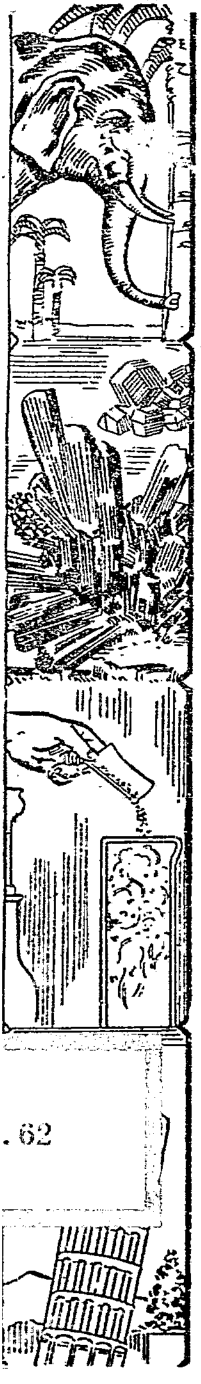
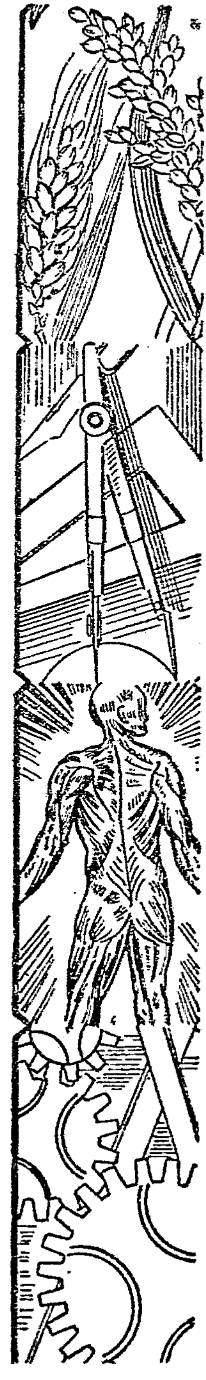


教育部審定

初級中學

代數

下冊



國立編譯館編

正中書局印行

初級中學代數　下册

目　次

第十章　最高公因式和最底公倍式

§103. 最高公因式(H. C. F.) 二個以上的代數式,如: $2a^2b$, $3ab^2$; 都可爲 a,b,ab 所除盡.即 a 或 b 或 ab都是 $2a^2b$, $3ab^2$ 二代數式的公因式.

由上例知諸代數式間若有公因式,它們往往不止一個,但公因式中,次數最高的則惟一,那惟一次數最高的公因式叫做最高公因式.如上例公因式 ab 次數最高,因叫做 $2a^2b$ 和 $3ab^2$ 二代數式的最高公因式,或簡略寫作 H. C. F.

§104. 諸單項式的最高公因式 二個以上的單項式,如有最高公因式,可由觀察求得.

例一: 求 a^4b^2c 和 $a^2b^2c^3$ 的 H. C. F.

〔解〕 就 a 來說,能爲二式所公有而且次數最高的公因式是 a^2.

就 b 來說,能爲二式所公有而且次數最高的公因式是 b^2.

就 c 來說,能爲二式所公有而且次數最高的公因式是 c.

故所求的 H.C.F. $=a^2b^2c$.

例二: 求 $5a^3b^2c^3d^4$ 和 $a^2b^3d^2$ 的 H. C. F.

〔解〕 就 a 來說，能為二式所公有而且次數最高的公因式為 a^3.

就 b 來說，能為二式所公有而且次數最高的公因式為 b^2.

就 d 來說，能為二式所公有而且次數最高的公因式為 d^2.

就 c 來說，c 不是二式的公因式.

故所求的 H.C.F.$=a^3b^2d^2$.

例三： 求 $5x^2yz^3$, $15xy^3z^2$ 和 $10x^2y^2z^2$ 的 H.C.F.

〔解〕 就三式的數字係數來說，它們的最大公約數為 5.

就 x 來說，能為三式所公有而且次數最高的公因式為 x.

就 y 來說，能為三式所公有而且次數最高的公因式為 y.

就 z 來說，能為三式所公有而且次數最高的公因式為 z^2.

故所求的 H.C.F.$=5xyz^2$.

由上舉三例看來，諸單項式的 H.C.F. 就是各式中所含各個共同文字的最低冪，和各個數字係數的最大公約數的連乘積。

習題四十

求下列各題的 H.C.F.:

1. x^3y^2, x^2y^3.
2. xy^2z^2, zy^2x^3.
3. $6ab^5$, $9a^6b^3$.
4. $4x^5y$, $10xy^5$.
5. $24a^3x^3y^4$, $60a^2x^4y^5$.
6. $9a^2x^3y^5$, $8x^3y^2$.
7. $8a^3bc^2$, $\frac{2}{3}ac^2$.
8. $42x^my^n$, $77a^2x^{m-2}y^{n+1}$.

9. $3a^3y^2z,\ 6x^2y^2z^2,\ 15xyz^3$.

10. $(x^2-1)^2(x-2), (x-2)^2(x-1), (x-1)(x-2)(x-3)$.

§105. 諸多項式的最高公因式(H. C. F.) 先用因式分解法,分解諸多項式成質因式的連乘積,再準單項式求 H. C. F. 的方法,取其共同因式的最低冪的連乘積,卽得.

例一: 求$(x-1)^3(x+2)^3, (x-1)^4(x+2)^2$和$(x-1)^6(x+2)^4$的 H. C. F.

〔解〕 視括號內的式子爲一文字,則

就$(x-1)$來說,能爲三式所公有而且次數最高的公因式是$(x-1)^3$.

就$(x+2)$來說,能爲三式所公有而且次數最高的公因式是$(x+2)^2$.

故這三式的 H.C.F.$=(x-1)^3(x+2)^2$.

例二: 求 $x^4y^2-x^2y^4, x^4y^3+x^3y^4$和$x^5y^2+x^4y^3-x^3y^4-x^2y^3$的 H. C. F.

〔解〕
$$x^4y^2-x^2y^4=x^2y^2(x^2-y^2)$$
$$=x^2y^2(x+y)(x-y)$$
$$x^4y^3+x^3y^4=x^3y^3(x+y).$$

$$x^5y^2+x^4y^3-x^3y^4-x^2y^5=x^2y^2(x^3+x^2y-xy^2-y^3)$$
$$=x^2y^2[x^2(x+y)-y^2(x+y)]$$
$$=x^2y^2(x^2-y^2)(x+y)$$
$$=x^2y^2(x-y)(x+y)^2.$$

故所求的 H.C.F. $=x^2y^2(x+y)$.

例三: 求 a^2+2ab, $a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+6a^3b+8a^2b^2$ 和 $a^3+a^2b-2ab^2$ 的 H. C. F.

〔解〕 $a^2+2ab^2=a(a+2b^2)$.

$$a^3+3a^2b+2ab^2=a(a^2+3ab+2b^2)$$
$$=a(a+b)(a+2b).$$
$$a^4+6a^3b+8a^2b^2=a^2(a^2+6ab+8b^2)$$
$$=a^2(a+2b)(a+4b).$$
$$a^3+a^2b-2ab^2=a^2(a^2+ab-2b^2)$$
$$=a(a-b)(a+2b).$$

故所求的 H.C.F. $=a(a+2b)$.

習題四十一

求下列各題的 H. C. F.:

1. $a^2(a-b)^2$, $a^3(a-b)^3$.
2. $(x-a)^5(x-b)^3$, $(x-a)^3(x-b)^4$.
3. a^2-b^2, a^3-b^3.
4. a^2-b, a^3+b^3.

5. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $5(a-b)^2(a+b)^2$.

6. $x^3y^3+xy^5$, $x^6-x^2y^4$.

7. $3m^3+2m^2-m$, $5m^4+3m^3-2m^2$.

8. $3x^2-4xy+y^2$, $4x^4-5x^3y+x^2y^2$.

9. $x^2+3(a-b)x+2(a-b)^2$, $x^3+6(a-b)x^2+8(a-b)^2x$.

10. $mn(x^2+y^2)+xy(m^2+n^2)$, $mn(x^3+y^3)+xy(m^2y+n^2x)$.

§106. 用輾轉相除法求兩多項式的最高公因式 (H.C.F.) 多項式的因式，如不易由分解因式獲得，可用輾轉相除來求它的 H. C. F.；此法與算術中求最大公約數的方法大體相同。所不同的地方是：在代數學中，未實行輾轉相除以前，須先將二式都列成同一文字的降冪式，經整理以後，若二式的次數不等，則以低次式除高次式；若次數相等，則用係數較小的一式做除式。在應用輾轉相除時，若最後能除盡，則最後所用的那一除式，便是所求的 H. C. F.

例一： 求 x^3-x+x^2 與 x^2-1 的 H.C.F.

〔解〕 第一式經整理以後爲： x^3+x^2-x.

因第一式爲三次式，第二式爲二次式，故應以第二式除第一式。

$$
\begin{array}{rl}
x^2-1\,)\,x^3+x^2\qquad -2\,(x+1 & \\
\underline{x^3\qquad -x\qquad\quad} & \\
x^2+x-2 & \\
\underline{x^2\qquad -1} & \\
x-1\,)\,x^2\quad -1\,(x+1 & \\
\underline{x^2-x\quad} & \\
x-1 & \\
\underline{\underline{x-1}} &
\end{array}
$$

$\therefore\quad$ H.C.F. $=x-1$.

為節省紙張起見，上式常縮成下列形式：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x+1 & x^2\qquad -1 & x^3+x^2\quad -2 & x+1 \\
 & x^2-x\qquad & x^3\quad -x\quad \\ \hline
 & x-1 & x^2+x-2 & \\
 & \underline{\underline{x-1}} & x^2\qquad -1 & \\ \cline{3-3}
 & & x-1 &
\end{array}
$$

例二： 求 x^3+x^2+2x+2 和 x^3+2x^2+3x+2 的 H.C.F.

〔解〕 二式次數相等，但前式係數較後式係數小，故用前式除後式。

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x & x^3+x^2+2x+2 & x^3+2x^2+3x+2 & 1 \\
 & x^3+x^2\qquad\qquad & x^3+\ x^2+2x+2 & \\ \hline
 & \underline{2x+2} & x^2+\ x & \frac{1}{2}x \\
 & & \underline{\underline{x^2+\ x}} &
\end{array}
$$

$\therefore$ H.C.F. $= x+1$.

注意：　本例的 H. C. F. 是 $x+1$, 而不是 $2x+2$, 何故？

應同輾轉相除法時，無論被除式或除式，或除時所得任一餘式，乘或除以常數，對所求 H. C. F. 不生影響；利用這原理可使運算途中不發生分數係數，減少運算煩難。

例三：　求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 和 $2x^3+5x^2-x-1$ 的 H. C. F.

〔解〕　第二式除第一式，在計算上應發生分數係數，故以常數 2 乘第一式來避免麻煩。

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2x-1 & 2x^3+5x^2-x-1 & x^4+3x^3+2x^2+3x+1 & \\
 & 2x^3+6x^2+2x & \times 2 & \\
\cline{2-3}
 & -x^2-3x-1 & 2x^4+6x^3+4x^2+6x+2 & x \\
 & -x^2-3x-1 & 2x^4+5x^3-x^2-x & \\
\cline{2-3}
 & & x^3+5x^2+7x+2 & \\
 & & \times 2 & \\
\cline{3-3}
 & & 2x^3+10x^2+14x+4 & 1 \\
 & & 2x^3+5x^2-x-1 & \\
\cline{3-3}
 & & 5)5x^2+15x+5 & \\
\cline{3-3}
 & & x^2+3x+1 & \\
\cline{3-3}
\end{array}
$$

$\therefore$ H.C.F. $= x^2+3x+1$.

如二多項式中含有單項因式時，應先提出，求單項因式的H. C. F.;然後用上法求多項因式的H. C. F,這樣所得二H. C. F.的連乘積,卽爲所求的 H. C. F.

例四：　求 ax^4-ax^2 與 abx^4+abx^3-2abx 的 H. C. F.

〔解〕　$ax^4-ax^2=ax^2(x^2-1)$.

$abx^4+abx^3-2abx=abx(x^3+x^2-2)$.

ax^2 與 abx 的 H. C. F. 爲 ax;

x^2-1 與 x^3+x-2 的 H. C. F. 爲 $(x-1)$.

故所求的 H.C.F. $=ax(x-1)$.

注意：　應用輾轉相除法求 H. C. F. 仿用分離係數除法,更是便利,學者試就上面四例仿用分離係數除法求 H.C.F.

§107. 諸多項式的H. C. F.　先求任二多項式的H.C.F.,然後求這 H.C.F. 和第三式的 H.C.F.;逐次推求,卽得所求各式的 H. C. F.

例：　求 x^3+x^2-x-1,　x^3+3x^2-x-3 及 x^3+x^2-2 的 H. C. F.

〔解〕　先求 x^3+x^2-x-1 和 x^3+3x^2-x-3 的 H.C.F. 得 x^2-1; 再取 x^2-1 和 x^3+x^2-2 求 H. C. F. 得 $x-1$.

故所求的 H. C. F. 爲 $x-1$.

習題四十二

求下列各題的 H. C. F.:

1. $a^2-5a+4,\ a^4-5a^3+4a$.

2. $4x^3-12x^2y+9xy^2,\ 16xy+24y^2$.

3. $x^2+x-12,\ 2x^3+3x^2-22x-15$.

4. $x^3-13x+12,\ x^4+3x^3+12x+16$.

5. $2x^4-3x^3+4x^2-5x-4,\ 2x^4-x^3+x-12$.

6. $x^5-y^5,\ x^6-y^6$.

7. $x^2+3x+2,\ x^2+4x+3,\ x^3+3x^2+3x+1$.

8. $x^3+2x^2-x-2,\ x^2+x-2,\ x^2-3x+2$.

9. $2x^2-14x+20,\ 4x(x^2+5)-25(x+1)(x-1)$.

10. $2x^4+9x^3+14x+3,\ 2+9x+14x^3+2x^4$.

§108. 最底公倍式(L. C. M.) 一代數式可爲其他若干代數式中任一代數式所除盡時，則這代數式叫做那若干個代數式的公倍式.如 $6abxy$ 便是 $3ax$ 及 $2by$ 二式的公倍式.

公倍式中的數字係數最小、文字次數最低時，叫做最低公倍式；簡略做 L. C. M. 如:

$$8a^3b^3,\ 4a^3b^3,\ 4a^2b^3,\ 4a^2b^3$$

等式，都是 $2a^2b$ 和 $4ab^2$ 的公倍式，然而 $2a^2b$ 和 $4ab^2$ 的 L.C.M. 是 $4a^2b^2$.

§109. 單式的最低公倍式 諸單項式的最低公倍式可由觀察求得.

例一： 求 a^3b^3c 和 $a^2b^3c^4$ 的 L. C. M.

〔解〕 二式中，a 的最高次冪是 a^3 卽二式中 a 冪的公倍式.

二式中，b 的最高次冪是 b^3，卽二式中 b 冪的公倍式.

二式中，c 的最高次冪是 c^4，卽二式中 c 冪的公倍式.

故所求的 L.C.M. 爲 $a^3b^3c^4$.

例二： 求 $2abc^2$, $3a^2bc$, 和 $5ab^2c^3$ 的 L.C.M.

〔解〕 三式中數字係數的最小公倍數是 30.

三式中 a, b, c 的最高次冪各是 a^2, b^2, c^3.

故所求的 L. C. M. 是 $30a^2b^2c^3$.

由上二例，知諸單項式的 L. C. M. 的求法是：

(一) 數字係數：取各單項式的數字係數的最小公倍數做係數.

(二) 文字：取各單項式中所有文字的最高次冪作成連乘積.

(三) 取 (一) 和 (二) 中二結果的乘積卽得.

§110. 多項式的 L. C. M. 的求法(一)(因式分解法) 分解多項式成若干連乘的質因式，然後準前法則求

L. C. M.

例一：求 $ax+bx$, $ay+by$ 的 L. C. M.

〔解〕 $ax+bx=x(a+b)$.

$ay+by=y(a+b)$.

故　L. C. M. $=xy(a+b)$.

例二：求 x^2+3x+2, x^2+5x+4 的 L. C. M.

〔解〕 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$.

故　L.C.M. $=(x+1)(x+2)(x+4)$.

例三：求 $a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+4a^3b-5a^2b^2$ 的 L.C.M.

〔解〕 $a^3+3a^2b+2ab^2=a(a^2+3ab+2b^2)$,

$=a(a+b)(a+2b)$.

$a^4+4a^3b-5a^2b^2=a^2(a^2+4ab-5b^2)$,

$=a^2(a+5b)(a-b)$.

$\therefore$ L.C.M. $=a^2(a+b)(a+2b)\cdot(a+5b)(a-b)$.

習題四十三

求下列各題的 L. C. M.:

1. $6a^2b$, $9ab^3$.

2. $5a^2bx$, $3a^2b^2y^2$.

3. $2x^2yz^3,\ 15xyz^3,\ 10x^2y^2z^2.$

4. $a^2(b-c)^2,\ b^2(c-a)^2,\ c^2(a-b)^2.$

5. $2a^3b\,(x-y)^2,\ 3ab\,(x+y),\ 5(x+y)^3.$

6. $a^2+ab-30b^3,\ a^2-2ab-15b^2.$

7. $a^3-16a,\ a^3-8a^2+16a.$

8. $x^3+y^3,\ x^4-y^4.$

9. $x^2-1,\ x^2+1,\ x^3-1.$

10. $(x+2y)^2,\ (x-2y)^2,\ x^2-4y^2.$

11. $x^2+7x+12,\ x^2+3x-4,\ x^2-5x-6.$

12. $3x^2-4xy^2+y^4,\ 6x^2-5xy^2+y^4,\ y^4-x^4.$

§111. H.C.F. 和 L.C.M. 的關係 設 A, B 二式的 H. C. F. 是 H, 而它們的 L. C. M. 是 L, 且設

$$A=aH, \qquad B=bH,$$

因 H 是 A,B 二式的 H. C. F. 故 a,b 互爲質式;

於是 $$L=abH,\ \cdots\cdots(1)$$

由 (1) 式,得

$$L=abH=aH\times\frac{bH}{H}$$

$$=A\times\frac{B}{H}=B\times\frac{A}{H}\ \cdots\cdots(2)$$

又 $L\times H=abH\times H=aH\times bH=A\times B.\ \cdots\cdots(3)$

故知二式的 L.C.M., 等於以它們的 H.C.F. 除其一式，而與其他一式相乘的積；二式的積,等於它們的 H.C.F. 與 L.C.M. 的積。

§112. L.C.M. 的求法(二)(先求 H.C.F. 法) 多項式的 L.C.M. 有時未便應用因式分解法,在這種情況下,則須利用前節 H.C.F. 和 L.C.M. 的關係,從求 H.C.F. 入手以求 L.C.M.

例： 求 x^3+x^2-2, x^3+2x^3-3 的 L.C.M.

〔解〕 兩式的 H.C.F. 是 $x-1$.

$$(x^3+x^2-2)\div(x-1)=x^2+2x+2.$$

$$\therefore\quad \text{L.C.M.}=(x^2+2x+2)(x^3+2x^2-3).$$

注意： 若二式互爲質式,則這二式的 L.C.M. 即這二式的積。

若求 A,B,C 三式的 L.C.M., 可先求 A,B 二式的 L.C.M., 再求所得 L.C.M. 和 C 式的 L.C.M., 餘可由此類推。

習題四十四

利用 H.C.F. 和 L.C.M. 的關係,求下列各題的 L.C.M.(1—6).:

1. $x^4+3x^3+2x^2$, $5x^3+20x^2+35x+20$.

2. $x^3+2x^2y+4xy^2-7y^3$, $3x^3-3x^2y+xy^2-y^2$.

3. $2x^4-3x^3+4x^2-5x-4,\ 12x^4-x^3+x-2x^2.$

4. $x^4+a^2x^2+a^4,\ x^4+ax^3+a^3x+a^4.$

5. $x^4-1,\ x^4+x^3+2x^2+x+1.$

6. $x^4+3x^3-2x^2-12x-8,\ x^3+6x^2+11x+6.$

求下列各題的 L.C.M.:

7. $ax-ay-bx+by,\ x^2-2xy+y^2,\ 3a^2b-3ab^2.$

8. $x^2-3x+2,\ x^2-4x+4,\ x^3-7x^2-14x-8.$

9. $x^3-x^2-4x+4,\ x^3-2x^2-x+2,\ x^3+2x^2-x-2.$

10. $6x^3-11x^2+5x-3,\ 9x^3-9x^2+5x-2,$

$18x^4-54x^3+37x^2-19x+6.$

第十一章　分式四則

§113. 分式　在算術中,以 3 除 2, 可寫作 $2\div 3$ 或 $\frac{2}{3}$, 後式叫做分數; 2 是分子, 3 是分母。

在代數學中,設以 B 式(不爲零)除 A 式,令寫作 $\frac{A}{B}$, 這式叫做分式; A 式是分子, B 式是分母. 如:

(1) $\frac{a}{x}$　　(2) $\frac{1}{1+x}$　　(3) $\frac{x^2-y^2}{x^2+a^2}$　　(4) $\frac{x^3-3}{x^2+1}$

等就 x 說都是分式,式中的 a, 1, x^2-y^2, 和 x^3-3 是各分式的分子; x, $1+x$, x^2+a^2 和 x^2+1 是各分式的分母.

當分子的次數低於分母的次數時,叫做眞分式; 上列 (1) 和 (2) 兩個分式都是眞分式. 又當分子的次數等於或高於分母的次數時,叫做假分式;假分式由除法可化成整式與眞分式的和,這叫做帶分式. 上列 (3) 和 (4) 兩分式,都是假分式,實行除法得帶分式 $1-\frac{y^2+a^2}{x^2+a^2}$ 和 $x-\frac{x+3}{x^2+1}$。

§114. 分式的變形

(1) 設 $\frac{a}{b}=Q$.　　則 $a=bQ$.

因此，　$am=(bQ)m=(bm)Q$，$(m\neq 0)$.

即　$$\frac{am}{bm}=Q=\frac{a}{b}.$$

故分式的分母分子，同以一不等於零的數或式去乘或除它們，數值不變.

(2) 設 $m=-1$，則得 $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$.

由此可知分式的分母分子，同時改符號其數值不變，又如欲將原式的符號改變，祇須改變其分母或分子的符號.

例一：$\frac{a-b}{a+b}=\frac{-a+b}{-a-b}$.

例二：$\frac{a-b}{a+b}=-\frac{-(a-b)}{a+b}=-\frac{-a+b}{a+b}$.

例三：$\frac{a+b}{a-b}=-\frac{a+b}{-(a-b)}=-\frac{a+b}{-a+b}$.

§115. 約分　消去分式的分母和分子中所有各個共同因式，使原分式成爲最簡單的形式；這叫做約分．約分所得的結果，叫做最簡分式，通常行約分，直接用分式的分母和分子的H.C.F.同時去除它們便得.

例一：約 $\frac{42a^8b^2x^5}{14a^5bx^6}$ 成最簡分式.

〔解〕 $42a^3b^2x^5$ 和 $14a^5bx^6$ 的 H.C.F. $=14a^3bx^5$.

$$\therefore \quad \frac{42a^3b^2x^5}{14a^5bx^6}=\frac{42a^3b^2x^5\div14a^3bx^5}{14a^5bx^6\div14a^3bx^5}=\frac{3b}{a^2x}.$$

例二： 約 $\frac{x^2+4x-5}{x^2+5x-6}$ 成最簡分式.

〔解〕 $\frac{x^2+4x-5}{x^2+5x-6}=\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+6)}$.

同以 $(x-1)$ 除原分式的分母和分子，得：

$$\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+6)}=\frac{x+5}{x+6}.$$

例三： 化簡 $\frac{x-xy}{y^2-y}$.

〔解〕 原式 $=\frac{x(1-y)}{y(y-1)}=-\frac{x(y-1)}{y(y-1)}=-\frac{x}{y}$.

注意： 在算術中，$2+\frac{5}{7}$ 中的加號可以省去，而寫作 $2\frac{5}{7}$；但在代數學中，因 $a\frac{y}{x}$ 是表示 $a\times\frac{y}{x}$ 的緣故，所以 $a+\frac{y}{x}$ 中的加號不能省去.

習題四十五

化簡下列各分式：

1. $\frac{ab^2y}{a^2bx^2}$.　　2. $\frac{9a^2bx^2y}{15ab^2xy^2}$.

3. $\frac{x^2-y^2}{(y-x)^2}$.　　4. $\frac{x^2-y^2}{y^2-x^2}$.

5. $\dfrac{a^3+1}{a^2-1}$.　　6. $\dfrac{a^2-1}{a^2-1}$.

7. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}$.　　8. $\dfrac{x^2+xy-6y^2}{8y^2-2xy-x^2}$.

9. $\dfrac{(x-y)^2-1}{(y+1)^2-x^2}$.　　10. $\dfrac{(x-y)^3+(y-x)}{(y-x)^4+(x-y)}$.

§116. 通分　將 A, B, C 諸分式化爲新分式 A', B', C'. 使其值分別和原分式相等,而各以原有諸分母的最低公倍式爲新分母,這叫做通分.

例一:　試將 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{ab}$, $\dfrac{a}{b^2}$ 通分.

〔解〕　諸新分式的分母,須爲原有各分式的分母的最低公倍式;而各分母 a, ab, b^2 的最低公倍式爲 ab^2.

又因所求諸新分式,須與原有諸分式分別等值,即原有各分式的分母分子,須同時乘以同一因式.

故將 $\dfrac{1}{a}$ 的分母變爲 ab^2 時,其分母分子均須同時乘以同一因式 b^2.

$$\frac{1}{a}=\frac{1\times b^2}{a\times b^2}=\frac{b^2}{ab^2}.$$

同理　$\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1\times b}{ab\times b}=\dfrac{b}{ab^2}$ (分母分子同乘以 b).

$\dfrac{a}{b^2}=\dfrac{a\times a}{b^2\times a}=\dfrac{a^2}{ab^2}$ (分母分子同乘以 a).

故所求的新分式爲 $\frac{b^2}{ab^2}$, $\frac{b}{ab^2}$, $\frac{a^2}{ab^2}$.

例二: 試將 $\frac{1}{x+y}$, $\frac{2}{x-y}$, $\frac{4}{(x-y)^2}$ 通分。

〔解〕 $x+y$, $x-y$, $(x-y)^2$ 的 L.C.M. $=(x+y)(x-y)^2$.

$$\therefore\quad \frac{1}{x+y}=\frac{1\times(x-y)^2}{(x+y)(x-y)^2}=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)^2}.$$

$$\frac{2}{x-y}=\frac{2\times(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y)(x+y)}=\frac{2(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)^2}.$$

$$\frac{4}{(x-y)^2}=\frac{4\times(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}=\frac{4(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}.$$

故所求的新分式爲

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)^2},\quad \frac{2(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)^2},\quad \frac{4(x+y)}{(x+y)(x-y)^2}.$$

§117. 分式加減 代數學中的分式加減和算術中的分數加減相同,如分母相同,卽以分子的和或差爲新分子,而分母不變; 如分母不同,先用通分法,化各分式的分母爲同分母,然後依同分母的分式加減法計算,但計算所得的結果,必須化成最簡分式.

例一: 化簡 $\frac{x+1}{x+y}+\frac{y+1}{x+y}-\frac{2}{x+y}$.

〔解〕 原式$=\dfrac{x+1+y+1-2}{x+y}$

$$=\frac{x+y}{x+y}$$

$$=1.$$

例二： 化簡 $-x+\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

〔解〕 原式$=\dfrac{-x(x-1)(x+1)+x^2(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{-x^3+x+x^3+x^2-x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

例三： 化簡 $\dfrac{x+2y}{x^2-xy}+\dfrac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2}-\dfrac{2x+3y}{x^2-2xy}$.

〔解〕 原式$=\dfrac{x+2y}{x(x-y)}+\dfrac{2x+y}{(x-y)(x-2y)}-\dfrac{2x+3y}{x(x-2y)}$

$$=\frac{(x+2y)(x-2y)+(2x+y)x-(2x+3y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{x^2-4y^2+2x^2+xy-2x^2-xy+3y^2}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{x+y}{x(x-2y)}.$$

習題四十六

化簡下列各式:

1. $\dfrac{x^6-1}{x^7}-\dfrac{1}{x^7}$. 2. $\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{bc}-\dfrac{1}{ca}$.

3. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+2}+x$. 4. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{2x+2}+\dfrac{5}{x^2-1}$

5. $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{b-a}-1$. 6. $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

7. $\dfrac{3-x}{1-3x}-\dfrac{3+x}{1+3x}-\dfrac{1-1bx}{9x^2-1}$.

8. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}$.

9. $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}-\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$.

10. $\dfrac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}+\dfrac{x+b}{x^2-(c+a)x+ac}$.

§118. 分式乘法 代數學中的分式乘法和算術中的分數乘法相同;即以分子的積為所求積的分子,以分母的積為所求積的分母.又,所得積的分母分子可約時,當行約簡.

設以 x 代 $\dfrac{A}{B}$, y 代 $\dfrac{C}{D}$,

則 $$A=Bx,\qquad C=Dy.$$

$$\therefore\quad AC=Bx\cdot Dy=BDxy.$$

於是 $$\frac{AC}{BD}=xy.$$

即 $$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

例一：
$$\frac{2b}{5a^2}\times\frac{15a}{4b^2}=\frac{2b\times 15a}{5a^2\times 4b^2}$$
$$=\frac{30ab}{20a^2b^2}$$
$$=\frac{3}{2ab}.$$

分式相乘，通常先將相乘各分式的分子寫成連乘式做新分子，而將各分母寫成連乘式做新分母，行約分，然後相乘，以謀計算便利。

例二：
$$\frac{x-y}{x^2+xy}\times\frac{x+y}{xy-y^2}=\frac{(x-y)\times(x+y)}{x(x+y)\times y(x-y)}$$
$$=\frac{1}{xy}.$$

例三：
$$\frac{y}{x^2+xy}\times(x+y)=\frac{y}{x(x+y)}\times\frac{x+y}{1}$$
$$=\frac{y(x+y)}{x(x+y)}$$
$$=\frac{y}{x}.$$

例四：
$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-16}\times\frac{x^2+x-20}{x^2+x-6}\times\frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-15}$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x-4)}\times\frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-2)}\times\frac{(x+3)(x+4)}{(x+5)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x+5)(x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)(x-2)(x+3)(x+5)(x-3)}$$

$$=1.$$

§119. 分式除法　代數學中的分式除法與算術中的分數除法相同,茲再說明其理由如下:

設用分式 $\frac{A}{B}$ 除某式 P (P 爲整式或分式);

令　$$\frac{A}{B}=Q,$$

則　$$A=BQ.$$

因此,　$$P\div\frac{A}{B}=\frac{P}{Q}=\frac{PB}{QB}=\frac{PB}{A}=P\times\frac{B}{A}.$$

故用 $\frac{A}{B}$ 除 P 的結果,與以 $\frac{B}{A}$ 乘 P 的結果相同.

例一:　$$\frac{1}{a}\div\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\times\frac{b}{1}=\frac{b}{a}.$$

例二:　$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab}\div\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab}{a^2-ab}\times\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$$

$$=\frac{a(a+b)}{a(a-b)}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$=\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}.$$

例三： $$\left(1-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{x^3}{y^3}-1\right)=\frac{x-y}{x}\div\frac{x^3-y^3}{y^3}$$
$$=\frac{x-y}{x}\times\frac{y^3}{x^3-y^3}$$
$$=\frac{x-y}{x}\times\frac{y^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$
$$=\frac{y^3}{x(x^2+xy+y^2)}.$$

§120. 逆式 二式的積爲 1 時，則這二式叫做互爲逆式.

例一： 設 $a\times b=1$, 則 a 是 b 的逆式，b 也是 a 的逆式.

例二： $a\times\frac{1}{a}=1$, 特别以 a 爲主,則 a 的逆式是 $\frac{1}{a}$

例三： $\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1$, 特别以 $\frac{b}{a}$ 爲主,則 $\frac{b}{a}$ 的逆式是 $\frac{a}{b}$.

由上三例,可得一除法規則,卽:以甲式除乙式的結果,等於用甲式的逆式乘乙式.

習 題 四 十 七

求下列各式的結果:

1. $\frac{4x^3y^2}{7ab}\times\frac{14a^2b^2}{8x^2y^2}$.　　2. $\frac{bz}{ax}\times\frac{ax}{by}\times\frac{cy}{cz}$.

3. $\frac{2}{5-a}(a+2)(a-5)$.　　4. $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)\left(\frac{a}{b}-1\right)$.

5. $\dfrac{a(a-b)}{a^2+2ab+b^2}\times\dfrac{b(a+b)}{a^2-2ab+b^2}$.

6. $\dfrac{1-x^3}{1-x^2}\times\dfrac{x^3+1}{x^4+x^2+1}$.　　7. $\dfrac{36a^2b^3}{7mn}\div\dfrac{21mn}{18ab}$.

8. $13x^3\div\dfrac{x^3}{y^3}$.　　9. $\dfrac{13x^3}{y^3}\div x^3$.

10. $\dfrac{2ab-b^2}{a+9b}\div\dfrac{18b^2-11ab+a^2}{81b^2-a^2}$.

11. $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}\div\dfrac{x^4-y^4}{3x^2y-3xy^2}$.

12. $\dfrac{x^6+y^6}{x^6-y^6}\times\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x^4-x^2y^2+y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

§121. 繁分式　分式的分母或分子也是分式時，叫做繁分式．對於繁分式而言，以上所講的分式，叫做簡分式．繁分式亦可化爲簡分式．

例一： 化 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 成簡分式．

〔解〕 原式$=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

例二： 化簡 $\dfrac{\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}}{\frac{x+y}{x-y}}$.

〔解〕 原式$=\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\div\dfrac{x+y}{x-y}$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\times\frac{x-y}{x+y}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

例三： 化簡 $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}$

〔解〕 原式$=\dfrac{x}{x-\dfrac{x(x+2)}{x(x+2)-(x+1)}}$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{x(x^2+x-1)}{x(x^2+x-1)-(x^2+2x)}$$

$$=\frac{x^2+x-1}{x^2-3}.$$

§ 122. **分式的值** 分式中的分子分母所含的文字，如都以某數值代入時，分式亦得定值：但是那些使分母爲零的文字的值須除外。

例一： 設 $x=1$, $x=2$, 問 $\dfrac{x+1}{x^2-9}$ 的數值各爲若干？

〔解〕 $x=1$: $\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{1+1}{1-9}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$.

$x=2$: $\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{2+1}{4-9}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}$.

例二: 設 $x=3$, $y=-1$; 求 $\frac{x^2+xy-6y^2}{x^2-4xy+4y^2}$ 的值.

〔解〕 當 $x=3$, $y=-1$ 時,則

$$原式=\frac{3^2+3\times(-1)-6(-1)^2}{3^2-4\times3\times(-1)+4(-1)^2}$$

$$=\frac{9-3-6}{9+12+4}$$

$$=\frac{0}{25}$$

$$=0.$$

習題四十八

化簡下列各式(1—8):

1. $\left(\frac{a+5x}{a-5x}-\frac{a+5x}{5x-a}\right)\times\left(\frac{7}{5a-x}-\frac{1}{a-x}\right)$.

2. $\frac{(a^2-b^3)(a^6-b^6)}{(a+b)^4(a-b)^2}\times(a+b)\div\frac{1}{a+b}$

3. $\frac{3x^4+5x^3-7x^2+2x+2}{2x^4+3x^3-2x^2+12x+5}\div\frac{1}{x-1}$.

4. $2^{\frac{x+y}{3}}\cdot3^{\frac{x-y}{5}}+5^{\frac{x-2y}{4}}-4^{\frac{y-2x}{5}}$

5. $\dfrac{\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{b}{a-b}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

6. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}$.

7. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

8. $x-y-\dfrac{1}{x+y\dfrac{xy}{x-y}}$.

9. 設 $x=3,\ y=-2$; $x=3,\ y=-1$; 及 $x=\dfrac{5}{13},\ y=\dfrac{2}{13}$;

求下列二分式的值：

(a) $\dfrac{x+2y-1}{x^2+y^2-1}$. (b) $\dfrac{(2x-3y)(x+y+1)}{(2x-3y)^2}$.

10. 分式 $\dfrac{8x-9}{(x-1)^2}$ 的值爲零時，x 的值爲何？

第十二章　分式方程式

§123. 分式方程式　方程式中,如有一項關於未知數爲分式,則這方程式叫做分式方程式.如:

$$\frac{1}{x}+4x=5,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3,$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=1,$$

都是分式方程式.對分式方程而言,

$$\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{2}x=\frac{6}{5},$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{xy}{15}=6,$$

叫做整方程式.

§124. 分式方程式的解法(一)(化整法)

例一:　解 $\frac{4}{x}+x=5.$

〔解〕 以 x 乘方程式的左右二端;得:

$$4+x^2=5x.$$

即 $x^2-5x+4=0.$

分解因式: $(x-1)(x-4)=0.$

故 $x=1$, 或 $x=4.$

(學者自行校驗)

例二: 解 $\dfrac{3x}{x+6}-\dfrac{x}{x+5}=2.$

〔解〕 用 $(x+6)$ 和 $(x+5)$ 的 L.C.M. $(x+6)(x-5)$ 遍乘各項使消去分母;得:

$$3x(x+5)-x(x+6)=2(x+6)(x+5).$$

解之,得: $x=\dfrac{60}{13}.$

(學者自行校驗)

由上二例,知用化整法解分式方程式的步驟爲:

(一) 用原方程式中所有諸分母的 L.C.M. 徧乘方程式的各項,消去各分母使成爲整方程式.

(二) 整理並解所得的整方程式.

(三) 校驗.

注意: 用化整法解分式方程式,步驟(三)頗關重要,理由見§§ 121—123.

§ 125. 分式方程式的解法(二)(併項法)

例一: 解 $\dfrac{4}{x}+x=5.$

〔解〕 移項 $\frac{4}{x}+x-5=0.$

合併各項, $\frac{4+x^2-5x}{x}=0.$

令分子爲零,則 $4+x^2-5x=0.$

$\therefore \quad x=1,$ 或 $x=4.$

例二: 解 $\frac{3x}{x+6}-\frac{x}{x-5}=2.$

〔解〕 移項, $\frac{3x}{x+6}-\frac{x}{x-5}-2=0.$

合併各項, $\frac{3x(x+5)-x(x+6)-2(x+6)(x+5)}{(x+6)(x+5)}=0.$

即 $\frac{13x+60}{(x+6)(x+5)}=0.$

令分子爲零,則 $13x+60=0.$

$\therefore \quad x=-\frac{60}{13}.$

由上二例,可知用併項法解分式方程式的方法爲:

(一) 將原方程式的各項完全移至方程式的左端,使右端爲零.

(二) 用併項法化簡方程式的左端,使成爲 $\frac{N}{D}$ 的形式.

(三) 約簡分式 $\frac{N}{D}$,使成爲最簡分式 $\frac{N'}{D'}$.

(四) 令 $N'=0$, 並求其解.

(五) 校驗.

習題四十九

試用化整法和併項法解下列方程式:

1. $\dfrac{2x-4}{x-1}-\dfrac{2x-26}{x-3}=0$.

2. $\dfrac{2x+5}{5x+3}-\dfrac{2x-1}{5x+2}=0$.

3. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x+6}=1$.

4. $\dfrac{1}{(x-3)}+\dfrac{2}{(x+3)}=\dfrac{3}{(x+5)}$.

5. $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+6}$.

6. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-6}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-8}$.

§126. 客根 用化整法解分式方程式,往往得著不適合原方程式的根;這種根叫做客根.

例一: 解 $\dfrac{2x+5}{2x-1}-\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{-15}{(2x-1)(x-2)}$.

〔解〕 各分母的 L. C. M. $=(2x-1)(x-2)$.

以 $(2x-1)(x-2)$ 徧乘方程式的各項,得:

$$(2x+5)(x-2)-(x+3)(2x-1)=-15.$$

解之,得: $x=2.$

校驗　以 $x=2$ 分別代入原方程式的二端:

$$\text{左端}=\frac{2\times2+5}{2\times2-1}-\frac{2+3}{2-2}=\frac{9}{3}-\frac{5}{0}=3-\frac{5}{0}.$$

$$\text{右端}=\frac{-15}{(2\times2-1)(2-2)}=\frac{-15}{3\times0}=-\frac{15}{0}.$$

故 $x=2$ 不是原方程式的根而是客根。

例二:　解 $\dfrac{x+5}{x-5}+\dfrac{x-5}{x+5}=\dfrac{10}{3}.$

〔解〕　$3[(x+5)^2+(x-5)^2]=10(x-5)(x+5).$

整理, $x^2=25.$

$$\therefore\quad x=\pm5.$$

校驗:　以 $x=5$ 代入原方程式:

$$\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{5+5}{5-5}+\frac{5-5}{5+5}=\frac{10}{0}+\frac{0}{10}=\frac{10}{0}\neq\frac{10}{3}.$$

以 $x=-5$ 代入原方程式.

$$\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{-5+5}{-5-5}+\frac{-5-5}{-5+5}=\frac{1}{-10}+\frac{-10}{0}=-\frac{10}{0}\neq\frac{10}{3}.$$

故 $x=\pm5$ 都不是原方程式的根,而是客根。

注意:　如求得的根,都不能滿足原方程式,則這方程式無根。

§127. 客根的討論

例一： 設方程式 $x-3=6.$ ……………………………(1)

以 $(x-2)$ 徧乘 (1) 式的各項，則

$$(x-3)(x-2)=(x-2)\times 6. \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

去括號並加以整理，

$$x^2-11x+18=0.$$

解之，得： $x=9$ 或 $x=2.$

所得 x 的二值中，9 是(1)式的根，而 2 則不是，故 2 是(1)的客根。客根 2 的所以出現，是由於(1)式各項徧乘以 $(x-2)$ 的緣故，但是，$x=2$ 雖然不能滿足 (1) 式 $x-3=6.$ 它卻能滿足(2)式。即 $x=2$ 是 (2) 式的根不是 (1) 式的根，故對 (1) 式說是客根。

例二： $(x-2)(x-3)=6(x-2).$ ………………(1)

以 $(x-2)$ 徧除(1)式的兩端，得：

$$x-3=6. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)式的根是 9，而 (1) 式的根是 2 和 9；$x=2$ 一根的所以失去，是由于以 $(x-2)$（其值爲零）徧除(1)式兩端所致。

由上二例，可知：

(一)方程式的兩端，若各乘以含有未知數的整式（此式的值可以爲零），則所得新方程式的根的個數，有時比原方程式所應有

的根的個數要多；即有時會引入客根。

(二) 方程式的兩端，若各除以含有未知數的整式(此式的值可以為零)，則所得新方程式的根的個數，有時比原方程式所應有的個數要少，即有時會失去眞根。

§128. 決定根和客根的方法　由上節討論，知解分式方程式所得的根，有時不適合原方程式，其原因在所得的根，能使乘式(原方程式諸分母的L.C.M.)為零。因此得一判別根和客根的標準如下：

(一) 用化整法求解時，所求的根，能令原方程式的諸分母中某一分母的值為零，則這值是原方程式的客根；反之便是眞根。

(二) 用併項法求解時，依 §124 的方法，變原方程式為 $\frac{N}{D}$，若 $\frac{N}{D}$ 為最簡分式，則解 $N=0$ 所得的值，都是原方程式的根。

例一：　在 §126 的例一中，$x=2$ 能使原方程式左端第二項的分母 $x-2=0$，故 $x=2$ 是原方程式的客根。

例二：　用併項法解 $\frac{x^2-2}{(x-1)(x-2)}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x-1}$.

〔解〕　移項　$$\frac{x^2-2}{(x-1)(x-2)}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}=0.$$

併項　$$\frac{x^2-4x+3}{(x-1)(x-2)}=0$$

約分　　　　$\frac{x-3}{x-2}=0$.

令　　　　$x-3=0$,

則　　　　$x=3$.

若不約分而令　　$x^2-4x+3=0$,

則　　　　$x=3$, 或 $x=1$.

而 1 是客根.

卽 $x=3$ 是原方程式的根,而 $x=1$ 是客根.

故用併項法解分式方程式,在併項以後,必須化 $\frac{N}{D}$ 成最簡分式.

習 題 五 十

解下列方程式,並捨去客根:

1. $\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x+6}=1$.

2. $\frac{3}{5-3x}=\frac{4-3x}{3x-5}+\frac{7}{5}x$.

3. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}$

4. $\frac{2x-3}{2x-4}-\frac{2x-4}{2x-5}=\frac{2x-7}{2x-8}-\frac{2x-8}{2x-9}$

(提示: $\frac{2x-3}{2x-4}=1+\frac{1}{2x-4}$)

5. $\frac{x+7}{x+5}+\frac{x+9}{x+7}=\frac{x+6}{x+4}+\frac{x+10}{x+8}$.

6. $\frac{x-7}{x-5}-\frac{x-8}{x-6}=\frac{2x-7}{2x-5}-\frac{2x-11}{2x-9}$

§129. 文字方程式　方程式中,除所含未知數及數字外,若還含有其他的文字,則這種方程式叫做文字方程式,解文字方程式只須將未知數以外的文字看作已知數,依照通常解法解之,即得.

例一:　解 $ax+1=b(x+2)$.

〔解〕　移項　$ax-bx=2b-1$,

$$\therefore\quad x=\frac{2b-1}{a-b}.$$

例二:　解 $\frac{a}{x}+\frac{3a}{2x}=\frac{5}{4}$。

〔解〕　由化整法,得:

$$4a+6a=5x$$

$$\therefore\quad x=2a.$$

§130. 聯立分式方程式的解法　用化整法先去各分式的分母,使成爲聯立整方程式,然後用聯立整方程式的解法求解;但將分式方程式化爲整方程式求解,往往會得著不適合於原方程組的解,

這種解叫做客解.故爲防備引入客解起見,必須就所得的解一一校驗.

例:
$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{y+7}=\dfrac{x-2}{y-3}, & \cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{x+3y-4}{x+y}=2. & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

〔解〕 去分母並加以整理;得

$$\begin{cases}2x-y=1, & \cdots\cdots(3)\\ x-y=-4. & \cdots\cdots(4)\end{cases}$$

解 (3) 和 (4), 得 $x=5,\ y=9$.

校驗: 以 $x=5,\ y=9$ 代入 (1), (2) 二式,不能使其中任何一式的分母爲零,卽非客解,故 $x=5,\ y=9$ 是 (1) 和 (2) 的解.

習題五十一

解下列各方程式:

1. $\dfrac{1}{x+2a}=\dfrac{a}{x-3a}+1.$

2. $\dfrac{3a}{x+a}-\dfrac{x-a}{x-a}=\dfrac{x^2}{a^2-x}.$

3. $\dfrac{7}{x+3a}+\dfrac{1}{x-3a}=\dfrac{x^2}{x^2-9a^2}.$

4. $\dfrac{2a}{x^2-a^2}+\dfrac{x}{x-a}=1.$

5. $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y-1}=\dfrac{2}{3}.\\[2ex]\dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$　　6. $\begin{cases}\dfrac{x-7}{2y}=4.\\[2ex]\dfrac{x}{6y}+\dfrac{11}{10}=\dfrac{2x-5y}{5y}.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{x-4}{y+4}=\dfrac{x-3}{y+7}.\\[2ex]\dfrac{x+2}{y-2}=\dfrac{x+5}{y-1}.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{m}{xy}.\\[2ex]\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{n}{xy}.\end{cases}$

§131. 應用問題

例一：　二數的和是 15，而它們的倒數的和爲 $\frac{3}{10}$；求二數.

〔解〕　設一數是 x，則他一數是 $15-x$；依題意得方程式：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{15-x}=\frac{3}{10}.$$

去分母，並加以整理，$x^2-15x+50=0$.

分解因式，　　$(x-5)(x-10)=0$.

$$\therefore\quad x=5,\text{ 或 } x=10.$$

校驗：　因 $x=5$ 和 $x=10$ 都不致使原方程式的分母爲零，故都是所求的根。

答　二數是 5 和 10.

例二：　二數的倒數差是 $1\frac{1}{6}$，若以小數除大數，得商是 $7\frac{1}{8}$；求二數。

〔解〕 設大數是 x, 小數是 y, 依題意得方程式:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=1\dfrac{1}{6}. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{x}{y}=7\dfrac{1}{8}. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

去分母 $$\begin{cases}6(x-y)=7xy \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ 8x=57y \cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

由 (4) 得: $$x=\frac{57}{8}y. \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

以 (5) 代入 (3), 得:

$$6y\left(\frac{57}{8}-1\right)=7\times\frac{57}{8}y^2. \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

解 (6),得: $$\begin{cases}y_1=\dfrac{42}{57},\\ y_2=0.\end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases}x_1=\dfrac{21}{4}.\\ x_2=0.\end{cases}$$

校驗: 因以 $x=0$, $y=0$ 代入 (1) 式,得:

$$\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=1\frac{1}{6};$$

故 $x=0$, $y=0$, 是客解。而 $x=\dfrac{21}{4}$, $y=\dfrac{42}{57}$ 適合(1)和(2), 即爲 (1) 和 (2) 的公解。

習 題 五 十 二

1. 大小二數的和是 36, 大數比小數的 4 倍多 1; 求二數。

2. 二數的倒數的和是 $\frac{9}{2}$，小數比大數少 $1\frac{3}{4}$；求二數。

3. 有茶葉三種：上等每兩比中等貴 2 角，中等每斤比下等貴 4 元 8 角。今上等茶葉買 60 元，下等茶葉買 30 元，又以 90 元買中等茶葉，而斤數與上等下等二種茶葉的斤數的和相等；求三種茶葉的價格。

4. 一數的平方與其倒數的平方和是 $\frac{97}{36}$；求這數。

5. 男工 2 人，女工 1 人，作工若干日，得工資 24 元；若男工 1 人，女工 3 人，工作的日數相同，可得工資 27 元；但男女工的工資每人每日加 3 角時，男工 1 人可得 7 元的日數，與女工 1 人可得 5 元的日數相等，求男女工人每日的工資。

6. 某日上午十時三十分，有一貨車從甲站出發到乙站；上午十一時三十分，有一客車亦從甲站出發到乙站。當貨車開至兩站間距離的 $\frac{2}{3}$ 時，因機車發生阻礙，將速度減低到原來速度的 $\frac{3}{4}$，午後一時十分客車在離乙站 15 公里的地方追及貨車。假定客車速度是貨車減低速度後的速度的二倍，求二站間的距離。

7. 甲，乙，丙三船，往返於 A，B 兩港間，甲船每時比乙船快 $\frac{1}{2}$ 浬，故航行時間少 $1\frac{1}{2}$ 小時；又乙船每時比丙船快 $\frac{3}{4}$ 浬，航行時間少 $2\frac{1}{2}$ 小時。求兩港間的距離。

8. 一火車以一定的速度由 A 站向 B 站進行. 若其速率每時增加 6 哩,則早到 4 小時;若每時減低速度 6 哩,則遲到 6 小時,求 A, B 兩站間的距離.

雜題

求下列各式的 H. C. F. 及 L. C. M. (1—4):

1. $x^3+3x^2+3x+1,\ x^3y+2x^2y(1+y)+2xy^2(1+2y)+2y.$

2. $x^5+x^4-x^3-x^2,\ x^3y^2-3x^2y^3+3xy^4-y^5.$

3. $x-6x^3+13x^2-12x+4,\ x^3+2x^2-13x+10.$

4. $x^3+3x^2+3x+1,\quad x^3+2x^2-13x+10,\quad x^4-6x^3+13x^2-12x+4.$

化簡下列各式 (5－14):

5. $\dfrac{b}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{c}{(b-c)(c-a)}-\dfrac{a}{(c-a)(a-b)}.$

6. $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{2a}{a-x}-\dfrac{x+2a}{a^2-x^2}-\dfrac{x}{(a+x)^2}.$

7. $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x^2+1}.$

8. $\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{x^3+2x^2-13x+10}\times\dfrac{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}{x^3+4x^2+5x+2}\div\dfrac{x-1}{x+2}.$

9. $\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}\times\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\div\dfrac{x^2-y^2}{x^2y-xy^2}.$

10. $\left[\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]\div\frac{x^4+y^4}{x^2y+xy^2}\times\left(1+\frac{y}{x}\right)$.

11. $\dfrac{\dfrac{x^6+y^6}{x^6-y^6}-\dfrac{x+y}{x-y}}{\dfrac{x^4-x^2y^2+y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}}$,

12. $\dfrac{\dfrac{y^3+x^3}{\frac{x^3}{y^3}-1}\times\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}+1}}{\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}}$.

13. $\dfrac{1}{1-\dfrac{x-2}{x-\dfrac{x}{x+1-\dfrac{1}{x}}}}$.

14. $2-\dfrac{x}{x-1+\dfrac{x+1}{x+\dfrac{x-1}{x+1}}}$.

設 $x=1, y=2, z=3$, 求下列各式的值 (15—17)：

15. $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$,

16. $\frac{1}{x+y+z}+\frac{x+y}{x+y-z}+\frac{1}{x-y+z}$.

17. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{y^2+1}{y}-\frac{z^2+1}{z}$.

解下列方程式 (18—22):

18. $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+6}{x+5}+\frac{x+9}{x+8}$.

19. $bx+c=mx-n$.

20. $\frac{-3x+a}{3x+a}+\frac{3x+a}{a-3x}\quad\frac{2a}{9x^2-a^2}$.

21. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{3}. \\ \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y+1}=\dfrac{1}{2}. \\ \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{y}{y-1}=\dfrac{-1}{(x-1)(y-1)}. \end{cases}$

第十三章　開方法,指數

§132. 冪和方根　a^n表示n個a的連乘積,叫做a的n次冪.

設a, b都是正數,而

$$a^n=b. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

倘欲就(1)式,由b求a,即須將b開n次方;通常記做

$$a=\sqrt[n]{b}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

在(2)式中,a叫做b的n次方根.

"$\sqrt{\ }$"爲根號,通常與橫線或括號相連,寫作$\sqrt{\ }$或$\sqrt{(\ )}$,藉以表明根號所及的範圍.根號內的b,叫做被開方數或式,根號左上方所注的小型數字n是指明根的次數的,叫做根指數,根指數是2時常省略不記,如$\sqrt[2]{b}$通常記做$\sqrt{b}$,又$\sqrt{b}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{b}, \cdots\cdots, \sqrt[n]{b}$分別讀做$b$的二次根,三次根,四次根,……,$n$次根.

由根求冪叫做乘方;由冪求根叫做開方,開方是乘方的逆運算.

注意:　(一)a^2又叫做a的平方,故$\sqrt{a}$又叫做a的平方根.

(二)a^3又叫做a的立方,故$\sqrt[3]{a}$又叫做a的立方根.

§133. 單項式的冪

例一：計算 $\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^3$.

〔解〕由指數定律 $(abc)^n=a^mb^mc^m$ 和 $(a^m)^n=a^{mn}$ 知

$$\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3(x^2)^3(y)^3$$

$$=\frac{1}{27}x^6y^3.$$

例二：計算 $\left(-\frac{3y^3}{x^2}\right)^6$.

〔解〕$\left(-\frac{3y^3}{x^2}\right)^6=\left[(-1)\left(\frac{3y^2}{x^2}\right)\right]^6$

$$=(-1)^6\left(\frac{3y^3}{x^2}\right)^6$$

$$=\frac{629y^{18}}{x^{12}}.$$

由上列二例，知求單項式的 n 次冪的法則：

（一）先求單項式數字係數的 n 次冪為所求冪的係數，次以 n 乘各文字因子的指數，為所求冪中各文字因子的指數.

（二）若單項式的符號是負號，則依 n 是奇數或偶數在上步結果前分別附以負號或正號.

§134. 單項式的方根 在算術中，我們曾用因數分解法來求一數的方根.

如：
$$\sqrt{144}=\sqrt{2^4\times 3^2}$$
$$=2^2\times 3$$
$$=12.$$

在代數學中,單項式的方根,亦可準用因式分解法來求出它。

例： $\sqrt[3]{125a^3}=5a.$

$\sqrt{64x^2y^2}=8xy.$

$\sqrt[5]{-32x^5y^{10}}=-2xy^2.$ 〔注意上節法則(二)〕

$\sqrt{\dfrac{81x^6}{49y^4}}=\dfrac{9x^3}{7y^2}.$

由上舉各例,得單項式開方的規則如下：

(一) 求數字係數的方根,根據上節法則(二)附以適當符號,作爲方根的係數.

(二) 以根指數分別除根號內各文字的指數,而以所得的商,爲根內各該文字的指數.

(三) 分式開方,係將分母分子分別開方,以分子的方根爲根的分子,分母的方根爲根的分母.

習題五十三

1. 求 $\dfrac{b^2}{a^2}$ 的平方及立方.

2. 求 $\dfrac{b^3}{a^5}$ 及 $-\dfrac{b^3}{a^5}$ 的立方根.

求下列各式的平方根 (3－6)：

3. $25x^6y^4$.

4. $16^2b^4c^6$.

5. $\dfrac{49x^6y^4}{4a^2}$.

6. $\dfrac{121a^2b^4c^6}{36x^2y^4}$

求下列各式的立方根 (7—10)：

7. $8a^3b^6$.

8. $-64x^6y^3$.

9. $\dfrac{8x^6}{125y^9}$

10. $-\dfrac{54x^9}{128y^{36}}$

§ 135. 完全平方式的平方根

適合公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

的三項式 $a^2\pm 2ab+b^2$，和那可以化成這種形式的多項式，叫做完全平方式；而呈 $(a\pm b)$ 形式的二項式叫做那完全平方式的平方根。

例一： 求 $9x^2y^2-30xy+25$ 的平方根。

〔解〕 $\sqrt{9x^2y^2-30xy+25}$

$=\sqrt{(3xy)^2-2(3xy)\times(5)+(5)^2}$

$=\sqrt{(3xy-5)^2}$

$=3xy-5.$

例二： $\sqrt{\left(\dfrac{9a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{9a^2}-2\right)}=?$

〔解〕 原式$=\sqrt{\left(\dfrac{9a^2}{b^2}-2+\dfrac{b^2}{9a^2}\right)}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3a}{b}\right)^2-2\left(\frac{3a}{b}\right)\left(\frac{b}{3a}\right)+\left(\frac{b}{3a}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3a}{b}-\frac{b}{3a}\right)^2}$$

$$=\frac{3a}{b}-\frac{b}{3a}.$$

§136. 完全立方式的立方根 適合公式

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

的四項式 $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ 和那可以化成這種形的多項式叫做完全立方式；而呈 $(a\pm b)$ 形式的二項式叫做那完全立方式的立方根.

例一： $\sqrt[3]{125x^3+1+75x^2+15x}=?$

〔解〕 原式 $=\sqrt[3]{125x^3+75x^2+15x+1}$

$$=\sqrt[3]{(5x)^3+3(5x)^2\times 1+3(5x)\times 1^2+1^3}$$

$$=\sqrt[3]{(5x+1)^3}$$

$$=5x+1.$$

例二： $\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}-\frac{y^3}{27}-\frac{4y}{x^2}+\frac{2y^2}{3x}}=?$

〔解〕 原式 $=\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}-\frac{4y}{x^2}+\frac{2y^2}{3x}-\frac{y^3}{27}}$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}\right)^3-3\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(\frac{y}{3}\right)+3\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{y}{3}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^3}$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-\frac{y}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{2}{x}-\frac{y}{3}.$$

習題五十四

求下列各式的平方根 (1—5)：

1. $9x^2+24xy+16y^2$.　　2. $16x^2-24xy+9y^2$.

3. $49x^6y^4+28x^3y^2+4$.　　4. $\dfrac{\frac{1}{4}x^2-5xy+25y^5}{4x^2-\frac{4}{3}xy+\frac{1}{9}y^2}$.

5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

求下列各式的立方根 (6—10)：

6. $x^3+6x^2+12x+8$.　　7. $8x^3-12x^2+6x-1$.

8. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$.

9. $27x^3-54+\dfrac{36}{x^3}-\dfrac{8}{x^6}$　　10. $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^3+6x^2+12x+8}$.

§137. 一般多項式的平方根 由公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

知將多項式的第一項開平方後，即得所求根的第一項；從多項式中減去 a^2 以後，餘式爲

$$2ab+b^2,$$

或　$(2a+b)b$;

以 $(2a+b)$ 除餘式 $(2ab+b^2)$，卽得商 b，亦卽所求根的第二項，其演算方式如下：

$$
\begin{array}{l|l}
a^2+2ab+b^2 & a+b\ (\text{根}) \\
\cline{2-2}
a^2 & \\
\cline{1-1}
\quad 2ab+b^2 & \\
\quad 2ab+b^2 & (2a+b)\times b \\
\hline
\end{array}
$$

因得多項式開平方的規則爲：

(一) 以某一文字爲主，將多項式依降冪序排列。

(二) 依單項式開平方的規則，求出多項式的第一項的平方根，作爲根的第一項；並從原式減去根的第一項的平方，得第一餘式。

(三) 以根的第一項的二倍，試除餘式，所得商就是所求根的第二項。

(四) 以上步商數與根的第一項的二倍的和作全除數與商相乘並從餘式減去其積，得第二次餘式。

(五) 如多項式的根超過二項時，卽將已得根的各項作爲根的第一項，繼續依(三)，(四)手續演算。

例一　求 $9x^2+42xy+49y^2$ 的平方根。

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} 9x^2+42xy+49y^2 & \underline{3x+7y} \\ 9x^2 & \\ \hline 42xy+49y^2 & \\ 42xy+49y^2 & [2(3x)+7y]\times(7y) \\ \hline\hline \end{array}$$

說明： 多項式中的第一項 $9x^2$ 的平方根是 $3x$, 故 $3x$ 是所求根的第一項，用 $3x$ 的二倍 (卽 $6x$) 試除餘式的第一項 $42xy$, 得商爲 $7y$; 以 $6x$ 與 $7y$ 的代數和爲全除數，使成 $(2a+b)$ 的形式，並與 b (卽 $7y$) 相乘，恰與餘式相等，相減無餘.

例二： 求 $4a^4+4a^3-7a^2-4a+4$ 的平方根.

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} 4a^4+4a^3-7a^2-4a+4 & \underline{2a^2+a-2} \\ 4a^4 & \\ \hline 4a^3-7a^2 & \\ 4a^3+\ \ a^2 & (2\times 2a^2+a)a \\ \hline -8a^2-4a+4 & \\ -8a^2-4a+4 & [2(2a^2+a)-2]\times(-2) \\ \hline\hline \end{array}$$

習 題 五 十 五

求下列各式的平方根：

1. $25x^2-10xy+y^2$　　　2. $9x^2-30xy+25y^2$

3. $x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

4. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

5. $x^4-4x^3+10x^2-12x+9$.

6. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$.

§138. 一般多項式的立方根

由公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

可知將多項式的第一項開立方時,卽得根的第一項 a, 從原式中減去 a^3 後,餘式爲 $+3a^2b+3ab^2+b^3$.

或 $$(+3a^2+3ab+b^2)\times b.$$

以 $(3a^2+3ab+b^2)$ 除餘式,得商 b, 卽所求的根的第二項,其演算方式如下:

$$\begin{array}{r|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \underline{a+b} \\
a^3 & 3a^2 \\
\hline
 & +3ab \\
3a^2b+3ab^2+b^3 & +b^2 \\
\cline{2-2}
3a^2b+3ab^2+b^3 & (3a^2+3ab+b^2)\times b \\
\hline\hline
\end{array}$$

因得多項式開立方的規則爲:

(一) 以某一文字爲主,將多項式依降冪序排列.

(二) 依單項式開立方的規則,求出多項式第一項的立方根,作爲根的第一項;並從原式減去根的第一項的立方,得第一餘式.

(三) 以根的第一項的平方的三倍,試除餘式第一項,所得商

就是所求根的第二項.

（四） 三倍根的第一項的平方，加上根的第一項與試除後所得商的積的三倍，再加上商的平方；然後以這三式的和作全除數，使與商數相乘，再從餘式減去這乘積，得第二次餘式.

（五） 如多項式的立方根超過二項時，即將已得根的各項作爲根的第一項，繼續依（三），（四）手續演算.

例： 求 $8x^3+54xy^2-36x^2y-27y^3$ 的立方根.

〔解〕 以 x 爲主，將原多項式依降冪序排列，得：

$$8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$$

$$\begin{array}{r|l}
8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3 & 2x-3y \\ \cline{2-2}
8x^3\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 3(2x)^2 \\ \cline{1-1}
 & \qquad +3(2x)(-3y) \\
-36x^2y+54xy^2-27y^3 & \qquad\qquad\qquad +(-3y)^2 \\ \cline{2-2}
-36x^2y+54xy^2-27y^3 & (12x^2-18xy+9y^2)\times(-3y) \\ \hline\hline
\end{array}$$

注意： 求更高次方根的一般方法，本書從略.

習題五十六

求下列各式的立方根：

1. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$.
2. $x^3-24x^2y+192xy^2-512y^3$.
3. $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$.

4. $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$.

5. $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{8x^3-12x^2+6x-1}$.

§139. 指數律的擴充

在 §133 中已講過指數定律:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(abc)^m = a^m b^m c^m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式中的 m, n 都是正整數,其實指數律的應用範圍,並無此項限制.

又當 a^m 的 m 爲正整數時, a^m 係表示 m 個 a 連乘;若 m 爲分數或負數時,則不能如此解釋,例如把 6^{-5} 作爲 (-5) 個 6 連乘,把 $6^{\frac{2}{3}}$ 作爲 $\frac{2}{3}$ 個 6 連乘;都無意義.

§140. 分指數,負指數和零指數的定義

倘若欲分指數負指數和零指數有意義,必它們也能適合舊有指數律,而不相矛盾. 現在就根據這原則,來推求上項新指數的定義.

(一) 分指數: 因 $(a^m)^n=a^{mn}$ 若 m, n 不限定是正整數;則以 $\frac{2}{5}$ 代 m, 以 5 代 n 時,

$$(a^{\frac{2}{5}})^5=(a^{\frac{2}{5}}\ a^{\frac{2}{5}}\ a^{\frac{2}{5}}\ a^{\frac{2}{5}}\ a^{\frac{2}{5}}\ =a^{\frac{5\times2}{5}})=a^2.$$

兩端開5次方，得：

$$a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}.$$

一般 $$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n.$$

故某數以分數爲指數，是表示這數依其分子乘方後，再依其分母開方；或者是表示此數依其分母開方後，再依其分子乘方。

(二) 零指數： 在公式

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

中，如 $m=0$，則

$$a^0\times a^n=(a^{0+n})=a^n.$$

兩端各除以 a^n，得 $a^0=1$.

故任何數的零次冪等於1.

(三) 負指數： 在(二)項公式中，如 $m=-s$，$n=s$.

則 $$a^{-s}a^s=a^0=1$$

兩端同除以 a^s，得 $a^{-s}=\dfrac{1}{a^s}$.

故一數以負數爲指數，是表示這數的正指數乘冪的逆數。

§ 141. 負指數及分指數的運用(一)

例一. 求 $64^{\frac{1}{2}}\times64^{\frac{1}{3}}$ 的值。

〔解一〕 $64^{\frac{1}{2}}=8,\quad 64^{\frac{1}{3}}=4.$

$$\therefore\quad 64^{\frac{1}{2}}\times 64^{\frac{1}{3}}=8\times 4=32.$$

〔解二〕 依指數公式運算：

$$64^{\frac{1}{2}}\times 64^{\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=64^{\frac{5}{6}}$$

$$=(\sqrt[6]{64})^5=2^5=32.$$

例二： $64^{\frac{1}{2}}\times 64^{-\frac{1}{3}}=?$

〔解一〕 $64^{\frac{1}{2}}=8,\quad 64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{4}.$

$$\therefore\quad 64^{\frac{1}{2}}\times 64^{-\frac{1}{3}}=8\times\frac{1}{4}=2.$$

〔解二〕 依指數公式運算：

$$64^{\frac{1}{2}}\times 64^{-\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{2}+(-\frac{1}{3})}=64^{\frac{1}{6}}=2.$$

例三： $(64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=?$

〔解一〕 $64^{\frac{1}{2}}=8,\quad 8^{\frac{1}{3}}=2.$

$$\therefore\quad (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2.$$

〔解二〕 依指數公式運算：

$$(64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{6}}=2.$$

例四： $(64^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}=?$

〔解一〕 $$64^{\frac{1}{2}}=8,\quad 8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad (64^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}=(8)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

〔解二〕 依指數公式運算：

$$(64^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})}=64^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}.$$

§142. 負指數及分指數的運用(二)

例一： $(x+x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+2)=?$

〔解〕 $$原式=x^{\frac{1}{2}}(x+x^{\frac{1}{2}}+1)+2(x+x^{\frac{1}{2}}+1)$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}}+2x+2x^{\frac{1}{2}}+2$$

$$=x^{\frac{3}{2}}+3x+3x^{\frac{1}{2}}+2.$$

例二： $(x+x^{-\frac{1}{2}}+2)(2x^{\frac{1}{2}}+1)=?$

〔解〕 $$原式=2x^{\frac{1}{2}}(x+x^{-\frac{1}{2}}+2)+(x+x^{-\frac{1}{2}}+2)$$

$$=2x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+2+x+2+x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2x^{\frac{3}{2}}+x+4x^{\frac{1}{2}}+4+x^{-\frac{1}{2}}.$$

例三： $(x+3x^{\frac{1}{2}}+2)\div(x^{\frac{1}{2}}+2)=?$

$$
\begin{array}{l|l}
x+3x^{\frac{1}{2}}+2 & x^{\frac{1}{2}}+2 \\ \cline{2-2}
x+2x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{2}}+1 \ (\text{商}) \\ \cline{1-1}
\quad x^{\frac{1}{2}}+2 & \\
\quad \underline{\underline{x^{\frac{1}{2}}+2}} &
\end{array}
$$

例四：　$(2x+6x^{-1}+7)\div(3x^{-1}+2)=?$

〔解〕

$$
\begin{array}{l|l}
2x+7+6x^{-1} & 2+3x^{-1} \\ \cline{2-2}
2x+3 & x+2 \\ \cline{1-1}
\quad 4+6x^{-1} & \\
\quad \underline{\underline{4+6x^{-1}}} &
\end{array}
$$

習題五十七

1. 求下列各式的值：

(a) $16^{\frac{3}{2}}$　(b) $27^{\frac{2}{3}}$.　(c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(d) $32^{\frac{2}{5}}\times 2^{-2}$　(e) $125^{\frac{2}{3}}\times 1000^{0}$.

2 將下列各式中的負指數換爲正指數：

(a) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$.　(b) $a^{2}b^{-\frac{1}{2}}x^{3}$　(c) $a^{0}b^{3}x^{-\frac{1}{2}}y^{3}$.

(d) $\frac{a^{2}x^{-1}}{by^{-2}}$.　(e) $\frac{a^{-1}b^{2}x^{\frac{1}{2}}}{c^{-\frac{1}{2}}y}$.

3. $(x+2-5x^{-1})\div(x+2x^{-1})=?$

4. $(x^{\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{1}{2}}-1)\times(x-x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}})=?$

5. $(x+3+3x^{-1}+x^{-2})\times(x^{-1}+2x^{-2})=?$

6. $(2x-7x^{\frac{1}{2}}+8+4x^{-\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{2}}-1+x^{-\frac{1}{2}})=?$

7. $(x^{2}+2-x^{-1}+2x^{-2})\div(x^{-2}-x^{-1}+1)=?$

8. $(x^{2}-y^{2})\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=?$

第十四章　根式及根式方程式

§143. 主根　已知$2^2=4$, $(-2)^2=4$, 故$\sqrt{4}=\pm 2$. 卽4有二平方根2和-2. 在代數學中,一數開n次方,應有n個根,理由詳高中代數學中. 爲確切計,初等代數學中,規定$\sqrt[n]{a}$ (a爲正數) 表示自乘n次得a的一個正數,這一正數叫做a的主n次根. 例如$\sqrt{4}$表示4的主平根2, 至他一根-2則應以$-\sqrt{4}$來表示它.

再則,當n是奇數時,$\sqrt[n]{-a}$表示$-a$的主n次根,卽$-\sqrt[n]{a}$, 例如$\sqrt[3]{-27}$表示-27的主立方根-3.

本書凡論到方根之處,倘無特別聲明,所指的統是主根.

§144. 無理數　一整數或分數經開方運算手續後,常得不盡小數,這項不盡小數不能用整數或分數來表明它,叫做無理數. 對無理數說,整數和分數叫做有理數. 如: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$ 都是無理數; 而 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ 都是有理數.

對於無理數如$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$等在計算時常取用它的近似

數值，這項近似值在實用上，取至三位或四位小數已足．

例如：$\sqrt{2}=1.41421\cdots\cdots$的近似值，取三位小數是 1.414，取四位小數是 1.4142.

$\sqrt{5}=2.23606\cdots\cdots$的近似值，取三位小數是 2.236，取四位小數是 2.2361.

$\sqrt[3]{6}=1.81712\cdots\cdots$的近似值，取三位小數是 1.817，取四位小數是 1.8171.

§145. 根數和根式 在$b\sqrt[n]{a}$中，如a和b是數字時，叫做根數，例如$3\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，$4\sqrt[3]{6}$等都是．

又如a和b是含有文字的代數式時，叫作根式（或無理式），無根號的代數式，或雖有根號而根號內不含有文字時，叫做有理式，如$\sqrt{x^2-y^2}$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$，$a+\sqrt{b}$等都是根式；x^2-y^2，$\frac{1+x}{1+x}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$，等都是有理式．根數或根式的次數，視根指數而定．如$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$，是二次根數，而$\sqrt[3]{x^2-y^2}$，$\sqrt[3]{x}$，是三次根式．

注意 (1) 根數的被開方數是有理數，而根數本身是一無理數，特別叫它做不盡根，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[3]{6}$等都是不盡根，而$\sqrt{\sqrt{2}+1}$則非不盡根．

(2) 以下論根式時，概包括根數．

§146. 根式運算律 關於根式的運算，有下列五個定律：

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$,.　　2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$

3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$　　4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$

這五個定律可根據 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 一定義和以前所講的指數定律來證明它們.

§147. 根式的化簡 直接應用根式運算律，可得根式化簡的法則如下：

(一) 被開方式是整式的化簡法：

(1) 被開方式的指數和根指數有共同因子時，可應用根式運算律 1 (由右端到左端卽 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$) 和 3，直接消去這公因子.

例一： 化簡 $\sqrt[6]{27}$.

〔解〕 $\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[3\times2]{3^{3\times1}}=\sqrt{3}.$

例二： 化簡 $\sqrt[9]{8x^3y^6}.$

〔解〕 $\sqrt[9]{8x^3y^6}=\sqrt[9]{(2xy^2)^3}=\sqrt[3]{2xy^2}.$

(2) 被開方式中一部分因子的指數是根指數的倍數時，則

由根式運算律 2 和 3，這一部分因子可以開方，應實行開方，提出根號外。

例一：化簡 $\sqrt{80}$.

〔解〕 $\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=4\sqrt{5}$.

例二：化簡 $\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$.

〔解〕
$$\begin{aligned}\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}&=\sqrt{(x+1)^3}\\&=\sqrt{(x+1)^2(x+1)}\\&=(x+1)\sqrt{x+1}.\end{aligned}$$

(二) 被開方式是分式的化簡法：

應用根式運算律 4，將分子分母分別化簡．如分別化簡以後，分母仍爲無理式，可以一因式同乘分母分子，使分母成爲有理式．

例一：化簡 $\sqrt{\dfrac{b^3c^4}{4a^2}}$.

〔解〕 $\sqrt{\dfrac{b^3c^4}{4a^2}}=\sqrt{\dfrac{b^2c^4}{4a^2}\times b}=\dfrac{bc^2}{2a}\sqrt{b}$.

例二：化簡 $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)}{(a-b)^2}}$.

〔解〕 原式 $=\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^3}}$

$$=\frac{1}{a-b}\sqrt[3]{a^2-b^2}.$$

(三) 多重根號的化簡：直接應用根式運算律 5 卽得。

例一： 化簡 $\sqrt[4]{\sqrt{20}}$ 爲一重根號。

〔解〕 $\sqrt[4]{\sqrt{20}}=\sqrt[4\times2]{20}=\sqrt[8]{20}.$

例二： 化 $\sqrt[m]{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}$ 爲一重根號。

〔解〕 $\sqrt[m]{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}=\sqrt[m\times2\times3]{a^2}=\sqrt[3m]{a}.$

§ 148. 同次根式和同類根式 諸根式的根指數相同時，叫做同次根式．如：$\sqrt{2}, 3\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}$; $\sqrt[n]{23}, \sqrt[n]{x}$; 每組都是同次根式．根式經化簡以後根指數與根號內的式子都相同時，叫做同類根式．如 $\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$ 是同類根式．又 $2x\sqrt{xy}$ 和 $9x^2y\sqrt{xy}$ 僅係數部分有異，故也是同類根式．

例： 化 $\sqrt{3}, \sqrt[3]{6^2}, \sqrt[4]{10^5}$ 爲最低同次根式。

〔解〕 三根數的根指數分別爲 2,3,4; 故欲化爲最低同次根式時，須求根指數的 L. C. M. 而根指數 2,3,4 的 L. C. M. 爲 12.

故 $\sqrt{3}=\sqrt[2\times6]{3^6}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}.$

$$\sqrt[3]{6^2}=\sqrt[3\times4]{6^{2\times4}}=\sqrt[12]{6^8}.$$

$$\sqrt[4]{10^3}=\sqrt[4\times3]{10^{3\times3}}=\sqrt[12]{10^9}.$$

欲比較各根數的大小，必須化各根數成同次根數。

例：　比較 $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$ 和 $\sqrt[6]{3}$ 的大小。

〔解〕　根指數 15, 10 和 6 的 L. C. M 是 30,

$$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256}.$$

$$\sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216}.$$

$$\sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}.$$

$\because$　被開方數 $256>243>216$.

$\therefore$　$\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

習題五十八

1. 化簡下列各式：

(a) $\sqrt{147}$.　(b) $\sqrt[3]{-108x^4y^3}$　(c) $\sqrt[n]{x^{2n+1}}$.

(d) $\sqrt{\frac{7}{12}}$.　(e) $\sqrt{\frac{c}{ab}}$.

2. 將下列各根式的係數移到根號內。

(a) $3\sqrt{5}$. (b) $4\sqrt[3]{6}$. (c) $a^2\sqrt{ab}$.

(d) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. (e) $\dfrac{ax}{a-x}\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{ax}}$.

3. 化下列各式爲最低同次根式:

(a) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{25}$. (b) $\sqrt{ab}, \sqrt[n]{b^3}$. (c) $\sqrt[5]{(a-c)^2}, \sqrt{a^3b^5}$.

4. 化簡下列各式:

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{5^2}}$. (b) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2a^3}}{3}}$. (c) $(\sqrt[5]{3x^2y^3})^2$.

5. 試依大小次序,排列下列各組根數:

(a) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[5]{10}$. (b) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[5]{48}$.

§149. 根式加減 就根式行加減,先須化簡各根式,如是同類根式,求各根式係數的代數和,加以合併;至非同類根式,則不能合併;只可用加減號連接起來.

例一: $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}-c\sqrt{x}=(a+b-c)\sqrt{x}$.

例二: $\sqrt{18}+\sqrt{50}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

例三: $\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{72}+\sqrt{5}=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+\sqrt{5}$

$$=4\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

例四: $\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}+\dfrac{2\sqrt[3]{6}}{3}-2\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{\dfrac{2\times3}{9\times3}}+\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{6}-2\times2\sqrt[3]{6}$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{6}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{6}=-3\sqrt[3]{6}.$$

習題五十九

求下列各式的結果:

1. $\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt[3]{5}$.

2. $4\sqrt{245}-4\sqrt{75}-6\sqrt{135}$.

3. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{1}{10}}+\sqrt{\dfrac{8}{5}}$.

4. $\dfrac{5}{\sqrt{18}}-\dfrac{3}{\sqrt{8}}+3\sqrt{24}$.

5. $3\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{96}+5\sqrt[3]{36\times9}$.

6. $\sqrt{2x}+\sqrt[3]{16x}+\sqrt{50x}-\sqrt[3]{2x}$.

§150. 根式乘法

(一)同次根相乘: 直接應用根式運算律2 係數部分與根式部分分別求積卽得.

例一: $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}=\sqrt{15}$.

例二: $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{a\times2\times6}=\sqrt[3]{12a}$.

例三：$(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$

$$=\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{5}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{6}$$

$$=\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{30}.$$

(二) 異次根式相乘：先化成同次根式，然後求積。

例一：$\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt{2}=\sqrt[6]{3^4}\times\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{3^4\times 2^3}=\sqrt[6]{648}.$

例二：$\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt{ab}=\sqrt[6]{a^2b^4}\times\sqrt[6]{a^3b^3}=\sqrt[6]{a^5b^7}=b\sqrt[6]{a^5b}.$

§151. 共軛根式　$3+\sqrt{2}$ 與 $3-\sqrt{2}$；$4+2\sqrt{5}$ 與 $4-2\sqrt{5}$；$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 等彼此互為共軛根式，根據"二數和與二數差的積為二數平方差"的公式，二共軛根式的積是一有理式，故凡分式的分母為含根式的二項式時，只須以分母的共軛根式，同乘分母分子，即可使化成分母為有理式的分式。

例一：$\dfrac{3+\sqrt{6}}{2+\sqrt{5}}=\dfrac{(3+\sqrt{6})(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$

$$=\frac{6+2\sqrt{6}-3\sqrt{5}-\sqrt{30}}{2^2-5}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{6}-3\sqrt{5}-\sqrt{30}}{-1}$$

$$=-6-2\sqrt{6}+3\sqrt{5}+\sqrt{30}.$$

例二：
$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$$
$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$$
$$=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}.$$

§152. 根式除法

(一)同次根式相除：直接應用根式運算律 4 係數部分與根式部分分別求商即得。

例一：
$$-13\sqrt{125}\div 5\sqrt{65}=\frac{-13\sqrt{125}}{5\sqrt{65}}$$
$$=-\frac{13}{5}\sqrt{\frac{125}{65}}$$
$$=-\frac{13}{5}\sqrt{\frac{25}{13}}$$
$$=-\frac{13}{5}\times\frac{\sqrt{13\times 25}}{13}$$
$$=-\frac{1}{5}\times\sqrt{13\times 25}$$
$$=-\sqrt{13}.$$

(二) 異次根式相除：先化成同次根式，然後求商。

例：　$5\sqrt{2}\div\sqrt[3]{2}=5\sqrt[6]{2^3}\div\sqrt[6]{2^2}$

$=5\sqrt[6]{8}\div\sqrt[6]{4}$

$=5\sqrt[6]{2}.$

習　題　六　十

計算下列各式：

1. $\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[3]{a^2b^2}$.
2. $3\sqrt{5}\times2\sqrt[4]{3}$.
3. $\dfrac{5}{x}\sqrt{\dfrac{a^3}{x}}\times\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{x^3}{2a}}$.
4. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$.
5. $\sqrt{2\sqrt{5}-3}\times\sqrt{2\sqrt{5}+3}$.
6. $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5})^3$.
7. $\sqrt{ab}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$.
8. $(x-y)\div\sqrt{x-y}$.
9. $\dfrac{3}{a-b}\sqrt{\dfrac{2x}{a-b}}\div\sqrt{\dfrac{18x^3}{(a-b)^5}}$.
10. $\dfrac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$.

§153. 根式方程式　方程式中含有對於未知數爲根式的式子時，叫做根式方程式，又叫做無理方程式；對無理方程式而言，以前所學的整式方程式和分式方程式，叫做有理方程式，如$\sqrt{2x+5}+3x=10$.是無理方程式；而$\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{2}$，則是有理方

程式.茲舉例說明根式方程式的解法如下:

例一: 解$\sqrt{3x-2}+1=5$.

〔解〕 將根式與非根式分置等號兩端,得:

$$\sqrt{3x-2}=5-1=4.$$

乘方 $$3x-2=16.$$

$$\therefore\quad x=6.$$

校驗 $\sqrt{3\times6-2}+1=\sqrt{18-2}+1=\sqrt{16}+1=4+1=5.$

即左端=右端,故$x=6$合用.

例二: 解$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+16}=\sqrt{x+25}$.

〔解〕 乘方, $(x+1)+(x+16)+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+16}=x+25.$

移項並化簡, $2\sqrt{x+1}\sqrt{x+16}=-x+8.$

乘方, $$4(x+1)(x+16)=(-x+8)^2.$$

去括號並化簡, $$x^2+28x=0.$$

$$\therefore\quad x_1=0,\ x_2=-28.$$

校驗 $x_1=0$時,

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+16}=\sqrt{1}+\sqrt{16}=1+4=5.$$

$$\sqrt{x+25}=\sqrt{25}=5.$$

又 $x_2=-28$時,

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+16}=\sqrt{-28+1}+\sqrt{-28+16}$$

$$=\sqrt{-27}+\sqrt{-12}$$

$$=3\sqrt{-3}+2\sqrt{-3}$$

$$=5\sqrt{-3}.$$

$$\sqrt{x+25}=\sqrt{-28+25}$$

$$=\sqrt{-3}.$$

卽 $x=0$ 合用，而 $x=-28$ 不合用.

由上二例，可知根式方程式的解法爲：

(一)移項：　方程式中含一個或二個根式時，可將根式和非根式分置等號的兩端.

(二)乘方：　兩端各乘方，使消去根號.

(三)解：　移項，整理並求解.

(四)校驗：　以所得的值代入原式，加以校驗.

(五)答：　選擇適當的值以爲答案.

注意：　方程式中所含根式在二個以上時，(一)(二)二步手續須反復數次，其次序有時亦須顚倒(參看上列例二).

§154. 根式方程式客根的討論

設　　$x=a$ ……………………………………… (1)

乘方，　$x^2=a^2$.

移項並分解因式，　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)=0$……(2)

適合 (2) 式的根有 $x=a$ 及 $x=-a$ 二值；與 (1) 相較，知因一次自乘，遂增多一根 $x=-a$；但解根式方程式，非經乘方運

算不可,客根的引入,在所難免,故對於所得的根,非一一校驗不可.

習題六十一

解下列方程式:

1. $\sqrt{x+8}=5$.
2. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=3$.
3. $\sqrt[3]{x^3-6}=1$.
4. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5\sqrt{x}$.
5. $2\sqrt{(x+1)(x-5)}=2x-6$.
6. $\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=x$
7. $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}=4$.
8. $\sqrt{6-\sqrt{(3+\sqrt{x-2})}}=1$.

第十五章　二次方程式(一)

§155. 一元二次方程式　方程式中祇含有一個未知數,而最高次項爲二次時,叫做一元二次方程式.如:

(一)　$4x^2=1,\ ax^2=b.$

(二)　$x^2+3x+2=0,\ x^2-5x=0.$

(三)　$ax^2+bx+c=0.$

都是一元二次方程式.(三)叫做標準一元二次方程式,若 a, b, c 均不爲零,或僅 c 爲零,如(二)的形式時,叫做完全二次方程式;若 $a\neq0$, $b=0$, (或 $b=c=0$) 時,叫做純二次方程式.

§156. 純二次方程式的解法　因純二次方程式中無一次項,故祇須將二次項與絕對項分置等式的兩端,然後各開平方,即可得解.如:

$$ax^2+c=0.$$

移項　$$ax^2=-c.$$

以 a 除兩端,　$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

開方,　$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

例一： 解 $x^2-16=0$.

〔解〕 移項 $x^2=16$.

開方 $x=\pm 4$.

故所求的根是 ± 4. (學者自行校驗)

例二： 解 $(2x-5)^2=49$.

〔解〕 開方 $2x-5=\pm 7$.

$$\therefore\quad x_1=\tfrac{1}{2}(7+5)=6$$

$$x_1=\tfrac{1}{2}(-7+5)=-1.$$

故所求的根是 6 及 -1. (學者自行校驗)

§157. 完全二次方程式解法(一)(因式分解法)

在 §102 中，我們曾經學習用“因式分解法”解方程式的方法，茲再舉一例如下：

例： 解 $x^2+12=7x$.

〔解〕 移項，使方程式的右端為零. 得：

$$x^2-7x+12=0.$$

分解因式， $(x-3)(x-4)=0$.

$\therefore\quad x_1=3,\ x_2=4$. (學者自行校驗)

§158. 完全二次方程式的解法(二)(配分法)

(a) 當方程式中二次項係數為 1 時，在它的兩端加以適當常數

(卽一次項係數一半的平方)，使成 § 156 例二的形式，然後求解，這項方法叫做配方法。

例一：　解 $x^2-6x+5=0$.

〔解〕　移項，使未知項集中在等式的左端，絕對項（卽已知項)移在右端。

$$x^2-6x=-5.$$

兩端各加 x 項係數一半的平方卽 9，則左端成完全平方.

$$x^2-6x+9=-5+9.$$

卽　$$(x-3)^2=4.$$

開方　$$x-3=\pm2.$$

$$\therefore\quad x=3\pm2.$$

卽　$x=5$，或 1.（學者自行校驗）

(b) 當二次項係數不為 1 時，可用該係數徧除各項，化做(a 中情形配方求解.

例二：　解 $3x^2-8x-3=0$.

〔解〕　移項，　$3x^2-8x=3$.

以二次項係數 3 徧除各項.

$$x^2-\frac{8}{3}x=1.$$

配方(卽兩端各加 x 項係數一半的平方)

$$x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

卽 $$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}.$$

開方, $$x-\frac{4}{3}=\pm\frac{5}{3}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{3}\pm\frac{5}{3}.$$

卽 $x=3$, 或 $x=-\frac{1}{3}$. (學者自行校驗)

由上二例,可知用配方法解完全二次方程式的方法爲:

(一) 將未知項集中在等式左端,絕對項移在右端.

(二) 以二次項係數徧除各項,使二次項係數爲 $(+1)$.

(三) 加 x 項的新係數的一半的平方於左右二端,使左端成完全平方式.

(四) 兩端各開平方(右端開平方以後的數字,須附以±號).

(五) 在左端分別取用正負數,得兩個一次方程式;解之卽得所求方程式的二根.

(六) 校驗.

習題六十二

解下列方程式(1—5):

1. $(x-5)^2=16.$ 2. $(3x-14)^2-49=0.$

3. $x^2-x-42=0$.　　4. $2(x-3)=3(x+2)(x-3)$.

5. $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$.

用配方法解下列方程式: (6—10).

6. $3x^2-7x=-2$.　　7. $32-3x^2=10x$

8. $2x(x+3)=1$.　　9. $(x+3)(x+5)=1$.

10. $y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{12}=0$.

§159. 完全二次方程式解法(三)(公式解法)

任何一元二次方程式,經過整理以後,必可化簡爲:

$$ax^2+bx+c=0.$$

應用配方解法手續:

移項, $$ax^2+bx=-c.$$

徧除以二次項的係數 a, $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方, $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}.$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

開方, $$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

上式叫做一元二次方程式根的公式.

例一: 應用公式解 $3x^2-7x-10=0$.

〔解〕 取已知方程式與標準二次方程式相較.知

$$a=3,\quad b=-7,\quad c=-10.$$

代入根的公式,得:

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times3\times(-10)}}{2\times3}$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{169}}{6}=\frac{7\pm13}{6}.$$

$$\therefore\quad x=3\frac{1}{3},\ 或\ x=-1.$$ (學者自行校驗)

§160. 一元二次方程式的特別情形.

(一) 當一元二次方程式一次項係數爲偶數時,即

$$ax^2+2b'x+c=0.$$

〔解〕 移項,並以 a 徧乘各項,得:

$$a^2x^2+2ab'x=-ac.$$

配方. $$a^2x^2+2ab'x+b'^2=b'^2-ac.$$

即 $$(ax+b')^2=b'^2-ac.$$

開方. $$ax+b'=\pm\sqrt{b'^2-ac}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

例: 解 $5x^2-8x-4=0$.

〔解〕　應用本節公式，　$a=5,\ b'=-4,\ c=-4.$

$$\therefore\quad x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-5(-4)}}{5}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{36}}{5}=\frac{4\pm 6}{5}.$$

$$\therefore\quad x=2,\ \text{或}\ x=-\frac{2}{5}.$$

(二) 當絕對項爲 0 時，即　$ax^2+bx=0.$

〔解一〕　應用根的公式：

$$x=0,\ \text{或}\ x=-\frac{b}{a}.$$

〔解二〕　分解因式，則

$$ax^2+bx=x(ax+b)=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\ \text{或}\ x=-\frac{b}{a}.$$

(三) 在 $ax^2+bx+c=0$ 中，$a\neq 0,\ b=c=0$ 時，則其二根均爲零。

習題六十三

應用公式解下列方程式(1—7)：

1. $x^2-x=12.$　　　　2. $(x-2)(x-3)=20.$

3. $15x^2+26x+7=0.$　　　　4. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}.$

5. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=\frac{3}{6}$　　6. $(x-a)^2+(x+a)^2=2a.$

7. $(x-m)(x-n)=mn.$

8. 設方程式 $(ax+b)(cx+d)=mn$；問在何種情形下，此方程式的二根中有一根爲零。

§161. 虛數　任何正數或負數平方後恆爲正數；故負數的二次根非正數，亦非負數；我們叫它做虛數，例如$\sqrt{-a}$（a 是正數）便是虛數。虛數的單位爲 $\sqrt{-1}$。普通用文字 i 來表示它，即 $\sqrt{-1}=i$。

任何虛數，都可化成以 $\sqrt{-1}$ 或 i 爲單位的形式，如：

$\sqrt{-5}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}\,i$; $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=\sqrt{3}i.$

（§146 根式運算律 2）

虛數單位 i 有下列的特性：

$i=\sqrt{-1},$　$i^2=-1,$　$i^3=i^2\times i=-i,$　$i^4=i^2\times i^2=1.$

$i^5=i,$　$i^6=-1,$　$i^7=-i,$　$i^8=1.$

………　………　………　………

注意：　對虛數來說，以前所講的正數，負數，無理數等都叫做實數。

§162. 虛數的基本運算　實行虛數運算，必須先將虛數寫成以 i 爲單位的形式，方免錯誤。

例一: $2\sqrt{-1}+\sqrt{-5}=2i+\sqrt{5}i=(2+\sqrt{5})i.$

例二: $\sqrt{-3}-\sqrt{-2}=\sqrt{3}i-\sqrt{2}i=(\sqrt{3}-\sqrt{2})i.$

例三: $3\times\sqrt{-5}=3\times\sqrt{5}i=3\sqrt{5}i.$

例四: $\sqrt{-2}\times\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}i=\sqrt{10}i^2=-\sqrt{10}.$

例五: $\sqrt{-2}\div 3=\sqrt{2}i\div 3=\frac{\sqrt{2}}{3}i.$

例六: $3\div\sqrt{-2}=3\div\sqrt{2}i=\frac{3}{\sqrt{2}i}=\frac{3\times\sqrt{2}i}{(\sqrt{2}i)^2}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}i.$

(分母須化成實數)

習題六十四

求下列各題的結果:

1. $3i+2i.$
2. $2i+\sqrt{-6}.$
3. $\sqrt{-6}-\sqrt{-5}.$
4. $12\times\sqrt{-3}.$
5. $\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}.$
6. $\sqrt{3}\times\sqrt{-12}\times\sqrt{-1}.$
7. $\sqrt{-12}\div 2.$
8. $\sqrt{-12}\div(-2).$
9. $\sqrt{-12}\div\sqrt{-2}.$
10. $12\div\sqrt{-2}.$
11. $\sqrt{-3}\times\sqrt{20}\div\sqrt{-5}.$
12. $\sqrt{-6}\div\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}.$

§163. 複數 設a和b是二實數，凡是$a+bi$形式的數，叫做複數. 如: $2+5i, 3+\sqrt{5i}, 1+\sqrt{2i}$

等數都是.在複數$a+bi$中,a叫做實數部分(如上列三複數中的2, 3, 1都是). 又bi叫做虛數部分(如上列三複數中的$5i$, $\sqrt{5}i$, $\sqrt{2}i$都是).

注意: 實數與虛數的單位不同,故複數中的實數與虛數二部分,絕對不能合併.

§164. 共軛複數 複數的一般形式為$a+bi$ (a, b均為實數), 它和$a-bi$互為共軛複數.

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

因a, b均為實數,故a^2+b^2亦為實數;即二共軛複數的積,恆為實數.

§165. 複數的基本運算

例一: $(2+\sqrt{5}i)+(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)=(2+\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{2})i.$

例二: $(5-\sqrt{3}i)-(2+\sqrt{2}i)=(5-2)-(\sqrt{3}+\sqrt{2})i$

$$=3-(\sqrt{3}+\sqrt{2})i.$$

例三: $(3+2i)(5-6i)=3\times 5+3(-6i)+5(2i)+(2i)(-6i)$

$$=15-18i+10i-12i^2$$

$$=(15+12)+(10-18)i$$

$$=27-8i.$$

例四: $(3+2i)\div(2+5i)=\dfrac{3+2i}{2+5i}$

$$=\frac{(3+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{6+10+4i-15i}{4+25}=\frac{1}{29}(16-11i).$$

注意：　凡分母必須化成實數,它的化法就是用分母的共軛複數來乘分子分母。

習題六十五

化簡下列各式(1—9)：

1. $(\sqrt{3}+2i)+(3\sqrt{3}+3i)$.

2. $(5\sqrt{2}+\sqrt{2}i)-(3\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)$.

3. $(\sqrt{3}+2\sqrt{5}i)+(5-3\sqrt{5}i)-(1-\sqrt{5}i)$.

4. $(2+5i)(3-4i)$.

5. $(3+6i)(5-2i)$.

6. $(1+3i)(1-5i)\div(1-2i)$.

7. $(3+2i)\div(2-3i)\times(1-3i)$

8. $(1-3i)(1+3i)\div 2$.

9. $(a^2+b^2i)(a^2-b^2i)+(a+bi)$.

§166. 判別一元二次方程式根的虛實

設$ax^2+bx+c=0$. a, b, c均為實數,依根的公式,得：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\\ x_2&=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\end{aligned}\right\}(D=b^2-4ac).$$

(一) $D>0$ 時，二根是二不相等的實數.

(二) $D<0$ 時，二根均為複數.

(三) $D=0$ 時，二根相等而為 $-\frac{b}{2a}$.

例一：判別 $3x^2+2x-1=0$ 的根的性質.

〔解〕 $\because\ a=3,\ b=2,\ c=-1.$

$\therefore\ D=b^2-4ac=(2)^2-4(3)(-1)=4+12=16>0.$

故二根均為實數.

例二：判別 $2x^2+3x+2=0$ 的根的性質.

〔解〕 $\because\ a=2,\ b=3,\ c=2.$

$\therefore\ D=3^2-4(2)(2)=9-16=-7<0.$

故二根均為複數.

例三：判別 $4x^2-12x+9=0$ 的根的性質.

〔解〕 $\because\ a=4\ b=-12,\ c=9.$

$\therefore\ D=(-12)^2-4(4)(9)=144-144=0.$

故二根相等而為 $\frac{3}{2}$.

習題六十六

判別下列方程式的根的性質：

1. $3x^2+5x-1=0$.
2. $2x^2-3x-2=0$.
3. $5x^2-8x+2=0$.
4. $4x^2+3x+6=0$.
5. $7x^2+8x+\frac{1}{2}=0$.
6. $7x^2+8x-\frac{1}{2}=0$.
7. $6x^2+3x+1=0$.
8. $5x^2-3x+4=0$.

§167. 應用問題

例一：　連續二偶數的立方差是 152；求二數.

〔解〕　設大數是 x，則小數是 $x-2$；依題意得方程式：

$$x^3-(x-2)^3=152.$$

去括號並加以整理，　$6x^2-12x-144=0$.

即　$x^2-2x-24=0$.

$$\therefore\quad x_1=6,\ 或\ x_2=-4.$$

答　二數為 6, 4；或 −4, −6；　(學者自行校驗)

例二：　父年是子年的5倍，父子二人年齡的平方和是2106；求父子二人的年齡.

〔解〕　設子年是 x，則父年是 $5x$；依題意得方程式：

$$x^2+(5x)^2=2106.$$

即　$x^2=81$.

$$\therefore\quad x=\pm 9.$$

因-9不適合本問題，故子年是9歲，父年是45歲。

例三：矩形地的長比闊多2尺，面積是168平方尺；求長和闊。

〔解〕設長是x尺，則闊是$x-2$尺；依題意得方程式：

$$x(x-2)=168.$$

即 $$x^2-2x-168=0.$$

解之，得：$x_1=14,\quad x_2=-12.$

因負根與題不合，故長是14尺，闊是12尺。

例四：甲乙二人同作一工作，4日可成；甲獨作較乙獨作早6日完工。求甲乙二人獨作這工作所要的日數。

〔解〕設甲獨作這工作要x日完工，則乙獨作要$x+6$日完工；依題意得方程式：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}.$$

去分母，$$4(x+6)+4x=x(x+6).$$

整理，$$x^2-2x-24=0.$$

解之，得：$x_1=6,\quad x_2=-4.$

因-4與題不合，故甲獨作要6日完工，乙獨作要12日完工。

習題六十七

1. 某數的3倍與4倍的積是2028；求某數。

2. 二數的差是 2, 積是 63；求二數.

3. 某數與其倒數 12 倍的和是 13；求某數.

4. 某校學生數的 11 倍，比它的平方數多 12 人；求學生數.

5. 某數與它的平方根的和是 90；求某數.

6. 甲乙二人，由相距 120 里的二地，同日相對出發. 甲每日比乙多行 4 里，二人由出發至相遇經過的日數，恰是甲每日所行里數的一半. 求甲乙二人每日所行的里數.

7. 一舟子操舟下航 3.5 里後，即上航至原地，共費 1 時 40 分. 設流速是每時 2 里，求舟子在靜水中航行的速度.

8. 法幣 3000 元，依某利率出借一年，滿期後，付息 80 元，其餘的利息則加入本金，再出借一年，利率比第一年少 5 毫，而滿期後的本利和是 3270.5 元；求最初出借時的利率.

9. 一隊兵士行軍的行列，側面比前列多 14 人；到達前線後散開，前列增 828 人，側面是 5 人；求兵士數.

10. 一線段的長，等於一正方形的周圍；若截去 3 尺 6 寸，則所圍成的正方形是前正方形的$\frac{4}{9}$. 求線段的長.

第十六章　二次方程式(二),圖解法

§168. 聯立二元二次方程式　聯立二元二次方程式的解法,比較聯立二元一次方程式的解法繁難;因爲消去一未知數後,往往得他一未知數的高次方程式,其程度超出本書的範圍,現在祇就幾個簡易的例題,說明它的解法.

§169. 第一類

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases} \quad (a,\ b\ \text{均已知實數})$$

例一:　解 $\begin{cases} x+y=5, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=6. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕　(1) 自乘,　$x^2+2xy+y^2=25.$ ……………(3)

(2)×4,　$4xy=24.$ ……………(4)

(3)−(4),　$x^2-2xy+y^2=1.$ ……………(5)

(5) 開平方,　$x-y=\pm 1.$ ……………(6)

由 (1) 和 (6), 得:

$$A\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1. \end{cases} \qquad B\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1. \end{cases}$$

解 A, 得: $x=3,\quad y=2.$

解 B, 得: $x=2,\quad y=3.$

(學者自行校驗)

例二: 解 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, & \cdots\cdots(1)\\[2ex] \dfrac{1}{xy}=6. & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔解〕 令 $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$, 代入上式,使化成上例的形式,如

$$\begin{cases}u+v=5,\\ uv=6.\end{cases}$$

由上例,知有二組解: $u=3$, $v=2$, 和 $u=2$, $v=3$.

故得 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{2}$; 和 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

§170. 第二類

$$\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ x\pm y=b.\end{cases}\quad (a,\ b\ \text{均已知實數})$$

例一: 解 $\begin{cases}x^2+y^2=25, & \cdots\cdots(1)\\ x+y=7. & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

〔解〕 (2) 平方 $x^2+2xy+y^2=49.$ ……(3)

(3) - (1), $2xy=24.$ ……(4)

(1) - (4) $x^2-2xy+y^2=1.$ ……(5)

(5) 開平方, $x-y=\pm 1.$ ……………………(6)

由 (2) 和 (6), 得;

$$A\begin{cases}x+y=7,\\x-y=1.\end{cases}\qquad B\begin{cases}x+y=7,\\x-y=-1.\end{cases}$$

解 A, 得: $x=4,\quad y=3.$

解 B, 得: $x=3,\quad y=4.$

(學者自行校驗)

例二: 解 $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=25, &\text{……………………(1)}\\[2mm] \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1. &\text{……………………(2)}\end{cases}$

〔解〕 仿上節例二,令 $u=\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{1}{y}$, 代入上式,得:

$$\begin{cases}u^2+v^2=25, &\text{……………………(3)}\\u-v=1. &\text{……………………(4)}\end{cases}$$

(3) − (4)², $2uv=24.$ ……………………(5)

〔(3)+(5)〕,再開平方, $u+v=\pm 7.$ ……………………(6)

由 (4) 和 (6), 得:

$$A\begin{cases}u-v=1,\\u+v=7.\end{cases}\qquad B\begin{cases}u-v=1,\\u+v=-7.\end{cases}$$

解 A, 得: $u=4,\quad v=3,\quad \therefore\ x=\dfrac{1}{4},\quad y=\dfrac{1}{3}.$

解 B, 得 $u=-3$, $v=-4$, $\therefore$ $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{4}$.

§171. 第三類

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b. \end{cases} \quad (a, b \text{ 均已知實數})$$

例: $$\begin{cases} x^2+y^2=100, \cdots\cdots(1) \\ xy=48. \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

〔解〕 $(1)+(2)\times 2$, $x^2+2xy+y^2=196.\cdots\cdots(3)$

$(1)-(2)\times 2$, $x^2-2xy+y^2=4.\cdots\cdots(4)$

(3) 開平方; $x+y=\pm 14.\cdots\cdots(5)$

(4) 開平方; $x-y=\pm 2.\cdots\cdots(6)$

由 (5) 和 (6), 得:

$$A\begin{cases} x+y=14, \\ x-y=2. \end{cases} \qquad B\begin{cases} x+y=14, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x+y=-14, \\ x-y=2. \end{cases} \qquad D\begin{cases} x+y=-14, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

解 A, 得: $x=8$, $y=6$.

解 B, 得: $x=6$, $y=8$.

解 C, 得: $x=-6$, $y=-8$.

解 D, 得: $x=-8$, $y=-6$.

共得四組解答.

習題六十八

解下列聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=35. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=48. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=11, \\ \frac{1}{xy}=30. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=40, \\ x+y=8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x-y=2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+y^2=53, \\ x+y=10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=53, \\ xy=14. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{61}{900^2}, \\ xy=30. \end{cases}$

§172. 第四類

$$\begin{cases} x^2 \pm axy=b, \\ x \pm y=c. \end{cases} \quad (a, b, c \text{ 均已知實數})$$

例: 解 $\begin{cases} x^2-3xy=36, \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=15. \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

〔解〕 由 (2), 得; $x=15-y$.

代入 (1), $(15-y)^2-3(15-y)y=36.$

即 $$4y^2-75y+189=0.$$

$$\therefore\quad (y-3)(4y-63)=0.$$

故 $$y_1=3,\qquad y_2=\frac{63}{4}.$$

當 $y=3$ 時, $x=15-3=12.$

當 $y=\frac{63}{4}$ 時, $x=15-\frac{63}{4}=-\frac{3}{4}.$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=12. \\ y=3. \end{cases}\qquad \begin{cases} x=-\frac{3}{4}. \\ y=\frac{63}{4}. \end{cases}$$

§173. 第五類

$$\begin{cases} ax^2\pm bxy=c, \\ (dx+ey+k)(lx+my+n)=0. \end{cases}$$

(a, b, c, d, e, k, l, m, n 均已知實數).

例: 解 $$\begin{cases} 3x^2+2xy=24, & \cdots\cdots(1) \\ (3x-2y)(x+y-1)=0. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

〔解〕 原式可分成二組聯立方程式如下:

$$A\begin{cases} 3x^2+2xy=24, \\ 3x-2y=0. \end{cases}\qquad B\begin{cases} 3x^2+2xy=24, \\ x+y-1=0. \end{cases}$$

解 A, 得: $x=\pm2,\quad y=\pm3.$

解 B, 得: $x=4,\quad y=-3.$ 及 $x=-6,\quad y=7.$

習題六十九

解下列聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ x+y=5. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y^2+3xy=-5, \\ x-y=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=40, \\ (3x-y)(x+y-1)=0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2-2xy=3, \\ x^2-y^2-3(x+y)=0. \end{cases}$

5. 有房一間,長比闊多 8 尺,四壁的面積共是 240 平方尺,若高加 2 尺,則四壁的面積增 80 平方尺,求高.

6. 分一尺長的線段成二線段,而這二線段的積是 30 平方寸,求這二線段的長.

7. 有大小二數,大數乘二數和所得的積是 144; 假設二數差是 2, 求二數.

8. 甲數 2 倍與乙數 3 倍的和是 60, 甲數平方的 2 倍與乙數平方的 3 倍的和是 840; 求二數.

§174. 有理函數和無理函數的圖形 本書所論關於 x 的整式和分式,式中不含有帶根號的式子,通常叫有理整式和有理分式,亦叫有理整函數和有理分函數,合稱有理式或有理函數.本書爲程

度所限，對於整函數的圖形，僅能講述一元一次函數（見第七章）和一元二次函數兩種，關於分式函數和無理函數的圖形亦以極簡易的爲限.

I.　任何含x的一元二次函數或化成標準形,得ax^2+bx+c,用y來代表它,得$y=ax^2+bx+c$,這是一個二元二次方程式,故論二元二次方程式如 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，即明一元二次函數ax^2+bx+c的圖形.

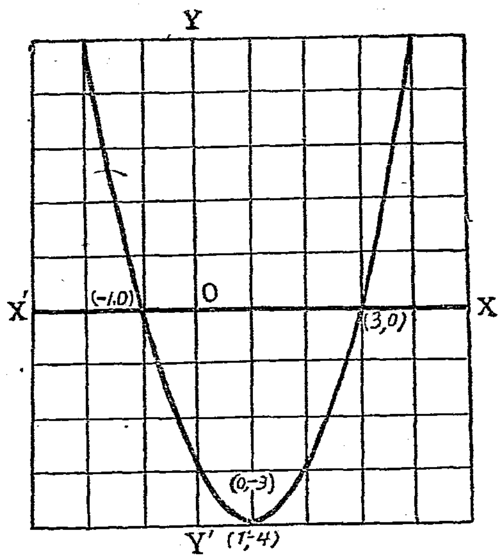
例：　有一元二次函數x^2-2x-3，求作它的圖形.

〔解〕：　令$y=x^2-2x-3$，求x，y的對應值，列成下表：

x	……-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	4,	5,……
y	…… 12,	5,	0,	-3,	-4,	-3,	0,	5,	12,……

把上表中每對對應值，作爲一點的坐標來描點，可得許多點；聯結各點得曲線如下圖．餘參看下節例一．注意圖形與橫軸相交處$y=0$，即$x^2-2x-3=0$.

II.　分式函數　本書第十一章所列，凡有分式分母中含有元x的,都是x的分式函數,就簡單分式函數$\frac{1}{x-a}$來說,若用y代表它，得$y=\frac{1}{x-a}$；化去分母得二元一次方程式$xy-ay=1$.故可得與I同樣的結論.



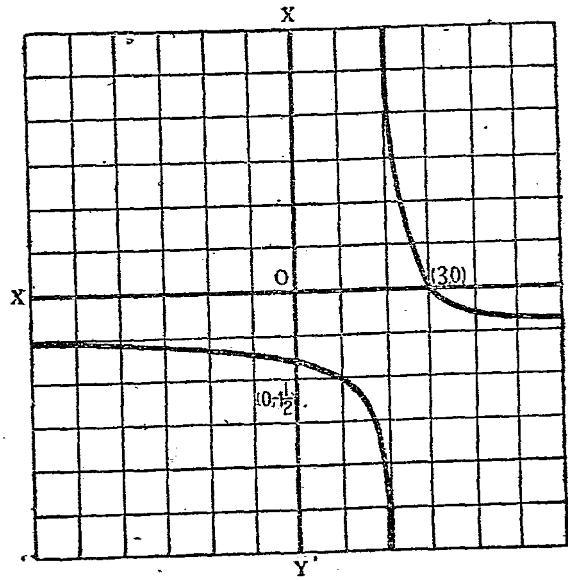
例： 有分式函數 $y=\dfrac{1}{x-2}-1$, 求作它的圖形.

〔解〕 前論分式定義時，定義中有分母不等於零的規定，故本例在計算 x, y 的對應值時，特把 $x=2$ 一值除外；詳細情形在讀高中代數學中自明，現在把已算得的 x, y 的對應數值，列成下表：

x	……,	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	4……
y	……,	$-1\frac{1}{5}$,	$-1\frac{1}{4}$,	$-1\frac{1}{3}$,	$-1\frac{1}{2}$,	-2,	?,	0,	$\frac{1}{2}$……

用這許多成對數值作爲點的坐標描出許多點，並聯結成曲線，得下圖，餘參看下節例四．注意圖形與橫軸相交處，$y=0$，卽

$$\frac{1}{x-2}-1=0.$$



III. 無理函數,本書第十四章所列,凡有根號下含 x 的根式都是無理函數. 關於本問題本書僅能講述被開方式爲一次或二次整式而根指數爲 2 的一種無理函數的圖形.下節所列例一,二,三,四都是.

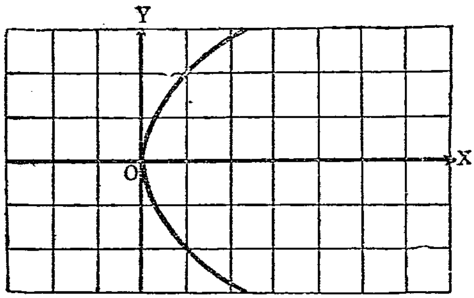
§175. 二元二次方程式的圖形 二元二次方程式的作圖法,與二元一次方程式的相同,但所作出的圖的形狀,則與二元一次方程式的圖形相異,即爲直線以外的一種曲線.

例一. 作 $4x=y^2$ 的圖形.

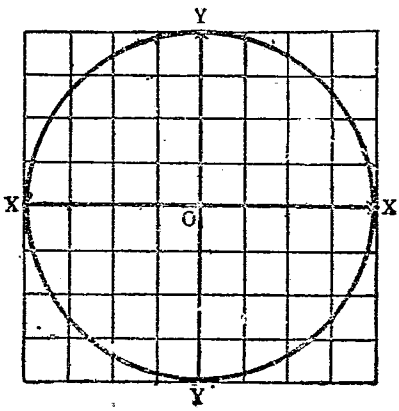
〔解〕 先移項開方得 $y=\pm 2\sqrt{x}$，次求 x, y 的種種對應值，列表如下：

y	$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \cdots\cdots$
x	$0,\ \frac{1}{4},\ 1,\ 2\frac{1}{4}, \cdots\cdots$

把上表中每對對應值作爲一點的坐標來描點，可得許多點；聯結這許多點，得曲線如右圖；這種曲線叫做拋物線，O 叫做頂點，OX 叫做拋物線的軸．又由已知方程式得知：不論 y 是正數或負數，x 恆是正數．又因 $y=\pm 2\sqrt{x}$，故知 x 不能爲負，而且對於 x 的每一正值縱標 y 有二值，絕對值相等，而符號相異．



例二： 作 $x^2+y^2=16$. 的圖形．



〔解〕 移項開方，原式爲：

$x=\pm\sqrt{16-y^2}, \cdots\cdots(1)$

或 $y=\pm\sqrt{16-x^2}$, ……………………………(2)

因 $16-y^2$ 和 $16-x^2$ 都不能小於 0;

故 $-4\leq y\leq 4$, $-4\leq x\leq 4$.

今在上列限制下求得 x, y 的種種對應值,列表如下:

x	0,	± 1,	± 2,	± 3,	± 4.
y	± 4,	$\pm\sqrt{15}$,	$\pm\sqrt{12}$,	$\pm\sqrt{7}$,	0.

把上表中各對對應值作為點的坐標來描點,可得許多點;依次聯結各點,得一圓如上圖,圖中 O 是圓心,而圓的半徑是 4.

例三: 作 $16x^2+25y^2=225$ 的圖形.

〔解〕 由已知方程式得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{225-16x^2}$.

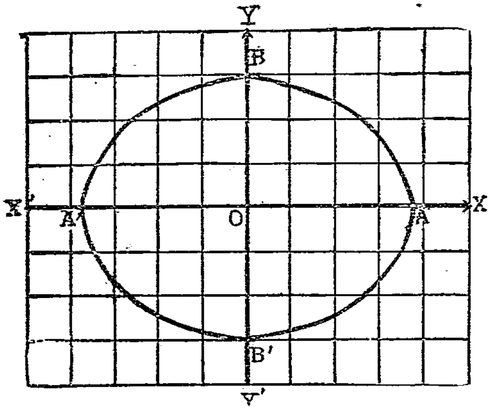
但 $225-16x^2$ 不能小於 0, 即 $-\frac{15}{4}\leq x\leq\frac{15}{4}$, 次求 x, y 的各組對應值如下:

x	0,	± 1,	± 2,	± 3,	± 3.75.
y	± 3,	$\pm\frac{1}{5}\sqrt{209}$,	$\pm\frac{1}{5}\sqrt{161}$,	± 1.8,	0.

把上表中每對對應值作為點的坐標來描點,可得許多點;把這許多點聯結成一平滑的曲線,則得如下的圖形.這種曲線叫做橢圓.圖中 O 叫做橢圓的心, AA' 叫做長軸, BB' 叫做短軸.

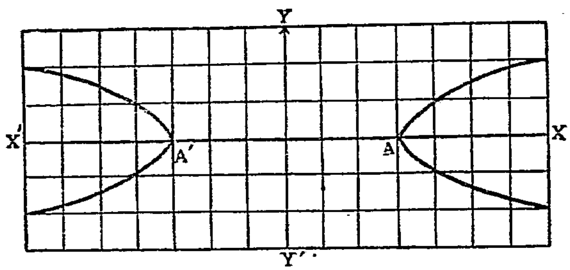
例四: 作 $x^2-9y^2=9$ 的圖形.

〔解〕 由已知方程式得 $y=\pm\frac{1}{9}\sqrt{x^2-9}$.



但 x^2-9 不能小於 0，即 $-3\geq x\geq 3$，次求 x, y 的各組對應值如下：

x	$+3$,	± 4,	± 5,	± 6,	± 7……
y	0,	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{7}$,	$\pm\frac{4}{3}$,	$\pm\sqrt{3}$,	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{10}$……



把上表中每對對應值作爲點的坐標來描點，可得許多點；把這許多點依次聯結起來，得曲線如上圖，這種曲線叫做雙曲線。圖中 O 叫做雙曲線的心，AA' 叫做貫軸。

§176. 一元二次方程式的圖解　一元二次方

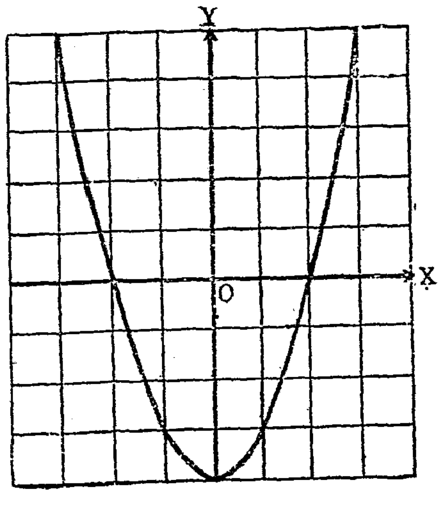
程式,與一元一次方程式同樣可用作圖法求解.先將一元二次方程式寫成標準形$ax^2+bx+c=0$,然後作 $y=ax^2+bx+c$, 把變數 x 的值當作點的橫標,而以ax^2+bx+c的值當作點的縱標作圖,求曲線和橫軸交點的坐標即得.

例: 用圖解法求 $x^2-4=0$ 的根.

〔解〕 先設 $y=x^2-4$, 任意設定 x 的值,求與 x 對應的 y 值如下表:

x	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3.
y	5,	0,	-3,	-4,	-3,	0,	5.

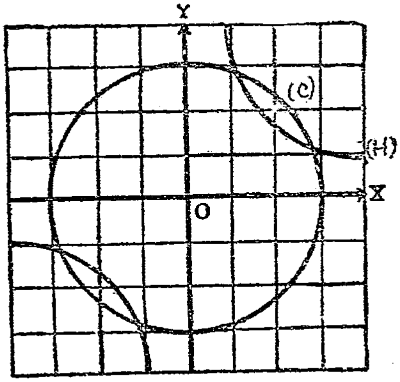
把上表中每對對應值作爲一點的坐標描點,可得許多點,順次聯結諸點,成一平滑曲線.在曲線與橫軸的交點上,縱標 $y=0$, 亦即 $x^2-4=0$ 所在的地方,故交點的橫標,就是 $x^2-4=0$ 的二根.



§177. 簡單二元二次聯立方程的圖解法.

例： $x^2+y^2=10$ ……(1)

$xy=3$ ……(2)



〔解〕 先作 (1) 式的圖形由 (1) 得 x, y 的種種對應値為：

x	0,	± 1,	± 2,	± 3.
y	$\pm\sqrt{10}$,	± 3,	$\pm\sqrt{6}$,	± 1.

根據上表作圖得右圖中的 (C).

次作 (2) 式的圖形；由 (2) 得 x, y 的種種對應値為：

x	-3,	-2,	-1,	1,	2,	3,……
y	-1,	$-1\frac{1}{2}$,	-3,	3,	$1\frac{1}{2}$,	1,……

如法作圖，得雙曲線如上圖中的 (H).

上圖二曲線交於 $(-3, -1)$, $(-1, -3)$, $(1, 3)$ $(3, 1)$ 四點，故 $x=\pm 3$, $y=\pm 1$; $x=\pm 1$, $y=\pm 3$; 是二方程式的公解.

習題七十

求作下列方程式的圖形(4—8)：

1. $x^2+y^2=49$　　2. $y^2=x$

3. $x^2-49^2=16$　　4. $4x^2-9y^2=25$

5. $xy=12$.

圖解下列方程式,並用代數方法求根,加以校驗(1—3):

6. $x^2+3x+2=0$.

7. $x^2-2x+8=0$.

8. $2x^2-3x-2=0$.

第十七章 比及比例

§178. **比** 在算術中,我們早已知道比的定義,各種術語以及運算方法. 但在代數學中的比,除數字而外,更有文字,茲重述如下:

(一) 比的定義: 有二數 a 和 b,所謂 a 對 b 的比,意即 a 除以 b 的商,記做 a/b,或 $a:b$;式中 a 叫做前項, b 叫做後項.

(二) 比的性質: 比的前項後項同以一數乘之或除之,其值不變.

(三) 正比反比: 交換一比的前項和後項所成的比,叫做原比的反比,原比叫做正比,反比亦可認做是正比的逆數比. 如:

$a:b$ 的反比是 $b:a=\frac{b}{ab}:\frac{a}{ab}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$.

(四) 單比複比: 用各比的前項的積做前項,後項的積做後項,所成的比,叫做原有各比的複比;組成這複比的各比,各叫做單比.

由一單比自乘所得的複比, 依其自乘的次數, 各叫作二乘比,三乘比等等. 下面所舉的 (1) (2) (3) 三複比中,(2) 爲二乘比,(3)爲三乘比.

$$(1)\begin{cases} a:b,\\ c:d,\\ e:f.\end{cases}\qquad(2)\begin{cases} a:b,\\ a:b.\end{cases}\qquad(3)\begin{cases} a:b,\\ a:b,\\ a:b,\end{cases}$$

(五) 連比：　諸數連續相比，叫做諸數的連比；如 3：4：5 爲 3,4 和 5 的連比，如已知 $A:B$ 爲 3：4；$B:C$ 爲 5：2. 則以後比的前項乘 $A:B$ 使成 15：20；更以前比的後項乘 $B:C$ 使成 20：8，即得：　$A:B:C=15:20:8$.

§179. 比例式　比例式爲表二比相等的等式. 如：

$$a:b=c:d.$$

a, d 叫做外項；b, c 叫做內項.

比例式的性質有四：

(一) 二外項的積等於二內項的積. $ad=bc$.

(二) 二外項互換，所得二比仍相等. $d:b=c:a$.

(三) 二內項互換，所得二比仍相等. $a:c=b:d$.

(四) 等比的反比亦等.　$b:a=d:c$.

§180. 比例式與方程式　比例式既是等式，故凡適於等式計算的法則，都可適用於比例式. 若比例式中含有未知文字，則該式即爲一種方程式，可應用方程式解法，解出所含未知數.

例：　解 $(3x-1):(6x-7)=(7x-10):(9x+10)$.

〔解〕 $(3x-1)(9x+10)=(6x-7)(7x-10)$.

去括號並加以整理，$15x^2-130x+80=0$.

化簡， $3x^2-26x+16=0$.

分解因式， $(3x-2)(x-8)=0$.

$\therefore \quad x_1=\frac{2}{3},\ x_2=8.$

(學者自行校驗)

§181. 比例定理(一)

(一) 合比定理： 若 $a:b=c:d$; 則 $a+b:b=c+d:d$.

〔證〕 若 $a:b=c:d$, 則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

兩端各加 1, $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, 即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

$\therefore \quad a+b:b=c+d:d.$

(二) 分比定理： 若 $a:b=c:d$;

則 $a-b:b=c-d:d.$

(三) 合分定理： 若 $a:b=c:d$;

則 $a+b:a-b=c+d:c-d.$

(二)(三)二定理，學者可自行證明。

習 題 七 十 一

1. 求下列各組比例式中的缺項：

(a) $a:ab=c:?$. (b) $?:xy=5x^2y^2:5xy^2$.

(c) $(200-x):?=7:18$. (d) $(a+b):(a-b)=(a^2-b^2):?$.

2. 解下列比例式:

(a) $2:1=5x+7:2(x-1)$.

(b) $4+3x:2x+5=3x+2:2x+3$.

(c) $x^2+x+1:x^2-x-1=x^2-x+2:x^2+x-2$.

3. 設 $a:b=c:d$; 求證:

(a) $5a+b:b=5c+d:d$.

(b) $3a+5b:2a-3b=3c+5d:2c-3d$.

4. 已知二數的和與差的比是 k, 求二數的比。

§182. 比例定理(二)

(一) 積比定理: 諸比例式相當項的積,仍成比例。

〔證〕 設 $a_1:b_1=c_1:d_1$; $a_2:b_2=c_2:d_2$,

則 $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{c_1}{d_1},\qquad \frac{a_2}{b_2}=\frac{c_2}{d_2}.$$

故 $$\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}=\frac{c_1}{d_1}\times\frac{c_2}{d_2}.$$

$$\therefore\quad a_1a_2:b_1b_2=c_1c_2:d_1d_2.$$

推論: 若諸比例式同為 $a:b=c:d$,

則 $$a^n:b^n=c^n:d^n.$$

(二) 和比定理: 若諸比相等;則諸比前項和與後項和的比

與原有諸比相等。

〔證〕 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k,$

則 $$a=bk,\ c=dk,\ e=fk.$$

$$a+c+e=(b+d+f)k.$$

$$\therefore\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}.$$

注意: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ 有時記作 $a:c:e=b:d:f.$

推論: 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots,$

則 $$\frac{ma\pm nc\pm le\pm\cdots\cdots}{mb\pm nd\pm lf\pm\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots.$$

例: 解 $\begin{cases}x:y:z=2:3:4,\\ 9x+5y-8z=3.\end{cases}$

〔解〕 $x:y:z=2:3:4,$ 即 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}.$

$$\therefore\quad \frac{9x}{18}=\frac{5y}{15}=\frac{8z}{32}=\frac{9x+5y-8z}{18+15-32}=\frac{3}{1}=3.$$

$$\therefore\ \begin{cases}\frac{x}{2}=3,\\ \frac{y}{3}=3,\\ \frac{z}{4}=3.\end{cases}\qquad 而\begin{cases}x=6,\\ y=9,\\ z=12.\end{cases}$$

習題七十二

1. 若$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}$; 試證各比皆等於$\frac{3b-2d+5f}{3a-2c+5e}$.

2. 若 $a:b=c:d$; 試證 $a^2+b^2:\frac{a^3}{a+b}=c^2+d^2:\frac{c^3}{c+d}$.

3. 若$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$; 試證 $\frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{1}{3}$.

4. 解$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4},\\ 9x+5y-8z=5.\end{cases}$ 5. 解$\begin{cases}\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{4},\\ x+2y-z=9.\end{cases}$

6. 甲：乙：丙為 2：3：4,其平方和為 1;求甲,乙,丙三數.

§183. 連比例 $a,b,c,d.$……諸數的關係為:

$a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots$, 卽 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots$時,叫做 $a,b,c,d,\cdots\cdots$諸數成連比例.

若 a,b,c 成連比例,則 b 為 a,c 的比例中項, c 為 a,b 的比例第三項,其比例式為: $a:b=b:c$; 故 $b^2=ac$.

又 $$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}.$$

故三數成連比例時,有下述二重要特性:

(一) 二數的比例中項的平方,等於這二數的積.

(二) 二外項的比，等於各比的二乘比.

例：求 $x^2+2ax+a^2$ 和 $x^2-2ax+a^2$ 的比例中項.

〔解〕 由上述特性(一)，得知：二數的比例中項的平方等於那二數的積。即等於$(x^2+2ax+a^2)(x^2-2ax+a^2)$

$$=(x+a)^2(x-a)^2=(x^2-a^2)^2.$$

$\therefore$ 所求的比例中項 $=\sqrt{(x^2-a^2)^2}=\pm(x^2-a^2)$.

§184. 應用

(一) 配分問題：

例： 甲，乙，丙三人依 $a:b:c$ 的連比，分配獎金 s 元，問三人各得若干？

〔解〕 設甲，乙，丙三人各得 at, bt, ct 元；

則 $$(a+b+c)t=s.$$

$$t=\frac{s}{a+b+c}.$$

$$\therefore\quad at=\frac{as}{a+b+c},\quad bt=\frac{bs}{a+b+c},\quad ct=\frac{cs}{a+b+c}.$$

(二) 混合問題：

例一： 設有甲，乙二種酒，甲種每斤 a 角，乙種 b 角，二種混合以後，平均每斤價為 m 角；求混合量的比.

〔解〕 設混合時，甲種酒為 x 斤，乙種酒為 y 斤；依題意得方程式：

$$ax+by=m(x+y).$$

即　　$$ax-mx=my-by.$$

故　　$$\frac{x}{y}=\frac{m-b}{a-m}.$$

例二：　設有上、中、下三等米，上等米每升 a 角，中等米 b 角，下等米 c 角，混合後每升平均價為 m 角，求三等米的混合比，(設 $b>m$).

〔解〕　設取上等米 x 升，中等米 y 升，下等米 z 升；

則　　$$ax+by+cz=m(x+y+z).$$

即　　$$(a-m)x+(b-m)y=(m-c)z.$$

由上式，可知若與 x,y 以確定的數值，則 z 的數值亦隨之確定．但為避免分數起見，可令

$$x=(m-c)u,\qquad y=(m-c)v.$$

於是得：　$$z=(a-m)u+(b-m)v.$$

茲就實際演算情形，作表分析如下：

平均價	單位原價	與平均價的差	混合比 上：下	中：下	上：中：下
m	a	$(a-m)_+$	$m-c$		$(m-c)u$
	b	$(b-m)_+$		$m-c$	$(m-c)v$
	c	$(c-m)_-$	$a-m$	$b-m$	$(a-m)u+(b-m)v.$

如 $a=12$, $b=10$, $c=6$, $m=8$; 依上表演算，則

平均價	單位原價	與平均價的差	混合比		
			上：下	中：下	上：中：下
8	12	$+4$	1		u
	10	$+2$		1	v
	6	-2	2	1	$2u+v$.

故 $x=u,\quad y=v,\quad z=2u+v.$

令 $u=1.\quad v=1.$

則 $x=1,\ y=1,\ z=3.$

令 $u=1,\ v=2.$

則 $x=1,\ y=2,\ z=4.$

習題七十三

1. 求下列二組數的比例中項：

(a) $2a^3bc^5$, $8abc^3$.　　(b) $\sqrt{5x-1}$, $\sqrt{5x}+1$.

5. 求下列二組數的比例第三項：

(a) $3a^2bc$, $5abc^2$.　　(b) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

3. 某甲以 1000 元分給其三子，但知長子與次子的比爲 1:6, 次子與三子的比爲 2:1; 問三子各得若干？

4. 某人以 2500 元分買甲,乙,丙,丁四種貨物,但知四者買價的連比爲 $1:2:3:4$; 問這四種貨物的價格的分配如何?

5. 甲種米 24 元與乙種米 27 元混合,平均價每斤比甲種賤 0.45 元,比乙種貴 0.30 元; 求甲種米及乙種米的米價.

6. 三分數的和爲 $\frac{53}{60}$, 但知分子的比爲 $1:2:3$; 分母的比爲 $3:5:20$, 求這三個分數.

§185. 比例式的證明 在代數學中,關於證明比例式的問題甚多,現在說明一般的證法如下:

(一) 應用比例定理來證比例式:

例: 若 $x:y:z=(a+2b+c):(a-c):(a-2b+c)$;求證:

$$a:b:c=(x+2y+z):(x-z):(x-2y+z).$$

〔證〕 $\because \quad \frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}.$

$$\therefore \quad \frac{x+2y+z}{(a+2b+c)+2(a-c)+(a-2b+c)}=\frac{x+2y+z}{4a}.$$

$$\frac{x-z}{(a+2b+c)-(a-2b+c)}=\frac{x-z}{4b}.$$

$$\frac{x-2y+z}{(a+2b+c)-2(a-c)+(a-2b+c)}=\frac{x-2y+z}{4c}.$$

故 $\quad \frac{x+2y+z}{4a}=\frac{x-z}{4b}=\frac{x-2y+z}{4c}.$

即 $$\frac{x+2y+z}{a}=\frac{x-z}{b}=\frac{x-2y-z}{c}.$$

(二) 用 k 表已知各比的值來證比例式:

例: 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$; 求證: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$.

〔證〕 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$; 則 $x=ak,\ y=bk,\ z=ck$.

$$\therefore\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\left(\frac{a^2}{a}+\frac{b^2}{b}+\frac{c^2}{c}\right)k^2$$

$$=(a+b+c)k^2.$$

但 $$\frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)}=\frac{(ka+kb+kc)^2}{a+b+c}=k^2(a+b+c).$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

習題七十四

1. 若 $a:b=b:c$; 求證: $\frac{a^2+b^2}{a}=\frac{b^2+c^2}{c}$.

2. 若 a,b,c,d 成連比例; 求證: $(b+c)(b+d)=(a+c)(a+d)$.

3. 若 a,b,c,d 成連比例; 求證: $a:d=a^3:b^3$.

4. 若 a,b,c,d 成連比例; 求證:

$$a:d=a^2+b^2+c^2:b^2+c^2+d^2.$$

5. 若$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}$; 求證: $\frac{a^2-c^2+e^2}{b^2-d^2+f^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

第十八章 級數及複利

§186. **級數** 適合一定規則且成一定序列的各數,叫做級數.各數統叫做級數的項;最初一項叫首項,最後一項叫末項.如:

(一) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

(二) $2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}.$

(三) $2a,\ 2a^2,\ 2a^3,\ 2a^4,\ 2a^5,\ 2a^6.$

三組數都叫做級數.

§187. **等差級數** 連續二項的差常相等的級數,叫做等差級數,或算術級數;如上節(一)即是.

因等差級數的任一項,減去其前一項所得的差均相等;這項差數叫做等差級數的公差.如上節(一)中級數:

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\cdots\cdots$是等差級數,其公差是 1.

又 $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\cdots\cdots$亦是等差級數,其公差是 3.

設等差級數的首項是 a, 公差是 d, 則得等差級數的一般形式爲: $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\cdots\cdots$

當項數是 n 時,其第 n 項應爲 $a+(n-1)d$. 因 n 可以等於

1, 2, 3, 4,……故 $a+(n-1)d$ 又叫做等差級數的公項.

例: 有一等差級數,首項是 3, 第五項是 19; 求公差和公項.

〔解〕 設公差是 d, 則第五項爲:

$$3+(5-1)d=19.$$

$$\therefore\quad d=4.$$

而 $$公項=3+(n-1)\times 4.$$

§188. 等差級數的和 設等差級數的首項是 a, 公差是 d, 末項是 l, 項數是 n, n 項的和爲 s;

則 $$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}.$$

如將次序倒轉;

則 $$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+\{l-(n-1)d\}.$$

二式相加, 得:

$$2s=(l+a)+(l+a)+(l+a)+\cdots\cdots+(l+a)$$

$$=n(l+a).$$

$$\therefore\quad s=\frac{1}{2}n(l+a)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又因級數共有 n 項,而末項爲 $\{a+(n-1)d\}$, 於是又可寫做

$$s=\frac{1}{2}n\{a+(n-1)d+a\}$$

$$=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

例：有首項是 2, 公差是 3 的等差級數；求前十三項的和。

〔解〕 以 $a=2$, $d=3$, $n=13$, 代入公式 (2)；得

$$s=\frac{1}{2}\times 13\times\{2\times 2+(13-1)\times 3\}$$

$$=\frac{1}{2}\times 13\times 40$$

$$=260.$$

§189. 等差中項 三數成等差級數時,中間一數叫做他二數的等差中項.

設 A 是 a, b 的等差中項；

則 $$b-A=A-a.$$

故 $$A=\frac{1}{2}(a+b).$$

又等差級數的不相鄰兩項間的各項,亦叫做那兩項的等差中項.如:在 3, 5, 7, 9, 11, 13 等差級數中, 5, 7, 9, 11, 都是 3 和 13 中間的等差中項.

設有 a, b 二數,現在要在它們中間插入 m 個數,使全體成一等差級數, 則這等差級數共有 $m+2$ 項, 已知首項是 a, 末項(第 $m+2$ 項)是 b, 令公差為 d,

則 $$a+(m+2-1)d=b.$$

$$\therefore\ d=\frac{b-a}{m+1}.$$

公差旣得，則所欲插入的各項，自不難求得。

例：在 4 與 29 中間，插入四個等差中項。

〔解〕由上式，得：

$$d=\frac{29-4}{4+1}=5.$$

故所求的四項是：9, 14, 19, 24.

習題七十五

1. 求等差級數 1, 4,……前十項的和。

2. 求等差級數 $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$,……的第十七項，及前十三項的和。

3. 有一等差級數，首項是 5，第八項是 38；求公差及公項。

4. 在 3 與 21 中間，插入 5 個等差中項。

5. 在等差級數 7, 11, 15, ……中，應取前若干項，得和乃爲 168?

6. 有三數成等差級數，和爲 18，積爲 120，求這三數。

7. 成等差級數的三數，和爲 12，而各自平方的和爲 54；求這三數。

8. 成等差級數的三數和爲 45，最大數與最小數的積爲 77；求這三數。

§190. 等比級數　連續二項的比値常相等的級數，叫做等比級數，或幾何級數。

因等比級數的任一項,與其前一項的比爲一定,故叫這項定比做等比級數的公比.如:

1, 3, 9, 27, ……, 是等比級數,其公比是 3.

16, 8, 4, 2, ……, 是等比級數,其公比是 $\frac{1}{2}$.

設等比級數的首項是 a, 公比是 r; 則得等比級數的一般形式爲:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots\cdots,\ ar^{n-1}.$$

而以 ar^{n-1} (第 n 項)爲公項.

§191. 等比級數的和.

設等比級數的首項是 a, 公比是 r, 項數是 n, n 項的總和是 s;

則 $$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$(1)\times r$ $$sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(2)-(1)$ $$sr-s=ar^n-a=a(r^n-1).$$

$$\therefore\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

例: 求級數 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$……, 前五項的和.

〔解〕 已知 $n=5$, $r=\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$. 代入上式; 得:

$$s=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{2}{3})^5]}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{32}{243}\right)=\frac{211}{162}=1\frac{49}{162}.$$

§192. 等比中項 三數成等比級數時，中間一數叫做他二數的等比中項，設 G 爲 a, b 的等比中項，

則 $$\frac{b}{G}=\frac{G}{a},$$

故 $$G^2=ab.$$

又等比級數的不相鄰二項間諸數，亦叫做這二項的等比中項，如在等比級數 1, 3, 9, 27, 81 中，3, 9, 27 三數爲 1 與 81 中間的等比中項.

設有 a, b 二數，現在要在它們中間插入 m 個數，使全體成一等比級數.已知 a 是首項，b 是第 $m+2$ 項；令公比爲 r,

則 $$ar^{m+1}=b.$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[m+1]{b/a}.$$

公比旣得，首項已知，則所欲插入的各項自可依次寫出.

注 $\sqrt[m+1]{b/a}$ 的計算，有時須使用對數；對數在高中代數學中方可學到.

例: 在 486 與 6 中間，插入 3 個等比中項.

〔解〕 $$486r^{3+1}=6.$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[4]{\frac{6}{486}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}.$$

故所求級數爲 486, 162, 54, 18, 6.

§193. 無限等比級數 項數無限的等比級數，叫做

無限等比級數，如首項 $a=\frac{1}{2}$，公比 $r=\frac{1}{2}$，n 項的和爲 s,

則 $$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

項數 n 無限增大時，$\frac{1}{2^n}$ 卽無限減小而接近於零，故上舉等比級數的和甚近於 1.

又 $$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

若 $|r|<1$，則上式第二項的絕對值因 n 增大而減小，故 n 愈大時，則 s 愈接近 $\frac{a}{1-r}$.

例： 求首項爲 5 公比爲 $-\frac{1}{3}$ 的無限等比級數的和。

〔解〕 $a=5$, $|r|=\frac{1}{3}<1$; 代入上式，

則 $$s=\frac{5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{15}{4}=3.75$$

習題七十六

1. 求級數 1, 3, 9, ……前七項的和。

2. 求等比級數 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, ……前六項的和。

3. 等比級數的首項是 2, 前三項的和是 26; 求公比。

4. 四數成等比級數，第一項與第二項的差是 4, 第三項與第二項的差是 12; 求這級數。

5. 在 a^5 與 b^5 中間，插入四個等比中項.

6. 求 $\frac{x+y}{x-y}$ 與 $\frac{x-y}{(x+y)^2}$ 的等比中項.

求下列無限等比級數的和(7—8):

7. $3+\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots$

8. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

§194. 複利公式 到期後的利息，於下期計算利息時，併入本金，一併生利；叫做複利.

如本金爲 P, 利率爲 r, 本利和爲 A, 令 $R=1+r$, 則

第一期期滿後，　$A=P(1+r)=PR.$

第二期期滿後，　$A=PR(1+r)=PR^2.$

第三期期滿後，　$A=PR^2(1+r)=PR^3.$

……………………………………………

由此下推，得知相鄰二期的本利和的比均爲 R. 故 n 期期滿後的本利和，應相當於以 PR 爲首項，R 爲公比的等比級數的第 n 項，即

$$A=PR^n \cdots\cdots(1)$$

由公式 (1), 我們可以推得:

$$P=\frac{A}{R^n} \cdots\cdots(2)$$

$$R^n = \frac{A}{P}. \qquad \cdots\cdots(3)$$

§ 195. 複利表及檢表法 計算複利時所需$(1+r)^n$的值,常可從現成的表中檢得,這種表叫做複利表.它的式樣見附錄中.表的上端橫列所列的是r(利率)的各值,左端縱行所列的是n(期數)的各值,行列相交格裏的數字,就是$(1+r)^n$的值.舉例如次:

例一: 某甲以 2000 元存入銀行,年利 8 釐,按年計算複利;問 16 年後應共得本利和若干?

〔解〕 查複利表,找出年利 8 釐行與期數 16 列相交格裏的數為: 3.4259426, 故

$A = 2000$元 $\times 3.4259426 = 6851.8852$元 或 6851.89 元.

注意: 答數自分以下,按四捨五入計算.

例二: 某甲以 2000 元存入銀行,年利 8 釐,按半年計算複利;問 16 年後應共得本利和若干?

〔解〕 因係按半年計算複利,故 16 年應為 $16 \times 2 = 32$ 期;利率應為 8釐 $\div 2 = 4$釐,查複利表,找出利率 4 釐,期數 32 相交格裏的數,得: 3.50805875, 故

$A=2000$元$\times 3.50805875=7016.1175$元或 7016.12元.

§196. 複利公式的應用.

例一: 以本金 1000 元,週息 6% 出借,按半年一期計算複利;求三年後的本利和.

〔解〕 半年一期計算複利時,一年爲 2 期;週息爲 6%,半年利率應爲 3%,以 $P=1000$元, $r=3\%$, $n=6$, 代入公式 (1),並查複利表;得:

$$(1+3\%)^6=1.1940523,$$

$$\therefore\quad A=1000\text{元}\times(1+3\%)^6=1000\text{元}\times 1.1940523$$

$$=1194.0523\text{元 或 }1194.05\text{元}.$$

答 3 年後應得本利和共 1194.05 元.

例二: 設以週息 6% 借款若干元,一年一期計算複利,五年後得本利和 4014.6786 元;求本金.

〔解〕 $r=6\%$, $n=5$, $A=4014.6786$元,

依公式 (2) 並查複利表; 得:

$$(1+6\%)^5=1.3382256,$$

$$\therefore\quad P=4014.6786\text{元}\div(1+6\%)^5$$

$$=4014.6876\text{元}\div 1.3382256$$

$$=3000\text{元}.$$

答 本金爲 3000 元.

例三: 某甲借乙 3000 元，以半年一期計算複利，二年後共付乙本利和 3859.3992 元；求週息。

〔解〕 $n=2\times 2=4$, $A=3859.3992$元, $P=3000$元.

依公式 (3), $R=A/P=3859.3992$元$\div 3000$元

$$=1.2864664.$$

查複利表期數為 4 的橫列中，得知 1.2864664 直行所載的利率為 6.5%.

故 週息$=6.5\%\times 2=13\%$.

答 週息為 13%.

例四: 某乙借甲 2500 元，二人相約，以三月為一期計算複利，若週息為 8%，到期後乙付甲本利和共 3170.6045 元；求借款時期.

〔解〕 $P=2500$元, $r=8\%\times\frac{3}{12}=2\%$.

$A=3170.6045$元,

依公式 (3), $R^n=A/P=(1+2\%)^n=3170.6045$元$\div 2500$元

$$=1.2682416.$$

查複利表 r 為 2% 的直行下，得知 1.2682416 橫列所指的期數為 12.

故 借款時期$=12\div 4=3$.

答 借款時期為 3 年.

習題七十七

1. 中央銀行的活期存款爲週息 6%，半年一期計算複利；甲在民國二十八年七月一日存入該行 3000 元，至民國三十年十二月三十一日始往提款；問可得本利和若干？

2. 中央銀行的定期存款爲週息一分，以半年爲一期，若甲以 5000 元存入該行；問 5 年後，定期存款的利息較活期存款的利息多若干？

3. 某銀行的定期存款爲週息 12%，某人於其子初生時，卽存入該行若干元；當子年滿 16 歲時，某人在該行取得本利和共 6130.3937 元。設一年一期計算複利，求某人存款的本金數額。

4. 甲向乙借款若干元，相約三月一期計算複利，週息爲 12%，三年後須還本利和 285.15218 元；求借款數。

5. 郵政儲金的活期存款爲週息 5%、一年一期計算複利，今以 300 元存入，欲於取款時取得 654.86238 元，求存款時期。

6. 甲以 2000 元買甲種節約建國儲蓄券，取款時取得本利和共 2530.638 元；求存款期數(按規定半年至四年的週息爲 8%，半年一期)。

7. 某人以 1000 元存入中國農民銀行，每半年前往轉賬一次，經 6 年後，得本利和 1425.7609 元；求週息。

8. 某華僑向中央銀行買得乙種節約建國儲蓄券千元券10張,預計6年期滿後,可取回本利和19012.075元;求週息。

教育部許可執照　中字第　號

茲據正中書局　呈送國定本
教科書算學組初中數科書樣
本共二十二冊經審查合格准予印
行其有效期限　年自即日起至
民國三十九年　七　月十五日止合
行發給許可執照
右給正中書局收執
部長　朱家驊
中華民國　月十五日

中華民國三十七年八月滬一版

初級中學代數　下冊

售價國幣拾捌元
外埠另加運費匯費

主編者　國立編譯館
編輯者　葉佩華
繪圖者　沈龍元
校閱者　黃守中　蔡德注
承印者　正中書局
發行者　正中書局