 \tag{7}$$

ヲ，(5)，(6)カラ

$$x=\sqrt{\frac{2}{m}}\alpha_2^{\frac{1}{2}}(\beta_1+\beta_2+t) \tag{8}$$

ヲ得ル．$t=0$ノトキ$x=z=0$トスレバ

$$\alpha_1-\alpha_2=\frac{1}{2}\beta_1^2 mg, \quad \beta_1+\beta_2=0$$

トナリ，(7)，(8)ハ

$$z=-\beta_1 gt-\frac{1}{2}gt^2, \quad x=\sqrt{\frac{2}{m}}\alpha_2^{\frac{1}{2}}t$$

トナル．$t=0$ノトナキノ質點ノ速度分値ヲv_{0x}, v_{0z}トスレバ之等ハ

$$v_{0z}=-\beta_1 g, \quad v_{0x}=\sqrt{\frac{2}{m}}\alpha_2^{\frac{1}{2}}$$

ヲ與ヘ

$$z=v_{0z}t-\frac{1}{2}gt^2, \quad x=v_{0x}t$$

トナリ，(21.5)ト全ク相等シイコトヲ示シテヰル．(5)ハ任意ノ時刻tニ於ケルzヲ與ヘ，(6)ハ質點ノ路ヲ與ヘテヰル．

第六章

質點系ノ特別ナル運動

62. 二體問題

(46.11)ニ於テ太陽ガ一遊星ニ及ボス力**F**ハ

$$\mathbf{F}=-k\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$$

デアルコトヲ證シ得タ．此式ニ於テmハ遊星ノ質量，**r**ハ太陽ニ關シテノ遊星ノ位置-vector，kハ比例常數ヲ表ハシテヰル．勿論太陽及ビ遊星ハ共ニ質點トシテ取扱ツテヰル．今若シ遊星ノ質量ヲm_2，遊星ノ太陽ニ關スル位置-vectorヲ$\mathbf{r}_{12}$，太陽ガ遊星ニ及ボス力ヲ$\mathbf{F}_{12}$ヲ以テ表ハスコトニスルト，上式ハ

$$\mathbf{F}_{12}=-k\frac{m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \tag{62.1}$$

トナル．

運動ノ第三法則ガ示ス樣ニ，太陽ガ遊星ニ及ボスト同ジ大サデ，方向ガ反對デアル力ヲ遊星ガ太陽ニ及ボシテヰル．故ニ之レヲ$\mathbf{F}_{21}$トシ，太陽ノ質量ヲm_1トシ，遊星ニ關シテノ太陽ノ位置-vectorヲ$\mathbf{r}_{21}$トスレバ，(62.1)ト同樣ニ

$$\mathbf{F}_{21}=-k'\frac{m_1}{r_{21}^3}\mathbf{r}_{21} \tag{62.2}$$

デアル. 但シ,k' ハ比例常數デアッテ,k トハ異ッテキルモノデアル.

運動ノ第三法則,即チ (48.7) ニ依テ

$$\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}=0 \tag{62.3}$$

デアリ,且ツ

$$\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r}_{21}=0$$

デアルカラ,(62.1) 及ビ (62.2) ニ依テ上式 (62.3) ハ

$$km_2=k'm_1$$

ヲ與ヘル. 故ニ

$$k=\kappa m_1,\ k'=\kappa m_2 \tag{62.4}$$

トスレバ,(62.1), (62.2) ハ

$$\mathbf{F}_{12}=-\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \tag{62.5}$$

デ表ハスコトガ出來ル. κ ハ太陽及ビ遊星ノ性質ニハ無關係ナ常數デアッテ,C.G.S.單位ヲ用キルト,略ボ 6.658×10^{-8} デアルコトガ知ラレテキル.

(62.5) ハ「太陽ト遊星トハ其ノ質量ノ相乘積ニ比例シ,距離ノ自乘ニ逆比例スル大サノ力ヲ以テ互ニ相引イテキル」コトヲ示スモノデアル.

太陽ト遊星ノミナラズ,凡テノ天體間,例ヘバ地球ト月,或ハ遊星ト遊星トノ間ニモ (62.5) ニ示ス引力ガ働イテキルモノト考ヘラレル. Newton ハ尚ホ

之レヲ擴張シテ,凡テノ物體ハ (62.5) ニ示ス引力ヲ相互ニ及ボシテキルモノデアラウト言フコトヲ唱ヘタ. 之レヲ Newton ノ**萬有ノ引力法則**ト稱スル.

今,m_1, m_2 ノ質量ヲ有スル二質點ガ互ニ萬有引力ニ依テ牽引シテキル場合ニ,此等ガドノ様ナ運動ヲスルカニ就テ研究シテ見ヨウ. 此ノ問題ヲ**二體問題**ト言フ.

任意ノ原點 O ニ關シテノ質點 1 及ビ 2 ノ位置-vector ヲソレゾレ $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ トシ,1 カラ 2 及ビ 2 カラ 1 ニ向ッテキル單位-vector ヲソレゾレ $\mathbf{r}_{120}$, $\mathbf{r}_{210}$ トシヨウ. ソウシタトキニハ,此ノ兩質點ノ運動方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}&=\mathbf{F}_{21}=-\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{21}^2}\mathbf{r}_{210},\\ m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}&=\mathbf{F}_{12}=-\frac{\kappa m_1 m_2}{r_{12}^2}\mathbf{r}_{120}\end{aligned}\right\} \tag{62.6}$$

デアル. 之等ヲ加ヘルト,(62.3) ニ依テ

$$m_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}=0,$$

即チ

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2)=0 \tag{62.7}$$

ヲ得ル.

O ヲ原點トシテノ,此ノ質點系ノ質量中心ノ位置-vector ヲ $\mathbf{R}$ トスレバ

$$\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \tag{62.8}$$

デアルカラ,上式ハ

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=0 \tag{62.9}$$

トナル. 即チ質量中心ノ加速度ガ零ニ等シイノデアルカラ,之レハ質量中心ガ一定ノ方向ニ等速運動ヲシテキルコトヲ示ス. 計算ヲ簡便ニスルタメニ,此ノ速サヲ零トシ,質量中心ガ靜止シテキルモノト假定ショウ.

(62.6) カラ

$$\left.\begin{aligned} m_1\left[\mathbf{r}_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}\right]&=[\mathbf{r}_1\,\mathbf{F}_{21}]=-\frac{\kappa m_1m_2}{r_{21}{}^2}[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{21_0}],\\ m_2\left[\mathbf{r}_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}\right]&=[\mathbf{r}_2\,\mathbf{F}_{12}]=-\frac{\kappa m_1m_2}{r_{12}{}^2}[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_{12_0}] \end{aligned}\right\}. \tag{62.10}$$

ヲ得ル. 隨テ

$$m_1\left[\mathbf{r}_1\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}\right]+m_2\left[\mathbf{r}_2\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}\right]$$

$$=\frac{\kappa m_1m_2}{r_{12}{}^3}\{[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{12}]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_{21}]\}$$

ヲ得ル. 然ルニ

$$\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_{21}$$

デアルカラ

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{12}]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_{21}]=[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{12}]+[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{21}]-[\mathbf{r}_{21}\mathbf{r}_{21}]=0$$

デアリ,上式ハ

$$\frac{d}{dt}\left\{m_1\left[\mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right]+m_2\left[\mathbf{r}_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right]\right\}=0$$

トナル. 之レヲ積分シテ

$$m_1\left[\mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right]+m_2\left[\mathbf{r}_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right]=\mathbf{A} \tag{62.11}$$

ヲ得ル. **A** ハ積分常數-vector デアル.

質點 1, 2 ノ運動量ヲソレゾレ $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ トスレバ

$$\mathbf{B}_1=m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},\quad \mathbf{B}_2=m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \tag{62.12}$$

デアルカラ,(62.11) ハ

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{B}_1]+[\mathbf{r}_2\mathbf{B}_2]=\mathbf{A} \tag{62.13}$$

トナル.

質點 1, 2 ノ原點ニ關シテノ運動量ノ能率ヲソレゾレ $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ トシ,質點系ノ其レヲ **N** トスルト

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}_1=[\mathbf{r}_1\mathbf{B}_1],\quad \mathbf{N}_2&=[\mathbf{r}_2\mathbf{B}_2],\\ \mathbf{N}=\mathbf{N}_1&+\mathbf{N}_2 \end{aligned}\right\} \tag{62.14}$$

デアルカラ,上式ハ

$$\mathbf{N}=\mathbf{A} \tag{62.15}$$

トナル. 卽チ「此ノ質點系ノ原點ニ關スル運動量ノ能率ハ一定不變デアル」コトヲ示シテキル. 此ノ **N** 卽チ **A** ノ方向ガ不變軸デ,之レト垂直ナ平面ガ不變平面デアル. 不變軸ヲ z 軸トスレバ,不變平面ハ xy-平面ニ平行ナ平面デアル. 質點ノ初メノ速度ヲ含ム平面ヲ xy 平面ニトツタトスレバ,$\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$ ガ常ニ此ノ平面內ニアルカラ, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}$, **R** ハ凡テ常ニ此

ノ平面内ニアルコトニナル. 此ノxy-平面ヲ特ニ此ノ場合ノ不變面ト稱スル.

質量中心ヲ原點ニトルト, $\mathbf{R}=0$ デアルカラ, (62.8) カラ

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2=0 \qquad (62.16)$$

ヲ得ル. 随テ (62.15) ハ

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\left[m_1\mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right]+\left[m_2\mathbf{r}_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right]\\&=\left[m_1\mathbf{r}_1\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}-\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right)\right]\\&=\left[m_1\mathbf{r}_1\frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt}\right]\end{aligned}$$

トナル. 然ルニ

$$m_2\mathbf{r}_1-m_2\mathbf{r}_2=m_2\mathbf{r}_{21}$$

デアルカラ,之レヲ (62.16) ニ加ヘテ

$$(m_1+m_2)\mathbf{r}_1=m_2\mathbf{r}_{21} \qquad (62.17)$$

ヲ得.上式 $\mathbf{A}$ ハ

$$\mathbf{A}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\mathbf{r}_{21}\frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt}\right]=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\mathbf{r}_{12}\frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt}\right] \qquad (62.18)$$

トナル. $\left[\mathbf{r}_{21}\frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt}\right]$ ハ 2 ヲ中心トシテ1ガ畫ク面積速度ニ比例シ, $\left[\mathbf{r}_{12}\frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt}\right]$ ハ 1 ヲ中心トシテ 2 ガ畫ク面積速度ニ比例シテキルモノデアル. 故ニ此式ハ之等ノ面積速度ガ一定デアルコトヲ示シテキルノデ

アル. 之レハ Kepler ノ第一法則ト一致シテキル.

(62.6) ノ $\mathbf{r}_1$ ヲ (62.17) ノ $\mathbf{r}_1$ デ置キ換ヘテ

$$\left.\begin{aligned}m_1\frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2}&=\frac{m_1+m_2}{m_2}\mathbf{F}_{21}\\ m_2\frac{d^2\mathbf{r}_{12}}{dt^2}&=\frac{m_1+m_2}{m_1}\mathbf{F}_{12}\end{aligned}\right\} \qquad (62.19)$$

ヲ得ル. 故ニ 2 ニ對シテノ 1 ノ相對運動ハ,2 ガ固定シテ 1 ニ $\frac{m_1+m_2}{m_2}\mathbf{F}_{21}$ ノ力ガ働イテキルト考ヘタトキノ運動ト同ジク,1 ニ對スル 2 ノ相對運動ハ 1 ガ静止シテ 2 ガ其レカラ $\frac{m_1+m_2}{m_1}\mathbf{F}_{12}$ ノ力ヲ受ケテキルト假想シタトキノ運動ニ等シイコトガ分カル.

$\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}$ トスレバ,上式ノ第二式ハ

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\mathbf{F}_{12}=-\kappa\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

トナルカラ

$$\kappa(m_1+m_2)=\mathrm{M} \qquad (62.20)$$

ト置クト,之レハ

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{\mathrm{M}}{r^3}\mathbf{r}$$

トナリ,随テ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mathrm{M}}{r^2}\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\mathrm{M}}{r^2}\frac{y}{r} \qquad (62.21)$$

ヲ得ル.

(62.18) ニ依テ

$$\mathbf{A}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$$

デアルカラ

$$A=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

トナル. 故ニ

$$\frac{A(m_1+m_2)}{m_1m_2}=h \tag{62.22}$$

トスルト

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=h \tag{62.23}$$

ヲ得ル. h ハ明カニ常數デアツテ 1 ニ對スル 2 ノ書ク面積速度ノ 2 倍ノ大サヲ表ハスモノデアル.

(62.23) ト (62.21) トカラ

$$h\frac{d^2x}{dt^2}=-M\left(\frac{x^2}{r^3}\frac{dy}{dt}-\frac{xy}{r^3}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=-M\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}-\frac{y^2}{r^3}\frac{dy}{dt}-\frac{xy}{r^3}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=-M\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}-\frac{y}{r^2}\frac{dr}{dt}\right)$$

$$=-M\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right),$$

$$h\frac{d^2y}{dt^2}=+M\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right)$$

ヲ得ル. 之等ヲ積分スルト

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{M}{h}\frac{y}{r}+a',\quad \frac{dy}{dt}=\frac{M}{h}\frac{x}{r}+b'$$

ヲ得,之等ヲ (62.23) ニ入レテ

$$h=\frac{M}{h}r-a'y+b'x$$

ヲ得ル. a', b' ハ積分常數デアル.

直角坐標 x, y ノ代リニ極坐標 r, θ ヲ用キテ

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

トスルト,上式ハ

$$h=r(M/h-a'\sin\theta+b'\cos\theta)$$

トナル.

$$a'=-C\sin\alpha,\quad b'=C\cos\alpha$$

トスルト,之レハ

$$r=\frac{1}{M/h^2+C/h.\cos(\theta-\alpha)} \tag{62.24}$$

ト書クコトガ出來ル. $\theta-\alpha=0$ ナラバ,之レハ

$$r=h^2/(M+Ch)$$

トナリ, $\theta-\alpha=\pi$ ナラバ

$$r=h^2/(M-Ch)$$

トナルカラ

$$h^2/(M+Ch)=a(1+e)$$

$$h^2/(M-Ch)=a(1-e)$$

トスレバ

$$M/h^2=1/a(1-e^2),\ C/h=e/a(1-e^2)$$

ヲ得ル．隨テ (62.24) ハ

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\alpha)} \tag{62.25}$$

トナル．之レハ長徑ガ $2a$, 離心率 e, 直徑 $2a(1-e^2)$ デアル圓錐曲線ノ焦點ヲ原點トシタトキノ方程式デアル．若シ $e<1$ ナラバ,之レハ楕圓デアリ, $e>1$ ナラバ双曲線, $e=1$ ナラバ拋物線デアル．故ニ 2 ハ 1 ヲ焦點トシタ圓錐曲線ヲ畫クコトガ分カル．之レト同様ニ, 1 ハ又 2 ヲ焦點トスル圓錐曲線ヲ畫クノデアル．之レハ Kepler ノ第二法則ニ相當スル．

質點ノ運動方程式ガ (46.3), (46,4) ニ依テ

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-f(r)\mathbf{r}$$

デ與ヘラレルトキニハ,其ノ質點ガ畫ク楕圓軌道ノ半長徑 a ト週期 τ トハ (46.9) ノ示ス様ニ

$$f(r)=\frac{4\pi^2a^3m_2}{r^3\tau^2}$$

ノ關係ガアル．今ノ場合ニハ,質點 2 ノ 1 ニ對スル相對運動ハ

$$m_2\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{\kappa(m_1+m_2)m_2}{r^3}\mathbf{r}$$

デ與ヘラレルノデアルカラ,上式ハ

$$\frac{\kappa(m_1+m_2)m_2}{r^3}=\frac{4\pi^2a^3m_2}{r^3\tau^2}$$

トナル．故ニ

$$\frac{a^3}{\tau^2}=\frac{\kappa(m_1+m_2)}{4\pi^2} \tag{62.26}$$

ヲ得ル．此ノ右邊ハ運動セル質點 2 ノ質量 m_2 ヲ含ンデキルカラ,質點ノ質量ガ變レバ其レニ從ツテ變ツテ來ル量デアル．故ニ Kepler ノ第三法則ハ一般ニハ成立シナイノデアル．

質點 1 ヲ太陽トシ,質點 2 ヲ一ツノ遊星トショウ．其ノ遊星ノ軌道ノ半長徑ノ三乘ト週期ノ自乘トノ比ヲ $(a^3/\tau^2)_2$ トショウ．太陽ノ質量ヲ m_1,此ノ遊星ノ質量ヲ m_2 トスレバ, $(a^3/\tau^2)_2$ ハ (62.26) デ表ハサレル．質量 m_3 ノ他ノ遊星ノ相當量ヲ $(a^3/\tau^2)_3$ トスレバ

$$\left(\frac{a^3}{\tau^2}\right)_3=\frac{\kappa(m_1+m_3)}{4\pi^2}$$

デアル．故ニ

$$\left(\frac{a^3}{\tau^2}\right)_2\Big/\left(\frac{a^3}{\tau^2}\right)_3=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_3} \tag{62.27}$$

ヲ得ル． m_2, m_3 ヲ m_1 ニ比シテ無視シ得タナラバ,上式ノ右邊ハ 1 ト見テ差支ガナイ．此ノ様ナ場合ニハ Kepler ノ第三法則ガ成立スルノデアル．

次表ハ吾ガ太陽系ノ各遊星ニ對スル諸星ヲ地球ヲ標準トシテ表ハシタモノデアルガ,之レニ依テ

(62. 27) ノ正シイコトガ分ルデアラウ. 表中ノ a ハ太陽カラノ平均距離ヲ表ハシテキル.[1] 此ノ表ノ示ス樣ニ $a^3-\tau^2$ ノ a^3 若シクハ τ^2 ニ對スル比ハ質量ノ最モ大キイ木星ガ最大デアル.

	水星	金星	地球	火星
m	0.476	0.82	1	0.1073
a	0.387098	0.72333	1	1.52369
τ	0.24084	0.61518	1	1.88082
a^3	0.0580046	0.378451	1	3.53746
τ^2	0.0580049	0.378453	1	3.53747
$a^3-\tau^2$	-0.0000003	-0.000002	0	-0.00001

	木星	土星	天王星	海王星
m	317	94.8	14.6	17
a	5.2028	9.5388	19.1824	30.037
τ	11.8618	29.4560	84.0123	164.616
a^3	140.832	867.914	7058.44	27100.0
τ^2	140.701	867.658	7058.07	27098.4
$a^3-\tau^2$	$+0.131$	$+0.256$	$+0.37$	$+1.6$

三ツノ質點ガ互ニ (62. 5) ノ力ヲ働カセテキルトキノ運動ヲ研究スル問題ヲ**三體問題**ト稱シテキル. 此ノ問題ハ多クノ學者ニ依テ研究セラレテキ

(1) Maxwell, Matter and Motion, p. 112, 1920, ニ據ル

ルガ,未ダ完全ナ解決ニ到達シテキナイ.

63. 複振子

任意ノ一點 O カラ l_1 ノ長サノ絲デ質量 m_1 ノ質點ヲ吊シ,ソレカラ l_2 ノ長サノ絲デ質量 m_2 ノ質點ヲ吊シテアルトシヨウ. 此ノ樣ナ裝置ヲ複振子ト稱スル. 第44圖ニ示ス樣ニ,Ox ヲ鉛直線トシ, m_1, m_2 ニハ此ノ方向ニ重力ガ働イテキルトシヨウ. m_1, m_2 ノ運動ガ xy-平面内ニ限ラレテキルトスレバ, m_1, m_2 ノ位置ハ, O カラノ距離 l_1, l_2 ガ不變デアルカラ, Ox 線ト絲ガ爲ス角 ψ_1, ψ_2 ノミデ定マル. 故ニ ψ_1, ψ_2 ヲ m_1, m_2 ヨリナル此ノ質點系ノ一般坐標トシテヨイ.

第 44 圖

圖カラ明カナ樣ニ

$$x_1=l_1\cos\psi_1,\quad x_2=l_1\cos\psi_1+l_2\cos\psi_2,$$
$$y_1=l_1\sin\psi_1,\quad y_2=l_1\sin\psi_1+l_2\sin\psi_2$$

デアル. ψ_1 及ビ ψ_2 ガ極メテ小サナモノダトスレバ

$$x_1=l_1,\qquad x_2=l_1+l_2,$$
$$y_1=l_1\psi_1,\quad y_2=l_1\psi_1+l_2\psi_2$$

トシテモヨイ. 本節デハ此ノ樣ニシテヨイ場合ニ就テ考ヘルコトニスル. ソウスレバ

$$\frac{dx_1}{dt}=0, \qquad \frac{dx_2}{dt}=0,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=l_1\frac{d\psi_1}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt}=l_1\frac{d\psi_1}{dt}+l_2\frac{d\psi_2}{dt}$$

トナルカラ,此ノ質點系ノ運動-energy T ハ

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}m_1\left(l_1\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(l_1\frac{d\psi_1}{dt}+l_2\frac{d\psi_2}{dt}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\psi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 \qquad (63.1)$$

トナル.

此ノ系ノ位置-energy V ハ

$$\mathrm{V}=m_1gl_1(1-\cos\psi_1)+m_2g\{l_1(1-\cos\psi_1)+l_2(1-\cos\psi_2)\}$$

トスルコトガ出來ル. 之レハ

$$\cos\psi=1-\frac{1}{2!}\psi^2+\frac{1}{4!}\psi^4-\frac{1}{6!}\psi^6+\cdots$$

ノ級數デ ψ ガ極メテ小サイコトカラ,其ノ第二項以下ヲ無視シテ

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\psi_1^2+\frac{1}{2}m_2gl_2\psi_2^2 \qquad (63.2)$$

ト書クコトガ出來ル.

(63.1), (63.2) カラ Lagrange 函數トシテ

$$\mathrm{L}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\psi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\psi_1^2-\frac{1}{2}m_2gl_2\psi_2^2 \qquad (63.3)$$

ヲ得ル. 隨テ

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\dot{\psi}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{\psi}_1+m_2l_1l_2\dot{\psi}_2, \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\psi_1}=-(m_1+m_2)gl_1\psi_1,$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\dot{\psi}_2}=m_2l_2^2\dot{\psi}_2+m_2l_1l_2\dot{\psi}_1, \qquad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\psi_2}=-m_2gl_2\psi_2$$

トナリ, Lagrange ノ運動方程式 (55.15) ハ

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\psi}_1+m_2l_1l_2\ddot{\psi}_2+(m_1+m_2)gl_1\psi_1=0 \qquad (63.4)$$

$$m_2l_1l_2\ddot{\psi}_1+m_2l_2^2\ddot{\psi}_2+m_2gl_2\psi_2=0 \qquad (63.5)$$

トナル. 此ノ兩式ハ ψ_1, ψ_2 ニ就テノ**同時微分方程式**ト呼バレテキルモノデアル. 之等ハ線型デアルカラ,之ヲ解クタメニ

$$\psi_1=\mathrm{A}_1e^{int}, \ \psi_2=\mathrm{A}_2e^{int}, \ i=\sqrt{-1} \qquad (63.6)$$

ト假定シテ見ル. A_1, A_2 及ビ n ハ未知ノ常數デアル. 之等ノ値ヲ (63.4), (63.5) ニ代入シテ

$$\mathrm{A}_1(m_1+m_2)l_1(g-l_1n^2)-\mathrm{A}_2m_2l_1l_2n^2=0, \qquad (63.7)$$

$$-\mathrm{A}_1m_2l_1l_2n^2+\mathrm{A}_2m_2l_2(g-l_2n^2)=0 \qquad (63.8)$$

ヲ得ル. 之等カラ A_1, A_2 ヲ消去シテ

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)(g-l_1n^2) & -m_2l_2n^2 \\ -l_1n^2 & g-l_2n^2 \end{vmatrix}=0$$

ヲ得ル. 此ノ行列式ヲ解クト

$$n^4m_1l_1l_2-n^2g(m_1+m_2)(l_1+l_2)+(m_1+m_2)g^2=0 \qquad (63.9)$$

トナル. 之レハ n ヲ與ヘル方程式デアリ, n ハ振動數ニ比例シテキルモノデアルカラ此ノ式又ハ此ノ

行列式ヲ**振動數ノ方程式**ト稱シテヰル.

(63.9) ヲ解イテ

$$n^2=g\frac{(m_1+m_2)(l_1+l_2)}{2m_1l_1l_2}\pm g\frac{\sqrt{m_1+m_2}}{2m_1l_1l_2}\sqrt{m_1(l_1-l_2)^2+m_2(l_1+l_2)^2} \tag{63.10}$$

ヲ得ル. 隨テ n ノ値トシテハ n_1, n_2 $-n_1$, $-n_2$ ヲ得, (63.6) ハ

$$\psi_1=A_1^{(1)}e^{in_1t}+A_1^{(-1)}e^{-in_1t}+A_1^{(2)}e^{in_2t}+A_1^{(-2)}e^{-in_2t},$$
$$\psi_2=A_2^{(1)}e^{in_1t}+A_2^{(-1)}e^{-in_1t}+A_2^{(2)}e^{in_2t}+A_2^{(-2)}e^{-in_2t},$$

ノ一般解ヲ與ヘル. 此ノ $A_1^{(1)}$, $A_1^{(-1)}$ 等ハ積分常數デアル. 之等ノ 8 個ノ積分常數ノ代リニ

$$\left.\begin{aligned}&A_1^{(1)}+A_1^{(-1)}=B_1^{(1)}\cos\epsilon_1,\ A_1^{(2)}+A_1^{(-2)}=B_1^{(2)}\cos\epsilon_2,\\&i(A^{(-1)}-A_1^{(1)})=B_1^{(1)}\sin\epsilon_1,\ i(A_1^{(-2)}-A_1^{(2)})=B_1^{(2)}\sin\epsilon_2,\\&A_2^{(1)}+A_2^{(-1)}=B_2^{(1)}\cos\epsilon_1',\ A_2^{(2)}+A_2^{(-2)}=B_2^{(2)}\cos\epsilon_2',\\&i(A_2^{(-1)}-A_2^{(1)})=B_2^{(1)}\sin\epsilon_1',\ i(A_2^{(-2)}-A_2^{(2)})=B_2^{(2)}\sin\epsilon_2'\end{aligned}\right\} \tag{63.11}$$

デ決メラレル $B_1^{(1)}$, ϵ_1 等ノ 8 箇ノ常數ヲ用ヰルト

$$\left.\begin{aligned}&\psi_1=B_1^{(1)}\cos(n_1t+\epsilon_1)+B_1^{(2)}\cos(n_2t+\epsilon_2),\\&\psi_2=B_2^{(2)}\cos(n_1t+\epsilon_1')+B_2^{(2)}\cos(n_2t+\epsilon_2')\end{aligned}\right\} \tag{63.12}$$

ヲ得ル. $B_1^{(1)}$, ϵ_1 等ノ常數ハ始メノ條件カラ決マツテ來ルモノデアル.

(63.10) ノ根號内ノモノハ決シテ零デハナイカラ, n_1 ト n_2 トハ決シテ等シクハナイ. $l_1=l_2=l$ デアリ, 且ツ m_2 ガ m_1 ニ比シテ極メテ小ナラバ, (63.10) ハ

$$n^2=\frac{g}{l}\pm\frac{g}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

トシテヨイ. 隨テ此ノ場合ニハ

$$n_1^2=\frac{g}{l}\left(1+\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right),\quad n_2^2=\frac{g}{l}\left(1-\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)$$

トナル.

$$g/l=n_0^2,\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}=\delta \tag{63.13}$$

トスルト,上式ハ

$$n_1=n_0(1+\delta),\quad n_2=n_0(1-\delta)$$

トシテヨイ. (63.14)

(63.7) ニ於テ $l_1=l_2=l$, $n=n_1$ トシ, m_2 ヲ m_1 ニ比シテ無視スルト

$$A_1^{(1)}m_1(g-ln_1^2)-A_2^{(1)}m_2ln_1^2=0,$$

$$\therefore\quad \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{m_1}{m_2}\frac{g-ln_1^2}{ln_1^2}=\frac{1}{4\delta^2}\left(\frac{n_0^2}{n_1^2}-1\right)$$

ヲ得ル. (63.14) ニ依テ

$$\frac{n_0^2}{n_1^2}=\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^2=(1+\delta)^{-2}=1-2\delta$$

デアルカラ,上式ハ

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=-\frac{1}{2\delta}$$

トナル. 同様ニ $n=-n_1$ トシテ

$$\frac{A_2^{(-1)}}{A_1^{(-1)}}=-\frac{1}{2\delta}$$

ヲ得ル. 即チ

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{A_2^{(-1)}}{A_1^{(-1)}}=-\frac{1}{2\delta} \tag{63.15}$$

ノ關係ガアル.

(63.7) ニ於テ $l_1=l_2=l$, $n=\pm n_2$ トシ, m_2 ヲ m_1 ニ比シテ無視シ, (63.14) ヲ用キテ

$$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{A_2^{(-2)}}{A_1^{(-2)}}=+\frac{1}{2\delta} \tag{63.16}$$

ヲ得ル.[1]

(63.11) カラ

$$2A_1^{(1)}=B_1^{(1)}(\cos\epsilon_1+i\sin\epsilon_1)=B_1^{(1)}e^{i\epsilon_1},$$

$$2A_1^{(-1)}=B_1^{(1)}(\cos\epsilon_1-i\sin\epsilon_1)=B_1^{(1)}e^{-i\epsilon_1},$$

$$2A_2^{(1)}=B_2^{(1)}(\cos\epsilon_1'+i\sin\epsilon_1')=B_2^{(1)}e^{i\epsilon_1'},$$

$$2A_2^{(-1)}=B_2^{(1)}(\cos\epsilon_1'-i\sin\epsilon_1')=B_2^{(1)}e^{-i\epsilon_1'}$$

$$\therefore\quad \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}}e^{i(\epsilon_1'-\epsilon_1)},\quad \frac{A_2^{(-1)}}{A_1^{(-1)}}=\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}}e^{i(\epsilon_1-\epsilon_1')},$$

ヲ得ル. 故ニ (63.15) ニ依テ

$$\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}}e^{i(\epsilon_1'-\epsilon_1)}=\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}}e^{i(\epsilon_1-\epsilon_1')}=-\frac{1}{2\delta},$$

隨テ

[1] (63.7) ノ代リニ (63.8) ヲ用キテモ (63.15), (63.16) ノ結果ヲ得ル.

$$\frac{B_2^{(1)}}{B_1^{(1)}}=-\frac{1}{2\delta},\quad \epsilon_1=\epsilon_1'$$

ヲ得ル. 同様ニ (63.11) ノ殘リノ式ト (63.16) トカラ

$$\frac{B_2^{(2)}}{B_1^{(2)}}=+\frac{1}{2\delta},\quad \epsilon_2=\epsilon_2'$$

ヲ得ル. 隨テ (63.12) ハ

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=B_1^{(1)}\cos(n_1t+\epsilon_1)+B_1^{(2)}\cos(n_2t+\epsilon_2),\\ \psi_2&=-\frac{1}{2\delta}B_1^{(1)}\cos(n_1t+\epsilon_1)+\frac{1}{2\delta}B_1^{(2)}\cos(n_2t+\epsilon_2)\end{aligned}\right\} \tag{63.17}$$

トナル.

始メニ m_1 ヲ持ツテ,絲ヲ張ツタマヽデ,其レガ Ox 線ト小サイ角 ψ_{10} ヲ爲スマデ上ゲ, m_2 ハ自然ニ垂レタマヽ靜カニ手ヲ離シタ場合ヲ考ヘテ見ヨウ. 此ノ時ヲ $t=0$ トスルト,始メノ條件ハ

$$t=0 \text{ ノトキ}, \quad \psi_1=\psi_{10},\quad \psi_2=0,\quad \dot{\psi}_1=\dot{\psi}_2=0$$

トナル. (63.17) ニ此ノ條件ヲ入レルト

$$\psi_{10}=B_1^{(1)}\cos\epsilon_1+B_1^{(2)}\cos\epsilon_2,$$

$$0=-\frac{1}{2\delta}B_1^{(1)}\cos\epsilon_1+\frac{1}{2\delta}B_1^{(2)}\cos\epsilon_2,$$

$$0=-n_1B_1^{(1)}\sin\epsilon_1-n_2B_1^{(2)}\sin\epsilon_2,$$

$$0=\frac{1}{2\delta}n_1B_1^{(1)}\sin\epsilon_1-\frac{1}{2\delta}n_2B_1^{(2)}\sin\epsilon_2,$$

$$\therefore\quad B_1^{(1)}=B_1^{(2)}=\frac{1}{2}\psi_{10},\quad \epsilon_1=\epsilon_2=0 \tag{63.18}$$

ヲ得ル. 故ニ (63.17) ハ

$$\psi_1=\frac{1}{2}\psi_{10}(\cos n_1t+\cos n_2t)=\psi_{10}\cos\frac{n_1+n_2}{2}t\cos\frac{n_1-n_2}{2}t,$$

$$\psi_2=\frac{1}{4\delta}\psi_{10}(-\cos n_1t+\cos n_2t)=\frac{1}{2\delta}\psi_{10}\sin\frac{n_1+n_2}{2}t\sin\frac{n_1-n_2}{2}t,$$

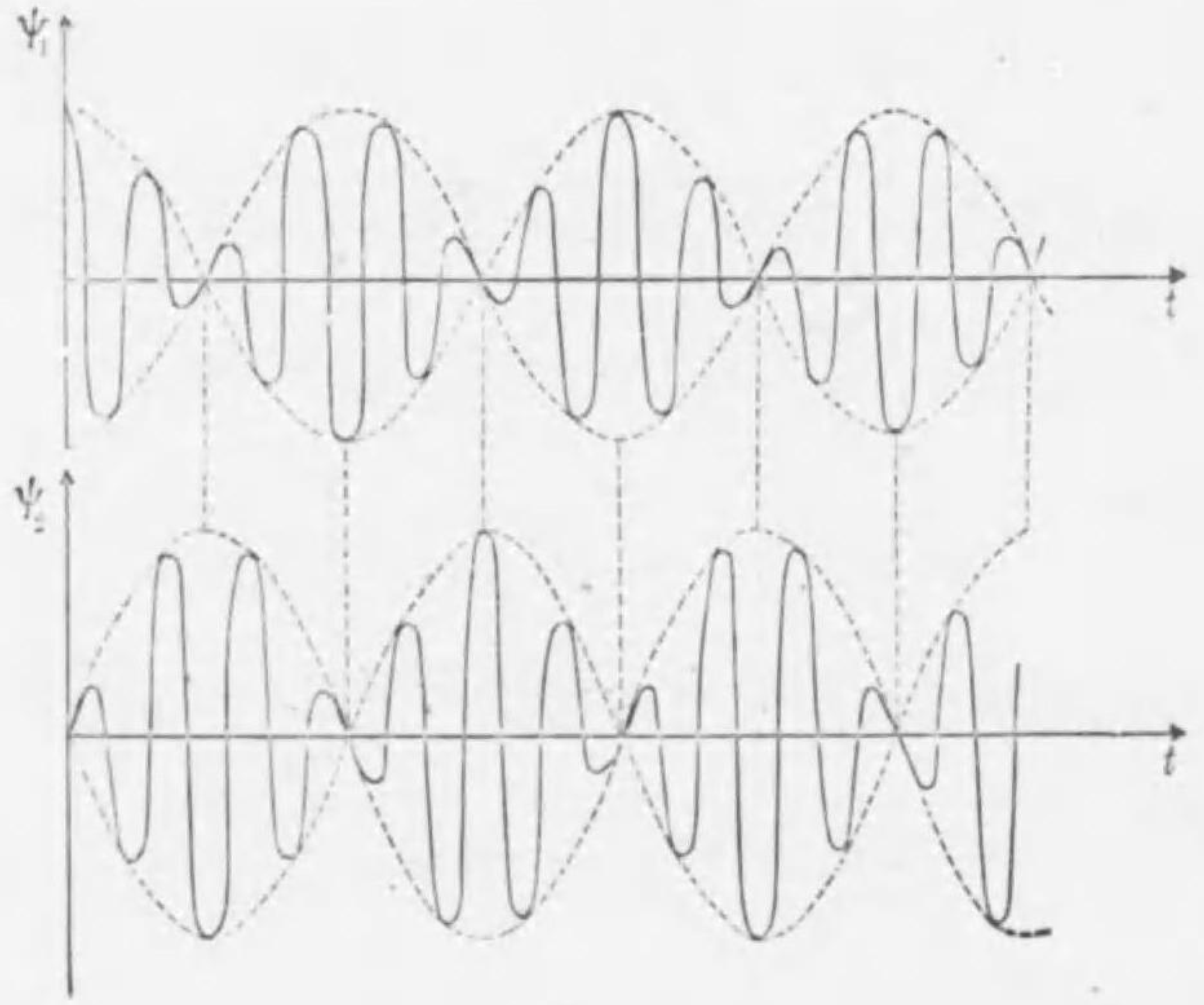
トナリ, (63.14) ニ依テ

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=\psi_{10}\cos n_0t\cos n_0\delta t,\\ \psi_2&=\frac{1}{2\delta}\psi_{10}\sin n_0t\sin n_0\delta t\end{aligned}\right\}\qquad(63.19)$$

トナル.

δ ハ極メテ小サイモノデアルカラ, $\cos n_0\delta t$ ノ振動週期ハ $\cos n_0t$ ノソレヨリモ大デアル. 故ニ (63.19) ニ示ス ψ_1, ψ_2 ハ週期ガ $\tau_0=2\pi/n_0\delta$ ノ振動ヲシ,其ノ振

第 45 圖



幅ガ又 $\tau=2\pi/n_0$ ノ週期デ振動的ニ變化スルモノト見ルコトガ出來ル. (63.19) ノ ψ_2 ハ (41.7) ノ ψ ト全ク同樣デアル. 第45圖ハ横軸上ニ t ヲトリ,縱軸上ニ ψ_1 及ビ ψ_2 ヲ取ツテ其ノ變化ノ模樣ヲ略示シタモノデアル.

64. 弦デ連結セラレタ質點系ノ振動

同ジ質量 m ノ n 箇ノ質點ガ,等距離 a ヲ隔テヽ一ツノ弦デ連結セラレ,其ノ弦ガ引キ張ラレタ狀態デ,其ノ兩端ガ固定セラレテキルトスル. 弦ノ兩端カラ最近ノ質點ニ至ル距離モ亦 a デアルトシ,弦ノ全長ハ l デアルトスル. 弦ハ伸縮性ヲ持ツテキルトシ,ドレカノ質點ヲ少シク變位セシメタ後ニ放スト,弦ノ彈性ニ依テ,質點ハ元ノ位置ニ歸ラウトシテ此ノ質點系ガ運動ヲスル. 此ノ運動ニ就テ考ヘテ見ヨウ.

弦ノ一端ヲ原點トシ,引キ張ラレタ弦ノ長サニ沿フテ x 軸ヲトリ,其レト垂直ニ y 軸及ビ z 軸ヲトル. 弦上ノ質點ノ x 坐標ヲ $x_1, x_2, \cdots, x_\mu, \cdots, x_n$ トスル. 任意ノ時刻 t ニ於ケル任意ノ質點 x_μ ノ變位ノ分値ヲ ξ_μ, η_μ, ζ_μ トシ,隨テ其ノ速度分値ヲ $\dot{\xi}_\mu$, $\dot{\eta}_\mu$, $\dot{\zeta}_\mu$ トシヨウ.

弦ノ質量ハ質點ノ質量ニ比シテ無視シ得ルモノトシテ置クト,此ノ時刻ニ於ケル此ノ系ノ運動ノ energy T ハ

$$2T=m\sum_{\mu=1}^{n}(\dot{\xi}_\mu^2+\dot{\eta}_\mu^2+\dot{\zeta}_\mu^2) \tag{64.1}$$

デ與ヘラレル.

此ノ時ノ x_μ ト $x_{\mu+1}$ トノ間ノ弦ノ長サハ幾分伸ビテ a' ニナツテヰル.

$$a'^2=(a+\xi_{\mu+1}-\xi_\mu)^2+(\eta_{\mu+1}-\eta_\mu)^2+(\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu)^2$$

デアルカラ

$$a'=(a+\xi_{\mu+1}-\xi_\mu)\left\{1+\frac{(\eta_{\mu+1}-\eta_\mu)^2}{(a+\xi_{\mu+1}-\xi_\mu)^2}+\frac{(\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu)^2}{(a+\xi_{\mu+1}-\xi_\mu)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

デアル. 質點ノ平衡狀態カラノ變位ガ極メテ小サク,隨テ二質點間ノ相對變位ノ大サガ,其ノ相互距離ニ比シテ極メテ小サイト考ヘルト,上式ハ

$$a'=a\left(1+\frac{\xi_{\mu+1}-\xi_\mu}{a}\right)\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{\mu+1}-\eta_\mu}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu}{a}\right)^2\right\} \tag{64.2}$$

トスルコトガ出ル.

此ノ質點系ノ平衡狀態カラノ變位ニ依テ生ジタ,時刻 t ニ於ケル,弦ノ單位ノ長サニ就テノ延長,即チ**延長率**ヲ Δx トスルト

$$a'=a(1+\Delta x) \tag{64.3}$$

デアル. 故ニ (64.2), (64.3) カラ

$$\Delta x=\frac{\xi_{\mu+1}-\xi_\mu}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{\mu+1}-\eta_\mu}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu}{a}\right)^2 \tag{64.4}$$

トシテ差支ガナイコトガ分カル.

質點ノ變位ニ依テ,弦ニハ(64.4)ガ示ス**歪**ヲ生ジタノデアル. 此ノ歪ニ依テ現ハレル**歪力**[1]ハ **Hooke ノ法則**[2]ニ從ツテ

$$P=E\Delta x \tag{64.5}$$

トシテヨイ. E ハ此ノ弦ノ Young 率ト稱スルモノデアル.

弦ヲ引キ張ツテヰル力,普通ニ弦ノ**張力**[3]ト呼バレテヰルモノヽ大サヲ S トシ,弦ノ切斷面積ヲ ω トスルト,歪力ノ大サ P ハ單位面積ニ就テノ力ノ大サヲ表ハシテヰルモノデアルカラ,弦ノ長サノ方向ニ働イテヰル力ノ大サハ

$$F=S+\omega E\Delta x$$

トナル. 故ニ弦ヲ此ノ狀態カラ尙ホ變位セシメヨウトスルニハ,此ノ大サノ力ニ反對シテ仕事ヲシナケレバナラヌ.

(1) 歪力ノ元ハ $[ML^{-1}T^{-2}]$ デアル.

(2) Robert Hooke (1635—1703) 英國ノ實驗物理學者. 此ノ法則ハ一般ニ「歪ハ歪力ニ正比例スル」トシテ知ラレテヰル. 1660 年ニ發見セラレタモノデアル.

(3) 此ノ張力ノ元ハ $[MLT^{-2}]$ デアル.

弦ヲ變位セシメ, x_μ ト $x_{\mu+1}$ トノ間ノ長サヲ $ad(\Delta x)$ ダケ伸バスタメニ要スル仕事ハ

$$dW = F\,a\,d(\Delta x)$$

トナル. 故ニ a ノ長サヲ a' ノ長サニスルニ要スル仕事ハ

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\Delta x} F\,a\,d(\Delta x) \\ &= Sa\int_0^{\Delta x} d(\Delta x) + \omega\,E\,a\int_0^{\Delta x} \Delta x\,d(\Delta x) \\ &= Sa\Delta x + \frac{1}{2}\omega Ea(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

トナル. 之レニ (64.4) ノ Δx ノ値ヲ入レテ

$$\begin{aligned} W \cong S(\xi_{\mu+1}-\xi_\mu) + \frac{a}{2}\Big\{\omega E\Big(\frac{\xi_{\mu+1}-\xi_\mu}{a}\Big)^2 \\ + S\Big(\frac{\eta_{\mu+1}-\eta_\mu}{a}\Big)^2 + S\Big(\frac{\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu}{a}\Big)^2\Big\} \end{aligned} \tag{64.6}$$

ヲ得ル.

此ノ仕事ハ弦ガ變位シタトキニ有スル位置-energy ノ一部分ニナル. 之レヲ V_μ トシ,弦ノ有スル位置-energy ヲ V トスルト

$$V = \sum_{\mu=0}^{n} V_\mu$$

トナルコトハ明カデアラウ. 故ニ

$$\begin{aligned} V = \sum_{\mu=0}^{n} S(\xi_{\mu+1}-\xi_\mu) + \frac{a}{2}\sum_{\mu=0}^{n}\Big\{\omega E\Big(\frac{\xi_{\mu+1}-\xi_\mu}{a}\Big)^2 + \\ + S\Big(\frac{\eta_{\mu+1}-\eta_\mu}{a}\Big)^2 + S\Big(\frac{\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu}{a}\Big)^2\Big\} \end{aligned}$$

トナル.

弦ノ兩端ハ固定セラレテヰルノデアルカラ, $\xi_0=\eta_0=\zeta_0=0$, $\xi_{n+1}=\eta_{n+1}=\zeta_{n+1}=0$ デアル. 故ニ

$$\begin{aligned} 2V = a\sum_{\mu=1}^{n-1}\Big\{\omega E\Big(\frac{\xi_{\mu+1}-\xi_\mu}{a}\Big)^2 + S\Big(\frac{\eta_{\mu+1}-\eta_\mu}{a}\Big)^2 \\ + S\Big(\frac{\zeta_{\mu+1}-\zeta_\mu}{a}\Big)^2\Big\} \end{aligned} \tag{64.7}$$

ガ時刻 t ニ於ケル此ノ質點系ノ持ツ位置-energy ヲ與ヘルコトニナル.

(64.1), (64.7) ヲ用キテ此ノ質點系ニ對スル Lagrange ノ運動方程式ヲ作ルト

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi_\mu}{dt^2} &= \frac{\omega E}{a}(\xi_{\mu+1}-2\xi_\mu+\xi_{\mu-1}), \\ m\frac{d^2\eta_\mu}{dt^2} &= \frac{S}{a}(\eta_{\mu+1}-2\eta_\mu+\eta_{\mu-1}), \\ m\frac{d^2\zeta_\mu}{dt^2} &= \frac{S}{a}(\zeta_{\mu+1}-2\zeta_\mu+\zeta_{\mu-1}) \end{aligned}\right\} \tag{64.8}$$

ノ $3n$ 箇ノ微分方程式ヲ得ル. 之等ハ又

$$\frac{d^2q_\mu}{dt^2} = c^2(q_{\mu+1}-2q_\mu+q_{\mu-1}) \tag{64.9}$$

デ代表スルコトガ出來ル. 但シ $q_\mu=\xi_\mu$ トスレバ, $c^2=\omega E/ma$ デアリ, q_μ ヲ η_μ 若シクハ ζ_μ トスレバ, $c^2=S/ma$ トスベキデアル. 尙ホ $q_0=q_{n+1}=0$ トスベキ

デアル.

(64.8) ノ第一式ハ弦ノ長サノ方向ノ運動ヲ示シ,第二,第三式ハ弦ノ長サト垂直ナ方向ノ運動ヲ示スモノデアル. 前者ヲ**縦運動**,後者ヲ**横運動**ト稱スル. c^2 ノ値ガ此ノ二種ノ運動ニ對シテ異ツテキルコト,及ビ違ツタ方向ノ坐標ヲ含ンデキナイコトハ特ニ注意スベキデアル. 之等ハ此二種ノ運動ガ互ニ無關係デアルコトヲ示シテキル.

(64.9) ヲ解クタメニ

$$q_\mu = A_\mu e^{i\lambda t} \tag{64.10}$$

トシテミルト, (64.9) ハ

$$A_{\mu+1}+\left(\frac{\lambda^2}{c^2}-2\right)A_\mu+A_{\mu-1}=0 \tag{64.11}$$

トナル. 故ニ

$$\frac{\lambda^2}{c^2}-2=C \tag{64.12}$$

トシ, (64.11) ノ n 箇ノ方程式ヲ作ルト

$$\left.\begin{aligned} CA_1+A_2+0+\cdots\cdots\cdots\cdots&=0,\\ A_1+CA_2+A_3+0+\cdots\cdots&=0,\\ 0+A_2+CA_3+A_4+\cdots&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \end{aligned}\right\} \tag{64.13}$$

等ノ n 箇ノ方程式ヲ得ル. 之等カラ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ヲ消去シテ

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} C & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 1 & C & 1 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 1 & C & 1 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & & & \\ \cdots\cdots & & & & \end{vmatrix} = 0 \tag{64.14}$$

ヲ得ル. 此ノ行列式 D_n ハ其ノ行及ビ列ガ共ニ n 箇アルモノデアル

D_n ト同形デ,其ノ列及ビ行ガ $n-1$, $n-2$ ノモノヲ D_{n-1}, D_{n-2} トシ, (64.14) ヲ展開スルト

$$D_n = CD_{n-1} - D_{n-2} \tag{64.15}$$

ヲ得ル.

三角法ノ公式

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$$

ニ於テ, $a=n\theta$, $b=\theta$ トスレバ

$$\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta=2\sin n\theta\ \cos\theta$$

トナル. 之レヲ (64.15) ト比較シテ

$$C=2\cos\theta,\ D_n=c\sin(n+1)\theta \tag{64.16}$$

トスレバヨイコトガ分カル. 但シ c ハ未知ノ常數デ之レヲ定メルタメニ $n=1$ トシテ見ルト (64.16) ハ

$$D_1=c\sin 2\theta$$

トナリ, (64.13) ハ

$$D_1=C$$

トナルカラ,之等ノD_1ノ値ト(64.16)ノ第一式トカラ

$$c=1/\sin\theta$$

トスベキコトガ知ラレル. 隨テ(64.16)ノ第二式ハ

$$D_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{64.17}$$

トナル. 然ルニ(64.14)ニ依テ, $D_n=0$デアルベキデアルカラ

$$(n+1)\theta=\nu\pi,\quad (\nu=1,2,3,\cdots) \tag{64.18}$$

デアルコトヲ要スル.

(64.12), (64.16), (64.18)ニ依テ

$$\lambda^2=c^2(2+2\cos\theta)$$

$$=2c^2\left(1+\cos\frac{\nu\pi}{n+1}\right),\ (\nu=1,2,3,\cdots) \tag{46.19}$$

ヲ得ル. 即チ(64.19)ハ$\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \cdots, \pm\lambda_n$ノ$2n$箇ノ根ヲ與ヘル. 之等ノ中ノ任意ノ$\lambda_\nu$ニヨル$q_\mu$ヲ$q_{\mu\nu}$デ表ハスト, (64.10)ニ依テ

$$q_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}e^{i\lambda_\nu t},\ (\mu=1,2,3,\cdots,n)$$

ガ(64.9)ノ一ツノ特解ニナル.

(64.12)ノ$\lambda=\lambda_\nu$ヲ入レタモノヲC_νトスルト(64.13)ニ依テ

$$C_\nu A_{1\nu}+A_{2\nu}+0+\cdots\qquad=0,$$

$$A_{1\nu}+C_\nu A_{2\nu}+A_{3\nu}+0+\cdots=0,$$

$$0+A_{2\nu}+C_\nu A_{3\nu}+A_{4\nu}+\cdots=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等ノ關係ガ充サルベキデアル. 故ニ之等ノ關係式ニ依テ$A_{1\nu}:A_{2\nu}:\cdots:A_{n\nu}$ガ定マル. 同様ニ$-\lambda_\nu$ニ就テハ

$$q_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}e^{-i\lambda_\nu t},\ (\mu=1,2,3,\cdots,n)$$

ガ(64.9)ノ特解ヲ與ヘ,且ツ$B_{1\nu}:B_{2\nu}:\cdots:B_{n\nu}$モ(64.13)ニ依テ定マルコトガ分カル. 故ニ(64.9)ノ一般解ハ

$$q_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}(A_{\mu\nu}e^{i\lambda_\nu t}+B_{\mu\nu}e^{-i\lambda_\nu t}),\ (\mu=1,2,3,\cdots,n) \tag{64.20}$$

トナリ, μノ異ツタ$A_{\mu\nu}$及ビ$B_{\mu\nu}$ノ比ハ知ラレテヰルカラ, n箇ノ質點ノ始メノ條件ニ依テ,之等ノ積分常數ハ完全ニ決メラレル. (64.20)ハ又

$$q_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}C_{\mu\nu}\cos(\lambda_\nu t+\epsilon_\nu) \tag{64.21}$$

ト書クコトガ出來ル. 之レハ一般ニn箇ノ異ツタ振動數ヲ有スル振動ノ組合サレタ運動ヲスルモノデアルコトヲ示シテヰル.

65. 衝突

一直線上ヲ質量m_1ノ質點ガ動イテヰルトキ其ノ後方カラ質量m_2ノ質點ガ,之レヲ追ツカケテ行ツテ之レト衝突シタトキニハ,之等ノ質點ノ衝突ノ直

前ノ速サ v_1, v_2 衝突直後ノ速サ v_1', v_2' トノ間ニハ, (48.1) ニ示ス樣ニ

$$\frac{v_1'-v_1}{v_2-v_2'}=\frac{m_2}{m_1} \tag{65.1}$$

ナル關係ガアル.

質點ト見做スベキモノガ衝突シタ直前直後ノ速サノ間ニハ,上記 (65.1) ノ關係ノ他ニ

$$\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}=-e \tag{65.2}$$

ノ關係ガアッテ, e ハ物質ノ性質ニノミ關係スル常數デアルコトガ實驗ノ結果トシテ知ラレテヰル.[1] 此ノ e ヲ其ノ物質ノ**回復係數**ト稱シ,普通ニハ 0 ト 1 トノ間ニアル値ヲ有シテヰルモノデアル. $e=0$ ノトキハ其ノ物體ハ**非彈性體**デアルト言ッテヰル.

(65.1), (65.2) ノ兩式カラ容易ニ

$$\left.\begin{aligned} v_1'&=\frac{(m_1-em_2)v_1+m_2(1+e)v_2}{m_1+m_2},\\ v_2'&=\frac{m_1(1+e)v_1+(m_2-em_1)v_2}{m_1+m_2} \end{aligned}\right\} \tag{65.3}$$

ヲ得ル.

若シ $e=0$ ナラバ

$$v_1'=v_2'=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} \tag{65.4}$$

(1) 此ノ關係ハ John Wallis 及ビ Christopher Wren (1632—1723) ニ依テ見出サレタモノデアル. 1668.

トナリ,二質點ハ衝突後ハ離レルコトナシニ,共ニ同ジ速サデ同方向ニ進ンデ行クコトヲ示シテヰル.

二ツノ球ガ,其等ノ中心ヲ連結スル直線上ヲ動イテ衝突シタ場合ニ, $e\neq0$ デナイ樣ナ物質デアルトキ,其等ノ衝突直後ノ速サハ (65.3) デ與ヘラレル.

兩球ノ衝突直前ノ速度ヲ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ トシ,之等ノ方向ガ兩球ノ中心ヲ連結シタ直線ト一致シテヰナカッタトキニハ, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ヲ中心ノ連結線ノ方向ノ分速度 $\mathbf{v}_{1\parallel}, \mathbf{v}_{2\parallel}$ ト,之レト垂直ナ方向ニ於ケル分速度 $\mathbf{v}_{1\perp}, \mathbf{v}_{2\perp}$ トニ分ッタトスレバ, $\mathbf{v}_{1\parallel}$, $\mathbf{v}_{2\parallel}$ ニ對シテハ (65.3) ヲ適用シテ衝突直後ノ分速度 $\mathbf{v}_{1\parallel}'$, $\mathbf{v}_{2\parallel}'$ ヲ見出スコトガ出來ル. 即チ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_{1\parallel}'&=\frac{(m_1-em_2)\mathbf{v}_{1\parallel}+m_2(1+e)\mathbf{v}_{2\parallel}}{m_1+m_2},\\ \mathbf{v}_{2\parallel}'&=\frac{m_1(1+e)\mathbf{v}_{1\parallel}+(m_2-em_1)\mathbf{v}_{2\parallel}}{m_1+m_2} \end{aligned}\right\} \tag{65.5}$$

デアル.

兩球ノ中心ノ連結線ト垂直ナ方向ニ於ケル衝突直後ノ速度ノ大サハ,兩球ノ表面ノ性質ニ關係スル. 表面ガ少シノ摩擦モナイ滑カナモノナラバ,衝突直後ノ此ノ方面ノ速度ハ直前ノ其等トハ變ラナイ. 即チ

$$\mathbf{v}_{1\perp}'=\mathbf{v}_{1\perp},\quad \mathbf{v}_{2\perp}'=\mathbf{v}_{2\perp} \tag{65.6}$$

デ衝突直後ノ速度ガ與ヘラレル.

(65.5) ノ第一,第二式ニ, (65.6) ノ第一,第二式ヲソレゾレ加ヘテ

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(1+e)(\mathbf{v}_{2\parallel} - \mathbf{v}_{1\parallel}),\\ \mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - \frac{m_2}{m_1+m_1}(1+e)(\mathbf{v}_{2\parallel} - \mathbf{v}_{1\parallel}),\end{aligned}\right\} \qquad (65.7)$$

ヲ得ル. 随テ

$$\begin{aligned}&m_1(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1'+e\mathbf{v}_1)+m_2(\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_2'+e\mathbf{v}_2)\\ &\quad=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+e)(\mathbf{v}_{2\parallel}-\mathbf{v}_{1\parallel})\{(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2')+e(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)\}\end{aligned}$$

ヲ得ル. 然ルニ (65.2) ノ相當式

$$\mathbf{v}_{1\parallel}'-\mathbf{v}_{2\parallel}'=-e(\mathbf{v}_{1\parallel}-\mathbf{v}_{2\parallel}) \qquad (65.8)$$

ト (65.6) トニ依テ

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_2'+e(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)&=\mathbf{v}_{1\perp}'-\mathbf{v}_{2\perp}'+e(\mathbf{v}_{1\perp}-\mathbf{v}_{2\perp})\\ &=(1+e)(\mathbf{v}_{1\perp}-\mathbf{v}_{2\perp})\end{aligned}$$

トナル. $\mathbf{v}_{2\parallel}-\mathbf{v}_{1\parallel}$ ト $\mathbf{v}_{1\perp}-\mathbf{v}_{2\perp}$ トハ互ニ垂直ナ vector デアルカラ,其ノ scalar 積ハ零トナル. 故ニ

$$m_1(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1'+e\mathbf{v}_1)+m_2(\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_2'+e\mathbf{v}_2)=0$$

トナル. 之レハ

$$\begin{aligned}&(m_1\mathbf{v}_1'^2+m_2\mathbf{v}_2'^2)-e(m_1\mathbf{v}_1^2+m_2\mathbf{v}_2^2)\\ &\qquad-(1-e)(m_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2')=0\end{aligned} \qquad (65.9)$$

ト書ケル. 此ノ兩邊ニ

$$e(m_1\mathbf{v}_1'^2+m_2\mathbf{v}_2'^2)-(m_1\mathbf{v}_1^2+m_2\mathbf{v}_2^2)$$

ヲ加ヘルト

$$\begin{aligned}&(1+e)\{(m_1\mathbf{v}_1'^2+m_2\mathbf{v}_2'^2)-(m_1\mathbf{v}_1^2+m_2\mathbf{v}_2^2)\}\\ &\quad-(1-e)(m_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2')=e(m_1\mathbf{v}_1'^2+m_2\mathbf{v}_2'^2)\\ &\qquad\qquad-(m_1\mathbf{v}_1^2+m_2\mathbf{v}_2^2)\end{aligned}$$

トナリ,之レニ (65.9) ヲ加ヘ適當ニ移項シテ

$$\begin{aligned}&(1+e)\{(m_1\mathbf{v}_1'^2+m_2\mathbf{v}_2'^2)-(m_1\mathbf{v}_1^2+m_2\mathbf{v}_2^2)\}\\ &\quad=-(1-e)\{m_1(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1)^2+m_2(\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2)^2\}\end{aligned} \qquad (65.10)$$

ヲ得ル.

T, T′ ヲ此ノ兩球カラナッテヰル質點系ノ衝突前後ニ於ケル運動-energy トスレバ

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}(m_1\mathbf{v}_1^2+m_2\mathbf{v}_2^2),\ \mathrm{T}'=\frac{1}{2}(m_1\mathbf{v}_1'^2+m_2\mathbf{v}_2'^2)$$

デアルカラ, (65.10) ハ

$$\mathrm{T}'-\mathrm{T}=-\frac{1-e}{1+e}\,\frac{1}{2}\{m_1(\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1)^2+m_2(\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2)^2\} \qquad (65.11)$$

トナル. 普通ノ物體デハ $e>1$ デアルカラ,上式ハ衝突ニ依テ其ノ系ノ運動-energy ハ減少スルモノデアルコトヲ示シテヰル.

$\mathbf{v}_1'-\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_2$ ハ, m_1, m_2 ノ衝突後ノ速度ヲ得ンガタメニ,其等ノ衝突前ノ速度ニ加フベキ速度デアル. 故ニ (65.11) ハ「此ノ系ノ衝突ニヨル運動-energy ノ減少ハ衝突後ノ各球ノ速度ヲ得ンガタメニ各球

ニ加フベキ速度デ各球ガ運動シテヰルトキ,此ノ系ガ有スル運動-energy ノ $\frac{1-e}{1+e}$ 倍デアル」コトヲ示スモノデアルト言ツテヨイ.

$\mathbf{v}_{1\perp}=\mathbf{v}_{2\perp}=0$ ノトキハ**直衝突**ト稱シ, $\mathbf{v}_{1\perp}$, $\mathbf{v}_{2\perp}$ 或ハ其ノイヅレカガ存在シテヰルトキハ**斜衝突**ト稱スル.

第七章
相對性力學

66. Einstein ノ相對性理論

第46節及ビ第62節ニ於テ述ベタ樣ニ,地球ハ太陽ヲ其ノ焦點トシタ楕圓軌道上ヲ動イテヰルト見ルコトガ出來ル,此ノ地球ノ太陽ニ對スル相對速度ヲ決定スルコトハ容易デアルガ,第28節ニ於テ述ベタ樣ニ,地球ノ絕對速度ヲ決定スルコトハ不可能デアル.

十七世紀ノ後半ニ於テ,光ガ空間ヲ傳播スルニハ有限ノ時間ヲ要スルコトガ知ラレ,其ノ傳播現象ヲ說明スルタメニ媒質 **Aether** ノ存在ガ假定セラレタ. 1728年ニ **Bradley**[1] ガ發見シタ光行差ノ現象ハ,此ノ aether ガ絕對的靜止ノ標準系デアルト想像シ得ベキコトヲ示シタ. 故ニ地球ノ絕對速度ハ光學的方法ヲ用ヰテ,此ノ假想媒質 aether ニ對スル速度ヲ測定スルコトニ依テ決定セラレルデアラウトノ考ヘガ,1886年ニ **Michelson**[2] ノ實驗トナツテ現ハレタ

(1) James Bradley (1693—1762), 英國 Oxford 大學ノ天文學教授.

(2) Albert Abraham Michelson (1852—1931) 米國 Chicago 大學ノ物理學教授.

ガ,ソノ結果ハ豫想ニ反シテ地球ノ aether ニ對スル速度ハ殆ド零ニ等シト解スベキコトヲ示シタノデアッタ.

Aether ハ又電氣ノ媒質デアルト考ヘラレテキタカラ,電氣學的ノ方法ニ依テ,地球ノ絕對速度ヲ求メルコトガ試ミラレタガ,其等ノ凡テノ結果モ亦 aether ニ對スル地球ノ速度ガ殆ンド零ニ等シイコトヲ示シタノデアッタ.

之等ノ事實ヲ **Einstein**[1] ハ絕對的ノ運動ナルモノハ力學的ノ方法ノミナラズ,如何ナル物理學的方法ニ依テモ決定スルコトガ出來ナイコトヲ示スモノダト解シタ. ソウスレバ,「運動ハ絕對的ノモノデナク,相對的ノモノデアル」ト言フ Galilei ノ相對性法則ハ力學的現象ニ於テノミナラズ,凡テノ物理學的現象ニ於テモ眞實デアルト思惟スルコトガ出來ル故ニ Einstein ハ 1905 年ニ「物理的現象ニ關スル法則ハ任意ノ坐標系 S ニ關シテモ,其レニ對シテ等速度運動ヲシテキル坐標系 S′ ニ關シテモ,全ク同ジ形デ表ハサレルモノデアル」ト言フ法則ヲ發表シタ. 之レヲ **Einstein ノ相對性ノ法則**[2] ト言フ. 例ヘバ,所謂眞

(1) Albert Einstein (1879—). 獨逸 Berlin 大學敎授 Kaiser-Wilhelm Institut ノ所長.
(2) Postulate トモ稱サレテキル.

空中ニ於テ,一點カラ出タ光ノ影響ガ同時ニ到達スル點ノ軌跡ハ,光源ヲ中心トスル球面トナリ,其ノ球ノ半徑ハ時ト共ニ一定ノ大サデ增大スル. 即チ一ツノ點光源カラ出タ光ハ球面波トナツテ傳播スル. 此ノ光ノ傳播ノ現象ハ,S 系ニ於テ觀測シテモ,S′ 系ニ於テ觀測シテモ,全ク同樣デアリ,隨テ其ノ現象ヲ記載スルナラバ,S 系ニ於テハ其ノ波面ハ

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \tag{66.1}$$

デ表ハサレ,S′ 系ニ於テハ

$$x'^2+y'^2+z'^2=c'^2t'^2 \tag{66.2}$$

トナリ,之等ハ全ク同形トナルノデアル. 但シ光源ハ $t=t'=0$ ノトキ S 及ビ S′ 系ノ原點ニアッタトシ,S 及ビ S′ 系デ測ッタ光ノ傳播ノ速サヲソレゾレ c 及ビ c' デ表ハシタ.

尙ホ Einstein ハ「光ノ眞空中ニ於ケル傳播ノ速サ c ハ,光源ガ靜止シテキルトキモ,光源ガ等速度運動ヲシテキルトキモ,全ク同ジデアル」トノ假定ヲ置イタ. 此ノ假定ヲ**光速不變ノ法則**ト稱スル.

相對性ノ法則ト光速不變ノ法則トヲ基礎トシテ組ミ立テラレタ理論ヲ Einstein ノ**相對性理論**[1] ト

(1) 此ノ理論ハ Einstein ガ Annalen der Physik, 1905 ニ始メテ發表シタモノデアル. 等速度運動ノ場合ニ限ラレテキルカラ, 1916 年ニ發表セラレタ**一般相對性理論**ニ對シテ,**特殊相對性理論**ト呼バレテキル.

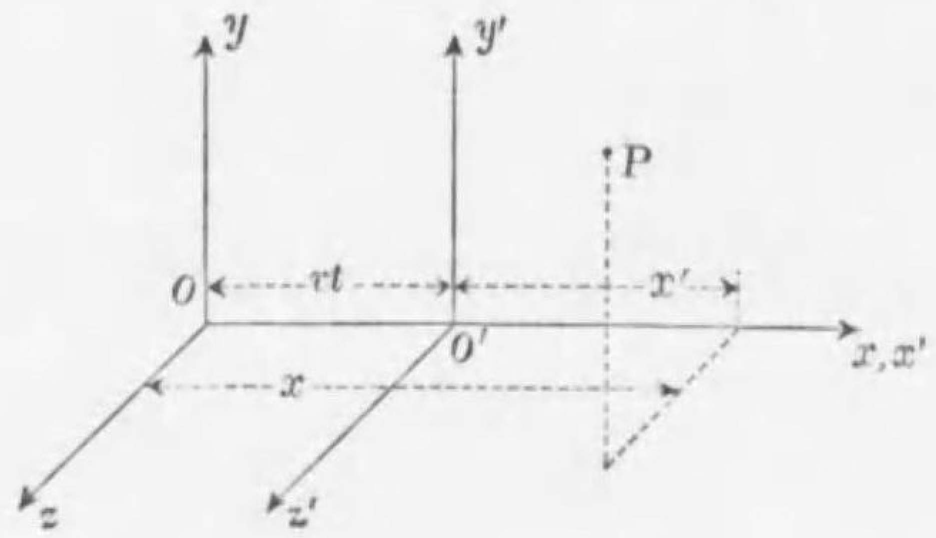
稱シテキル.

67. Lorentz-Einstein ノ變換式

相對性理論ニ於ケル基礎ノ二ツノ法則ヲ假定シテ,一ツノ坐標系 S ニ對シ,其ノ x 軸ノ正ノ方向ニ v ノ大サノ等速度運動ヲシテキル運動坐標系 S′ ガアルトシ, S 系ニ於ケル坐標 x, y, z, 時 t ト, S′ 系ニ於ケル坐標 x', y', z' 及ビ時 t' トノ間ニドノ様ナ關係ガ成立シテキルカヲ求メテ見ヨウ.

$t=t'=0$ ノトキ, S 系ト S′ 系トガ全ク合致シ, $t>0$, $t'>0$ ノトキ, S′ 系ノ原點 O′ ハ x 軸上ヲ動キ, y', z' 軸ハ常ニ y, z 軸ニ平行シテキルトスル. 今, Galilei ノ變

第 46 圖



換式 (28.2) ヲ一般化シテ

$$\left.\begin{array}{l} x'=k(x-vt),\ y'=ly,\ z'=lz, \\ t'=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t \end{array}\right\} \qquad (67.1)$$

ト假定シテ見ル. $k, l, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハコレカラ求メヨ

ウトスル未知ノ函數デアル.

$t=t'=0$ ノトキ,原點 O ニアル光源カラ光ガ出タトスレバ,其ノ光波面ハ S 系ニ於テハ (66.1), 即チ

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \qquad (67.2)$$

デ表ハサレル.

相對性ノ法則ニ依テ, S′ 系ニ於テハ此ノ光波面ハ (66.2),

$$x'^2+y'^2+z'^2=c'^2t'^2$$

デ表ハサレルガ,光速不變ノ法則ニ依テ

$$c=c' \qquad (67.3)$$

デアルカラ,之レハ

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \qquad (67.4)$$

トナル.

故ニ (67.1) ヲ (67.4) ニ代入スレバ

$$\begin{aligned} &(k^2-\alpha^2c^2)x^2+(l^2-\beta^2c^2)y^2+(l^2-\gamma^2c^2)z^2 \\ &=2c^2(\alpha\beta xy+\beta\gamma yz+\gamma\alpha zx) \\ &\quad+2(k^2vx+c^2\alpha\delta x+c^2\beta\delta y+c^2\gamma\delta z)t \\ &\quad+(-k^2v^2+c^2\delta^2)t^2 \end{aligned}$$

トナル. 之レハ光ノ傳播現象ヲ S 系ニ關シテ表ハシタモノニ外ナラヌカラ, (67.2) ト全ク同ジモノデアラネバナラヌ. 其ノタメニハ

$$\left.\begin{aligned}\beta=\gamma=0,\ k^2-\alpha^2c^2=l^2,\\ k^2v+c^2\alpha\delta=0,\\ -k^2v^2+c^2\delta^2=c^2l^2\end{aligned}\right\}\qquad(67.5)$$

デアルコトガ必要デアル.

$$\delta=\lambda k$$

トスルト,(67.5) ノ第三式ハ

$$\alpha=-kv/c^2\lambda$$

ヲ與ヘ,第二式ト第四式トハ

$$k^2(1-v^2/c^2\lambda^2)=l^2,$$
$$k^2(\lambda^2-v^2/c^2)=l^2$$

トナル. 故ニ此ノ兩式ガ同時ニ成立スルタメニハ

$$\lambda=1$$

トスベキコトガ分カル. 隨テ

$$\left.\begin{aligned}\alpha=-kv/c^2,\ \beta=\gamma=0,\\ \delta=k=\frac{l}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(67.6)$$

ヲ得ル.

S ト S′ トニ於テハ,共ニ同ジ長サノ單位ヲ用キテキルトスレバ, $l=1$ トスベキデアルカラ, (67.6) ニ於テ $l=1$ トシタモノヲ (67.1) ニ入レテ

$$\left.\begin{aligned}x'=k(x-vt),\ y'=y,\ z'=z,\\ t'=k\left(t-\frac{vx}{c^2}\right),\\ k=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(67.7)$$

ヲ得ル. 之レヲ **Lorentz[1]-Einstein ノ變換式**ト稱スル.

之等ヲ x, y, z, t ニ就テ解クト

$$\left.\begin{aligned}x=k(x'+vt'),\ y=y',\ z=z',\\ t=k\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(67.8)$$

ヲ得ル. 之レハ逆變換式デアル.

$(v/c)^2$ ガ 1 ニ比シテ無視シ得ル程小サナ場合ニハ $k=1$ トシテ差支ガナイ. 此ノ様ナ場合ニハ,(67.7) ハ

$$x'=x-vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t$$

トナル. 之レハ (28.2) ノ Galilei ノ變換式デアル.

任意ノ點 P ノ O 點ニ關スル位置 -vector ヲ $\mathbf{r}$ トシ,O′ 點ニ關スル位置 -vector ヲ $\mathbf{r}'$ トスレバ, (67.7) ノ第一式ハ

$$\mathbf{r}'\mathbf{i}=k\{(\mathbf{r}\mathbf{i})-vt\}\qquad(67.9)$$

ト書ケ,第二式ト第三式トヲ組合セタモノハ

$$\mathbf{r}'-(\mathbf{r}'\mathbf{i})\mathbf{i}=\mathbf{r}-(\mathbf{r}\mathbf{i})\mathbf{i}\qquad(67.10)$$

ト書ケル. $\mathbf{i}$ ハ x ノ正ノ方向ノ單位 vector デアッテ今ハ S′ 系ノ運動ノ速度 $\mathbf{v}$ ヲ表ハス單位 vector デモアル. (67.9) ト (67.10) トカラ

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-(\mathbf{r}\mathbf{i})\mathbf{i}+k\{(\mathbf{r}\mathbf{i})-vt\}\mathbf{i}$$

(1) Hendrik Antoon Lorentz (1853—1928) オランダ Leiden ノ數理物理學教授

$$= \mathbf{r}+(k-1)(\mathbf{ri})\mathbf{i}-k\mathbf{v}t$$

$$= \mathbf{r}+\left\{\frac{k-1}{v^2}(\mathbf{rv})-kt\right\}\mathbf{v}$$

ヲ得ル. (67.7) ノ第四式ハ

$$t'=k\left\{t-\frac{(\mathbf{vr})}{c^2}\right\}$$

デアル. 故ニ S′系ガ S 系ニ對シテ $\mathbf{v}$ ノ等速度運動ヲシテヰルトキノ Lorentz-Einstein 變換式ハ

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}+\left\{\frac{k-1}{v^2}(\mathbf{vr})-kt\right\}\mathbf{v}, \\ t' &= k\left\{t-\frac{(\mathbf{vr})}{c^2}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (67.11)$$

トナル.

68. 同時,長サ及ビ時

Lorentz-Einstein ノ變換式 (97.7) ニヨルト,靜止坐標系 S ト,其レニ對シテ S 系ノ x ノ正ノ方向ニ v ノ等速度運動ヲシテヰル運動系 S′ トデ測ツタ時ノ間ニハ

$$t'=k\left(t-\frac{vx}{c^2}\right) \qquad (68.1)$$

ナル關係ガアル. t' ガ t ノミナラズ,x ニモ關係スルト云フコトハ,極メテ重大ナ意義ヲ有シテヰルモノデアル. 故ニ次ニ其ノ二三ニ就テ説明シヨウ.

S 系ノ異ツタ任異ノ二點 x_1, x_2 ニ於テ,同時刻ニ時ヲ測ツタトスレバ,x_1 ニ於テ測ツタ時 t_1 ト x_2 ニ於テ測ツタ時 t_2 トハ相等シク

$$t_1-t_2=0 \qquad (68.2)$$

デアル. 然ルニ其ノ時刻ニ,S′系ニ於ケル S 系ノ x_1, x_2 ニ相當シタ二點 x_1', x_2' デ測ツタ時ハ t_1', t_2' デアツタトスレバ,(68.1) ニ依テ

$$t_1'=k\left(t_1-\frac{vx_1}{c^2}\right),$$

$$t_2'=k\left(t_2-\frac{vx_2}{c^2}\right)$$

デアルカラ

$$t_1'-t_2'=k\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\neq 0 \qquad (68.3)$$

トナル. 之レハ S 系ノ異ツタ任意ノ二點デ同時刻ダト稱シテヰル時ハ,S′系ノ相當點デハ同時刻ニナツテヰナイコトヲ示シテヰル. 即チ「**同時**ト言フコトハ,坐標系ノ異ルニ從ツテ違ツテヰルモノデアル」コトガ分カル.

次ギニ,S 系ノ軸上ニ長サ l ノ棒ガ置カレテヰテ,其ノ兩端ヲ x_1, x_2 デアルトスレバ

$$x_2-x_1=l \qquad (68.4)$$

デアル. 此ノ棒ノ長サヲ S′系デ測ルタメニハ,S′系ニ於テ同時刻ニ棒ノ兩端ヲ記シ付ケテ,其レヲ x_1',

x_2' トシ,S'系ニ於ケル物指デ x_1' ト x_2' トノ距離

$$x_2'-x_1'=l' \tag{68.5}$$

ヲ測レバ,此ノ l' ガ S'系デ測ツタ棒ノ長サヲ表ハスモノニナル. 然ルニ (67.8) ニ依テ

$$x_1=k(x_1'+vt'),$$

$$x_2=k(x_2'+vt')$$

ナル關係ガアルカラ

$$x_2-x_1=k(x_2'-x_1')$$

トナリ, (68.4), (68.5) ニ依テ

$$l=kl',$$

即チ

$$l'=l\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{68.6}$$

ヲ得ル.

同様ニ S'系ノ軸上ニ l ノ長サノ棒ガアリ,其ノ兩端ノ坐標ヲ x_1', x_2' トスルト

$$x_2'-x_1'=l$$

デアル. 此ノ運動シテヰル棒ノ長サヲS系デ測ルタメニハ,S系ニ於テ同時ニ其ノ棒ノ兩端ト一致スル點 x_1, x_2 ヲ記シ付ケ,S系ニアル物指デ其ノ距離ヲ測レバヨイ. 之レヲ l' トスレバ

$$x_2-x_1=l'$$

デアル. (67.7) ニ依テ

$$x_1'=k(x_1-vt),\quad x_2'=k(x_2-vt),$$

デアルカラ

$$x_2'-x_1'=k(x_2-x_1),$$

即チ

$$l=kl',$$

$$l'=l\sqrt{1-(v/c)^2}$$

トナリ, (68.6) ト同ジモノヲ得ル.

棒ト同ジ狀態ニアル觀測者ガ測ツタ棒ノ長サ l ヲ其ノ**固有ノ長サ**ト稱スルナラバ, (68.6) ハ「棒ト異ツタ狀態ニアル觀測者ガ測ツタ棒ノ長サハ,常ニ其ノ固有ノ長サヨリモ小デアル」コトヲ示シテヰル. 故ニ其ノ觀測者ニハ棒ノ長サガ短縮シタカノ如キ觀ヲ呈スルノデアル. 之レヲ **Fitz-Gerald[1] ノ短縮**ト呼ンデヰル.

S系ノ一定點 x ニアル時計デ,異ツタ時刻 t_1 ト t_2 トノ間ノ時間ヲ測ツテ $\triangle t$ ヲ得タトスレバ

$$\triangle t=t_2-t_1 \tag{68.7}$$

デアル. 此ノ時間ヲ S'系デ測ツタモノヲ $\triangle t'$ トシ, t_1, t_2 ニ相當スル S'系デ測ツタ時刻ヲ t_1', t_2' トスレバ (67.7) ニ依テ

(1) George Francis Fitz-Gerald (1851—1901) 英國 Dublin 大學ノ物理學教授

$$t_1'=k\left(t_1-\frac{vx}{c^2}\right),\quad t_2'=k\left(t_2-\frac{vx}{c^2}\right),$$

デアルカラ

$$\triangle t'=t_2'-t_1' \tag{68.8}$$

ハ

$$\triangle t'=k(t_2-t_1)=k\triangle t$$

トナル. 即チ靜止坐標系デ測ツタ時間 $\triangle t$ ト運動坐標系デ測ツタ時間 $\triangle t'$ トノ間ニハ

$$\triangle t'\sqrt{1-(v/c)^2}=\triangle t \tag{68.9}$$

ノ關係ガアル.

以上ニ述ベタコトニ依テ「時及ビ長サハ,坐標系ノ運動狀態ガ異ルニ從ツテ變ルモノデアル」コトガ分カル. 此ノ意味ニ於テ「時及ビ長サハ絕對性ノモノデナクテ相對性ノモノデアル」ト言ヒ得ルノデアル.

69. 四次元空間

今 $\sqrt{-1}=i$ トシ

$$\left.\begin{array}{l} ict=l,\ ict'=l',\\ \beta=v/c\end{array}\right\} \tag{69.1}$$

トスレバ, (67.7) ノ Lorentz-Einstein 變換式中ノ x', t' ハ

$$x'=k(x+i\beta l),\quad l'=k(l-i\beta x) \tag{69.2}$$

ヲ與ヘル.

$$k=\cos\psi,\ ki\beta=\sin\psi,\ i\beta=\tan\psi \tag{69.3}$$

トスレバ,上式(69.2)ハ

$$x'=x\cos\psi+l\sin\psi,\quad l'=l\cos\psi-x\sin\psi$$

ト書クコトガ出來ル. 之レハ (x,l) 坐標系カラ (x',l') 坐標系ヘノ變換ハ,之等ノ平面ニ垂直ナ直線ヲ軸トスル虛角 ψ ノ廻轉ニ等シイコトヲ示シテキル. 故ニ x, y, z ノ坐標デ表ハサレル三次元空間ヲ考ヘルト同樣ニ, x_1, x_2, x_3, x_4 ノ四ツノ量デ表ハサレル四次元空間ヲ想像シ

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=ict \tag{69.4}$$

トスレバ, Lorentz-Einstein 變換ハ此ノ四次元空間ニ於ケル坐標軸ノ廻轉ニ相當スルコトガ分カル.

此ノ四次元空間ノ重要性ハ,始メテ **Minkowski**[1] ニ依テ指摘セラレタガタメニ,之レヲ **Minkowski ノ世界**,又ハ略シテ單ニ**世界**[2]ト稱シテキル.

任意ノ時刻 t ニ於テ, (x, y, z) ナル位置ニ於テ起ツタ任意ノ出來事ハ, (x, y, z, t) ニ相當シタ世界內ノ一點 (x_1, x_2, x_3, x_4) デ表ハスコトガ出來ル. 其ノ點ヲ**世界點**ト稱スル. 世界點ノ軌跡ヲ**世界線**ト呼

(1) Hermann Minkowski (1864—1909) 獨逸 Göttinger 大學ノ數學教授

(2) **時空世界**トモ言フ.

ブ. 例ヘバ,一質點ガ等速度運動ヲシテキルトスレバ,此ノ出來事ヲ表ハス世界線ハ x_4 軸ト一定ノ傾キヲシテキル一ツノ直線ニナル.

此ノ四次元空間ニ於ケル任意ノ世界點ノ坐標原點ニ關スル位置-vector ハ (x_1, x_2, x_3, x_4) ヲ分値トスル四次元ノ vector デアル. 之レヲ**四次元位置 vector** ト稱シ,三次元ノ位置-vector ト區別スルタメニ

$$x_i, \ (i=1, 2, 3, 4)$$

デ表ハスコトニスル. ソウスレバ,之レニ極メテ接近シテキル世界點 x_i+dx_i ノ世界點 x_i ニ關スル四次元位置-vector ハ dx_i デ表ハサレル. 此ノ dx_i ヲ**時空微距離-vector** ト稱シ,其ノ大サヲ單ニ**時空微距離**[1] ト稱シ, ds デ表ハスト

$$ds^2 = dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2 \qquad (69.5)$$

ノ關係ガアル. 之レハ (69.4) ニ依テ

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 \qquad (69.6)$$

ト書ケル. Lorentz-Einstein ノ逆變換式ヲ用キテ (69.6) ノ右邊ヲ書キ換ヘルト

$$ds^2 = dx'^2+dy'^2+dz'^2-c^2dt'^2 \qquad (69.7)$$

トナルコトガ容易ニ分カル. 即チ時空微距離ハ S 系ニ關シテ表ハシテモ, S' 系ニ關シテ表ハシテモ,同

(1) Interval トモ稱スル.

ジデアル. 此ノ様ニ坐標系ヲ變ヘテモ,少シモ變ラナイ量ヲ**不變量**ト稱スル. dx_i ガ四次元空間ニ於ケル vector デアルカラ, vector 其レ自身及ビ其ノ大サデアル ds ガ,原點ヲ同ジクスル S 系及ビ S' 系ニ無關係ニ同一ノ方向及ビ大サヲ持ツテキルノハ自明ノコトデアル. 併シナガラ其ノ (x_1, x_2, x_3) 方向ノ分値デアル長サ,及ビ x_4 ノ方向ノ分値デアル時ハ坐標系ノ如何ニ依テ其ノ大サヲ變ヘル. 此ノ事ガ長サ及ビ時ガ相對性ヲ有スルコトニ相等スルノデアル.

70. Minkowski 速度

質點ト同ジ狀態ニアル時空坐標系ヲ,其ノ質點ノ**固有坐標系**ト稱スル. 此ノ固有坐標系ニ關シテ表ハサレタ諸量ヲ,他ノ系ニ關シテ表ハサレタ諸量ト區別スルタメニ,固有ナル形容詞ヲツケルコトニスル. 固有坐標系ニ對シテハ其ノ質點ハ靜止シテキルコトニナル. 故ニ**固有時**ヲ τ トスレバ, (69.6) ニ於テ $dx=dy=dz=0$, $dt=d\tau$ トシテ

$$ds = icd\tau \qquad (70.1)$$

ナル關係ヲ得ル.

質點ガ運動シテキルトキ,其ノ時空位置-vector

ノ固有時ニ關スル微分係數ヲ,其ノ質點ノ **Minkowski 速度**ト稱シ,q_iデ表ハスコトニスレバ

$$q_i=\frac{dx_i}{d\tau},\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{70.2}$$

デアル. 之レハ明カニ四次元-vector デアル.

(70.1) ニ依テ (70.2) ハ

$$q_i=ic\frac{dx_i}{ds} \tag{70.3}$$

トナル. 然ルニ (69.6) ニ依テ

$$ds^2=\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-c^2\right\}dt^2$$

デアルカラ

$$\frac{dx}{dt}=u_x,\ \frac{dy}{dt}=u_y,\ \frac{dz}{dt}=u_z$$

トスレバ

$$ds^2=(u^2-c^2)dt^2,$$

故ニ

$$\frac{ds}{dt}=ic\sqrt{1-(u/c)^2} \tag{70.4}$$

トナリ, (70.3) ハ

$$q_i=\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx_i}{dt} \tag{70.5}$$

トナル. 即チ

$$\left.\begin{aligned}
q_1&=\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx_1}{dt}=\frac{u_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\\
q_2&=\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx_2}{dt}=\frac{u_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\\
q_3&=\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx_3}{dt}=\frac{u_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\\
q_4&=\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\frac{dx_4}{dt}=\frac{ic}{\sqrt{1-(u/c)^2}},
\end{aligned}\right\} \tag{70.6}$$

デアリ

$$q^2=-c^2 \tag{70.7}$$

デアル.

S系ノ x 軸ニ沿フテ,x ノ增ス方向ニ,v ノ大サノ等速度運動ヲシテキルS′系ニ於テノ Minkowski 速度ヲ q_i' トスレバ, (69.2) ト同樣ニ

$$\left.\begin{aligned}
&q_1'=k(q_1+i\beta q_4),\\
&q_2'=q_2, &k=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\\
&q_3'=q_3, &\beta=v/c\\
&q_4'=k(q_4-i\beta q_1),
\end{aligned}\right\} \tag{70.8}$$

ノ關係ガアル. 故ニ,之レニ (70.6) ノ q_i ノ値ヲ入レテ

$$q_1'=\frac{k}{\sqrt{1-(u/c)^2}}(u_1-v),$$

$$q_2'=\frac{u_2}{\sqrt{1-(u/c)^2}},\qquad q_3'=\frac{u_3}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$q_4'=\frac{ikc}{\sqrt{1-(u/c)^2}}\left(1-\frac{u_1v}{c^2}\right)$$

ヲ得ル. 然ルニ, (70.6) ト同様ニ

$$q_1'=\frac{u_1'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}},\qquad q_2'=\frac{u_2'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}},$$

$$q_3'=\frac{u_3'}{\sqrt{1-(u'/c)^2}},\qquad q_4'=\frac{ic}{\sqrt{1-(u'/c)^2}}$$

デアルカラ

$$u_1'=\sqrt{\frac{c^2-u'^2}{c^2-u^2}}\,k(u_1-v),$$

$$u_2'=\sqrt{\frac{c^2-u'^2}{c^2-u^2}}\,u_2,\qquad u_3'=\sqrt{\frac{c^2-u'^2}{c^2-u^2}}\,u_3,$$

$$\sqrt{\frac{c^2-u^2}{c^2-u'^2}}=k\left(1-\frac{u_1v}{c^2}\right),$$

随テ

$$\left.\begin{aligned}u_1'&=\frac{u_1-v}{1-\dfrac{u_1v}{c^2}}\\ u_2'&=\frac{u_2}{k\left(1-\dfrac{u_1v}{c^2}\right)},\\ u_3'&=\frac{u_3}{k\left(1-\dfrac{u_1v}{c^2}\right)}\end{aligned}\right\}\qquad(70.9)$$

ヲ得ル. 之レハ同一ノ質點ノ速度ヲ S 系ニ於テ測定シタ $\mathbf{u}$ ト, S′ 系ニ於テ測定シタ $\mathbf{u}'$ トノ關係ヲ與ヘルモノデアル. 即チ速度ノ變換式デアル.

(70.9) カラ容易ニ

$$u_1=\frac{u_1'+v}{1+\dfrac{u_1'v}{c^2}},$$

$$u_2=\frac{u_2'}{k\left(1+\dfrac{u_1'v}{c^2}\right)},$$

$$u_3=\frac{u_3'}{k\left(1+\dfrac{u_1'v}{c^2}\right)}$$

ヲ得ル. 之等ヲ自乘シテ加ヘルト

$$u^2=\frac{u'^2+2u_1'v+v^2-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2(u'^2-u_1'^2)}{\left(1+\dfrac{u_1'v}{c^2}\right)^2}$$

トナルカラ, $\mathbf{u}'$ ガ S′ 系ノ速度 $\mathbf{v}$ トナス角ヲ θ トスレバ

$$u^2=\frac{u'^2+v^2+2u'v\cos\theta-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2u'^2\sin^2\theta}{(1+u'v\cos\theta/c^2)^2}\qquad(70.10)$$

トナル. 之レハ $\mathbf{v}$ ト $\mathbf{u}'$ トノ合成速度 $\mathbf{u}$ ノ大サヲ與ヘルモノデアッテ **Einstein ノ速度合成ノ公式** ト呼バレテキルモノデアル. u', v ガ c ニ比シテ極メテ小ナルトキハ (70.10) ハ Newton 力學ニ於ケル速度合成ノ公式ニナル.

71. 質量ト Energy

質點ノ質量ヲ μ, 速度ヲ $\mathbf{u}$, 之レニ働イテキル力ヲ $\mathbf{F}$, 時ヲ τ トスレバ Newton ノ運動方程式ハ

$$\frac{d}{d\tau}(\mu\mathbf{u})=\mathbf{F} \tag{71.1}$$

デ表ハサレル. 此ノ關係ハ質點ノ固有坐標系ニ於テハ成立スルモノト考ヘテ差支ヘガナイ. 此ノ關係ヲ四次元空間ニ擴張シテ,三次元-vector $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$ ノ代リニ四次元-vector q_i, K_i[1] ヲ用キ

$$\frac{d}{d\tau}(\mu q_i)=\mathrm{K}_i \tag{71.2}$$

トシテ見ル.

$$\kappa=\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \tag{71.3}$$

トスレバ, (70.1), (70.4) ニ依テ (71.2) ハ

$$\kappa\frac{d}{dt}(\mu q_i)=\mathrm{K}_i \tag{71.4}$$

トナル.

(71.4) ノ $i=1, 2, 3$ ノ部分ヲトッテ見ルト, (70.6) (71.3) ニ依テ

$$\kappa\frac{d}{dt}(\mu\kappa\mathbf{u})=\mathbf{K} \tag{71.5}$$

ヲ得ル. 但シ $\mathbf{K}$ ハ K_x, K_y, K_z ヲ分値トスル三次元

(1) 此ノ K_i ヲ **Minkowski** ノ力ト稱スル.

vector デアル. 故ニ,今

$$\mathbf{K}=\kappa\mathbf{F}, \tag{71.6}$$

$$\mu\kappa=m \tag{71.7}$$

トスルト, (71.5) ハ

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{u})=\mathbf{F} \tag{71.8}$$

トナル.

固有系デハ $u=0$ トナルカラ, (71.3) ハ $\kappa=1$ トナリ, (71.7) ハ $\mu=m$ トナル. 故ニ (71.8) ハ固有系デハ (71.1) トナル. 隨テ (71.8) ハ質點ガ $\mathbf{u}$ ノ速度デ運動シテキルト觀測サレル坐標系ニ於テ成立シテキル運動方程式デアルコトガ分カル.

(71.8) ハ之レ迄用キテ來タ Newton ノ運動方程式ト全ク同形デアルガ,質量 m ガ質點ノ速度ノ函數デアルコトヲ異ニシテキル. **固有質量** μ ヲ其ノ速度ガ $\mathbf{u}=0$ ノトキノ質量デアルコトヲ明示スルタメニ m_0 デ表ハスコトニスレバ,速度ガ $\mathbf{u}\neq 0$ ノトキノ質量 m ハ (71.7), (71.3) ニ依テ

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \tag{71.9}$$

デ表ハサレル.

(71.4) ニ於テノ i ヲ 4 トシタモノハ

$$\mathrm{K}_4=\kappa\frac{d}{dt}(\mu q_4)$$

デアリ,之レニ (70.6) ノ q_4 ノ値ヲ入レ, (71.3), (71.7) ヲ用キテ

$$\mathrm{K}_4=ic\kappa\frac{dm}{dt} \tag{71.10}$$

ヲ得ル.

(71.1) ニ q_i ヲ乘ジ, i = 1, 2, 3, 4 トシタモノヲ加ヘルト

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_1q_1+\mathrm{K}_2q_2+\mathrm{K}_3q_3+\mathrm{K}_4q_4 &= q_1\frac{d}{d\tau}(\mu q_1)+q_2\frac{d}{d\tau}(\mu q_2)\\ &\quad +q_3\frac{d}{d\tau}(\mu q_3)+q_4\frac{d}{d\tau}(\mu q_4)\\ &= \frac{d}{d\tau}\left\{\frac{1}{2}\mu(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)\right\}\\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\mu q^2\right)\end{aligned}$$

トナリ, (70.7) ニ依テ

$$\mathrm{K}_1q_1+\mathrm{K}_2q_2+\mathrm{K}_3q_3+\mathrm{K}_4q_4=0$$

トナル. 之レハ又 (70.6), (71.6) ニ依テ

$$\mathrm{K}_4q_4=-\kappa^2\mathbf{Fu}$$

トナル. 然ルニ **Fu** ハ (30.5) ニ依テ **F** ノナス工率ヲ表ハス. 之レニ依テ其ノ質點ノ有スル energy E

ガ增加スルカラ其ノ時ニ對スル增加ノ割合ヲ $d\mathrm{E}/dt$ トスレバ

$$\mathrm{K}_4q_4=-\kappa^2\frac{d\mathrm{E}}{dt} \tag{71.11}$$

トナル. 隨テ (70.6), (71.10) ノ q_4, K_4 ノ値ヲ入レテ

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt}=c^2\frac{dm}{dt}$$

ヲ得ル. 之レヲ積分シ, $m=0$ ノトキ $\mathrm{E}=0$ トスレバ

$$\frac{\mathrm{E}}{c^2}=m \tag{71.12}$$

ヲ得ル. 之レハ質量ト energy トノ間ニ存在スル極メテ重要ナ關係ヲ示シテヰルモノデアル.[1]

(71.9) ト (71.12) トニ依テ

$$\mathrm{E}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \tag{71.13}$$

ヲ得ル. $u=0$ トスレバ,其ノトキノ質點ノ有スル energy ハ所謂位置-energy デアルカラ,ソレヲ V トスレバ

$$\mathrm{V}=m_0c^2 \tag{71.14}$$

トナル. 運動 -energy ヲ T トスレバ

$$\mathrm{T}=\mathrm{E}-\mathrm{V}$$

デアリ, (71.13), (71.14) ニ依テ

---

(1) 此ノ關係ハ 1905 年ニ Einstein ニ依テ始メテ求メラレタモノデアル.

$$T=m_0c^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}-1\right\} \qquad (71.15)$$

ヲ得ル. 之レハ又

$$T=\frac{1}{2}m_0u^2+\frac{3}{8}m_0\frac{u^4}{c^2}+\cdots$$

ト展開シ得ルカラ, u ガ c ニ比シテ極メテ小サナトキハ Newton 力學ニ於ケル運動-energy ト一致スルコトガワカル.

(71.9)ガ示ス様ニ,質量ハ其ノ運動狀態ニ依テ變ルモノデアル. (71.13)モ亦, energy ガ運動狀態ニ依テ變ルモノデアルコトヲ示シテキル. 即チ,之等ハ共ニ絶對性ノモノデナクテ相對性ヲ有スルモノデアル. 質量及ビ energy ノ保存ノ法則ハ其ノ運動ノ速サガ光ノ傳播ノ速サニ比シテ極メテ小ナルトキニ於テノミ成立スルモノデアルコトガ分カル.

附錄

Vector ト Scalar トノ對照表

I. Vector 法ニ於ケル公式

Vector		Scalar	
1. Vector 和		**1.** Vector 和	
$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.	(3.1)	$c_x=a_x+b_x,\ c_y=a_y+b_y,\ c_z=a_z+b_z$.	
2. Scalar 積		**2.** Scalar 積	
$\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$.	(5.2)	$ab\cos(\widehat{\mathbf{ab}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.	(5.1), (5.9)
3. Vector 積		**3.** Vecotr 積	
$\mathbf{c}=[\mathbf{ab}]$		$c=ab\sin(\widehat{\mathbf{ab}})$.	(9.2)
$=-[\mathbf{ba}]$.	(9.3)	$c_x=a_yb_z-a_zb_y,\ c_y=a_zb_x-a_xb_z,$ $c_z=a_xb_y-a_yb_x$.	(9.8)
4. $\mathbf{a}[\mathbf{bc}]$ $=\mathbf{b}[\mathbf{ca}]$		**4.** $a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+a_z(b_xc_y-b_yc_x)$	
$=\mathbf{c}[\mathbf{ab}]$,	(16.4)	$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$	(16.3)
$=\mathbf{abc}$.	(16.5)		
5. $\mathbf{S}=[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]$		**5.** $S_x=b_x(c_xa_x+c_ya_y+c_za_z)$	
$=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})$.		$-c_x(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)$,	

$$S_y = b_y(c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z) - c_y(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z),$$
$$S_z = b_z(c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z) - c_z(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$ (16.7)

6. 線積分

$$W = \int_A^B \mathbf{F} ds.$$ (30.4)

6. 線積分

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$ (30.4)

7. 勾配

$$K = \operatorname{grad} V = \nabla V.$$ (31.9)

7. 勾配

$$K_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad K_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad K_z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$ (31.3)

II. 質點ノ運動學ニ於ケル公式

Vector	Scalar
1. 速度	**1.** 速度
$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$ (6.3)	
(i) 直角坐標系	(i) 直角坐標系
$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z.$ (6.6)	$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$ (6.5)
(ii) 圓柱坐標系	(ii) 圓柱坐標系
$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\rho + \mathbf{v}_\psi + \mathbf{v}_z.$ (7.9)	$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_\psi = \rho \frac{d\psi}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$ (7.8)
(iii) 極坐標系	(iii) 極坐標系
$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\gamma + \mathbf{v}_\theta + \mathbf{v}_\varphi.$ (8.5)	$v_\gamma = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}, \quad v_\varphi = r\sin\theta \frac{d\varphi}{dt}$ (8.3), (8.6), (8.7)
(iv) 廻轉坐標系	(iv) 廻轉坐標系
$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + [\mathbf{wr}].$ (13.2)	$v_x = \frac{d\xi}{dt} + w_y\zeta - w_z\eta, \quad v_y = \frac{d\eta}{dt} + w_z\xi - w_x\zeta, \quad v_z = \frac{d\zeta}{dt} + w_x\eta - w_y\xi.$ (13.8)
2. 加速度	**2.** 加速度
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$ (14.1)	
(i) 直角坐標系	(i) 直角坐標系
$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z.$ (14.2)	$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$ (14.2)
(ii) 圓柱坐標系	(ii) 圓柱坐標系
$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_z.$ (17.6)	$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \quad a_t = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \rho\frac{d^2\psi}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$ (17.6)
(iii) 極坐標系	(iii) 極坐標系

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_r+\mathbf{a}_\theta+\mathbf{a}_\varphi.$$

(18. 2)

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

$$a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

$$-r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

$$a_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

(18. 2)

(iv) 運動坐標系

$$\mathbf{a}=\bar{\mathbf{a}}_t+\bar{\mathbf{a}}_r+\bar{\mathbf{a}}_c.$$

(15. 7)

(iv) 運動坐標系

$$a_x=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}-\eta w_z+\zeta w_y\right)$$

$$-w_z\left(\frac{d\eta}{dt}-\zeta w_x+\xi w_z\right)$$

$$+w_y\left(\frac{d\zeta}{dt}-\xi w_y+\eta w_x\right),$$

etc., etc. (17. 11

運搬加速度

$$\mathbf{a}_t=\mathbf{a}_1+\left[\frac{d\mathbf{w}}{dt}\bar{\mathbf{r}}\right]$$

$$+[\mathbf{w}[\mathbf{w}\mathbf{r}]].$$

(15. 4)

運搬加速度

$$\bar{a}_{tx}=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{dw_y}{dt}\zeta-\frac{dw_z}{dt}\eta$$

$$+w_x(w_x\xi+w_y\eta+w_z\zeta)$$

$$-\xi(w_x^2+w_y^2+w_z^2),$$

etc., etc. (9. 8), (16. 7)

相對加速度

$$\mathbf{a}_r=\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2}.$$

相對加速度

$$\bar{a}_{rx}=\frac{d^2\xi}{dt^2},\ \bar{a}_{ry}=\frac{d^2\eta}{dt^2},\ \bar{a}_{rz}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

(15. 1)

Coriolis ノ加速度

$$\bar{\mathbf{a}}_c=2\left[\mathbf{w}\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}\right].$$

(15. 6)

Coriolis ノ加速度

$$\bar{a}_{cx}=2\left(w_y\frac{d\zeta}{dt}-w_z\frac{d\eta}{dt}\right),$$

etc., etc. (9.8)

(v) 切線加速度ト法線加速度

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_n.$$

(14. 8)

(v) 切線加速度ト法線加速度

$$a_t=\frac{d^2s}{dt^2},$$ (14.5)

$$a_n=\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$ (14.8)

III. 質點ノ力學ニ於ケル公式

Vector

1. 運動方程式

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

$$=\mathbf{F}.$$ (27. 2)

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F},$$ (27. 3)

2. D'Alembert ノ法則ト假想變位ノ法則

$$(\mathbf{F}-m\mathbf{a})\delta\mathbf{r}=0.$$

Scalar

1. 運動方程式

$$\frac{dB_x}{dt}=F_x,\ \frac{dB_y}{dt}=F_y,\ \frac{dB_z}{dt}=F_z.$$

$$\left.\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z.\end{aligned}\right\}$$

2. D'Alembert ノ法則ト假想變位ノ法則

$$(F_x-ma_x)\delta x+(F_y-ma_y)\delta y+$$

(34. 2)

3. 質點ノ拘束運動方程式

$$(\mathbf{F}-m\mathbf{a}+\lambda\nabla\varphi)\delta\mathbf{r}=0. \qquad (35.\ 3)$$

4. 質點系ノ質量中心

$$\mathbf{R}=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathbf{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}. \qquad (49.\ 1)$$

$$+(F_z-ma_z)\delta z=0.$$

3. 質點ノ拘束運動方程式

$$\left(F_x-ma_x+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta x$$

$$+\left(F_y-ma_y+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\delta y$$

$$+\left(F_z-ma_z+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\delta z=0.$$

4. 質點系ノ質量中心

$$\xi=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}, \qquad \eta=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu},$$

$$\zeta=\frac{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu}. \qquad (49.\ 3)$$

索 引

A

B

C

D

E

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W

Y

Z

——（終）——

昭和七年五月　五　日印刷
昭和七年五月　十　日發行

版權所有

著　　者	發行者

質點ノ力學・奥附
定價金四圓五拾錢

著　者　　玉城嘉十郎

東京市日本橋區大傳馬町貳丁目拾六番地
發行者　　內田作藏

東京市京橋區銀座西二丁目三番地
印刷所　　三協印刷會社

發行所
內田老鶴圃
東京市日本橋區大傳馬町二丁目
振替東京一二一四六番
電話浪花一八六五番

終