

を得る。 $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ なる函数は第 42 圖に示す如くである。 $x = 0$ に主最大(その高さは 1), 次に最小, 實際 $x = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm m\pi, \dots$ にて 0 になる。それ等の中間に副最大が $\text{tg} x - x$ なる函数の零になる位置に起る。であるから光の強さ J_p は互に垂直に交る直線體系

$$\left. \begin{aligned} kaA &= m\pi \\ kbB &= n\pi \end{aligned} \right\} (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

に對して零になる。この表現から

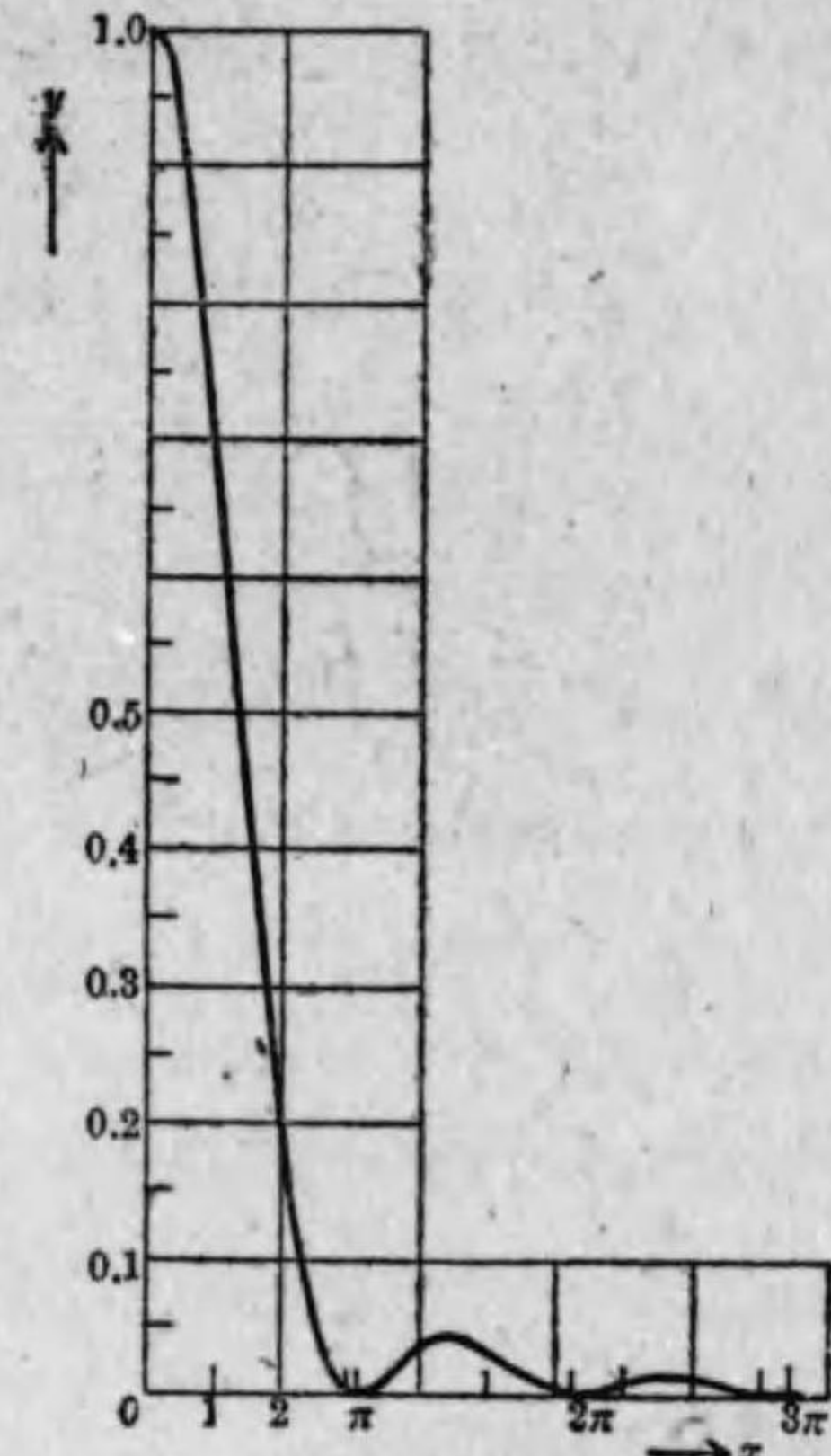
$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{m\pi}{kA} = \frac{\lambda m}{2A}, \\ b &= \frac{n\pi}{kB} = \frac{\lambda n}{2B}, \end{aligned} \right\} \dots (15.9)$$

を得る。二つの相隣る直線の距離は

$$\bar{a} = \frac{\lambda}{2A}, \quad \bar{b} = \frac{\lambda}{2B}$$

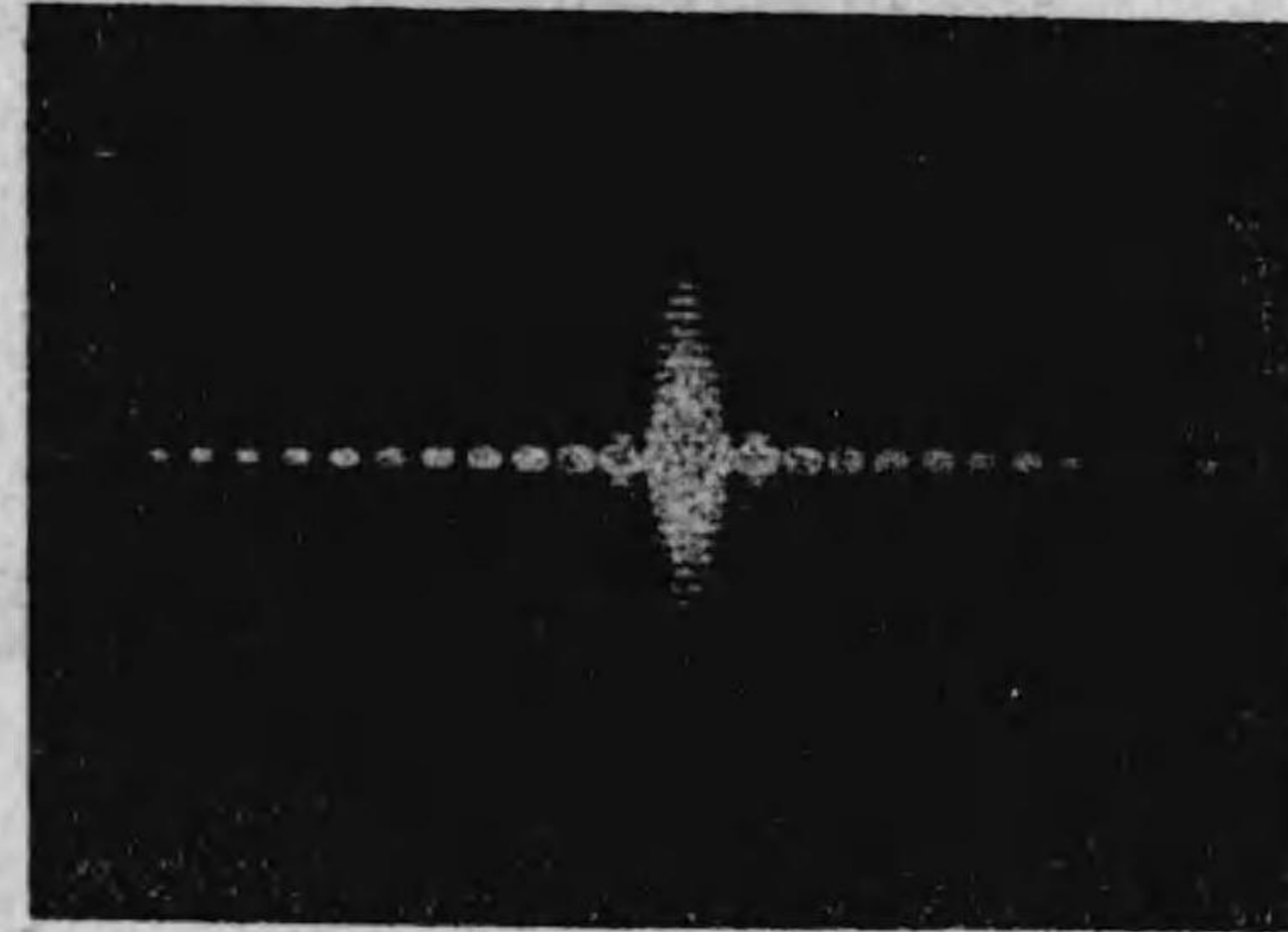
である。かくの如き廻折現象は第 43 圖の寫眞に見られる。勿論開きが大きくなれば廻折像は幾何學的寫像點と一致して来て, 中央の最大の高さは廻折を起す開きの面積の二乗に比例する。

點形の光源の上記の如き簡単な廻折圖から積分によつて任意なコヒーレント又は非コヒーレント光源の廻折現象を計算出来る。第一の場合には振幅を加へて二乗し, 第二の場合には先づ振幅を二乗して後に加へれば良い。例へば輝く直線が光源で, その各點から非コヒーレント光が出る場合に, それに平行な長い狭い間隙が廻折を起す開きであれば, 光源線も細隙も無限



第 42 圖 細隙による廻折

$$y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$$



第 43 圖 $\frac{1}{4}$ mm 幅の矩形細隙による廻折寫眞

に長いとして, その方向を y -軸に取る。 $b = \beta - \beta_0$ であつて, β_0 が輝く點の位置を定めることを考へに入れて, (15.8) で與へられる J_p を b で積分すれば良いことが判る。即ち

$$J_s = \int_{-\infty}^{+\infty} J_p db = \left(\frac{4AB}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\sin(kaA)}{kaA}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(kbB)}{kbB}\right)^2 db$$

尙

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$$

であるから, $k = 2\pi/\lambda$ を用ひて

$$J_s = \frac{8A^2B}{\lambda} \left(\frac{\sin(kaA)}{kaA}\right)^2 \dots \dots \dots (15.10)$$

を得る。光源線及び細隙に平行な明暗交互の條が廻折線として得られることを示して居る。

2. 圓形に於ける廻折現象

圓形の廻折を起す開きの場合も上記の計算と同様にして得られるが, この場合には極座標を用ふる方が便利である。P 點の座標 (光源 Q の幾何

學的像 O に関する) は

$$\rho \cos \theta = a, \quad \rho \sin \theta = b,$$

廻折を起す開き内の點の極座標は

$$\rho' \cos \theta' = \xi, \quad \rho' \sin \theta' = \eta$$

とする。(15.1), (15.7) より

$$u_p = \frac{1}{\lambda} \int_0^A \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho\rho' \cos(\theta' - \theta)} \rho' d\rho' d\theta' \dots\dots\dots(15.11)$$

なる表現を得る。こゝで A は廻折を起す開きの圓の半徑を意味する。この積分は所謂超越ベッセル函数 $J_n(x)$ を以て表される。ベッセル函数の定義により

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} e^{in\theta} d\theta \dots\dots\dots(15.12)$$

而してその漸化式として

$$x \frac{dJ_n(x)}{dx} + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x)$$

があるから, $n = 1$ に對して

$$x \frac{dJ_1(x)}{dx} + J_1(x) = \frac{d\{xJ_1(x)\}}{dx} = xJ_0(x)$$

となり, 積分形として

$$J_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x J_0(\xi) \xi d\xi \dots\dots\dots(15.13)$$

を得る。 $J_0(x), J_1(x)$ の $x = 0$ に於ける値は

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2J_1(x)}{x} = 1$$

である。

さて (15.11) 式に歸つて, $J_0(x)$ は偶數函数であるから, (15.11) は (15.12) を用ひて

$$u_p = k \int_0^A J_0(k\rho'\rho) \rho' d\rho'$$

と書け, $k\rho'\rho = \xi$ とし, (15.13) を用ひて

$$u_p = \frac{1}{k\rho^2} \int_0^{Ak\rho} J_0(\xi) \xi d\xi = \frac{A}{\rho} J_1(Ak\rho) \dots\dots\dots(15.14)$$

を得る。光の強さは

$$J_p = \left(\frac{A^2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{2J_1(Ak\rho)}{Ak\rho}\right)^2 \dots\dots\dots(15.15)$$

なる表現を取り, 幾何學的像の周圍に於ける光の強さ分布は $\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$ なる函数で定められる。先の $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ 同様 $x = 0$ にてこの函数は 1 なる値を取り, x が増すと共に振動しつゝ零に至る。この函数が零になる x の値は先の如く等間隔でなく

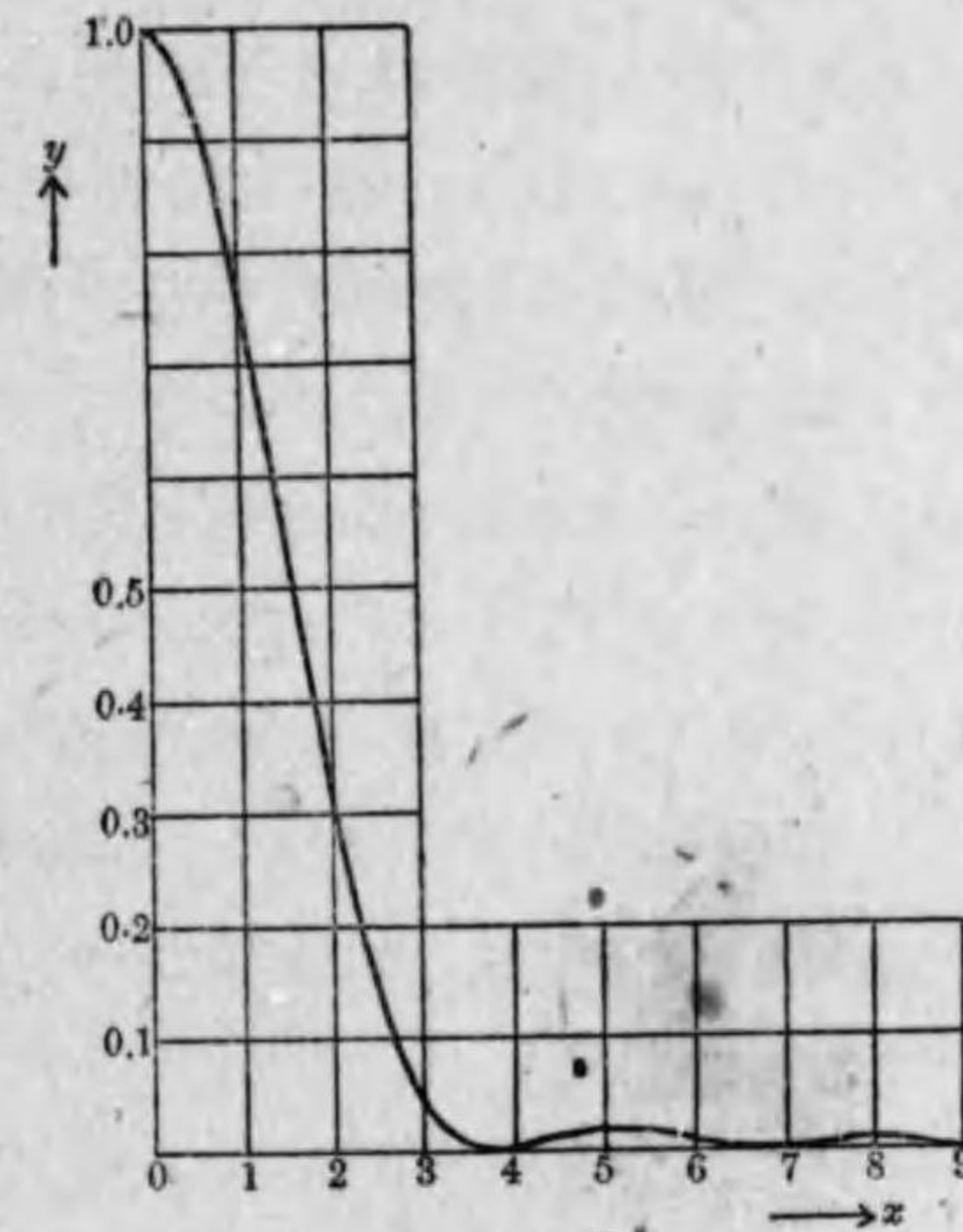
$$x = 1.220\pi, \quad 2.233\pi, \\ 3.238\pi, \quad 4.250\pi, \dots\dots$$

の處で零になる (第 44 圖)。従

つて暗黒な廻折環の半徑は

$$\rho = 0.610 \frac{\lambda}{A}, \quad 1.116 \frac{\lambda}{A}, \\ 1.619 \frac{\lambda}{A}, \dots\dots$$

等である。相隣る環の間隔は次第に $\frac{1}{2} \frac{\lambda}{A}$ に近づく。同心圓の多くの環が廻折現象として圓口徑に對して得られる。中心の明さはこの場合にも矢張口徑の表面積 $A^2\pi$ の二乗に比例する。



第 44 圖 圓口徑による廻折

$$y = \left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$$

3. その他の廻折を起す開きの場合

上記二つの場合と同様の方法で、その他の形の開きに據る廻折現象を計算出来る。即ち開きの輪廓が座標線になる様な曲線的座標系を用ひれば良いのである。この問題に立入らずに唯一方向に於て一様な變形を受けて居る開きの場合を説明しやう。(15.1)式にて $\xi = \mu\xi', \eta = \eta'$ と置いて $\xi\eta$ 平面にてなしたと同様に $\xi'\eta'$ 平面の範圍にて積分すれば、 $u(a, b)$ なる函数は μ なる割合に變化された開きの廻折像を表すことになる。 a, b の代りに新變數 $a' = \mu a, b' = b$ を導入すれば、(15.1)なる積分は a', b' の函数として

$$u_p = \frac{\mu}{\lambda} \iint e^{-ik(\xi'a' + \eta'b')} d\xi' d\eta' = \mu u(a', b')$$

$$= \mu u(\mu a, b) \dots \dots \dots (15.16)$$

なる表現を取る。換言すれば、廻折像も一次的に變形されるが、開きとは逆の方向に於てある。廻折を起す開きが或方向に μ なる割合に擴大すれば、廻折像はその方向に同じ割合だけ縮小する。従つて平行四邊形とか楕圓による廻折像は矩形、圓形の場合の計算から容易に導出される。

次に遮蔽物に多くの同形な開きが同様な位置に配列されて居る重要な場合を考へて見やう。バビネの原理に従つて開きの部分が遮蔽部である體系も同様に取扱はれる。各開き内にて相對的に同等な位置にある原點例へば i 番目の開きにては M_i を定め、これ等の點 M_1, M_2, \dots のこの遮蔽物内にて定つた座標系に關した座標を $\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2, \dots$ とすれば、受働點 P に於ける總刺戟は

$$u_p = \frac{1}{\lambda} \sum_i \iint e^{-ik\{(\xi_i + \xi)a + (\eta_i + \eta)b\}} d\xi d\eta$$

$$= \sum_i e^{-ik(\xi_i a + \eta_i b)} \cdot \frac{1}{\lambda} \iint e^{-ik(\xi a + \eta b)} d\xi d\eta \dots (15.17)$$

で與へられる。この表現中の積分は各圖形の開き一個の廻折作用を表し、この加法は各コヘーレントな廻折現象の重合を意味して居る。一個の開きによつて起る光刺戟の強さを J_0 とすれば、總光強度は

$$J = J_0 \left| \sum_i e^{-ik(\xi_i a + \eta_i b)} \right|^2 = J_0 \sum_i \sum_j e^{-ik\{(\xi_i - \xi_j)a + (\eta_i - \eta_j)b\}}$$

.....(15.18)

と書ける。

最も簡単な場合なる二個の開きに對しては §13, 1 にて説明したヤングの干涉實驗に相當して(その場合には個々の開きの廻折は無視したが) i, j は 1, 2 の値を取るから二重加法の部は

$$2 + e^{ik\{(\xi_1 - \xi_2)a + (\eta_1 - \eta_2)b\}} + e^{ik\{(\xi_2 - \xi_1)a + (\eta_2 - \eta_1)b\}}$$

$$= 2 + 2 \cos [k\{(\xi_1 - \xi_2)a + (\eta_1 - \eta_2)b\}]$$

$$= 4 \cos^2 \left[\frac{k}{2} \{(\xi_1 - \xi_2)a + (\eta_1 - \eta_2)b\} \right]$$

となつて (12.10') と一致した結果になることが判る。處が多くの開きのある場合には、それ等が一定の規則の下に配列された時と不規則に配列された時とでは全く異つて來る。後者の不規則に配列された開きの場合には、 $i \neq j$ なる二重加法の項は不規則に +1 と -1 との間の値を取り、平均では零になり、他の $i = j$ なる項は 1 であるから、開きの數を m とすれば、

$$J = J_0 m$$

と簡單になる。J は J_0 と同じ廻折現象を表すが強さが m 倍になる。天空に起る廻折現象にこの種のものが多い。例へば霧又は薄雲層に於ける太陽や月の周圍に出る所謂暈 (ハロ Halo) 等である。 $i \neq j$ なる項の加法は完全にはなし得ないで、その取る値は一定しないが、開きの形が皆全く同じでない場合にも同様な一定しない結果が出て來る。これ等の詳細の議論

は略す。

廻折を起す開きが規則正しく配列して居る場合に $i \neq j$ なる項が大切な役目をなす。所謂廻折格子はこの場合の廻折実験器械である。これは各方面に重要であるから次の節に詳しく述べる。

4. 半平面の直線的鋭端に於けるフレネルの廻折現象

フレネルの廻折現象に対しては §12 で説明した如く (12.42) なる積分が問題になる。光源 Q と受働点 P とを結ぶ直線上に原点 O を取り (第 45 圖), 遮蔽物の鋭端から原点までの距離を x とすれば, §12 の記號と同じ記號を使用して, 上記積分の範

圍は

$$-\infty < \xi < x,$$

$$-\infty < \eta < \infty,$$

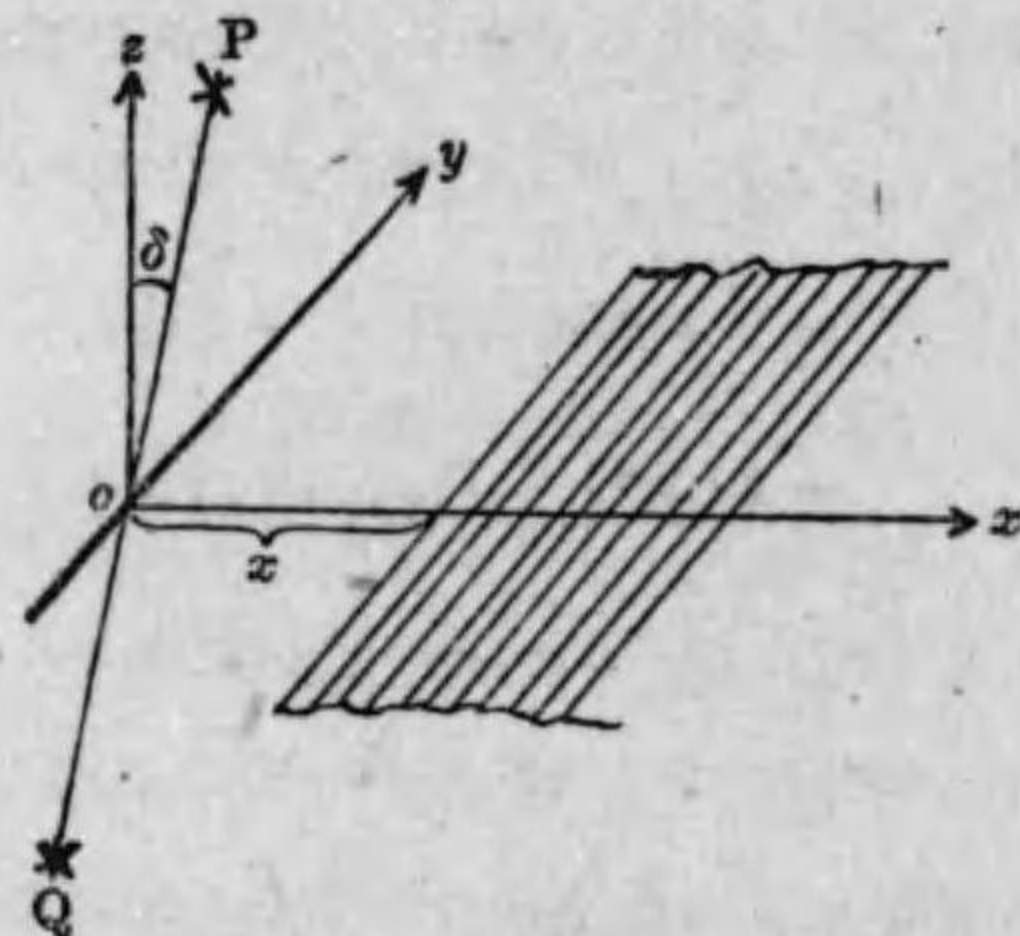
即ち

$$-\infty < u < w,$$

$$-\infty < v < \infty,$$

$$w = x \cdot \cos \delta \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)}$$

$$\dots\dots\dots(15.19)$$



第 45 圖

遮蔽物鋭端に於けるフレネルの廻折説明圖

である。而して $x > 0$ は P 點 が光の側にあることを, $x < 0$ は幾何學的影中にあることを意味する。(12.42) に與へられた函数 U, V の特性を擧げれば,

$$U(w) = -U(-w), \quad V(w) = -V(-w) \dots\dots\dots(15.20)$$

であるから,

$$V(\infty) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \quad V(\infty) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du$$

の値を定められる。即ち

$$V(\infty) + iV(\infty) = \int_0^\infty e^{i\frac{\pi}{2} u^2} du$$

であつて, 新しい積分變數 ζ を

$$\zeta = u \sqrt{-\frac{i\pi}{2}} = u \frac{i-1}{2} \sqrt{\pi}, \quad u = -\zeta \frac{i+1}{\sqrt{\pi}}$$

の如く取れば, 複素 ζ -平面の積分路と u -平面の積分路とを比較し, その虚數軸に平行な積分の收斂性を見て, コーシーの法則によつて容易に

$$V(\infty) + iV(\infty) = \frac{i+1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{i+1}{2}$$

を得るから,

$$U(\infty) = \frac{1}{2}, \quad V(\infty) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(15.21)$$

となる。又上記の U, V の特性 (15.20) を利用して容易に

$$\int_{-\infty}^w \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = \int_{-\infty}^0 + \int_0^w = U(\infty) + U(w) = \frac{1}{2} + U(w),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = \int_{-\infty}^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = 1,$$

$$\int_{-\infty}^w \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = V(\infty) + V(w) = \frac{1}{2} + V(w)$$

$$\dots\dots\dots(15.22)$$

なることが判る。これ等の値を用ひて今必要なる積分 (12.41) の A, B を表せば, (15.19) の積分範圍にて

$$A = a \int_{-\infty}^w du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right\}$$

$$= a \left\{ \left(U(w) + \frac{1}{2} \right) - \left(V(w) + \frac{1}{2} \right) \right\},$$

$$B = a \int_{-\infty}^w du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right\}$$

$$= a \left\{ \left(U(w) + \frac{1}{2} \right) + \left(V(w) + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

を得る。従つて受働點に於ける光の強さは (12.36) により

$$J = |u_p|^2 = |C|^2 (A^2 + B^2) \\ = \frac{J_0}{2} \left\{ \left(U(w) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(V(w) + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \dots \dots (15.23)$$

で與へられる。こゝで J_0 は (12.34) の C と (12.41) の a とから

$$J_0 = 4|C|^2 a^2 = \frac{1}{(R_0 + R)^2} \dots \dots \dots (15.24)$$

なる値を取る。

U, V を UV -平面内の座標と考へれば、 $\sqrt{2 \frac{J}{J_0}}$ は $F_- \left(U = -\frac{1}{2}, V = -\frac{1}{2} \right)$ なる點より (U, V) 點に到る距離になる。 w を變化させると (U, V) 點は曲線を描き、その曲線に沿つてその上の一點 $U(w), V(w)$ と F_- 點との距離を次々に考へれば、今求めんとする廻折現象の姿が判然する。(15.20) より知る如く、その曲線はパラメーター w の値が 0 に對する原點に關して對稱である。 $w = \infty$ に對してその曲線は $F_+ \left(U = \frac{1}{2}, V = \frac{1}{2} \right)$ 點に到り、 $w = -\infty$ に對して F_- に到る。 F_+, F_- は即ちその漸近點になる。その曲線の曲線要素 ds は

$$ds^2 = dU^2 + dV^2 = \left\{ \left(\frac{dU}{dw} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dw} \right)^2 \right\} dw^2 \\ = \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right) \right\} dw^2 \\ = dw^2 \dots \dots \dots (15.25)$$

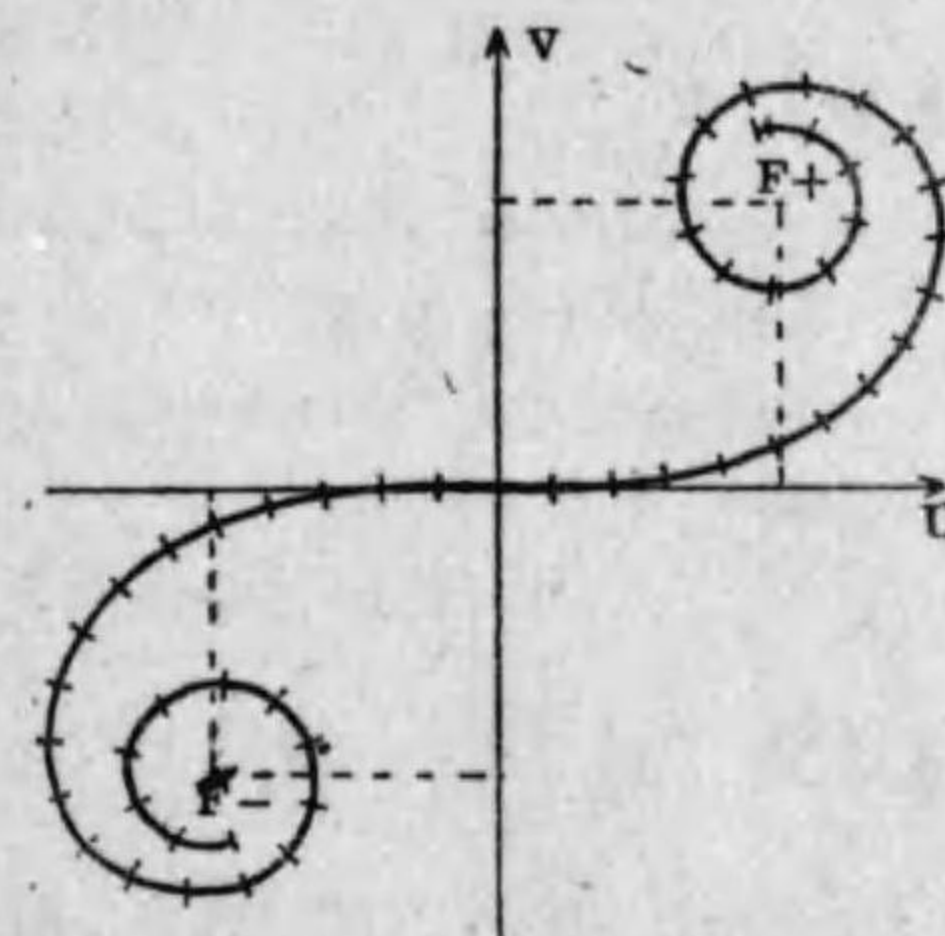
となる。 s を w の増す方向に測れば、 w は原點より測つたその曲線の曲線分と一致する。次にその曲線上の任意の一點に於ける接線と U 軸とのなす角 τ は、

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dV}{dU} = \frac{\frac{dV}{dw}}{\frac{dU}{dw}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right)$$

であるから、

$$\tau = \frac{\pi}{2} w^2 \dots \dots \dots (15.26)$$

となる。従つて τ は $|w|$ が増すと共に單調に増して、正なる w に對しての接線は常に正なる方向に廻轉し、負なる w に對し負なる方向に廻轉する。 $w = 0$ に對し τ は 0 であるから、この曲線は原點に於て U 軸を接線に持ち、 $w^2 = 1$ に對して $\tau = \pi/2$ となり接線は U 軸に垂直、 $w^2 = 2$ に對して $\tau = \pi$ となり再び U 軸に平行になる。かくしてこの曲線は F_+ 點の周圍に正方向、 F_- 點の周圍に負方向に卷いた螺旋であることが判る。この曲線をコルヌ (Cornu) の螺旋と稱して第 46 圖に示す如き曲線である。

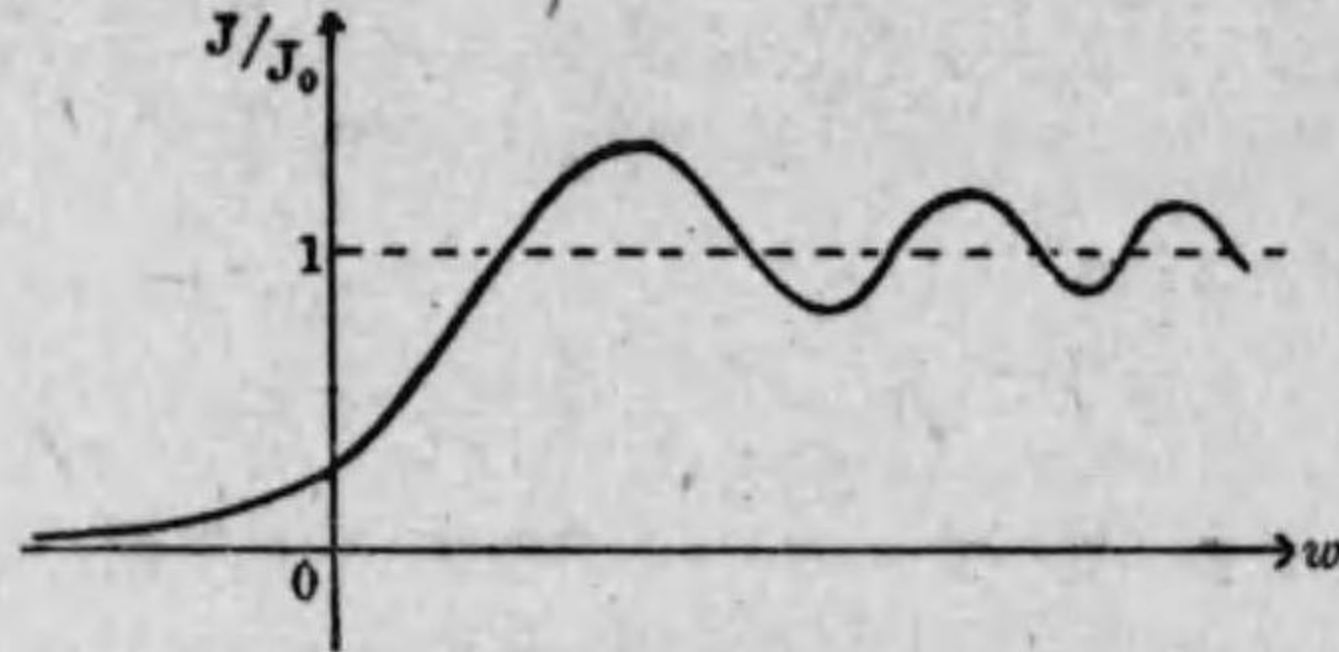


第 46 圖 コルヌの螺旋

既に注意した如く、この曲線を得た以上、今問題にして居る光の強さ分布は容易に得られる。 $w = 0$ 或は $x = 0$ は幾何學的陰影の境界に於ける受働點であつて、 w 即ち x が正なるは光の部分、負なるは影の部分を示して居るから、而して F_- 點からコルヌ螺旋上の點までの距離の二乗として $2 \frac{J}{J_0}$ が表されるから、

$\frac{J}{J_0}$ は第 47 圖の如く影の側 ($w < 0$) では單調に零に到り、光の側 ($w > 0$) には多くの極大、極小が現れ、その値は遂に 1 になることが判る。最も大なる極大の強さは影の端にはなく、明い側に少し隔れた處にある。影の境では $J/J_0 = \frac{1}{4}$ である。これ等の狀況は實驗的結果と一致して居る。

以上は §12 にて述べた如くキルヒホッフの公式化に従つた廻折現象の計算であつて決して厳密な取扱方法とは言へない。電磁光波理論の見地よりした厳密な取扱は限られた特



第 47 圖
鋭端に於けるフレネルの廻折の強度分布

殊問題に對してのみ解答を與へ得、平面の直線的鋭端を持つ完全反射遮蔽物の場合にゾンマーフェルドが詳細なる計算をなした。フレネルの理論とゾンマーフェルドの理論との結果に多少の差を生じ、尙且種々なる興味ある結論を得るが、こゝでは略すことにする。

参 考:

A. Sommerfeld: Math. Ann. Bd. 47 (1896), 317; ZS.f. Math. u. Phys. Bd. 46 (1901), 11.
J. Scheiner u. S. Hirayama: Abhandl. d. königl. Akad. d. Wissensch. Berlin, 1894, Anhang S. 1.

§ 16. 廻折格子

普通光學に使用する廻折格子は硝子又は金屬平面上に等距離に多くの直線的條線をダイヤモンドで引いた平面格子である。それを平面遮蔽物に等距離 d (格子常數) に一定の幅 s の細隙が (その長さ l) m 個あると考へれば、(15.17) 式にて

$$\xi_j = jd, \quad \eta_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

と置かれ、入射光線と格子平面の法線とのなす角を θ_0 、廻折光線とその法

線とのなす角を θ として

$$\alpha_0 = \sin \theta_0, \quad \alpha = \sin \theta, \quad a = \sin \theta - \sin \theta_0$$

とすれば、(15.17) より

$$u_p = u_p^0 \sum_{j=0}^{m-1} e^{-ikjda} = u_p^0 \frac{1 - e^{-imkda}}{1 - e^{-ikda}}$$

となるから、

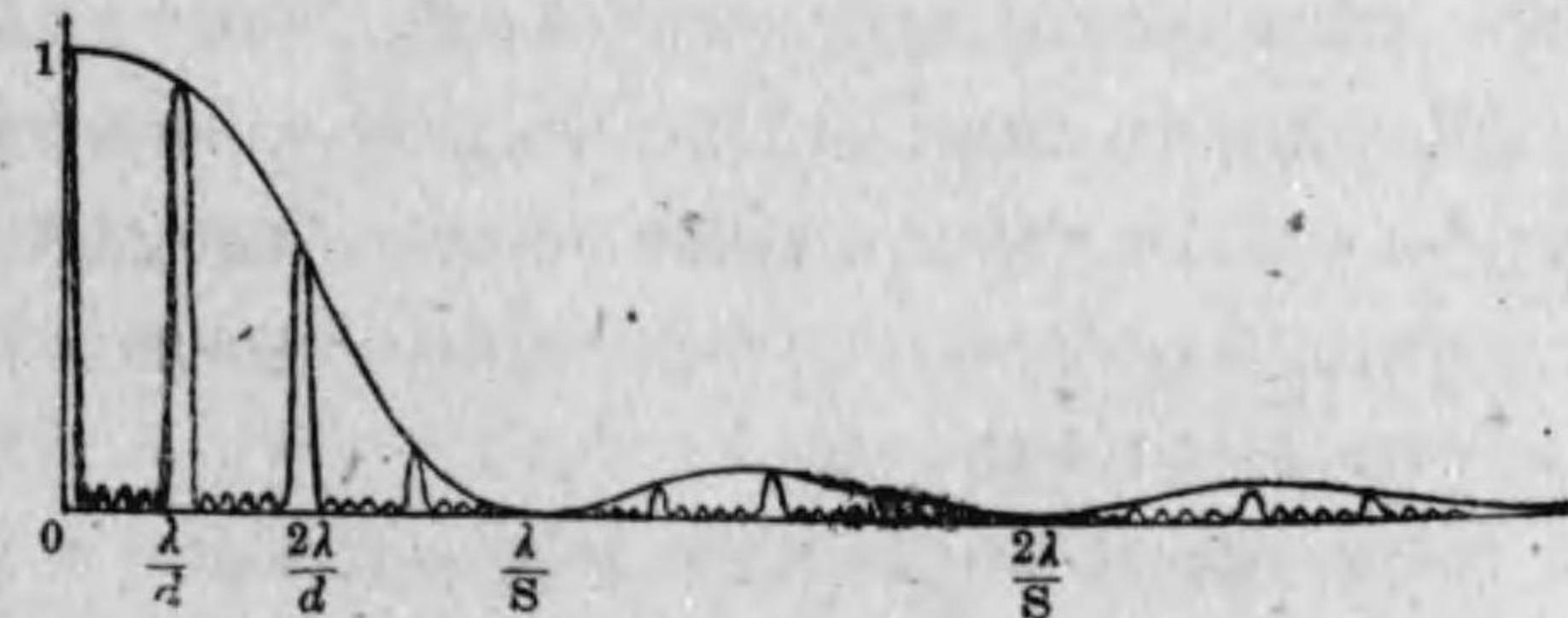
$$J = |u_p|^2 = |u_p^0|^2 \frac{1 - e^{imkda}}{1 - e^{ikda}} \frac{1 - e^{-imkda}}{1 - e^{-ikda}} = J_0 \frac{1 - \cos(mkda)}{1 - \cos(kda)}$$

を得る。 J_0 の表現として直線的光源が細隙を通つた場合の (15.10) にて $2A = s, 2B = l$ とした値を取れば、

$$J = \frac{s^2 l}{\lambda} \left(\frac{\sin \frac{kas}{2}}{\frac{kas}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{mdka}{2}}{\sin \frac{dka}{2}} \right)^2 \dots \dots \dots (16.1)$$

と書ける。この表現は個々の細隙の廻折像と m 個の細隙の干渉像との重合を示し、その廻折像はその半幅が $\frac{kas}{2} = \frac{\pi as}{\lambda} = \pi$ に據つて與へられる主極大を持ち、干渉像の方は $a = 0$ に中心主極大を持つのみならず、分母の $\sin \frac{dka}{2}$ が零になる處、即ち

$$a = \sin \theta - \sin \theta_0 = \frac{\lambda}{d} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \dots \dots (16.2)$$



第 48 圖 格子廻折説明圖

に相當した處に主極大の無限に多くの列が生ずる。それ等の間に弱い副極大があつて、その極小は分子が零になる $a = \frac{\lambda}{d} \frac{n}{m}$ の處にある。(16.1)にて與へられるこれ等の兩因子の重合した結果の光強度分布は第 48 圖の如くなる。

n は極大光強度の方向に對する相隣る二細隙を通る二光線の光路差を波長の單位で與へるから、既述の如く n は干涉の次數を意味する。これ等極大の位置は波長に關係するから、廻折格子を通つた白光は零次のスペクトル以外に凡ての次數のスペクトルに分割する。従つて分光器としてこれが應用される。

一定の次數のスペクトルの紫の部分は少しく、赤の部分は強く偏角され、その偏度は直接波長に比例すると云ふ特性があるから、格子スペクトルは標準スペクトルと稱せられる。格子常數或は 1 スペクトル線の波長を知ればその偏角を測定して直ちに大體の波長測定が出来る(プリズム分光器では全スペクトルを通じての分散を知らねばならない)。格子分光器とプリズム分光器の比較、平面、凹面格子分光器による波長測定、格子分光器の有利、不便、缺點等の詳細な説明は第三篇の應用光學に譲る。

以上論じた様な一方向に廻折を起す線的細隙が週期的に配列された條線格子は一般的格子の特殊な場合であつて、二重に週期的に配列された網目平面格子、三重に週期的に配列された空間格子等がある。前者による廻折は細かく織つた布を通して光源を見る場合(例へば雨傘)に日常觀察する現象であつて § 15, 3 にて説明した處を開きの中心點が平面網に配列した場合に應用すれば良いのである。こゝでは X 線光學にて屢々用ひられる空間格子に就いて記述しやう。

1896 年に X 光線がレンチェン (W. K. Röntgen 1845-1923) によつて發見された當時、それが光線ならば廻折、干涉現象を呈する筈であるか

ら、色々試みられたが明かな結果が得られず、波動としても非常に波長が短いものとされた。その當時では反射に據る干涉現象は X 光線が規則正しく反射されなかつたから認められなかつた(今日の如く強い X 線が得られれば、非常に傾斜した投射をなしてこれが認められる)。人工的に引いた條線格子の條線間隔は波長に比して大き過ぎるのである。1912 年にラウエ (M. v. Laue) は自然結晶體中の格子配列をなす原子群が X 光線に對する廻折格子になり得るを考へ、それに成功して以來 X 線分光學がブラッグ父子 (W. H. Bragg と W. L. Bragg) (1912 年)、デバイ (Debye)、シェーラー (Scherrer) (1916)、ジューバン (Siegbahn)、ハル (Hull)、ブローイ (M. de Broglie) 等の人々によつて發展させられたのである。

任意の結晶體(一般に三斜晶系)内の原子又は分子の週期的配列を考へる時、それ等の或群が週期的に繰返されて出來て居て、全格子が一つのその群(底面: 正方, 六方, 斜方, 單斜, 三斜の五晶系に於て上下軸にのみ交り他の軸に平行な上下二面を底面と云ふ)から次の如き演算にて生成されると考へる。 a_1, a_2, a_3 を一つの底面點即ち原點から出る三つの任意な空間ベクトルとし、それ等は平行六面體を形成する。 l_1, l_2, l_3 を互整数(正, 負, 零を含んで)として

$$\mathfrak{R}_i = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 \dots \dots \dots (16.3)$$

なるベクトルに據つて並進移動が定義される。その原點は一義的に a_1, a_2, a_3 にて作られた斜交座標系に關して整數的の座標を持つ様に定められた新しい點 \mathfrak{R}_i へ移る。その原點から出來て居る凡ての點の總體は簡單格子を形成する。完全な格子は底面の諸原子に凡ての並進移動をなさせて出來、その底面の各原子に、その格子に合同なる簡單原子格子の一つの \mathfrak{R}_i が屬して居る。結晶體内の光散亂現象は幾何學の見地からすれば廻折現象と類似であるが、物理學の見地からすれば寧ろ分散現象と看做さる可

きである。その格子の原子群は X 線波動を受けて實際物理的に二次波に對する光源となるのである。その二次波の中心は普通の廻折現象に於ける様に真空中の場所でなく、實際の振動可能なる原子群を持つ原子内の場所で、入射波に據つてそれ等が振動されて實際に球面波を放射するのである。この振動は入射波と全く同位相に起らないが、その相違は極く少い (X 線に對する屈折率は 1 と極く少し、か違はない) から、今の處同位相であると假定して議論を進める。先づ結晶體の一點を考へて r_0 なる距離にある點的光源からの光に出遇ふとすると、入射振幅は $\frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ 、その考へて居る點に於て $\frac{e^{ikr}}{r}$ なる振幅を持つ二次球面波を起す。從つて受働點 P へ來る、その結晶の點によつて散亂された振幅はそれ等の積 $\frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0}$ である。そこで結晶體の大きさはその中央點 O と受働點 P 及び光源 Q との距離 R 及び R_0 に比して小さいとし、その中央點 O から結晶の何れか一つの格子點 (原子) へのベクトルを q とし ($R > |q|$, $R_0 > |q_0|$), QO 方向の單位ベクトルを s_0 , OP 方向の單位ベクトルを s とすれば、

$$r_0 = R_0 + s_0 q,$$

$$r = R - s q$$

であるから、格子點によつて散亂された振幅は

$$u_p = C e^{ik \cdot (s_0 - s) q} \dots\dots\dots (16.4)$$

なる形に書ける。C は巨視的 (Macroscopic) 量に關した因子である。

そこで q° をその原點と底面點とを結ぶ q に同價値なるベクトル (その要素は ξ, η, ζ) とすれば、(16.3) により

$$q = \mathfrak{R}_l + q^\circ \dots\dots\dots (16.5)$$

であつて、結晶體による總散亂は先づ一つの前記平行六面體 (結晶細胞) の凡てのベクトル q° に互つて加へ、更に凡ての細胞に互つて即ち凡ての l に就いて加法を施さねば得られない。前者を u_p° (廻折格子のフラウンホー

フー廻折理論に於ける各細隙による振幅に相當する) とすれば、P に於ける總振幅は(16.4), (16.5) より

$$u_p = u_p^\circ \sum_l e^{ik \cdot \mathfrak{R}_l (s_0 - s)} \dots\dots\dots (16.6)$$

なる表現を取る。(16.3) により

$$\mathfrak{R}_l (s_0 - s) = l_1 \cdot a_1 (s_0 - s) + l_2 \cdot a_2 (s_0 - s) + l_3 \cdot a_3 (s_0 - s) \dots (16.7)$$

である。(16.6) と (15.1) とを比較すれば、(16.6) にて s なる指數を持つ項を除き、 a_1 と a_2 とが互に垂直であるとし、 a_1, a_2 で定められる座標系にて s_0, s の要素を $\alpha_0, \beta_0; \alpha, \beta$ とすれば (15.1) と一致する。

計算に便のため結晶體は平行六面體で、その積は s ベクトル a_1, a_2, a_3 に平行であるとする。(16.7) を (16.6) に入れれば、その和法は三つの幾何級數に分れ、各は $\sum_l e^{ilA}$ なる形を取る。

$$A_1 = k a_1 (s_0 - s), A_2 = k a_2 (s_0 - s), A_3 = k a_3 (s_0 - s) \dots (16.8)$$

として、 lA は $l_1 A_1, l_2 A_2, l_3 A_3$ の一つを代表する。その結晶體の三稜に沿うて存在する格子點の數を L_1, L_2, L_3 とすれば、

$$\sum_{l=0}^{L-1} e^{ilA} = \frac{1 - e^{iLA}}{1 - e^{iA}}$$

その二乗を取れば、 $\frac{1 - \cos LA}{1 - \cos A} = \frac{\sin^2 \frac{LA}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}}$ となるから、その散亂の光強度は

$$J_p = J_p^\circ \frac{\sin^2 \left(\frac{L_1 A_1}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{L_2 A_2}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{L_3 A_3}{2} \right)}{\sin^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2}} \dots\dots\dots (16.9)$$

で與へられる。 J_p° は個々の格子細胞の散亂を表し、X 線分光學にて構造因子と稱せられるが、こゝではこの問題に立入らず、干涉極大の位置即ち

(16.9) の分子の三因子が零になる處を考へて見る。それは (16.8) にて $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ であるから、 h_1, h_2, h_3 を整数として

$$a_1(s_0 - s) = h_1\lambda, a_2(s_0 - s) = h_2\lambda, a_3(s_0 - s) = h_3\lambda \dots (16.10)$$

なる條件を満足する處である。(16.10) は結晶による X 線干渉の光の強さ極大を與へる有名なラウエの公式である。條線格子、又は平面網格子に於ける廻折との特徴的な差違は、條線格子、平面格子では與へられた波長、入射方向 s_0 に對して常に一つの解答 s が存在するに反し、空間格子では與へられた波長 λ に對して未知數の數より餘計に方程式があつて不定になる點である。即ち s の二つの獨立な要素に對して三つの方程式が存在し、嚴密に單色の X 線では結晶體は一般に干渉が認められず、それを得るには次の二方法に據る可きである。

1) ラウエの斑點實驗： 連續スペクトル X 線を入射すれば、ラウエの條件 (16.10) を満足する様な特別の波長を格子自身が撰出し、寫眞乾板上へ規則正しい配列を持つた點體系が撮影される。その點の光の強さはそれぞれ異り、結晶體系に應じた對稱性を持つた群が一定の波長によつて現れる。このラウエ斑點はフリードリッヒ (Friedrich)、クニッピング (Knipping) 等によつて實驗的に確められ、これによつて次數 h_1, h_2, h_3 と同時に波長を定められる。

2) ブラッグ及びデバイ、シェーラーの實驗： これ等の實驗では結晶位置が空間にて變化されるのである。ブラッグの場合には結晶體が廻轉され、デバイ、シェーラーの場合には細粉の結晶子が多く種々雜然と存在して、凡ての配置が完全に存在する位に多數なる場合である。ブラッグの實驗では出來るだけ完全な結晶體を使用せねばならない。この場合にはラウエの公式と同等であるが他の形の公式が用ひられる。

X 光線が格子の網平面と考へられる結晶表面に當り、そのすぐ下にある

次の網平面と平行平面をなす層が考へられる。X 光線はその層の兩平面にて反射されるが、その平行平面に於ける干渉條件 (§13 の 3, 4 にて與へた) を満足時に特に強められ、照角 (境界面と入射光線とのなす角で、入射角の餘角である) を θ とすれば、その強められる條件は

$$2d \sin \theta = n\lambda \dots \dots \dots (16.11)$$

である。 d は兩網面の距離、 n は整数である。この條件を満足すれば、それより深い所にある網面一對等によつて矢張強められる。このブラッグの條件 (16.11) とラウエの公式 (16.10) とが同等であることは (16.11) を表面のみならず内部の網面全體に應用すれば容易に判る。格子細胞の容積は

$$V = a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{vmatrix}$$

で與へられ、

$$b_1 = \frac{1}{V} (a_2 \times a_3), b_2 = \frac{1}{V} (a_3 \times a_1), b_3 = \frac{1}{V} (a_1 \times a_2)$$

なるベクトルを導入して (b にて形成される格子を逆格子と云ふ)、

$$a_i b_k = \delta_{ik} = 1 \quad i = k \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$0 \quad i \neq k$$

任意のベクトル r は a 並に b で直線的に表され

$$r = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3,$$

この式に a_1, a_2, a_3 を乗じ (スカラー的に)

$$c_1 = a_1 r, \quad c_2 = a_2 r, \quad c_3 = a_3 r$$

を得るから、(16.10) 中の $s_0 - s$ を r と考へ

$$s_0 - s = \lambda (h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3) \dots \dots \dots (16.12)$$

と書ける。 h_1, h_2, h_3 の最大公約數を n とすれば

$$h_1 = n h_1', \quad h_2 = n h_2', \quad h_3 = n h_3'$$

であつて、(16.12) の括弧中の値は長さの逆数でそれを特に $n \cdot \frac{1}{d}$ とすれば、

$$|h_1' b_1 + h_2' b_2 + h_3' b_3| = \frac{1}{d}$$

であるから、(16.12) は

$$|\varepsilon_0 - \varepsilon| = \frac{\lambda}{d} n$$

なる表現を取る。 ε_0 と ε との間の角を 2θ とすれば、 $|\varepsilon_0 - \varepsilon| = 2 \sin \theta$ であつて、結局

$$2d \sin \theta = n \lambda$$

となる。この d が相隣る網平面の距離を意味することが判れば、ブラッグの条件になる。これを証明するために

$$\eta = h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3$$

なる逆格子の任意の点を表すベクトルを考へる。それは原の格子の一網面に垂直なることはその定義より明かで、 h_1, h_2, h_3 の最小公倍数を h として三つのその軸に平行なベクトル $\frac{h}{h_1} a_1, \frac{h}{h_2} a_2, \frac{h}{h_3} a_3$ を引けばこれを通つて平面 \mathfrak{R} が存在する。この平面内の二直線即ちその三ベクトルの各二つの連結線例へば $\frac{h}{h_1} a_1 - \frac{h}{h_2} a_2$ と $\frac{h}{h_2} a_2 - \frac{h}{h_3} a_3$ 等は η なるベクトルに垂直で、 η とのスカラ積は零になるから、 \mathfrak{R} に η は垂直である。 η の方向の単位ベクトル $\eta/|\eta|$ と格子点へのベクトル \mathfrak{R}_i とのスカラ積 $\frac{\eta}{|\eta|} \cdot \mathfrak{R}_i$ は網面 \mathfrak{R} から格子点 \mathfrak{R}_i への距離を表し、それは

$$\begin{aligned} & \frac{(h_1' b_1 + h_2' b_2 + h_3' b_3) \cdot (l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3)}{|h_1' b_1 + h_2' b_2 + h_3' b_3|} \\ &= \frac{l_1 h_1' + l_2 h_2' + l_3 h_3'}{|h_1' b_1 + h_2' b_2 + h_3' b_3|} \end{aligned}$$

と書ける。この分子は各整数値を取り、零でない最小値は1であるから、網面 \mathfrak{R} から格子点 \mathfrak{R}_i の最短距離は $\frac{1}{|h_1' b_1 + h_2' b_2 + h_3' b_3|}$ で、格子点 \mathfrak{R}_i を通り \mathfrak{R} に平行な然も網面に平行な \mathfrak{R} に相隣る網面と \mathfrak{R} との距離は d になつて證明しやうとしたことが正しいことを知る。かくの如くしてラウエの公式とブラッグの条件とが同等であることが判る。

以上の考察より結晶構造を知れば、X線分光學が成立し、逆にX線の方を知れば、結晶構造研究が出来るのである。

参 考:

- J. v. Fraunhofer: Ges. Schriften. S. 51, München 1888.
 H. Kayser: Handb. d. Spektroskopie, Bd. 1, S. 423.
 A. Schuster: Theory of Optics, 3rd. ed. London 1924.
 Lord Rayleigh: Wave theory of Light. Sci. Pap. Bd. 3. Cambridge 1902.
 P. P. Ewald: Kristalle und Röntgenstrahlen. Berlin 1923.
 M. Siegbahn: Spektroskopie der Röntgenstrahlen. 2. Aufl. Berlin 1931.

§ 17. 廻折理論の應用、像収差の廻折理論

フランホーファーの廻折公式 (15.1) の應用中最も重大なものは光學器械の分解能計算である。この分解能なる概念は既に干涉分光器の處で述べたが、廻折格子、プリズム等の分光器械に於ける分解能は波長 λ と $\lambda + \delta\lambda$ とのスペクトル線を分別し得る能力の尺度であつて、望遠鏡、顯微鏡等の寫像器械に於ける分解能は二つの相接近した物点を別々の像として寫像し得る能力の尺度である。この際幾何光學に従つて計算される光路は理想的な鮮明像を造り、不鮮明の原因はたゞ光線を制限する絞りに據つて當然起る廻折現象のみであると考へる。この廻折現象のために前諸節にて述べた如く、光點、光直線は點或は直線とならず、絞りの形に應じて種々なる形の光の強さの山となつて現れる。二つのこの光の山を分別し得る尺度として、

レーレー卿 (Lord Rayleigh) にならつて、一方の山の最大が他の山の第一最小と一致すれば両山は分別出来るとする。この両山の位置を極限の位置と云ふ。分光器では或波長差 $\delta\lambda$ がその極限の位置に相当し、今考へて居る非常に狭い範囲の平均波長を λ とすれば、 $\lambda/\delta\lambda$ が分解能である。寫像器械では寫像さる可き物體 (二光點) の一定の長さ或は角差がその極限の位置に相当し、その逆数が分解能と稱せられる。

例へば廻折格子の分解能は次の如くなる。單色光直線が異つた次數のスペクトル線となる廻折像の主極大は (16.2) によつて

$$a = \frac{\lambda}{d} n \quad (n = \pm 1, 2, 3, \dots)$$

なる位置にあり、第一極小は

$$\delta a = \frac{\lambda}{d \cdot m}$$

なる距離にある。 m は格子條線の數である。他方波長を變化すれば、主極大の中央は

$$\delta' a = \frac{\delta\lambda}{d} n$$

だけ変わる。その變化された波長の極大が原の波長の極限の位置に丁度あれば、 $\delta' a = \delta a$ と置かねばならないから、分解能として

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = n \cdot m \dots \dots \dots (17.1)$$

を得る。即ち廻折格子の分解能は次數と條線數との積に等しい (干涉分光器では干涉する光束の數がこの條線數に等しく、(17.1) は § 14, 3 の終りに得た $\frac{\lambda}{d\lambda} = mp$ と同表現である)。その他の光學器械の分解能に對する表現は應用光學篇にて詳しく記述する。

今 $k \cdot \lambda$ なる可干涉長 (可干涉時間は k/ν) を持つ波が遠方から (平面波と考へられる) 廻折格子に入射されたとすれば、凡ての格子條線が廻折縞

を起さずに役立たないで、例へば n 次の廻折極大は各二つの相隣る條線からの光が $n \cdot \lambda$ なる光路差を持つ様な廻折方向に出来るから、各二つの相隣らない條線からの光は $2n\lambda, 3n\lambda, \dots, n \cdot m'\lambda$ なる光路差を持ち、 $k \cdot \lambda$ が可干涉長なら、 n 次廻折に有效な格子條線の數 m' は

$$m' n \lambda = k \lambda, \quad m' = \frac{k}{n} \dots \dots \dots (17.2)$$

である。勿論廻折格子が m' より小なる條線數を持てばその全部が有效である。 n が大なれば大なる程その有效條線數は少い。處で (17.1) で與へられる數値の逆數 $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ は相對的尺度に於ける λ の極大の半値幅を與へる。嚴密に單色な光でなく、 k 波ごとに不規則な位相變換が起れば、 $m' = \frac{k}{n}$ だけの條線が有效であるから、その半値幅を與へる $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta\lambda}{\lambda} &= \frac{1}{n m'} = \frac{1}{k}, & n > \frac{k}{m} \\ \frac{\delta\lambda}{\lambda} &= \frac{1}{n m}, & n < \frac{k}{m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17.3)$$

となる。従つて $n = \frac{k}{m}$ 次に到るまでスペクトル線の相對的幅は (17.3) の第二式に従つて減少し、それより高い次數 $n > \frac{k}{m}$ にては、條線數、次數には無關係で可干涉數 $1/k$ に等しくなることが判る。であるから高次の廻折縞を觀測すれば、相對的スペクトル線幅が直接可干涉數の尺度になる。而してそれは廻折器械には據らない。然し低次にては ($n < \frac{k}{m}$) そうとは行かない。 k 個の擾亂されない振動 ν_0 からフーリエ解析にて得られる半値幅とこの相對的半値幅 $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{k}$ とを比較して見やう。その波動群は

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}(t) &= \mathfrak{A}_0 e^{2\pi i \nu_0 t} & |t| \leq \frac{k}{2\nu_0} \\ \mathfrak{A}(t) &= 0 & t < -\frac{k}{2\nu_0}, \quad t > +\frac{k}{2\nu_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17.4)$$

で與へられ、 $\mathfrak{A}(t)$ に対してフーリエ積分

$$\mathfrak{A}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{2\pi i \nu t} d\nu \dots\dots\dots(17.5)$$

を入れれば、

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

で、この $\mathfrak{A}(t)$ に (17.4) を入れて

$$a_\nu = \int_{-k/2\nu_0}^{+k/2\nu_0} e^{2\pi i (\nu_0 - \nu)t} dt = \frac{1}{\pi (\nu_0 - \nu)} \sin\left(\frac{\pi k (\nu_0 - \nu)}{\nu_0}\right)$$

を得る。従つて調和成分 ν の強さとして

$$|a_\nu|^2 = \frac{1}{\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2} \sin^2\left(\frac{\pi k (\nu_0 - \nu)}{\nu_0}\right)$$

となり、その主極大は $\nu = \nu_0$ にあつて $\frac{k^2}{\nu_0^2}$ なる値を持つて居る。その次の極小は $|\nu_0 - \nu| = \frac{\nu_0}{k}$ の處にあるから、その相対的波長差は

$$\left|\frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\right| = \left|\frac{\delta\nu}{\nu_0}\right| = \frac{|\nu_0 - \nu|}{\nu_0} = \frac{1}{k} \dots\dots\dots(17.6)$$

で、(17.3) の第一式と一致する。即ち數學的フーリエ解析と物理的格子解析とは高次の廻折 ($n > \frac{k}{m}$) の場合に等しい相対的スペクトル線幅を與へる。

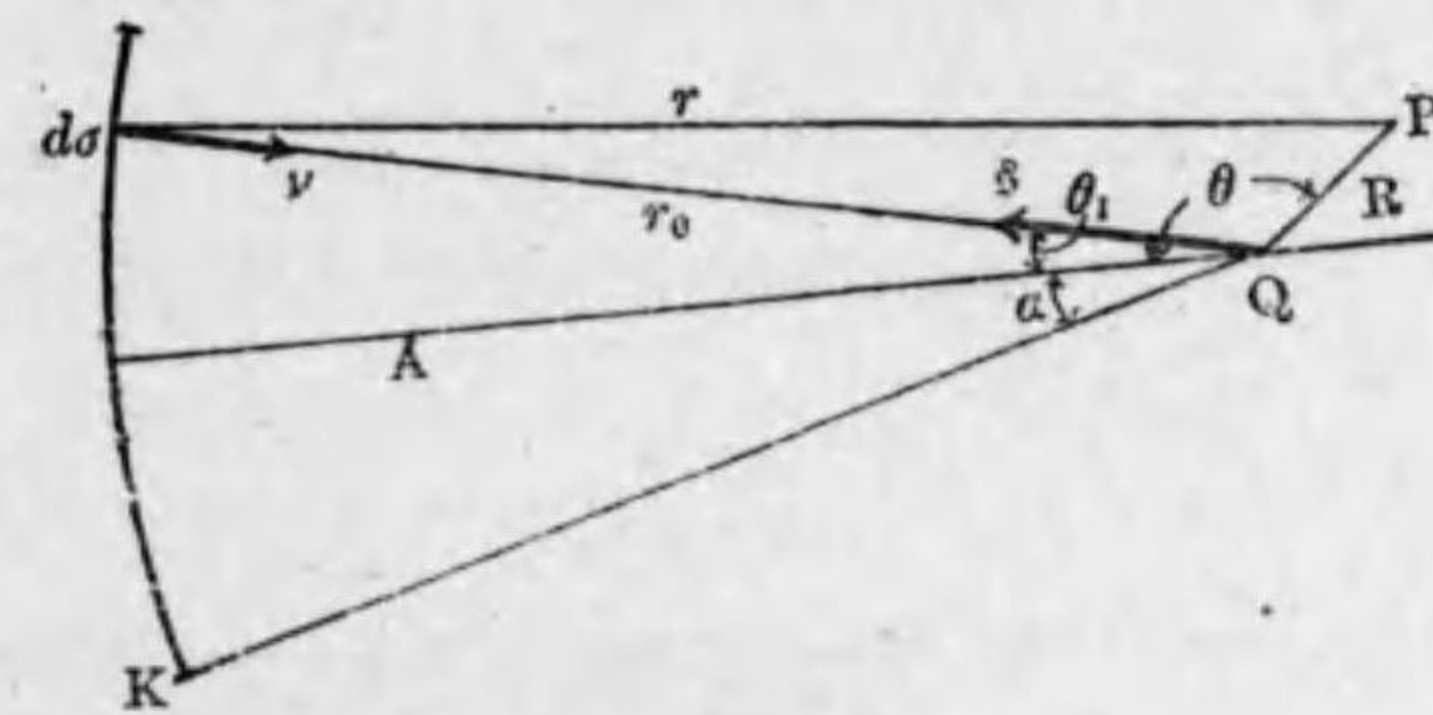
次に幾何學的光線の集合點即ち焦點の附近に於ける光波動の状況を考へて論ずる像収差に対する廻折理論に就いて一言しやう。幾何光學の章の最初に述べた如く、幾何光學は幾何光學的陰影の境界及び幾何學的光線の集合點即ち廣義の焦點の附近を除いた處でのみ成立する。この例外の場所では廻折現象が起つて、幾何學的に定められる照明度とは異つて來る。今まで記述したのは陰影の境界に於ける波動的現象であつた。フランホーファーの廻折現象の場合にレンズで光線集合を行つたが、それは便利上のためで、

實際に光線集合點の附近の空間にて光線が如何なる状況であるかの解答は得られて居ない。この問題は光學器械の性能を検べる上に重大な問題であつて、焦點をはづれた處で光の強度分布が如何になるかを定める必要がある。この問題は既に述べた幾何光學的収差の影響と同時に廻折の影響を定める可き問題である。

こゝでは簡単にデバイ (Debye) の理論を記すにとどめる。點的光源 Q に対する受働點 P に於ける光刺激の式 (12.29) から出發する。即ち

$$u_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} \{\cos(\nu, r) - \cos(\nu, r_0)\} d\sigma \dots(17.7)$$

各記號の意味は §12 で説明した通りであつて、§12 では Q と P とは絞



第 49 圖 收斂球面波の圓形口径にて絞られたる部分

りの異つた側にあると假定したが、今の場合には收斂光束を考へて、それは絞りがなければ焦點 Q に集合するが、絞りのある場合に Q の近所の點 P に於ける光の強さを檢べるのである。この場合にも (17.7) 中 $r+r_0$ を $r-r_0$ とすればこの式が應用される。更に廻折を起す開きは圓形で、Q はその中心に立てた法線上にあるとすれば、

$$-\cos(\nu, r) = \cos(\nu, r_0) = 1, \quad d\sigma = r_0^2 d\Omega$$

と書け、 $d\Omega$ は單位球の要素で、積分は Q を中心にした絞りの縁を通る球

面に互つてなせば良い。R を Q から P へのベクトルとし、s を Q から dσ への単位ベクトルとすれば、R = |R| ≪ r₀ であるから

$$r - r_0 = R s$$

と書け、焦点 Q の近所に於ける光刺激は (17.7) から結局

$$u_p = \frac{ki}{2\pi} \iint e^{ikR s} d\Omega \dots\dots\dots(17.8)$$

なる表現を取る。こゝで積分は廻折を起す絞りの軸 A の周圍に α (第 49 圖) なる開きの半角を持つ圓錐體に互つて取れば良い。QA を軸とする極座標を取つて、s に対しては θ₁, φ₁, R に対しては θ, 0 (φ = 0 としても一般性を失はないのは勿論) とすれば、

$$R s = R (\cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos\varphi_1), \quad d\Omega = \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

であるから、(17.8) は

$$u_p = \frac{ki}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\alpha \sin\theta_1 d\theta_1 e^{ikR(\cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos\varphi_1)} \\ = ik \int_0^\alpha e^{ikR \cos\theta \cos\theta_1} J_0(kR \sin\theta \sin\theta_1) d\theta_1 \dots\dots\dots(17.9)$$

こゝで J₀(z) は零次のベッセル函数である。この積分値は次の二つの極限の場合に容易に求められて、

i) kR cos θ が小なる場合即ち焦面 θ = π の近所にて

$$u_p = ik \frac{e^{ikR \cos\theta}}{k^2 R^2 \sin^2\theta} \{kR \alpha \sin\theta \cdot J_1(kR \alpha \sin\theta) - \dots\} \dots(17.10)$$

ii) kR sin θ が小なる場合即ち軸 θ = 0 の近所にて

$$u_p = \frac{1}{R \cos\theta} \{e^{ikR \cos\theta} - e^{ikR \cos\alpha \cos\theta} \dots\} \dots\dots\dots(17.11)$$

となる。これ等の式より

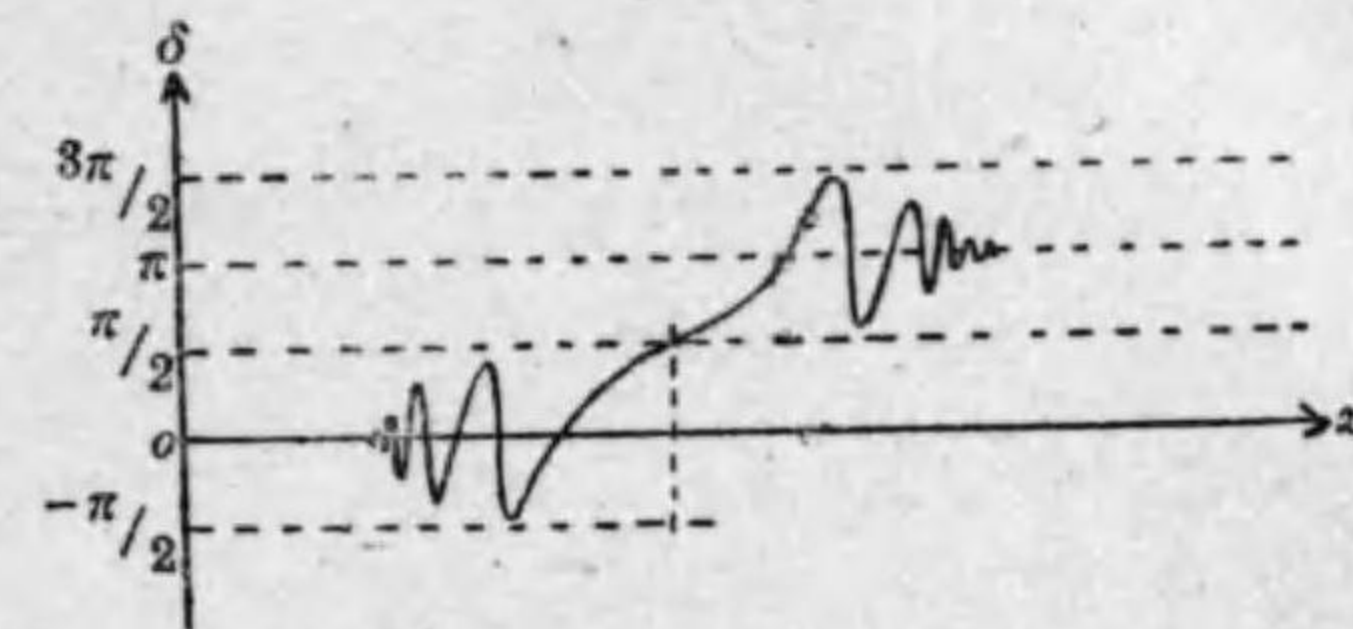
$$u_p = \frac{\alpha}{R} e^{ikR + i\delta}$$

なる形に書けることが判り、α, δ は定つた θ に対して R の函数であるが、焦点 Q から遠く隔つた前後に於て δ(R) = π, 中間にてその値は大小に振動し、焦点自身にては δ(0) = π/2 となることが判る。それを圖に示せば (ライヘ (Reiche) にならつて) 第 50 圖の如くなる。焦面に於ては光

の強さ分布は § 15, 2

に與へたフレネルの理論と殆んど同じ状況になるのは當然である。

次に幾何光學的收差を持つ一般的收斂光束に以上の理論を應用し



第 50 圖 焦点に於ける光波の状況

て、幾何學的及び波動的寫像收差を同時に取扱ふことも出来る。幾何光學の章にて説明した様に有軸レンズ體系にて軸の近くの光束はガウスの寫像を定義する處の點的光束集合をなす。各物點に像空間に於ける位置ベクトル r₀ で定められるガウスの像點を對應させて全像空間に於ける寫像を定めるガウスの光路は凡ての光線に就いて等しい。従つて收差のない寫像の場合にはガウスの光線 s₀, r₀ に垂直な平面 (r - r₀) s₀ = 0 は等位相の平面である。平面の原點を、r₀ を通り軸に垂直な平面 (X₀ = 0) の軸上の點に取れば、この平面内にある受働點 (X = 0) に対する光路程はガウスの寫像の場合屢々幾何光學の章にて出て來た様に

$$L_0 = n_1 (r - r_0) s_0 = n_1 \{(Y - Y_0) \beta_0 + (Z - Z_0) \gamma_0\}$$

と書ける。然し收差のある光路の場合には同じ基準平面に對して射出點及び法線方向が變化して

$$Y_1 = Y_0 + \delta Y, \quad Z_1 = Z_0 + \delta Z, \\ \beta_1 = \beta_0 + \delta \beta, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + \delta \gamma$$

となり、同じ受働點に對する光路程は

$$L_1 = n_1 (r - r_1) \cdot \hat{s}_1 = n_1 \{ (Y - Y_1) \beta_1 + (Z - Z_1) \gamma_1 \}$$

となる。そこでザイデルの變數を導入して計算するのであるが、こゝではその詳細な記述を略す。この場合像空間に於ける波動狀況は

$$u = \frac{ik}{2\pi} \iint e^{ikL_1} d\Omega_0$$

で與へられる。 $d\Omega_0$ は球面波をなす物空間に於ける空間角要素を意味するから、 $d\Omega_0 = \frac{d\beta_0 d\gamma_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2 - \gamma_0^2}}$ である。この積分値も亦ベッセル函数を以て表現される。詳細はデバイの論文を見られ度い。

参 考:

- P. Debye: Ann. Physik (4) Bd. 30 (1909), 755.
 J. Picht: Optische Abbildung, Braunschweig 1931.
 F. Reiche: Ann. Physik (4) Bd. 29 (1909), 65, 401.

第四章 結晶光學と金屬光學

§ 18. 異方體に對する電磁波的光理論

結晶光學の最初の表現はフレネルに據つて與へられたが、純力學的基礎の下に立てられたこの理論は變形し得る物體の解析的力學の存在して居なかつた當時のもので決して嚴密なものでなかつた。後にコーシー、ノイマン等によつてこの理論の基礎が固められたとは云へ、それは光の弾性的理論であつて今日ではたゞ歴史的の意味しかない。マックスウェルの電磁波理論が起るに及んで、光學異方性を電氣的に説明し得、弾性的理論同様結晶體の複雑な現象を正確に表現し得た。然し結晶體による光の分散旋光性等の現象を説明するためには、或假定を必要とし、これ等の古典的理論に反して物質は連続的な擴りを持つて居らず、微粒子より構成されて居ると假定してのみその説明が可能である。この見地は原子的理論の根本をなし、結晶格子理論の應用となるのである。この原子的理論はエワルド (Ewald) に據つて發展され、ボルンによつてこの格子光學の取扱が簡明にされた。これ等は第五章分子光學にて説明するとしてこゝでは異方體に對する電磁波的光理論だけを取る。

第一章にて記述した如く、マックスウェルの式と物質に關する式とを以て光理論が成立し、等方體でない物體即ち結晶體に對しては物質に關する式が (1.10), (1.11), (1.12) の如き簡単な表現を取らず、それを更に一般的にせねばならない。先づ電氣不導體 ($\sigma = 0$), 非磁性體 ($\mu = 1$) を考へ、電媒的には異方性を持つとする。この場合には一般に \mathcal{D} は \mathcal{E} と或角をなして、(1.11) の代りに

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_x &= \epsilon_{xx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{xy} \mathcal{E}_y + \epsilon_{xz} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{D}_y &= \epsilon_{yx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{yy} \mathcal{E}_y + \epsilon_{yz} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{D}_z &= \epsilon_{zx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{zy} \mathcal{E}_y + \epsilon_{zz} \mathcal{E}_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18.1)$$

なる一般的表現が取られる。即ち \mathcal{D} は第二階級のテンソル ϵ (その成分は物質常数) と \mathcal{E} との積であると考へる。この ϵ を光學的電媒常数のテンソル或は簡単に電媒テンソルと稱する。(18.1) の代りに $\mathcal{D}_x = \sum_y \epsilon_{xy} \mathcal{E}_y$ と簡単に書く方法もある。

次に電氣的, 磁氣的エネルギー密度は (1.14) と同形を取るとして,

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \mathcal{E} \mathcal{D} = \frac{1}{8\pi} \sum_{x,y} \mathcal{E}_x \epsilon_{xy} \mathcal{E}_y \\ T &= \frac{1}{8\pi} \mathcal{H}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18.2)$$

を得る。輻射ベクトル \mathcal{S} は (1.18) に據るとして, エネルギー法則を考へて見やう。マックスウェルの兩式 (1.1), (1.2) に \mathcal{E}, \mathcal{H} をスカラー積して容易に

$$-c \operatorname{div} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) = \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}^2 + \sum_{x,y} \mathcal{E}_x \epsilon_{xy} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} \dots\dots(18.3)$$

を得るが, 第一項は $4\pi T$ の時間的變化, 第二項は $4\pi U$ の時間的變化に他ならない。従つて従前のエネルギー法則が成立つ可き必要充分な條件は容易に出せる。然る時は

$$\sum_{x,y} \mathcal{E}_x \epsilon_{xy} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} = 4\pi \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} \right) \epsilon_{xy} \dots\dots(18.4)$$

が成立せねばならず, 従つて

$$\sum_{x,y} \epsilon_{xy} \left(\mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \mathcal{E}_y \right) = 0$$

となる。この第二項の加法指數 x, y を交換すれば, (18.4) 式は

$$\sum_{x,y} (\epsilon_{xy} - \epsilon_{yx}) \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} = 0$$

と同等であつて, 任意の \mathcal{E} に對してこれが成立するためには,

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} \dots\dots\dots(18.5)$$

でなければならない。即ち電媒テンソルは對稱的で九個のテンソル成分は六個に減ずる。逆に (18.5) は (18.4) が成立するために充分で, 微分形でエネルギー法則を書けば,

$$- \operatorname{div} \mathcal{S} = \frac{dW}{dt}, \quad W = T + U \dots\dots\dots(18.6)$$

を得る。

テンソル ϵ の對稱性を利用して靜電エネルギー U をその場の強さの積でなく二乗の項のみで表す基準形に書ける。xyz 空間に二次表面

$$\sum_{x,y} \epsilon_{xy} xy = \text{const.} \dots\dots\dots(18.7)$$

なる楕圓體面を考へる。x, y, z の代りに場の強さの成分 $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ を取れば, (18.7) の左邊は $\mathcal{E} \mathcal{D} = 8\pi U$ になり, \mathcal{E} の各體系に對してエネルギーは正であるから, (18.7) を正なる一定形に取る。(18.7) は常に主軸へ變形でき, 換言すれば結晶體に對して定つた位置を持つ特別の座標系が存在して, その座標系にてはその楕圓體面の式は

$$\sum_x \epsilon_x x^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = \text{const.} \dots\dots\dots(18.8)$$

なる形になる。この電媒主軸系に於けるエネルギー及び物質式は

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \sum_x \epsilon_x \mathcal{E}_x^2 = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_x \mathcal{E}_x^2 + \epsilon_y \mathcal{E}_y^2 + \epsilon_z \mathcal{E}_z^2) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\mathcal{D}_x^2}{\epsilon_x} + \frac{\mathcal{D}_y^2}{\epsilon_y} + \frac{\mathcal{D}_z^2}{\epsilon_z} \right) \\ \mathcal{D}_x &= \epsilon_x \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{D}_y = \epsilon_y \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_z = \epsilon_z \mathcal{E}_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18.9)$$

となる。 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ を主電媒常數と稱する。この式より明かな如く、この楕圓體面が球面 ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$) になる場合以外では \mathcal{D} と \mathcal{E} とは異つた方向を持つ。

既に注意した如く電媒常數 ϵ は實際物質的常數でなく振動數に關係する量である (光の分散)。六個の ϵ_{xy} なる量は光の振動數の函數であつて、それは主電媒常數 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ が振動數と共に變化するのみならず、電媒主軸の方向も亦振動數によつて變ることを意味して居る。この場合は軸のディスページョン (dispersion) を考へるのである。これは結晶體の對稱性によつて最初から直交的軸系を特有しない様な結晶系に限つて起る。それは單斜、三斜晶系である。この軸分散なる現象は赤外線に對して著しい。こゝでは分散現象を先づ無視して、單色光波を考へ、電媒常數をたゞ物質にのみ據る常數と見做す。

そこでかくの如き物質式とマックスウェルの式を基礎にして平面波が異方體中を如何に傳播するかを問題である。單色平面波に於ては $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ は $e^{i\omega(t - \frac{n}{c} \cdot \mathcal{E})}$ に比例することは既に知つて居る。こゝで $\omega = 2\pi\nu$, \mathcal{E} は波動法線の方に於ける單位ベクトル、 n は屈折率を意味する。異方體中ではエネルギー傳達の方向と波動法線の方向とは一致しないから、波の位相速度或は法線速度 $\frac{c}{n}$ と光線或はエネルギー速度とを區別して考へねばならない。今の場合 $\frac{d}{dt}$ なる演算子は $i\omega$ を乗ずること $\frac{\partial}{\partial x}$ なる演算子は $-i\omega \frac{n}{c} \mathcal{E}_x$ を乗ずることを意味するから、マックスウェルの式は

$$n \cdot \mathcal{H} \times \mathcal{E} = \mathcal{D}, \quad n \cdot \mathcal{E} \times \mathcal{E} = -\mathcal{H} \dots\dots\dots(18.10)$$

となる。 \mathcal{H} をこれ等から消去して

$$\mathcal{D} = -n^2(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \times \mathcal{E} = n^2\{\mathcal{E} - \mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E})\} \dots\dots\dots(18.11)$$

を得る。(18.10), (18.11) より明かに \mathcal{H} は $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{E}$ に垂直で、この三ベクトル $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{E}$ は一平面上にあることが判る。加之 \mathcal{D} は \mathcal{E} に垂直で、従つて

の如く \mathcal{E} が横波でなく \mathcal{D} が横波である。而して \mathcal{E} は \mathcal{E} に垂直で、 \mathcal{E} と \mathcal{D} とのなす角は \mathcal{E} と \mathcal{E} とのなす角に等しく、これを α とする。 $\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{E}$ と $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{E}$ が二つの直角座標系を形成し、それ等は α だけ廻轉して居る。等方體ならば $\mathcal{E}\mathcal{E} = 0$ であつて、 $\mathcal{D} = n^2\mathcal{E}$ の一般化された異方體に適用される式が (18.11) である。

結晶體內でも電氣的、磁氣的振動が同量のエネルギーを傳達することは (18.2) と (18.10), (18.11) より

$$U = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E} \cdot \mathcal{D} = \frac{n^2}{8\pi} \{\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathcal{E})^2\},$$

$$T = \frac{1}{8\pi} \mathcal{H}^2 = \frac{n^2}{8\pi} (\mathcal{E} \times \mathcal{E})^2 = \frac{n^2}{8\pi} \{\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathcal{E})^2\}$$

であるから當然である。總エネルギー密度は従つて

$$W = U + T = 2U = 2T = \frac{n^2}{4\pi} \{\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathcal{E})^2\} \dots\dots\dots(18.12)$$

となる。

\mathcal{D} と \mathcal{E} を與へれば、 n 及び \mathcal{E} が定まる。(18.11) より

$$\mathcal{D}^2 = n^4 \{\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathcal{E})^2\} = 4\pi n^2 W$$

であるから、

$$n^2 = \frac{\mathcal{D}^2}{4\pi W} = \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{E} \cdot \mathcal{D}} \dots\dots\dots(18.13)$$

更に (18.11), (18.13) より

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{D} - \frac{\mathcal{D}^2}{n^2}}{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{D}}{n^2}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{n^4}}} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}(\mathcal{E}\mathcal{D})}{\sqrt{\mathcal{D}^2\{\mathcal{E}^2\mathcal{D}^2 - (\mathcal{E}\mathcal{D})^2\}}} \dots\dots\dots(18.14)$$

なる表現を得る。次に輻射ベクトル \mathcal{S} を \mathcal{E} と \mathcal{E} の函數として表せば

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E} \times \mathcal{H} = -\frac{cn}{4\pi} \mathcal{E} \times (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) = \frac{cn}{4\pi} \{\mathcal{E}\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E})\} \dots\dots\dots(18.15)$$

従つて

$$\mathcal{E}^2 = \frac{c^2 n^2}{(4\pi)^2} \mathcal{E}^2 \{ \mathcal{E}^2 - (\mathcal{E} \mathcal{S})^2 \} = \frac{c^2}{4\pi} \mathcal{E}^2 W \dots\dots\dots (18.16)$$

$$\mathcal{E} \mathcal{S} = |\mathcal{E}| \cos \alpha = \frac{cn}{4\pi} \{ \mathcal{E}^2 - (\mathcal{E} \mathcal{S})^2 \} = \frac{c}{n} W \dots\dots\dots (18.17)$$

更に

$$\mathcal{E} \mathcal{D} = -nc \mathcal{E} \mathcal{S} W \dots\dots\dots (18.18)$$

を得る。

既に注意した如く結晶体内では波頭 (wave front) の速度とエネルギー伝達速度とを區別して考へねばならない。前者即ち法線速度は

$$c_n = \frac{c}{n} \dots\dots\dots (18.19)$$

後者即ち光線速度 c_s は、エネルギー法則 (18.6) に従つて $|\mathcal{E}|$ が單位時間に \mathcal{E} に垂直な單位面積を通過するエネルギー量であるから、この單位面積上に c_s なる高さの圓錐を考へ、それに W なる密度のエネルギーを満すと、その圓錐内のエネルギー總量 $c_s W$ だけ底面を單位時間に通過して、

$$|\mathcal{E}| = c_s W$$

となり、(18.17) と (18.19) より

$$c_s = \frac{|\mathcal{E}|}{W} = \frac{c}{n \cos \alpha} = \frac{c_n}{\cos \alpha} \dots\dots\dots (18.20)$$

で與へられる。換言すれば法線速度は波動法線上への光線速度の射影に等しい。又 (18.16) と (18.20) から

$$c_s^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{W^2} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\mathcal{E}^2}{W} \dots\dots\dots (18.21)$$

なる表現を得られる。

屈折率 n と類似に光線率 s を

$$c_s = \frac{c}{s} \dots\dots\dots (18.22)$$

で定義すれば、

$$s = n \cos \alpha \dots\dots\dots (18.23)$$

$$s^2 = \left(\frac{c}{c_s} \right)^2 = \frac{4\pi W}{\mathcal{E}^2} = \frac{\mathcal{E} \mathcal{D}}{\mathcal{E}^2} \dots\dots\dots (18.24)$$

を得る。(18.24) は (18.13) に類似な表現である。(18.13), (18.14) で與へられる n, s の表現を (18.15) に入れれば、

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\mathcal{E} \mathcal{D}} \frac{\mathcal{E}(\mathcal{E} \mathcal{D}) - \mathcal{D} \mathcal{E}^2}{\sqrt{\mathcal{E}^2 \mathcal{D}^2 - (\mathcal{E} \mathcal{D})^2}} \dots\dots\dots (18.25)$$

となる。法線方向と光線方向に對する公式の對稱性を明かにするために、光線方向に於ける單位ベクトル

$$\hat{i} = \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|} \dots\dots\dots (18.26)$$

を導入すれば、(18.16) より

$$|\mathcal{E}| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{(\mathcal{E} \mathcal{D}) \mathcal{E}^2}$$

であるから、(18.25) と結びつけて

$$-\hat{i} = \frac{\mathcal{D} \mathcal{E}^2 - \mathcal{E}(\mathcal{E} \mathcal{D})}{\sqrt{\mathcal{E}^2 \mathcal{D}^2 - (\mathcal{E} \mathcal{D})^2}} \dots\dots\dots (18.27)$$

を得る。この式は光の s を與へる (18.14) 式にて \mathcal{E} と \mathcal{D} とを交換すれば、符號は別として得られる。

尙

$$s \mathcal{S} = \cos \alpha = \frac{c_n}{c_s} \dots\dots\dots (18.28)$$

なることも容易に判る。

以上得た諸關係はマックスウェルの式から得られる關係であつて、まだ物質式を利用して居ない。(18.1) 或は (18.9) を (18.11) と結付けて見やう。(18.9) を (18.11) に入れれば、

$$\mathcal{D}_s = n^2 \left\{ \frac{\mathcal{D}_s}{\mathcal{E}_s} - \mathcal{S}_s (\mathcal{E} \mathcal{S}) \right\}, \dots\dots\dots$$

或は

$$\mathcal{D}_x \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) = -s_x (\mathcal{E} s), \dots, \dots$$

これを $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x}$ で除し, s_x を乗じ, 他の座標方向に對するそれに相當する式を加へれば, 左邊は \mathcal{D} が横波なるために零になる可き $\mathcal{D} s$ であるから,

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_y}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_z}} = 0 \dots\dots(18.29)$$

なる式を得る。主光速度を

$$c_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}, \quad c_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}, \quad c_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}} \dots\dots(18.30)$$

(これはベクトルの成分ではない) で定義すれば, 法線速度の定義(18.19)を利用して(18.29)は

$$\frac{s_x^2}{c_n^2 - c_x^2} + \frac{s_y^2}{c_n^2 - c_y^2} + \frac{s_z^2}{c_n^2 - c_z^2} = 0 \dots\dots(18.31)$$

と書ける。(18.29)又は(18.31)は所謂フレネルの法線方程式である。これを見るに c_n^2 に於ける二次の式で, 各與へられた方向 $s(s_x, s_y, s_z)$ に對して二つの法線速度 c_n (負なる解は勿論物理的意味を有しない) が存在する。

$\mathcal{E} s = 0$, $s s = \cos \alpha$ であるから, (18.11) に s をスカラー積すれば,

$$\mathcal{D} s = -n^2 (\mathcal{E} s) \cos \alpha$$

となる。一平面上にある $\mathcal{E}, \mathcal{D}, s$ の間には直線的關係が成立たねばならないから, それを

$$s = a \mathcal{D} + b \mathcal{E}$$

とし, これに s 及び s をスカラー積すれば,

$$a \mathcal{D} s = 1, \quad b \mathcal{E} s = s s = \cos \alpha$$

を得る。従つてこの直線的關係は

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{b} (s - a \mathcal{D}) = \frac{\mathcal{E} s}{\cos \alpha} \left(s - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} s} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \left(-\frac{\mathcal{D} s}{n^2 \cos \alpha} \right) \left(s - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D} s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} \{ \mathcal{D} - s(\mathcal{D} s) \} \dots\dots(18.32) \end{aligned}$$

と書ける。こゝで s は光線率 $s = n \cos \alpha$ を示す。この(18.32)式は(18.11)に全く類似の式で, \mathcal{E} と \mathcal{D} , n と $\frac{1}{s}$, s と $-s$ (勿論 $-s$ と s) とを交換すれば得られるのである。次の二列の量を書けば,

$$\left. \begin{aligned} &\mathcal{E}, \mathcal{D}, s, s, c_n, n, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, c_x, c_y, c_z, c, \\ &\mathcal{D}, \mathcal{E}, -s, -s, \frac{1}{c_x}, \frac{1}{s}, \frac{1}{\epsilon_x}, \frac{1}{\epsilon_y}, \frac{1}{\epsilon_z}, \frac{1}{c_x}, \frac{1}{c_y}, \frac{1}{c_z}, \frac{1}{c} \end{aligned} \right\} \dots(18.33)$$

この一方の列の量間の各正しい式は相對應する量を交換しても亦正しい式になる。この一般法則を應用して, フレネルの法線方程式(18.29),(18.31)に類似の光線方程式を書けば,

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{c_x^2} - \frac{1}{c_n^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{c_y^2} - \frac{1}{c_n^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{c_z^2} - \frac{1}{c_n^2}} = 0 \dots\dots(18.34)$$

$$\frac{s_x^2}{s^2 - \epsilon_x} + \frac{s_y^2}{s^2 - \epsilon_y} + \frac{s_z^2}{s^2 - \epsilon_z} = 0 \dots\dots(18.35)$$

又先の

$$\mathcal{D} s = -\frac{c^2 s_x (\mathcal{E} s)}{c_n^2 - c_x^2} \dots\dots(18.36)$$

より容易に

$$\mathcal{E} s = -\frac{1}{c^2} \frac{s_x (\mathcal{D} s)}{\frac{1}{c_x^2} - \frac{1}{c_n^2}} \dots\dots(18.37)$$

を得る。(18.37)に $\epsilon_x = \frac{c^2}{c_x^2}$ を乗じて

$$\mathcal{D}_x = - \frac{f_x(\mathcal{D}f) c_s^2}{c_x^2 - c_s^2} \dots\dots\dots(18.38)$$

となるから, (18.36) と (18.38) を等しいとし, (18.28) を用ひて

$$\mathcal{D}f = - \frac{c^2}{c_n^2} (\mathcal{E} \mathfrak{s}) \cos \alpha = - \frac{c^2}{c_n c_s} \mathcal{E} \mathfrak{s} \dots\dots\dots(18.39)$$

と置ける。従つて,

$$\frac{\mathcal{E}_x c_n}{c_n^2 - c_s^2} = \frac{f_x c_s}{c_s^2 - c_x^2} \dots\dots\dots(18.40)$$

なる関係が出て来る。これから \mathfrak{s} をスカラー積して, (18.31) を考へて後に利用される公式

$$\frac{f_x \mathfrak{s}_x}{c_s^2 - c_x^2} + \frac{f_y \mathfrak{s}_y}{c_s^2 - c_y^2} + \frac{f_z \mathfrak{s}_z}{c_s^2 - c_z^2} = 0 \dots\dots\dots(18.41)$$

が得られる。又 (18.40) を f に就いて解いて

$$f_x = \frac{c_n}{c_s} \mathfrak{s}_x \frac{c_s^2 - c_x^2}{c_n^2 - c_x^2} = \frac{c_n}{c_s} \mathfrak{s}_x \left\{ 1 + \frac{c_s^2 - c_n^2}{c_n^2 - c_x^2} \right\} \dots\dots\dots(18.42)$$

或は

$$c_s f_x - c_n \mathfrak{s}_x = c_n \mathfrak{s}_x \frac{c_s^2 - c_n^2}{c_n^2 - c_x^2}$$

y, z に関するこれに相當した式を二乗して凡て加へ, (18.28) を考へに入れて,

$$c_s^2 - c_n^2 = c_n^2 (c_s^2 - c_n^2)^2 \left\{ \left(\frac{\mathfrak{s}_x}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2 \right\},$$

従つて

$$g^2 = c_n^2 (c_s^2 - c_n^2) = \frac{1}{\left(\frac{\mathfrak{s}_x}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2} \dots\dots\dots(18.43)$$

を得る。 c_n は法線方程式 (18.31) によつて \mathfrak{s} の函数として知れて居るから, g (又は c_s) は (18.43) によつて \mathfrak{s} で表せる。(18.43) の g で (18.42) を表せば,

$$f_x = \frac{\mathfrak{s}_x}{c_n c_s} \left(c_n^2 + \frac{g^2}{c_n^2 - c_x^2} \right) \dots\dots\dots(18.44)$$

であるから, f が \mathfrak{s} の函数として得られることになる。一般に各 \mathfrak{s} に對して c_n の二つの値が屬し, 各法線方向 \mathfrak{s} に對して二光線 f が存在することになる。

結晶内の一定點から各法線の方向 \mathfrak{s} 上へ法線速度 c_n の二つの値を (18.31) が成立つ様に取りれば, その端の軌跡は二重層の表面所謂法線曲面となる。光線方向 f と光線速度 c_s に對するこれに相當した曲面を光線曲面と稱する。こゝで擇んだ極座標 (c_n, \mathfrak{s}) を直角座標に變換して見るとそれは四次の曲面で複雑である。

與へられたエネルギー密度 W に於ける \mathcal{D} の成分は (18.9) より

$$\frac{\mathcal{D}_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{\mathcal{D}_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{\mathcal{D}_z^2}{\varepsilon_z} = \text{const.}$$

なる式を満足することが判る。 $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z$ の代りに x, y, z と書き, これを空間に於けるカーテシヤン座標と見做し, 適當に法化して上記の式の代りに

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1 \dots\dots\dots(18.45)$$

を取る。これは橢圓體面であつて, その主軸は結晶の電媒軸と一致し, 主電媒常數の平方根に等しい長さを持つ。この橢圓體面を法線橢圓體面 (或は屈折率橢圓體) と稱する。この法線橢圓體の助けをかりて各法線方向 \mathfrak{s} に屬する二つの法線速度及び振動方向を見出し得る。この橢圓體を \mathfrak{s} に垂直な中心を通る平面で切れば, その断面は橢圓である。その主軸はその長さで兩法線速度を定め, その方向でそれに屬する振動方向 (\mathcal{D} ベクトルの) を定める。その證明は:

この断面圖の各點は

$$x\epsilon_x + y\epsilon_y + z\epsilon_z = 0,$$

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1$$

なる兩式を満足し、主軸はその断面楕圓の最大、最小の直徑として定義されるから、

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

なる量が上の兩式を満足しつゝ極大、極小になる様に定めて主軸が求められる。この問題を解くには有名なラグランジュ (Lagrange) の方法を用ひ、今の問題は $2\mu, \lambda$ なるパラメーター (parameter) を取つて

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu(x\epsilon_x + y\epsilon_y + z\epsilon_z) + \lambda\left(\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z}\right)$$

が極値を取る場合を求めることになる。その必要條件は x, y, z による微分が零になることで、

$$x + \mu\epsilon_x + \frac{\lambda x}{\epsilon_x} = 0, \quad y + \mu\epsilon_y + \frac{\lambda y}{\epsilon_y} = 0, \quad z + \mu\epsilon_z + \frac{\lambda z}{\epsilon_z} = 0$$

でなければならない。これ等の式にそれぞれ x, y, z を乗じて加へ、又 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ を乗じて加へれば

$$r^2 + \lambda = 0$$

$$\mu + \lambda\left(\frac{x\epsilon_x}{\epsilon_x} + \frac{y\epsilon_y}{\epsilon_y} + \frac{z\epsilon_z}{\epsilon_z}\right) = 0$$

なる式が得られる。この兩式より得られる λ, μ の値を上記の條件式に入れば、

$$x\left(1 - \frac{r^2}{\epsilon_x}\right) + \epsilon_x r^2 \left(\frac{x\epsilon_x}{\epsilon_x} + \frac{y\epsilon_y}{\epsilon_y} + \frac{z\epsilon_z}{\epsilon_z}\right) = 0, \dots\dots\dots (18.46)$$

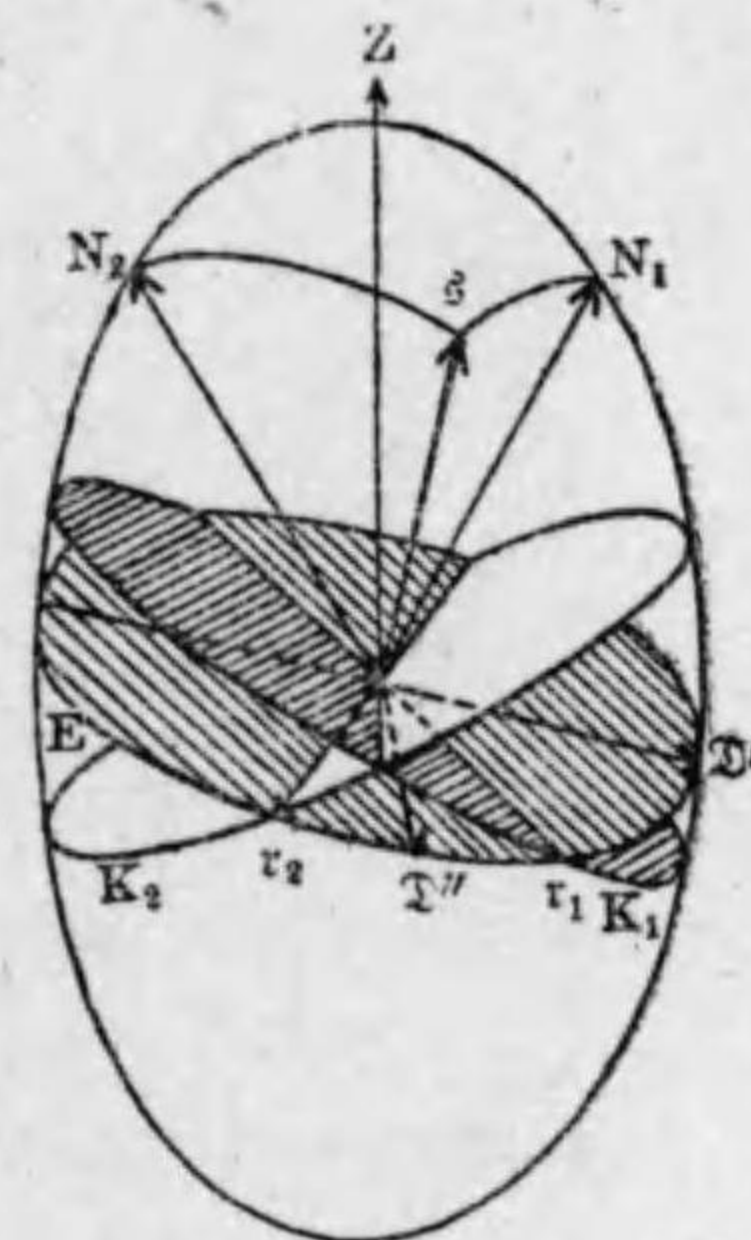
等が出て来る。これ等は與へられた ϵ にて x, y, z に対する三つの線型同次方程式であつて、その行列式が零になる時のみその式の解が得られる。それは r^2 に対する代數的方程式である。

(18.46) にて x, y, z を \mathcal{D} の成分で、 $\frac{x}{\epsilon_x}, \frac{y}{\epsilon_y}, \frac{z}{\epsilon_z}$ を \mathcal{E} の成分で、 r の代りに n で置換えれば、先に得た

$$\mathcal{D}_x = n^2 \left\{ \frac{\mathcal{D}_x}{\epsilon_x} - \epsilon_x (\mathcal{E}_x) \right\} \dots\dots\dots (18.47)$$

なる表現に書ける。

上記行列式方程式の二つの根は断面楕圓の極值的半徑に對する r に等しいこと更に \mathcal{D} の成分 ($\mathcal{D}', \mathcal{D}''$) がこの主軸の方向に於けるベクトルと一致することが幾何學的に證明され、その計算をせずとも主軸の性質からその $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ が互に垂直であると云ふ大切な法則が成立つことが判る。この法則は勿論 (18.47) から簡単に出来るが、第 51 圖に示す如くその振動平面の位置を簡単な作圖で完全に定められる。一般的三軸楕圓體には中心を通る二つの圓断面 K_1, K_2 が存在し、光學的法線軸と稱せられる K_1, K_2 への法線 N_1, N_2 は楕圓體の最大、最小軸 (z 軸, x 軸) を含む對稱平面内にある。任意の法線 ϵ に楕圓断面 E が屬すとすれば、この断面と兩圓 K_1, K_2 との交り



r_1, r_2 は等しい長さを持ち、楕圓 E の兩主軸に對稱的である。 r_1 は N_1, ϵ に垂直であるから、 N_1, ϵ を含む平面に垂直で、同様に r_2 は N_2, ϵ を含む平面に垂直である。 $r_1' \perp r_1, r_2' \perp r_2$ なる r_1', r_2' を考へれば、 r_1', r_2' も亦その楕圓軸に對して對稱的である。法線 ϵ とこの楕圓内のこれ等のベクトルとを含む平面を考へる時、振動方向の兩平面即ち ϵ と楕圓 E の兩主軸を含む平面は N_1, ϵ 平面と N_2, ϵ 平面のなす角を二等分することが判る。

第 51 圖

振動方向の兩平面が N_1, ϵ 平面と N_2, ϵ 平面との間の角を二等分するを示す圖

法線楕圓體が z 軸の周りに廻轉對稱であ

る特別の場合には K_1, K_2 は一致して、この單軸晶系に於ける光學軸なる z 軸を一つの振動方向 \mathcal{D}'' は通り、他の \mathcal{D}' はそれに垂直になる。

以上と全く類似な考察によつて光線に對して光線橢圓體

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1$$

が論ぜられる。 $s, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ と同様 $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$ は直交體系を形成する。この光線橢圓體面の一 點 (x, y, z) に於ける接面は、その接面上の點座標を ξ, η, ζ として

$$\epsilon_x x \xi + \epsilon_y y \eta + \epsilon_z z \zeta = 1$$

で與へられる。原點からこの接面へ下した垂足の足點位置は

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{極小}$$

を求めて定められる。矢張ラグランジュの方法によつて、

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\lambda (\epsilon_x x \xi + \epsilon_y y \eta + \epsilon_z z \zeta)$$

を微分して、

$$\xi = \lambda \epsilon_x x, \quad \eta = \lambda \epsilon_y y, \quad \zeta = \lambda \epsilon_z z$$

なる決定方程式を得、 ξ, η, ζ をそれぞれ乗じて加へれば

$$\lambda = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

となるから、

$$\frac{\xi^2}{\epsilon_x} + \frac{\eta^2}{\epsilon_y} + \frac{\zeta^2}{\epsilon_z} = \lambda^2 (\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2) = \lambda^2$$

即ち

$$\frac{\xi^2}{\epsilon_x} + \frac{\eta^2}{\epsilon_y} + \frac{\zeta^2}{\epsilon_z} = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 \dots\dots\dots(18.48)$$

なる光線橢圓體の足線曲面の方程式を得る。これは卵形面と云はれる曲面で、逆にこの卵形面の接面の包絡面が光線橢圓體面になる。

この考へから法線曲面と光線曲面との關係が明にされる。 \mathcal{E} 又は \mathcal{D} を與へれば、 s と \mathcal{E} の方向並にそれに屬する c_n, c_s が定まることは既述の如

くであつて、 \mathcal{E} 又は \mathcal{D} が變化すれば、例へば \mathcal{E} と c_s が如何に變化するかを知り得る。原點から光線曲面上の一 點へ行くベクトル

$$r = c_s \mathcal{E}$$

を作れば、その變化 δr は s なるベクトルと垂直であることを證明出来る。その證明は：

(18.32) にて $s = \frac{c}{c_s}, \mathcal{E}/s = r/c$ を導入すれば、

$$c^2 \mathcal{E} = r^2 \mathcal{D} - r(r \mathcal{D}) \dots\dots\dots(18.49)$$

なる表現を得、凡ての量がパラメーター τ の函數としてそれで微分すれば、

$$c^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = 2 \left(r \frac{\partial r}{\partial \tau} \right) \mathcal{D} + r^2 \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tau} - \frac{\partial r}{\partial \tau} (r \mathcal{D}) - r \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} \mathcal{D} \right) - r \left(r \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tau} \right)$$

となり、これに \mathcal{D} を乗じ、 $\mathcal{D}_n = \epsilon_n \mathcal{E}_n$ であるから

$$\mathcal{D}_n \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \tau} = \mathcal{E}_n \frac{\partial \mathcal{D}_n}{\partial \tau} \quad \text{即ち} \quad \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tau}$$

が成立つことより、

$$c^2 \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tau} \{r^2 \mathcal{D} - r(r \mathcal{D})\} + 2 \frac{\partial r}{\partial \tau} \{r \mathcal{D}^2 - \mathcal{D}(r \mathcal{D})\}$$

を得る。然るに $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tau}$ の項は (18.49) によつて消え、 $\frac{\partial r}{\partial \tau} \delta \tau = \delta r$ であるから、

$$\delta r \{r \mathcal{D}^2 - \mathcal{D}(r \mathcal{D})\} = 0$$

となる。こゝで大括弧内は $(\mathcal{D} \times r) \times \mathcal{D}$ の形に書け、それは $(\mathcal{D} \times \mathcal{E}) \times \mathcal{D}$ に比例する。このベクトルは \mathcal{D}, \mathcal{E} を含む平面の法線に垂直であつて (即ち \mathcal{D}, \mathcal{E} 平面内にあつて)、更に \mathcal{D} に垂直であるから、 s に平行になる。従つて

$$s \delta r = 0$$

で、 δr と s は垂直である證明が出来たことになる。換言すれば光線曲面の接面は常に波動法線に垂直であると云ふ結果になる。

(18.11), (18.32) から直ちに判る如く, 波動曲面及び光線曲面の對應する點は軸方向で一致するから, 法線曲面は光線曲面の足點曲面であり, 逆に光線曲面は法線曲面の包絡曲面であると云へる。従つて若し光線曲面が與へられれば, その上の一點 P に於て接面を描き原點から垂線 OQ を下せば, その足 Q は法線曲面上の一點で, OQ は波動法線である。逆に法線曲面が與へられれば, その上の點 Q とそれに無限に近い二點 Q_1, Q_2 に於て OQ₁, OQ, OQ₂ 上に法線平面を描けば, それ等は一點 P で交る。その P は光線曲面上の一點で, OP は光線 r である。

参 考:

- A. Fresnel: Œuvr. compl. Bd. II. (1868), 261.
 A. Cauchy: Œuvr. compl. (2) Bd. IX (1890), 390.
 F. Neumann: Ges. Werke Bd. II. (1906), 159.
 H. Poincaré: Théorie mathématique de la lumière Bd. I. (1889), 217—284.
 M. Born: Dynamik der Kristallgitter. Leipzig 1915.
 P. Ewald: Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern. Dissert. München (1912).
 A. Clebsch: Prinzipien der mathemat. Optik, 1887.
 F. Billet: Traité d'optique physique, Bd. II, Paris 1859.
 G. Sziivessy: Handb. d. Physik Bd. XX, C, Kristalloptik, S. 635, Berlin 1928.

§ 19. 光學的結晶分類とその特性

透明な結晶體を光學的特性にて分類すれば次の三種ある。

1. 三つの同値, 互に直角な對稱軸を持つ結晶

等軸晶系がこれに屬する。物質内に一定の物理的に互に交換可能な直交

軸があれば, それは電媒主軸系と一致して, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ 即ち $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ が成立し, その結晶は光學的に等方性を持ち, 無定形物質と同等である。

2. 結晶學的に特別な一方向を持つ結晶

三方晶系, 正方晶系, 六方晶系の結晶がこの種のものである。一つの電媒主軸が結晶學的に特別な軸と一致し, 他の二つの中一つが法線平面内に任意に選ばれる。この二軸は所謂自由廻轉可能軸である。 ϵ 軸をその特別な軸とすれば, $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ で, かくの如き結晶を光學的一軸性結晶と稱する。

3. 結晶學的に特別な方向のない結晶

斜方晶系, 單斜晶系, 三斜晶系がこれに屬する。これ等に於ては電媒軸系の位置が對稱性によつて完全に定められないで, 光の振動數と共に變り, $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ なる一般の場合である。

以上の如き三種の結晶が存在することはフレネルの楕圓體面例へば法線楕圓體面の考へから明かである。實際楕圓體面の縮退には二階段のみがあつて, 三軸的か一つの特別な方向を持つ廻轉楕圓體か凡ての方向が同値な球かであつて, 光學的一軸性, 二軸性と云ふのは中心を通る圓斷面の數に據るのである。若し中心を通り法線方向 s に垂直な斷面が圓ならば, この法線方向に屬する二つの法線速度は互に等しく, その等しい速度の方向が光學軸と云はれ (正確には光學的法線軸と云ふ可きである), それに對應した光線楕圓體に於ける作圖に従へば光線軸になる。一般的三軸楕圓體には二つの圓斷面が中心を通つて取られ光學的二軸性であるが, 廻轉楕圓體にはその對稱軸に垂直な一つの圓斷面があるのみで, その對稱軸が光學軸となり, 光學的一軸性である。最後に球では各斷面が圓で, 各方向が或意味での光學軸になる即ち等方性を持つのである。ポルンにならつて以上の性質を表示すれば,

第 3 表

結晶學的對稱性	三 斜	單 斜	斜 方	三 方 正 六 方 方	等 軸
電 媒 軸					
法線楕圓體	三 軸 楕 圓 體			廻轉楕圓體	球
光 學 軸	二 軸 性			一 軸 性	等 方 性

表中細矢は光の振動数によつて變化する軸，太矢は結晶體に定つた特別軸を示す。自由廻轉可能軸は圓又は球で表してある。

説明に便のために(18.31)を

$$\epsilon_x^2(c_n^2 - c_y^2)(c_n^2 - c_z^2) + \epsilon_y^2(c_n^2 - c_x^2)(c_n^2 - c_z^2) + \epsilon_z^2(c_n^2 - c_x^2)(c_n^2 - c_y^2) = 0 \dots (19.1)$$

と書直す。

a) 光學的一軸性結晶

單光軸體にては $c_x = c_y = c_o$, $c_z = c_e$ (o は常光線, e は異常光線を意味する) と取れる。 ξ と z 軸とのなす角を θ とすれば,

$$\sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2} = \sin \theta, \quad \epsilon_z = \cos \theta$$

であつて, (19.1) 式は

$$(c_n^2 - c_o^2)\{(c_n^2 - c_e^2) \sin^2 \theta + (c_n^2 - c_o^2) \cos^2 \theta\} = 0$$

となり, 二つの式に分れ, その根は

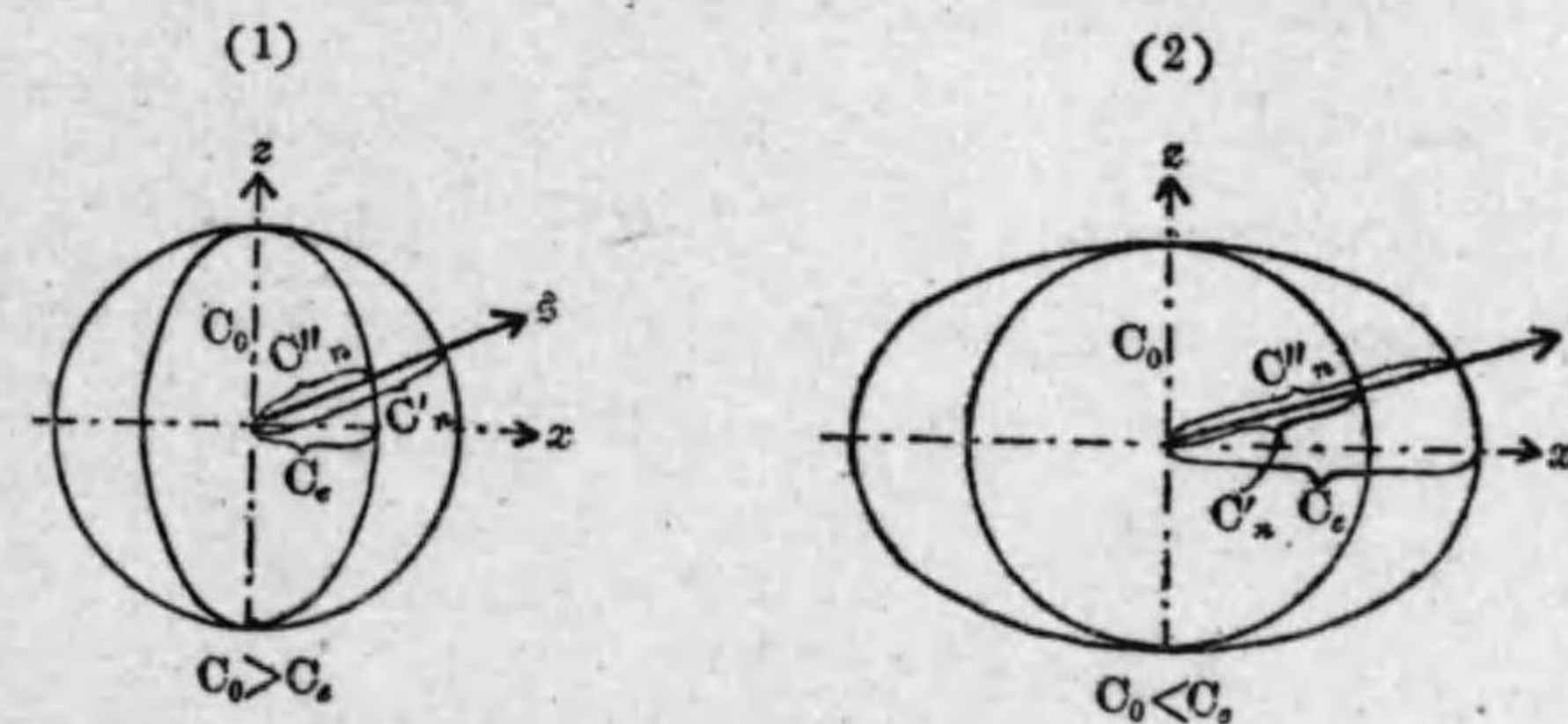
$$c_n'^2 = c_o^2, \quad c_n''^2 = c_o^2 \cos^2 \theta + c_e^2 \sin^2 \theta \dots (19.2)$$

で與へられる。従つて各法線方向に二つの波動が屬し, 一つは方向には無關係な速度を持つて居る常光線と, 他は光軸 (z 軸) との傾斜に關係する異常光線とである。 $\theta = 0$ の方向に對してのみ傳播速度は互に等しく

$c_n' = c_n'' = c_o$ となる。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に對しては異常波の速度は $c_n'' = c_e$ となる。それ故凡ての單光軸結晶を速度差 $c_e - c_o$ の符號で分類出来る。

- i) $c_o > c_e$, 正一軸性結晶。例へば水晶
- ii) $c_o < c_e$, 負一軸性結晶。例へば方解石

(第 52 圖参照)。



第 52 圖 一軸性結晶に於ける法線面

ξ と z 軸とを含む平面を主断面として, ξ に屬する断面楕圓の二つの主軸の中一つは常に主断面内にあり, 他はそれに垂直である。その後者の長さはその廻轉楕圓體の赤道圓の半徑に等しいから, 球の半徑 c_o に等しい。従つて \mathcal{D} ベクトルは常光波にてその主断面に垂直に振動し, 異常光波にて主断面に平行に振動する。偏光方向を云ふに, 古い文献ではベクトルの方向を偏光方向と稱したから, それは \mathcal{D} と直角で, 常光線は主断面に偏光され, 異常光線は主断面と直角に偏光されると云ふことにして居た。輻射ベクトルが偏光方向に平行か直角かの問題はたゞ歴史的興味の問題で, 電磁理論ではこれ等の間に何等の問題も残つて居らず, \mathcal{D} は主断面に垂直な振動ベクトルで, 光速度 (屈折率 n) は \mathcal{D} で定められるものである。

b) 光學的二軸性結晶

(19.1) 式の一般の場合を論ずるに當つて, 電媒主軸系の座標面に於け

る断面圖を調べて見やう。先づ特性常數の相對的大さを一定にせねばなら
ない。こゝでは

$$\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z, \quad c_x > c_y > c_z$$

とする。例へば (19.1) 式にて $\xi_x = 0$ とすれば、二つの式

$$c_n'^2 = c_x^2, \quad c_n''^2 = c_z^2 \xi_y^2 + c_y^2 \xi_z^2$$

に分れるから、 yz 平面の断面圖は一つの圓と一つの卵形とよりなる。他の
二つの座標面に對しても同様で、たゞ圓に對する卵形の位置が異なるだけ
である。上記の如く c_x, c_y, c_z を定めれば、 yz 平面では圓が全く卵形を内に
包み、 xz 平面では両者が二對の點 (四點) で交り (それ等の點と原點と結
ぶ直線が光學的法線軸 N_1, N_2 になることは後に述べる)、 xy 平面では圓
が全く卵形内に包まれる。

(19.1) を c_n^2 の冪乗の順に列べれば、

$$c_n^4 - c_n^2 \{ \xi_x^2 (c_y^2 + c_z^2) + \xi_y^2 (c_x^2 + c_z^2) + \xi_z^2 (c_x^2 + c_y^2) \} \\ + (\xi_x^2 c_y^2 c_z^2 + \xi_y^2 c_x^2 c_z^2 + \xi_z^2 c_x^2 c_y^2) = 0 \dots\dots\dots(19.3)$$

と書け、その解は

$$c_n^2 = \frac{1}{2} \{ \xi_x^2 (c_y^2 + c_z^2) + \xi_y^2 (c_x^2 + c_z^2) + \xi_z^2 (c_x^2 + c_y^2) \} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}, \\ D = \{ \xi_x^2 (c_y^2 + c_z^2) + \xi_y^2 (c_x^2 + c_z^2) + \xi_z^2 (c_x^2 + c_y^2) \}^2 \\ - 4(\xi_x^2 c_y^2 c_z^2 + \xi_y^2 c_x^2 c_z^2 + \xi_z^2 c_x^2 c_y^2)$$

で與へられる。然るに $1 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$ であつて、

$$\xi = \xi_x^2 (c_y^2 - c_z^2) \geq 0, \\ \eta = \xi_y^2 (c_x^2 - c_z^2) \leq 0, \\ \zeta = \xi_z^2 (c_x^2 - c_y^2) \geq 0$$

と置けば、

$$D = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta - 2\zeta\xi - 2\xi\eta = (\xi + \eta - \zeta)^2 - 4\xi\eta$$

と書ける。(19.3) 式の二重根に對して一光軸の條件は $D = 0$ であつて、

今の場合 $(\xi + \eta - \zeta)^2 \geq 0, -4\xi\eta \geq 0$ であるから、 $D = 0$ なるためには
同時に

$$\xi + \eta - \zeta = 0, \quad \xi\eta = 0$$

でなければならない。この二式は ξ か η が零でなければならないことを
示すが、若し $\xi = 0$ ならば第一式より $\eta = \zeta$ となり、それは η, ζ が同時
に零の時にのみ可能で、單位ベクトル ξ の三成分が同時に零にはなれない
から、結局 $\xi = 0$ とはなれない。従つて上の條件は $\eta = 0, \xi = \zeta$ 、即ち

$$\xi_y = 0, \quad \xi_x^2 (c_y^2 - c_z^2) = \xi_z^2 (c_x^2 - c_y^2) \dots\dots\dots(19.4)$$

で、その光軸は既述の如く xz 平面内にあることになる。その光軸の一つ
と z 軸とのなす角を β とすれば、即ち $\xi_x = \sin \beta, \xi_z = \cos \beta$ とすれば、

$$\text{tg } \beta = \frac{\xi_x}{\xi_z} = \pm \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_y^2 - c_z^2}} \dots\dots\dots(19.5)$$

で、それ等の光軸は z 軸に對して對稱的なることが判る。

同様に光線曲面も取扱へる。(18.33) なる交換關係に従へば、座標面
 $\xi_x = 0$ にての断面圖は

$$c_s'^2 = c_x^2, \quad \frac{1}{c_s''^2} = \frac{\xi_y^2}{c_x^2} + \frac{\xi_z^2}{c_y^2} \dots\dots\dots(19.6)$$

で與へられる二曲線より成る。即ち法線曲面にても存在する圓と c_x, c_y を
半軸とする楕圓とから成る。他の座標面にても同様なことが言へる。 xz
平面にてのみこの曲線が交る。その交點への方向が光線軸 S_1, S_2 を與へ
る。それ等の一つが z 軸となす角を γ とすれば、

$$\text{tg } \gamma = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\epsilon_z - \epsilon_y}} = \pm \frac{c_x}{c_z} \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_y^2 - c_z^2}} = \frac{c_x}{c_z} \text{tg } \beta \dots\dots\dots(19.7)$$

然るに $c_x < c_z$ としたのであるから、 $\text{tg } \gamma < \text{tg } \beta$ である。

(18.43), (18.44) に見る如く、二軸性結晶内にて一つの波動法線 ξ に屬
する光線方向 γ は一般に c_n の二つの値に對應して二つあることが判る。

例外は上記式中の分母の一つ例へば $c_n^2 - c_x^2$ が零になる時のみ起る。然しこれは法線方程式 (18.31) に従へば, ξ が主軸系の一つの座標面 (例へば yz 平面) 内にある場合のみである。

光軸を含まない座標面 (xy 面と yz 面) を取扱ふならば, この場合にも特異性は起らない。特異な状況は光軸の平面 (xz 面) に對してのみである。例へば yz 平面を考へる。 $\xi_x = 0$ で兩波動の一つに對して $c_n^2 = c'_n{}^2 = c_x^2$, 然し $c_x > c_y > c_z$ と假定したから, 法線方程式より

$$\frac{\xi_x^2}{c_n^2 - c_x^2} = \frac{\xi_y^2}{c_y^2 - c_n^2} + \frac{\xi_z^2}{c_z^2 - c_n^2}$$

で, ξ_x^2 と $c_n^2 - c_x^2$ との比は $c_n \rightarrow c_x$ の極限で有限である。そこで (18.43) より得られる

$$\frac{g^2}{\xi_x^2} = \frac{1}{\left\{ \left(\frac{\xi_x^2}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \xi_x^2 \left[\left(\frac{\xi_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\xi_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2 \right] \right\}}$$

は $\xi_x \rightarrow 0$ なる極限 (即ち $c_n \rightarrow c_x$) にて $\left(\frac{c_n^2 - c_x^2}{\xi_x^2} \right)^2$ なる極限值に收斂する。従つて (18.44) より

$$\xi_x \rightarrow \frac{1}{c_n c_x} \xi_x \left(\frac{c_n^2 - c_x^2}{\xi_x^2} \right) \rightarrow 0$$

xy 平面に對しても全く同様で, ξ が xy 平面か yz 平面の一つ内にあれば, それに屬する光線 ξ も亦その平面内にあつて, 特異性は現れない。

然し xz 平面にては異なる。こゝでは

$$\frac{\xi_y^2}{c_n^2 - c_y^2} = \frac{\xi_x^2}{c_x^2 - c_n^2} + \frac{\xi_z^2}{c_z^2 - c_n^2}$$

であつて, 右邊は一般に $\xi_y \rightarrow 0, c_n \rightarrow c_y$ にて有限であるが, ξ が (19.4) 即ち

$$\xi_x^2(c_x^2 - c_y^2) + \xi_z^2(c_z^2 - c_y^2) = 0$$

を満足すれば, 換言すれば光學的法線軸の一つと一致すれば, 例外で, 右邊

は 0 になる。そこで

$$g \rightarrow \xi_y \frac{c_n^2 - c_y^2}{\xi_y^2}, \quad \xi_y \rightarrow \frac{\xi_y}{c_n c_x} \cdot \frac{g^2}{c_n^2 - c_y^2}$$

であるから,

$$\xi_y \rightarrow \frac{1}{c_n c_x} \cdot \frac{\xi_y}{\frac{\xi_y^2}{c_n^2 - c_y^2}}$$

となつて, この分數は分子, 分母共に零になるから, ξ_y は不定になる。實際法線軸に屬する光線は無限に多く, 一つの圓錐を満して居る。

この状況は (18.41) 式を利用して説明出来る。同式にて $\xi_y = 0$ と置けば,

$$\frac{\xi_x \xi_x}{c_x^2 - c_x^2} + \frac{\xi_z \xi_z}{c_z^2 - c_x^2} = 0$$

然るに (18.28) は法線軸 ($\xi_y = 0, c_n = c_y$) に對して

$$c_x(\xi_x \xi_x + \xi_z \xi_z) = c_y$$

と書けるから, これ等兩式から c_x を消去すれば,

$$(\xi_x \xi_x c_x^2 + \xi_z \xi_z c_x^2)(\xi_x \xi_x + \xi_z \xi_z) = c_y^2 \dots\dots\dots (19.8)$$

を得る。光線 ξ 上の或一點を考へ, その點が r なる距離にあつて, その座標が $x = r \xi_x, y = r \xi_y, z = r \xi_z$ で與へられると, (19.8) よりその點は

$$(x \xi_x c_x^2 + z \xi_z c_x^2)(x \xi_x + z \xi_z) = c_y^2 (x^2 + y^2 + z^2) \dots\dots (19.9)$$

なる式を満足する。この式は原點を頂點とする二次錐體を表す。 $x = \mu \xi_x, y = \mu \xi_y, z = \mu \xi_z$ とすれば (19.9) の左邊は (19.4) によつて $\mu^2 c_y^2$ であるから, 右邊に等しい。従つて ξ 方向はこの錐面上にある。この法線軸に屬する波動平面

$$x \xi_x + z \xi_z = c_y$$

でこの錐體を切れば, (19.9) へ導入して

$$x \xi_x c_x^2 + z \xi_z c_x^2 = c_y (x^2 + y^2 + z^2) \dots\dots\dots (19.10)$$

を得て、この式は球を表すから、法線軸に属する波動平面による断面は圓になる。法線軸、光線軸、錐體の位置を見るには xz 平面内の圖を得れば充分であるから、 $y = 0$ として、(19.10) なる球は

$$(x - a)^2 + (z - b)^2 = R^2$$

なる圓に相當し、こゝで a, b, R は

$$a = \frac{1}{2} \frac{c_x^2}{c_y} \hat{s}_x = \frac{1}{2} \frac{c_x^2}{c_y} \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_x^2 - c_z^2}}, \quad b = \frac{1}{2} \frac{c_x^2}{c_y} \hat{s}_z = \frac{1}{2} \frac{c_x^2}{c_y} \sqrt{\frac{c_y^2 - c_z^2}{c_x^2 - c_z^2}},$$

$$R^2 = a^2 + b^2 = \frac{c_y^2 c_x^2 - c_x^2 c_z^2 + c_x^2 c_y^2}{4c_y^2}$$

で與へられる。この圓の圓周は原點を通り、原點から法線軸を引けば、その圓周との交点が N で、 N にて ON に垂線を立て (波動面に相當する) 圓周との交点を A とすれば、 OA はその圓の直径で、 $OA = 2R$, $ON = c_y$ である。 $\triangle OAN$ は上記錐體の xz 平面に據る断面である。その錐體の開きの角 $\chi = \angle AON$ は

$$\text{tg } \chi = \frac{1}{c_y} \sqrt{(2R)^2 - c_y^2}$$

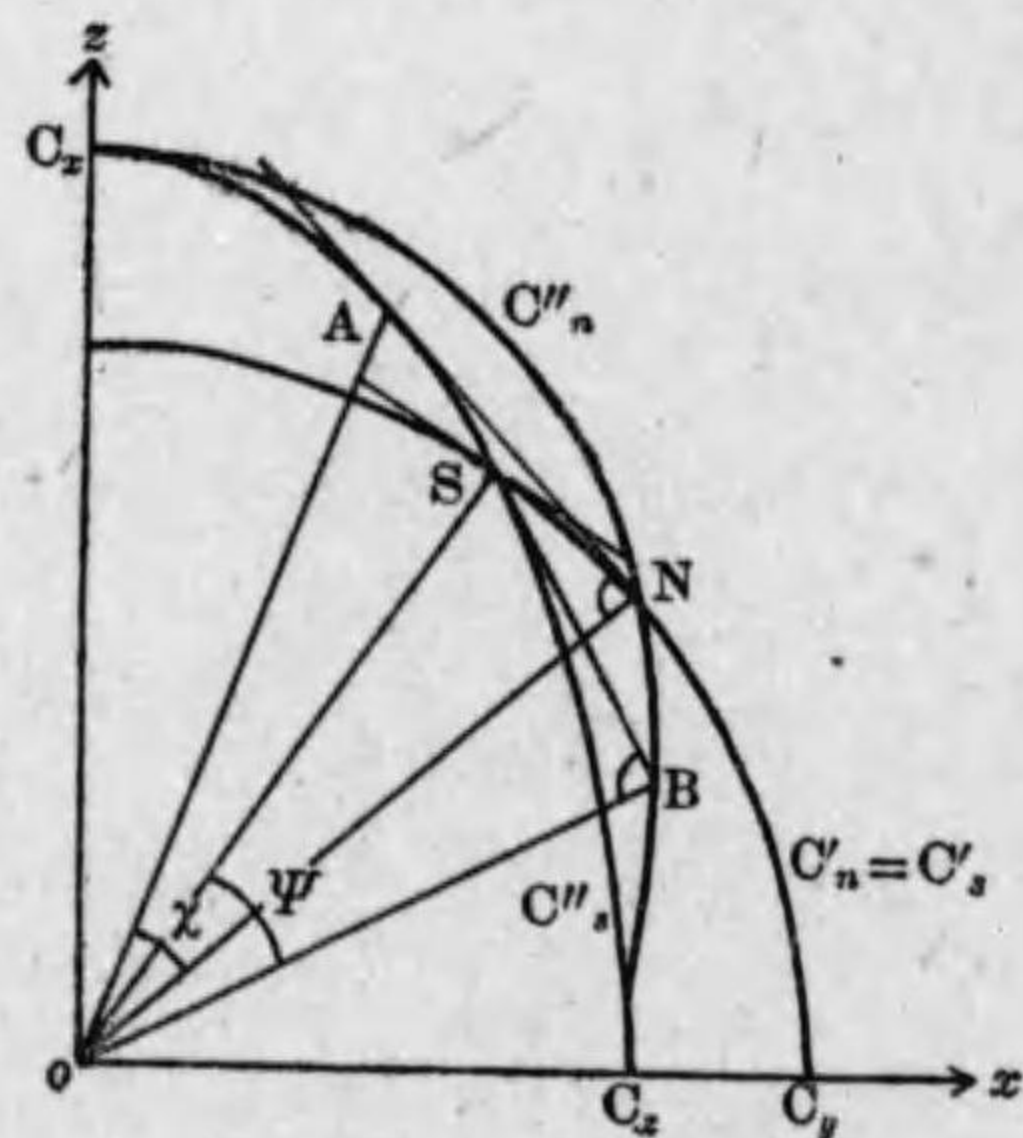
で與へられる。 R の値を導入す

れば

$$\text{tg } \chi = \frac{1}{c_y^2} \sqrt{(c_x^2 - c_y^2)(c_y^2 - c_z^2)} \quad \dots\dots(19.11)$$

なる表現を得る。

全く同様な論法が與へられた光線方向に對してそれに屬する波動法線方向の問題にする場合にも成立つ。 Γ が光線軸の一つの方向と一致すれば、一般に xz -平面以外の座標平面にても



第 53 圖 圓錐屈折の錐體作圖

各 Γ に二方向 \hat{s} が屬する。その光線軸に法線の錐體全部が屬し、その上に光線方向 OS がある。その錐體と xz 平面との交りは光線 OS のみならず第二の直線 OB に於てあつて、 B は法線曲面上にある。 BS はその錐體の圓断面の跡で、錐體の母線は光線 $\Gamma = OS$ への波動法線である (先の場合には AN が波動平面の圓断面跡であつた)。その錐體の開きの角 ψ は

$$\text{tg } \psi = \frac{1}{c_x c_z} \sqrt{(c_x^2 - c_y^2)(c_y^2 - c_z^2)} = \frac{c_y^2}{c_x c_z} \text{tg } \chi \quad \dots\dots(19.12)$$

で與へられる。光線曲面は法線曲面の包絡曲面であり、逆に法線曲面は光線曲面の足點曲面であるから、第 53 圖の如き作圖が出来る。

法線曲面の xz 断面圖は $c_n' = c_y$ なる半径の圓と半径ベクトル c_n'' の卵形であり、光線曲面は xz 平面内の跡として同じ圓 $c_s' = c_y$ と楕圓 c_s'' とを持つて居る。この共通の圓とその卵形との交點は N (波動曲面の二重點) で、それは法線軸 ON 上にある。又その圓と楕圓との交點は二重點 S で、それは光線軸 OS 上にある。 N 點に於ける法線平面は光線曲面の c_s'' 楕圓と A 點にて接し、 NA を直径とする全圓周で接する。それに屬する錐體の母線はその法線軸に屬する光線である。 S 點には光線曲面に接する接面の錐體が存在し、第 53 圖には圓 c_s' と楕圓 c_s'' とに接する二直線が見られるのみである。楕圓に接する接線と卵形との交點 B に對し、 $OB \perp BS$ であつて、 OS, OB は光線方向 OS に屬する二波動法線である。それ以外に波動法線として BS を直径とする圓周を通る錐體の凡ての母線が Γ に屬する。これ等兩錐體に特別の名を付けて、 N に屬するものを内部圓錐屈折の錐體、 S に屬するものを外部圓錐屈折の錐體と稱する。

霰石の如き結晶板をその境界面が法線軸に垂直になる様に切る。その表面に狭い開きを持つた遮蔽物を置いて平行光線束をその板に直角に入射する時に、結晶内で大體内部圓錐屈折の錐體で與へられる中空錐上に入射光

のエネルギーが擴つてその結晶板に平行な幕上に輪形の環線を見られる可きである。實際小さいが有限の開きの角を持つた光束でこの實驗をポグendorff (Poggendorff), ハイディンガー (Haidinger) が行つた結果、明い圓環が細い暗線で二つの環に分れたものを觀察した。この説明をフォグト (Voigt) が試みたがその記述はこゝでは略す。外部圓錐屈折も亦實驗的に證明される。この場合には結晶板を光線軸に直角に切つて、絞りを結晶板の両面に丁度反對側に置かねばならない。レンズで收斂された光束を入射すれば、法線方向がその光線軸に屬する法線軸の極く近所にある様な波動のみが第二の絞りの開きを通過し得る。射出の際の屈折で外部圓錐屈折の錐體と全く一致したものではないが、この第二の開きを通つて光の錐體が出て幕上に圓環状の明い像が觀察される。この場合環の大きさは遮蔽物の間隔が増せば大になるが、内部圓錐屈折では一定であると云ふ相違點がある。

結晶體の特性の測定例へば光軸の決定、主屈折率の測定等に就いては應用光學篇にて記述する。更に結晶體の光學的應用として偏光された光の分析或はそれを得る器械 (ニコル (Nicol) プリズム等)、偏光子、檢光子、補整板等の説明も應用光學篇に譲る。

参 考:

- J. Beckenkamp: Statische u. kinetische Kristalltheorien, Tl. 2, Berlin 1915.
 L. Fletcher: The optical indicatrix and the transmission of light in crystals, London 1892.
 Th. Liebisch: Physikal. Kristallographie, Leipzig 1891.
 E. Mallard: Traité de cristallographie géométr. et phys. Bd. II. Paris 1884.
 W. Voigt: Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910.

- J. C. Poggendorff: Pogg. Ann., Bd. 48 (1839), 461.
 W. v. Haidinger: Pogg. Ann., Bd. 85 (1853), 486.
 W. Voigt: Phys. Z., Bd. 6 (1905), 673, 818.
 H. Lloyd: Misc. Pap., London 1877.

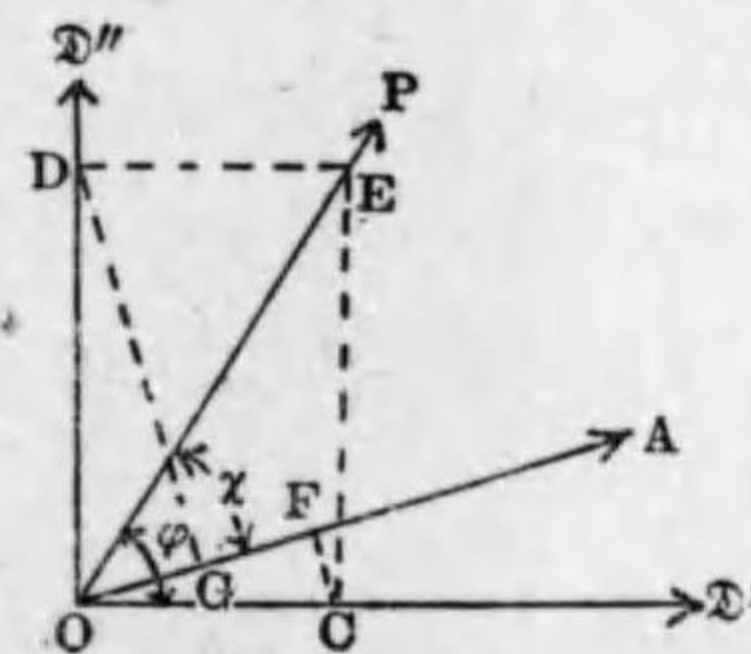
§ 20. 結晶板に於ける干渉現象

結晶平行平板に於ける干渉現象を檢査することは光學軸の位置を決定し得たり、天然結晶でなくても歪みその他の原因に據つて結晶性を持つ透明體の精密な研究に大切なことであるから、この節で結晶板に於ける干渉現象の説明をしやう。

直線的に偏光された平行光線が結晶板を垂直に透過する場合を先づ考へる。光源點よりの光を第一のレンズで平行光線にして偏光子 P を通し結晶板に當て、その透過光線を檢光子 A にかけてから第二のレンズで焦面に像點を結ばす。光が結晶板に入ると、板法線に屬する兩振動方向に平行な二つの異つた速度の成分に分れ、それ等は或位相差を持つて結晶板より出て行く。檢光子はこれ等の位相差を持つた兩コヘレント波を同一振動方向にもたらし、像點に於てその位相差に據る光の強さを觀測することに

なる。第 54 圖にて紙面を結晶板に平行に取り、 \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' は結晶内の互に直角な振動方向、偏光子及び檢光子によつて通し得る振動の跡を、OP, OA で示し、PO と \mathcal{D}' とのなす角を φ , $\angle POA = \chi$ とする。結晶板に當る光の振幅をベクトル OE (OP に平行で、長さ OE = E) で表せば、その軸 \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' 成分は

$$OC = E \cos \varphi, \quad OD = E \sin \varphi$$



第 54 圖 偏光子、檢光子を通過する振動成分の作圖

である。検光子はこれ等の振動の OA 上の成分だけを通すから、

$$OF = E \cos \varphi \cos(\varphi - \chi), \quad OG = E \sin \varphi \sin(\varphi - \chi) \dots\dots (20.1)$$

なる兩波動のみが観測される。d なる厚さの結晶板を透過すれば、これ等の兩波は

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}(n'' - n') \dots\dots (20.2)$$

なる位相差を持つて居る。既に干渉理論の節 § 12 にて論じた如く、一般に干渉する波の強さは

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta$$

で、各波の振幅の二乗 J_1, J_2 に (20.1) の二乗を入れ、 $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ であるから、容易に

$$J = E^2 \left\{ \cos^2 \chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\} \dots\dots (20.3)$$

を得る。この第二項が結晶板の作用を與へる。

次の二つの特別の場合に、

i) $A \parallel P$, 偏光子と検光子が平行, $\chi = 0$.

この場合には (20.3) は

$$J_{\parallel} = E^2 \left(1 - \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \dots\dots (20.4)$$

となつて、光の強さ極大は $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 即ち偏光子の振動方向が結晶の振動方向の一つと一致した時に起る。それ等の間に比較的暗い處が $\sin 2\varphi = \pm 1$ に相當して $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \right)$ 起り、極小の光の強さは

$$J_{\min} = E^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

で與へられる。従つて完全に暗くなるのは $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ に對してで、與へられた單色光の場合定つた板の厚さに對して完全に暗くなる。

(ii) $A \perp P$, 偏光子と検光子とが垂直, $\chi = \frac{\pi}{2}$.

この場合には (20.3) は

$$J_{\perp} = E^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \dots\dots (20.5)$$

となるから、(20.4) と比較するに $A \perp P$ の場合の現象は $A \parallel P$ の場合に全く餘色(補色)的である。完全に暗い方向は結晶の振動方向に平行で、 $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$ 、その間に比較的明い處が $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$ に對して

$$J_{\perp \max} = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

なる強さで現れ、極大値は $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ に對して起る。

若し光束が完全に平行でないならば、その傾斜による光路差が生じて現象は複雑になる。例へば光源として輝された艶消硝子を使用すれば、その各點は像面上のそれに対応した點に互に無關係な光の強さを與へるから、光強度分布は多くの等照度曲線で表される。その曲線は二つの型に分れ、一つは結晶の主振動の位置によつて、その板の厚さには無關係な黒帯(黒十字)と稱せられる曲線型で、他は光線の傾斜により、その板の厚さに關係する等色曲線と稱せられる曲線型であつて、この名稱は (20.2) に見る如く δ が波長の函数で、 $\delta = \text{const.}$ の凡ての光は同じ干渉色を呈する處から出て來たものである。偏光子と検光子との相對的位置が平行か直角でない一般の場合も容易に論ぜられるが、上記の特別の場合を考へれば充分である。 $A \perp P$ と $A \parallel P$ とでは互に餘色的であるから、 $A \perp P$ の場合だけに就いて述べる。擴りを持つた光源の場合 (20.5) にて φ も δ も視界に於ける場所の函数となる。完全な暗黒は次の二曲線系に沿うて起る。

1) 主黒帯 $\sin 2\varphi = 0$, 即ち $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$

これ等は視野を數個の部分野に分つて、その中央では明く、その縁にて完全な暗黒になる。

2) 主等色曲線, $\sin \delta/2 = 0, \delta = 2\pi n (n = 0, 1, \dots)$

これは複雑な曲線系を形成する。

これ等の兩曲線系は互に重合するが、各單獨に取扱ひ得る。その準備として平行光線が結晶板へ傾斜して入射される場合を考へて位相差 δ が入射角 φ の函数として如何になるかを計算して見やう。二重屈折の結果屈折角 θ', θ'' , 波長 λ', λ'' を持つ兩光線 AB, AC に分れ、結晶板を出て再び元の光線と平行になり、レンズで一點に來たらされて干涉を起す (第 55 圖)。

その位相差は圖より明かな如く

$$\delta = 2\pi \left\{ \frac{AC}{\lambda''} + \frac{CD}{\lambda} - \frac{AB}{\lambda'} \right\}$$

で與へられ、更に

$$AB = \frac{d}{\cos \theta'}, \quad AC = \frac{d}{\cos \theta''}$$

$$CD = BC \sin \varphi = (EB - EC) \sin \varphi = d \sin \varphi (\operatorname{tg} \theta' - \operatorname{tg} \theta'')$$

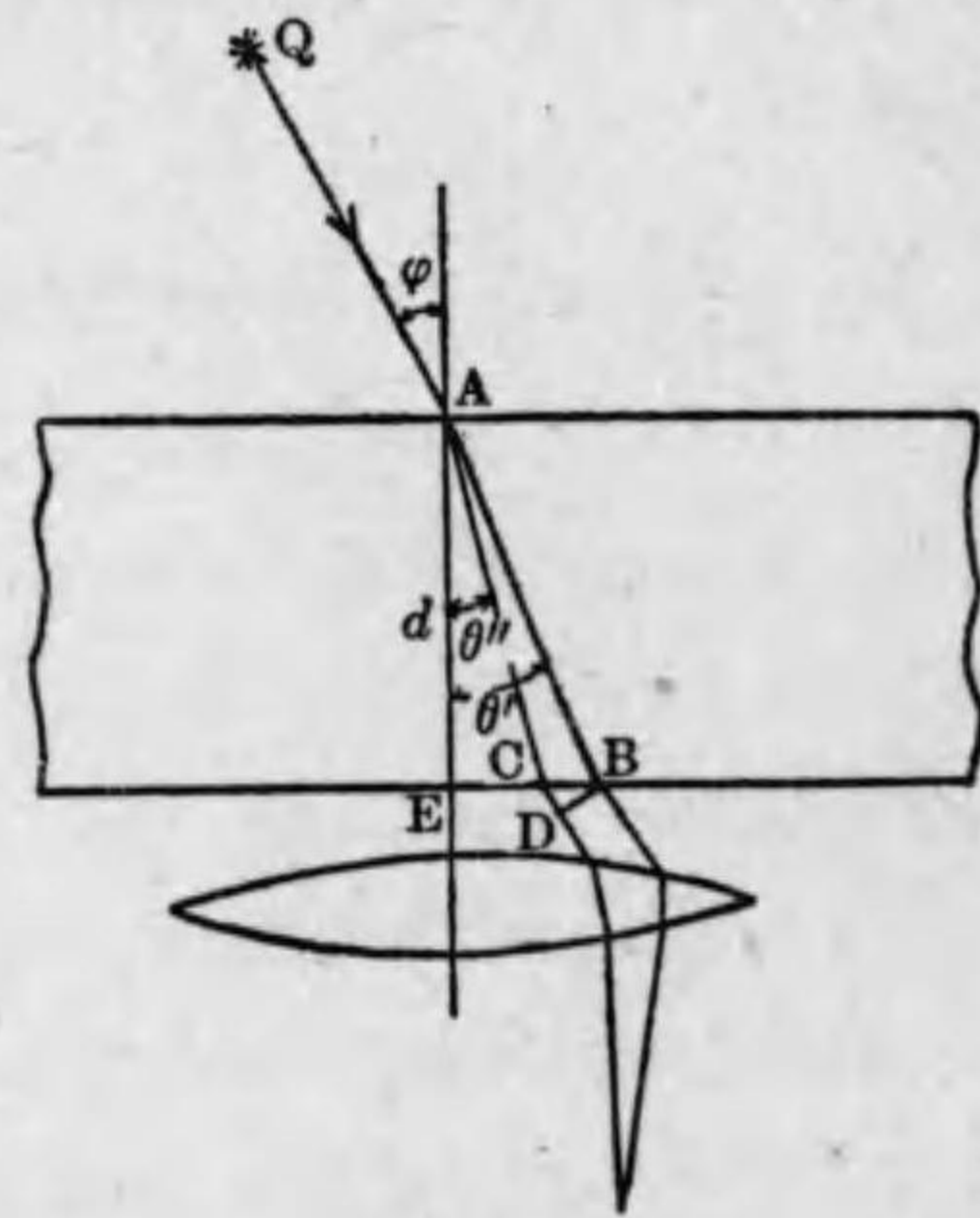
であるから、

$$\delta = 2\pi d \left\{ \frac{1}{\cos \theta''} \left(\frac{1}{\lambda''} - \frac{\sin \varphi \sin \theta''}{\lambda} \right) - \frac{1}{\cos \theta'} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin \varphi \sin \theta'}{\lambda} \right) \right\}$$

となる。屈折法則に従つて $\frac{\sin \varphi}{\lambda} = \frac{\sin \theta''}{\lambda''} = \frac{\sin \theta'}{\lambda'}$ であるから、これ等を

導入して

$$\delta = 2\pi d \left(\frac{\cos \theta''}{\lambda''} - \frac{\cos \theta'}{\lambda'} \right) = \frac{2\pi d}{\lambda} (n'' \cos \theta'' - n' \cos \theta') \dots (20.6)$$



第 55 圖
結晶板内の兩振動間の位相差

と書ける。然るに二重屈折 $n'' - n'$ 従つて $\theta'' - \theta'$ は非常に小であるから、 n', n'' 及び θ', θ'' の平均値を n, θ とすれば、近似的に

$$\begin{aligned} n'' \cos \theta'' - n' \cos \theta' &= \frac{d(n \cos \theta)}{dn} (n'' - n') \\ &= \left(\cos \theta - n \sin \theta \frac{d\theta}{dn} \right) (n'' - n') \end{aligned}$$

と置かれ、屈折法則 $\sin \varphi = n \sin \theta$ を n で微分して (φ は一定として)

$$0 = \sin \theta + n \cos \theta \frac{d\theta}{dn}, \quad \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{n} \operatorname{tg} \theta$$

であるから、近似的に

$$n'' \cos \theta'' - n' \cos \theta' = \frac{1}{\cos \theta} (n'' - n')$$

と書け、(20.6) 式は近似的に

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda \cos \theta} (n'' - n') \dots (20.7)$$

となる。

第 55 圖で擴りを持つた光源によつて起る干渉。檢べるには、結晶内にて出来るだけ結晶板法線と少ししか傾斜してない凡ての方向の平面光波を考へねばならない。結晶板の入射側面の一 A から入射光束 (收斂光束とする) に屬する多くの光線 AB, AB', ... を引くと、透過平行光束の位相差、従つて干涉圖が像面に完全に定まる。この干涉圖を射出側面に投影して考へ、結晶板の厚さが異れば、その射出側面を平行に移動せねばならない。かくの如くして、一つの射出光線の跡點は d, θ なる座標で與へられ、位相差 δ は (20.7) で矢張 d と θ の函数として表され、結晶板に對する光軸の任意な位置に於て $n'' - n'$ も亦 θ の函数として與へられる。

(a) 一軸性結晶板に於ける收斂光による干涉圖:

上記射出光線の跡點の座標として d, θ の代りに $\rho = \frac{d}{\cos \theta}$ と A 點を通

る光軸に對するこの光線の傾斜角 ψ とを取るのが便利である。 ρ, ψ は光軸の周りの普通の極座標である。光軸に對する ψ 方向の兩光速度は (19.2) より一軸性結晶に就いて

$$c_n'^2 = c_o^2, \quad c_n''^2 = c_o^2 \cos^2 \psi + c_e^2 \sin^2 \psi \quad \dots\dots\dots(20.8)$$

であつて、近似的に

$$c_n'^2 - c_n''^2 = \frac{dc_n^2}{dn}(n' - n'')$$

と書け、 $c_n = \frac{c}{n}$ であるから $\frac{dc_n^2}{dn} = -\frac{2c^2}{n^3}$ となり、

$$c_n'^2 - c_n''^2 = -\frac{2c^2(n' - n'')}{n^3}$$

を得る。この表現に (20.8) を代入して

$$n' - n'' = \frac{n^3}{2c^2}(c_n''^2 - c_n'^2) = \frac{n^3}{2c^2}(c_e^2 - c_o^2)\sin^2 \psi \quad \dots\dots(20.9)$$

なる表現を得る。然るに c_o, c_e は主屈折率 $n_o = \frac{c}{c_o}, n_e = \frac{c}{c_e}$ で代へられ、 $n_o^2 n_e^2$ は近似的に $n^4, n_o + n_e = 2n$ と置けるから、

$$c_e^2 - c_o^2 = c^2 \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) = c^2 \frac{n_o^2 - n_e^2}{n_e^2 n_o^2} = \frac{2c^2}{n^3}(n_o - n_e) \quad \dots\dots(20.10)$$

となつて、位相差は (20.7), (20.9), (20.10) から

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o) \cdot \rho \sin^2 \psi \quad \dots\dots\dots(20.11)$$

で與へられる。従つて

$$\rho \sin^2 \psi = C \quad \dots\dots\dots(20.12)$$

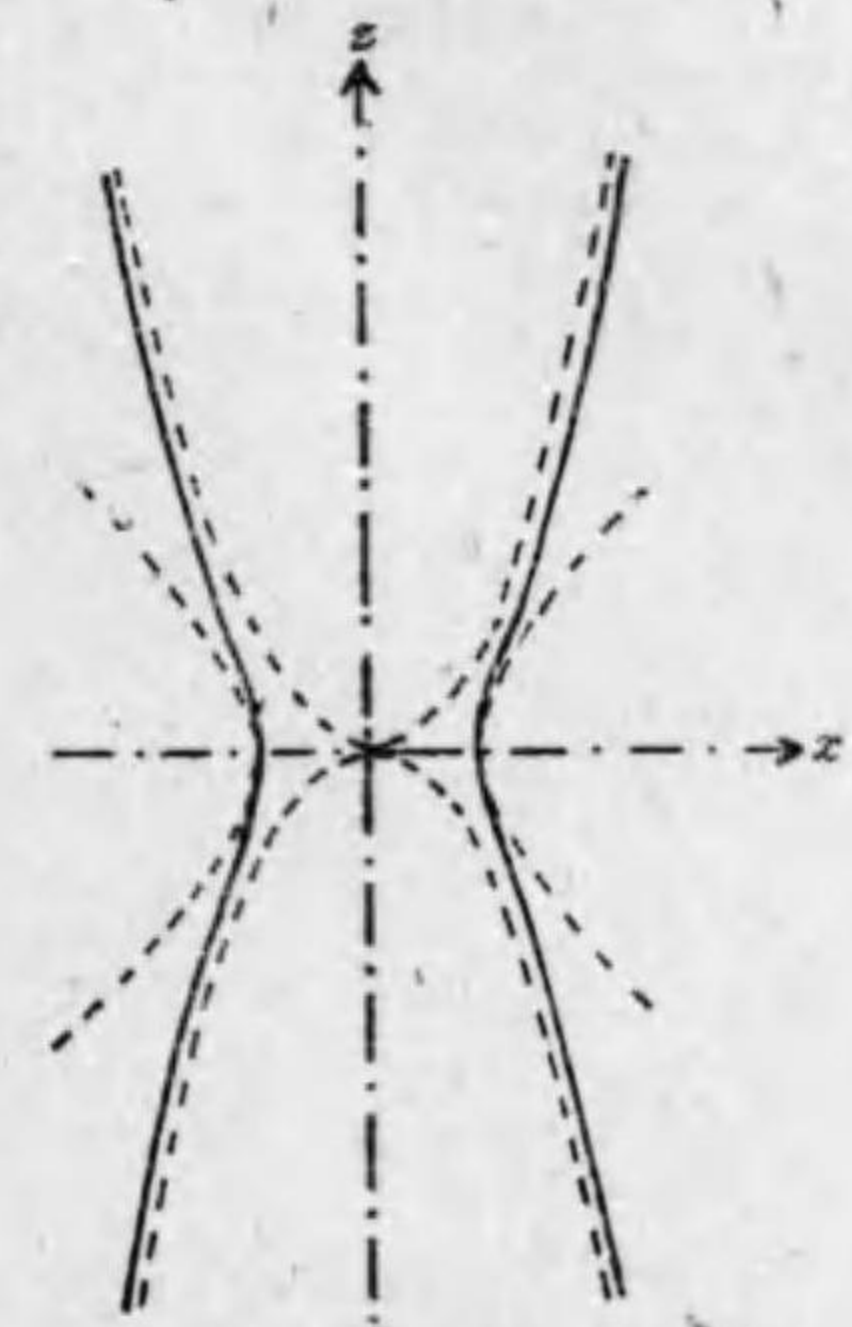
なる等光路差の曲面は結晶の光軸の周りの廻轉曲面であつて、その子午面曲線は $x = \rho \sin \psi, y = \rho \cos \psi$ として

$$x^4 = C^2(x^2 + z^2) \quad \dots\dots\dots(20.13)$$

で表される。この常數 C は $\psi = \frac{\pi}{2}$ 即ち x 軸方向に於ける ρ の値で、 ρ

の取り得る最小値である。 $\psi \rightarrow 0$ の極限で $\rho \rightarrow \infty, z$ の非常に大なる値に對しては ($x^2 \ll z^2$) 子午面曲線は $z = \frac{x^2}{C}$ なる拋物線に近くなり、 x 軸近處では $\frac{x^4}{x^2 + z^2} = \frac{x^2}{1 + \frac{z^2}{x^2}} = x^2 \left(1 - \frac{z^2}{x^2} + \dots \right) = C^2$ 即ち $x^2 - z^2 = C^2$

なる雙曲線に近い。かくしてこの廻轉曲面を結晶板の射出側平面 (原點より d なる距離にある) で切つて、入射光線の種々なる傾斜によつて起る凡ての干涉圖 (等色曲線) が得られる。第 56 圖より光軸の法線平面に對する射出側平面の傾斜に従つて種々なる切斷圖の出來ることが判る。若し結晶板法線が光軸と極く少し、か傾いて居ないならば干涉圖は楕圓類似の曲線になり、その傾斜が大ならば明かに雙曲線類似である。その中間では拋物線類似になる極限の場合がある。



第 56 圖
等光路差表面の子午面曲線

これ等の狀況を式にて表現するために、光軸に關した座標系 x, y, z 以外に結晶板に固定した X, Y, Z を取つて、 Z 軸を A 點を通る結晶板法線と一致せしめる。更に XZ 平面を板法線と光軸とを含む平面として主斷面と呼ぶ。光軸と Z 軸とのなす角を α とする。 A の周りの單位球上の任意の點の極座標は Z 軸とその主斷面とに關して θ と γ で、この θ は既に導入した屈折角であり、 γ はそれに屬する方位角である。かくの如き角を選べば、

$$\cos \psi = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \gamma$$

なることが球面三角形より明かである。従つて

$$\sin^2\psi = \sin^2\alpha + \sin^2\theta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\gamma) - \sin 2\alpha\sin\theta\cos\theta\cos\gamma$$

であるから、(20.11)は

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)\rho\{\sin^2\alpha + \sin^2\theta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\gamma) - \sin 2\alpha\sin\theta\cos\theta\cos\gamma\}$$

となり、

$$X = \rho\sin\theta\cos\gamma, \quad Y = \rho\sin\theta\sin\gamma, \quad Z = \rho\cos\theta = d$$

を導入するに當つて問題にする視野は小即ちθは小である場合に限ると、

sin²θの因子はそれ自身小でρはdで置換えられ、第一項では

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + d^2} = d\left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{2d^2} + \dots\right) \text{として}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{d\lambda}(n_e - n_o)\left\{\left(d^2 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2\right)\sin^2\alpha + (X^2 + Y^2)\cos^2\alpha - X^2\sin^2\alpha - Xd\sin 2\alpha\right\}$$

$$= \frac{2\pi}{d\lambda}(n_e - n_o)\left\{X^2\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right) + Y^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right) - Xd\sin 2\alpha + d^2\sin^2\alpha\right\}$$

を得る。位相差一定の曲線即ち等色曲線は

$$X^2\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right) + Y^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right) - Xd\sin 2\alpha = \text{const.} \dots\dots(20.14)$$

なる表現を取る。これは圓錐曲線の式で、Y²の係数は常に正、X²の係数は±になり得るから、

$$\left. \begin{matrix} \text{tg}\alpha < \sqrt{2} \\ \text{tg}\alpha = \sqrt{2} \\ \text{tg}\alpha > \sqrt{2} \end{matrix} \right\} \text{即ち} \left. \begin{matrix} \alpha < 54^\circ 44' \\ \alpha = 54^\circ 44' \\ \alpha > 54^\circ 44' \end{matrix} \right\} \text{に對し} \left\{ \begin{matrix} \text{橢圓} \\ \text{拋物線} \\ \text{雙曲線} \end{matrix} \right.$$

となる。特にα=0即ち光軸が結晶板に垂直ならば、等色曲線はその軸の周囲の圓になる。

(20.14)より明かな如く、橢圓の場合にはその長軸は常にその主断面に平行で、短軸と長軸の長さの比は $\sqrt{\frac{2 - \text{tg}^2\alpha}{2 + \text{tg}^2\alpha}}$ となり、その中心はX軸正の方向へ $d\frac{\text{tg}\alpha}{2 - \text{tg}^2\alpha}$ だけずれて居る。雙曲線の場合にはその漸近線の主断面に對する角は $\text{arctg}\sqrt{\frac{\text{tg}^2\alpha - 2}{\text{tg}^2\alpha + 2}}$ 、その中心はX軸上視野の中央から $d\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}^2\alpha - 2}$ の距離にある。

偏光子、檢光子を直角にして結晶板を觀察する場合の光の強さは(20.5)より

$$J = E^2 \sin^2 2\varphi \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

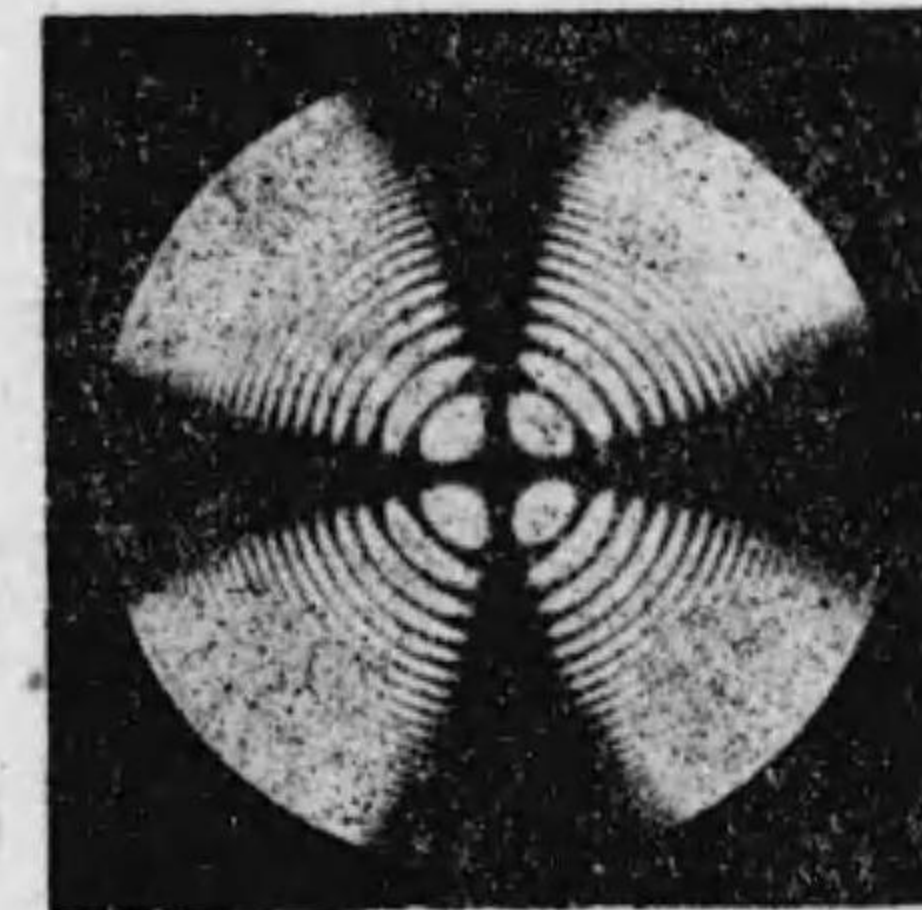
であるから、 $\delta = 2\pi k (k = 0, \pm 1, \dots)$ として、主等色曲線に對し、(20.11), (20.12)によつて

$$C = \frac{k\lambda}{n_e - n_o} \dots\dots\dots(20.15)$$

を得る。主黒帯、 $\sin 2\varphi = 0$ は一軸性結晶の場合黒十字形となり、その十字線は偏光子と檢光子の方向に平行で、その中心點は光軸の跡點Nである。

これ等の理論的結果は例へば第57圖に示す如く實驗的に確められて居る。

以上述べた結晶平行平面板による干渉圖の重大な應用は偏光器製作にある(例へばサヴァール板)が、これに就いては應用光學篇に述べる。



第 57 圖
光軸に垂直に切つた方解石を直交ニコル間に置いてNa-D收斂光で見た干渉圖

(b) 二軸性結晶板に於ける干涉圖:

(20.2) にもどつて

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda}(n'' - n') \dots\dots\dots(20.16)$$

中二重屈折 $n'' - n'$ を射出側面に於ける光線の跡點の座標で表さねばならない。(19.3) 式の解より

$$c_n'^2 - c_n''^2 = \sqrt{D} \dots\dots\dots(20.17)$$

なることは既に述べた處である。こゝで

$$\xi = \xi_x^2(c_y^2 - c_x^2), \quad \eta = \xi_y^2(c_x^2 - c_x^2), \quad \zeta = \xi_z^2(c_x^2 - c_y^2)$$

として $D = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta - 2\zeta\xi - 2\xi\eta$ である。

結晶内の波動法線 ξ と兩法線軸 N_1, N_2 とのなす角を θ_1, θ_2 として、入射點の周りの單位球上に球面三角形 $N_1 N_2 Q$ を取る。Q は ξ がそれを貫く點である。§19 に用ひた直角座標系を取つて、 z -軸は光軸の平面内にあつて $N_1 N_2$ を角二等分する。 z -軸を第一光中心線、 x -軸を第二光中心線と稱する。従つて z 軸の跡點 Z は $N_1 N_2$ 弧を二等分し、角 $N_1 Z = N_2 Z = \beta$ である。(19.5) より

$$\text{tg } \beta = \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_y^2 - c_x^2}} \quad (c_x > c_y > c_z)$$

更に $\cos \theta_1 = \xi_x \sin \beta + \xi_z \cos \beta, \quad \cos \theta_2 = -\xi_x \sin \beta + \xi_z \cos \beta$

であつて、

$$\sin \beta = \frac{\text{tg } \beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} = \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_x^2 - c_x^2}}, \quad \cos \beta = \sqrt{\frac{c_y^2 - c_x^2}{c_x^2 - c_x^2}}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_1 &= 1 - \cos^2 \theta_1 \\ &= \frac{1}{c_x^2 - c_x^2} \{ (c_x^2 - c_x^2)(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) - \xi_x^2(c_x^2 - c_y^2) \\ &\quad - \xi_z^2(c_y^2 - c_x^2) \pm 2\xi_x \xi_z \sqrt{(c_x^2 - c_y^2)(c_y^2 - c_x^2)} \} \end{aligned}$$

と書ける。

上記 ξ, η, ζ を用ひれば、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 &= \frac{1}{(c_x^2 - c_x^2)^2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta - 2\zeta\xi - 2\xi\eta) \\ &= \frac{D}{(c_x^2 - c_x^2)^2} \end{aligned}$$

となつて、(20.17) は

$$c_n'^2 - c_n''^2 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 (c_x^2 - c_x^2)$$

と書ける。然るに既述の如く近似的に

$$c_n'^2 - c_n''^2 = \frac{2c^2}{n^3}(n'' - n')$$

であつて、 $n_x = c/c_x, \quad n_z = \frac{c}{c_z}$ であるから、

$$c_x^2 - c_x^2 = \frac{2c^2}{n^3}(n_x - n_z),$$

従つて

$$n'' - n' = \sin \theta_1 \sin \theta_2 (n_x - n_z),$$

而して位相差は (20.16) より

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_z) \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots\dots\dots(20.18)$$

となる。(20.18) は (20.11) と類似な表現である。

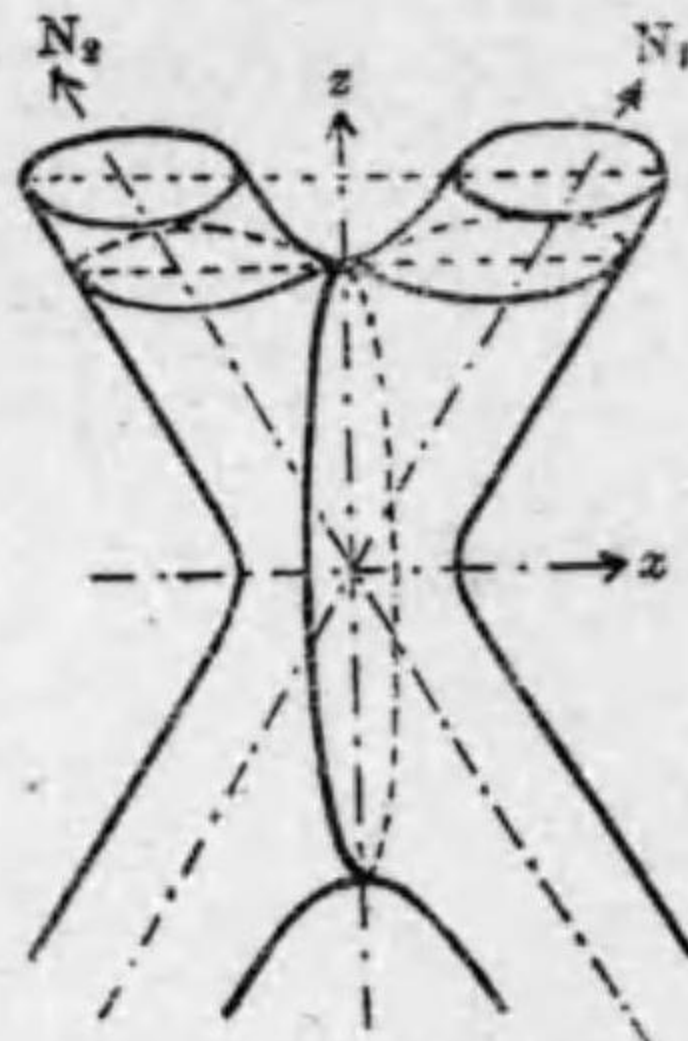
等光路差曲面も (a) の場合同様に論ぜられる。 δ が一定なる場合に (20.18) は

$$\rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \text{const} = \rho_0 \dots\dots\dots(20.19)$$

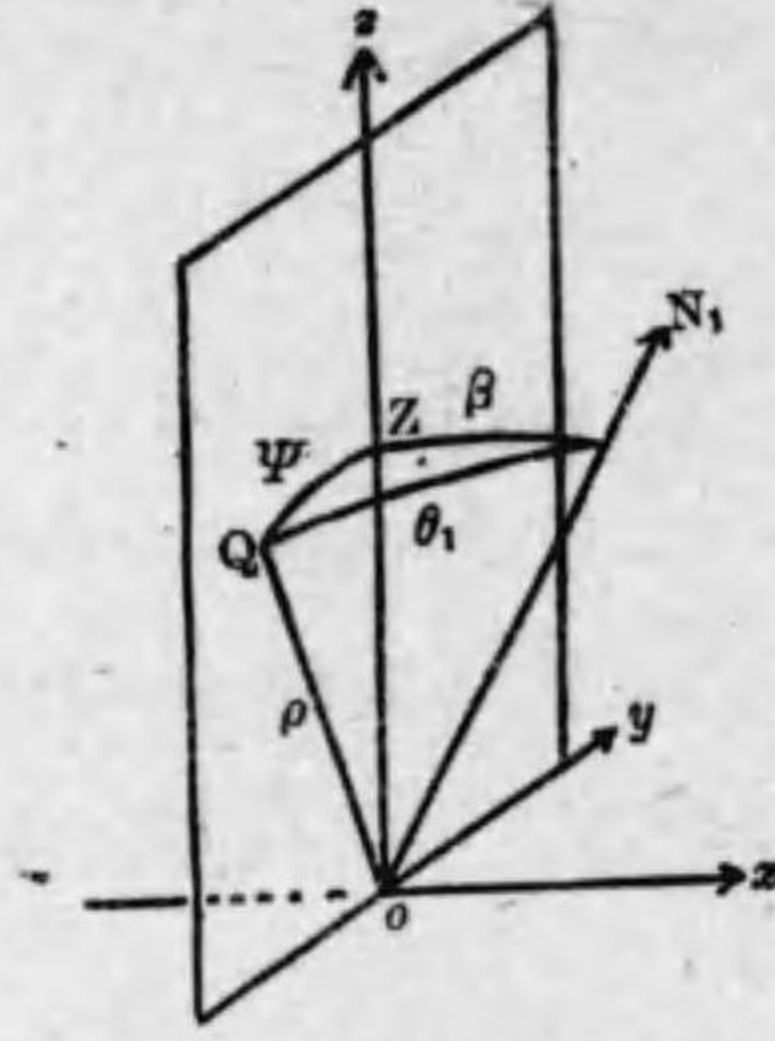
なる形を取る。第 58 圖に示す如く光軸の方向にては ($\theta_1 = 0$ 又は $\theta_2 = 0$) $\rho \rightarrow \infty$, 而して $\theta_1 \rightarrow 0$ にては θ_2 は 2β と置けて $\rho \sin \theta_1 \rightarrow \frac{\rho_0}{\sin 2\beta}$ なる圓嚮で、曲面は光軸の周圍の圓嚮になつて無限遠の距離に至る。座標平面

は勿論この曲面の對稱平面であつて、その断面を次に調べやう。

$x = 0$. yz 平面内のこの曲面上の一點に對しては $\theta_1 = \theta_2$ であり、



第 58 圖 光學二軸性結晶の位相差一定表面



第 59 圖

第 59 圖の如き記號を用ひて、球面三角形 QN_1Z にて $\angle Z$ は直角であるから、

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos \beta \cos \psi,$$

(20.19) 式は

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \psi} \dots \dots \dots (20.20)$$

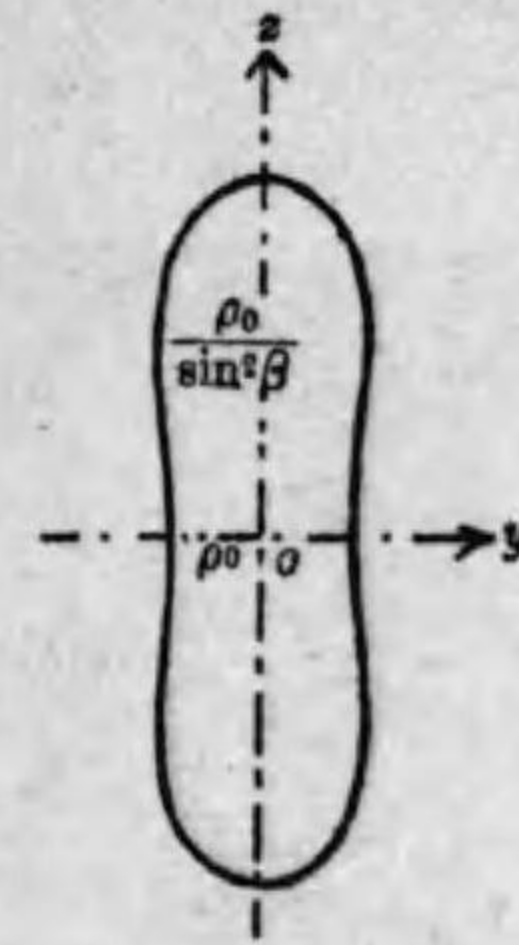
なる曲線と與へる。 ρ の極小、極大値は $\cos \psi = 0$, $\cos \psi = 1$ の處にあつて、この曲線は卵形の變形でその短半徑、長半徑は ρ_0 , $\rho_0 / \sin^2 \beta$ なる長さを持つ (第 60 圖)。

$z = 0$. この場合には $\theta_2 = \pi - \theta_1$. 第 61 圖の球面三角形 N_1QX にて

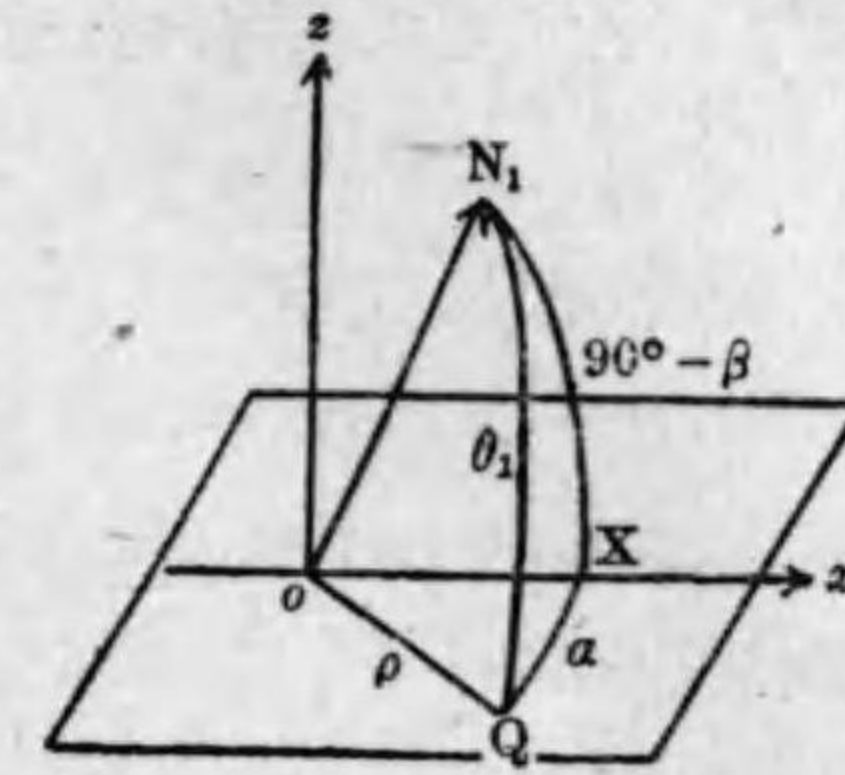
$$\cos^2 \theta_1 = \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$$

であるから、(20.19) 式は

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin^2 \theta_1} = \frac{\rho_0}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta} \dots \dots \dots (20.21)$$



第 60 圖



第 61 圖

なる卵形と與へ、その軸は ρ_0 , $\rho_0 / \cos^2 \beta$ である (第 62 圖)。

$y = 0$. 此處では第 63 圖に見る如く

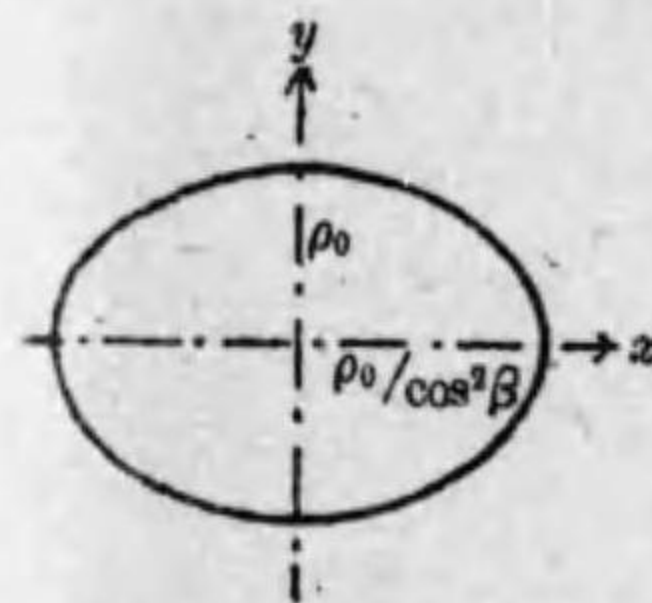
$$\theta_1 = \psi - \beta, \quad \theta_2 = \psi + \beta$$

であるから、(20.19) は

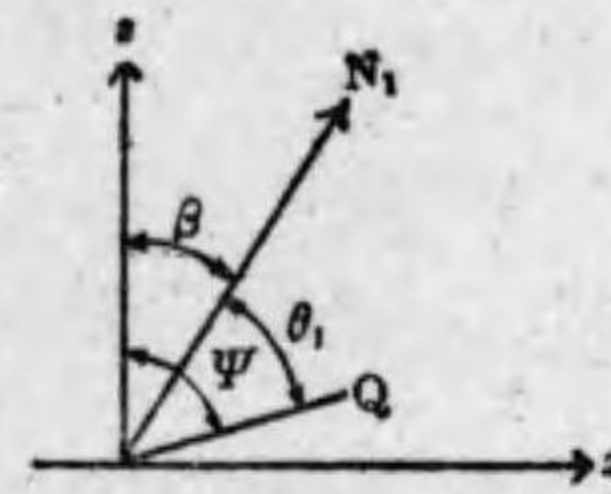
$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin^2 \psi - \sin^2 \beta} \dots \dots \dots (20.22)$$

と與へ、 $\psi = \beta$, $\psi = \pi - \beta$ なる二直線を漸近線とする四つの雙曲線類似の曲線 (第 64 圖)

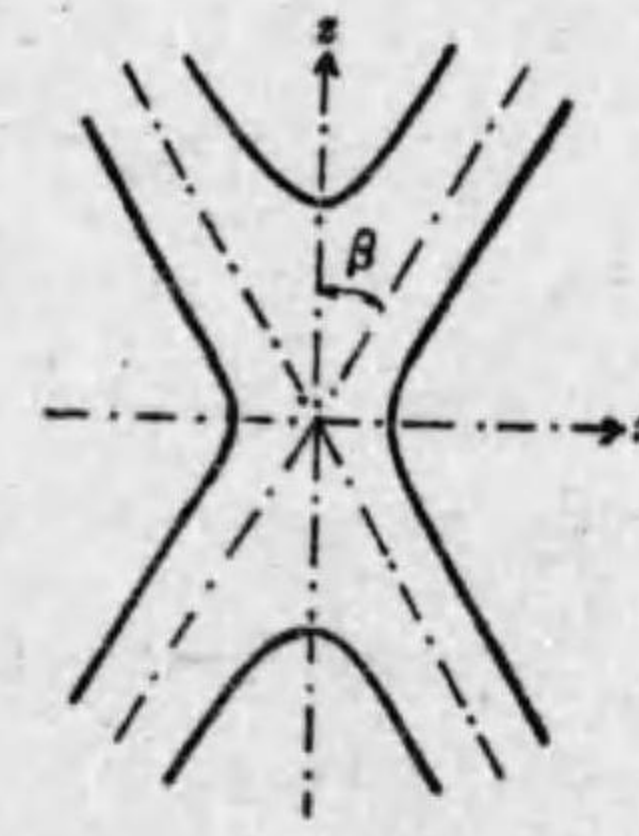
を得る。



第 62 圖



第 63 圖



第 64 圖

次に Z 軸に垂直な原點から a なる距離にある平面にての断面の曲線を検べると、

i) $a < \frac{\rho_0}{\sin^2 \beta}$ なら $a = 0$ の場合と同様な卵形様な曲線、

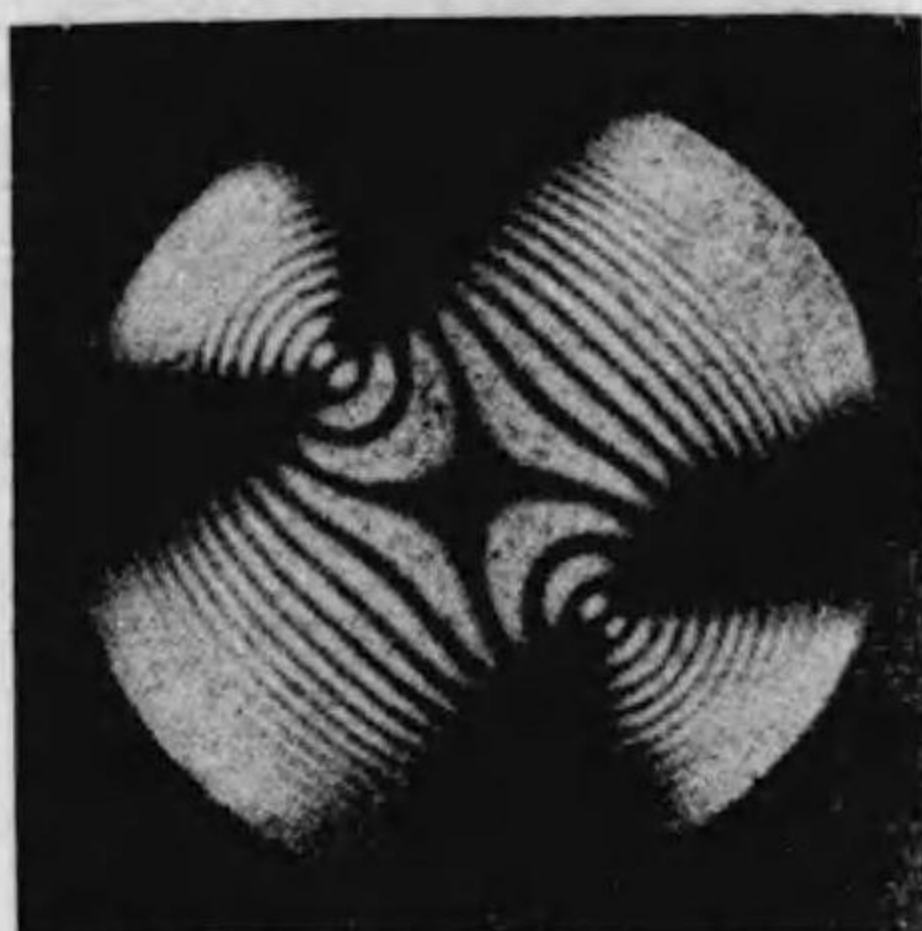
- ii) $a = \rho_0/\sin^2\beta$ なら雙葉曲線様な断面曲線,
 iii) $a > \rho_0/\sin^2\beta$ なら a が増すに従つて楕圓になる處の z 軸に對して對

稱的に置かれた二つの卵形曲線になる。結晶板が第一中心線(z 軸)に垂直に切られて、偏光子、檢光子を直角にして觀察した等色曲線は以上述べた断面曲線である(第 65 圖)。

黒帯の位置を検べるに當つて光軸の平面(N_1N_2 平面)と偏光子の通し得る振動方向との相對的位置に關して次の二つの特別な場合だけを考へ、一般の場合の説明は略す。

第一主位置: 光軸の平面と偏光子が通し得る振動の平面とが一致する場合。黒帯は黒十字形になつて十字線は偏光子、檢光子の方向に平行である。何となれば Q 點に於ける主振動方向 H_1, H_2 は QN_1 平面と QN_2 平面の間の角を二等分する平面内にあるから、 Q 點が N_1, N_2 を結ぶ線上にあるか又は N_1N_2 の中點 Z に立てた垂線上にある時のみその振動方向は偏光子、檢光子の方向と一致し得ると云ふ理由に據る。偏光子、檢光子を固定して結晶板をその平面内で廻轉すれば、その軸系及びそれに附着して居る等色曲線系は共に廻轉するが、黒帯の位置は偏光子に對する結晶板の位置に關係するのである。

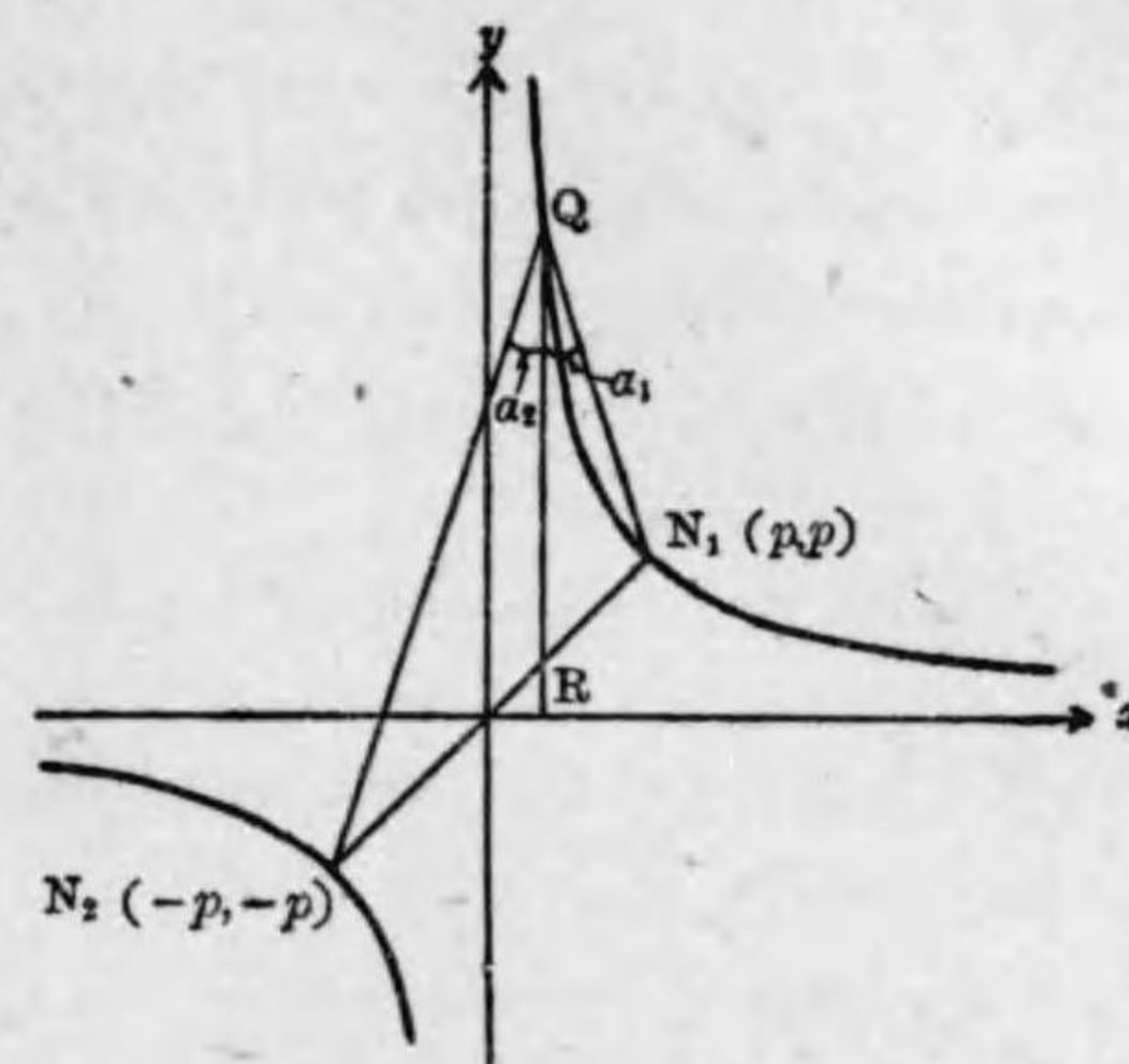
第二主位置: 光軸の平面が偏光子の方向と 45° の角度を保つ時。狭い視野の場合 Q 點に於ける振動方向は矢張 N_1QN_2 角を二等分する。その主振動が互に直角な偏光子、檢光子に平行になる様な Q 點の幾何學的位置が黒帯となり、それは N_1, N_2 を頂點とする雙曲線である(その漸近線は



第 65 圖 第一中心線に垂直に切つた霰石を直交ニコル間に置いて Na-D 收斂光線で見えた干涉縞

偏光子、檢光子の方向)。それを證明するためには、 Q 點を通つて一つの漸近線に平行な直線が

$\angle N_1QN_2$ を二等分することを證明せねばならない。今兩漸近線を x, y 座標軸に取り、第 66 圖の如く QR を y 軸に平行に取る。 $\angle N_1QR = \alpha_1$, $\angle N_2QR = \alpha_2$ として $\alpha_1 = \alpha_2$ を證明することになる。 N_1 の座標を



第 66 圖 黒帯が雙曲線である證明の圖

$x = y = p$, N_2 のを $x = y$

$= -p$ とすれば、雙曲線の方程式は $xy = p^2$ であつて、圖から

$$\cos \alpha_1 = \frac{y-p}{\sqrt{(x-p)^2 + (y-p)^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{y+p}{\sqrt{(x+p)^2 + (y+p)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{故に } \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} &= \frac{(x-p)^2(y+p)^2 - (x+p)^2(y-p)^2}{(y-p)^2(y+p)^2} \\ &= \frac{4p(x-y)(xy+p^2)}{(y-p)^2(y+p)^2} \end{aligned}$$

これは $xy = p^2$ により零であつて、 $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$ となり、目的の證明が出来たことになる。

かくの如き干涉圖によつて鏡物學上光軸の位置決定、その光軸間の角度測定等が出来る。偏光顯微鏡によつて結晶斷片の極く小さなものも検査出来る。

参 考:

F. Arago: Œuvr. compl. Bd. X, Paris-Leipzig 1858.

J. B. Biot : *Traité de physique expériment. et mathém.* Bd. IV, Paris 1816.
 Th. Young : *Miscell. Works* Bd. I, London 1855.
 A. Fresnel : *Cœuvr. compl.* Bd. I, Paris 1866.
 Turpain et de Bony de Lavergne : *J. de phys.* Bd. 6 (1925), 259.
 Lord Rayleigh : *Phil. Mag.* Bd. 12 (1906), 489.
 P. Drude : *Lehrb. d. Optik*, 3. Aufl., Leipzig 1912.
 J. Walker : *The analytical theory of light*, Cambridge 1904.
 F. Neumann : *Ges. Werke* Bd. II, Leipzig 1906.
 E. Mascart : *Traité d'optique* Bd. II, Paris 1891.
 P. Groth : *Physikal. Kristallographie*, 4. Aufl., Leipzig 1905.
 H. Hauswaldt : *Interferenzerscheinungen an doppeltbrechenden Kristallplatten im konvergenten polarisierten Lichte*, Magdeburg 1902.
 G. Szivessy : *Handbuch der Physik* Bd. XX, C, Kristallographie S. 635, Berlin 1928.

§ 21. 導体内に於ける平面波の傳播

物體の電氣傳導度 σ が非常に小であると云ふ今までの假定を棄てると、傳導度の存在はジュール熱の發生と密接な關係があつて、導体内では電磁的交流場がそのエネルギーを熱に変更して行く。金屬が或意味で光波動に對して不透明なのはこの理由に據る。

金屬が光を強く反射すると云ふ性質は勿論金屬の吸收能が高いことと關係があつて、金屬を透過して檢べられなくても、それに據る反射光を觀測して光吸收の機構に關する知識が得られる。

物質の光學的特性を論ずる場合、この章で今まで述べて來た様な非吸收性非旋光性物質、今これから述べる様な吸收性非旋光性物質、次の章にて

説明する様な非吸收性旋光性物質及び吸收性旋光性物質等を區別せねばならない。

こゝでは吸收性、非旋光性物質を考へ、更に結晶性をしばらく無視する。非磁性物質として物質に關する式 $\mathfrak{S} = \sigma \mathfrak{E}$, $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ 及びマックスウェルの式

$$\begin{cases} \text{rot } \mathfrak{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}, & \begin{cases} \text{div } \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \\ \text{div } \mathfrak{H} = 0 \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (21.1)$$

より出發して論ずる。外から導體へ加はる様な電磁的攪亂に對しては $\text{div } \mathfrak{E} = 0$ と取れる。何となれば、(21.1) より明かな如く

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{div } \mathfrak{E} = 0,$$

即ち
$$\frac{d}{dt} \rho + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

t で積分して

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad \theta = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \dots\dots\dots (21.2)$$

電荷密度は緩和時間 θ を持つ指數函數法則に従つて減少する。或時間に傳導体内で電磁場が零即ち電荷密度が零ならば、それは零を續ける。従つて

$$\text{div } \mathfrak{E} = 0 \dots\dots\dots (21.3)$$

と假定出來、(21.1) から (21.3) を考へて \mathfrak{H} を消去すれば、

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \dots\dots\dots (21.4)$$

となる。 $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ の項は制振の存在を示す。振動回數 ω の波動に對しては (21.1), (21.4) は

$$\begin{cases} \text{rot } \mathfrak{H} - \left(\frac{\epsilon \omega i}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c}\right) \mathfrak{E} = 0, \\ \text{rot } \mathfrak{E} + \frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = 0, \end{cases} \quad \Delta \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0 \dots\dots\dots (21.5)$$

なる表現を取る。非導体に對する式との違ひは

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{\omega} i, \\ k^2 &= \frac{\epsilon \omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\sigma \omega}{c^2} i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21.6)$$

を非導体の式の $\epsilon, k^2 = \frac{\epsilon \omega^2}{c^2}$ の代りに取る處に在る。これ等は今の場
合複素數である。更に複素屈折率 n を導入する。それは

$$n = n(1 - i\kappa) = \frac{k_0}{\omega} \dots\dots\dots (21.7)$$

で定義され、 κ を吸収率と稱する。(21.6), (21.7) より

$$n^2 = n^2(1 - 2i\kappa - \kappa^2) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{\omega} i \dots\dots\dots (21.8)$$

従つて實數、虚數の部分を等しいとして、

$$n^2(1 - \kappa^2) = \epsilon, \quad n^2\kappa = \frac{2\pi\sigma}{\omega} = \frac{\sigma}{\nu} \dots\dots\dots (21.9)$$

なる n, κ を ϵ, σ で表す表現を得る。勿論 $\sigma = 0$ なら $\kappa = 0$ で、常の
如く $n^2 = \epsilon$ となる。金屬では $\sigma \neq 0$ で非常に大きく、 $n^2\kappa \gg \epsilon$ となる。
金屬では ϵ を直接測定せず、光學方法で逆に定めるのである。

$$n^2\kappa \gg \epsilon \dots\dots\dots (21.10)$$

ならば、計算は簡単になつて、(21.9) を解いて

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\epsilon^2 + 4 \frac{\sigma^2}{\nu^2}} + \epsilon \right\} \sim \frac{\sigma}{\nu} \\ n^2\kappa^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\epsilon^2 + 4 \frac{\sigma^2}{\nu^2}} - \epsilon \right\} \sim \frac{\sigma}{\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21.11)$$

を得る。

(21.5) の波動方程式 $\Delta \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0$ は形式上普通の場合 (例へば
(6.2) 式) と同等で、平面波として

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 e^{i\omega t - i\mathbf{k}(\mathbf{r}\mathfrak{s})}$$

なる表現を得、(21.7) の k を代入すれば

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 e^{-\frac{\omega}{c} n\kappa(\mathbf{r}\mathfrak{s})} e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c}\mathbf{r}\mathfrak{s}\right)} \dots\dots\dots (21.12)$$

で、その實數部分

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 e^{-\frac{\omega}{c} n\kappa(\mathbf{r}\mathfrak{s})} \cos \omega\left(t - \frac{n}{c}\mathbf{r}\mathfrak{s}\right)$$

は波長 $\lambda = 2\pi c/\omega n$, κ に比例する制振常數を持つ空間的に制振されたる
平面波を表す。エネルギーは時間的平均 $\overline{\mathfrak{E}^2}$ に比例するから、

$$\left. \begin{aligned} W &= W_0 e^{-\chi \mathbf{r}\mathfrak{s}}, \\ \chi &= 2 \frac{\omega}{c} n\kappa = \frac{4\pi\nu}{c} n\kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} n\kappa = \frac{4\pi}{\lambda} \kappa \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21.13)$$

を得る。 λ_0 は真空中の、 λ は物體中の波長を意味する。この χ の逆數は
垂直入射によつてエネルギーが $\frac{1}{e}$ になる深さと見做し得、

$$d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa} = \frac{\lambda_0}{4\pi n\kappa} = \frac{\lambda_0}{4\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda_0 c}{\sigma}} \dots\dots\dots (21.14)$$

を波動の浸入深度と稱する。例へば銅に對して $\sigma = 5.14 \cdot 10^{17}$ c.g.s であ
るから、種々なる λ_0 に對する d の値は

第 4 表

λ_0	$1\text{\AA} = 10^{-8}\text{cm}$	$1\mu = 10^{-4}\text{cm}$	1 cm	$100\text{m} = 10^4\text{cm}$
d	$0.1795 \cdot 10^{-4}\text{cm}$	$0.1795 \cdot 10^{-2}\text{cm}$	0.1795 cm	17.95 cm

透明體の屈折率測定は容易であるが、金屬にてはその不透明性のために

これと同様の方法では n, κ を測定し難い。次に述べる金属面による反射光の特性を観測せねばならない。

参 考:

P. Drude : Physik des Äthers, 1 Aufl., (1894), 574; Lehrbuch der Optik, 3. Aufl.

E. Ketteler : Theoretische Optik, Braunschweig 1885.

§ 22. 金属表面に於ける光の反射

§ 21 にて説明した様に導体内の週期的現象に対する基礎方程式は非導体に対する式とたゞ ϵ, k の代りに ϵ, κ なる複素数を用ふる點で相違するのであるから、第1章 §4 にて非導体に対する境界条件、反射、屈折を論じ、その得た結果に就いて適當の物理的意味を考へれば、その結果と同形で内容の異つた導体に対する解釋を得られる。

屈折法則は

$$\sin \theta = \frac{\sin \varphi}{n} \dots\dots\dots(22.1)$$

で、屈折角 θ は n 同様複素数である。その意味は、境界面に立てた法線が z 軸に平行で、入射平面が z 軸と x 軸を含めば、屈折された波の位相は $s_2' = \sin \theta, s_1' = 0, s_3' = \cos \theta$ なる成分を持つ s' と r とのスカラ積 $s'r$ で與へられ、 θ が複素数であるから、 s' の成分も複素数で、

$$s' = s_1' + i s_2'$$

と書け、複素位相は

$$s'r = s_1'r + i s_2'r$$

となる。即ち一定な實數位相の平面 ($s_1'r = \text{const.}$) と一定な振幅の平面 ($s_2'r = \text{const.}$) とが一致しないと云ふ結果になる。然し今はこの侵入した波は考へず、この不均等な波の議論は放棄して、たゞ反射波の状況を検べ

るにとゞめる。而して金属面が透明體と接したその境界面を取れば、既に得た實數位相を持つ諸公式が用ひられる。

反射波に於て入射面に平行及び直角な振動成分の強さが考へられるのは第1章 §4 の時と同様で、(4.16) 式

$$B_p = \frac{\text{tg}(\varphi - \theta)}{\text{tg}(\varphi + \theta)} A_p, \quad B_s = -\frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} A_s \dots(22.2)$$

にて、 θ は複素数であるから、實數入射振幅 A_p, A_s に對して反射振幅 B_p, B_s は複素数になる。即ち特殊な位相變化が起つて來る。一般の場合の理論はさて置き、今は入射光として線偏光のみを考へ、その偏光面は入射平面と 45° の傾斜をなすとする。従つて $A_p = A_s$ 、反射光の状況に對しては B_p と B_s との比

$$\frac{B_p}{B_s} = -\frac{\cos(\varphi + \theta)}{\cos(\varphi - \theta)} = D e^{i\Delta} \dots\dots\dots(22.3)$$

で議論される。D は實數振幅の比、 Δ は兩成分の相對的位相差を表す。(22.3) が實數即ち $\Delta = 0$ なるは $\varphi = 0$ 又は $\frac{\pi}{2}$ の時のみで、 $\varphi = 0$ は垂直入射を意味し $D = -1$ 、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ は境界面に接しての入射で $D = +1$ となる。この兩極値の間に $\Delta = \frac{\pi}{2}$ を與へる様な φ の値がある。この場合に若し $D = +1$ ならば圓偏光であるが、 $D \neq 1$ であるから楕圓偏光となる。然し $\Delta = \frac{\pi}{2}$ を與へる様な入射角の場合は他の入射角の場合よりこの振動楕圓に外接する矩形が正方形に近い。この入射角を主入射角 φ_0 と稱する。それに屬する振幅比を D_0 とする。この振動楕圓に外接する矩形の對角線と入射平面との間の角を主方位角 ρ_0 と云ふ。

(22.3) より

$$\frac{1 + D e^{i\Delta}}{1 - D e^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\cos \varphi \cos \theta} = \frac{\sin^2 \varphi}{n \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{n^2}}} = \frac{\sin \varphi \text{tg} \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \dots\dots\dots(22.4)$$

$\Delta = \frac{\pi}{2}$ として $\frac{1+iD_0}{1-iD_0} = \frac{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_0}}$ を得るから、共軛複素値を乗

じて

$$1 = \frac{\sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{\sqrt{(n^2 - \sin^2 \varphi_0)(n^{*2} - \sin^2 \varphi_0)}}$$

更に二乗して (21.7) より

$$\sin^4 \varphi_0 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 = n^4 (1 + \kappa^2)^2 + 2n^2 (1 - \kappa^2) \sin^2 \varphi_0 + \sin^4 \varphi_0 \dots (22.5)$$

なる表現を得る。然るに凡ての金属に於て $n^2(1 + \kappa^2)$ は 1 より大であるから、(22.5) は近似的に

$$\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = n\sqrt{1 + \kappa^2} \dots (22.6)$$

と書ける。同様にして D_0, ρ_0 を n, κ で表すことも容易に出来る。

反射光の観察は偏光子、検光子及び補整板を以てなされるが、上記の場合ならば、先づ偏光子を入射光が入射面に對して 45° の角にて振動する様 $\star\star$ に挿入し、補整板を置變へその上検光子を廻轉して反射光の照度が消える處を探すのである。この暗黒位置に直角な検光子の方向が振動楕圓外接矩形の對角線の方に相應する。この方向に對して

$$\operatorname{tg} \rho = D = \frac{|B_p|}{|B_r|} \dots (22.7)$$

である。

測定された ρ と Δ から n と κ を計算するために、(22.4) の左邊より

$$\frac{1 - De^{i\Delta}}{1 + De^{i\Delta}} \frac{1 + De^{-i\Delta}}{1 + De^{-i\Delta}} = \frac{1 - 2iD \sin \Delta - D^2}{1 + 2D \cos \Delta + D^2} = \frac{\cos 2\rho - i \sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta}$$

(22.4) の右邊にて n^2 に對して $\sin^2 \varphi$ を無視して (金属にては一般にこれが可能) 結局

$$\frac{\cos 2\rho - i \sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} = \frac{n(1 - i\kappa)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}$$

を得、こゝで實數部分及び虚數部分をそれぞれ等しいと置けば、

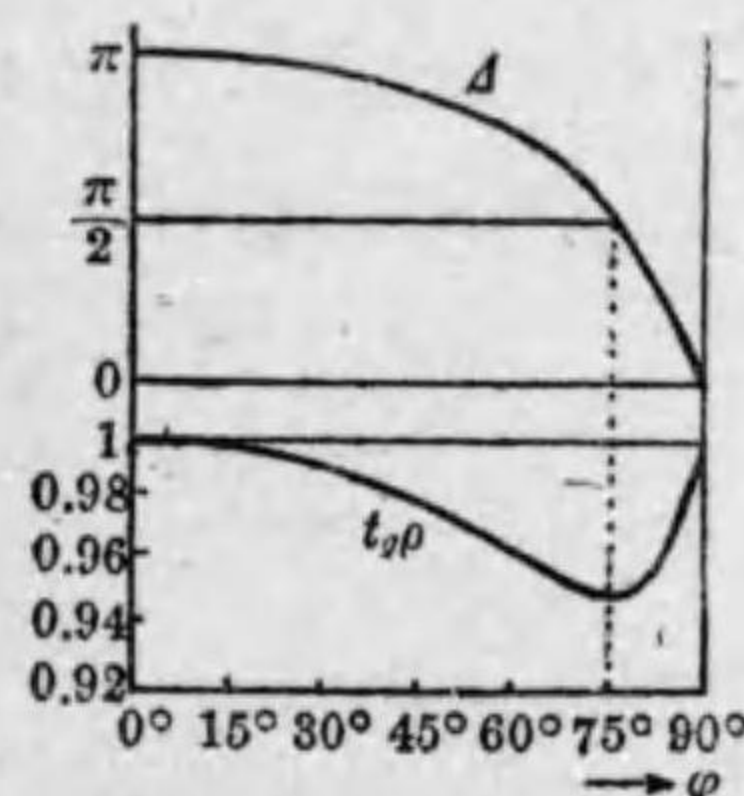
$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos 2\rho}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} &= \frac{n}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} \\ \frac{\sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} &= \frac{n\kappa}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} \end{aligned} \right\} \dots (22.8)$$

となる。(22.8) によつて n, κ が一定の時各入射角 φ に對する偏光のパラメーター、 ρ, Δ が定められ、逆にこれ等のパラメーターを測定することによつて光學常數 n, κ が

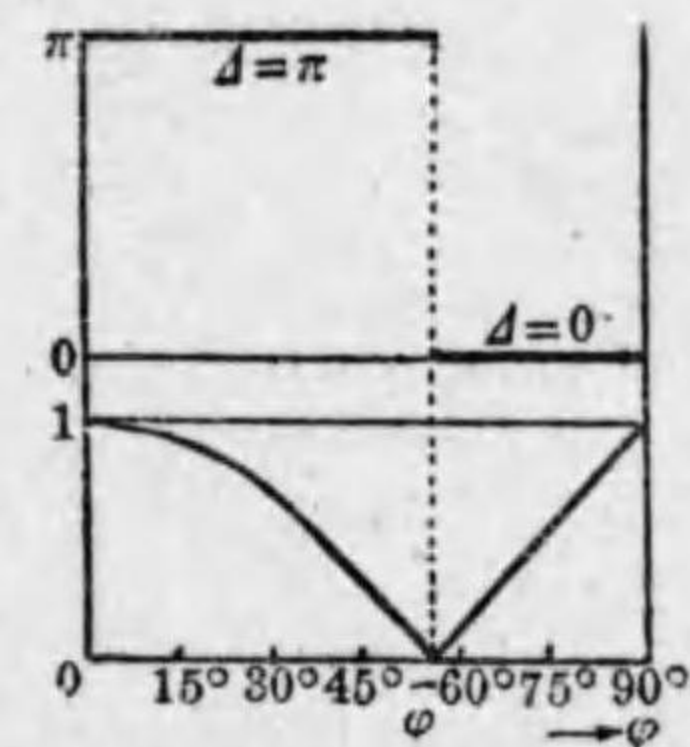
$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \cos 2\rho}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} \\ \kappa &= \sin \Delta \operatorname{tg} 2\rho \end{aligned} \right\} \dots (22.9)$$

によつて定められる。主入射角 φ_0 に對しては $\Delta = \frac{\pi}{2}$ 、從つて (22.9) より主方位角 ρ_0 は

$$\operatorname{tg} 2\rho_0 = \kappa \dots (22.10)$$



第 67 圖 金属反射に於ける振幅比 $\operatorname{tg} \rho$ と相對的位相 Δ とを入射角 φ の函数として表した曲線



第 68 圖 透明媒質に於ける反射狀況(第 65 圖との比較)

で與へられる。(22.8) なる公式によつて銀に就いて $\Delta, \operatorname{tg} \rho$ を φ の函数とした曲線を示せば第 67 圖の如くである。第一章 §5 にて得た透明體に於ける反射に對する結果を今の場合と比較のため挙げれば第 68 圖の如くである。

かくの如くして金属の光學常数は偏光子，檢光子，補整板を利用して暗黒位置を探ることによつて求められるが，勿論入射光と反射光の強さ測定からも得られる。例へば直角投射にて $\varphi = 0$, s 成分, p 成分の區別はなく金属の反射能として

$$r = \left(\frac{|B_p|}{A_p} \right)^2 = \left(\frac{|B_s|}{A_s} \right)^2$$

なる定義が用ひられる。この場合にも透明體に對して得た公式が同様に成立つて (5.17) は

$$r = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2 = \frac{n^2(1+\kappa^2)+1-2n}{n^2(1+\kappa^2)+1+2n} \dots\dots\dots(22.11)$$

となる。

ランドルト (Landolt-Börnstein) の常數表より數種の金属の Na-D 線に對する光學常數を取出して表示すれば第 5 表の如くである。

第 5 表

物 質	$n\kappa$	n	$r(\%)$
銀	3.64	0.18	95.0
マグネシューム	4.42	0.37	92.9
金	2.82	0.37	85.1
アルミニウム	5.23	1.44	82.7
錫	5.25	1.48	82.5
カドミウム	5.01	1.13	84.7
水銀	4.41	1.62	75.3
亜鉛	4.66	1.93	74.5
銅	2.63	0.62	74.1
白金	4.26	2.06	70.1
アンチモニー	4.94	3.04	70.1
鉛	3.48	2.01	62.1
ニッケル	3.32	1.79	62.0
コバルト	3.37	1.95	61.2
鐵	3.37	2.27	58.9
ビスマス	2.80	1.78	54.3

この表を見るに一見矛盾と思はれる數點が見出される。

i) 或種の金属にては屈折率が 1 より小である。然るに $c_n = \frac{c}{n}$ であるから，金属中の位相速度は真空中のより大となり， c を最大極値となす相對性原理に矛盾する如く見える。然し相對性原理では信號を與へ得る様な光速度に就いて c が最大極値であることを云ふのであつて，位相速度は無限に長い波動に對しての

み定義され，その内でエネルギーは一様に然も何等の中間切斷なしに流れるので，かくの如き光は信號には應用出来ない。信號を送ることは有限の容積中に一定のエネルギーを送る様な波動群によつてのみ可能で，個々の位相は光速度以上の速度を持つて居てもその波動群の傳播の速度は c より小である。

ii) (21.9) によれば

$$\epsilon = n^2 - n^2\kappa^2$$

であるに反して，上記表によれば總ての金属に於て $n\kappa > n$ で $\epsilon < 0$ となる。負電媒常數とは意味のない概念である。

iii) 更に (21.9) の式によれば $n^2\kappa = \frac{\sigma}{\nu}$ であるが，例へば銅に對して $\sigma = 5.14 \cdot 10^{17} \text{ sec}^{-1}$, Na D 線の波長 $\lambda = 589 \text{ m}\mu$ で $\nu = 5.09 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$ であるから $\frac{\sigma}{\nu} = 1.01 \cdot 10^3$, 然るに上記表よりすれば $n^2\kappa = 1.63$ である。

かくの如き數値上の矛盾は如何なる原因によるかと云ふに，既に透明體に對して $\epsilon = n^2$ が光學範圍にて實驗的結果と一致しないと同様，こゝに述べた理論は可視光線に對しては成立しないので，上記の如き矛盾が金属光學の理論にて起つても驚くに當らない。實際透明體に對して屈折率は決して物質にのみよる常數でなく光の振動數にも據ると同様に吸收性物質に對して屈折率，吸收率は共にその振動數に關係する常數であつて，屈折並に吸收の分散が起るのである。たゞ透明體と金属との相違は前者にては束縛電子，後者にては自由電子の共振動を取扱ふ可き點に存する。靜的屈折率，靜的傳導等を取扱ふ處のこゝで述べた理論との一致は遅い振動に對してのみ期待され，ルーベンス (Rubens), ハーゲン (Hagen) は赤外光線 $\lambda > 12\mu$ に對して反射能を與へる處のこゝで得た式が實驗的結果と一致することを確め得た。(21.11)に與へられた近似値を以て (22.11) を表せば，

$$r = \frac{2\frac{\sigma}{\nu} - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} + 1}{2\frac{\sigma}{\nu} + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} + \dots$$

となつて、ルーベンス、ハーゲンに據れば $\lambda = 12\mu$ なる光に對して銅にて $1 - r = 1.6 \cdot 10^{-2}$ であるが、傳導度より出すと $1 - r = 1.4 \cdot 10^{-2}$ となる。長波長の光に對しては r は 1 に近い値を取るから、直接 $1 - r$ を測定するのは非常に不正確になる。後に述べる熱輻射に關するキルヒホッフの法則に従へば、物體の放射能 E と吸収能 A との比は物質の性質には無關係で、たゞその溫度 T と振動數 ν との函數である。この普遍函數 $F(\nu, T)$ は明かに吸収能 1 を持つ物體の放射も與へるから (それは暗黒體と稱せられる),

$$E = A \cdot F(\nu, T)$$

であつて、凡ての投射されたエネルギーを内部に吸収して反射しない様な厚さの金屬層を取れば,

$$A = 1 - r,$$

従つて上記近似値を r に取つて

$$A = 2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} = \frac{E}{F(\nu, T)}$$

即ち

$$2\sqrt{\nu} F(\nu, T) = E\sqrt{\sigma}$$

なる表現を得る。左邊は金屬の性質には無關係な暗黒體の輻射に對して實驗、理論上良く知られた ν, T の函數である。マックスウェルの式が正當であるか如何かを證明するためには金屬の傳導度 σ と放射能 E とを ν, T の函數として測定し $E\sqrt{\sigma}$ がこの式を満足するか如何かを決定すれば良い。これを上記ルーベンス、ハーゲンが確めたのである。

参 考:

- P. Drude: Winkelmanns Handbuch der Physik, 2 Aufl. Bd. VI, S. 1297; Wied. Ann. Bd. 35 (1888), 520.
 W. Wien: Enzyklop. d. Math. Wiss. Bd. V 3, S. 138.
 O. Wiener: Abhandlgn. d. Math. phys. Kl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 30 (1908), 495.
 Chr. Pfeiffer: Beiträge zur Kenntnis der Metallreflexion. Diss. Giessen 1912.
 R. C. Duncan: Phys. Rev. (2) Bd. 1 (1913), 300.
 W. Voigt: Ann d. Phys. (4) Bd. 29 (1909), 957.
 Cauchy: Pogg. Ann. Bd. 74 (1849), 545.
 P. F. Lindman: Ann. d. Phys. (4) Bd. 4 (1901), 617.
 W. König: Ann. d. Phys. (4) Bd. 71 (1923), 65.
 H. Hauschild: Ann. d. Phys. (4) Bd. 63 (1920), 816.
 C. A. Reeser and R. Sissingh: Proc. Amsterdam Bd. 24 (1921), 108.
 E. Hagen u. H. Rubens: Ann. d. Physik (4) Bd. 11 (1903), 873; Phys. Z. Bd. 11 (1910), 139.
 A. Sommerfeld: Phys. Z. Bd. 8 (1907), 841; Ann d. Phys. Bd. 44 (1914), 177.
 L. Brillouin: Ann. d. Phys. Bd. 44 (1914), 203.

§ 23. 光を吸収する結晶體

吸収性結晶體の理論は凡ての可能な場合に就いて論ぜられて居るが、一般的理論は参考論文に譲つてこゝでは簡単な場合だけを取扱ふことにする。

電媒テンソル $\epsilon_{\alpha\beta}$ と共に電氣傳導度のテンソル $\sigma_{\alpha\beta}$ を導入して、一般にはこれ等兩テンソルの主軸は一致しないが、對稱性の高い結晶に對しては

兩主軸系は一致する。この簡単な場合にはそれ等の主軸 $\epsilon(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$, $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ は一致して

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x &= \epsilon_x \mathcal{E}_x, \dots, \dots \\ \mathcal{J}_x &= \sigma_x \mathcal{E}_x, \dots, \dots \end{aligned}$$

導體に對するマックスウェルの式

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}, \quad \text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

に於て、平面制振波動

$$\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{J} \propto e^{i\omega(t - \frac{n}{c} r \cdot \mathfrak{s})}$$

を導入すれば、

$$n \cdot \mathcal{H} \times \mathfrak{s} = \mathcal{D} + \frac{4\pi}{i\omega} \mathcal{J} = \mathcal{D}^\sigma, \quad n \cdot \mathcal{E} \times \mathfrak{s} = -\mathcal{H}$$

となり、 \mathcal{H} を消去すれば

$$\mathcal{D}^\sigma = \mathcal{D} - \frac{4\pi i}{\omega} \mathcal{J} = -n^2 \cdot (\mathcal{E} \times \mathfrak{s}) \times \mathfrak{s} = n^2 (\mathcal{E} - \mathfrak{s}(\mathcal{E} \cdot \mathfrak{s})) \dots (23.1)$$

を得る。こゝではこの場合のみ限るとする。 \mathcal{D} の肩の σ を取り、複素数 n を n とすれば (23.1) 式は (18.11) 式となる。混同の恐れはないからこの σ を略して

$$\mathcal{D}_x = \epsilon_x \mathcal{E}_x, \dots, \dots (23.2)$$

$$\epsilon_x = \epsilon_x - \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_x, \dots, \dots (23.3)$$

と書く。かくの如き場合には §18 にて得た透明結晶體に對する公式がそのまま成立つ。但し主電媒常数は (23.3) で與へられる複素数とせねばならない。(23.1) と (23.3) とから

$$\mathcal{D}_x = -\frac{\epsilon_x (\mathcal{E} \cdot \mathfrak{s})}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x}}, \dots, \dots (23.4)$$

を得るのも §18 に於けると同様で、從つてフレネルの法線方程式は (18.29), (18.31) 同様

$$\frac{\frac{\mathfrak{s}_x^2}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x}}{n^2 - \epsilon_x} + \frac{\frac{\mathfrak{s}_y^2}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_y}}{n^2 - \epsilon_y} + \frac{\frac{\mathfrak{s}_z^2}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_z}}{n^2 - \epsilon_z} = 0, \dots (23.5)$$

$$\frac{\frac{\mathfrak{s}_x^2}{c_n^2 - c_x^2} + \frac{\mathfrak{s}_y^2}{c_n^2 - c_y^2} + \frac{\mathfrak{s}_z^2}{c_n^2 - c_z^2} = 0 \dots (23.6)$$

と書ける。但し複素速度

$$c_n = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad c_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} = \frac{c}{n_x}, \dots, \dots (23.7)$$

が入つて来る。§18 に於けると同様に、(23.5) より $n^2(\mathfrak{s})$ に對する二次方程式を得、一定の傳播方向 \mathfrak{s} に對して二つの異つた屈折率が存在し、且つ二つの主振動 $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ がある。然し (23.4) より明かなる如く \mathcal{D}_x : \mathcal{D}_y : \mathcal{D}_z は複素数であつて、主振動は線偏光でなく一般に橢圓偏光である。更に (23.4) より

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' \mathcal{D}'' \propto & \frac{\frac{\mathfrak{s}_x^2}{(c_n'^2 - c_x^2)(c_n''^2 - c_x^2)} + \frac{\frac{\mathfrak{s}_y^2}{(c_n'^2 - c_y^2)(c_n''^2 - c_y^2)}}{+ \frac{\frac{\mathfrak{s}_z^2}{(c_n'^2 - c_z^2)(c_n''^2 - c_z^2)}}} = \frac{1}{c_n'^2 - c_n''^2} \left\{ \frac{\frac{\mathfrak{s}_x^2}{c_n'^2 - c_x^2} + \frac{\frac{\mathfrak{s}_y^2}{c_n''^2 - c_y^2}}{+ \frac{\frac{\mathfrak{s}_z^2}{c_n'^2 - c_z^2} - \left(\frac{\frac{\mathfrak{s}_x^2}{c_n''^2 - c_x^2} + \frac{\frac{\mathfrak{s}_y^2}{c_n''^2 - c_y^2} + \frac{\frac{\mathfrak{s}_z^2}{c_n''^2 - c_z^2} \right)}}} \right\} \end{aligned}$$

を得るが、(23.6) によればこれは零であるから、

$$\mathcal{D}' \mathcal{D}'' = 0 \dots (23.8)$$

となる。§18 では (23.8) は \mathcal{D}' と \mathcal{D}'' が互に直角な主振動を意味したが、今の場合には振動橢圓が問題であつて對應する軸は互に直角であることを意味する。

更に問題を簡單にして議論を進める。即ち金屬でなく、吸収が弱い物體を考へて吸収係數 κ の二乗の項を無視出来るとする。然る時は (23.7) より

$$\left. \begin{aligned} n &= n(1 - i\kappa), \quad n^2 = n^2(1 - 2i\kappa), \\ c_n &= \frac{c}{n(1 - i\kappa)} = c_n(1 + i\kappa), \quad c_n^2 = c_n^2(1 + 2i\kappa), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23.9)$$

及び

$n_x = n_x(1 - i\kappa_x), \dots, c_x = \frac{c}{n_x} = c_x(1 + i\kappa_x), \dots$ に対する類似な表現を得る。これ等を以てフレネルの式 (23.6) は實數部と虚數部とに分れ

$$\begin{aligned} &\frac{\xi_x^2}{c_n^2 - c_x^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2)} + \frac{\xi_y^2}{c_n^2 - c_y^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_y c_y^2)} \\ &+ \frac{\xi_x^2}{c_n^2 - c_x^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2)} = \frac{\xi_x^2}{c_n^2 - c_x^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2}{c_n^2 - c_x^2}\right) \\ &+ \frac{\xi_y^2}{c_n^2 - c_y^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_y c_y^2}{c_n^2 - c_y^2}\right) + \frac{\xi_x^2}{c_n^2 - c_x^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2}{c_n^2 - c_x^2}\right) \\ &= 0 \dots\dots\dots(23.10) \end{aligned}$$

と書ける。この式の實數部は § 18 にて得たフレネルの式に他ならず、この近似では § 18 にて得た結果と全く同じ結論が得られる。相違點は光線が結晶を通る時弱められる點で、その減光法則は (23.10) の虚數部にて與へられ、それは

$$\begin{aligned} &\kappa c_n^2 \left\{ \frac{\xi_x^2}{(c_n^2 - c_x^2)^2} + \frac{\xi_y^2}{(c_n^2 - c_y^2)^2} + \frac{\xi_x^2}{(c_n^2 - c_x^2)^2} \right\} \\ &= \frac{\kappa_x c_x^2 \xi_x^2}{(c_n^2 - c_x^2)^2} + \frac{\kappa_y c_y^2 \xi_y^2}{(c_n^2 - c_y^2)^2} + \frac{\kappa_x c_x \xi_x^2}{(c_n^2 - c_x^2)^2}, \end{aligned}$$

處で (23.4), (23.7), (23.9) に従へば

$$\mathcal{D}_x = -c^2(\xi_x) \cdot \frac{\xi_x}{c_n^2 - c_x^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2}{c_n^2 - c_x^2}\right), \dots, \dots$$

となるから、この表現を上記の減光法則に入れる場合今の近似的計算では κ^2 を κ に対して無視する以上この虚數部は無視出來 (即ち楕圓偏光を無視することになる),

$$\kappa c_n^2 = \frac{\kappa_x c_x^2 \mathcal{D}_x^2 + \kappa_y c_y^2 \mathcal{D}_y^2 + \kappa_x c_x^2 \mathcal{D}_x^2}{\mathcal{D}^2} \dots\dots\dots(23.11)$$

を得る。與へられた振動方向 (\mathcal{D} ベクトルの位置) に対して傳播速度が一義的に與へられたのであるから、吸収率 κ に対しても (23.11) によつて同様である。然し一般には一つの傳播方向に屬する主振動は異つた有様に吸収される。それに対応した係數 κ', κ'' は更に投射光の振動數によつて變化する分散を示すから、白光にて結晶は色が付いて見えるし、その色は投射光の偏光方向によつて異つて來る。かくの如き現象を多色性と稱する。

一軸性結晶に対しては $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_o, \epsilon_z = \epsilon_e, \kappa_x = \kappa_y = \kappa_o, \kappa_z = \kappa_e$ であつて、常光線に対しては光ベクトル \mathcal{D} は常に xy 平面にあつて、(23.11) より

$$\kappa' c_o^2 = \kappa_o c_o^2 \frac{\mathcal{D}_x^2 + \mathcal{D}_y^2}{\mathcal{D}^2} = \kappa_o c_o^2 \dots\dots\dots(23.12)$$

となり、常光線は凡ての方向にて同様に吸収される。§ と光軸とのなす角を θ とすれば、異常光線に対して (23.11) より

$$\kappa'' c_n'^2 = \kappa_o c_o^2 \cos^2 \theta + \kappa_e c_e^2 \sin^2 \theta \dots\dots\dots(23.13)$$

を得る。 c_n'' は (19.2) で與へられる。

二軸性結晶に対しての吸収狀況はもつと複雑であるが、こゝでは光軸に殆んど平行な光線のみについて説明することにする。この特別の場合には兩法線速度は等しいと考へられ、

$$c_n' = c_n'' = c_y, \quad (c_n > c_y > c_x)$$

従つて (23.11) に従つて κ を定めるには振動方向の位置だけを知れば良い。それは既に透明體の場合に求めた如く、§ と主軸 N_1 とを含む平面と § と主軸 N_2 とを含む平面とのなす角を二等分する。 N_1 の近所を考へる。§ N_1 平面と $N_1 N_2$ 平面とのなす角を ψ とすれば、 $N_1 N_2$ 平面 (xz 平面) は今の近似では § N_2 平面と殆んど平行と見られ、 \mathcal{D}' と § を通る平面は xz -

平面と $\frac{\psi}{2}$ なる角をなす。従つて xz 平面に於ける \mathcal{D}' の成分は $|\mathcal{D}'| \cos \frac{\psi}{2}$ となり、 \mathcal{D}_x' は更にこのベクトルを x 軸上へ投影して得られる。然るに \mathcal{N} は N_1 と殆んど一致するから、

$$\mathcal{D}_x' = |\mathcal{D}'| \cos \frac{\psi}{2} \cos \beta$$

と書ける。こゝで β は N_1 と z 軸との間の角である。類似の方法で他の成分も計算出来て、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x' &= |\mathcal{D}'| \cos \frac{\psi}{2} \cos \beta, & \mathcal{D}_y' &= |\mathcal{D}'| \sin \frac{\psi}{2}, \\ \mathcal{D}_z' &= -|\mathcal{D}'| \cos \frac{\psi}{2} \sin \beta \end{aligned} \dots\dots\dots(23.14)$$

を得る。 \mathcal{D}'' は \mathcal{N} と \mathcal{D}' とに垂直であつて、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x'' &= -|\mathcal{D}''| \sin \frac{\psi}{2} \cos \beta, & \mathcal{D}_y'' &= |\mathcal{D}''| \cos \frac{\psi}{2}, \\ \mathcal{D}_z'' &= |\mathcal{D}''| \sin \frac{\psi}{2} \sin \beta \end{aligned} \dots\dots\dots(23.15)$$

となる。(23.14) 及び (23.15) を (23.11) に代入すれば、 \mathcal{D}' 、 \mathcal{D}'' に属する吸収係数 κ' 、 κ'' として

$$\left. \begin{aligned} \kappa' c_n^2 &= (\kappa_x c_x^2 \cos^2 \beta + \kappa_z c_z^2 \sin^2 \beta) \cos^2 \frac{\psi}{2} + \kappa_y c_y^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \kappa'' c_n^2 &= (\kappa_x c_x^2 \cos^2 \beta + \kappa_z c_z^2 \sin^2 \beta) \sin^2 \frac{\psi}{2} + \kappa_y c_y^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23.16)$$

を得る。光軸に殆んど平行な光線方向に對して成立つ公式 (23.16) は光軸上では ψ が不定になるから使用出来ない。そこでは光軸の平面に垂直と平行な偏光成分に分け、前者に對して $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_z = 0$ 、 $\mathcal{D}_y = D$ 、従つて (23.11) より

$$\kappa_x c_y^2 = \kappa_y c_y^2 \quad \text{即ち} \quad \kappa_x = \kappa_y, \dots\dots\dots(23.17)$$

後者に對して $\mathcal{D}_x = D \cos \beta$ 、 $\mathcal{D}_y = 0$ 、 $\mathcal{D}_z = D \sin \beta$ 、従つて

$$\kappa_p c_y^2 = \kappa_x c_x^2 \cos^2 \beta + \kappa_z c_z^2 \sin^2 \beta \dots\dots\dots(23.18)$$

となる。これは光軸の方向に傳播する波動の吸収が偏光方向に關係することを示して居る。

(23.17)、(23.18) を利用して (23.16) で與へられる κ' 、 κ'' を表せば、

$$\left. \begin{aligned} \kappa' &= \kappa_p \cos^2 \frac{\psi}{2} + \kappa_z \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ \kappa'' &= \kappa_p \sin^2 \frac{\psi}{2} + \kappa_z \cos^2 \frac{\psi}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23.19)$$

となり、光軸附近に於ける主吸収率を極角座標の函数として表した公式が得られたことになる。

吸収性結晶板に於ける干渉現象

一般の場合の説明は略して、光軸に直角に切られた結晶板に就いて上記の近似的吸収理論の應用し得る範圍にてその干渉現象を論ずるとよめる。§ 20 にて述べた處と相違するのは干渉を起す兩光線が異なる吸収を受ける點で、光路程差の計算等は今の近似的取扱にてはその儘成立つ。第 54 圖に示した OC、OD は (21.12) に従つて射出に於ける主振動の振幅として

$$OC = E \cos \varphi e^{-\frac{2\pi\nu\kappa'}{c'}l}, \quad OD = E \sin \varphi e^{-\frac{2\pi\nu\kappa''}{c''}l} \dots\dots\dots(23.20)$$

で與へらる。こゝで l は、 d を結晶板の厚とし γ をその板の法線に對する光線の角度として、 $l = d / \cos \gamma$ を意味する。光軸の近所にては兩光線に對する結晶板中の光路は等しいと假定されるから、(23.20) にて同じ l を用ひてある。更にこの近似では $c' = c''$ と取れ、 $s = \frac{2\pi\nu l}{c'} = \frac{2\pi\nu l}{c''}$ とすれば、

$$OC = E \cos \varphi e^{-\kappa' s}, \quad OD = E \sin \varphi e^{-\kappa'' s} \dots\dots\dots(23.21)$$

と書ける。偏光子、檢光子を通つた後の干渉を起す光線の振幅に對する (20.1) 式と類似の表現として

$$OF = E \cos \varphi \cos(\varphi - \chi) e^{-\kappa' s}, \quad OG = E \sin \varphi \sin(\varphi - \chi) e^{-\kappa'' s} \dots\dots\dots (23.22)$$

が (23.21) より得られる。干渉後の光の總強度に対する表現は勿論 § 20 の時と同様に

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta \dots\dots\dots (23.28)$$

で、 δ は既に求められたものである。§ 20 と同様な装置で一つの光軸に直角に切られた一軸性、二軸性結晶板に於ける干渉を検べるとする。

(i) 一軸性結晶:

この場合には $c_x = c_y = c_o$, $c_z = c_e$ に相應して $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_o$, $\kappa_z = \kappa_e$, 異常光線の振動方向は常に sN 平面にあつて、光ベクトルは投影平面内常に半徑方向にある。それ故異常光線の振動ベクトルと偏光子との間の角は (23.20) 中の φ と同じと出来、(23.12), (23.13) と一致するためには (23.22) 中の κ' , κ'' を交換せねばならない。偏光子と検光子が互に直角な場合即ち $\chi = \frac{\pi}{2}$ の時

$$OF = E \cos \varphi \sin \varphi e^{-\kappa' s}, \quad OG = -E \sin \varphi \cos \varphi e^{-\kappa'' s}$$

となり、(23.23) によつて

$$J = \frac{E^2}{4} \sin^2 2\varphi \{e^{-2\kappa' s} + e^{-2\kappa'' s} - 2 \cos \delta e^{-(\kappa' + \kappa'') s}\} \dots\dots\dots (23.24)$$

を得る。光軸自身に対しては $\kappa' = \kappa''$, $\delta = 0$ であつて $J_0 = 0$ となる。(23.24) より明かに視野に於ける δ の變化に従つて干渉環が生じ、吸収の大なる時はそれが不鮮明になることが判る。視野は黒十字 $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ で區分される。その十字線は偏光子、検光子の軸に平行である。 κ_o, κ_e の相対的大小で狀況が異つて来る。 $\kappa_o \ll \kappa_e$ ならば、軸に近い光線は比較的弱められないから、黒十字以外では視野は明るく (例へば白金シアン化マグネシウム結晶), $\kappa_o \gg \kappa_e$ ならば軸に於ける吸収が最も大で、全視野は

暗く外に向つて次第に明るくなる (例へば電氣石)。

(ii) 二軸性結晶:

偏光子、検光子が直交する場合に限る ($\chi = \frac{\pi}{2}$)。更に結晶板は光軸 N_1 に直角に切られて居るとする。兩光軸が跡平面を貫く點を N_1, N_2 とし、光軸 N_1 の近所の視野の一點 Q と N_1 を結ぶ線が兩光軸を含む平面 $N_1 N_2$ となす角が ψ , その光軸の平面と偏光子の振動平面との間の角が α , $N_1 Q \ll N_1 N_2$ ならば、振動方向 \mathcal{D}' と $N_1 N_2$ とのなす角は殆んど $\frac{\psi}{2}$ である。従つて偏光子の振動方向と \mathcal{D}' との間の角 $\varphi = \alpha - \frac{\psi}{2}$ 。それ故 (23.22) より干渉する兩光線の振幅として

$$OF = E \cos \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-\kappa' s},$$

$$OG = -E \sin \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-\kappa'' s}$$

を得、光の強さとして

$$J = \frac{E^2}{4} \sin^2 (2\alpha - \psi) \{e^{-2\kappa' s} + e^{-2\kappa'' s} - 2 e^{-(\kappa' + \kappa'') s} \cos \delta\} \dots\dots\dots (23.25)$$

を得る。その光軸自身内にては ψ は不定となり、軸 N_1, N_2 を通る平面に平行、直角な成分に光を分けて、(23.25) にて $\psi = 0$ とし、 κ', κ'' の代りに κ_p, κ_s を用ひれば、 $\delta = 0$ であるから

$$J_0 = \frac{E^2}{4} \sin^2 2\alpha \{e^{-\kappa_p s} - e^{-\kappa_s s}\}^2 \dots\dots\dots (23.26)$$

となる。この (23.25), (23.26) の兩式より次のことが言へる。主黒帯は $\sin(2\alpha - \psi) = 0$ で與へられ、透明結晶ならこれは中心點 (光軸の跡點) を通るが吸収性結晶では (23.26) で與へられる J_0 は一般に零でないから、軸の近所で明い點に據つてその黒帯は切斷される。 $J_0 = 0$ は $\alpha = 0$ 又は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ なる特別の場合即ち偏光子の振動平面が光軸の平面内にあるかそれに垂直である場合だけに起る。(23.25) の第二因子より δ の變化に

従つて光軸の周圍に暗環の生ずることが判る。これは大なる吸収或は厚い板の時に不鮮明になる。次に ψ に關係することもこの第二因子は示して居る。それは (23.19) より $\kappa' + \kappa'' = \kappa_s + \kappa_p = \text{const.}$ であるから $F = e^{-2\kappa's} + e^{-2\kappa''s}$ なる項にのみ據ると見られ、(23.19) によつて

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = s(\kappa_p - \kappa_s) \sin \psi (e^{-2\kappa's} - e^{-2\kappa''s})$$

であるから、 $\psi = 0, \pi$ に對しても亦 $\kappa' = \kappa''$ 即ち $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ に對しても $\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$ であつて、

$$F(0, \pi) = e^{-2\kappa_p s} + e^{-\kappa_s s} > F\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{-(\kappa_p + \kappa_s)s}$$

であるから、第一の零になる場合 $\psi = 0, \pi$ は F 極大、第二の零になる場合 $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ は F 極小となる。従つて $\psi = 2\alpha$ なる主黒帯以外に光軸の平面に直角に $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ に對して暗帯が視野に現れる。この暗帯は偏光子、檢光子のない場合即ち自然の場合にも觀察される (1819 年に既にブルースター (Brewster) が觀察した)。自然光は何れかに於て互に直角な方向に偏光されて居る等しい振幅の二成分が集合して居ると見做されるから、互に干涉はしない。その二成分の振幅は $Ee^{-\kappa's}, Ee^{-\kappa''s}$ で與へられ、總光強度は $J = E^2(e^{-2\kappa's} + e^{-2\kappa''s})$ で、光軸自身上では $J_0 = E^2(e^{-2\kappa_p s} + e^{-2\kappa_s s})$ であるから、光軸以外では光強度分布は矢張 F なる函数で表される。従つて自然光に於ても $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ に對して暗帯を見、光軸自身に於ては吸収は最小で軸は明るくなる。

最後に再び注意すべきは、以上述べた様な近似的理論では主振動の橢圓性は無視して居て、各吸収性結晶にある圓偏光を呈する四方向(振り軸)とか自現干渉像の如き興味深い議論は出來ないことである。

参 考:

W. Voigt: Göttinger Nachr. 1884, S. 337; 1902, S. 51; Ann. Physik(4)

Bd. 9 (1902), 367; Bd. 27 (1908), 1005; Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910.

H. Hertz: Ges. Werke Bd. II. Leipzig 1892.

P. Drude: Göttinger Nachr. 1892, S. 399; Wied. Ann. Bd. 32 (1887), 584.

P. Ites: Über die Abhängigkeit der Absorption des Lichtes von der Farbe in kristallisierten Körpern. Dissert. Göttingen, 1901.

F. Pockels: Lehrbuch der Kristallographie, Leipzig 1906.

H. Hauswaldt: Interferenzerscheinungen im polarisierten Lichte. Magdeburg 1904, 1907.

D. Brewster: Phil. Trans. 1819, p. 11.

A. Bertin: Journ. de Phys. Bd. 8 (1879), 217.

§ 24. 導體球に於ける廻折、散亂光

0.1 瓦の金で1キロ瓦の硝子を深赤色に染め得る様に (これを紅玉硝子、ルビーガラスと云ふ)、金屬は塊としてのみならず微粒子として著しい光學的特性を示す。これは膠質的金溶液が呈する色である。かくの如き現象には屈折、吸収、廻折現象が結合して現れる。金屬粒子を無限に良い導體と考へてそれが完全に透明な物質中にあれば純廻折現象となつて第三章に論じた處であるが、實際は光が粒子へ浸入して吸収が重大な役割を演ずるのである。

この廻折問題を解くに當つて任意な境界條件を持つ境界表面に對しては嚴密な解答(マックスウェルの式の積分)を得られないから、廻折を起す物體は球であつて、投射波は平面波で線偏光性を持つとする。その球の半徑を R_0 とし、その中心に座標系 xyz の原點があり、 x 方向にその波動の電氣ベクトルの振動方向があるとする。更にその球を圍む周圍の媒質は透明、

均質、等方であるとして、非磁性物體に對するマックスウェルの式

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}, \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathfrak{E} &= 0, \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0 \end{aligned} \right\} \dots(24.1)$$

から出發して論ずる。時間的に週期的な(振動回數 ω を持つ様な) $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ に對して (24.1) は

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{i\omega\epsilon + 4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} = k_1 \mathfrak{E}, \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = -k_2 \mathfrak{H} \dots(24.2)$$

と書ける。こゝで

$$k_1 = \frac{i\omega\epsilon + 4\pi\sigma}{c}, \quad k_2 = \frac{i\omega}{c}, \dots(24.3)$$

(21.6) で定義された複素波數は(太文字をよして)

$$k = \sqrt{-k_1 k_2} \dots(24.4)$$

となる。考へて居る粒子球外の量に (0) を球内の量に (i) を附して表すことにする。球外空間では $\sigma = 0$ であるから $k_1^{(0)}, k_2^{(0)}$ は純虚數である。

投射波は

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= E e^{i\omega t} = e^{ik^{(0)}_z} e^{i\omega t}, \\ \mathfrak{H}_y &= H e^{i\omega t} = -\frac{i k^{(0)}}{k_2^{(0)}} e^{ik^{(0)}_z} e^{i\omega t} \\ \mathfrak{E}_y &= \mathfrak{E}_z = \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots(24.5)$$

なる形に書け、振幅の法化は電氣ベクトルの振幅の絶對値が $|E| = |e^{ik^{(0)}_z}| = 1$ である様になされる。

境界條件としては $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ の接線成分の連續性のみを云へば良い。 $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ の徑線成分はそれとマックスウェルの式とから自ら連續的になる。従つて境界條件は $r = R_0$ にて

$$\mathfrak{E}_{\text{tang}}^{(0)} = \mathfrak{E}_{\text{tang}}^{(i)}, \quad \mathfrak{H}_{\text{tang}}^{(0)} = \mathfrak{H}_{\text{tang}}^{(i)} \dots(24.6)$$

である。この條件を満足するために、投射波の場 $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ のみならず、球内

に生ぜしめられた場、廻折波の場等を考へねばならない。然もこの條件が如何なる時にも成立つためにはこれ等六ベクトルの時間函數は同じで、同じ時間に関する因子を持つ三波(投射される一次波、球内の波、球外の二次即ち廻折波)を考へるのである。

球面に適當な座標は球面極座標 r, θ, φ であつて、 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ で定義される。この座標を用ひれば場方程式 (24.2) は

$$k_1 \mathfrak{E}_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r \sin \theta \mathfrak{H}_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r \mathfrak{H}_\theta)}{\partial \varphi} \right\}, \dots(24.7_1)$$

$$k_1 \mathfrak{E}_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta \mathfrak{H}_\varphi)}{\partial r} \right\}, \dots(24.7_2)$$

$$k_1 \mathfrak{E}_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r \mathfrak{H}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \theta} \right\}, \dots(24.7_3)$$

$$-k_2 \mathfrak{H}_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(r \sin \theta \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r \mathfrak{E}_\theta)}{\partial \varphi} \right\}, \dots(24.8_1)$$

$$-k_2 \mathfrak{H}_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial r} \right\}, \dots(24.8_2)$$

$$-k_2 \mathfrak{H}_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r \mathfrak{E}_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \theta} \right\}, \dots(24.8_3)$$

境界條件 (24.6) は $r = R_0$ に對して

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_\theta^{(0)} &= \mathfrak{E}_\theta^{(i)}; & \mathfrak{E}_\varphi^{(0)} &= \mathfrak{E}_\varphi^{(i)} \\ \mathfrak{H}_\theta^{(0)} &= \mathfrak{H}_\theta^{(i)}; & \mathfrak{H}_\varphi^{(0)} &= \mathfrak{H}_\varphi^{(i)} \end{aligned} \right\} \dots(24.9)$$

となり、(24.7), (24.8), (24.9) が積分すべき基礎方程式である。この六つの成分を持つ任意の解體系 $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ は

- i) $\mathfrak{E}'_r = \mathfrak{E}_r, \quad \mathfrak{H}'_r = 0$ 電氣的波
- ii) $\mathfrak{E}''_r = 0, \quad \mathfrak{H}''_r = \mathfrak{H}_r$ 磁氣的波

の如き互に線的獨立體系 $\mathfrak{E}', \mathfrak{H}'$ と $\mathfrak{E}'', \mathfrak{H}''$ に分け得る。然もこの電氣的波、

磁氣的波は同じ波動方程式を満足するスカラー・ポテンシャル Π', Π'' から導出出来ることが言へる。

先づ電氣的波に對して $\mathfrak{H}_r' = 0$ であるから、(24.8₁) から $\mathfrak{E}_\rho', \mathfrak{E}_\theta'$ はスカラー U のグラディエントで與へられることが判る。

$$\mathfrak{E}_\rho' = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \mathfrak{E}_\theta' = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad \dots\dots\dots(24.10)$$

次に

$$U = \frac{\partial(r\Pi')}{\partial r} \quad \dots\dots\dots(24.11)$$

とすれば、(24.10) によつて

$$\mathfrak{E}_\rho' = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \varphi}, \quad \mathfrak{E}_\theta' = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \theta} \quad \dots\dots(24.12)$$

と書け、(24.7₂), (24.7₃) から

$$\mathfrak{H}_\rho' = -k_1 \frac{\partial \Pi'}{\partial \theta} = \frac{-k_1}{r} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \theta}, \quad \mathfrak{H}_\theta' = k_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} = \frac{k_1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \varphi} \quad \dots\dots\dots(24.13)$$

を得る。(24.13) を (24.7₁) へ入れれば、

$$\mathfrak{E}_r' = -\frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \varphi^2} \right\} \quad \dots\dots(24.14)$$

を得る。(24.12), (24.13), (24.14) を (24.8₂), (24.8₃) へ入れて簡単な計算により

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi' = 0 \quad \dots\dots\dots(24.15)$$

なる方程式を得るから、(24.14) は

$$\mathfrak{E}_r' = \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r^2} + k^2 r \Pi' \quad \dots\dots\dots(24.16)$$

の如く書き直せる。全く同様にして磁氣的波もスカラー・ポテンシャル Π'

から導出出来、 Π'' は (24.15) と同じ微分方程式を満足する。それ故 (24.7), (24.8) の解は

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_r' + \mathfrak{E}_r'' = \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r^2} + k^2 r \Pi', \quad \dots\dots\dots(24.17_1)$$

$$\mathfrak{E}_\theta = \mathfrak{E}_\theta' + \mathfrak{E}_\theta'' = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \theta} - k_2 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\Pi'')}{\partial \varphi}, \quad \dots\dots(24.17_2)$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{E}_\varphi' + \mathfrak{E}_\varphi'' = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \varphi} + k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi'')}{\partial \theta}, \quad \dots\dots(24.17_3)$$

$$\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_r'' + \mathfrak{H}_r' = k^2 r \Pi'' + \frac{\partial^2(r\Pi'')}{\partial r^2}, \quad \dots\dots\dots(24.18_1)$$

$$\mathfrak{H}_\theta = \mathfrak{H}_\theta'' + \mathfrak{H}_\theta' = k_1 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi'')}{\partial r \partial \theta}, \quad \dots\dots(24.18_2)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = \mathfrak{H}_\varphi'' + \mathfrak{H}_\varphi' = -k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\Pi'')}{\partial r \partial \varphi} \quad \dots\dots(24.18_3)$$

で與へられる。兩ポテンシャル Π', Π'' は極座標に於ける波動方程式 (24.15) 或は

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad \dots\dots\dots(24.19)$$

の解として與へられるものである。而して $\mathfrak{E}_\theta, \mathfrak{E}_\varphi, \mathfrak{H}_\theta, \mathfrak{H}_\varphi$ 成分が $r = R_0$ にて連続的なることは $k_1 r \Pi', k_2 r \Pi'', \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi'), \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi'')$ なる四つの量が連続的なることを意味する。従つて境界条件も Π', Π'' に對する獨立的な条件に分れる。かくして今考へて居る廻折問題は二つの互に獨立な波動方程式限界値問題の解を求めれば解決されることになる。

この波動方程式の解は限界条件によつて定められる係數を持つた級數項の級數で得られる。その各項は特別の積分で、凡て

$$\Pi = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad \dots\dots\dots(24.20)$$

なる形のもの求めれば、 R, Θ, Φ は容易に判る如く普通の微分方程式

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right) rR = 0, \quad \dots\dots\dots(24.21)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0, \dots (24.22_1)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \beta\Phi = 0 \dots (24.22_2)$$

を満足す可きである。こゝで α, β は積分常數である。これ等の微分方程式の一般的解は、(24.22₂) に対しては $a\cos(\sqrt{\beta}\varphi) + b\sin(\sqrt{\beta}\varphi)$ なる形で、一義的なるためには m を整数として

$$\beta = m^2 \dots (24.23)$$

でなければならず、(24.22₂) の一義的解は

$$\Phi = a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi) \dots (24.24)$$

となる。次に (24.22₁) は有名な球面函数の方程式で、一義的解を持つためには l を整数として

$$\alpha = l(l+1) \quad (l > |m|) \dots (24.25)$$

でなければならぬ。(24.23), (24.25) を用ひて $\xi = \cos\theta$ として (24.22₁) 式は

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ (1-\xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right\} \Theta = 0$$

となり、その解はルジャンドル (Legendre) の陪函数

$$\Theta = P_l^{(m)}(\xi) = P_l^{(m)}(\cos\theta) \dots (24.26)$$

で與へられる。これは $|m| > l$ に対して零になるから、 $2l+1$ だけ存在する。即ち

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

最後に (24.21) を積分するために

$$kr = \rho, \quad R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} P(\rho) \dots (24.27)$$

と置けば、(24.21) は P に対するベッセル (Bessel) の微分方程式

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \left\{ 1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2} \right\} P = 0$$

となつて、その解は $\left(l + \frac{1}{2}\right)$ 次の一般的圓壙函数であつて、

$P(\rho) = Z_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ と書けるから、(24.27) により

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+\frac{1}{2}}(kr) \dots (24.28)$$

なる解を得る。この圓壙函数は常數係數を持つベッセル函数 $J_{l+\frac{1}{2}}$ とノイマン函数 $N_{l+\frac{1}{2}}$ との和と擇ばれて、

$$\psi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho), \quad \chi_l(\rho) = -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(\rho) \dots (24.29)$$

を導入すれば、(24.28) なる解は

$$rR = c_l \psi_l(kr) + d_l \chi_l(kr) \dots (24.30)$$

と書ける。特に $c_l = 1, d_l = i$ ならば

$$rR = \zeta_l(kr) = \psi_l(kr) + i\chi_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \dots (24.31)$$

で與へられる。 $H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}$ は所謂二つのハンケル (Hankel) の函数の一つであつて、ハンケルの函数は複素 ρ 平面の無限遠にて零になつて、こゝの $H^{(2)}$ は ρ の虚數部の負半面では零で無視される函数であるから廻折波を表すに役立つ。又 $\psi_l(\rho)$ は原點も含んで ρ 平面の有限の範圍で規則正しく、 $\chi_l(\rho)$ は $\rho = 0$ に異常點を持つから、 ψ_l は粒子球内の波に用ひられ、 χ_l は用ひられない。

(24.24), (24.26), (24.30) の積を取れば或特別な (24.18) 式の解 $\Pi_l^{(m)}$ を表すから、波動方程式の解として

$$\begin{aligned} r\Pi &= r \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Pi_l^{(m)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{c_l \psi_l(kr) + d_l \chi_l(kr)\} \{P_l^{(m)}(\cos\theta)\} \end{aligned}$$

$$\times \{a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)\} \dots \dots \dots (24.32)$$

を得る。\$a_m, b_m, c_l, d_l\$ は任意な常数であるが、これを限界条件から定めるのである。

投射波の両ポテンシャル \$\Pi', \Pi''\$ も亦 (24.32) の形に展開さる可きで、(24.5) を極座標で書けば

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \sin \theta \cos \varphi, & \mathcal{H}_r &= -\frac{ik^{(0)}}{k_2^{(0)}} e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \sin \theta \sin \varphi, \\ \mathcal{E}_\theta &= e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \cos \theta \cos \varphi, & \mathcal{H}_\theta &= -\frac{ik^{(0)}}{k_2^{(0)}} e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \cos \theta \sin \varphi, \dots \\ \mathcal{E}_\varphi &= -e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, & \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{ik^{(0)}}{k_2^{(0)}} e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, \end{aligned} \right\} (24.33)$$

これに属する \$\Pi'\$ を定めるには (24.17), (24.18) 式中の一つを取れば充分で、例へば (24.17) より

$$e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \sin \theta \cos \varphi = \frac{\partial^2 r \Pi'}{\partial r^2} + k^{(0)2} r \Pi', \dots \dots \dots (24.34)$$

然るに左邊の第一因子は展開されて

$$e^{ik^{(0)}r \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\psi_l(k^{(0)}r)}{k^{(0)}r} P_l(\cos \theta)$$

なる表現を取り、

$$e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \sin \theta = -\frac{1}{ik^{(0)}r} \frac{\partial}{\partial \theta} (e^{ik^{(0)}r \cos \theta}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = -P_l^{(1)}(\cos \theta), \quad P_0^{(1)}(\cos \theta) = 0$$

であるから、上記左邊は

$$e^{ik^{(0)}r \cos \theta} \sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{(k^{(0)}r)^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} (2l+1) \psi_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \dots \dots \dots (24.35)$$

となる。而して

$$r \Pi' = \frac{1}{k^{(0)2}} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \psi_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \dots \dots \dots (24.36)$$

と置いて (24.34) 式へ (24.35), (24.36) を入れ、その係数比較をすれば

$$\alpha_l \left\{ k^{(0)2} \psi_l(k^{(0)}r) + \frac{\partial^2 \psi_l(k^{(0)}r)}{\partial r^2} \right\} = i^{l-1} (2l+1) \frac{\psi_l(k^{(0)}r)}{r^2}$$

なる関係を得る。處で (24.30) にて \$c_l = 1, d_l = 0\$ ならば \$rR = \psi_l(k^{(0)}r)\$ は (24.21) の解で、\$\alpha = l(l+1)\$ ならば

$$\frac{d^2 \psi_l}{dr^2} + \left(k^{(0)2} - \frac{\alpha}{r^2} \right) \psi_l = 0$$

である。従つて上記係数 \$\alpha_l\$ はこれ等兩式を比較して

$$\alpha_l = i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \dots \dots \dots (24.37)$$

で與へられることが判る。磁氣的ポテンシャル \$\Pi''\$ に対しても同様に計算され、結局投射波の \$\Pi', \Pi''\$ は

$$\left. \begin{aligned} r \Pi' &= \frac{1}{k^{(0)2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \psi_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi, \\ r \Pi'' &= -\frac{1}{k^{(0)2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{k^{(0)}(2l+1)}{k_2^{(0)}l(l+1)} \psi_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (24.38)$$

なる表現を取る。(24.38) は (24.32) と同類形であるから限界条件から (24.32) 中の未定の係数を容易に定め得る。その限界条件は

$$\frac{\partial}{\partial r} \{r(\Pi'^{(e)} + \Pi''^{(b)})\}_{r=R_0} = \frac{\partial}{\partial r} \{r \Pi'^{(i)}\}_{r=R_0} \dots \dots \dots (24.39_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \{r(\Pi''^{(e)} + \Pi'^{(b)})\}_{r=R_0} = \frac{\partial}{\partial r} \{r \Pi''^{(i)}\}_{r=R_0} \dots \dots \dots (24.39_2)$$

$$k_1^{(0)} \{r(\Pi'^{(e)} + \Pi''^{(b)})\}_{r=R_0} = k_1^{(0)} \{r \Pi'^{(i)}\}_{r=R_0} \dots \dots \dots (24.39_3)$$

$$k_2^{(0)} \{r(\Pi''^{(e)} + \Pi'^{(b)})\}_{r=R_0} = k_2^{(0)} \{r \Pi''^{(i)}\}_{r=R_0} \dots \dots \dots (24.39_4)$$

で表される。(e) は投射波、(b) は廻折波、(i) は粒子球内の波に対する指数である。これ等が満足されるためには而して投射波が (24.38) で代表されるならば、\$\Pi^{(e)}, \Pi^{(b)}\$ を與へる (24.32) にて \$m = 1\$ の項だけが起る

可きで、更に Π'' に対しては $a_1 = 0$, Π' に対しては $b_1 = 0$ でなければ
ならない。

既に述べた様に $\Pi^{(0)}$ の表現には χ_l は用ひられず、 ψ_l だけが入つて來、
 $\Pi^{(0)}$ に対してはハンケル函数 $H^{(2)}$ で表される $\zeta_l = \psi_l + i\chi_l$ が取れる可
きで、 $H^{(2)}(\rho)$ は大なる ρ に対して $\frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-i\rho}$, 従つて $\zeta_l(\rho)$ は $e^{-i\rho}$, 更
に $R = \frac{1}{r} \zeta$ は $\frac{1}{r} e^{-ik^{(0)}r}$ の形を取り球面波の表現を取ることを意味し
て居る。それ故

$$r \Pi^{(a)} = \frac{1}{k^{(0)2}} \sum_{l=1}^{\infty} A_l' \psi_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi, \dots \dots \dots (24 \cdot 40_1)$$

$$r \Pi^{(b)} = -\frac{i}{k^{(0)}k_2^{(0)}} \sum_{l=1}^{\infty} A_l'' \psi_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi, \dots \dots (24 \cdot 40_2)$$

$$r \Pi^{(c)} = \frac{1}{k^{(0)2}} \sum_{l=1}^{\infty} B_l' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi, \dots \dots \dots (24 \cdot 40_3)$$

$$r \Pi^{(d)} = \frac{-i}{k^{(0)}k_2^{(0)}} \sum_{l=1}^{\infty} B_l'' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi \dots \dots (24 \cdot 40_4)$$

なる表現を得る。(24·38), (24·40) を限界条件 (24·39) に入れれば係数
 A_l', A_l'', B_l', B_l'' 間の四つの線的方程式が成立ち、今廻折波を主に問題に
するから、 B_l', B_l'' を計算すれば、 $\frac{d\psi}{dr} = \psi', \frac{d\zeta}{dr} = \zeta'$ として

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \\ &\times \frac{k_2^{(0)}k^{(0)}\psi_l'(k^{(0)}R_0)\psi_l(k^{(0)}R_0) - k_2^{(0)}k^{(0)}\psi_l(k^{(0)}R_0)\psi_l'(k^{(0)}R_0)}{k_2^{(0)}k^{(0)}\zeta_l'(k^{(0)}R_0)\psi_l(k^{(0)}R_0) - k_2^{(0)}k^{(0)}\psi_l(k^{(0)}R_0)\zeta_l'(k^{(0)}R_0)}, \\ B_l'' &= -i^{l+1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \\ &\times \frac{k_2^{(0)}k^{(0)}\psi_l(k^{(0)}R_0)\psi_l'(k^{(0)}R_0) - k_2^{(0)}k^{(0)}\psi_l'(k^{(0)}R_0)\psi_l(k^{(0)}R_0)}{k_2^{(0)}k^{(0)}\zeta_l(k^{(0)}R_0)\psi_l'(k^{(0)}R_0) - k_2^{(0)}k^{(0)}\psi_l(k^{(0)}R_0)\zeta_l'(k^{(0)}R_0)}, \end{aligned} \right\} \dots (24 \cdot 41)$$

を得る。これで波動方程式 (24·19) の限界値問題が解けたことになる。

(24·40₃), (24·40₄) を (24·17) に入れれば廻折波の場の強さが得られ、

(b) を除いてそれ等は

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{1}{k^{(0)2}} \frac{\cos \varphi}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) B_l' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \\ \mathcal{E}_\theta &= -\frac{1}{k^{(0)}} \frac{\cos \varphi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_l' \zeta_l'(k^{(0)}r) P_l^{(1)' }(\cos \theta) + i B_l'' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\} \\ \mathcal{E}_\varphi &= -\frac{1}{k^{(0)}} \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_l' \zeta_l'(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right. \\ &\quad \left. + i B_l'' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)' }(\cos \theta) \sin \theta \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24 \cdot 42)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_r &= \frac{i}{(k^{(0)}k_2^{(0)})^2} \frac{\sin \varphi}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) B_l'' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta), \\ \mathcal{H}_\theta &= \frac{1}{k_2^{(0)}} \frac{\sin \varphi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_l' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right. \\ &\quad \left. - i B_l'' \zeta_l'(k^{(0)}r) P_l^{(1)' }(\cos \theta) \sin \theta \right\} \\ \mathcal{H}_\varphi &= \frac{1}{k_2^{(0)}} \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ B_l' \zeta_l(k^{(0)}r) P_l^{(1)' }(\cos \theta) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. - i B_l'' \zeta_l'(k^{(0)}r) P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24 \cdot 43)$$

となる。最初に述べた假説により $\sigma^{(0)} = 0, \sigma^{(1)} = \sigma, \mu^{(0)} = \mu^{(1)} = 1$ であ
るから、(24·3) よりこゝでは

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(1)} &= \frac{i\mathcal{E}^{(1)}\omega + 4\pi\sigma}{c}, \quad k_2^{(1)} = \frac{i\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} i, \quad k^{(1)} = \sqrt{-k_1^{(1)}k_2^{(1)}}, \\ k_1^{(0)} &= \frac{i\mathcal{E}^{(0)}\omega}{c}, \quad k_2^{(0)} = \frac{i\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} i, \quad k^{(0)} = \sqrt{-k_1^{(0)}k_2^{(0)}} = \sqrt{\mathcal{E}^{(0)} \frac{2\pi}{\lambda_0}} \\ n &= \frac{k_1^{(0)}}{k_1^{(1)}} = \frac{\mathcal{E}^{(0)}}{\mathcal{E}^{(1)}} - \frac{2\pi i\sigma}{\mathcal{E}^{(0)}\omega} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24 \cdot 44)$$

なる常數値を用ひて居る。

粒子球の傳導度或は電媒常數が非常に大で、 $|k_2^{(0)}|, |k_1^{(0)}|, k^{(0)}$ に比して $|k_1^{(0)}|, k^{(0)}$ が非常に大になれば、(24.41) より

$$B_l' = i^{l+1} \frac{(2l+1) \psi_l'(k^{(0)} R_0)}{l(l+1) \zeta_l'(k^{(0)} R_0)}, \quad B_l'' = -i^{l+1} \frac{(2l+1) \psi_l(k^{(0)} R_0)}{l(l+1) \zeta_l(k^{(0)} R_0)}$$

.....(24.45)

なる簡単な表現が得られる。

この (24.42), (24.43) なる廻折波の \mathcal{E}, \mathcal{H} を與へる表現に據つて種々面白い物理的議論が出来るが、こゝではその詳述を略し、二、三の點に就いて注意しやう。普通粒子による廻折現象を観察するのは一個の粒子に就いてはなく、多くの粒子が視野に現れて来る。従つてこれ等の公式が應用されるには、それ等の粒子が互に相當隔つて居て (小なる濃度の場合) 相互作用を考へる必要がない場合に限る。 $\mathcal{E}_r, \mathcal{H}_r$ は r が増すと $\frac{1}{r^2}$ で減少するに反し、 $\mathcal{E}_\theta, \mathcal{H}_\theta$ の θ, φ 成分は $\frac{1}{r}$ で減少する。従つて粒子より隔つた距離にては波動は横波で $\mathcal{E}_\theta, \mathcal{E}_\varphi, \mathcal{H}_\theta, \mathcal{H}_\varphi$ を考へれば充分である。又球面函数の性質上

$$\mathcal{E}_\varphi \mathcal{H}_\varphi + \mathcal{E}_\theta \mathcal{H}_\theta = 0$$

即ち廻折波の電氣的、磁氣的ベクトルは互に直角であることもこれ等の式から判る。總廻折波は異つた次數の球面函数に相當した部分波 (その強さは B_l', B_l'' で定められる) の重合したものと見做され、これ等の係數 B_l', B_l'' は粒子物質の性質のみならず、その球半径 R_0 と投射波の波長 λ_0 とに關係する。

この異つた部分振動の混合割合即ち B_l' と B_l'' との大きさの比が R_0 と λ_0 との比及び物質常數に如何に關係するかを檢べるに、

$$\alpha = k^{(0)} R_0 = \frac{2\pi R_0}{\lambda^{(0)}} \dots\dots\dots(24.46)$$

が1に比して非常に大であるか、非常に小であるかの兩極限の場合は ψ_l, ζ_l の漸近的表現を用ひて B_l', B_l'' を表して論ぜられる。i) $\alpha \gg 1$ の場合にはキルヒホッフの廻折理論の極限の場合或は幾何光學の成立範圍にての場合を取扱ふのである。又この場合の理論は虹の理論 (凡ての精密な點まで含めて) を完全に議論出来る筈である。ii) $\alpha \ll 1$ の場合は膠質溶液中に顯微鏡的或は次微粒子が存在する場合に應用出来る。 ψ, ζ を冪級數に展開して第一項のみを取り得る程度ならば、

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+2} \frac{\alpha^{2l+1}}{l^2 [1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2} \frac{n^2-1}{n^2 + \frac{l+1}{l}} \\ B_l'' &= i^l \frac{\alpha^{2l+3}}{(l+1)(2l+1)(2l+3)l [1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2} (n^2-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots(24.47)$$

と書け、 $\sigma = \infty$ の極限では

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+2} \frac{\alpha^{2l+1}}{l^2 [1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2} \\ B_l'' &= i^{l+2} \frac{\alpha^{2l+1}}{l(l+1) [1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24.48)$$

となる。有限な σ と $\epsilon^{(0)}$ の場合には (24.47) に見る如く B_{l+1}' と B_l'' とは α の同じ冪に比例して大體同じ大きさであつて、 B_l' が他の部分振動に比して特に著しい。この第一電氣的部分振動のみに限るとすれば、それは雙極輻射に對應するので、その強さは

$$B_1' = -i\alpha^3 \frac{n^2-1}{n^2+2} = -i \left(\frac{2\pi R_0}{\lambda^{(0)}} \right)^3 \frac{n^2-1}{n^2+2} \dots(24.49)$$

で與へられる (位相も含んで)。然るに $\sigma = \infty, \epsilon^{(0)} = \infty$ の時には電氣的、磁氣的部分振動共に同じ位の大きさになつて、 $l=1$ に對しては

$$\left. \begin{aligned} B_1' &= -i\alpha^3 = -i \left(\frac{2\pi R_0}{\lambda^{(0)}} \right)^3 \\ B_1'' &= -\frac{i}{2} \alpha^3 = -\frac{i}{2} \left(\frac{2\pi R_0}{\lambda^{(0)}} \right)^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24.50)$$

となる。これ等兩方の場合に振幅は粒子球外の空間に於ける波長 $\lambda^{(0)}$ の三乗に逆比例する。 $l=1$ にて

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad \frac{P_1^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta} = 1, \quad P_1^{(1)'(\cos\theta)\sin\theta} = -\cos\theta,$$

ζ_1 の漸近的表現は

$$\zeta_1(x) = -e^{-ix}, \quad \zeta_1'(x) = ie^{-ix}$$

であるから、(24.42), (24.43) より廻折波の電氣的部分振動に對し

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\theta &= \frac{i}{k^{(0)}} \cos\varphi \cos\theta B_1' \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^{(0)2}} R_0^3 \cos\varphi \cos\theta \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= -\frac{i}{k^{(0)}} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} B_1' \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^{(0)2}} R_0^3 \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r}, \\ \mathcal{H}_\theta &= -\frac{1}{k_2^{(0)}} \sin\varphi B_1' \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^{(0)2}} R_0^3 \sqrt{\epsilon^{(0)}} \sin\varphi \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r}, \\ \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{1}{k_2^{(0)}} \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\sin\theta} B_1' \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^{(0)2}} R_0^3 \sqrt{\epsilon^{(0)}} \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\sin\theta} \frac{e^{-ik^{(0)}r}}{r} \end{aligned} \quad \dots\dots(24.51)$$

なる表現が得られる。この公式は後に述べる x 軸に平行に振動する電氣雙極子の輻射に對するものと同一である。この (24.51) なる散亂光を生ぜしめる二重極の能率 p_0 は

$$p_0 = R^3 \epsilon^{(0)} \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|^2 \quad \dots\dots(24.52)$$

で與へられる。普通このレーレー (Rayleigh) 輻射と稱せられる散亂光はその振幅が $\frac{1}{\lambda^2}$ に比例し、強さが $\frac{1}{\lambda^4}$ に比例する特性を持つて居る。同様に磁氣二重極よりの磁氣的部分振動の第一項も出せる。高次の部分振動は四重極子、一般に多重極子が振動して起る場と見做される。

次に一般の場合に戻つて散亂光の強さ及びその偏光性に就いて今少し考

へて見やう。その光の強さを考へるに當つて、強さの比だけが問題になるならば、電氣ベクトルの實數振幅の二乗を以てその尺度と出來、それから偏光性も論ぜられる。

$$\begin{aligned} J_\perp &= \frac{\lambda^{(0)2}}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \left\{ B_l' \frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta} - B_l'' P_l^{(1)}(\cos\theta) \sin\theta \right\} \right|^2 \\ J_\parallel &= \frac{\lambda^{(0)2}}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \left\{ B_l' P_l^{(1)'(\cos\theta)\sin\theta} - B_l'' P_l^{(1)}(\cos\theta) \frac{1}{\sin\theta} \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots(24.53)$$

と置けば、

$$|\mathcal{E}_\theta|^2 = \cos^2\varphi J_\parallel, \quad |\mathcal{E}_\varphi|^2 = \sin^2\varphi J_\perp \quad \dots\dots(24.54)$$

と書ける。 φ は投射光の振動平面と視平面即ち傳播方向、觀測方向を含む平面との間の角で、視平面がその一次振動平面に平行か、垂直ならば散亂光は線偏光性を持つことを (24.54) は示す。他の θ, φ 方向にては散亂光は楕圓偏光である (一般に $\mathcal{E}_\theta/\mathcal{E}_\varphi$ は複素數であるから)。然し (24.51) で與へられるレーレー散亂光に對しては如何なる觀察方向にても $\mathcal{E}_\theta/\mathcal{E}_\varphi$ は實數で常に線偏光である。

自然光が散亂される場合には、互に直角なコヒーレントでない線的波が二つ投射されると考へ得、散亂光の強さは振幅でなしにその強さの和を取れば、今迄計算して得た結果が用ひられる。この第二の波に對しては (24.54) で $\cos\varphi, \sin\varphi$ を交換したものが存在し、それと (24.54) の和を取れば J_\parallel, J_\perp が直ちに視平面に平行、直角の散亂光の強さを表すことになる。一般にこの兩者は零でなく、部分偏光性の光になる。偏光度 P を

$$P = \left| \frac{J_\perp - J_\parallel}{J_\perp + J_\parallel} \right| \quad \dots\dots(24.55)$$

で定義すれば、偏光されない部分は

$$(J_{\perp} + J_{\parallel})(1 - P) = \begin{cases} 2J_{\parallel} & (J_{\parallel} < J_{\perp}) \\ 2J_{\perp} & (J_{\parallel} > J_{\perp}) \end{cases} \dots\dots\dots(24.56)$$

と書ける。總光強度 $J_{\perp} + J_{\parallel}$ 及びこの偏光されない部分 ($2J_{\perp}$ 又は $2J_{\parallel}$) が観測角 θ の函数として種々なる物質に對し、種々なる球の半徑に對して單色光にて計算出来る。その詳説は略すが、非常に小なる粒子球の場合には廻折光はその中心を通つて、投射波の傳播方向に直角な平面に對して殆んど對稱的な總強度分布を示し、(投射光の方向と反對の方向とで極大) 球の半徑が大になるに従つてその對稱性が次第に破れ、投射光の方向即ち前方 ($\theta = 180^\circ$) の強さが後方 ($\theta = 0^\circ$) のより大である (ミ- (Mie) 効果と云ふ)。遂には $\theta = 180^\circ$ 近所にのみ現れる。然し λ に比して大なる球に對しては投射波は再び完全に反射され、幾何光學の成立極限の場合になる。一般には θ の種々特別な處に強度極大が現れる。

偏光性は完全反射球、吸収性球に據つて異つて来る。完全導體又は絶縁體では非常に小なる球の場合に $\theta = 120^\circ$ (トムソンの角と云ふ) にて偏光度極大値を持ち、球の半徑が大になるに従つて θ が減ずる方向へその極大値を與へる處が移る。電媒的及び吸収する球の場合には $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda^{(0)}}$ が小なる時偏光性は xy 平面に對して全く對稱的で、 $\theta = 90^\circ$ で完全偏光なる極大値を持つ。(24.53) にて第一項のみを取り P を定義する (24.55) へ導入すれば、

$$P(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \dots\dots\dots(24.57)$$

なるレーレーの公式が得られる。更に球の半徑が大になると、偏光度極大、極小が不規則に現れて来る。特に $\theta = 90^\circ$ に於ける偏光性に着眼すれば、 $\alpha = 1$ までは殆んど偏光のみが存在し、視平面に垂直に振動する。 α が大になると次第にその特性を失ひ遂には不規則になる。

今迄は波長が一定であると假定して論じたが、種々なる振動数の波からなる投射光の場合には、この廻折現象を説明するに波長の關する量を吟味して色現象を考へる必要がある。 B_i', B_i'' には α にて波長と關係し、又複素屈折率 n にても λ と關係するが、限られた ω の範圍では σ の項が無視される様な餘り良くない導體球に對して n は ω に無關係と見られ、完全導體を持つ球には n は入つて來ない。これ等の場合には従つて共通因子 $\frac{\lambda^{(0)2}}{4\pi^2 r^2}$ を無視して光強度は $r/\lambda^{(0)}$ にのみ關係する。偏光性が如何に波長に據つて異なるかと云ふに、非常に小なる球にては電媒的球でも吸収性球でも波長に無關係に $\theta = 90^\circ$ の處に完全偏光の極大値を持つことが判る。球半徑が大になると電媒的球にて $\alpha = 1$ に至るまで、極大偏光の角 θ は波長と共に増す。この現象を偏光性の分散と稱する。 $\alpha > 1$ になるとこの關係は著しくなくなつて不規則になる。白光が投射されて最も強く射出される色の偏光極大は、粒子球の半徑が増すと共に單色光に對するとは反對の方向へ移つて行くと言ふ現象は、この偏光性の分散現象による。又多色性現象も亦偏光性の分散現象によるのであつて、定つた視方向にて檢光子を通して観測する時、視半徑の周りに檢光子を廻轉すると種々なる色が現れるので、それは白光が投射された時何れか與へられた方向で最も強く射出される光の色は J_{\perp}, J_{\parallel} に對して一般に異なるからである。

散亂光の總輻射を算出するにはそのポインティングベクトルを定めて凡ての方向に亙つて積分せねばならない。それは B_i', B_i'' だけで表されるが、複雑な計算を要する。レーレー散亂の場合には既に述べた様に總散亂輻射は $\frac{1}{\lambda^{(0)4}}$ に比例する。 $l = 2, 3, \dots$ 等の項中の粒子球の半徑、物質常數を考慮して總散亂輻射が如何に波長に關係するかは更に複雑であつて、例へば金の場合に非常に小なる球に對して約 $\lambda = 550$ の處に極大値を持つ様な撰擇現象を呈する。これは一種の共鳴現象と見做され、外部よりの光

の場でその球が一つの電気振動をなす様に刺戟され、この定つた振動数と制振度とが得られる様になるのである。

これ等の理論を実験的に証明するに多くの粒子によつて散亂された總輻射を観察し、又限外顯微鏡によつて各粒子による散亂光を観測する方法を取る。然し微粒子の大きさを單獨に測定する方法がないから、充分な証明は出来ない。寧ろ大きい粒子にて理論の正しいことを認めて、散亂光の観測によつて微粒子の大きさの測定をなすのである。然も球と云ふ假定は實際の場合に正當でない場合があるから、例へば楕圓等に就いての計算もされて居る。更に光が粒子に及ぼす力學的力である光の壓力、又は強い光に輝されて粒子が遊歴する複雑な瓦斯運動的の現象も考へられるがこゝではこれ等の問題に立入らない。

参 考:

- G. Mie: Ann. d. Physik (4) Bd. 25 (1908), 377.
 P. Debye: Ann. d. Physik (4) Bd. 30 (1909), 57.
 K. Schwarzschild: Münch. Akad., Math.-phys. Kl. Bd. 31 (1901), 293.
 E. Mascart: Traité d'Optique Bd. 1 (1889), 398; Bd. 3 (1893), 434.
 W. Möbius: Ann. d. Phys. (4) Bd. 33 (1909), 79.
 J. Rosenberg: Ann. d. Phys. (4) Bd. 68 (1922), 414.
 R. Gans u. Happel: Ann. d. Phys. Bd. 29 (1909), 277.
 R. Gans: Ann. d. Phys. Bd. 76 (1925), 29; Bd. 62 (1920), 351.
 H. Senftleben u. E. Benedict: Ann. d. Phys. Bd. 60 (1919), 297.
 H. Blumer: ZS. f. Phys. Bd. 32 (1925), 115; Bd. 38 (1926), 920; Bd. 39 (1926), 195.
 M. A. Schirrmann: Ann. d. Phys. Bd. 59 (1919), 493.
 J. Pernter u. F. Exner: Meteorol. Optik. Leipzig 1910.
 F. Möglich: Ann. d. Phys. Bd. 83 (1927), 609.
 Cl. Schaefer u. K. Wilmsen: ZS. f. Phys. Bd. 24 (1924), 345.

第五章 分子光學

§ 25. 分子光學の物理的根概念

前四章にてマックスウェルの式を基礎にした光學の根概念は導體、不導體内の巨視的電磁場の法則を求める處にあつたが、物質を構成する原子、分子の概念を導入しない以上光學現象凡てを説明することは出来ない。事實光が透明體內にても散亂を起し、等方性物質でも電場或は磁場にて光學的な二重屈折を呈することは光の場と原子、分子との相互作用が重大な役割を演じて居ることを示し、更に光學現象が光の波長に據ることは既に屢々注意した如く波長と分子の直徑との大小が問題になることを示して、その比が有限であるために普通の光にて旋光性現象、X線にて干涉散亂が起るのである。又光の分散現象も亦この有限性に據るのであつて、分散現象は光の放射、吸収と密接な關係にあるから、原子内の力學即ち量子力學を知らない以上満足な知識は得られない。これは量子光學篇で論ずる範圍である。然らば古典光學にて論じ得る範圍にてこれ等物質構造粒子を考慮に入れて如何なる結果を得るか。(その概要を第五章、第六章にて説明する)。これ等は寧ろ量子光學への過程に對する緒言とも云へるものである。

マックスウェルの式 (1.1), (1.2) から出發するに際して先づなすべきは物質の影響を表す項を分離することである。物質が電場、磁場に置かれれば分極、透磁作用を受けるから、それ等の能率を表す電氣的能率 \mathfrak{E} , 磁氣的能率 \mathfrak{H} を導入せねばならない。眞空中では $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{J} = 0$ と考へられるが、實際は携帶電流が存在するから $\mathfrak{J} = 0$ とは出来ない。電氣的空間密度 ρ で荷電された導體が v なる速度で運動すれば電流密度 ρv に

相當したる強さの磁場を生ずる。真空に對するマックスウェルの式は

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \rho \mathfrak{v} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{J}, \text{ rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \\ \text{div } \mathfrak{E} &= 4\pi \rho, \text{ div } \mathfrak{B} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25.1)$$

である。物質によつて生ずる變形はその物質粒子内の電荷分布、電流分布に據るのである。導體内の自由電子に據る電導電流はその携帶電流の平均値を表すが、これは光學には重大な役割を演じないから無視される(金屬の原子理論は電氣傳導度に関して量子統計理論として面白く展開して居る)。真空に對する部分を左邊に、他を右邊に置けば、不導體に對するマックスウェルの式は

$$\text{rot } \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + e \text{rot } \mathfrak{M} \right), \dots\dots\dots (25.2_1)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \dots\dots\dots (25.2_2)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = -4\pi \text{div } \mathfrak{P}, \dots\dots\dots (25.3_1)$$

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0, \dots\dots\dots (25.3_2)$$

こゝで

$$4\pi \mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \quad 4\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H} \dots\dots\dots (25.4)$$

なるベクトルが導入されて居る。(25.2), (25.3) にて右邊が電流と密度とを意味するとすれば、真空の式(25.1)と一致する。そこで

$$\rho = -\text{div } \mathfrak{P}, \dots\dots\dots (25.5_1)$$

$$\mathfrak{J} = \text{crot } \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \dots\dots\dots (25.5_2)$$

なる表現が上記の見解に適ふことを證明せねばならない。そのために(25.1)を解いてその ρ, \mathfrak{J} に(25.5)を代入してその結果の物理的意味付けをすれば良い。

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A} \dots\dots\dots (25.6)$$

で與へられるベクトルポテンシャル \mathfrak{A} を考へる。(25.6)は(25.1)の第二式を満足する。(25.6)を(25.2₂)に代入すれば、

$$\text{rot} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \right) = 0, \dots\dots\dots (25.7)$$

従つて

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\text{grad } \Phi \dots\dots\dots (25.8)$$

で與へられるスカラーポテンシャル Φ の存在が判る。この \mathfrak{A} と Φ が(25.1)の第一式、第三式を満足するためには

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{J}, \dots\dots\dots (25.9_1)$$

$$-\text{div grad } \Phi - \frac{1}{c} \text{div } \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 4\pi \rho \dots\dots\dots (25.9_2)$$

が成立つ可く、ベクトル公式に據つて(25.9)は

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{A} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{J}, \dots (25.10_1)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{A} \right) = -4\pi \rho \dots (25.10_2)$$

と書け、 Φ と \mathfrak{A} との間に

$$\text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (25.11)$$

なる関係があれば、 \mathfrak{A}, Φ に對する波動方程式は

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{J}, \dots\dots\dots (25.12_1)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \dots\dots\dots (25.12_2)$$

で與へられる。然るにこの附加條件(25.11)は \mathfrak{J} と ρ とが連続性式

(1.9) を満足するならば必要なものであることは、(25.5) をその連続性式

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(25.13)$$

に入れれば、この式が恒等的に満足されることから判る。

(25.12) を解くに當つて先づ $\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ なる同次方程式を考へ、球面對稱的解 $\Phi(r)$ を求めて見る。 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であつて、 $\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi)$ であるから、その同次方程式は $\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Phi r) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi r) = 0$ となり、これは Φr に對する振動絃の方程式で、最も一般的解は $\Phi r = e\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$ となる。 $e(t)$ は一つの任意な函数である。 ± 兩解があるが、一方のみが物理的意味の深い現象に相當して、

$$\Phi = \frac{e\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \dots\dots\dots(25.14)$$

は光速度 c で傳播することを考へに入れた時間的に變化する點形の電荷 $e(t)$ の靜電ポテンシャル即ち遲滯ポテンシャルである。この遲滯點ポテンシャルに據つて (25.12) なる非同次方程式の一般的解即ち空間密度の遲滯ポテンシャルが得られる。パラメーターとしての點 (x', y', z') ($d\tau' = dx' dy' dz'$) と受働點 (x, y, z) との距離を $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ として、空間、時間的に變化する密度 ρ は

$$\Phi = \int \frac{\rho(x', y', z'; t - \frac{r}{c})}{r} d\tau' \dots\dots\dots(25.15)$$

なるポテンシャルを起すことが判る。これが (25.12) の一つの解である。これを證明するには受働點の周圍に a なる半徑の球を考へて、上記積分をその球の内部と外部に分けて取る。その外部積分は光の同次方程式を満足し、内部積分は r の異常點を含む故に x, y, z, t による微分を積分外へ出せないが、半徑 a を小にして球内の凡ての點にて $\rho(x', y', z'; t - \frac{r}{c})$ が

$\rho(x, y, z; t)$ と殆んど異らなると見做されれば、その $\Delta\Phi_i$ は一つの均等に荷電された球の靜電ポテンシャルと等しく $\Delta\Phi_i = -4\pi\rho(x, y, z; t)$ となる。而して $\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}$ は極限で零になることが判り、近似的に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(x, y, z; t) \int \frac{d\tau'}{r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \cdot 4\pi \int_0^a r dr = 2\pi a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

となり、 $a = 0$ にて零になる。従つて (25.15) にて與へられた Φ は所要のポテンシャルなることが判る。 \mathfrak{A} に就いても同様な式が得られ、 ρ の代りに \mathfrak{S}/c が入れれば良い。これ等の ρ, \mathfrak{S} に (25.5₁), (25.5₂) を代入すれば、

$$\Phi = - \int \frac{1}{r} [\operatorname{div}' \mathfrak{P}] d\tau', \dots\dots\dots(25.16_1)$$

$$\mathfrak{A} = \int \frac{1}{r} \left[\operatorname{rot}' \mathfrak{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t'} \right] d\tau' \dots\dots\dots(25.16_2)$$

を得る。 [] は t の代りに $t - \frac{r}{c}$ を用ふる記號、 $\operatorname{div}', \operatorname{rot}'$ は ' の付いた座標にて演算する記號を意味する。一般に \mathfrak{Q} なるベクトルに對して $\operatorname{div}'[\mathfrak{Q}] = [\operatorname{div}' \mathfrak{Q}] - \frac{1}{rc} r \left[\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} \right]$, $\operatorname{rot}'[\mathfrak{Q}] = [\operatorname{rot}' \mathfrak{Q}] + \frac{1}{rc} r \times \left[\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} \right]$ であるから、(25.16) の兩表現は

$$\Phi = - \int \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{div}'[\mathfrak{P}] - \frac{1}{r^2 c} r \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right] \right\} d\tau' \dots\dots\dots(25.17_1)$$

$$\mathfrak{A} = \int \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{rot}'[\mathfrak{M}] - \frac{1}{r^2 c} r \times \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \right] + \frac{1}{rc} \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right] \right\} d\tau' \dots\dots\dots(25.17_2)$$

と書ける。然るにスカラー φ とベクトル \mathfrak{Q} に對して $\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{Q}) = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{Q} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathfrak{Q}$, $\operatorname{rot}(\varphi \mathfrak{Q}) = \varphi \operatorname{rot} \mathfrak{Q} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathfrak{Q}$ であるから、表面積分を導入出来、

$$\int \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega}) d\sigma = \int \{ \varphi \operatorname{div} \mathbf{\Omega} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{\Omega} \} d\tau,$$

$$\int \varphi (\mathbf{n} \times \mathbf{\Omega}) d\sigma = \int \{ \varphi \operatorname{rot} \mathbf{\Omega} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{\Omega} \} d\tau$$

なる関係が出る。n は表面要素 $d\sigma$ に於ける外側への法線の方向の単位ベクトルである。處で今考へて居る凡ての時間に對して物質は有限の距離にある表面内に留つて居ると假定すれば、(25.17) の積分はその表面内に互つてなせば良く、凡ての表面積分はなくなつて、

$$\Phi = \int \left\{ \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \cdot [\mathfrak{P}] + \frac{1}{r^2 c} \mathbf{r} \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right] \right\} d\tau' \dots\dots\dots (25.18_1)$$

$$\mathfrak{M} = \int \left\{ -\operatorname{grad}' \frac{1}{r} \times [\mathfrak{M}] - \frac{1}{r^2 c} \mathbf{r} \times \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \right] + \frac{1}{r c} \left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right] \right\} d\tau' \dots\dots\dots (25.18_2)$$

を得る。この公式から \mathfrak{P} , \mathfrak{M} の意味が明かにされる。

簡単な場合として静電場のみを取扱ふとすれば、凡てが時間には無關係になつて [] は除かれ、(25.18₁) は静電ポテンシャルを與へねばならない。この場合には (25.18₁) は

$$\Phi = \int \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{P} d\tau' \dots\dots\dots (25.19)$$

となる。+e, -e なる電荷を持つ二點がベクトル距離 a (-e → +e) にあれば、クーロン (Coulomb) ポテンシャルは

$$\varphi = \frac{e}{r'} - \frac{e}{r}, \dots\dots\dots (25.20)$$

こゝで r は -e 點から受働點へのベクトル、r' = r - a は +e 點から受働點へのベクトルである。|a| が非常に小であれば、 $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{ar}{r^3} + \dots\dots$ と展開出來、第一近似で $\varphi = e \frac{ar}{r^3} + \dots\dots$ となる。そこで a を無

限に小に e を無限に大にして (ea は有限なベクトル p に收斂する様に) その極限では

$$\varphi = \frac{pr}{r^3} = p \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \dots\dots\dots (25.21)$$

となる。これは静電雙極子の場合で、p を電氣的能率と稱する。次に時間的に變化する電荷に對しても同様に取扱ひ得、相隣る兩電荷は同じ様に時間に關係し、各瞬間同じ絶對値を持つとすれば、e(t), -e(t) で、遲滯ポテンシャルは

$$\Phi = \frac{e(t - \frac{r'}{c})}{r'} - \frac{e(t - \frac{r}{c})}{r}$$

となり、上記同様の極限では

$$\Phi = \frac{1}{r^3} \mathbf{r} [p] + \frac{\mathbf{r} \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right]}{r^2 c} = [p] \operatorname{grad}' \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2 c} \mathbf{r} \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] \dots\dots (25.22)$$

を得る。(25.18₁) と比較して、(25.22) は空間的雙極子密度のポテンシャルを與へることが判る。即ち單位體積の電氣的能率 \mathfrak{P} の分極を表して居る。物質を構成して居る各原子或は分子は能率 p の電氣雙極子と見做され、それ等凡ての雙極子が重合して單位體積中に平均で一定の巨視的能率 \mathfrak{P} を生ずると考へられる。この原子的分子的能率 p はそれ等の非對稱的な構造自身に據るか或は電場によつて生ずるものと了解出來る。かくの如き根本概念によつて電媒變位 $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}$ は二部分に分れ、第二部分は物質の電場に於ける狀況の綜合を表すのである。かくして最初のマックスウェルの理論より深く立入つて物質と場との相互作用が論ぜられ、原子の力學は先づ各原子、分子の能率 p を與へ、單位體積に就いての平均値 \mathfrak{P} は更に分子と溫度との相互作用に關係する。各統計的量は其の平均値の周りに揺動するが、 \mathfrak{P} も亦この揺動をなす。

次に \mathfrak{M} の意味を明かにしやう。マックスウェルの理論では本来の磁気は考へて居らず、凡ての磁場は運動する電荷の作用に歸せられて居る。若し時間的に變化する電氣雙極子があれば、それを $\frac{\partial p}{\partial t}$ なる電流の強さの分子的交流と考へられ、それによつて磁場を生じ、(25.14) 同様 (25.12₁) より

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] \dots \dots \dots (25.23)$$

と書けるから、(25.18₂) の最後の項は單位體積に就いて電氣能率の時間的變化によつて起る電場の部分と考へられる。(25.18₂) の他の項は閉軌道を定常電流が流れると起る磁場の部分である。總電流 J が流れる閉電流織條を考へ、その電流織條の接線ベクトルは、織條の一點へ原點よりのベクトルを a として da に比例し、電流は接線の方に流れるから、この定常電流に對するベクトルポテンシャルは

$$\mathfrak{M} = \frac{J}{c} \int \frac{da}{r'} \dots \dots \dots (25.24)$$

で與へられる。 r' なるベクトルは織條の一點から受働點へのベクトルである。これからビオ・サバル (Biot-Savart) の法則が得られる。さて無限に小なる所謂アンペール (Ampere) の分子電流を考へ、その内部の一點 (中心點) から受働點へのベクトルを r として、 $|a|$ は小であるから $\frac{1}{r'}$ は級數展開出來て、その第一項を取れば、 $\int da$ は閉路にて零になるので、

$$\mathfrak{M} = \frac{J}{c} \int \frac{ar}{r^3} da \dots \dots \dots (25.25)$$

となる。然るに $r \times (a \times da) = a(rda) - da(ra)$, $d\{a(ra)\} = a(rda) + da(ra)$ であるから、兩者の差を取つて $2da(ra) = d\{a(ra)\} - r \times (a \times da)$ となり、閉路にて完全微分の積分は零であるから、

$$\mathfrak{M} = -\frac{J}{2c} \frac{r}{r^3} \times \int a \times da \dots \dots \dots (25.26)$$

と書ける。平面的電流環ならば、その平面に垂直な、長さがその環の平面内容 f に等しいベクトルを f として、明かに

$$\frac{1}{2} \int a \times da = f$$

であつて、その電流環の磁氣能率を

$$\bar{m} = \frac{1}{c} J \cdot f = \frac{J}{2c} \int a \times da \dots \dots \dots (25.27)$$

とすれば、ベクトルポテンシャル (25.26) は

$$\mathfrak{M} = -\text{grad}' \frac{1}{r} \times \bar{m} \dots \dots \dots (25.28)$$

となる。 $\text{grad}' \frac{1}{r} = \frac{r}{r^3}$ は grad' を前述の意味とすれば當然である。この (25.28) と (25.18₂) と比較すれば、定常の場合 ($\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0$) に對して無限小のアンペールの分子電流が空間的に連続的に分布されて居るのに據つて起るベクトルポテンシャルと了解出来る。物質を構成する原子又は分子個々の磁氣能率 \bar{m} の重合平均によつて單位體積に就いての勵磁或は磁氣能率 \mathfrak{M} が起ると考へ得る。定常でない場合に $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ が附加項として入つて來るのは遲滯の原因に據るのである。何れによつてこの原子の磁氣能率 \bar{m} が生ずるかは量子論的原子理論の論ずる範圍であるが、個々の電荷 e の電子が軌道を描いて居れば、單位時間に一周する回数を n , その一周の時間を T として $n = \frac{1}{T}$, 従つて $J = ne = e/T$ であるから

$$\bar{m} = \frac{1}{T} \int_0^T m dt,$$

こゝで m は瞬間的能率で (25.27) より

$$m = \frac{1}{2c} e \left(a \times \frac{\partial a}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (25.29)$$

である。多くの電子があればその和を取らねばならない。総磁気能率は

$$m = \frac{1}{2c} \sum e \left(a \times \frac{\partial a}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (25.30)$$

で與へられる。然し透明體は普通非磁氣的であるから光學では磁気能率は餘り重大でない。旋光性にては磁気能率の揺動を考慮に入れる必要がある。

かくの如き分子光學の根本概念によつて、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P}, & \mathcal{B} &= \mathcal{H} + 4\pi \mathcal{M} \\ \mathcal{P} &= \sum p, & \mathcal{M} &= \sum m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25.31)$$

なる表現を取ることが判つた。光學にて興味あるは各 p, m の絶対値ではなく、光の場 \mathcal{E}, \mathcal{H} とそれ等との關係である。多くの場合に原子的機構に立入らずとも、 p, m の成分が、作用する場の強さの成分の線的函數と見做されると假定して論じ得る。磁氣的作用を省略して、光波長が各分子の直徑に比して大であると假定すれば、その分子内の電場は均等であると見做される。然しこの場は光波の場 \mathcal{E} とは決して一致しては居ない。それを有効場と稱して \mathcal{E}' とする。この \mathcal{E}' によつて起された分子の電氣能率が

$$p_x = \sum_y \alpha_{xy} \mathcal{E}'_y \dots\dots\dots (25.32)$$

で與へられるとする。この α_{xy} は分極度テンソル或は歪度テンソルと稱せられる。體積のディメンションを持つて居て、 α_{xy} 等は分子の構造、光の振動數の函數である。更に位相を考慮に入れると、電氣ベクトルが複素數でなければならないから、 α_{xy} も複素數で、能率 p の位相は刺戟を與へる場の強さの位相と一致する必要はないことを意味する (光の分散理論参照)。

分子模型を考へる時に一般に恆存的力のみならず、何等かの制振力を考

へる可きで、後者は特に放射、吸収を論ずる上に著しい。然し透明體を論ずる際にはこの制振力は近似的に無視出來、純エネルギー的考察に據つて α_{xy} に或種の制限を考へ得る。即ちテンソル α はエルミート (Hermite) 形式を取り、 α_{xy} に共軛複素なる α_{xy}^* は

$$\alpha_{xy}^* = \alpha_{yx} \dots\dots\dots (25.33)$$

なる關係を満足すると取れる。エネルギー函數 u は

$$u = \frac{1}{2} p \mathcal{E}'^* = \frac{1}{2} \sum_x p_x \mathcal{E}'_x^* = \frac{1}{2} \sum_{xy} \alpha_{xy} \mathcal{E}'_x^* \mathcal{E}'_y \dots (25.34)$$

なるエルミート形式で與へられ、實際この形式は實數のみを取り得て、エネルギー量を表現し得るのである。恆存體系にて各瞬間に (25.32) なる線的關係が成立てば、(25.33) の時エネルギー量 u の時間的變化が單位時間に場から分子へ供給された仕事に等しいことを示さねばならない。先づ \mathcal{E}' は實數として (12.2) の如く

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} (a e^{i\tau} + a^* e^{-i\tau}), \quad \tau = \omega t$$

と取る。然し誘導された能率 p は複素數で、

$$p = p_1 + i p_2 = a e^{i\tau} + b e^{-i\tau},$$

こゝで a, b は複素ベクトルを意味する。實數部分の p_1 は \mathcal{E}' によつて生じた分子の實數能率を表し

$$p_1 = \frac{1}{2} (p + p^*) = \frac{1}{2} (a + b^*) e^{i\tau} + \frac{1}{2} (a^* + b) e^{-i\tau}$$

である。實數場 \mathcal{E}' によつて單位時間に供給された仕事はそれ故

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} \mathcal{E}' &= \frac{i\omega}{4} \{ (a + b^*) a^* - (a^* + b) a + (a + b^*) a e^{2i\tau} \\ &\quad - (a^* + b) a^* e^{-2i\tau} \} \end{aligned}$$

で與へられる。他方 $u = \frac{1}{2} p \mathcal{E}'^*$ の時間的變化は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \mathcal{E}'^* + p \frac{\partial \mathcal{E}'^*}{\partial t} \right)$$

で, (25.32), (25.33) を用ひて

$$\begin{aligned} \frac{p \partial \mathcal{E}'^*}{\partial t} &= \sum_x p_x \frac{\partial \mathcal{E}'^*}{\partial t} = \sum_{xy} \alpha_{xy} \mathcal{E}'_y \frac{\partial \mathcal{E}'^*}{\partial t} = \sum_{xy} \alpha_{xy}^* \mathcal{E}'_x \frac{\partial \mathcal{E}'^*}{\partial t} \\ &= \sum_x \frac{\partial p_x^*}{\partial t} \mathcal{E}'_x = \frac{\partial p^*}{\partial t} \mathcal{E}' \end{aligned}$$

であるから, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \mathcal{E}'^* + \frac{\partial p^*}{\partial t} \mathcal{E}' \right)$ となつて, p, \mathcal{E} の上記表現より, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t} \mathcal{E}'$ なることが容易に判る。それ故恒存的力のエネルギー函数が存在するためにはテンソル α はエルミート形式でなければならぬことが言へる。

α_{xy} の實數部分から實數分極橢圓體

$$\sum_{xy} (\alpha_{xy} + \alpha_{xy}^*) xy = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(25.35)$$

を造り, それを主軸上へ變換すれば,

$$\sum_x \alpha_x x^2 = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(25.36)$$

なる表現になる。その對角要素以外の α_{xy} は純虛數で (25.33) によりその様な量は三つあつて,

$$\alpha_{yz} = -\alpha_{zy} = -id_z, \quad \alpha_{zx} = -\alpha_{xz} = -id_x, \quad \alpha_{xy} = -\alpha_{yx} = -id_y \quad \dots\dots\dots(25.37)$$

と置ける。こゝで d_x, d_y, d_z は實數軸性ベクトル d の成分である。この主軸に關して取れば, u なる量は

$$u = \sum_x \{ \alpha_x \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^* - id_x (\mathcal{E}^* \times \mathcal{E})_x \} \quad \dots\dots\dots(25.38)$$

なる表現を取り, 電氣的能率と刺戟する場との關係は

$$p_x = \alpha_x \mathcal{E}'_x + i(d \times \mathcal{E}')_x \quad \dots\dots\dots(25.39)$$

で表し得る。この式によつて複素數 α の物理的意味が明かにされる。即ち一つの獨樂を考へて光の電場と分子との相互作用の結果分子に廻轉を興へるので, 例へば磁場内にて磁氣性廻轉能, 鏡面對稱を持たない分子にて分子の直徑と波長との比が有限なることを考へて起る自然廻轉能等が著しい例である。尙その實數對角要素より出来る所謂分極能の對角和

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz} = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 3\alpha \quad \dots\dots\dots(25.40)$$

なる量は分子の廻轉に對して不變量で, 更に高次の不變量があつてそれから d ベクトルの長さの二乗が生ずる。

主軸表現 (25.39) を基礎にして丁度結晶と類似的に分子の分類が出来る。i) 一般的分子 $\alpha_x \neq \alpha_y \neq \alpha_z$, ii) 一軸性分子 $\alpha_x = \alpha_y \neq \alpha_z$, iii) 等方性分子 $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$ 等である。 α が光の振動數に據るのであるから, その軸方向も亦一般に振動數によつて異なる (特に i) の場合)。ii) の場合には z 軸が分子内にて一定, iii) にては振動數に無關係に分子内に任意に直交軸を擇び得る。かくの如き分類と單位體積の平均分極のそれとは區別す可きで, それは一定の外よりの電磁場或は他の作用によつて互視的對稱性と顯微鏡的對稱性とは異つて來るからである。一空間方向が特別にされる様な作用を受けない場合にはその媒質は平均では等方性で, \bar{p} は \mathcal{E}' (従つて \mathcal{E}) に比例す可きで,

$$\bar{p} = N \bar{p}, \quad \bar{p} = \alpha \mathcal{E}', \quad \dots\dots\dots(25.41)$$

こゝで N は單位體積中の分子の數即ち ロシュミット (Loschmidt) 數である。

最後に光波の \mathcal{E} と有效場 \mathcal{E}' との相違に就いて述べやう。この兩概念は分子間の距離が大なる時即ち稀薄な瓦斯にては一致するが, 濃密な物質特に液體, 固體にては各原子, 分子内の雙極子間の電氣的相互作用を考慮

に入れねばならない。分子が不規則に配列された準立方體ならば、近似的理論で平均方法を以て満足せねばならないが、例へば結晶格子の如く規則正しき配列の分子が問題ならば厳密にその相互作用の法則を算出出来る。

準立方分子群の中に個々の分子が他の凡ての分子の作用を受けて存在すると考へ、それをその個々の分子の周圍に描いた球で二つの分子群に分ける。その球外群に對してはその球の半徑を適當に取つて原子的構造がその一個の分子に及ぼす影響を無視出來、連続的に變化する分極 \mathfrak{P} を持つ連續體の作用と同様に考へられ、その他の一群はその球内にて全く不規則な、凡ての平均を取れば相殺する様な作用が假定出来るとする。かくして均質分極性體中の個々分子に働く場の強さ \mathfrak{E}' を近似的に計算出来る。即ち物體から一個の分子の周圍に a なる半徑の球を切抜取つて空の球を考へ、 a は波長に比して小とすれば、遲滯性は無視され、 a に對して大なる距離までは (25.41) で與へられる平均分極が働くと思はれる。従つて問題は靜電的になつて、中空球が均等に電荷された媒質中にて如何なる影響を場分布に及ぼすかを調べれば良いことになる。電壓を加へられた二つの金屬被覆層間に板狀媒電質を考へ、その板上の實電荷の密度を $-\eta, +\eta$ とすれば、この密度はこの電媒質中の電媒變位と

$$\mathfrak{D}_v = 4\pi\eta \dots\dots\dots(25.42)$$

なる關係にあることは知れて居り、その板内部の一點に働く場の強さは

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{D} - 4\pi\mathfrak{P} \dots\dots\dots(25.43)$$

となる。板内部から切抜いた球に働く場としては金屬板上の實電荷の場 $4\pi\eta$ 、その電媒質の限界平面上の自由電荷の場 $-4\pi\mathfrak{P}_v$ 、その中空球の表面上の自由電荷の場 (その電荷はその抜取つた均等な分極された球がその表面上に持つ電荷と逆で等しい) 等の三つがある。その値は (25.19) を用ひて均等な分極の場合に應用すれば、その符號を逆にして、その中空球

内に於ける表面電荷の場は

$$\varphi = -\mathfrak{P} \int \text{grad}' \frac{1}{r} d\tau',$$

この演算子 grad を受働點の座標にてなす様にするには符號を逆にして結局

$$\varphi = \mathfrak{P} \text{grad} \int \frac{d\tau'}{r} = -\mathfrak{P} \text{grad} \varphi_0,$$

こゝで
$$\varphi_0 = - \int \frac{d\tau'}{r}$$

は均等な電荷密度 -1 で滿されて居る空間のポテンシャルであつて、その空間内にこの一定分極 \mathfrak{P} が存する。その中空球に働く場の強さは

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_v \mathfrak{P}_v \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \sum_v \mathfrak{P}_v \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots$$

であるが、對稱性よりして中心點に於ける混合微分は零で $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = 0, \dots\dots\dots$ $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2}$ であり、均等密度 -1 のポテンシャルは $\Delta \varphi_0 = 4\pi$ を満足するから、 $\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}$ 等三つとも各 $\frac{4\pi}{3}$ なる値を持つ。それ故中空球の表面電荷による場の強さは

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}_v$$

で與へられる。以上の如き三つの場から成る中空球内の總場は

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{D} - 4\pi\mathfrak{P} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P},$$

即ちその球切抜なしで外より場 \mathfrak{E} が働く時有效場 \mathfrak{E}' は (25.43) より

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \dots\dots\dots(25.44)$$

で與へられることが判る。

この公式に據つて濃密な媒質の光學が近似的に取扱はれ、例へば屈折率と物質密度との關係等實驗に比較して満足な結果を得られるが、要するに近似的理論であつて、統計理論に従ふ嚴密な分子の位置及び方向に関する平均値を求める方法で一層嚴密な結果が望ましい。更にこの理論では等方性を假定して居るが、異方性物質に関する一般化もせねばならない。

§ 26. 分子光學的光傳播理論略説

瓦斯體、液體、無定形固體(硝子)等の如き巨視的等方性媒質中の光傳播の統計的理論に就いて述べる。この媒質中の分子は一様に凡ての空間方向に配置されて居るから、(25.41)が成立つて

$$p = \alpha \mathcal{E}' \dots\dots\dots (26.1)$$

こゝで一般に複素數なる α は分子の平均分極能を表す。更にその分子の重心點は規則正しい配列にはなく統計的に空間に互つて分布されて居る。従つて凡ての可能な空間分布に對して計算してその平均を取らねばならない。然し光學現象を問題にする時には、平均的に一様に分子が空間分布されて居る場合と、その平均分布の周圍に揺動のある場合とに限られる。前者では分子密度 N を常數と見做し得、後者ではその値の揺動があつて光散亂現象が起る場合である。

外より光波が來て分子中の雙極子に當つてそれを振動させ、その刺戟された各雙極子から二次光波が出る。この球面波凡てが互に干涉して、巨視的マックスウェルの理論で論ぜられた反射、屈折の幾何學的法則、フレネルの振幅公式(4.15)、(4.16)等に據る現象を起す可きであると同時に分子密度 N の揺動を考へれば、同様に分子光學的理論より光散亂現象も起ることが論ぜらる可きである。前者の場合にその第二次球面波は物質内にて投射波を消滅して後方へは平均で平面波をなす波と前方へは他の位相速度を

持つ平面波となり、分子の構造に據る不規則性を無視すれば傳播ベクトルと振幅との間に巨視的理論の要求すると同じ關係が成立つ可きである。

雙極子場の表現にはポテンシャル Φ, \mathcal{A} を用ふ代りに所謂ヘルツ(Hertz)ベクトルを取る方が有利である。それ等の關係は \mathcal{B} をヘルツベクトルとして

$$\Phi = -\text{div } \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \dots\dots\dots (26.2)$$

で與へられる。(25.11)なる條件は恆等的に満足され、波動方程式

$$\Delta \mathcal{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (26.3)$$

を取れば、 \mathcal{A}, Φ も同じ波動方程式を満足する。又 \mathcal{E}, \mathcal{H} は容易に判る如く

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{grad div } \mathcal{B} - \Delta \mathcal{B} = \text{rot rot } \mathcal{B}, \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26.4)$$

で與へられる。又各雙極子 p の波場が

$$\mathcal{B} = \frac{[p]}{r} \dots\dots\dots (26.5)$$

で表されることは ($[]$ は遲滯を意味して t を $t - \frac{r}{c}$ にて置換える) (26.2) によつて (25.22), (25.23) が得られることより判る。この電氣的二重極場に更に一般には原子の磁氣能率 m による場を加へねばならないが、その媒質の原子は自然状態に於て非磁性とすれば光が作用しない時今考へた磁氣的場は平均で消える。然し光に據つて起されたその磁性の揺動は計算に入つて來る筈で、それは原子の大きさ a と波長 λ との比 a/λ 位の大きさで可視光線に對しては非常に小さい。旋光性を論ずる際には考へねばならないが、今は以上の理由でこれを無視出来る。

媒質内の j 番目の雙極子に有效なる總電場 \mathcal{E}'_j は投射光波の \mathcal{E} と他の

雙極子による \mathcal{E}_l との和で

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \sum_{l \neq j} \mathcal{E}_l \dots \dots \dots (26.6)$$

となる。j 番目の雙極子の場所に於ける l 番目の雙極子の場は (26.4), (26.5) によつて

$$\mathcal{E}_l = \text{rot rot} \frac{p_0 \left(t - \frac{R_l}{c} \right)}{R_l} \dots \dots \dots (26.7)$$

で與へられる。R_l は l 番目と受働點 j 番目との間の距離を意味し、演算子 rot rot は受働點座標にてなされる。そこで雙極子中心點の不連続な分布 (それは未知であるが、平均では均等である) を連続的であると考へ、雙極子の能率は場所のベクトル r と時間 t との函数 $p = p(r, t)$ と見做す。分子密度も同様に場所の函数 N(r) とする。その雙極子の位置に於ける容積要素 $d\tau' = dx' dy' dz'$ を取つて、

$$R = r - r', \quad R = |R| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

として、j 番目の雙極子の位置 x, y, z に於ける場は (26.6), (26.7) によつて

$$\mathcal{E}'(r, t) = \mathcal{E}(r, t) + \text{rot rot} \int N \frac{p \left(r', t - \frac{R}{c} \right)}{R} d\tau' \dots \dots \dots (26.8)$$

と書ける。この積分は、今作用する力を考へて居るその原子が占める小空間を除いた、媒質の占める全空間に互つて取る可きである。その原子の占める小空間を作用空間と稱して a なる半径の球と考へ、最後に $a \rightarrow 0$ の極限を取る。

(26.8) 中の p に (26.1) を入れれば \mathcal{E}' を決定する式が得られ、例へば無限に擴つて居る一定な密度 N を持つ媒質の場合、半空間 $z < 0$ を満たして居る媒質の場合 (媒質内の光傳播、反射、屈折がこれから論ぜられ

る), N が揺動するために起る不規則な光の擴散 (ティンダル (Tyndall) 現象) 等に對する解答が満足に得られる。第一の場合は Lundblad (Lundblad) が解き、第二の場合は Oseen (Oseen) が解いた。第三の場合は後に光の散亂の節にて説明する。これ等の計算に深く立入らないが、第二の場合に就いて一言すれば、實際の現象を表現するために必要な法則を以て上記の積分方程式を吟味するのである。N = 一定として媒質内の雙極子分布が

$$\mathfrak{P} = N p = N \alpha \mathcal{E}' = \mathfrak{P}^0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mathfrak{s} r} e^{-i\omega t} \dots \dots \dots (26.9)$$

で與へられるとして、この法則を以て (26.8) の積分項を表し (26.8) を

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \text{rot rot} \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} = \int \frac{\mathfrak{P} \left(r', t - \frac{R}{c} \right)}{R} d\tau' \dots \dots \dots (26.10)$$

と書いて、 $z < 0$ なる半空間に互つて積分するのである。(26.10) が満足されるためには積分項 rot rot \mathfrak{S} は媒質内 $z < 0$ にて計算する際丁度 $\mathcal{E}' - \mathcal{E}$ を相殺する様な二つの平面波に歸納さる可きで、その一つの部分波は波長を適當に擇んで \mathcal{E}' に丁度等しくなる様に定められ、更に波動法線を適當に擇んで媒質内の第二の部分波が \mathcal{E} を相殺する (振幅等しく、位相が反對) 様に出来る。この結果をオゼーンの法則と云ふ。 $z > 0$ に對しては (26.10) は成立しないが、そこに於ける雙極子場 rot rot \mathfrak{S} が計算出来、境界面から反射された平面波を得る。従つて反射、屈折の幾何學的法則及びその振幅に對するフレネルの公式が得られるのである。

参 考:

W. Esmarch: Ann. d. Physik Bd. 42 (1913), 1257.
 C. W. Oseen: Ann. d. Physik Bd. 48 (1915), 1.
 W. Bothe: Dissert. Berlin 1914; Ann. d. Physik Bd. 64 (1921), 693.
 R. Lundblad: Univ. Arskrift, Upsala 1920.
 G. Darwin: Trans. Cambr. Soc. Bd. 23 (1924), 137.

§ 27. 結晶の格子光學

結晶体内の空間格子を形成する分子の場合に對して振動する雙極子の合成作用を考へる。こゝでも雙極子の總輻射は屈折、反射波と消光される波とを與へる。この場合には積分の代りに凡ての格子點に就いての複雑な加法が入つて來る。格子光學の嚴密な理論はエワルド (Ewald) によつて基礎づけされたが、こゝではその概要を述べるに止める。計算を簡單にするために、境界面を無視し、無限に擴つて居る結晶内にて格子點の雙極子球面波の重合から電磁場が出來て平均では平面波の如く傳播すると假定する。その傳播速度 (屈折率) は真空中とは異り、その光速度の修正は普通のマックスウェルの理論から與へられるものと個々の雙極子の分極能に對する特殊の計算とでなされることが判る。而して波長は原子間の距離に比して大であるとする。

格子を表現するには § 16 にて使用した様な格子細胞をなす三基本ベクトル a_1, a_2, a_3 を取つて、その容積は

$$V = a_1 (a_2 \times a_3) = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{vmatrix}, \dots\dots\dots (27.1)$$

任意の格子點は (16.3) と同様

$$r_i = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3, \dots\dots\dots (27.2)$$

逆格子の基本ベクトルは

$$b_1 = \frac{1}{V} a_2 \times a_3, \quad b_2 = \frac{1}{V} a_3 \times a_1, \quad b_3 = \frac{1}{V} a_1 \times a_2, \dots\dots (27.8)$$

それ等から形成される波動ベクトルは

$$f_i = 2\pi (l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3) \dots\dots\dots (27.4)$$

で與へられる。 $f(x, y, z) \equiv f(r)$ が格子に關して週期的な函数であれば、

$$f(r + r_i) = f(r), \dots\dots\dots (27.5)$$

この函数をフーリエ級數に展開して

$$f(r) = \sum_l c_l e^{if_l r} \dots\dots\dots (27.6)$$

の形になるのは、例へば r を一週期だけ増せば $r + a_1$ 、この展開の l 番目の項の指數は (27.3) により

$$a_i \times b_k = \delta_{ik} \dots\dots\dots (27.7)$$

であるから

$$if_l a_1 = 2\pi i (l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3) a_1 = 2\pi i l_1$$

だけ増し、各級數項は不變であることより明である。

(27.6) の係數 $c_l = c_{l_1}, c_{l_2}, c_{l_3}$ は (27.6) に $e^{-if_l' r}$ を乗じて格子細胞に互つて積分して求められる。かくすれば右邊には $\int e^{i(l_1 - l_1') r} d\tau$ なる積分が生じ、 $\xi = b_1 r, \eta = b_2 r, \zeta = b_3 r$ ($d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{V} dx dy dz = \frac{1}{V} d\tau$) とすれば、その格子細胞は $\xi \eta \zeta$ 空間に於ける單位立方體となつて (例へば格子點 $r = a_1$ は $\xi = b_1 a_1 = 1, \eta = b_2 a_1 = 0, \zeta = b_3 a_1 = 0$ に對應する)、上記積分はその單位立方體に互つての積分

$$\frac{1}{V} \iiint e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \{ \xi(l_1 - l_1') + \eta(l_2 - l_2') + \zeta(l_3 - l_3') \}} d\xi d\eta d\zeta$$

となる。然るにこの積分は $l_1 = l_1', l_2 = l_2', l_3 = l_3'$ 以外では常に零であるから c_l は

$$c_l = \frac{1}{V} \int f(r) e^{-if_l r} d\tau \dots\dots\dots (27.8)$$

で與へられる。

次に雙極子作用の計算の準備として (27.6) なる週期的函数で表される

格子内の週期的電荷密度に據つて生ずる静電ポテンシャルを計算せねばならない。これに対するポアソン (Poisson) の微分方程式

$$\Delta\varphi = -4\pi f \dots\dots\dots(27.9)$$

の解は明かに

$$\varphi(r) = \sum_l \frac{4\pi c_l}{|l_l|^2} e^{i l_l r} \dots\dots\dots(27.10)$$

であつて、常數項の係数は $c_0 = 0$ でなければ $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ 従つて $l_l = 0$ となつて無限大になるから、 $c_0 = 0$ とせねばならない。それは (27.6) によつて密度のフーリエ級數に於ける常數項が零で、各格子細胞中には全體として電荷が 0 であることを意味する。

格子點に靜的雙極子がある特別の場合には格子細胞中の電荷密度分布は二つの等しい逆の符號の點電荷即ち $-e$ が細胞の端に、 $+e$ が a だけ離れた點にあると考へられ、密度のフーリエ係數は

$$c_l = \frac{e}{V} (e^{-i l_l a} - 1)$$

で與へられ、そのポテンシャルは

$$\varphi = \frac{e}{V} \{ \varphi_0(r-a) - \varphi_0(r) \}, \quad \varphi_0 = \sum_l' \frac{4\pi}{|l_l|^2} e^{i l_l r} \dots\dots(27.11)$$

と書ける。こゝで \sum_l' は $l=0$ の項を除く加法を意味して居る。この函數 φ_0 は格子點に電荷 $+V$ があると同時に到る處に一定な電荷密度 -1 がある様な簡單な點格子のポテンシャルである。これで全格子の中性なることが満足されて居る。

格子細胞が中性なる故に (27.11) にて與へられるポテンシャル φ は $\Delta\varphi = 0$ を満足し、互にずれて居る格子の點に於て $\frac{e}{r}$ 、 $-\frac{e}{r}$ なる異常點を有する。この細胞の兩電荷及び a を收斂させて、然も $ea = p$ が有限になる様にする。單位體積の能率は $\mathfrak{P} = p/V$ で、(27.11) より雙極子格

子のポテンシャルとして

$$\varphi = -\mathfrak{P} \text{grad} \varphi_0(r) \dots\dots\dots(27.12)$$

を得る。これは § 25 にて (25.44) を得るために均等に分極された物質内に抜取つた球内のポテンシャルの表現と全く同じである。立方格子で考へて居る受働點が格子の對稱點である場合には先の計算と同様にして全格子の分極に據る場の強さは外よりの場の強さを \mathfrak{E} として

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}$$

で與へられることが判る。これは (25.44) と同一で、結晶に對する靜的場の公式が得られたことになる。

以上と全く類似の方法で多くの雙極子の波動場の計算も出来る。個々の雙極子の波動場は (26.5) で與へられるヘルツベクトルに據つて表される。雙極子格子を通つての光波傳播は既に説明した様に格子點より出る球面波の重合で、その位相は調子が合はず平均として平面波の如く傳播されるのである。個々別々の位相を持つ球面波の實際の和を取る代りに數學的には同等な次の方法を用ふる。格子點にて二重極的異常性を持つ格子に於て、週期的な函數を形成する様に格子點の作用で振幅が變調される一つの平面波として了解するので、

$$\mathfrak{Z} = p_0 Z e^{-i\omega t} e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\mathfrak{s}r)} \dots\dots\dots(27.13)$$

と置けば、 Z なる函數は格子に於て週期的で、格子點を除いては到る處で正則で (そこでは $\frac{1}{r}$ を以つて無限大になる)、然も (26.3) なる波動方程式より導出される式

$$\Delta Z + 2 \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{s} \text{grad} Z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) Z = 0 \dots\dots(27.14)$$

を満足する。これ等三つの特性を持つ Z を

$$Z = \sum_l z_l e^{i f_l r} \dots \dots \dots (27.15)$$

なるフーリエ級数で表せば、第一の特性は自ら持ち、第二の特性よりその係数として

$$z_l = \frac{1}{V} \int Z e^{-i f_l r} d\tau \dots \dots \dots (27.16)$$

を得ることは明かである。グリーン (Green) の公式

$$\int (f \Delta g - g \Delta f) d\tau = \int \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

を應用するに際して、 $f = e^{-i f_l r}$ 、 $g = Z$ と置けば

$$\int f \left\{ -2 \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{s} \text{grad} Z) - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) Z + |f_l|^2 Z \right\} d\tau = 4\pi \dots \dots \dots (27.17)$$

となる。然るに

$$\int f (\mathfrak{s} \text{grad} Z) d\tau = - \int Z (\mathfrak{s} \text{grad} f) d\tau = i (\mathfrak{s} f_l) \int Z f d\tau$$

であるから、これを (27.17) へ入れ、(27.16) を用ひて

$$z_l = \frac{4\pi/V}{|f_l|^2 + 2 \frac{2\pi}{\lambda} (\mathfrak{s} f_l) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi/V}{\left(f_l + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2} \dots \dots \dots (27.18)$$

を得る。こゝで $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ は真空中の波長を意味する。従つて波動方程式 (27.14) の解 (27.15) は

$$Z = \frac{4\pi}{V} \sum_l \frac{e^{i f_l r}}{\left(f_l + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2} \dots \dots \dots (27.19)$$

となる。(27.19) を (27.13) に入れて

$$\mathfrak{s} = \rho_0 e^{-i\omega t} \frac{4\pi}{V} \sum_l \frac{e^{i \left(f_l + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right) r}}{\left(f_l + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2} \dots \dots \dots (27.20)$$

なる種々な振幅の平面波の重合として結晶体内に起る状況を表す式を得る。波長 λ (或は屈折率 $n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$) は個々の振動子に於ける他の凡ての振動子の影響を受けた力が力學的振動方程式を満足す可き條件から始めて定まるのである。

非常に短い波長 (X 線) の場合を取れば、結晶を通る際に波長は餘り變更されず λ と λ_0 とは殆んど等しい。又 λ が格子常数と等しい位ならば、(27.20) の加算中の或分母は殆んど零になる。 \mathfrak{s}_0 を投射 X 線の方向の單位ベクトルとすれば、X 線の干渉方向に對するラウエの條件が (16.12) で表されたのは (27.4) によれば

$$\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{s} = \frac{\lambda}{2\pi} f_l \dots \dots \dots (27.21)$$

なる表現を取り、この方向 \mathfrak{s} に對しては従つて

$$\left(f_l + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \dots \dots \dots (27.22)$$

が成立つ。 λ と λ_0 とは殆んど等しいのであるから、(27.20) 式中のそれに對應した分母も亦小になる。ラウエの考へによつて干渉で強められた散亂を起す方向はこゝで得た式からすれば格子中の波に對して大なる強さを與へる方向である。換言すればラウエ、ブラッグの理論は一般的格子電磁力學の特別の場合であることが判る。嚴密に言へば λ と λ_0 との異ひより X 線に對する屈折率を考へに入れねばならない。

次に波長 λ 、 λ_0 が格子細胞の線的大さ a に比して大なる場合を取る。この時には \mathfrak{s} を $\frac{a}{\lambda}$ の冪級数に展開出来るが、フーリエ係数の分母中 a/λ

に無関係の項 $|l_1|^2$ が零でない時のみこの展開は可能で、 $l=0$ に対して $|l_1|^2$ は零であるから、フーリエ級数の常數項 ($l=0$) を分離せねばならない。(27.19) に従へばそれは

$$\bar{Z} = \frac{4\pi}{V} \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \dots\dots\dots (27.23)$$

である。單位體積に就いての能率は

$$\mathfrak{P}_0 = p_0/V \dots\dots\dots (27.24)$$

なる振幅を持つから、(27.20) の $l=0$ の項は $n = \lambda_0/\lambda$, $\omega/2\pi = c/\lambda_0 = c/n\lambda$ を用ひて

$$\mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{P}_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \frac{n^2 \lambda^2}{4\pi^2} \cdot \frac{2\pi i}{\lambda} \mathfrak{s} r \dots\dots\dots (27.25)$$

となる。これは平均電場に相當する。能率の瞬間的値

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 e^{-i\omega t} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mathfrak{s} r} \dots\dots\dots (27.26)$$

を導入して、(26.4) によつて (27.25) より

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= 4\pi \frac{1}{n^2 - 1} (\mathfrak{P} - n^2 \mathfrak{s} (\mathfrak{P} \mathfrak{s})), \\ \mathfrak{H} &= 4\pi \frac{n}{n^2 - 1} (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27.27)$$

を得る。この第一式より

$$\mathfrak{E} \mathfrak{s} = -4\pi \mathfrak{P} \mathfrak{s}$$

であるから、これをその第一式に入れて

$$4\pi \mathfrak{P} = (n^2 - 1) \mathfrak{E} - n^2 \mathfrak{s} (\mathfrak{E} \mathfrak{s}),$$

従つて $4\pi \mathfrak{s} \times \mathfrak{P} = (n^2 - 1) (\mathfrak{s} \times \mathfrak{E}),$

それ故 \mathfrak{D} を \mathfrak{E} と $4\pi \mathfrak{P}$ とに分けて

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D} &= \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} = n^2 (\mathfrak{E} - \mathfrak{s} (\mathfrak{E} \mathfrak{s})), \\ \mathfrak{H} &= n (\mathfrak{s} \times \mathfrak{E}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27.28)$$

を得る。これ等は普通のマックスウェルの式より出した (18.10), (18.11) と全く同形である。格子光學よりすればかくの如き平均場のみならず、格子内の週期的搖動を (27.20) の他の項から出せる。週期的場の部分は (27.19) より

$$\tilde{Z} = Z - \bar{Z} = \frac{4\pi}{V} \sum_l' \frac{e^{i l_1 r}}{\left(l_1 + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \dots\dots\dots (27.29)$$

で、 \tilde{Z} は (27.14), (27.28) より明かなる如く

$$\Delta \tilde{Z} + 2 \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{s} \text{ grad } \tilde{Z}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) \tilde{Z} = 4\pi \dots\dots\dots (27.30)$$

を満足する。右邊に 4π が出て來たのは點電荷を相殺するために全格子に互つて -1 なる密度の均等な電荷が存在することを意味して居る。 \tilde{Z} は格子點にて異常性 V/r を持つて居る。この \tilde{Z} からヘルツベクトルの週期的場の部分が計算され

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{P}_0 e^{-i\omega t} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mathfrak{s} r} \tilde{Z} = \mathfrak{P} \tilde{Z} \dots\dots\dots (27.31)$$

となる。一つの雙極子に働く有効場を出すには、今考へて居る點の雙極子ポテンシャルを引去らねばならない。原點を適當に取つてそのポテンシャルは

$$\psi = p_0 \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \dots\dots\dots (27.32)$$

で與へられるから、有効場のヘルツベクトルとして

$$\mathfrak{B}' = \tilde{\mathfrak{B}} + \tilde{\mathfrak{B}} - \psi = \tilde{\mathfrak{B}} + \mathfrak{P} \Psi, \dots\dots\dots (27.33)$$

なる表現に書け、こゝで

$$\Psi = V \tilde{Z} - \frac{e^{2\pi i \left(\frac{r}{\lambda_0} - \frac{r \cdot \tilde{\mathbf{s}}}{\lambda} \right)}}{r} \dots \dots \dots (27.34)$$

従つて (26.4) より

$$\mathcal{E}' = \bar{\mathcal{E}}_x + \sum_y \beta_{xy} \mathcal{P}_y, \quad \mathcal{D}' = \bar{\mathcal{D}}_x - \sum_y \gamma_{xy} \mathcal{P}_y \dots \dots \dots (27.35)$$

等を得る。こゝで

$$\beta_{xy} = \beta_{yx} = \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{2\pi i}{\lambda} \left(\tilde{\epsilon}_x \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \tilde{\epsilon}_y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + 4\pi^2 \Psi \left(\frac{\delta_{xy}}{\lambda_0^2} - \frac{\tilde{\epsilon}_x \tilde{\epsilon}_y}{\lambda^2} \right) \right]_0 \dots \dots \dots (27.36)$$

$$\gamma_{xy} = -\gamma_{yx} = \frac{2\pi i}{\lambda_0} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{2\pi i}{\lambda} \tilde{\epsilon}_z \right]_0 \dots \dots \dots (27.37)$$

この式中 []₀ は今考へて居る雙極子 (原點) の場所に於ける値を取る意味である。而して yx -成分又は xy -成分に對して δ_{xy} は 1 又は 0 である。

實際の結晶體の如く雙極子が一つの簡単な格子を形成せず複雑な構造をなすものは簡単な格子を互にずらして重合したものと考へられ、その場は個々の格子の場を單に加えれば良いのであるから、上記の理論から凡ての場合へ一般化するのは容易である。

(27.35) は (27.28) と (25.32) と共に $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{P}$ 間の三つの線型ベクトル關係を表し、それ等から \mathcal{P} を消去すれば、結晶光學の基本方程式 (18.1) を得る。

$$\bar{\mathcal{D}}_x = \sum_y \epsilon_{xy} \bar{\mathcal{E}}_y \dots \dots \dots (27.38)$$

然しこゝでは電媒的異方性はテンソル α_{xy} で與へられる個々の原子の異方性とテンソル β_{xy} で與へられる格子内の相互作用の異方性とからなつて居て、一般には β_{xy} は更に波長 λ と λ_0 に據つて變化する。可視光線

の場合には λ は格子細胞の線的大さに比して大であるから、 Ψ なる函數及び β なる量も a/λ の冪級數に展開出來、 t_i は $1/a$ 位の大きさであつて、最も粗い近似 (無限に長い波長の場合) にて附加場の振幅に對して

$$\Psi = \varphi_0 - \frac{1}{r}, \quad \varphi_0 = 4\pi \sum_i \frac{e^{i t_i r}}{|t_i|^2} \dots \dots \dots (27.39)$$

と書ける。(27.11) で定義された φ_0 から一つの格子點のポテンシャルを引いた量である。この時には

$$\beta_{xy} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)_0 \dots \dots \dots (27.40)$$

となる。

正則格子に對してはその對稱性よりして

$$\beta_{yx} = \beta_{xy} = \beta_{zy} = 0, \quad \beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = \frac{4\pi}{3} \dots \dots \dots (27.41)$$

であるから、平均場への附加場は再び $\frac{4\pi}{3} \mathcal{P}$ となる。嚴密な格子理論には立入らないが、任意の結晶に對する有効場は a/λ が非常に小なる場合 $\Delta \Psi_0 = 4\pi$ なる方程式を解いて得られるのである (Ewald の計算)。然し格子點に於ける分子又は原子の異方性を表す α_{xy} を知らない以上多くを語ることは出來ない。 a/λ が有限の場合に一般化する際 a/λ の第一項だけを取つて有効場を考へ旋光性 (光學的廻轉能) が論ぜられることは後の節にて述べる。 a/λ の高次の項を取つての物理的應用は未だ見出されて居ないが、 $a/\lambda \approx 1$ の場合は X 線光學になるのは既述の如くである。

以上述べた格子光學から得られる重大な結果の一つとして光散亂 (ティンダル効果) の原因に關する問題の解答がある。可視光線は格子によつて變調された振幅を持つ平面波として傳播するのであるが、如何なる側面的散亂もこゝで得た公式からは採拾出來ないから、無境界の理想的結晶では (こゝで假定した様に) 雙極子が正確に格子點にあつて光散亂は起り得な

い。光散亂の起るはその正則位置の不完全性及び雙極子の小なる運動に歸せらる可きである。雙極子が如何様にでも不規則にその静止位置からずれば、その電磁場はこゝで得た法則に従ふ正則な部分とその源點が格子點から少し不規則に異なるための部分とに分れ、その後者の二次波の位相は不規則に重合するからその雙極子波はコヒーレントでないので、その各球面波の強さを加へて計算出来る。散亂光の強さはその平均の振幅に對する雙極子の電氣的能率の揺動に相當することになる。

結晶體でない等方性媒質に於ては例へば瓦斯體にては理想的に配置された位置がないから概況は上記の如く明かでない。然し實際とは多少異なる均等な雙極子密度を平均によつて導入して殆んど同じ結果が得られる。その電磁場は單位體積の電氣的能率 \mathfrak{P} の平均値 $\bar{\mathfrak{P}}$ によつて定められる部分と光能率の二次揺動

$$(\Delta \mathfrak{P})^2 = (\mathfrak{P} - \bar{\mathfrak{P}})^2 \dots\dots\dots(27.42)$$

によつて定められる部分とから成る。この考へ方で後節の光散亂問題を取扱ふ。

参 考:

P. P. Ewald: Dissert. München 1912; Ann. d. Physik Bd. 49 (1916), 1; 117; Kristalle und Röntgenstrahlen. Berlin 1923.
 M. Born: Atomtheorie des festen Zustandes. 2. Aufl. 1923. Leipzig u. Berlin; Enzyklop. d. Math. Wiss. Bd. 5 Teil 1 A 4.

§ 28. ローレンツ・ローレンツ (Lorentz-Lorenz) の法則

分極テンソル α_{xy} によつて光學的に表し得る原子又は分子が全々無秩序に集合して居ると考へられる等方性物質の場合を考へる。分子に固定し

て居る座標系を X, Y, Z , 空間に固定して居る座標系を x, y, z とすれば、§ 25 にて述べた理論によつて分極楕圓體の方程式は

$$\sum_{XY} \alpha_{XY} XY = \sum_{xy} \alpha_{xy} xy = \text{const.} \dots\dots\dots(28.1)$$

で與へられる。兩座標系に於ける二つの單位ベクトル e_1, e_2 を考へ、 e_1 は成分として (X_1, Y_1, Z_1) 或は (x_1, y_1, z_1) を持ち、 e_2 は成分 (X_2, Y_2, Z_2) 或は (x_2, y_2, z_2) を持つとすれば、(28.1) なる二次形の極形は

$$\sum_{XY} \alpha_{XY} X_1 Y_2 = \sum_{xy} \alpha_{xy} x_1 y_2 \dots\dots\dots(28.2)$$

で表される。 e_1, e_2 を定つた場所に於て空間に固定して取り、分子は凡ての可能な位置にあるとする。然る時は (28.2) に於て α_{XY} と $x_1 y_2$ なる積は定つた數で、 α_{xy} と $X_1 Y_2$ なる積は分子の位置によつて異つて來る。従つて凡ての分子の可能な位置に互つて取つた (28.2) の平均は

$$\sum_{XY} \alpha_{XY} \overline{X_1 Y_2} = \sum_{xy} \alpha_{xy} \overline{x_1 y_2} \dots\dots\dots(28.3)$$

となる。この式は分子分布に對して任意の法則が與へられた場合にも成立つて、これに據つてテンソル成分の平均値 $\overline{\alpha_{xy}}$ が二つの單位ベクトルの成分の積の平均値 $\overline{X_1 Y_2}$ に歸せられることが判る。

今考へて居る様な等方的な方向分布なる最も簡単な場合には先づ $e_1 = e_2 = e$ と擇べば、 $X_1 X_2 = X^2, \dots\dots$, 更に

$$\overline{X^2} = \overline{Y^2} = \overline{Z^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{YZ} = \overline{ZX} = \overline{XY} = 0 \dots\dots\dots(28.4)$$

となる。次に空間に固定の座標を最初 $(1, 0, 0)$, 次に $(0, 1, 0)$, 最後に $(0, 0, 1)$ と取れば、(28.3) より

$$\overline{\alpha_{xx}} = \overline{\alpha_{yy}} = \overline{\alpha_{zz}} = \frac{1}{3} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}) = \frac{1}{3} (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) = \alpha \dots\dots\dots(28.5)$$

となる。こゝで $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ は分極テンソルのその主軸系に於ける二成分である。

次に e_1, e_2 が互に直角であると擇べば、明かに

$$\overline{X_1 X_2} = \overline{Y_1 Y_2} = \overline{Z_1 Z_2} = 0, \quad \overline{X_1 Y_2} = \overline{X_2 Y_1} = \dots = 0 \dots (28.6)$$

で、更に互に直角なベクトル e_1, e_2 を空間に固定の軸の一対と一致する様に置けば (例へば $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ 及び循環置換にて得られるものゝ如く取れば), (28.3) より

$$\overline{\alpha_{yx}} = \overline{\alpha_{zx}} = \overline{\alpha_{zy}} = 0 \dots (28.7)$$

となることも容易に判る。

かくの如き考察の結果として、平均分極楕圓體は球で、平均分極能 α は主分極能の算術的平均になることが言へる。従つて

$$p = \alpha \mathcal{E}' \dots (28.8)$$

が成立つ。若し分極テンソル α_{xy} がエルミート形式 (原子内の制振力を無視したことに相當する) であれば、その對角線要素は實數で、従つて α も實數であるが、一般には相當のエネルギー消失が起るから α は複素數である。複素屈折率を持つ金属に於けると同様な状況になる。

分子の方向が等方的に分布されて居るのみならず、分子の空間に於ける配置も亦準等方的と考へられるから有効場の強さ \mathcal{E}' と平均場 \mathcal{E} との間には (25.44) なる關係

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \dots (28.9)$$

があつて、單位體積の分子の数が N であれば、

$$\mathfrak{P} = Np \dots (28.10)$$

である。(28.8), (28.9), (28.10) から p, \mathcal{E}' を消去すれば、

$$\mathfrak{P} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha N} \mathcal{E} \dots (28.11)$$

を得る。そこで電媒變位のベクトル

$$\mathfrak{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathfrak{P} \dots (28.12)$$

を導入すれば、

$$\mathfrak{D} = \frac{1 + \frac{2}{3} 4\pi \alpha N}{1 - \frac{1}{3} 4\pi \alpha N} \mathcal{E} \dots (28.13)$$

従つて光學的電媒常數 ε 即ち屈折率の二乗と分極能 α とは

$$\varepsilon = n^2 = \frac{1 + \frac{2}{3} 4\pi \alpha N}{1 - \frac{1}{3} 4\pi \alpha N} \dots (28.14)$$

なる關係で結ばれて居る。

こゝでは主に透明體に就いて述べて、光學常數と密度 (分子數 N), 溫度及び分子的異方性との關係を説明するにとゞめる。勿論吸収もこれ等に關係するが、これに就いては後章にて記述する。

(28.14) を α に就いて解けば、

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \dots (28.15)$$

なる所謂ローレンツ・ローレンツの法則を得る。 α は原子常數であつて光の振動數に據る量であるから、右邊も亦然りである。原子分極 α の代りに所謂モル (mol) 屈折と云つてモル中の分子數 (ロシュミット數 $\mathbf{N} = N \frac{\mu}{\rho}$, μ : 分子量, ρ : 密度) 及び $\frac{4\pi}{3}$ を α に乗じた量 P を用ひれば、

$$P = \frac{4\pi}{3} \mathbf{N} \alpha = \frac{\mu}{\rho} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \dots (28.16)$$

なるモル屈折に対する表現を得る。 $\frac{\mu}{\rho}$ はモルの容積を意味するから、 P はモル容積のディメンション及び大約その大きさを持つ量である。瓦斯體に對しては n^2 は 1 に殆んど等しいから (28.16) にて分母を 3 としして近似的に

$$\alpha = \frac{n^2 - 1}{4\pi N}, \quad P = \frac{\mu}{\rho} \frac{n^2 - 1}{3} \dots\dots\dots (28.17)$$

なる公式を得る。

これ等の公式 (28.16), (28.17) は分子方向の完全なる等方性を假定し、又暗々裡に認めた處の一般には定つた空間方向に特性附けられて居る光の電磁場がこの方向分布にて變化しないと云ふ假定の下に正しいのである。單原子瓦斯なら一般に分極楕圓體は球であり、又二原子或は多原子分子ならばその慣性能率が大きであつて速い光振動に隨行しないから、可視光線及び短波長の光に對しては上記の假説に疑問はないが、遅い振動(赤外線)の場合と靜的場に分子があれば、特にその分子が固定雙極子を持つてば、溫度運動の許す限り外よりの電場に隨行しようとする。數十種の波長のヘルツ波の範圍にて、例へば水の如き雙極子液體は溫度に關係する複素屈折率の異常狀況を呈し、光の場の分子に及ぼす方向作用と了解出来る。雙極子液體に就いては後章にて述べる。

(28.16), (28.17) 公式の實驗的證明は色々の方面からなされて居る。與へられた波長に對する屈折率が密度とこの公式に據る關係を持つこと、分子構造及び等方性が保たれる様な密度の變化に際しても矢張それが成立つこと(例へば空氣のモル屈折は種々なる壓力に對して Na·D 線, 14.5°C にて常に $P = 2.17$ で、 $n^2 - 1$ と ρ とが比例する (28.17) の關係の正しいことを示して居る)、固體或は液體狀態にある場合と瓦斯狀況にある場合とに於て矢張モル屈折 P は一定であることが實驗的に確められて居る。次

に多くの液體の混合の場合を考へるに、單位體積中の種々なる分子の数が N_1, N_2, \dots であれば、その濃度の尺度である所謂モル分率は

$$f_1 = \frac{N_1}{N}, \quad f_2 = \frac{N_2}{N}, \dots; \quad N = N_1 + N_2 + \dots\dots\dots (28.18)$$

で表され、各液體の分子量が μ_1, μ_2, \dots ならば、個々の原子の重量は $\mu_1/N, \mu_2/N, \dots$ 、從つて單位體積の質量即ち密度は

$$\rho = \frac{\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \dots}{N} \dots\dots\dots (28.19)$$

となる。平均分子量 $\bar{\mu} = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots$ を導入すれば、

$$\frac{\bar{\mu}}{\rho} = \frac{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots}{\rho} = \frac{N}{N} \dots\dots\dots (28.20)$$

(28.15) の代りに今の場合加法的混合法則が行はれ

$$\frac{4\pi}{3} (N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2 + \dots) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \dots\dots\dots (28.21)$$

が成立ち、部分モル屈折 $P_1 = \frac{4\pi}{3} N \alpha_1, \quad P_2 = \frac{4\pi}{3} N \alpha_2, \dots$ を導入すれば、平均モル屈折として (28.21) より

$$\bar{P} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots\dots\dots (28.22)$$

を得る。この公式の實驗的證明もなされて居る。最後に化合物のモル屈折とそれを合成する原子の原子屈折とを比較するに、その分子が異つた種類 v_1, v_2, \dots 個の原子から出來て居れば、明かに

$$P = P_1 v_1 + P_2 v_2 + \dots\dots\dots (28.23)$$

である可く、この加法法則も相當に滿されて居ることが證明された。一般に無機化合物では各原子に一定の屈折を配されるが、有機化合物ではその化合の有様の影響を考へねばならない。即ち一原子にその對手方に據つて異つた原子屈折を配さねばならない。更に化合物では外側電子の相互作用

によつて化合が起るのであるから、而してこの原子價電子が光學的特性を決定するのであるから、上記加法法則は近似的なものであることは當然である。實際屈折常數或は分極能 α は明かに定義された原子特性であつて、その根源は量子力學の解き得る問題でこゝでは略す。

参 考:

- H. A. Lorentz: Wiedem. Ann. Bd. 9 (1880), 641.
 L. Lorenz: Wiedem. Ann. Bd. 11 (1881), 70.
 R. Clausius: Mechanische Wärmetheorie Bd. 2, 2. Aufl. Braunschweig 1879.
 P. Debye: Polare Molekeln. Leipzig 1929.
 Landolt-Börnstein: Physikalisch-Chemische Tabellen 5. Aufl. Berlin 1923.

§ 29. ファラデー (Faraday) 効果, コットン・ムートン (Cotton-Mouton) 効果, ケル (Kerr) 効果

これ等の効果の問題は強制された異方性物質の平均値を計算することによつてその解答が得られる。外より働く電場又は磁場によつて自然には等方性物であるものが人工的に異方性にさせられるのであつて、外より働く力 \mathfrak{F} は一定で小であるとしてその一次及び二次の項だけを取れば充分であるとする。

分子に固定の座標系 (X, Y, Z) を空間に固定の座標系 (x, y, z) に對して三つのパラメーターとしてのオイラー (Euler) の角 θ, φ, ψ で表して分子の位置を定める。その定まつた位置に分子がある確率は \mathfrak{F} の作用する時分子の持つエネルギー W にのみより、マックスウェル・ボルツマン (Maxwell-Boltzmann) の法則に従へばその確率 Φ は T を絶対温度, k をボルツマン常數として

$$\Phi = C e^{-W/kT} \dots\dots\dots (29.1)$$

である。こゝで常數 C は法化條件

$$\int \Phi d\Omega = C \int e^{-W/kT} d\Omega = 1 \dots\dots\dots (29.2)$$

より定められ、 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi d\psi$ である。

若し分子が固定電氣又は磁氣能率 $p^{(0)}$ を持てば、 \mathfrak{F} に於て一次のエネルギー

$$-p^{(0)}\mathfrak{F} = -\sum_x p_x^{(0)}\mathfrak{F}_x \dots\dots\dots (29.3)$$

が存在する。負符號は $p^{(0)}$ が外場 \mathfrak{F} と平行の時に極小値をこのエネルギーが取るために付けたのである。次に分子が變形可能ならば、靜的電氣又は磁氣變形能テンソル $\alpha_{xy}^{(0)}$ が存在して、(25.34) による變形エネルギーは

$$u = \frac{1}{2} \sum_{xy} \alpha_{xy}^{(0)} \mathfrak{F}_x \mathfrak{F}_y \dots\dots\dots (29.4)$$

で、§ 25 にて述べた様に

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \cdot \mathfrak{F} = 0$$

を満足し、こゝで假定した様に \mathfrak{F} は時間的に一定であるから、この式を積分して

$$u - p^{(0)}\mathfrak{F} = U$$

が得られる。U は外場のない時に零値を持つ外場内の分子のポテンシャルエネルギーを意味する。そこで

$$p_x^{(0)} = \sum_y \alpha_{xy}^{(0)} \mathfrak{F}_y$$

を假定すれば、

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{XY} \alpha_{XY}^{(0)} \tilde{v}_X \tilde{v}_Y = -u \dots\dots\dots(29.5)$$

となることが容易に判る。以上以外の、 \tilde{v} に於て高次の項を無視すれば、外場内の分子のエネルギー W は (29.3), (29.5) より

$$W = -\sum_X p_X^{(0)} \tilde{v}_X - \frac{1}{2} \sum_{XY} \alpha_{XY}^{(0)} \tilde{v}_X \tilde{v}_Y \dots\dots\dots(29.6)$$

なる表現を取ると見られ、分子と外場との相対的位置の函数と考へられる。

更に分子に作用する光の場に対する分極テンソル A_{XY} の成分も亦外よりの静的場 \tilde{v} の函数であつて、上記エネルギー同様二次項まで取ればテイラー (Taylor) 級数として、

$$A_{XY} = \alpha_{XY} + \sum_Z \alpha_{XY,Z} \tilde{v}_Z + \frac{1}{2} \sum_{X'Y'} \alpha_{XY,X'Y'} \tilde{v}_{X'} \tilde{v}_{Y'} \dots\dots\dots(29.7)$$

と書ける。 X', Y' なる指数は分子固定の軸方向には無関係に取る可きである。こゝで種々なる制振作用を無視すれば、各係数は初めの指数 X, Y に関してエルミート形であり、 $\alpha_{XY,X'Y'}$ 凡ては X', Y' に関して對稱的で、然も電気又は磁氣場の性質上 $XY, X'Y'$ を交換しても對稱的である。

空間に固定な體系に於けるテンソル A の成分 A_{xy} の平均値を計算するために §28 と同様空間固定系にて x_j, y_j, z_j なる成分、分子固定系にて X_j, Y_j, Z_j なる成分を持つ空間固定の二ベクトル e_1, e_2 を導入する ($j=1,2$)。更に空間固定の z 軸 (外場の方向とする) と常に一致する単位ベクトル $e_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$ を導入して、

$$\tilde{v} = F e_3 \dots\dots\dots(29.8)$$

を (29.6) に代入する。(29.1) の指数函数を F の冪にて展開して容易に

$$\Phi = C \left\{ 1 + \frac{F}{kT} \sum_X p_X^{(0)} X_3 + \frac{F^2}{2} \sum_{XY} \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XY}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)} p_Y^{(0)} \right) X_3 Y_3 \right\} \dots\dots\dots(29.9)$$

なることが判る。(29.2) と (29.9) から C が計算出来、(28.4) を利用して

$$C = 1 - \frac{F^2}{6} \sum_X \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XX}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)2} \right) \dots\dots\dots(29.10)$$

を得るから、(29.9) に代入して

$$\Phi = 1 + \frac{F}{kT} \sum_X p_X^{(0)} X_3 + \frac{F^2}{2} \left\{ \sum_{XY} \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XY}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)} p_Y^{(0)} \right) X_3 Y_3 - \frac{1}{3} \sum_X \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XX}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)2} \right) \right\} \dots\dots\dots(29.11)$$

を得る。この表現は外場ベクトル \tilde{v} が分子固定の座標系に關して與へられた方向 $e_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$ を持つと云ふ確率を與へると了解出来る。

平均値 $\overline{A_{xy}}$ を計算するに (28.3) と同形の

$$\sum_{xy} \overline{A_{xy} x_1 y_2} = \sum_{XY} A_{XY} \overline{X_1 Y_2} \dots\dots\dots(29.12)$$

を利用する。こゝで e_1, e_2 は空間固定のベクトルであつて、

$$\overline{X_1 Y_2} = \int X_1 Y_2 \Phi d\Omega \dots\dots\dots(29.13)$$

を意味する。(29.12) にて A_{XY} には (29.7) を (29.13) にて Φ には (29.11) を入れて、等方的に平均を取れば、

$$\begin{aligned} \sum_{xy} \overline{A_{xy} x_1 y_2} &= \sum_{XY} \alpha_{XY} \overline{X_1 Y_2} + F \sum_{XYZ} \left(\alpha_{X,YZ} + \frac{1}{kT} \alpha_{XY} p_Z^{(0)} \right) \overline{X_1 Y_2 Z_3} \\ &+ \frac{F^2}{2} \left\{ \sum_{XYX'Y'} \left[\alpha_{XY,X'Y'} + \frac{1}{kT} (\alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^{(0)} + 2\alpha_{XY,X'} p_{Y'}^{(0)}) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{k^2 T^2} \alpha_{XY} p_X^{(0)} p_{Y'}^{(0)} \right] \overline{X_1 Y_2 X_3' Y_3'} - \frac{1}{3kT} \sum_{XYZ} \alpha_{XY} (\alpha_{ZZ}^{(0)} \\ &+ \left. \frac{1}{kT} p_Z^{(0)2}) \overline{X_1 Y_2 Z_3} \right\} \dots\dots\dots(29.14) \end{aligned}$$

なる表現が容易に得られる。かくしてテンソル成分 A_{xy} の平均値は互に直角な三つの単位ベクトルの成分の積の等方的分布に対する平均値を計算して求められることになる。この平均値計算の詳細は略すが

$$\begin{aligned} \overline{X_1 Y_2 Z_3} &= \overline{Y_1 Z_2 X_3} = \overline{Z_1 X_2 Y_3} \\ &= -\overline{X_1 Z_2 Y_3} = -\overline{Y_1 X_2 Z_3} = -\overline{Z_1 Y_2 X_3} = \frac{1}{6}, \\ \overline{X_1^4} &= \overline{X_2^4} = \overline{X_3^4} = \dots = \frac{1}{5}, \quad \overline{X_1^2 Y_1^2} = \overline{X_2^2 Y_2^2} = \overline{X_3^2 Y_3^2} = \dots = \frac{1}{15}, \\ \overline{X_1^2 X_2^2} &= \overline{X_1^2 X_3^2} = \overline{X_2^2 X_3^2} = \dots = \frac{1}{15}, \\ \overline{X_1 Y_1 X_2 Y_2} &= \overline{X_1 Y_1 X_3 Y_3} = \dots = -\frac{1}{30}, \\ \overline{X_1^2 Y_2^2} &= \overline{X_1^2 Y_3^2} = \overline{X_1^2 Z_2^2} = \dots = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

となり、 $e_1 = e_2 // x$ 又は y に対して

$$\overline{A_{xx}} = \overline{A_{yy}} = \alpha + \frac{F^2}{2} (a - b), \dots (29.15_1)$$

$e_1 = e_2 = e_3 // z$ に対して

$$\overline{A_{zz}} = \alpha + \frac{F^2}{2} (a + 2b), \dots (29.15_2)$$

$e_1 // x, e_2 // y, e_3 // z$ に対して

$$\overline{A_{xy}} = -\overline{A_{yz}} = -iFf, \dots (29.15_3)$$

最後に

$$\overline{A_{xz}} = \overline{A_{zx}} = \overline{A_{yz}} = \overline{A_{zy}} = 0 \dots (29.15_4)$$

を得る。こゝで

$$\alpha = \frac{1}{3} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}), \dots (29.16_1)$$

$$a = a_0 + \frac{1}{kT} a_1 + \frac{1}{k^2 T^2} a_2, \dots (29.16_2)$$

$$b = b_0 + \frac{1}{kT} b_1 + \frac{1}{k^2 T^2} b_2, \dots (29.16_3)$$

$$f = f_0 + \frac{1}{kT} f_1 \dots (29.16_4)$$

なる表現を取り、 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, f_0, f_1$ なる係数だけが尙分子の特性に據る量である。分子内の座標系を適當に探んで實數靜的分極能テンソルの主軸と一致する様にすれば、混合項 $\alpha_{xy}^{(0)}$ は零になり、主項の係数を $\alpha_{xx}^{(0)}$ 等の代りに $\alpha_x^{(0)}$ 等で表せば、

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{9} (\alpha_{xx, xx} + \dots) - \frac{1}{45} (\alpha_{xy, xy} + \dots) \\ \quad + \frac{1}{9} (\alpha_{xx, yy} + \dots), \\ a_1 = \frac{2}{9} (\alpha_{xx, x p_x^{(0)}} + \dots) - \frac{2}{45} (\alpha_{xy, x p_y^{(0)}} + \dots) \\ \quad + \dots + \frac{2}{9} (\alpha_{xx, y p_y^{(0)}} + \dots), \\ a_2 = -\frac{1}{45} (\alpha_{xy p_x^{(0)} p_y^{(0)}} + \dots), \end{cases} \dots (29.17)$$

$$\begin{cases} b_0 = \frac{2}{45} (\alpha_{xx, xx} + \dots) + \frac{1}{90} (\alpha_{xy, xy} + \dots) \\ \quad - \frac{1}{45} (\alpha_{xx, yy} + \dots), \\ b_1 = \frac{2}{45} (\alpha_{xx} \alpha_x^{(0)} + \dots) - \frac{1}{45} (\alpha_{xx} \alpha_y^{(0)} + \dots) \\ \quad + \dots + \frac{4}{45} (\alpha_{xx, x p_x^{(0)}} + \dots) - \frac{2}{45} (\alpha_{xx, y p_y^{(0)}} + \dots) \\ \quad + \dots + \frac{1}{45} (\alpha_{xy, x p_y^{(0)}} + \dots), \\ b_2 = \frac{2}{45} (\alpha_{xx} p_x^{(0)} + \dots) + \frac{1}{90} (\alpha_{xy}^2 p_x^{(0)} p_y^{(0)} + \dots) \\ \quad + \dots - \frac{1}{45} (\alpha_{xx} p_y^{(0)2} + \dots), \end{cases} \dots (29.18)$$

$$\begin{cases} f_0 = \frac{i}{6} (\alpha_{xy,z} - \alpha_{yx,z} + \alpha_{yz,x} - \alpha_{zy,x} + \alpha_{zx,y} - \alpha_{xz,y}), \\ f_1 = \frac{i}{6} \{ p_x^{(0)} (\alpha_{yz} - \alpha_{zy}) + p_y^{(0)} (\alpha_{zx} - \alpha_{xz}) + p_z^{(0)} (\alpha_{xy} - \alpha_{yx}) \} \end{cases} \dots\dots\dots(29.19)$$

を得る。A, α がエルミート形ならば, a, b, f は凡て實數である。この平均値計算は方向量子化を考へる量子力學を以てしても同じ結果を與へる。

外場 F が働いた場合の光波の平均電氣能率は (29.15) に従つて

$$\begin{cases} \bar{p}_x = \left\{ \alpha + \frac{F^2}{2} (a-b) \right\} \mathcal{E}_x' - i F f \mathcal{E}_y', \\ \bar{p}_y = i F f \mathcal{E}_x' + \left\{ \alpha + \frac{F^2}{2} (a-b) \right\} \mathcal{E}_y', \\ \bar{p}_z = \left\{ \alpha + \frac{F^2}{2} (a+2b) \right\} \mathcal{E}_z' \end{cases} \dots\dots\dots(29.20)$$

と書ける。そこで實際には次の假定は全く正確であると言へないが、空間に於ける分子中心點の分布は外場によつて大して影響されないとすれば、今の場合にも $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{4\pi}{3} \mathcal{P}$ なる公式が成立ち、 $F=0$ にて $\epsilon = n^2$ として (28.14), (28.15) が至當であり、F が小なる時、F, F² の項中の \mathcal{E}' には $F=0$ の場合の値 (28.11), (28.15) を取つて

$$\mathcal{E}' = \frac{\epsilon + 2}{3} \mathcal{E} \dots\dots\dots(29.21)$$

となる。従つて

$$\mathcal{D}_x = \epsilon_{xx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{xy} \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_y = \epsilon_{yx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{yy} \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_z = \epsilon_{zz} \mathcal{E}_z, \dots(29.22)$$

こゝで

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon + \frac{F^2}{2} N (a-b) \frac{\epsilon + 2}{3}, \\ \epsilon_{zz} = \epsilon + \frac{F^2}{2} N (a+2b) \frac{\epsilon + 2}{3}, \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = -i F N f \frac{\epsilon + 2}{3} \end{cases} \dots\dots\dots(29.23)$$

となつて、物質は外場の作用を受けて恰も一軸性結晶の如くなり、分極能の係數或は電媒常數は一般に複素數である。この (29.22), (29.23) 式の應用としてこの節の表題の三効果即ち光學現象に對する電氣力、磁氣力の影響、今日電氣光學、磁氣光學と稱せられる部門の現象に就いて説明しやう。

1. フラデー効果

1846 年に初めて發見されたこの實驗結果は光の電磁理論發展上特筆す可き現象であつて、強い電磁石の磁極 (その磁力線に平行に光を通せる様に穴があいて居る) 間に透明體を置いて、その磁力線に平行に線偏光光線を通し、檢光子でその透過光線を検べると、その偏光面が廻轉されると云ふのである。その廻轉角を χ とすれば、

$$\chi = R l H \dots\dots\dots(29.24)$$

なる法則が成立つ。こゝで H は磁場の強さ、l は挿入された物體を光が通過するその層の厚さ、R はヴェルデ (Verdet) の常數と稱せられ、その磁場を生ずる電流と同じ向きに偏光面が廻轉する場合に正に取り、これと反對に廻轉する時負とする。特に強い廻轉能を示す物質は二硫化炭素 CS₂ であつて、l を cm, H をガウス、溫度 t を攝氏度盛、 χ を分で表して Na-D 線の波長に對して

$$\text{CS}_2: \quad R_t = 0.04347 (1 - 1.69 \cdot 10^{-3} t)$$

$$\text{H}_2\text{O}: \quad R_t = 0.01311 (1 - 3.2 \cdot 10^{-5} t - 3.2 \cdot 10^{-6} t^2)$$

なる値を持つて居る。瓦斯體ではこの磁氣的廻轉は非常に小で、出来るだけ壓力を大にしなければ容易に認められないが、鐵、ニッケル、コバルトの如きは非常に薄い層 (準透明) にて著しい廻轉を示す。

透明體は常に弱くしか磁化されないので、有効場の強さ H' と外より與へる H とを等しいと置けるから、前記理論にての F を H と取り、その二乗の項を無視して ((29.24) 參照), (29.22) から

$$D_x = \epsilon E_x - i\epsilon' E_y, \quad D_y = i\epsilon' E_x + \epsilon E_y, \quad D_z = \epsilon E_z, \dots (29.25)$$

こゝで

$$\epsilon' = i\epsilon_{xy} = H N f \frac{\epsilon + 2}{3} \dots (29.26)$$

D_y に $\pm i$ を乗じ D_x に加へれば,

$$\left. \begin{aligned} D_x \pm i D_y &= (\epsilon \mp \epsilon') (E_x \pm i E_y), \\ D_z &= \epsilon E_z \end{aligned} \right\} \dots (29.27)$$

を得る。そこで直角成分 E_x, E_y, E_z の代りに

$$E_+ = E_x + i E_y, \quad E_- = E_x - i E_y, \quad E_z = E_z \dots (29.28)$$

で任意の振動を表し得るが、(29.27) によつてこれ等に對應する D の成分は

$$D_+ = D_x + i D_y, \quad D_- = D_x - i D_y, \quad D_z = D_z \dots (29.29)$$

$$\text{で } D_+ = (\epsilon - \epsilon') E_+, \quad D_- = (\epsilon + \epsilon') E_-, \quad D_z = \epsilon E_z \dots (29.30)$$

を満足することが判る。處が光學の根本方程式(27.28) $D = n^2 \{E - \epsilon(E \cdot \epsilon)\}$

に従へば、外場即ち z 軸に平行な光波に對しては $\epsilon_x = \epsilon_y = 0, \epsilon_z = 1$ で

$$D_x = n^2 E_x, \quad D_y = n^2 E_y, \quad D_z = 0 \dots (29.31)$$

従つて (29.30) より明かな如く、この方向に次の二つの異つた波が傳播する。

$$\left. \begin{aligned} D_+ = 0, \quad \text{即ち } \frac{D_y}{D_x} = i, \quad n_-^2 = \epsilon + \epsilon' \\ D_- = 0, \quad \text{即ち } \frac{D_y}{D_x} = -i, \quad n_+^2 = \epsilon - \epsilon' \end{aligned} \right\} \dots (29.32)$$

外よりの磁場のない場合の屈折率 $n = \sqrt{\epsilon}$ を以て近似的に

$$n_+ = n - \frac{\epsilon'}{2n}, \quad n_- = n + \frac{\epsilon'}{2n} \dots (29.33)$$

と書け、傳播方向の周りに正なる廻轉方向は n_+ なる波に屬し、所謂左圓

偏光と稱せられる。これ等の屈折率の差即ち圓二重屈折は

$$n_- - n_+ = \frac{\epsilon'}{n} \dots (29.34)$$

となる。

物質の厚さ l なる平行平面層の法線を z 軸及び場の方向と一致させ、正なる場方向に線偏光光線を投射し、 x 軸を入射平面内の振動方向に平行に取れば、その入射平面内の光振動の振幅は (時間因子 $e^{i\omega t}$)

$$D_x = 1, \quad D_y = 0 \quad \text{即ち } D_+ = 1, \quad D_- = 1$$

で、その物質層を通過後の振幅は

$$D_+ = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_+ l}, \quad D_- = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_- l},$$

従つて

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_+ l} + e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_- l} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i n l}{\lambda_0}} \left(e^{\frac{2\pi i (n-n_+) l}{\lambda_0}} + e^{\frac{2\pi i (n-n_-) l}{\lambda_0}} \right) \end{aligned}$$

となる。然るに (29.33) により $n - n_+ = \frac{\epsilon'}{2n}, n - n_- = -\frac{\epsilon'}{2n}$ であるから、

$$D_x = e^{-\frac{2\pi i n l}{\lambda_0}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon'}{n} l\right) \dots (29.35)$$

同様にして

$$D_y = e^{-\frac{2\pi i n l}{\lambda_0}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon'}{n} l\right) \dots (29.36)$$

であつて、この振幅の比は

$$D_y/D_x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon'}{n} l\right) \dots (29.37)$$

で、これは實數、それ故その物質層から射出して再び線偏光であるが、偏光面は

$$\chi = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\epsilon'}{n} l = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) l = \frac{\pi}{\lambda_0} N \frac{\epsilon + 2}{3} \frac{f}{n} H l \dots (29.38)$$

だけ廻轉する。ヴェルデの常数は (29.24) の定義によつて

$$R = \frac{\chi}{Hl} = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) \frac{1}{H} = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{n^2 + 2}{3n} Nf \dots\dots (29.39)$$

となる。

光線が場の方向と逆に傳播すれば、この廻轉角の符號は反對になるから、反射鏡で同じ路を再び戻すと結果として廻轉角は1回の物質透過の場合の倍になる(後に述べる自然廻轉の場合には然らず)。瓦斯體に對しては $(n^2 + 2)/3n$ は殆んど1に等しいが、他の物質に對してはこの値及び f は光の振動數に據る量である。この廻轉能と波長との關係は主に $1/\lambda_0$ で利いて來る。ファラデー常數 f の定義 (29.16₄) $f = f_0 + \frac{1}{kT} f_1$ にて f_0, f_1 は原子特有の常數で、(29.19) で與へられる第三階級のテンソル成分で表される。大概の物質ではこの廻轉能は殆んど温度に無關係で f_0 だけが考へられる。

この量 f_0 は、1896年に發見されたゼーマン (Zeeman) 効果と云つて磁場に光源があるとそれからのスペクトル線が數本に分れる現象と密接な關係を持つ。原子内に運動する電子に磁場が如何に影響するかに関して有名なラーモア (Larmor) の法則と稱せられるものがあつて、磁場 \mathfrak{H} が v なる速度の電荷 $-e$ を持つ電子に $-\frac{e}{c} v \times \mathfrak{H}$ なる力を及ぼすことは周知の處である。その磁場の代りに磁場に平行な u なるベクトルで表される速さで廻轉する座標系を考へると、角速度の二乗に比例する遠心力と $2mv \times u$ で與へられる所謂コリオリ (Coriolis) の力とを外力に附加すれば、廻轉座標系にても廻轉なしの場合と同様質量と加速度の積が力に等しくなる。その角速度が小で二乗の項(遠心力)が無視出來れば、その角速度 ω_L (ラーモアの振動回數) と磁場の強さ H との關係は結局

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} H \dots\dots\dots (29.40)$$

となる。これを用ひてベッケレル (Henri Becquerel) が原子に於ける前記廻轉能を簡単に屈折率が波長に據る分散現象に歸せしめた。即ち原子核は非常に重く(電子に比して)、凡ての電子は同じ質量と電荷を持つから、磁場の影響は凡ての電子に同等で、原子核の周圍に場の方向を軸として ω_L なる振動數を持つて廻轉せしめると云ふベッケレルの考へに従へば、その廻轉座標系に於ては凡ての内部振動數は磁場の下の非廻轉系の振動數と等しくなる。力線の方向に投射される線偏光波を二つの逆に廻轉する圓偏光波(振動回數 ω) に分けて考へれば、上記の假定的廻轉座標系に關してはこれ等は異つた振動回數 $\omega + \omega_L$ と $\omega - \omega_L$ とを持つ。 $n(\omega)$ を磁場のない状態の屈折率とすれば、正波の速度は $n(\omega - \omega_L)$ で、負波のは $n(\omega + \omega_L)$ なる函數で定められる。従つて

$$n_- - n_+ = n(\omega + \omega_L) - n(\omega - \omega_L) = 2 \frac{\partial n}{\partial \omega} \omega_L \dots\dots\dots (29.41)$$

となり、(29.40) で與へられる ω_L を取り $\omega \frac{\partial n}{\partial \omega} = -\lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}$ であるから、ヴェルデの常數 R に對するベッケレルの公式は $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ を考へに入れて (29.39) から

$$R = -\frac{e}{2mc^2} \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \dots\dots\dots (29.42)$$

なる表現を取ることが判る。勿論この公式は磁氣廻轉能の温度に無關係な部分 f_0 だけが存在する様な原子に對してのみ成立つて、(29.39) と比較して

$$Nf_0 = -\frac{e}{2\pi mc^2} \frac{3n}{n^2 + 2} \lambda_0^2 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \dots\dots\dots (29.43)$$

を得る。物質が透明なる如きスペクトル範圍にては實驗上 $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ で

正則分散を呈するから、(29.42)にてRは正になる。即ち電磁石の電流の方向と正なる磁氣廻轉の方向とが一致することが判る。このベッケレルの公式は原子瓦斯に對してラーモアの歳差運動の古典理論が正しければ正當なのであるが、實際には量子光學篇にて論ずる如く異常ゼーマン効果等複雑な現象と關聯して、この公式はたゞ古典的近似値を與へるのみである。更に分子瓦斯に至つては電子群の自由廻轉能性は失はれ當然 (29.42) の成立は望まれない。

反磁性體に於ては磁氣廻轉は殆んど温度に無關係であることは實驗と一致し、(29.42)の分散より計算された結果と満足な一致を示して居る。(29.42)の實驗的證明は仲々困難であるが、水素瓦斯を高壓の下に測定してその公式の正當なることが認められた。勿論吸収範圍に屬する部分ではこの様な簡単な理論は適當でない。

こゝで説明した理論からすれば、磁氣廻轉の温度に關係する部分は f_1/kT で、この常磁性廻轉はラーデンプルグ (Ladenburg), ベッケレル (Jean Becquerel) 等によつて研究された。(25.37)にて定義された d なるベクトルを導入して $p^{(0)}$ の代りに分子の固定磁氣能率 $m^{(0)}$ を取れば、 d の成分は $d_x = i\alpha_{yz} = -i\alpha_{zy}$ 等であるから、(29.19)より

$$f_1 = \frac{1}{3} m^{(0)} d \dots\dots\dots(29.44)$$

を得る。かくの如き能率 $m^{(0)}$ の存在は常磁性體の特性で、分子固定のZ軸を $m^{(0)}$ の方向に取り、 $m_z^{(0)} = |m^{(0)}| = m_0$ と書ける。 e をその場の方向に於ける單位ベクトル (空間固定座標 (0, 0, 1), 分子固定座標 (X, Y, Z)) とすれば、その磁氣エネルギーは $-m_0 H Z$ で單位空間角に於けるその位置の確率は

$$e^{\frac{m_0 H Z}{kT}} = 1 + \frac{m_0 H Z}{kT} + \dots\dots\dots(29.45)$$

となる。單位體積の平均磁氣能率は對稱性よりして z 軸方向と一致して

$$\overline{m_z} = N \overline{m_z^{(0)}} = N m_0 \overline{Z} = N m_0 \overline{Z} + N \frac{m_0^2 H}{kT} \overline{Z^2} = \frac{N m_0^2 H}{3kT} \dots\dots(29.46)$$

で與へられる。即ち單位體積の帯磁率 κ は

$$\kappa = \frac{N m_0^2}{3kT} \dots\dots\dots(29.47)$$

これは常磁性の温度に關係する有様を示す所謂 キュリー (Curie) の法則である。従つて磁氣廻轉能の常磁性部分は常磁性と同じ温度との關係を示すが、常磁能率の二乗には比例せず、(29.44)にて與へられる如くその能率と分子内に固定のベクトル d とのスカラ積 $m_0 d$ に比例する。對稱軸を持つ分子にては d は m_0 と平行か逆平行であるがその大きさはその常磁性能率には無關係の分子特性であつて、分子の變形として光の振動數による量である。 $d m_0$ は d と m_0 とのなす角によつて正負になり、廻轉對稱的分子に於ては d と m_0 の平行又は逆平行の位置が可能で $m^0 d \geq 0$ になる。従つて廻轉能の常磁性部分は (透明體として) 普通の反磁性部分とは逆の符號を持ち、場合によつては總廻轉も逆になる。例へば鐵鹽溶液とか強い常磁性體との化合物に於てこれが認められる。

2. コットン・ムートン効果

磁場に影響される物質内を光がその力線に垂直に傳播する場合には H の一次の項だけではこの効果が現れず、 H^2 の項を取らねばならない。従つて電媒常數 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}$ が H に據ることを考へねばならない。この場合には (29.22) は

$$D_x = \epsilon_z E_x - i\epsilon' E_y, \quad D_y = i\epsilon' E_x + \epsilon_z E_y, \quad D_z = \epsilon_0 E_z \dots\dots(29.48)$$

なる形を取り、こゝで o, e が通常、異常を示すことは二軸性結晶理論に於けると同じである。尙 (29.23) に従つて

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_o &= \epsilon + H^2 N (a + 2b) \frac{\epsilon + 2}{6}, \quad \epsilon_s = \epsilon + H^2 N (a - b) \frac{\epsilon + 2}{6} \\ \epsilon' &= H N f \frac{\epsilon + 2}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29.49)$$

である。場に直角に例へば x 軸に平行に進む波に対しては (18.11) より

$$\mathfrak{D}_x = 0, \quad \mathfrak{D}_y = n^2 \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{D}_z = n^2 \mathfrak{E}_z, \dots\dots\dots(29.50)$$

(29.48) と (29.50) を結んで容易に

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_s^2 - \epsilon'^2} \right) &= 0, \\ \mathfrak{D}_z \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_o} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29.51)$$

を得る。それ故互に直角に振動する二つの線偏光波

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_y = 1, \quad \mathfrak{D}_z = 0; \\ \mathfrak{D}_y = 0, \quad \mathfrak{D}_z = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29.52)$$

が傳播して、それ等に対する屈折率は場の強さ H に関係する。普通の線
的二重屈折の場合の如くそれ等は

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{\epsilon_s^2 - \epsilon'^2}{\epsilon_o}} = \sqrt{\epsilon} \left\{ 1 + H^2 N \frac{\epsilon + 2}{6\epsilon} \left(a - b - f^2 N \frac{\epsilon + 2}{3\epsilon} \right) \right\}, \\ n_2 &= \sqrt{\epsilon_o} = \sqrt{\epsilon} \left\{ 1 + H^2 N \frac{\epsilon + 2}{6\epsilon} (a + 2b) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29.53)$$

で與へられる。その場の無い場合に對して $\sqrt{\epsilon} = n$ と置いて、平均屈折
率 \bar{n} を作れば、

$$\bar{n} = \frac{2n_1 + n_2}{3} = n \left\{ 1 + H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n^2} \left(a - \frac{2}{3} f^2 N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right) \right\} \dots\dots\dots(29.54)$$

となり、(29.53) より

$$\left. \begin{aligned} n_1 - \bar{n} &= -H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(b + \frac{f^2}{3} N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right), \\ n_2 - \bar{n} &= 2H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(b + \frac{f^2}{3} N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29.55)$$

を得るから、この兩者の間に

$$\frac{n_2 - \bar{n}}{n_1 - \bar{n}} = -2 \dots\dots\dots(29.56)$$

なる簡単な關係が成立つ。而して二重屈折として

$$n_2 - n_1 = H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(8b + f^2 N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right) \dots\dots\dots(29.57)$$

が求められる。

磁場に於けるこの横二重屈折の現象はコットン・ムートンが初めて觀測し
たが、普通これは非常に小さく、瓦斯體では未だ觀察されず、たゞ數種の
液體に就いて研究されて居るだけである。檢光子廻轉で檢べるのでなく、
補整板を挿入してなすのである。磁場にある物質中の光路を l とすれば、
磁場で生ずる位相差は

$$\Delta = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_0} l = C l H^2 \dots\dots\dots(29.58)$$

で、 C なるコットン・ムートンの常數は (29.57) より定められる。 $C \lambda_0 =$
 $(n_2 - n_1)/H^2$ を絶対コットン・ムートンの常數と云ふ。 C の符號は正負になり
得る。この屈折率の絶對値の變化又は(29.56)とファラデー効果との關係は
未だ實驗的に證明されて居ない。一般論より明かな如くこの常數 C と温
度との關係は $C = C_0 + \frac{1}{T} C_1 + \dots\dots$ なる表現を取る可く、一般に第一項
は反磁性に、第二項は常磁性に對應して、常磁性(固定)能率を持つ物質に
ては反磁性は常磁性に比して非常に小であるから、 $C_0 < \frac{1}{T} C_1$ となる。従
つて $C \propto \frac{1}{T}$ が豫期される。

3. ケル効果

透明體が電場にて二重屈折を呈する様になる現象であつて、1875年にケルが発見した現象である。薄い硝子板を金屬電極間に挿入し、その蓄電器の電場に垂直に光を通せば、直交ニコルにて明るくなり、檢光子を廻轉してもそれを除去出来ないから、楕圓偏光であることが判る。而して電場に於て物質はその場に平行な軸を持つ一軸性結晶の如き狀況を示す。

固体に於ては電場が先づ力學的變形を起させ、そのために二次的に光學異方性を來らすかも知れないが、かくの如き間接的作用でなく直接電場によつて光學的異方性の起ることが、液體、氣體に於て種々なる方法で認められた。

この現象の理論は一般的公式(29.15)―(29.20)に含まれて居るが、外場 F の作用下にてその場軸の方向にある物質中の光に対する分極能テンソルの平均値を與へる(29.15)は、分子の凡ての方位に亙つて平均された値を示すもので、電場と磁場は鏡面に關して異つた對稱性を持つて居るから、今迄未だ考へて居なかつた處の磁場がその性質上その方向に直角な平面を對稱面として持ち、電場はその方向に平行な平面を對稱面として持つ點を考慮に入れねばならない。 z をインデックスとするテンソル \bar{A} の成分は \bar{A}_{zz} のみであるから、 z 軸の方向を逆にしても(29.15)の量の上には影響がないので、外場に垂直な對稱面を持つ磁場の場合には何等特殊化する必要はない。然し電場の場合にはその場に平行な鏡面が存在するために特殊化が必要になる。 yz 平面に於ける鏡像によつて x 軸の方向を逆にすれば、 $\bar{A}_{xy} = 0$ の時にのみ分極 p と光場 \mathcal{E}' との間の關係が不變になる。即ち(29.15₃)に據ればこの條件は $f = 0$ を意味する。かくの如き特殊化によつて(29.20)の式から F の一次の項全部が無くなつて了ふ。 F に対しては直接外電場 E でなく有效場 $E \frac{\epsilon^0 + 2}{3}$ を代入せねばならない。 ϵ^0 は

靜的電媒常數である。然る時は(29.23)が直ちに用ひられて、主電媒常數

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_e &= \epsilon + E^2 N (a - b) \frac{\epsilon + 2}{3} \left(\frac{\epsilon^0 + 2}{3} \right)^2, \\ \epsilon_o &= \epsilon + E^2 N (a + 2b) \frac{\epsilon + 2}{3} \left(\frac{\epsilon^0 + 2}{3} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29.59)$$

を持つ一軸結晶と全く同等になる。

その場軸に直角な二重屈折を以てこの現象の特性を表し、ケルの常數として

$$B = \frac{n_o - n_e}{\lambda E^2} = N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{3b}{\lambda} \dots\dots\dots (29.60)$$

或は屢々 $B\lambda = K_e$ が用ひられる。任意の一軸性結晶と異り、この人工的二重屈折に對しては $\frac{n_o - n_e}{n_e - n_o} = -2$ なる關係がある。ケルの常數は勿論使用する光の波長 λ 及び検査する物質の溫度に據り、標準的物質として屢々用ひられる CS_2 に對しては、 $20^\circ C$ $Na-\lambda 589 m\mu$ にて $B = 3.21 \cdot 10^{-7}$ である。こゝで E は絶對靜電單位で測られて居る(1 e.s.u. = 300 volt/cm)。

(29.60)に見る如く B は分子の異方性 b の一つの尺度であつて、 b は(29.16₃)で與へられるから、それに対して

$$B = B_0 + B_1 + B_2 \dots\dots\dots (29.61)$$

と書ける。光場によつて直接變形されることによる項 B_0 に比して常溫乃至低溫にては B_1, B_2 の方が大きい。

簡単な構造の凡ての分子にて、特に二原子分子にて光學的主軸系は靜的電媒軸系と大約一致するから、混合項 α_{xy} は零と見做し得 α_{xx} を α_x と書いて、無雙極子物質 ($p^{(0)} = 0$) に對してケル効果を決定する常數は(29.18)より

$$b_1 = \frac{1}{45} \{ \alpha_x - \alpha_y (\alpha_x^0 - \alpha_y^0) + (\alpha_y - \alpha_z) (\alpha_y^0 - \alpha_z^0) + (\alpha_z - \alpha_x) (\alpha_z^0 - \alpha_x^0) \}, \dots\dots\dots (29.62)$$

雙極子のある物質に対してはこれに小なる量 $\alpha_{x,y,z}$ の乗ぜられる $p^{(0)}$ の項が附加されるが、それは大切でない。更にこの場合

$$b_2 = \frac{1}{45} \{ (\alpha_x - \alpha_y)(p_x^{(0)2} - p_y^{(0)2}) + (\alpha_y - \alpha_z)(p_y^{(0)2} - p_z^{(0)2}) + (\alpha_z - \alpha_x)(p_z^{(0)2} - p_x^{(0)2}) \} \dots \dots \dots (29.63)$$

なる項が現れる。 b_2 は普通 b_1 より大である。

液体にては屢々分子の複合が起るからこれ等理論的公式は、特に温度に據る項は應用不可能になるが、瓦斯のケル効果にては充分理論的考察が行はれる。理想瓦斯方程式を満足する瓦斯にては單位體積の分子数は壓力 p にて

$$N = \frac{p}{kT}$$

この値を (29.60) に入れて、 $\epsilon^0 = 1$ として

$$B = p \frac{n^2 + 2}{6n} \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{3}{\lambda} \left(\frac{b_0}{kT} + \frac{b_1}{k^2 T^2} + \frac{b_2}{k^3 T^3} \right) = B_0 + B_1 + B_2 \dots \dots \dots (29.64)$$

を得る。従つて b_0 が小で無視される程度の時雙極子瓦斯にては近似的に BT^3 が、無雙極子瓦斯にては BT^2 が一定になる可きであるが實驗も亦これを示して居る。

常數 B の符號に就いて一言しやう。光學的と電媒の主軸系が一致するとして (29.62), (29.63) が成立し、極大電媒と光學分極能の方向は一致するから (29.62) にある積の二因子は常に同符號であつて b_1 は常に正になる。然るに實驗上 B が負の場合もあつて、それは b_2 にのみ據るのである。従つて雙極子物質のみに限つて B が負になり得る筈で、實驗でもこれを示して居る。而して b_2 は極大光學的分極能の方向と電氣能率の方向とが一致せず互に直角か殆んど直角の時にのみ負になり得るのである。この

狀況は鹽化メチル及びクロロフォルムの例に明かに見られる。 b_1 は $1/kT$, b_2 は $1/k^2 T^2$ を乗ぜられるから、二つの異つた温度でケル常數を測定すれば、 b_1, b_2 をそれぞれ定められ従つて b_2 の符號も定められる。高温にては凡ての物質は正ケル効果を示すことも判る。大概の物質にて極大分極能の方向はその分子の最大空間的擴りの方向と一致して居て、ケル効果の符號並に電氣能率の方向を知れば、分子構造に關する知識が得られる。

最後に電氣的二重屈折の惰性に就いて注意する。これを測るために蓄電器放電にて起る速い電氣振動で電場と火花間隙間の火花放電を利用した光源とを同時に作る。この光源からの光を直接蓄電器板間の液體を通し、又その光の一部は四枚の反射鏡で適當の光路を経て後にその液體を通す様にする。その光路の長さから時間が出せるから、この電氣的二重屈折の消える時間差が測定されるのである。CS₂ の場合それは約 10^{-8} sec で、かくの如く緩和時間が短い事はこの現象が力學的異方性に原因して居るのでないことを語つて居る。又かくの如く惰性のないことを利用したケルセル (Kerr Cell) は光學的信號を電氣的信號に移す理想的な繼電器である。これは電送寫眞、トーキーフィルムその他に應用され、又これは非常に短い時間の測定例へば螢光現象の繼續時間測定等に應用される。

参 考:

- M. Faraday: Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1846, 1; Pogg. Ann. Bd. 68 (1846), 105; Bd. 70 (1847), 283.
- R. Ladenburg: Die magnetische Drehung der Polarisationssebene, Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys. 11. Aufl., Bd. II, 2. Hälfte, 2. Teil, Braunschweig 1929.
- G. Wiedemann: Pogg. Ann. Bd. 82 (1851), 215.
- E. Verdet: Ann. Chim. et Phys. Bd. 41 (1854), 570; Bd. 52 (1858), 151.
- A. Kundt: Wiedem. Ann. Bd. 23 (1884), 228; Bd. 27 (1885), 191.
- S. M. Kirn: Ann. Physik Bd. 64 (1921), 572.

L. H. Siertsema u. M. de Haas: Phys. ZS. Bd. 14 (1913), 568.
 J. F. Sirks: Phys. ZS. Bd. 14 (1913), 340.
 H. Becquerel: Ann. Chim. et Phys. Bd. 5 (1908), 238.
 J. Becquerel, Kamerlingh Onnes et W. de Haas: C. R. Bd. 181 (1925), 831.
 A. S. S. van Heel: Dissert. Leiden 1925; Phys. Ber. 1926, 704.
 A. Cotton et H. Mouton: C. R. Bd. 145 (1907), 229.
 G. Szivessy: Ann. der Phys. Bd. 69 (1922), 236.
 J. Kerr: Phil. Mag. Bd. 50 (1875), 337, 446; Bd. 8 (1879), 85, 229; Bd. 13 (1882), 53, 248; Bd. 37, 380; Bd. 38 (1894), 144.
 W. Voigt: Lehrb. d. Magneto-u. Elektro-optik, Leipzig u. Berlin 1908.
 P. Langevin: Ann. Chim. et Phys. Bd. 5 (1905), 70; Le Radium Bd. 7 (1910), 249.
 J. J. Larmor: Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), Bd. 190 (1897), 232.
 M. Born: Abh. Berl. Akad. 1916, 614; Ann. d. Phys. Bd. 55 (1918), 177.
 O. D. Tauern: Ann. d. Phys. Bd. 32 (1910), 1064.
 H. A. Stuart: Kerreffekt und Molekülbau. ZS. f. Phys. Bd. 55 (1929), 358; Bd. 59 (1930), 13; Bd. (1930), 533.
 H. Abraham et J. Lemoine: C. R. Bd. 129 (1899), 206.
 A. Karolus: Phys. ZS. Bd. 29 (1928), 698.
 P. Pringsheim: Fluoreszenz und Phosphoreszenz, 3. Aufl. Strukt. d. Materie, Bd. VI. Berlin 1928.

§ 30. 光の散亂

マックスウェルの式から得られる普通の法則に従つて光が傳播するのは既に § 26, § 27 にて述べた様に低温に於ける理想的結晶格子内のみで、實際の物質中では、常に分子の配置がそれ自身或は熱運動のために理想的に規則正しくないために起る光の散亂によつて光損失を生ずる。均等透明体内に多くの粒子が散在する場合に、これを通過する光線の路が入射光に對し傾いた方向から見ると、明るく濁つて見えるのをティンダルが初めて観

察したので、この現象をティンダル現象或は効果と云ふ。膠質溶液のみならず瓦斯体内に浮遊する微子によつてもこの効果が現はれ (例へば青空の光)、その散光は偏光されて居る。

既述の如く散光は單位體積の電氣能率 \bar{p} の搖動とその平均値 \bar{p} に據り、その過剩 $\bar{p} - \bar{p} = \Delta\bar{p}$ はコヘーレントでない球面波を起し、それは散光として凡ての方向に傳播するのである。振動する雙極子の電場が如何にこれに關係し、各方向に如何程の光エネルギーが送られるかを論ずるには、(26.4) 中のヘルツベクトルに (26.5) を代入してその雙極子から遠く隔つた場所を考へ、 $1/r$ の最低次項のみを考へれば良い。即ち簡単な計算から

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \right), \quad \mathcal{H} = -\frac{1}{c^2 r^2} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \right) \dots\dots (30.1)$$

を得、その雙極子が純調和振動をなして

$$\mathbf{p} = p_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (30.2)$$

ならば、(30.1) は

$$\mathcal{E} = -\frac{\omega^2}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \quad \mathcal{H} = \frac{\omega^2}{c^2 r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \dots\dots\dots (30.3)$$

となる。

§ 24 にて論じた電媒性半導體の小球によつて廻折された波は振動する雙極子の場と了解される。即ち電氣能率 p が x 方向に振動して居るとすれば、§ 24 にて導入した球面極座標を用ひて (30.3) から

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r} \\ \mathcal{E}_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r} \\ \mathcal{E}_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= 0, \\ \Phi_y &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \cos \theta \frac{e^{-i\omega r/c}}{r}, \\ \Phi_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (80.5)$$

を得る。これから簡単な計算でその極座標成分として

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\theta &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \cos \theta \cos \varphi \frac{e^{-i\omega r/c}}{r}, & \mathcal{E}_\varphi &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \\ \mathcal{H}_\theta &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin \varphi \frac{e^{-i\omega r/c}}{r}, & \mathcal{H}_\varphi &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30.6)$$

なる表現が得られる。(24.51)とこれ等の表現とを比較すれば、兩者全く同形であつて、たゞ(30.6)では實數振幅を持つ真空中の雙極子振動を取扱つて居るに反し、(24.51)では電媒常數 $\epsilon^{(0)}$ の媒質中で複素振幅を持つ雙極子振動に関するものを表して居る。この入射波に対する位相差を考へなければ、兩者の比較からこの同等な雙極子の極大振幅に対して

$$\frac{\omega^2}{c^2} p_0 = \left| \frac{\alpha^3}{k_2^{(0)} \sqrt{\epsilon^{(0)}}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right| \dots\dots\dots (30.7)$$

なる關係が成立ち、(24.44)を利用して

$$p_0 = R_0^3 \epsilon^{(0)} \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right| = R_0^3 \epsilon^{(0)} \sqrt{\frac{\omega^2 (\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(0)})^2 + 16 \pi^2 \sigma^2}{\omega^2 (\epsilon^{(i)} + 2 \epsilon^{(0)})^2 + 16 \pi^2 \sigma^2}} \dots\dots\dots (30.8)$$

傳導率が零ならば n は n' となつて

$$p_0 = R_0^3 \epsilon^{(0)} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = R_0^3 \epsilon^{(0)} \frac{\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(0)}}{\epsilon^{(i)} + 2 \epsilon^{(0)}} \dots\dots\dots (30.9)$$

と書け、モル屈折の理論から知られて居る様に $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ なる因子が電媒球

の散亂に對して出て來る。

次に純粹な物質でもその原子的構造及び熱運動のために起る所謂分子光散亂に就いて述べる。この問題は單位體積中の分子數を與へ得る點、ケル効果にて示したと同様、その散光の偏光を觀察して分子の異方性に關し結論出來る點にて興味がある。散光の偏光を論ずるために、檢光子を通過し得る位置を定める單位ベクトル q を導入すれば、それは經線ベクトル r と直角をなすと見る可く、

$$qr = 0 \dots\dots\dots (30.10)$$

である。従つて光ベクトルである電場の強さ \mathcal{E} の q 方向の成分は

$$\mathcal{E}_q = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{r^3} q (r \times (r \times p)) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{pq}{r} \dots\dots\dots (30.11)$$

で與へられる。處で空間部分 V の散光波が觀察されるので、その光の強さは(27.42)に従つて

$$\overline{|\Delta \sum \mathcal{E}_q|^2} = J \dots\dots\dots (30.12)$$

で與へられ、 Δ は(30.11)なる量の平均値に對する揺動を意味し、 \sum は V 内の各分子から射出される球面波全部に互つての加法を表す。従つて V によつて散亂された光の強さは(30.12)に(30.11)を入れて

$$J = \frac{\omega^4}{c^4} \frac{1}{r^2} \overline{|\Delta \sum_k p_k q|^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \frac{1}{r^2} \overline{|\Delta \sum_k p_k q|^2} \dots\dots\dots (30.13)$$

となる。こゝで p_k は k 番目の分子の瞬間的能率を表す。この能率の揺動の二乗なる因子も光の波長に據るが、吸収線から充分隔つた處では一般にその影響は小であるから、散光の強さは波長の四乗に逆比例することが判る。これに據つてレーレー卿 (Lord Rayleigh) は天光の青色、直接光が厚い空氣層を通過する様な低い太陽のその餘色たる赤色等を説明した。

$\sum_k p_k q$ の揺動には二つの原因がある。一つは V 中の分子の数 \mathcal{N} が揺動して

$$\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}} + \Delta \mathcal{N}, \dots \dots \dots (30.14)$$

他は各能率が揺動して

$$p_k = \bar{p}_k + \Delta p_k \dots \dots \dots (30.15)$$

であるから、 V に於ける瞬間的能率は

$$\sum_k p_k = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} (\bar{p}_k + \Delta p_k) = \bar{p}_k (\bar{\mathcal{N}} + \Delta \mathcal{N}) + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \Delta p_k \dots (30.16)$$

であつて、

$$\Delta \sum_k p_k = \bar{p}_k \Delta \mathcal{N} + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \Delta p_k \dots \dots \dots (30.17)$$

となる。然るに \mathcal{N} と p の揺動は統計的に互に獨立して居ると假定されるから、その積の項はなくなつて

$$\left| \Delta \sum_k p_k q \right|^2 = \left(\Delta \sum_k p_k q \right) \left(\Delta \sum_k p_k q \right)^* = |\bar{p}_k q|^2 (\Delta \mathcal{N})^2 + \left| \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \Delta p_k \cdot q \right|^2 \dots \dots \dots (30.18)$$

の如く、兩揺動が分れて入つて来る。この第一項の $(\Delta \mathcal{N})^2$ は統計力学にて計算され、分子間の相互作用が無視出来る理想瓦斯ならば、單位體積中の分子数を N とし、 V が單位體積に比して小ならば、

$$(\Delta \mathcal{N})^2 = \bar{\mathcal{N}} = N V \dots \dots \dots (30.19)$$

となる。(30.18) の第二項中、理想瓦斯の場合各分子の方向揺動が互に獨立であるから、積の項は零でたゞ二乗の項のみが残り、その数は $\bar{\mathcal{N}}$ で凡てに共通と見られるから、その第二項は $\bar{\mathcal{N}} |\Delta p \cdot q|^2$ の形になる。こゝで Δp は各分子一つの能率の揺動を示して居る。従つて (30.18) は

$$\left| \Delta \sum_k p_k \cdot q \right|^2 = \bar{\mathcal{N}} \{ |\bar{p} q|^2 + |\Delta p \cdot q|^2 \} \dots \dots \dots (30.20)$$

と書け、更に $|\Delta p \cdot q|^2 = |(\bar{p} - p) q|^2 = |\bar{p} q|^2 - |\bar{p} q|^2$ であるから、結局

$$\left| \Delta \sum_k p_k \cdot q \right|^2 = \bar{\mathcal{N}} |\bar{p} q|^2 \dots \dots \dots (30.21)$$

なる表現が得られる。

散亂を起さず粒子が原子又は一般に球面對稱的分子ならば、電氣能率の揺動を考へなくても充分で、所謂レーレー散亂に對する公式は

$$\left| \Delta \sum_k p_k \cdot q \right|^2 = \bar{\mathcal{N}} |\bar{p} q|^2 \dots \dots \dots (30.22)$$

となる。勿論この表現は空氣の如き二原子分子 O_2, N_2 よりなる瓦斯中の散亂に對しては充分なものとは云へず、たゞ歴史的興味があるのみである。(25.41), (25.40) によれば

$$\bar{p} = \alpha \mathcal{E}', \quad \alpha = \frac{1}{3} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz})$$

であるから、(30.22) より

$$\left| \Delta \sum_k p_k \cdot q \right|^2 = \bar{\mathcal{N}} \alpha^2 |\mathcal{E}' q|^2 \dots \dots \dots (30.23)$$

を得、氣體にては \mathcal{E}' と \mathcal{E} とを等しいと取れ、尙 (28.17) によつて $\alpha = \frac{n^2 - 1}{4\pi N}$ であるから、入射光が線偏光の簡単な場合を取れば、その入射光の振動ベクトルと觀測に用ふる檢光子とのなす角を ψ として

$$\mathcal{E}' q = \mathcal{E} q = E \cos \psi \dots \dots \dots (30.24)$$

で、レーレー光の強さは (30.18), (30.23), (30.19) を用ひて

$$J = A E^2 \cos^2 \psi, \dots \dots \dots (30.25)$$

$$A = \bar{\mathcal{N}} \frac{\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N^2 r^2 \lambda^4} = \frac{V}{N} \frac{\pi^2 (n^2 - 1)^2}{r^2 \lambda^4} \dots \dots \dots (30.26)$$

で與へられる。即ち散光の強さは一定の密度 (與へられた N) にて容積 V の散亂に役立つ分子の數 \bar{N} に比例し, 散亂容積 V が一定にて密度 N に逆比例することになる。

次に散光の偏光性に就いて説明する。觀測方向 r に垂直の平面内に檢光子の振動方向 q があり, 波動法線の方向 s に垂直の平面内に \mathcal{E} があつてこの兩平面の交線 l (ベクトルとして) が \mathcal{E}, q を定める角を測る原方向であるとする。即ち $\varphi = \hat{q}l, \chi = \hat{\mathcal{E}}l$ であるとし, $\theta = \hat{r}s$ とする。球面三角形 $\mathcal{E}lq$ を取れば,

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \chi + \sin \varphi \sin \chi \cos \theta \dots \dots \dots (30.27)$$

なることが判る。

そこで第一次光線が非偏光で, その總強度が E^2 ならば, q 方向に振動して居る散光の強さは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\chi &= AE^2 \frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\ &= AE^2 \frac{1}{2} (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) = AE^2 \frac{1}{2} \sin^2 \xi, \dots (30.28) \end{aligned}$$

$$\text{こゝで } \pm \cos \xi = \sin \varphi \sin \theta, \dots \dots \dots (30.29)$$

負符號を取れば, ξ は入射光の方向 s と散光の偏光方向 q との間の角であることが容易に判る。若し觀測方向と第一次光線とが平行ならば, $\theta=0$, $\xi = \frac{\pi}{2}$ で散光は φ に據らず, 従つて非偏光でその強さは q 方向の成分の二倍なる AE^2 である。若し又觀測方向と第一次光線とが直角ならば, $\theta = \frac{\pi}{2}$ で q に平行な強さは $\frac{1}{2} AE^2 \cos^2 \varphi$ となり, 第二次光線は全偏光であつて, その振動方向は第一次光線に垂直である。

次に第一次光線が偏光で檢光子なしの場合には散光の強さは

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} J d\varphi &= AE^2 \pi (\cos^2 \chi + \sin^2 \chi \cos^2 \theta) = AE^2 \pi (1 - \sin^2 \chi \sin^2 \theta) \\ &= AE^2 \pi \sin^2 \eta, \dots \dots \dots (30.30) \end{aligned}$$

$$\text{こゝで } \pm \cos \eta = \sin \theta \sin \chi, \dots \dots \dots (30.31)$$

正符號を取れば, η は觀測方向 r と電場 \mathcal{E} の方向とのなす角を示す。若し觀測方向と第一次光線とが平行ならば, 散光の強さは πAE^2 となり, 第一次光線の偏光方向には據らない。若し又觀測方向と第一次光線とが直角ならば, 散光の強さは $AE^2 \pi \cos^2 \chi$ となり, 第一次振動方向に垂直に ($\chi = 0$) 極大値, それに平行に ($\chi = \frac{\pi}{2}$) 零なる値を取る。

更に第一次光線が非偏光で檢光子なしの場合には散光の強さは

$$2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\varphi d\chi = AE^2 \pi (1 + \cos^2 \theta) \dots \dots \dots (30.32)$$

となるから, 入射光に平行に極大値, それに直角に極小値 (極大値の $\frac{1}{2}$) を持つ。 θ を太陽への視線と觀察方向との間の角として (30.32) は天光の照度分布を示す公式となる。

最後に非偏光の第一次光線に対する總散光のエネルギーは

$$2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\varphi d\chi \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} AE^2 \dots \dots \dots (30.33)$$

である。

以上略述した理論では方向揺動を持つ異方性分子に對しては不充分であつて, 空氣の如き多原子分子の氣體に於ける觀測には, η とへ非偏光の入射光に垂直に觀測しても前述の如く全偏光にはならず, 非偏光の部分が現れる。この偏光性除去の狀況を次に説明しやう。異方性分子に於てはその能率 ρ と場ベクトル \mathcal{E} とは平行でなく, 一般に第一次振動ベクトルに垂直なる ρ の成分があつて, 分子の凡ての可能な位置に互つて平均を取るとその法線成分の平均値は零であるが, 散亂に出て來るその二乗の平均は零にならない。(30.21) なる一般公式から $\cos^2 \psi$ に比例する項のみならず, φ には無關係な非偏光部分を與へる項が存在することが言へる。實際

$$pq = \sum_{XY} \alpha_{XY} q_X \mathcal{E}_Y' \dots \dots \dots (30.34)$$

であつて、今線偏光 (\mathcal{E}' は實數) を考へ、瓦斯のみを取れば、 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ で、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= E e_1, & q &= c e_1 + s e_2, \\ e_1 e_2 &= 0, & c &= \cos \psi, & s &= \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30.35)$$

とする。この e_1, e_2 は互に直角な空間固定の單位ベクトルを意味する。

(30.34) より

$$|pq|^2 = E^2 \sum_{XYX'Y'} \alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^* (c X_1 + s X_2)(c X_1' + s X_2') Y_1 Y_1'$$

を得、この互に直角なベクトルの成分の積の平均値を計算することになるが、その詳説は略してその結果だけを挙げれば、

$$|pq|^2 = E^2 \{(\Omega_0 + \Omega_1) c^2 + \Omega_2\}, \dots \dots \dots (30.36)$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{9} (A_1 + A_2), \quad \Omega_1 = \frac{1}{90} (2A_1 - A_2 + 9A_3 - 6A_4),$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{30} (2A_1 - A_2 - A_3 + 4A_4),$$

$$A_1 = \alpha_{XX} \alpha_{XX}^* + \alpha_{YY} \alpha_{YY}^* + \alpha_{ZZ} \alpha_{ZZ}^*,$$

$$A_2 = \alpha_{YY} \alpha_{ZZ}^* + \alpha_{ZZ} \alpha_{YY}^* + \alpha_{ZZ} \alpha_{XX}^* + \alpha_{XX} \alpha_{ZZ}^* \\ + \alpha_{XX} \alpha_{YY}^* + \alpha_{YY} \alpha_{XX}^*,$$

$$A_3 = \alpha_{YZ} \alpha_{ZY}^* + \alpha_{ZY} \alpha_{YZ}^* + \alpha_{ZX} \alpha_{XZ}^* + \alpha_{XZ} \alpha_{ZX}^* \\ + \alpha_{XY} \alpha_{YX}^* + \alpha_{YX} \alpha_{XY}^*,$$

$$A_4 = \alpha_{YZ} \alpha_{YZ}^* + \alpha_{ZY} \alpha_{ZY}^* + \alpha_{ZX} \alpha_{ZX}^* + \alpha_{XZ} \alpha_{XZ}^* \\ + \alpha_{XY} \alpha_{XY}^* + \alpha_{YX} \alpha_{YX}^*$$

となる。特に大切な場合なる入射光の振動数が各吸収線から遠く隔つた値を持つ場合にはテンソル α はエルミート型 ($\alpha_{XY} = \alpha_{XY}^*$) で、 $A_3 = A_4$

従つて $\frac{1}{3} \Omega_2 = \Omega_1 = \frac{1}{3} \Omega$ となり、(30.36) は

$$|pq|^2 = \Omega_0 \cos^2 \psi \cdot E^2 + \Omega \left(1 + \frac{\cos^2 \psi}{3}\right) E^2 \dots \dots \dots (30.37)$$

なる表現に書け、レ-レ-散亂部分と能率揺動に據る部分とに分れることが判る。この兩者は一般に同じ位の大きさで、たゞ若しその分子が光學的に等方性(球面對稱的)ならば、第二項は零になる ($\Omega = 0$)。 (30.37) の表現よりも偏光、非偏光の部分に分けて、線偏光の入射光の強さを $E^2 = J_0$ として、任意の方向の散光の強さを (30.18), (30.21), (30.37) に従つて

$$J = J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \overline{N} \left\{ \left(\Omega_0 + \frac{\Omega}{3} \right) \cos^2 \psi + \Omega \right\} \dots \dots \dots (30.38)$$

と書く方が便利である。こゝでこの場合

$$\Omega_0 = \alpha^2 = \frac{1}{9} (\alpha_{XX} + \alpha_{YY} + \alpha_{ZZ})^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{4\pi N} \right)^2,$$

$$\Omega = \frac{1}{30} \left\{ (\alpha_{YY} - \alpha_{ZZ})^2 + (\alpha_{ZZ} - \alpha_{XX})^2 + (\alpha_{XX} - \alpha_{YY})^2 \right. \\ \left. + 6(\alpha_{YZ}^2 + \alpha_{ZX}^2 + \alpha_{XY}^2) \right\}$$

..... (30.39)

である。

更に若し分子中に光の振動数には無關係な光學的主軸系(二原子分子ならば兩原子を結ぶ線が一つの主軸である)の存在を假定すれば、 $\alpha_{XY} = \dots = 0$ と置けるから、 $\alpha_{XX} = \alpha_X, \dots$ と書いて (30.39) Ω は

$$\Omega = \frac{1}{30} \{ (\alpha_Y - \alpha_Z)^2 + (\alpha_Z - \alpha_X)^2 + (\alpha_X - \alpha_Y)^2 \}$$

$$= \frac{1}{15} \{ (\alpha_X^2 + \alpha_Y^2 + \alpha_Z^2) - (\alpha_Y \alpha_Z + \alpha_Z \alpha_X + \alpha_X \alpha_Y) \}$$

$$= \frac{1}{5} \{ 3\Omega_0 - (\alpha_Y \alpha_Z + \alpha_Z \alpha_X + \alpha_X \alpha_Y) \} \dots \dots \dots (30.40)$$

となる。定義により主分極能は正なる數であるから、 $\Omega \leq \frac{3}{5} \Omega_0$ である。任意の場で誘導された雙極子がたゞ一つの定つた分子方向にのみ振動し得

れば、例へば α_x 以外の α の成分は零となつて、 $\Omega_0 = \left(\frac{\alpha_x}{3}\right)^2$, $\Omega = \frac{1}{15} \alpha_x^2 = \frac{3}{5} \Omega_0$ となるから、上記等號は完全な異方性分子の場合に相當する。

分子にかくの如き固定主軸系があれば、その靜的變形テンソル $\alpha^{(0)}$ も矢張同じ固定直交主軸を持ち、簡單なためその主要變形能 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の振動數に據り方が同じで靜的變形能とはたゞ常數因子によつてのみ異るとすれば、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{xy}^{(0)} = \dots = 0, \quad \alpha_{xx}^{(0)} = \alpha_x^{(0)} = \sigma \alpha_x, \\ \sigma = \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30.41)$$

と書き得る。又無雙極子物質に對するケル効果を定める常數 b_1 (29.62) と Ω との関係は、今の場合

$$b_1 = \frac{\sigma}{45} \{(\alpha_y - \alpha_z)^2 + (\alpha_z - \alpha_x)^2 + (\alpha_x - \alpha_y)^2\}$$

となるから、(30.40) から

$$b_1 = \frac{2\sigma}{3} \Omega = \frac{2}{3} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} \Omega \dots \dots \dots (30.42)$$

で與へられる。

Ω_0 は屈折率で與へられるから、觀測によつて定められる凡ての表現中にはたゞ Ω のみが入つて来る。この Ω の代りに普通デポラリゼーション (Depolarisation) の度を表す量を用ひる。即ち線偏光入射光に對しては極小散光強さと極大散光強さの比 ((30.38) にて $\cos \psi = 0$ と $\cos \psi = 1$ に對する J の比)

$$\Delta = \frac{\Omega}{\Omega_0 + \frac{4}{3} \Omega} \dots \dots \dots (30.43)$$

を、自然光入射光に對しては $\cos^2 \psi$ (χ, θ, φ の函數) を χ に關して平均

して $\frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \xi \leq \frac{1}{2}$ を用ひ、その極小散光強度と極大散光強度の比

$$\Delta' = \frac{\Omega}{\Omega_0 + \frac{7}{3} \Omega} \dots \dots \dots (30.44)$$

を導入する。 Ω に對する上記極大値 $\frac{3}{5} \Omega_0$ を入れれば、

$$\Delta \leq \frac{1}{3}, \quad \Delta' \leq \frac{1}{2} \dots \dots \dots (30.45)$$

なることが判る。

非偏光第一次光線に對する總散亂に對しては (30.33) 同様 (30.38) を χ に關して平均し、 φ, θ で積分して二倍すれば、 $\cos^2 \psi$ は $\frac{8\pi}{3}$ で置換え、常數には 8π を乗すれば良い。即ち

$$J = J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \overline{\Re} 8\pi \left\{ \left(\Omega_0 + \frac{1}{3} \Omega \right) \frac{1}{3} + \Omega \right\} \dots \dots \dots (30.46)$$

従つて瓦斯中の光吸収は少いから、入射光の總吸光を示す吸光係數として

$$h = \frac{J}{J_0} = \frac{8\pi}{9} \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \overline{\Re} \{3\Omega_0 + 10\Omega\} \dots \dots \dots (30.47)$$

を得る。更に入射光に垂直な平均光強度即ち $\theta = \frac{\pi}{2}$ に散亂された自然光 (檢光子なし) を觀測出来るが、それは $\theta = \frac{\pi}{2}$ に對して (30.38) から φ と χ に關して平均を取つて二倍して

$$\begin{aligned} J_{\perp} &= J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} 2 \overline{\Re} \left\{ \left(\Omega_0 + \frac{1}{3} \Omega \right) \frac{1}{4} + \Omega \right\} \\ &= J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \overline{\Re} \frac{1}{2} \left\{ \Omega_0 + \frac{13}{3} \Omega \right\} \dots \dots \dots (30.48) \end{aligned}$$

となる。

以上の諸公式中 Ω の代りに Δ' を用ひて

$$\Omega = \Omega_0 \frac{3\Delta'}{6-7\Delta'} \dots\dots\dots(30.49)$$

$$(\alpha_Y - \alpha_Z)^2 + (\alpha_Z - \alpha_X)^2 + (\alpha_X - \alpha_Y)^2 = \frac{45}{8\pi^2} \frac{n^2 - 1}{N} \frac{\Delta'}{6-7\Delta'} \dots\dots\dots(30.50)$$

$$h = 8\pi \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \overline{\eta} \Omega_0 \frac{2 + \Delta'}{6-7\Delta'} = \frac{8\pi^3 V}{N\lambda^4 r^2} (n^2 - 1)^2 \frac{2 + \Delta'}{6-7\Delta'} \dots\dots\dots(30.51)$$

$$J_{\perp} = J_0 \frac{3\pi^2 V}{N\lambda^4 r^2} (n^2 - 1)^2 \frac{1 + \Delta'}{6-7\Delta'} \dots\dots\dots(30.52)$$

$$b_1 = 2 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 1)}{(4\pi N)^2} \frac{\Delta'}{6-7\Delta'} \dots\dots\dots(30.53)$$

を得る。最後の式 (30.53) から氣體 ($n \approx 1$, $b = b_1/kT$) に対するケルの常數 (29.60) に従つて

$$B = \frac{3}{2} \frac{N}{\lambda} \frac{b_1}{kT} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{NkT} (n^2 - 1)(n^2 - 1) \frac{\Delta'}{6-7\Delta'} \dots\dots\dots(30.54)$$

が得られる。この式は B と Δ' なる全く異つた實驗で得られる量の間の關係を表して居て、實驗的に Δ' を測定してこの式から出した B と直接測定したケルの常數 B とを比較して見ると、無雙極子物質にては満足な一致を示す結果になるが、雙極子瓦斯では然らず。

次にケルの常數と Δ' とで異方性常數 α_X , α_Y , α_Z が定められる。多くの分子にては少くとも近似的に固定電氣的能率の方向と變形軸例へば Z 軸とは一致すると假定出来るから、 $p_x^0 = p_y^0 = 0$, $p_z^0 = p^0$ で

$$\alpha_X + \alpha_Y + \alpha_Z = 3\alpha,$$

$$2\alpha_Z - \alpha_X - \alpha_Y = 3\beta = \frac{45kT}{p^0} (kTb - b_1) \\ = \frac{45kT}{p^0} \left\{ kTb - 2 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 1)}{(4\pi N)^2} \frac{\Delta'}{6-7\Delta'} \right\},$$

$$(\alpha_X - \alpha_Y)^2 + (\alpha_Y - \alpha_Z)^2 + (\alpha_Z - \alpha_X)^2 = 3\gamma \\ = \frac{45b_1}{\sigma} = 90 \left(\frac{n^2 - 1}{4\pi N} \right)^2 \frac{\Delta'}{6-7\Delta'}$$

なる聯立方程式を得、それを解いて

$$\alpha_Z = \alpha + \beta, \quad \alpha_X = \alpha - \frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\gamma - 3\beta^2}, \\ \alpha_Y = \alpha - \frac{\beta}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{2\gamma - 3\beta^2} \dots\dots\dots(30.55)$$

なる結果を得る。 α , β , γ は屈折率, Δ' 及び與へられた温度に於ける總ケル常數 b を測定して得られる量である。 α_X , α_Y の二重値は尙他の物理的考察より X, Y 軸を如何に配するかで定まるのである。二原子分子では $\alpha_X = \alpha_Y$ であるから (30.55) は簡單になる。かくの如くして b と Δ' を測定して種々なる氣體分子の原子構造或は空間的原子配置が推察されるのである。又入射光に対する散光の強さの比の絶對値を求めるか或は吸光係數を測定し、 Δ' を用ひて逆にロシュミット數 N を出せる。多くの氣體に就いてエーイング (Ewing) が求めた結果は大體他の方法から求めた値と一致して、平均 $6.06 \cdot 10^{23}$ なる値を 1 モルに就いてのロシュミット數として得た。

以上では數回の散亂は考へて居ないから、例へば天光の偏光度に就いて實驗室觀測との不一致を來す等不備の點が残つて居る。

最後に液體及び固體に対する光の散亂に関する理論を略説しやう。この場合にも (30.13) なる一般的公式は成立つが、たゞ電氣的能率と平均粒子

数との簡単な関係が成立しない。それは分子間の相互作用を無視し得るのは理想的瓦斯に於てのみ許されるからである。然し液體に對しても密度と分極状態の揺動を理論から計算出来る。スモルコウスキヤ (Smoluchowski) 及びアインシュタインの考へに基いて、エントロピー S とマイクロ状態の確率 W との間のボルツマンの関係

$$S = k \log W$$

から出發して、平衡状態からはずれた状態の確率は

$$\frac{W}{W_0} = e^{\frac{1}{k}(S-S_0)}$$

なる公式で計算される。 S を巨視的パラメーター例へば密度 ρ と温度 T の函数として、揺動 $S - S_0 = \Delta S$ を熱力学の法則に従つて $\Delta\rho, \Delta T$ なる揺動で表し、更に分極の揺動を取入れるために、 ΔS 中に $\Delta\epsilon$ を持つ項も考へる。詳しくはガンス (Gans) の論文を見るとして、密度揺動はその物質の壓縮性に比例し、分極揺動はケル効果と直接關係することが言へる。

1928 年に至つて散亂現象にはティンダル効果の如き入射光と散光とが同じ振動数を持つ散亂以外に、この兩方の振動数が異なる様な散光もあることが發見された。所謂ラマン (Raman) 効果と云はれる現象である。單色光を入射するとその第二次光線は數種の單色波からなつて居て、その振動数の差は散亂を起さす物質に特有なものであることが判つた。この種の散亂を論ずるにはどうしても量子光學に據らねばならないから、詳説はその篇に譲つて、こゝでは單に分極能 α がティンダル (T) とラマン (R) の兩項から成つて

$$\alpha = \alpha^T + 2\alpha^R \cos(2\pi\nu_0 t + \delta),$$

ν なる振動数の光 ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t$) によつて誘導された電氣的能率は

$$\begin{aligned} p &= \alpha \mathcal{E} = \{\alpha^T + 2\alpha^R \cos(2\pi\nu_0 t + \delta)\} \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t \\ &= \alpha^T \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t + \alpha^R \mathcal{E}_0 \{\cos[2\pi(\nu + \nu_0)t + \delta] \\ &\quad + \cos[2\pi(\nu - \nu_0)t - \delta]\} \end{aligned}$$

の如くなつて、結合振動数として $\nu + \nu_0$ と $\nu - \nu_0$ とがラマン線として現はれることを注意するにとゞめる。この固有振動数 ν_0 の意味は量子的に了解されるのである。

参 考:

- J. Tyndall: Proc. Roy. Soc. London Bd. 17 (1868), 92, 222, 317.
 Lord Rayleigh: Phil. Mag. Bd. 41 (1871), 107, 447; Bd. 47 (1899), 375; Sci. Pap. Bur. Stand. Bd. I No. 8, 9, Bd. II. No. 247.
 R. Gans: Ann. d. Phys. Bd. 37 (1912), 881; Bd. 62 (1920), 331; Bd. 65 (1921), 97; Bd. 77 (1925), 317; ZS. f. Phys. Bd. 17 (1923), 353.
 M. Born: Verh. dtsh. Phys. Ges. 1917, 243; 1918, 16.
 J. Cabannes: La diffusion moléculaire de la lumière. Paris 1929.
 H. A. Stuart: Kerreffekt und Molekülbau, S. 366; ZS. f. Phys. Bd. 55 (1929), 367; Bd. 63 (1930), 547; Ergebn. exakt. Naturwiss. Bd. 10 (1921), 196.
 J. Cabannes et J. Granier: J. Phys. Radium Bd. 4 (1923), 276; C. R. Bd. 182 (1926), 885.
 Scott Ewing: J. opt. Soc. Amer. Bd. 12 (1926), 15.
 M. v. Smoluchowski: Ann. d. Phys. Bd. 25 (1908), 205.
 A. Einstein: Ann. d. Phys. Bd. 33 (1910), 1275.
 G. Ladenburg: ZS. f. Phys. Bd. 43 (1927), 773; Bd. 45 (1927), 442; Bd. 58 (1929), 95; Bd. 73 (1931), 502.
 M. Leontowitsch u. S. L. Mandelstam: Phys. ZS. d. Sowjetunion Bd. 1 (1932), 317.
 C. V. Raman and K. S. Krishnan: Nature Bd. 121 (1928), 501, 619, 711, Proc. Roy. Soc. London Bd. 122 (1929), 23.
 K. W. F. Kohlrausch: Der Smekal-Raman Effekt Berlin 1931.

§ 31. 旋光能力

今迄假定した様に分子の直径或は結晶の格子距離に比して光の波長が非常に大であるとしては説明出来ない現象特に光學的活性に就いて説明するのがこの節の目的である。その兩者の比 a/λ を一次まで取る近似で論ずる。

この現象を最初に観察したのは 1811 年アラゴ (Arago) に據つてである。結晶光學の章にて述べた如く一軸性結晶の光軸の方向にては二重屈折をなさず、この方向に平行に入射した線偏光の光線は變化せず結晶を通過すると云ふ結果を得たが、アラゴは光軸に垂直に切つた水晶(一軸性)の平行平板はそれに垂直に通過する線偏光光線の偏光平面を廻轉さすことを發見した。この現象は、ビオ (Biot)、フレネル (1820 年) 等が研究した結果、丁度磁場が二重屈折を起さす様に (ファラデー効果) 圓複屈折をなすのであることが判つた。然し自然的偏光面廻轉と磁場による廻轉とは根本的に異なることは線偏光光線を反射鏡で水晶板中同じ路を往復させれば、最初の偏光面に戻るに反し、磁場に據る場合には二倍だけ廻轉することから了解出来る。結晶板中にその光軸に沿うて一定の波長に對して定つた螺旋面が存在し、それに沿うて光ベクトルが光傳播方向には無關係に旋廻し、磁場に據る場合にはその螺旋廻の方向は光傳播方向に據ると見做し得る。種々なる結晶を検べて見ると、恰も鏡に映る物體と像の如く左右像をなす二つの結晶形を持つ結晶は凡てこの現象を呈することが判つた。左、右晶の光學的狀況は光ベクトルに對して左、右螺旋にて與へられたものである。この光學的活性と呼ばれる現象は光軸方向に平行な光線に對して起るのみならず、各傳播方向に對しても多少屈折率と振動狀況が修補され、岩鹽の如く各方向で等しい旋光性を示す様な正則結晶のあることは注意を要する。

然もこの旋光性は結晶體のみならず、液體特に溶液に於ても認められ (左砂糖, 右砂糖の水溶液) この場合個々の分子の構造上その分子中に固定の螺旋方向が存在せねばならず、その分子軸の等方的分布にも拘らず平均にて旋廻効果が残らねばならないことになる。

この光學的活性は化學に於て分子の構造を研究する上に大切な現象で、1860 年には既にバストウール (Pasteur) がこれに着眼し、1874 年にはファントホッフ (Van't Hoff)、ルベル (le Bel) が有機化學に應用して空間的分子模型を考へ、その時まで化合の多様性を表すに平面的原子價圖式を用ひたが、彼等は原子價を示す線を空間に配置して原子及び原子價の空間的配置を論ずる所謂立體化學の基礎を築いた。而して非對稱的炭素があるならば、その有機化合物は常に旋光性を持つことになる。この光學異性は炭素化合物に限らず、分子がその構造式に従つて鏡面對稱性を持たない場合には常に現れるのである。

旋光性物質内の光傳播に關する理論はデッルーデ (Drude)、フォグト (Voigt) に據つてなされたが、電氣的能率 μ と有效場の強さ \mathcal{E}' との關係を螺旋方向が分子内に存在する様な模型を考へて組立てしに反して、オゼーン (Oseen)、ボルン (Born) は次の章に述べる様な分散理論にて取る假定以外に別な假説をなさず、異方性分子に對する簡単な模型として互に關聯した調和振動子の一體系を取つたのである。これは今迄の節にて説明した分子的異方性を模型的に表したのと全く同じ概念であつて、旋光性を説明するにはこの概念に何等修正をなさず、たゞより正確に計算すれば良いのである (分子の直径 a と波長との比 a/λ の一乗の項を考へに入れて)。分子中に光に據つて起された振動狀態が波長と如何に關係するかを云ふに變形テンソル α を與へたゞけでは不充分である。§ 25 にて既に考へた磁氣的能率 m (それは a/λ 位の大きさである) が光によつて生ぜしめられるか

ら、分子の電氣的能率 p だけを計算したのでは充分でない。

分子は電荷 e_k が旋廻して出来て居ると考へ、その場所を表す位置ベクトルを時間の函数として平均磁氣的能率は

$$m = \frac{1}{2c} \sum_k e_k \left(\mathbf{r}_k \times \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (31.1)$$

で定義される。この能率は光による擾亂なしの状態では零である可く、光が作用して \mathbf{r}_k は $\mathbf{r}_k + \mathbf{u}_k$ となるとすれば、 \mathbf{u}_k の二乗の項は無視して

$$m = \frac{1}{2c} \sum_k e_k \left\{ \left(\mathbf{r}_k \times \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} \right) + \left(\mathbf{u}_k \times \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right) \right\} \dots\dots\dots (31.2)$$

と書ける。この一は分子内の電子の運動に關して取つた平均を意味する。時間による全微分の時間的平均は零であるから、

$$\mathbf{r}_k \times \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \times \mathbf{u}_k = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{u}_k) = 0 \dots\dots\dots (31.3)$$

となり、(31.2) は従つて

$$m = \frac{1}{c} \sum_k e_k \left(\mathbf{r}_k \times \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (31.4)$$

となる。この表現法は靜的模型にて磁氣刺戟を考へる場合にも許され、不連続な點電荷 e_k の體系があつてその空間的固定な平衡位置 \mathbf{r}_k から \mathbf{u}_k だけ轉置されれば、そのために起つた電氣的及び磁氣的能率は

$$p = \sum_k e_k \mathbf{u}_k \dots\dots\dots (31.5_1)$$

$$m = \sum_k \frac{1}{c} e_k \left(\mathbf{r}_k \times \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (31.5_2)$$

で與へられる可きである。更にこの轉置 \mathbf{u}_k はその粒子に働く力 \mathbf{R}_k の成分に線的關係を持ち、同時に綜合的に關係するから、

$$\mathbf{u}_k = \sum_l \sum_y A_{xy}^{kl} \mathbf{R}_{ly} \dots\dots\dots (31.6)$$

等と書ける。粒子の相互作用が恆存性であるならば、(31.6) の係數 A_{xy}^{kl} は x, k と y, l に於て對稱であつて、

$$A_{xy}^{kl} = A_{yx}^{lk} \dots\dots\dots (31.7)$$

となる可きである。量子力學で考へる様な連続的な電荷分布を持つ模型へこの不連続模型から容易に移り得、平衡位置の密度が増してそれに相應して點電荷 e_k が減すると見られる。速度分布の方は磁氣能率に關する上記の考へにて既に取り入れられて居る。 A_{xy}^{kl} は定つた k, l にて第二階級の空間テンソルを表し、それは對稱的部分 (s) と非對稱的部分 (a) とに分けられ、

$$A_{xy}^{kl} = s_{xy}^{kl} + a_{xy}^{kl}, \dots\dots\dots (31.8)$$

こゝで

$$\left. \begin{aligned} s_{xy}^{kl} &= \frac{1}{2} (A_{xy}^{kl} + A_{yx}^{lk}) = s_{yx}^{lk}, \\ a_{xy}^{kl} &= \frac{1}{2} (A_{xy}^{kl} - A_{yx}^{lk}) = -a_{yx}^{lk} = -a_{l'k'}^{k'l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31.9)$$

なる性質がある。この第二式には、非對稱的第二階級のテンソルの零でない三成分が一つの軸的ベクトル a^{kl} の成分と同様に變形すると云ふ特性が用ひられて居る。

そこで個々の點に働く外力 \mathbf{R}_k は光波に據つて起り、その光波は $\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 e^{i\omega t} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{s}}$ なる形式を持つとすれば、次の如き表現を取る。

$$\mathbf{R}_k = e_k \mathcal{E}^0 e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{s}} \dots\dots\dots (31.10)$$

\mathbf{u}_k の代りに

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{s}} \dots\dots\dots (31.11)$$

で與へられる極大振幅 \mathbf{u}_k を導入すれば、光波の \mathcal{E}^0 振幅が位相とは無關

係に定まる如く、光波の位相に対する原子の位置には無関係にこの u_k は定まる。かくの如き分子の電気能率の振幅

$$p_0 = \sum_k e_k u_k \dots\dots\dots (31.12)$$

を計算するために、(31.10), (31.11) を (31.6) に入れて

$$u_{lx} = \sum_l \sum_y A_{xy}^{kl} e_l (\mathcal{E}_y^0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(r_k - r_l) \cdot \mathbf{s}}), \dots\dots\dots (31.18)$$

従つて

$$p_x = \sum_{k,l} \sum_y A_{xy}^{kl} e_k e_l e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(r_k - r_l) \cdot \mathbf{s}} (\mathcal{E}_y^0) \dots\dots\dots (31.14)$$

となるが、波長 λ が分子の大きさに比して大でこの指数函数を級数に展開して一次の項まで取れば、

$$p_x = \sum_{k,l} \sum_y A_{xy}^{kl} e_k e_l \left\{ 1 + \frac{2\pi i}{\lambda} (r_k - r_l) \cdot \mathbf{s} \right\} (\mathcal{E}_y^0) \dots\dots\dots (31.15)$$

と書ける。これを

$$p_x = \sum_y \alpha_{xy} (\mathcal{E}_y^0) + \sum_{y,z} \alpha_{xy,z} (\mathcal{E}_y^0 \cdot \mathbf{s}_z) \dots\dots\dots (31.16)$$

なる表現にすれば、

$$\alpha_{xy} = \sum_{k,l} A_{xy}^{kl} e_k e_l, \dots\dots\dots (31.17)$$

$$\alpha_{xy,z} = \frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{k,l} A_{xy}^{kl} (z_k - z_l) e_k e_l \dots\dots\dots (31.18)$$

となり、 α_{xy} は實數で、 $\alpha_{xy,z}$ は純虚數である。而して前者は A_{xy}^{kl} の對稱的部分、後者は A_{xy}^{kl} の非對稱的部分のみに據ることが容易に判る。 k, l を互に交換すれば、(31.7) なる一般式を利用して

$$\alpha_{xy} = \sum_{kl} A_{yz}^{kl} e_k e_l, \dots\dots\dots (31.19)$$

$$\alpha_{xy,z} = -\frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{k,l} A_{yz}^{kl} (z_k - z_l) e_k e_l \dots\dots\dots (31.20)$$

を得るから、(31.19), (31.17) と (31.20), (31.18) より (31.9) を考へに入れて

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx} = \sum_{k,l} g_{xy}^{kl} e_k e_l, \dots\dots\dots (31.21)$$

$$\alpha_{xy,z} = -\alpha_{yx,z} = \frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{k,l} a_{xy}^{kl} (z_k - z_l) e_k e_l \dots (31.22)$$

となる。

光波長が無限に大なる極限では α_{xy} だけになつて、これは先に考へた變形テンソルの成分と同一である。こゝで取扱ふ可き新しい効果は $\alpha_{xy,z}$ なる附加項に在つて、それは非對稱的であり、最初の二つの指數が一致すれば零になるから、残りの必要な成分は (31.9) の第二式に導入した軸的ベクトル a^{kl} を用ひた

$$g_{xy} = \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{k,l} a_{xy}^{kl} (y_k - y_l) e_k e_l \dots\dots\dots (31.23)$$

を以て

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{yx,z} &= -\alpha_{xy,z} = -ig_{yx,z}, & \alpha_{yx,y} &= -\alpha_{xy,y} = -ig_{yx,y}, \\ \alpha_{yx,x} &= -\alpha_{xy,x} = -ig_{yx,x}, & \alpha_{yx,z} &= -\alpha_{xy,z} = -ig_{yx,z}, \\ \alpha_{zx,z} &= -\alpha_{xz,z} = -ig_{zx,z}, & \alpha_{zx,y} &= -\alpha_{xz,y} = -ig_{zx,y}, \\ \alpha_{zx,y} &= -\alpha_{xz,y} = -ig_{zx,y}, & \alpha_{zx,x} &= -\alpha_{xz,x} = -ig_{zx,x}, \\ \alpha_{xy,z} &= -\alpha_{yx,z} = -ig_{xy,z}, & \alpha_{xy,y} &= -\alpha_{yx,y} = -ig_{xy,y}, \\ \alpha_{xy,x} &= -\alpha_{yx,x} = -ig_{xy,x}, & \alpha_{xy,z} &= -\alpha_{yx,z} = -ig_{xy,z} \end{aligned} \right\} \dots (31.24)$$

と書ける。この g_{xy} なる量は一般に對稱的でないテンソルの成分で、若しカップリング係數 A_{xy}^{kl} が實數ならば (制振のない場合に相當する)、 g_{xy} 等も實數である。これを用ひて (31.16) 中の附加項を表せば、

$$\sum_{yz} \alpha_{xy,z} \mathcal{E}_y \mathcal{E}_z = -i \mathcal{E}_y (g_{xz} \mathcal{E}_x + g_{xy} \mathcal{E}_y + g_{xz} \mathcal{E}_z) + i \mathcal{E}_z (g_{yz} \mathcal{E}_x + g_{yy} \mathcal{E}_y + g_{yz} \mathcal{E}_z) = -i (\mathcal{E}_y d_x - \mathcal{E}_z d_y) \dots (31.25)$$

となり、こゝで \mathcal{E}^0 の代りに \mathcal{E} と簡単にし、

$$d_x = g_{xz} \mathcal{E}_x + g_{xy} \mathcal{E}_y + g_{xz} \mathcal{E}_z, \dots (31.26)$$

と置いてある。従つて (31.16) は

$$p_x = \sum_y \alpha_{xy} \mathcal{E}_y + i (d \times \mathcal{E})_x \dots (31.27)$$

となる。この表現は (25.39) と全く同じであるが、(25.39) では變形テンソル α_{xy} は分子に固定の座標系に關して取られ、 \mathcal{E} の代りに有效場の強さ \mathcal{E}' が用ひられて居て、こゝでの模型は直ちに一般的エルミート變形テンソルを與へることが判る。

さて (31.52) なる磁氣能率を表すに (31.6) と (31.10) を用ひ、

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = i\omega \mathcal{E} = \frac{2\pi ic}{\lambda_0} \mathcal{E} = \frac{2\pi ic}{n\lambda} \mathcal{E} \text{ を考へに入れて}$$

$$m_x = \frac{2\pi i}{\lambda n} \sum_{k,l} e_k e_l \{ \mathcal{E}_x (y_k A_{xz}^{kl} - z_k A_{yz}^{kl}) + \mathcal{E}_y (y_k A_{xy}^{kl} - z_k A_{yy}^{kl}) + \mathcal{E}_z (y_k A_{xz}^{kl} - z_k A_{yz}^{kl}) \} \dots (31.28)$$

を得る。(31.8) に従つて A を s と a に分けると、

$$\sum_{k,l} e_k e_l y_k a_{xz}^{kl} = \sum_{k,l} e_k e_l y_l a_{xz}^{lk} = \sum_{k,l} e_k e_l y_l a_{xz}^{kl} = - \sum_{k,l} e_k e_l y_l a_{xz}^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} e_k e_l a_{xz}^{kl} (y_k - y_l) \dots (31.29)$$

であるから、 a に據る部分は座標を測る零點の選擇には無關係であるが、 s に據る部分は何處にその零點を取るかに關係し、逆に固定の零點の場合分子は全體としてすれ、この對稱的部分は凡ての可能な値を取つて、分子の變位と線的關係で變化する。然るに分子は凡ての可能な位置にあつて、平

均では従つてこの對稱的部分は零になる。かくして非對稱的部分だけが残つて (31.28) は

$$m_x = \frac{2\pi i}{n\lambda} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k,l} e_k e_l \{ [a_{xz}^{kl} (y_k - y_l) - a_{yz}^{kl} (z_k - z_l)] \mathcal{E}_x + [a_{xy}^{kl} (y_k - y_l) - a_{yy}^{kl} (z_k - z_l)] \mathcal{E}_y + [a_{xz}^{kl} (y_k - y_l) - a_{yz}^{kl} (z_k - z_l)] \mathcal{E}_z \} = \frac{2\pi i}{n\lambda} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k,l} e_k e_l \{ [a_{xz}^{kl} (z_k - z_l) - a_{yz}^{kl} (y_k - y_l)] \mathcal{E}_x + a_{xz}^{kl} (y_k - y_l) \mathcal{E}_y + a_{xz}^{kl} (z_k - z_l) \mathcal{E}_z \}$$

となり、(31.23) に従つて

$$m_x = - \frac{i}{2n} \{ (g_{yy} + g_{zz}) \mathcal{E}_x - g_{xy} \mathcal{E}_y - g_{xz} \mathcal{E}_z \}, \dots (31.30)$$

又は

$$m_x = - \frac{i}{2n} \left\{ 3g \mathcal{E}_x - \sum_y g_{xy} \mathcal{E}_y \right\}, \dots (31.31)$$

こゝで

$$g = \frac{1}{3} (g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \frac{1}{3} \sum_{k,l} a_{xz}^{kl} (y_k - y_l) e_k e_l \dots (31.32)$$

となる。(31.31) 式は磁氣能率に及ぼす光ベクトルの作用が (31.25)、(31.26) に従つて電氣能率を定めるのと同じテンソル g_{xy} で定められることを示して居る。

1. 旋光性液體と瓦斯體

この場合には分子の等方的方向分布に互つて兩能率を平均すれば良い。容易に判る如く

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{xx} = \bar{g}_{yy} = \bar{g}_{zz} = g, \\ \bar{g}_{yx} = \bar{g}_{xz} = \bar{g}_{xy} = \bar{g}_{zy} = \bar{g}_{zx} = \bar{g}_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (31.33)$$

である。この g をジャイレーション (Gyration) の常數と稱して §25 にて

導入した平均分極能 α に相当して居る。分子が對稱中心も對稱面も持たない場合にのみこの g は零でない。分子に固定の座標系を考へれば、軸的ベクトル a^{kl} は二つの極ベクトルの積 $r_1 \times r_2$ の如く變形し、スカラー積 $a^{kl}(r_k - r_l)$ は $(r_1 \times r_2) \cdot r_3$ 即ち容積デテルミナント

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

の如く變形する。これは一平面に於ける各鏡像に於てその符號が變る ($x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z$) し、又一點に於ける各鏡像に於ても符號が變る ($x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$)。かくの如き各鏡像に於て (31.32) で定義された加法中一對點 k, l に一對點 k', l' が屬し、それ等に對して電荷は一致して $e_k = e_{k'}, e_l = e_{l'}$ であるが、兩一對點に於けるスカラー積は符號が變つて $a^{kl}(r_k - r_l) = -a^{k'l'}(r_{k'} - r_{l'})$ となる。

今の場合 (31.26) は

$$b = g \mathfrak{s}, \dots\dots\dots(31.34)$$

(31.27) と (31.31) はその平均にて

$$p = \alpha \mathfrak{E}' + ig(\mathfrak{s} \times \mathfrak{E}'), \dots\dots\dots(31.35)$$

$$m = -\frac{i}{n} g \mathfrak{E}' \dots\dots\dots(31.36)$$

となる。こゝで有効場の強さ \mathfrak{E}' を導入してある。これ等の式から單位體積の能率 \mathfrak{P} と \mathfrak{M} 又は電媒變位 \mathfrak{D} と磁氣感應 \mathfrak{B} の表現として

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} = \mathfrak{E} + 4\pi N p, \dots\dots\dots(31.37)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{H} + 4\pi N m \dots\dots\dots(31.38)$$

を得る。そこで有効場の強さ \mathfrak{E}' と光場との關係は §28 の時と同様、 g を持つ附加項は無視しても充分で、次の如くなる。

$$\mathfrak{E}' = \frac{\epsilon + 2}{3} \mathfrak{E}, \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi N \alpha}{3}, \dots\dots\dots(31.39)$$

かくして等方的旋光性物質に對する光學的根基本方程式は

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D} &= \epsilon \mathfrak{E} + i\gamma(\mathfrak{s} \times \mathfrak{E}), \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{H} - \frac{i}{n} \gamma \mathfrak{E}, \\ \gamma &= \frac{4\pi N}{3} (\epsilon + 2) g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.40)$$

なる表現を取る。

等方體を取扱つて居るのであるから、一般性を失ふことなくして軸を波動法線に平行に取り得て、(31.40) は

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \epsilon \mathfrak{E}_x - i\gamma \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{D}_y &= \epsilon \mathfrak{E}_y + i\gamma \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{D}_z &= \epsilon \mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{B}_x &= \mathfrak{H}_x - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{B}_y &= \mathfrak{H}_y - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_y, & \mathfrak{B}_z &= \mathfrak{H}_z - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.41)$$

と書ける。マックスウェルの式に従つて平面波に對し

$$n(\mathfrak{H} \times \mathfrak{s}) = \mathfrak{D}, \quad n(\mathfrak{E} \times \mathfrak{s}) = -\mathfrak{B} \dots\dots\dots(31.42)$$

((18.13) 參照), 今の座標系の擇び方に從へば

$$\left. \begin{aligned} n \mathfrak{H}_y &= \mathfrak{D}_x, & -n \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{D}_y, & 0 &= \mathfrak{D}_z, \\ -n \mathfrak{E}_y &= \mathfrak{B}_x, & n \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{B}_y, & 0 &= \mathfrak{B}_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.43)$$

この式によつて波動は綜合して横波であることが判るから、 xy -平面内の狀況だけに着眼して

$$\mathfrak{E}_+ = \mathfrak{E}_x + i\mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{E}_- = \mathfrak{E}_x - i\mathfrak{E}_y \dots\dots\dots(31.44)$$

及び残りのベクトルに對してもこれに對應した結合を持つて來る。然る時は (31.41) と (31.43) は

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_+ &= (\epsilon - \gamma) \mathfrak{E}_+, & \mathfrak{D}_- &= (\epsilon + \gamma) \mathfrak{E}_-, \\ \mathfrak{B}_+ &= \mathfrak{H}_+ - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_+, & \mathfrak{B}_- &= \mathfrak{H}_- - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_- \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.45)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_+ &= -in\mathcal{H}_+, \quad \mathcal{D}_- = in\mathcal{H}_-, \\ \mathcal{B}_+ &= in\mathcal{E}_+, \quad \mathcal{B}_- = -in\mathcal{E}_- \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.46)$$

なる形になる。 \mathcal{D}_+ と \mathcal{B}_+ 及び \mathcal{D}_- と \mathcal{B}_- に對する兩表現を互に等しいと置けば、

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon - \gamma)\mathcal{E}_+ &= -in\mathcal{H}_+, \quad (\varepsilon + \gamma)\mathcal{E}_- = in\mathcal{H}_-, \\ \mathcal{H}_+ - \frac{i\gamma}{n}\mathcal{E}_+ &= in\mathcal{E}_+, \quad \mathcal{H}_- - \frac{i\gamma}{n}\mathcal{E}_- = -in\mathcal{E}_-, \end{aligned} \right\} \dots(31.47)$$

\mathcal{H}_+ 及び \mathcal{H}_- をそれぞれ消去して

$$\mathcal{E}_+ \{n^2 + \gamma - (\varepsilon - \gamma)\} = 0, \quad \mathcal{E}_- \{n^2 - \gamma - (\varepsilon + \gamma)\} = 0 \dots\dots\dots(31.48)$$

を得る。従つて §5 にて論じた如く二つの圓偏光性波が傳播することになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{右圓偏光: } \mathcal{E}_+ &= 0, \quad \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = i, \quad n_+^2 - \varepsilon - 2\gamma = 0, \\ \text{左圓偏光: } \mathcal{E}_- &= 0, \quad \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = -i, \quad n_-^2 - \varepsilon + 2\gamma = 0, \end{aligned} \right\} \dots(31.49)$$

近似的に

$$n_+ = n - \frac{\gamma}{n}, \quad n_- = n + \frac{\gamma}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon} \dots\dots\dots(31.50)$$

となる。それ故線偏光入射光は單位長さに據つて

$$\chi = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) = \frac{2\pi\gamma}{\lambda_0 n} = \frac{8\pi^2}{3} N \frac{n^2 + 2}{n\lambda_0} g \dots\dots(31.51)$$

だけの角廻轉をうけ、實際傳播方向には無關係であることを知る。(31.51)

式はローレンツ・ローレンツの法則を表す公式 (28.15) と類似な旋光性に對する公式である。比廻轉角 $[\chi] = \frac{\chi}{N}$ は (31.32) に従つて

$$\frac{[\chi]}{n^2 + 2} = \frac{8\pi^2}{3} \frac{g}{n\lambda_0} = \frac{16\pi^3}{9} \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k,l} a^{kl} (r_k - r_l) e_k e_l \dots\dots(31.52)$$

なる表現となり、これは密度 (溶液體ならその濃度) に無關係である可き

だが、こゝで假定した廻轉する物質の分子が周囲の分子に據つて變化しないと云ふ假説及び周囲の分子の影響は有効場の強さで考慮されて居ると云ふ假説の下に上記の結果は正しいので、(31.52) なる量の測定値が密度に據れば、それは周囲の分子が變形を起さして居ることを物語ることになる。

(31.52) 式は總じてローレンツ・ローレンツの公式程良く満足されず、旋光能力は外よりの擾亂に對して敏感であることを知る。

2. 旋光性結晶體

この問題を解くには §27 に述べた方法で結晶格子内の個々の原子の相互作用に據る附加項を計算せねばならない。然し今こゝでは簡単なため、兩能率中電氣能率による項だけを計算して見やう。勿論嚴密に言つてこれだけでは不充分であるが、種々なる現象の二三重要なことの説明は出来る。電氣能率 ρ に對する (31.27) 式に相應して直接 \mathcal{D} と \mathcal{E} との關係が

$$\mathcal{D}_x = \varepsilon_x \mathcal{E}_x + i(\mathcal{G} \times \mathcal{E})_x \dots\dots\dots(31.53)$$

なる形で表されるとする。 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ は既に結晶光學の章にて導入した主電媒常數 (旋光能力を無視して) であつて、 \mathcal{G} は ジャイレーションベクトルで

$$\mathcal{G}_x = g_{xx} \mathcal{E}_x + g_{xy} \mathcal{E}_y + g_{xz} \mathcal{E}_z \dots\dots\dots(31.54)$$

等の成分を持つ。こゝで g_{xy} 等は格子常數と波長の比の大きさ位の値を持つ物質常數 (與へられた振動數にて) である。(31.53) と平面波に對するマックスウェルの式

$$\mathcal{D} = n^2 \{\mathcal{E} - \mathcal{S}(\mathcal{S}\mathcal{E})\} \dots\dots\dots(31.55)$$

とを結び付けて、 \mathcal{E} の成分に對し

$$\mathcal{E}_x \{\varepsilon_x - (1 - \mathcal{S}_x^2) n^2\} + \mathcal{E}_y \{n^2 \mathcal{S}_x \mathcal{S}_y - i\mathcal{G}_x\} + \mathcal{E}_z \{n^2 \mathcal{S}_x \mathcal{S}_z + i\mathcal{G}_y\} = 0 \dots\dots\dots(31.56)$$

等を得る。この聯立方程式のデテルミナントを零に置いて n^2 に対する二次式

$$n^4 (\epsilon_x \xi_x^2 + \epsilon_y \xi_y^2 + \epsilon_z \xi_z^2) - n^2 (\epsilon_y \epsilon_x (\xi_y^2 + \xi_z^2) + \epsilon_x \epsilon_x (\xi_x^2 + \xi_z^2) + \epsilon_x \epsilon_y (\xi_x^2 + \xi_y^2) - (\xi \times \xi)^2) + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_x - (\epsilon_x \xi_x^2 + \epsilon_y \xi_y^2 + \epsilon_z \xi_z^2) = 0 \dots\dots\dots(31.57)$$

が得られる。 $\xi = 0$ ならば (31.57) はフレネルの法線方程式 (18.29) と一致し、その根は n_0', n_0'' で與へられ、(31.57) は

$$(n^2 - n_0'^2)(n^2 - n_0''^2) = G^2 \dots\dots\dots(31.58)$$

なる形に書ける。こゝで G はジャイレーションのパラメーターで次の如き表現を取る。

$$G^2 = \frac{\epsilon_x \xi_x^2 + \epsilon_y \xi_y^2 + \epsilon_z \xi_z^2 - n^2 (\xi \times \xi)^2}{\epsilon_x \xi_x^2 + \epsilon_y \xi_y^2 + \epsilon_z \xi_z^2} \dots\dots\dots(31.59)$$

この屈折率の補正項 G に対しては二重屈折を無視して $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = n^2$ とすれば、

$$G = \xi \cdot \xi \dots\dots\dots(31.60)$$

となり、 ξ の成分 (31.54) を取つて

$$\left. \begin{aligned} G &= g_{xx} \xi_x^2 + g_{yy} \xi_y^2 + g_{zz} \xi_z^2 + 2g_{yz} \xi_y \xi_z + 2g_{zx} \xi_z \xi_x + 2g_{xy} \xi_x \xi_y, \\ \bar{g}_{xy} &= \frac{1}{2} (g_{xy} + g_{yx}), \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.61)$$

を得る。

$$n_0'^2 > n_0''^2 \dots\dots\dots(31.62)$$

として、(31.58) の根は

$$\left. \begin{aligned} n'^2 &= \frac{1}{2} \{n_0'^2 + n_0''^2 + \sqrt{(n_0'^2 - n_0''^2)^2 + 4G^2}\}, \\ n''^2 &= \frac{1}{2} \{n_0'^2 + n_0''^2 - \sqrt{(n_0'^2 - n_0''^2)^2 + 4G^2}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.63)$$

で與へられる。

次に振動形を定めるために (31.55) より $\xi = \frac{1}{n^2} \mathcal{D} + \xi(\xi \cdot \xi)$ を得、これを (31.58) の零次の項に入れて

$$\mathcal{D}_x \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) = -\xi_x (\xi \cdot \xi) - \frac{i}{\epsilon_x} (\xi \times \xi)_x \dots\dots\dots(31.64)$$

附加項には近似的に $\xi = \frac{1}{\bar{n}^2} \mathcal{D}$, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \bar{n}^2$ (\bar{n} は平均屈折率) を入れて

$$\mathcal{D}_x \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) = -\xi_x (\xi \cdot \xi) - \frac{i}{\bar{n}^4} (\mathcal{D} \times \xi)_x \dots\dots\dots(31.65)$$

となる。この式は

$$n = n', \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}' - i k_1 \mathcal{D}'', \quad |\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}''| \dots\dots\dots(31.66)$$

と置いて解ける。 $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ は既に結晶光學の章にて導入した非旋光性結晶の振動ベクトルである。 k_1 なる係数は G 位の大さで後に定めらる可きものである。(31.66) を (31.65) に入れて二次の項まで取り、實數部と虚數部とに分け

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_x' \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) + \xi_x (\xi \cdot \xi) &= 0, \\ k_1 \left\{ \mathcal{D}_x'' \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) + \xi_x (\xi \cdot \xi) \right\} &= \frac{1}{\bar{n}^4} (\mathcal{D}' \times \xi)_x \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31.67)$$

然るに n を n_0' 或は n_0'' と置けば $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ は (18.47) を満足するから、

$$\mathcal{D}_x' \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \frac{1}{n_0'^2} \right) = 0, \quad k_1 \mathcal{D}_x'' \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \frac{1}{n_0''^2} \right) = \frac{1}{\bar{n}^4} (\mathcal{D}' \times \xi)_x \dots\dots\dots(31.68)$$

が成立つ。この第二式から k_1 が定まる。 $\xi, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ は二つづゝ互に垂直であつて $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}''|$ であるから、 $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'' \times \xi$ と置き得、 $\mathcal{D}' \times \xi = \xi \times (\xi \times \mathcal{D}'') = \xi (\xi \cdot \mathcal{D}'') - \mathcal{D}'' (\xi \cdot \xi)$ となり、(31.68) にこれを入れて \mathcal{D}'' とのスカラ-積を取れば、 $\xi \cdot \mathcal{D}'' = 0$ であるから、

$$k_1 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_0'^2} \right) = - \frac{G}{\bar{n}^4} \dots\dots\dots (31.69)$$

又は近似的に

$$k_1 = \frac{G}{n'^2 - n_0'^2} \dots\dots\dots (31.70)$$

を得る。全く同様にして第二の解として

$$n = n'', \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}'' - i k_2 \mathcal{D}', \quad |\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}''| \dots\dots\dots (31.71)$$

と置いて、

$$k_2 = - \frac{G}{n''^2 - n_0''^2} \dots\dots\dots (31.72)$$

を得る。(31.63) から $n'^2 + n''^2 = n_0'^2 + n_0''^2$ である故に、

$$k_1 = k_2 = \frac{2G}{n_0'^2 - n_0''^2 + \sqrt{(n_0'^2 - n_0''^2)^2 + 4G^2}} = k \dots\dots (31.73)$$

なることが容易に判る。これに對して又

$$k = \frac{1}{2G} \{ \sqrt{(n_0'^2 - n_0''^2)^2 + 4G^2} - (n_0'^2 - n_0''^2) \} \dots\dots (31.74)$$

とも書ける。 k は常に ≤ 1 である。

(31.66), (31.71) なる兩解に $e^{i\varphi} \left(\varphi = -\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} (\bar{s} r) \right)$ なる因子を附して、實數部を取れば、

$$\left. \begin{aligned} n = n', \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}' \cos \varphi + k \mathcal{D}'' \sin \varphi, \\ n = n'', \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}'' \cos \varphi + k \mathcal{D}' \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31.75)$$

を得る。そこで x 軸が \mathcal{D}' に、 y 軸が \mathcal{D}'' に平行である様に座標系を擇び、 $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}''| = D$ とすれば、(31.75) の兩解は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} n = n', \quad \mathcal{D}_x = D \cos \varphi, \quad \mathcal{D}_y = k D \sin \varphi, \quad \mathcal{D}_z = 0, \\ n = n'', \quad \mathcal{D}_x = k D \sin \varphi, \quad \mathcal{D}_y = D \cos \varphi, \quad \mathcal{D}_z = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (31.76)$$

これは二つの楕圓振動で、その軸比 k は互に等しく、廻轉方向は逆で、 \mathcal{D}' と \mathcal{D}'' とにそれぞれ平行な長軸を持つて居る。一軸性結晶に於ける光軸の

方向、二軸性結晶の兩光軸の方向に於ては $n_0' = n_0'' = \bar{n}$ で、 k はその極大値 1 を取り、二つの圓偏光波 (逆に廻轉する) になる。その屈折率 n_t , n_r は (31.63) より

$$n_t = \bar{n} + \frac{G}{2\bar{n}}, \quad n_r = \bar{n} - \frac{G}{2\bar{n}} \dots\dots\dots (31.77)$$

で與へられる。

かくの如き右圓、左圓波の異つた屈折能の直接な證明はフレネルが水晶プリズムを以てなしたが、厚さ 1 の光軸に直角に切つた結晶板に垂直に線偏光波を入射すればその偏光平面は

$$\chi = \frac{\omega}{2c} (n_t - n_r) = \frac{\omega G}{2c\bar{n}} = \frac{\pi G}{\lambda \bar{n}^2} \dots\dots\dots (31.78)$$

だけの角廻轉をうける。この χ を比旋光度と稱する。

光軸から相當隔つた凡ての方向に對しては k は G の一次の小さいである。 $G \ll n_0'^2 - n_0''^2$ に對しては (31.74) に従つて第一近似で

$$k = \frac{G}{n_0'^2 - n_0''^2} = \frac{G}{2\bar{n}(n_0' - n_0'')} \dots\dots\dots (31.79)$$

であることから上記のことが言へる。

(31.61) によつて定められるジャイレーション曲面の形が結晶體の種々なる對稱要素によつて特殊の形を取ることを次に述べやう。結晶内にて一定の光傳播方向に一つの定つた正なる螺旋方向が配せられることによつて旋光性が生ずることを記憶せねばならない。従つて傳播方向が逆になれば、 G はその符號を逆にし (31.61) の如き二次の式にてそれが可能なのは G が恆等的に零の場合のみであるから、對稱中心のある場合には $G \equiv 0$ となつて、旋光性は起らない。然るに對稱面或は鏡廻轉軸があれば旋光性が可能である。何となれば例へば xz 平面が對稱面ならば、それに鏡像的な二つの傳播方向に對して廻轉は逆の方向で等しい大きさを持ち、 \bar{s}_x が $-\bar{s}_x$

になつて G は G になるからである。而して G は次の如くなる。

$$G = 2g_{xy} \xi_y + g_{xz} \xi_z \dots\dots\dots(31.80)$$

次に鏡廻轉軸のある場合には、それを z 軸として ξ_x, ξ_y, ξ_z を $-\xi_y, \xi_x, -\xi_z$ に換えれば、G は -G になり、G は

$$G = g_{xx} (\xi_x^2 - \xi_y^2) + 2g_{xy} \xi_x \xi_y \dots\dots\dots(31.81)$$

で與へられる。最後に對稱軸の場合には、この軸の周りの廻轉にて相互に移り合ふ様な方向は等しい G の値に相應して、例へば z 軸が二數的な對稱軸ならば、G は次の如き表現を取り、

$$G = g_{xx} \xi_x^2 + g_{yy} \xi_y^2 + g_{zz} \xi_z^2 + 2g_{xy} \xi_x \xi_y, \dots\dots\dots(31.82)$$

若しその對稱軸が二數以上ならば、廻轉對稱性の

$$G = g_{xx} (\xi_x^2 + \xi_y^2) + g_{zz} \xi_z^2 \dots\dots\dots(31.83)$$

となる。これ等の對稱要素を組合せて各結晶級に對するジャイレーション曲面の形を定め得る。32 結晶系中 21 が非中心的で、その内 15 が特に旋光性を呈する。それ等は主に鏡像面のない左右晶群でその他に二三の鏡像面と鏡廻轉軸を持つものがある。全體で 8 個の異型なるジャイレーション曲面があるが、自然にはこれ等凡ての 8 型の例が見出されて居ない。

一軸性結晶に就いて今少し詳しく説明すれば、この場合は (31.83) が成立つ場合であつて、その曲面は光軸の周りに廻轉對稱性を持つて居る。 θ を z 軸に對する波動法線の角とすれば、 $\xi_x = \cos\theta$, $\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} = \sin\theta$ で、G は次の如く書ける。

$$G = g_{xx} \sin^2\theta + g_{zz} \cos^2\theta. \dots\dots\dots(31.84)$$

この光軸に平行な圓複屈折は (31.77) に従つて

$$n_i - n_r = \frac{g_{zz}}{\bar{n}} \dots\dots\dots(31.85)$$

である。次に光軸に直角な光の狀況は、旋光性を無視した常光線、異常光

線の屈折率 n_o, n_e を用ひて、その互に垂直な振動楕圓の楕圓性は光軸に直角に傳播する場合、

$$k = \frac{g_{xx}}{2\bar{n}(n_o - n_e)} \dots\dots\dots(31.86)$$

で與へられる。従つて光軸に平行な複屈折及び光軸に直角な楕圓性を測定して g_{xx}, g_{zz} が定められる。フーゴトによれば水晶に對して $n_i - n_r = 0.000071$, $n_e - n_o = 0.00911$, $k = 0.0019$, $\bar{n} = 1.54880$ ($t = 18^\circ$, $\lambda = 5890 \text{ \AA}$) であるから、 $g_{xx} = 0.00010996$, $g_{zz} = 0.00005362$ となる。

二軸性結晶の旋光能力、旋光性結晶板に於ける干涉現象等興味深い問題が残されて居るが、複雑な幾何學的關係を述べる必要があるからこゝでは略す。最後に注意すべきは結晶を液體に溶して旋光能力の結晶構造による部分と分子による部分とに分け得ることである。結晶を溶せば分子による部分だけが残り、凡ての方向に互つての平均を取つて

$$g = \frac{1}{3} (g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}), \dots\dots\dots(31.87)$$

特に一軸性結晶ならば、

$$g = \frac{2}{3} g_{xx} + \frac{1}{3} g_{zz} \dots\dots\dots(31.88)$$

となる。こゝで g_{xx} は光軸方向に於ける旋光能力から直接定められる。この (31.88) なる表現は $g_{xx} \neq g_{zz}$ であるから、液體に對する表現とは異なる。何れかの鏡像對稱を持つ分子ならば溶液の旋光能力は常に消えるのであつて、左右晶形に結晶する様な結晶のみが液體にて旋光性を持つ。然し (31.87) 或は (31.88) が零になる様な結晶があつて液體にて完全に旋光能力を失つて了ふ。例へば水晶がその例である。この場合にはその旋光能力は結晶状態にあつて分子的性質ではないことが判る。實際水晶に對してはヒレロース (Hylleraas) が計算した様に格子點に於ける光學的等方性を

假定して格子構造からその旋光能力の大きさが出せる。

参 考:

- F. Arago: Mém. de la classe des sciences math. et phys. de l'Inst. 1811 (1), p. 115; Oeuvres compl. Bd. 10, 54 Paris-Leipzig 1858.
- L. Pasteur: Über die Asymmetrie bei natürlich vorkommenden organischen Verbindungen. 1868 (Ostwalds Klassiker 28).
- J. H. Van't Hoff: Bull. Soc. Chim. France (2), Bd. 23 (1875), 296, 338; Ber. deutsch. Chem. Ges. Bd. 10 (1877), 1620.
- J. A. le Bel: Bull. Soc. Chim. France (2), Bd. 22 (1874), 337.
- W. Voigt: Drudes Ann. Bd. 69(1899), 307; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1903, 155; Ann. d. Phys. Bd. 18 (1905), 646.
- P. Drude: Lehrbuch der Optik, II, Abschn. Kap. VI, Leipzig 1900; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1892, 400; 1904, 1.
- F. Poekels: Lehrbuch der Kristallographie, Leipzig 1906.
- M. Born: Dynamik der Kristallgitter, Leipzig 1915; Phys. ZS. Bd. 16 (1915), 437; Bd. 16 (1915), 251; Ann. d. Phys. Bd. 55 (1917), 177.
- C. W. Oseen: Ann. d. Phys. Bd. 48 (1915), 1.
- G. L. Palumbo: Ann. d. Phys. Bd. 79 (1926), 533.
- V. Bursian u. A. Timorew: ZS. f. Phys. Bd. 38 (1929), 475.
- K. Försterling: Lehrbuch der Optik, Leipzig 1928.
- A. Fresnel: Oeuvres compl. Bd. 1, p. 731, Paris 1866.
- J. Babinet: C. R. Bd. 4 (1837), 900.
- J. Stefan: Poggend. Ann. Bd. 124 (1865), 623.
- A. Cornu: C. R. Bd. 92 (1881), 1369.
- E. v. Fleischl: Wiedem. Ann. Bd. 24 (1885), 127.
- H. C. Pocklington: Phil. Mag. Bd. 2 (1901), 368.
- E. A. Hylleraas: ZS. f. Phys. Bd. 44 (1927), 871.

第六章 放射, 吸収, 分散の古典的理論

§ 32. 光放射に對する古典的概念

古典的光學の範囲内でこの章の放射, 吸収, 分散現象を完全に表現することは不可能なことであつて, 第二篇量子光學がその缺點を補ふために發展したのである。かくの如き状況にあるこれ等の諸問題を説明せんとするこの章では, 歴史的興味並に量子光學を充分了解する第一歩として, たゞ簡単なそれ等に關する記述にとゞめることにする。

原子又は分子が光を放射するその光源の古典的模型は既に屢々用ひた様に, 一つの振動する雙極子が電磁球面波の中心となつて, その波動はマックスウェルの理論の法則に従つて傳播すると考へるのである。然るにその雙極子がその能率を變化する時間的法則は定まつて居らず, 光の散亂理論では入射光の場の強さに比例するとされたが, 光の放射に對しては電氣的又は熱的刺戟によつてエネルギーを得てその雙極子は自由振動を起し得ると云ふ機構を考へるのである。處で稀薄な瓦斯のスペクトル線に見る如く他から獨立した原子の振動は非常に鋭い單色であつて, その振動現象は調和的であると考へ得るから, 光源の古典的模型は調和振動子と假定される。嚴密に非制振線的振動子ならば, $u(t)$ なる振幅を持つとして

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + au = 0 \dots\dots\dots(32.1)$$

なる振動方程式を満足する。こゝで m は質量, a は準彈性常數を表す。古典物理學では原子内の電子群が平衡位置にあつて, それ等はその位置の周圍で小なる振動をなし得ると假定する。かくの如き一つの電子の座標例へば x は (32.1) を満足し, 全體の電子に對しては線的方程式體系が成立

つて、所謂正規座標を導入すれば矢張 (32.1) で表される様な互にカップルされない振動の表現に直せる。

然し電子の平衡位置に束縛された電子に於て等方性なものを考へて、そのベクトル振幅を u とすれば、その各成分は (32.1) を満足して、次の公式に従つて振動する。

$$u = u_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \omega_0^2 = \frac{a}{m} \dots\dots\dots (32.2)$$

その粒子の電荷が e ならば、 u に屬する能率は

$$p = eu \dots\dots\dots (32.3)$$

で與へられ、その雙極子から遠く隔つた距離 r に於ける光振動 \mathcal{E} , \mathcal{H} は (30.1) で表される。先づ一定の方向に於ける放射を考へれば、それはポインティングベクトル \mathcal{S} で與へられて、(30.1) によつて

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{c}{4\pi c^4 r^3} \mathbf{r} \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2 \dots\dots\dots (32.4)$$

なる表現を取る。この式から明かな如く、観測方向 \mathbf{r} に直角な $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ の成分だけが \mathcal{S} に値を與へ、その光ベクトルは観測方向と一致して徑線的で、その値は

$$s = |\mathcal{S}| = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2 \sin^2 \theta \dots\dots\dots (32.5)$$

なることが判る。こゝで θ は $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ の方向と受働點へ向つた徑線ベクトル \mathbf{r} との間の角である。凡ての方向へ向つての光漏出即ち單位時間の放射は球面上に互つて積分して得られ、次の如くなる。

$$\eta = \iint S r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2 \dots\dots\dots (32.6)$$

p に對し調和振動を假定すれば、

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} p^2 \dots\dots\dots (32.7)$$

となる。

然し以上の如き非制振振動はたゞ一定のエネルギーに於てのみ可能で、實際は振動エネルギーは次第に光エネルギーになつて放射されるから、數多くの振動をなす間のエネルギー漏出がその共鳴子内に漲つて居る平均エネルギーに比して小なる場合に適當な近似的解として非制振振動が取られる。かくの如き光制振のみならず、その共鳴子からエネルギーを奪去する他の作用がある。例へば溫度運動によるドップラー (Doppler) 効果、衝突に據るエネルギー交換、原子間の電氣及び他の相互作用等に據るエネルギー損失である。然しこれ等の過程によつて起るスペクトル線の幅 dv はその線の重心の振動數 ν の値に比して非常に小さいと普通假定出来る。分光學的にこの制振作用はスペクトル線の幅が伸張することに於て觀測される。かくの如き性質の光放射現象を簡単に表現するには制振調和振動の方程式

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + au + b \frac{du}{dt} = 0 \dots\dots\dots (32.8)$$

を以てする。その解は

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} e^{\pm i\omega_0 t}, \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad \gamma = \frac{b}{m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32.9)$$

で與へられ、スペクトル線の幅が小なることより

$$\gamma \ll \omega_0 \dots\dots\dots (32.10)$$

で、多くの場合 (32.2) 同様 $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}$ と取れる。尚 γ に $\frac{1}{2}$ を附したのは振動の衰減を云ふにその振幅に關せず $|u|^2$ に比例するエネルギーに關して云ふため、そのエネルギーは

$$W = W_0 e^{-\gamma t} \dots\dots\dots (32.11)$$