研究社學生文庫

— 1027 —

數學學習法

森本清吾著

研究社

研究社學生文庫

— 1027 —

數學學習法

森本清吾著

研究社

研究社學生文庫
— 1027 —

數學學習法

森本清吾著

研 究 社

序

世情はめまぐるしく變轉する．變轉すると云うよりもむしろ混沌として摑みどころがない．戰災のどん底にあえぐ我民族には明日を慮る餘裕すらない．混沌の中にあつて右往左往するのみである．その間にも世情は變轉する．人類生活の再建に眞面目な努力をしようとする者の爲には混沌も次第に光明に向つて整理されるであらう．新しい光明，それはどこから來るであらうか．

戰爭は人類に無限の災禍をもたらした．然しそれと同時に實に劃期的な科學的成功をもたらさせた．科學は善にも惡にも公平に幸する．平和が續けば科學は人類を破滅に導く代りに繁榮を與えてくれるであらう．新しい光明は科學の發展から來る．吾々は科學によつてもたらされる新しい光を見逃さない爲に，科學の劃期的發展による生活變革の波に押流されない爲に速に科學時代を認識しなければならない．吾々が長く混沌の中に右往左往してゐれば世界は吾々の追いつかない程先に行つてしまうであらう．

殊に此の時代に成長しつつある青少年諸君の惱みは深い．諸君の長い前途の主要部分はこの書き換えられた科學の時代に入る．諸君は如何なる困難をも押切つて自己研磨に精進しなければならない時期に立たされて居る．然るに世は諸君の精進に便しない．世は諸君に同情し，諸

君を甘やかし諸君にこび，へつらつて居る．諸君に修養と勉學を，義務と勞苦とを負わせる代りに諸君に安逸と放縱とを與える．然し甘やかされ，享樂と安易とを許されて青年に何の幸福があらうか．青年の本能は將來の光明を目指した自己修養の境地を渴望して居る．

世俗如何にあらうとも青年の慾求は青年自ら之を闘いとらねばならぬ．自ら闘い取つてこそこの幸福は倍加する．青年の延びんとする力は世相に關係なく，努力を受入れてくれる．青年の延びんとする力は卽ち生きんとする力である．諸君の將來は諸君の現在あるがままの狀態では生存に適さない程進步した社會に住まねばならないことにならう．從つて諸君がこの目標に向つて努力し修養する事はむしろ諸君の生きんとする本能である．

本書は著者がかような信念の下に青年の修養の一翼たらしめる事を念じて書いたものである．學に精進することそ心の空虛に惱まされる青年に最もよい道である．特に純正科學の硏鑽は世情に左右される事がなく，邪念を導入する餘地がなく，純粹に諸君を自己硏磨の仙境に誘つてくれる．これが現代の不幸なる時代の青年が自ら不幸から脫出そうとする最も手近な道である．著者は本書を通じてかような科學的修養の精神を諸君に傳えたいと希ふものである．

本書に盛られた內容は或は舊態依然たるものと云われるかも知れない．戰爭の始まる前後に書いた部分が多く，戰爭中の急轉換にも追隨しなかつたし，近く實施されようとする新學制にも則つて居ない．然し著書は之でよいと思つて居る．めまぐるしい世情の變轉に追隨して書きかえられねばならぬような書物から，青年が何等かの據り所を求むるが如きはこつけいである．それは混沌の中に右往左往すると五十步百步である．著者は本書を固い信念を以て書いた．と云つても書き換える可きときが來れば書き換える．決して讀者の希望や便宜を無視すると云うわけではない．只徒らに世情に追隨したくないのである．時と所によつて節を變えるような勉强法は望まないのである．

本書はかような態度で書いたものであるから必ずしも讀者諸氏がその時その地位に於て最も適切な內容があるとは云ひ難い．然し百般の學の基礎たる數學の學習法に於てその大綱がいちぢるしく變るような事はあるべき筈がない．世情は餘りにもめまぐるしく變轉し，これに追隨しようとすれば弃命につかれるのみで決して得策と云い難い．勿論私の所論が最善の眞理であると自負して居るわけではないが，本書に述べる所が不動の信念の下に半生を學と共に樂しみ，學と共に悲しみ，學を生命として生きて來た一先輩の生活記錄である事を思えば，讀者諸氏としてはそこに何物か教えられる事を期し得べきではあるまいか．

敢て次代を擔う我青年諸君に呈す．

昭和二十三年一月

著 者 識 す

目　次

（目次終）

いろいろ順序を變へて讀み直して下さい。

數學學習法

第一章　數學の目的

1.　數學學習の根本

數學を如何にして學ぶべきかと云う事を明にしようとするには，先ず數學は何故に學ばなければならないかと云うことを明にしなければならない．この目的が明かにされてはじめて吾々の進むべき正道が示される．正しい道を歩むことが，それが成功の捷徑であると否とにかかはらず吾々の一貫した處世の原則である．

然らば數學は何故に學ばなければならないか．それは云うまでもなく吾々が科學的精神に徹する爲である．近代生活の根本は科學の進步にある．過去數十年に於て吾々は深くこれを體驗した．然し來るべき世に於て科學の重要さは過去のそれとは到底比較にならぬ程のものであらう．今次の戰爭は科學の戰爭であつた．世界は擧げて科學力を動員し異常な努力をこの方面に傾けた．原子力解放を頂點とする一聯の劃期的發展がもたらされた．この科學的成果は，來るべき平和の時代に人類の福祉を增進すると云う方向に向けられるであらう．吾々はこれによつてやがて輝かしい新時代の生活を享受し得るようになるだらう．然しそれが爲には，科學の發展による生活

變革の波に押し流されず，之を乘切つて行くだけの科學力をもつ事を前提とする．

かつて吾々の祖先は衆動物に率先して火を使うことをはじめた．火とは卽ち分子力解放である．之によつて人類は萬物の靈長たるの地位を得た．分子力時代の覇者が卽ち人類である．火を使い得るか否かは智能の差によつてきまつた．

今日吾々は原子力時代の初頭に立つて居る．原子力時代に生活する爲には最も進んだ科學的能力を必要とするだろう．科學的能力の有無は吾々の生活に人類の生活と他動物の生活との差を生ぜしめないと限らない．しかもその科學たるや今に於て想像し得ない程高度のものであるかも知れない．吾々は此の時代の爲に科學的能力を能ふ限り高めておかなければならないのである．

然し科學が將來如何なる形をとるかは豫見し難い．そこで吾々が科學的能力を養うとすれば，先ず科學の基礎となる學習力，研究力の涵養に重點が置かるべきである．科學の基礎能力，これ卽ち數學である．將來科學が如何なる形に進もうとも數學的能力は必ず吾々を援けてくれる．

新しい科學の時代が來る．之に處する爲に吾々は數學を學ばなければならない．之が數學學習の根本である．

2. 科學の本質

科學とは萬象の理を究め，且之を利用して人類の福利

を增進する事を目的とした學である．人智が未開であつた頃は人智に對する反省が充分でなく，あらゆる事象は人智によつて究め得る如く考へられて居た．併し科學の發達に伴ひ，逆に究理の限界が明かにせられ，「眞理」なるものは絕對的には結局吾人の克服する能はざるものなる事を覺えるに到つた．それが爲に科學を究理の學とする思想は次第に轉じて，その應用卽ち人生の福利を增進せんとする事が主なる目的となつて來た．

萬象の理はその原理に於ては單一であるかも知れないが，その表現は千差萬別である．之を一々批判解剖し之に善處せんとするには斷えざる工夫研究を必要とする．卽ち科學は之を驅使する者の研究によつて始めてその應用の妙を發揮するのである．一方から云へば科學そのものも絕えず硏究せられ進步しつゝあるのでなければ，之によつて得る人類の福利は一所に止つて增大せず，新しい福利を齎す事ができないのである．

それ故に科學に於ては「進步發達」と「工夫研究」と云ふ事が不可缺の條件である．進步なき科學は極めて短命なる存在であり，工夫なき科學はその有すべき利を我我に與へない．かくの如き科學は生命なき科學であり，死せる知識の集團である．我々の求むる科學は決してかくの如きものであつてはならないのである．

3. 數學の使命

科學がその使命たる「進步」と「應用」とを充分に遂

げんとするとき，その內容が之に適はしいやうに組織されて居なければならない．その爲にはその知識が研究と應用とに適する如く，正確で系統的で能動的な表現法を有し，又その根本精神が積極的で研究的精神に燃えて居らなければならない．そして我々の實生活に於て，又は科學の學習，研究に當つて，既習の科學知識が常に有效に活動し，我々の學習に又問題の解決に寄與してくれなければならないのである．

科學がかやうな本性を發揮する爲に必要な系統的，能動的な表現法こそ我々の數學的表現法である．科學知識は數學的表現法によつて始めてその神髓を把握することができ，又この數學的表現法を通して研究應用が可能なのである．又科學の生命とする研究的精神は數學の與へるものであり，之を實施すべき研究の方法も數學の教へる所のものである．數學は科學研究の母體である．かやうに科學はその本質とする所を數學に護られて居るのであつて，數學は科學の進步的，能動的部面を形式的に代表する所のものである．こゝに數學の第一の使命がある．

併し數學的思想の關聯する所は直接科學に關係ある部面のみではない．社會一般に科學化して來れば，直接科學に關係の少い部面に於ても少くとも科學的思考形式は當然必要になつて來る．例へば政治經濟の如き方面に於ても，これらの部面が生活，產業等，科學を基礎とする部面と接觸が密であるからと云ふ爲のみでなく，その部面自身の內に於ても事象の根柢を深く究明して合理的進步的

な施策を爲さんとする努力のある所には必ず科學的思考形式があり，この形式は數學に負ふ所のものである．この意味に於て數學の表面化する部面は科學のそれよりも一層廣いのである．今日苟も眞摯なる努力を以て國家社會の爲に盡さんと努力して居る者に於ては，その關係する部面の何れなるを問はず，必ず何程かの數學的思考の必要に直面して居る筈である．

以上を要約するに，數學を學ぶ目的は大要次の二つに分ける事ができる．

(A)　數理思想を豐富にし適正なる科學的知識の發達に資す．

(B)　工夫研究の精神とその能力を養ふ．

過去に於て我中等教育に於ける數學は(B)の目的が大部分を占めて居たやうに思はれる．それは我國に於ける科學が大衆化せず，一般社會に於て(A)の目的があまり切實でなかつた爲であらう．近時社會情勢の變化により(A)の意味に於ける數學の必要が次第に切實になつて來たので，數學の目的も(B)から(A)へと次第に移行して行く傾向が見える．勿論(A)の目的が切實になればそれに伴つて(B)の目的も亦いよいよ重要となるわけであるが，轉換期に於ける行過ぎは免れ難い所で，我中等教育界に於ては或は近い將來に(B)の目的が非常に輕視せられるやうになるのではないかと思ふ．現に文部省でも教育界でもこの問題が眞劍に討議せられて居るが，中には(B)の目的を全く無視した案も唱へられて居るやうで

ある．何れにしても此の轉換は免れ難い所で，現在の學生に取つても無視できない所であらう．

4. 學習の原則

數學の目的を(A)(B)と二つに分けるとき，(A)に於ては數學的知識の豐富なる事も多少は要求せられて居る．併しそれも數學的知識其物の豐富なる事よりも，科學的知識を正しく受入れる能力を養ふ事の方が重要である．一方に於て數學の知識は相互に關聯を持ち，一の知識は之を驅使する能力が充分ならば他の十の知識を引出す事となる．(B)の目的に於ては勿論知識內容の多少は殆ど關係がない．それ故數學の知識は量の多少と云ふ事はあまり問題でないのである．即ち

「知識の攝取よりも能力の養成」

と云ふ事が數學學習の根本原理で，他學科とも著しく異る點である．

知識の攝取は主として記憶によるから，その努力は時間的及び肉體的要素を多分に含み，その効果は自省する事が容易である．讀むとか書くとか繰返すとか云ふ外形的の努力が學習を助ける機が多いのである．併し能力の養成を主とする事になると，かやうな外形的の努力は全く恃み得ない．能力の養成は專ら精神的努力に待つので，その方法を外形的に規定する事が難く，他力などは全く恃み得ず，その効果を自省する事も容易でない．これが數學の學習が他學科のそれに比して著しく困難だと

云はれる所以である．

併しこの學習の困難であると云ふ事は，よく考へて見れば甚だ解し難い事である．困難なる事情はあらうとも，それは萬人に共通なもので，吾一人に課せられたものではない．學友と同步調で進む場合，共通の困難はそれ丈全體の程度を下げる事になるから，之によつて特に困難を增すべきいはれはない．百米競爭に比して千米競爭は，たとへ走る距離が十倍になつたとしても，競爭相手が何れも十倍の距離を走るのであるから，別に競爭が困難になつたわけでなく，百米競爭に勝つも千米競爭に勝つも，その困難の程度は同樣である．之と同じやうに，萬人が一樣の條件で學ぶ時，特に數學の學習が困難であると云ふいはれはない．むしろ困難であると云はれるその原因，即ち數學學習法の核心を衝き得たものにとつては，學友が盡く困難を感じて居る際之に秀でる事は極めて容易である．即ち數學はその學習法に徹するならば，特に最も容易なる學科となり得るものである．

要するに數學の學習法の根本は精神的努力と云ふ事に歸する．精神的努力を盛ならしめるには精神を集中せしめなければならない．精神を集中し，精神力を極度に發揮する爲には，先づ邪念を去り純眞なる好學心を以て學習の原動力としなければならない．この清淨なる心理と強い意力とが結合して精神的努力即ち學習力が生れる．そこには巧拙もなく時間空間的條件もない．この原則に徹する事が出來れば，數學程容易な學科はないのである．

5. 數學と修養

數學の學習は精神力の集中發揮を第一義とする．精神力は人類に與へられた唯一最高の能力であり，之が現實化せるものが科學による物質文明である．科學は人類がその偉大なる精神力を以て大自然と融合し或は之を克服し世界に君臨せる產物である．我々は物質文明を謳歌する前に之を構成せる人類の絕大なる精神力を理解し之を體得しなければならない．この精神力が卽ち何物をも究明し之を利用せずんば止まざる科學的硏究精神である．この精神力を繼承する事なしに物質文明を享受し之を活用して現代の覇者たる事は難い．

この意味に於て我が數學の學習法は科學の時代に於ける修養法の根本義と一致するものである．之によつて我我は物質文明の神髓に徹し，之を支配する精神力を體得し以て科學の世に處して誤らざる識見と人格とを養ひ得るのである．逆に云へば，この修養，この識見なしには現代の科學的精神を理解する事能はず，百の科學知識も單なる死物となり終るのである．かくしては我々は社會の如何なる部面に立つてもよく現代に適した施策をなし國家有用の人材たる事はできない．それ故に私は上に述べた數學の學習法を以て現代の學生の修練に最も重要なる根本精神であると主張するのである．

更に進んで私はこの根本精神を他學科にまで及ぼすべきだと考へて居る．修學が修養の根本となり得る爲には好學心と精神の集中とが修學の原動力たるべき事は何れの學科に於ても變りない．それ故他學科の學習に於ても次第に記憶を主とする試驗本位の學習法から，事物の眞相を捉へ之に數學的思索を加へるといふ科學的學習法に轉換すべきであると信じて居る．かくあつて始めて各學科が之によつて養はれた人格とよく結合し，且科學の時代に有用なる武器となるのである．この修養の根本となる數學の學習法の如何に重要なるかは再び云ふを要せぬ所である．

最後に，前に述べた物質文明と精神文化について一言加へたい．物質文明は之を形成し之を誘導しつつある精神力を無視してはその生命を理解し得ざる如く精神文化も現實に則し，之を覆ひ之と融合するものでなければ意味がない．物質と精神とは決して離るべからざるもので，物質文明は精神文化の現實の現れであり，精神文化は物質文明を通じて現實の生活に喰込むのである．科學の時代に科學的精神を忘れた精神文化など存在の理由がない．東洋が物質文明に於て西洋におくれて居たが爲東洋の精神文化が或特殊な不具の形態をとつた憾があつた．然しこれも西洋の物質文明を吸收し消化して圓滿なる文明を形成すべきであつて，之が物質文明と對立すべきものであるかの如き思想が殘つて居る間は永久に救はれないのである．

この見當ちがひは現代の混亂した教育思潮の中にも多分に見られると思ふ．物質文明の弊を云々し智育偏重を

叫ぶ聲は久しかつた．そして近時科學の振興が缺くべからざるに到るや，科學を蔑視する事はそのままとして單に振興策のみをとらんとして居る．その爲には智育によつて損はれた德性を補はんとする爲か，學業以外に何等かの修養方法を見出そうとする考えが盛に行はれて居る．然もその修養方法たるや相當非科學的のものまで無反省に横行した．その結果科學の振興は希望にそわず科學力の徹底的な相違は戰爭を一方的敗北に導いた．敗戰によりある種の非科學的思想は姿を消さざるを得なかつたが科學を蔑視する思想は決して消えたわけではない．それは餘りにも深く教育界及行政面に喰込んで居る．敗戰後の混亂した思想界に於て，口にこそ科學尊重が唱へられて居るが，それが戰時中の不徹底極まる科學振興と何等撰ぶ所がないであらう事は明かである．科學の本質を捉へ眞に科學の尊重すべきを知つた上に立つのでなくて何の科學振興があり得よう．

私はかような科學を蔑視する思想に對しては命に懸けても抗爭せんとするものである．物質文明の弊はその本性にあるのではなく，徒に外形の模倣に追隨してその精神を失つた所に存する．智育は偏重されたのでなく歪められたのである．科學を蔑視し智育を輕んずる代りに，科學の本質たる人類の叡智と精神力を把握し，歪められた智育を元に還さなければならないのである．

之に反し修學と修養とを二途とし，科學を離れ現實を離れた迷信的又は世俗的修養法を以て歪められた修學の

代償とせんとするときは如何なる結果を生むであらうか．これは一面に於てその修養が現實に則せず，或は餘りに世俗に流れ，その人格が科學の時代に適合せず，所謂地に足の着かぬ體の修養に終る恐れがあるのみならず，一面には修養と遊離された修學，蔑視の中に振興された科學が人格との結合を失ひ，精神力の支持を得ず徒に死んだ智識の集團となり終るのではなかろうか．正しく學ぶことを根本とした修養法こそ最も新時代に適はしい．特に智識階級として立とうとする青年に適はしい人格を養うものであり，他に何等かの修善法を求めようと焦る如きは危險な時代錯誤と云うべきである．

再び云う，時代は科學の時代であり更に科學の時代へと進む．原子力時代さへ來らんとして居る．科學なくして何の人類ぞ，力は牛馬に及ばず走るは犬狼にも劣り泳ぐは魚に及ばない，吾等が終日全力を盡した所が石炭の一塊石油の一掬に及ばない．吾等の恃みとするものは精神力のみ，そしてその表現が即ち科學である．科學力の高いもののみが次代の輝かしい生活を約束され，科學力の低い者は未開人の生活に轉落させられる．科學と，その精神たる數學の神髓に徹せよ，これ以外に諸君の生きる道もないし，又民族再興の望みもない．

第二章　學習の原則

6. 知識と能力

前章で，數學學習の根本原則が精神力の集中昂揚にあり，知識の攝取よりも能力の養成を主とすべき事を述べた．本章ではもう少し細かく且具體的に之を說明しよう．

知識と能力と云つてもこの二者は判然たる區別があるわけではない．例へば負數の計算法にしてもその法則を記憶し之に照して誤りなく計算し得る時は之は知識であらうが，之を反復練習する事によつて負數の特性を完全に掴み，法則を自省せずとも殆ど無意識に計算した結果が誤りないやうになればそれは能力である．數學の知識は，中等教育の範圍に於ては大體能力化し得る程度に止つて居る．併しこの僅少の知識は極めて確實で一度學んだ事項は常に腦裏にあつて活躍して居る程のものでなければならない．數學の學習に際しては今日の教材は過去のすべての教材に關係があり，その知識が不正確なるときは今日の教材の學習が不完全となる．その結果は次々と學習がおくれ急テンポに轉落して行く事となる．それ故數學の知識は教室に於て受けたものをその時間中に極めて確實に自己のものとし永久に之が薄らぐ事のないやうにしなければならない．他學科の如く**試驗前に無理な一時的の記憶をするが如きは百害あつて一利ない所である．**忘れてよい知識は始めから求めないがよい．知識は

常に全系統の學習に必要な最小限度に止め之を確實に把持しておくのである．把持するに止めず之を常に活用し反復練習してその本質に徹し，この知識を能力化する事を努めなければならない．その結果は次の事項の學習をより容易に，より確實ならしめ，學習力は加速度的に向上して行く．

知識を得た上は之を活用して工夫研究の資とし，又反復練習してその神髓を掴む事が必要である．その爲に問題の自習と云ふ事が重要な役割をする．數學の學習に於て，この問題の自習と云ふ事と基本事項の學習と云ふ事とは全然區別して考へなければならない．問題は練習する事に意義があるのでそれ自身は必要な知識ではない．これは自習する問題のみならず教場で教へられる例題の大部分にも適用される．例題は基本事項の理解を深からしめる具として教へられるもので，この目的さへ達すればそれ自身は知識として殘す必要のないものである．之については尙後節に詳しく說明する．

7. 教室に於ける學習

教室に於て，教師の講義をきく事は學習の第一歩である．此の意味に於ては數學も他學科と同樣にこの第一歩が極めて大切である．數學の知識は單純なやうであるが併しその中には深い思想を藏し，之を充分掴みとる事がこの知識を活用する爲に大切な事である．それ故に知識を得る第一歩に於て之を誤らないやう，その內藏する思

想をも併せて誤りなきやう吸收する事を心掛けなければならない．その爲には講義の一つ一つに對し**精神力と興味とを集中し最大の努力を傾けて聽きとる**事を心掛けなければならない．かくする事は單にこの知識を正しい活力あるものにするのみならず，これに傾倒した努力はそれ自身能力の修練となり次第に新知識を吸收する能力，又は數學的事項の神髓を掴む能力を增進する事になる．

世には講師の講義の難解を託つ學生が非常に多い．併しこれは學生側に於てもつと反省すべき點がありはしないか．講義の難解を託つ前に自分の努力が充分であつたか否かを反省して見る必要があらう．難講義であればこそ之を理解する爲に努力を拂ふ事ができ學習の目的がより以上達せられるのである．講義が難解ならば之に對抗する丈の努力を拂ふべきである．勿論教師側にも學生の知識程度を測つて講義をする責任はあるが，學生としてはむしろ**如何なる難講義も精神力を以て克服せんとする意氣が望ましい**．親切第一の講義は反つて學生の自發的努力を困難ならしめ，實力の向上を妨げる憂がある．努力のない所には決して向上はないのであるから，如何なる名講義も學生の努力を要求しないものは價値がない．豫備校などでなるべく親切な，努力を要求しない講義に人氣が集るが如きは，受驗と云ふ目的とは凡そ正反對の現象で受驗生心理の最も解し難い點である．

この事は讀書によつて自習せんとする場合にもあてはまる．中等學生は數學に關する限り讀書の機會は殆ど無いものと思はれるが，何かの都合でかやうな必要が起つたときにも，上の注意と全く同じ氣持で勉强するがよい．即ち書物は始めの一讀で充分に之を理解し消化するやう充分力を入れて讀むべきである．讀書百遍自ら通ずるのでなしに，一回の讀書で努力して通ずべきである．一般に科學の學習に於ては努力なき讀書は殆ど意味がない．良書，良教師の指導は勿論學習に多大の效果はあるが，それはその書物，講義に對應する丈の努力がなされた場合であり，良書程，良講義程多くの努力を學生に要求するものである．

それにつけても既習事項を確實にしておくと云ふ事は非常に大切である．書物でも講義でも既習事項は學生の頭にあるものとの前提の下に進められるから，もし既習事項の記憶が薄らいで居るとか又その知識が形だけで眞の精神を掴んで居ないとか云ふ事になると，如何にその時だけ努力しても教へる者と教へられる者との假設の喰ひちがひはどうする事もできない．その結果は新しく學習すべき事項が頭に殘らないとか，又はそれがいよいよ歪んで受入れられる事になる．之に反し講義を聽く努力の中に常に既習事項が活躍して居るならば，この既習事項は次第にその把持が確實となり，その精神が深く堀下げられて行き遂には忘却する憂のない能力化するのである．

8. 問題の自習

講義を聽く以外に數學の學習に更に重要な事は問題の自習である．なる程基本的知識を攝取する事は學習上最も大切な事にちがひないが，この方はその量があまり多くない．數學の知識は勿論限りないが，之を確實に把持しようとすれば勢ひその內容を極度に制限し，最小限度の知識の攝取で滿足しなければならない．教科書にして見ても數學の教科書は他學科のに比して分量が非常に少なく，而もその中基本事項は更にその一小部分に過ぎず，大部分は基本事項の理解運用に資する爲の例解などに過ぎない．それ故基本的知識の攝取に割くべき努力はごく僅かである．その他の努力は殆ど之が運用によつて能力を養ふ爲の問題の學習及び自習に向けられる．それ故全體としては却つてこの方が學習上，より重要な部分であるかの如き觀を呈する（もつとも數學も次第にその必要の切實性を增し，是非攝取しなければならない知識が次第に多くなつて行くから，或は遠からずこの順序は反對になるかも知れないが，それにしても問題練習の重要性は決して失はれる事はない）．

問題の練習には　(A)教室で教師の誘導の下に行ふものと　(B)宿題として自力で解決するものとあり又(C)理論の理解に便するもの　(D)計算等の練習に資するもの　(E)工夫研究の能力を養ふもの　とある．自力を信じ得る者程(A)(C)を少なくし(B)(D)(E)に力を注ぐべきである．(A)に於ては教師の指導を卒直に受入れる事は講義をきく場合と同樣であるが，なるべく自分の考へが先に進んで教師の指導と步調が合ひ多少先走る位の方が望ましい．どうせ教へてもらふのだからと努力をせず受動的態度で教へられるのを待つ事は最も禁物である．教師の方では教へないですめば教へない方がよいのであるから，學生としては出來る丈教師の指導に賴る事を少くする方が努力の機があつて學習の目的に副ふわけである．

こゝで主として述べようと思ふ事は(A)や(C)でなく(B)や(E)の方である．併しこゝで述べる大部分の事は(A)や(C)にも適用される．先づ第一に最も注意すべき事は問題練習の目的を誤らない事である．問題を練習するのは，この練習による努力で數學的能力を養はうとするのであつて，決して問題解法を知識として授けようとするのではない．それ故力さへつけば問題はやつてもやらなくともよいのである．然るに世の中には之と全く相反する學習法をして居る學生が非常に多い．例へば問題解法を記憶するとか，教師の示した解法をノートするとか，自力で解決できなかつた解法を友人に教はるとか，虎の卷を賴るとか等々．甚だしきは自力で解決しようとせずなるべく他人に教はり又は解答書に賴らんとする如き見當違ひも甚だしきものである．私は常々受驗生に云ふて聞かせてやつた．「宿題を他人から教はらうとするのはその人の合格を希つて自己の合格を望まぬ者である．

いはんや教師の目をごまかさんとする如きは病人が醫者の禁止した食物を看護人を打負かして食する如き行爲である．諸子は一體友人の爲に勉强して居るのか，教師の爲にして居るのか，「將又自分の合格の爲にか.」と．

問題は勿論記憶の必要はない．たとへ教科書の例題であつても特に教師の指定したもの以外は記憶の必要はない．問題を記憶するのは加法や減法の計算練習をし乍らその結果を一々記憶するのと同樣である．勿論問題の中には記憶してよい位興味あるものもあらう．併しそれよりも更に重要な基本事項を是非記憶しなければならないのであるから，比較的重要性の薄い事項は遠慮なく割愛すべきである．限りある人間の能力で多くの事を記憶しようと思へば當然記憶が薄弱となる．

又强いて問題の解法を知る必要もない．自分が努力してできなかつた問題の解法を知り度いのは人情であるしそれは相當の效果はあるが，兎角それは自己の努力が未だ充分でないかどうかの反省を怠り易い．努力が充分でない間に他力を恃む事は甚だ危險なことは云ふ迄もない．解法其物は何等きかねばならない必要はなく，只自分の考案がどの點に於て不備であつたかを自省する資料としてきくのである事を深く念頭においてかゝらなければならない．從つてかやうな解答をノートする事は全く無意味である．たとへ教師の示す模範答案でも指定ない限りノートの必要はない．之を理解し自己の考への足らなかつた所を自省できれば即刻忘れてしまつてよいので

ある．

併し自分で解いた解法をノートする事は全く別の意義がある．これは記錄に止めると云ふ意味でなく，問題を最後まで省略せずに遂行する事，答案を書く練習と云ふやうな利もあり，又頭の中で考へた事も實際書いて見るといろいろ不備な所があつたりして再考させられるやうな利益もある．それで自分で解決した問題は時折──三分の一位か──之をノートに淸書して見るがよい．教師が之を見てくれゝば更に幸である．このノートはあとから見る必要のないもので，自分で解決した問題を忘却した場合にも，ノートを見るよりはやはり新しく考へ直した方がよいのであるが，書くからにはやはり文章にも氣をつけ字もキレイに，答案だと思つて書く方がよい．只の練習のときは鉛筆の方が何彼と都合よいが，ノートにはペンで練習した方がよい．甚だ形式的のやうであるが種々得る所があるものである．

問題の數は强いてたくさんやらんでもよい．やればすぐ出來るやうなやさしい問題をいくらたくさんやつても同じ事である．自分の力に一寸餘る位の問題に喰ひ下りあくまでやり通すがよい．それが爲に失はれる時間は決して惜しく無いし，又結局それが失敗に終つても悔むには當らない．**問題を解決する事が目的でなく，之によつて努力し工夫する事が目的なのであるから**，努力さへ充分すれば問題の方はどうでもよいわけである．これが爲省略された問題は無視し，その解法も知らうとせぬがよ

い．努力のなかつた問題の解法を知つたからとて何の利もないのであるから，かやうな無益な事をするよりはそれ丈の努力を更に一層考へると云ふ事に使ふがよい．要するに**少しでも樂に學習できるやうな事は悉く避くべき**で，又少しでも他力を受ける事も避くべきである．

繰返して言ひたいが，本節で強調した問題の學習法は最も大切な事であり乍ら一般の者は全く反對の方法をとつて居る事を私は深く遺憾として居る所である．之を前章に述べた數學の目的と照し合せて私の言ふ事が正しいか否か批判して見ていたゞき度い．理が當然ならば他人が如何なる道を歩まうと正しい道を探る事が結局成功の道ではなからうか．

9. 時間と環境

數學を勉强するのは何時がよいか．どの位の時間したらよいかと聞かれる事がある．私はそれはその人の性格によつてちがふから何とも答へられない．私自身は，最もよく勉强して居た頃は**短時間主義**であつた．短時間に精力を集中して效果を擧げるのである．私は特に午睡を好み之に多くの時間を費して悔いなかつた．勿論夜おそく迄勉强した事は全く無かつた．一日三時間平均（これは獨學だつたから正味の勉强時間である）で，之に午睡等勉强條件を整へる時間が二時間位，計五時間位が私に與へられた自由に勉强できる時間であつた．私は若しこれ以上時間が與へられても決してあれ以上能率を擧げ得な

かつたと思つて居る．勉强は精神力の表現であるが，精神作用は物理現象ではないから時間の影響は受けない．他人が一時間かゝつて考へた事を一秒で考へつく事も可能である．精神力さへ充分に發揮すれば如何に短時間でも充分の效果を擧げ得るのである．之に反し「下手の考へ休むに同じ」と云ふ風の勉强をして居たのではいくら足をしびらせ肩をこらせても無駄である．數學の學習は肉體的修練ではないのであるから，如何にがまんして机にかじりついて居ても，精神が活動して居ない以上效果ない．徹夜で勉强したなど云ふ事は言語同斷である．それは只翌日の試驗に不利な頭の狀態を殘すに過ぎない．又勉强し過ぎて病氣になつたと云ふ人もあるが之も解し難い所である．病氣になる迄勉强が續けられるものかどうか，私にはとても信じられない．私には勉强の爲に睡眠を一時間減ずる事さへ全く不可能である．かやうな種々の解し難い事の起るのは勉强の何たるを解せず，その效果を自省せずして漫然と他人の眞似をして勉强と心得て居る者のある所から來て居るのではなからうか．勉强を進めようと思ふならば時間を延ばさうとせず，精神力を更に强くしようと努力するがよい．精神力を集中して何事も出來ない事はないのである．精神力を發揮して健康を損ねた者もないのである．

環境についてはどうか．勿論環境はよいに越した事はない．無理に不遇の環境を作つてその中で苦行しなくともよい．併し**惡い環境も精神力によつて克服できる**．他

人の私語が氣になつて勉强できぬと云ふ．他人の私語が氣になるのは，それ丈まだ精神が散漫なる證據ではないか．精神が充分集中すれば他人の私語など耳に入らなくなる筈で，これが耳に入るやうならばたとへ他人の私語はなくとも精神が充分集中して居らず，學習の效も充分とは云ひ難い．それ故環境の不良を精神力で克服した時にはその努力に對する報いは當然である．之を克服した時はそれによつて得た精神力で大きな學習の效果を期待し得るのである．不遇にある者も決して悲觀せず，その環境を肉體的努力によつてでなく，精神力によつて克服する事を試みる可きである．

只何れの場合にも缺く可からざる事は學に對する愛好心を中心として心を清く純に保ち，決して邪念を殘さない事である．精神の集中に最も有害なるものは此の邪念である．邪念のある所には決して充分の精神力は生じない．

10. 讀書と他力

數學の學習には讀書の必要はない．教科書を充分に學習し且練習すればそれ以外に何も學ぶべき事はない．もつとも數學に特殊の興味を持ち，進んで深く之を學び度いと云ふ者は數學の參考書を讀む事は結構であるが，これはごく特殊な者に限るのである．普通に只數學を得意とし又之に興味を持つ者は教科書の附錄の雜題でも自習すれば充分であるし，それで足りないとしても高々高專

入試問題集(勿論解答もヒントもないもの)位を一冊持つて之をコツコツとやる位がよい．やたら他人の作つた模範解答を讀んで見たり，學び方や考へ方のコツを探つて見たりしても何の效果もない．多讀はもとよりであるが教科書以外の書を「讀む」と云ふ事は先づ大體に於て避ける方がよい．教科書や講義の難解の箇所を解說書に頼るが如きも，やはり勞を少なくして效を求むる類で心得違ひなる事は云ふまでもない．

他力を恃むに到つては尙更心得難い所である．友人に問題の解答を敎はつたりする事については前に述べたが，これはヒントでも自分の特にわかりかねる一ケ所でもなるべく避けた方がよい．家庭敎師の如きも，課外に他の學校へ通ふが如きも何れも必要ない．只一筋に自己の努力による成功を信じて邁進すればよい．座右に百卷の良書を積まうとも，傍に何人の良師を聘しようとも，四六時中名講義に耳を傾けようとも，肝腎の精神的努力が充分でなければ魂のぬけた勉强で何等の效がない．眞に恃むべきは己の努力のみである事を知らねばならぬ．

11. 暗算と驗算

數學を學ぶ始めに於て暗算を練習する事は非常に必要な事である．これは次のやうな利益がある．

(i) 計算力を增大し之を確實にする．

(ii) 計算の形式化を防ぎ之を概念化する．

(iii) 講義の理解力を强める．

(iv) 問題の解法を工夫する便宜が多くなる．

暗算の範圍は國民學校で練習したやうな數の加減乘除の練習から次第に簡單な代數計算，方程式の解法，三角函數の取扱にまで及ぶがよい．幾何學でも問題の圖を畫かず之を念頭において丈で考へ得ればやはり暗算に準ずるものであらう．之を練習すれば講義中教師の示す計算が非常にわかりよくなり講義の理解力を增大する．又一一紙に書いて見なくとも一寸した工夫の適否は暗算で判斷できるから工夫の囘數を多くする事ができ，且道を步いて居る時や電車を待つ間など閑な時を利用し得る．この暇を利用すると云ふ事は非常に利益のある事で，机に向ふとつい心が焦つて有效な工夫ができない者でも，步いて居る時など何とはなしに考へて居ると，ずゐぶん無駄と思ふ工夫までやつて見るので却つて成功する場合が多い．これが私が (iv) なる利益を擧げた所以である．幾何で補助線を引く場合など，何本も引いてやうやく一本位役に立つものであるから，惜しまず使へる暇があると云ふ事はこの練習に便利である事は當然であらう．私はかやうな意味で頭を使はない作業時や步行時，乘車時等を幾何や代數のヒントを得る爲に利用する事をおすゝめしたい．(i) 及び (ii) の利益は暗算本來の使命で特に說明する迄もなからう．私は大體次の計算位まで暗算でできるやうになる事を希望する．

$324+538+150-429+157$,

54×12, 675×8, $2^3\times3^4\times5^3$,

$\frac{3}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{3}\times3$, $4\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}$,

6時25分$\times3$, $180^\circ\div8$,

$x=1, 2, 3, 0, -2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ のときの

$\frac{x^2+1}{(x+1)(3-2x)}$ の値，

$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}$, $1-\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a^2b}\times\frac{b}{a^2+ab}$,

$(x^2+x+1)(x+1)$, $(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2$,

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,

$x^2+x-6=0$, $x^2+2x-4=0$ の根．

暗算の實用になるものは聽取算で，之に上達するには珠算と關聯をつけるのが最も得策である．珠算についても本書で述べる筈であるが，之は他の部分と關係がうすいから省略しておく．この珠算や聽取暗算はそれ自身は非常に重要な事ではあるが，上に述べた暗算の利益の (ii)─(iv) には關係が少ない．それ故かやうな副目的を重視するとき見取暗算の方が重要である．卽ち教師が板書したものや教科書にある問題などを見てその答を暗算で出すのである．此の場合出來る限り答丈は書いた方がよい．暗算の練習は相手があつた方が便利であるから，友達同志助け合ふか父母や兄弟などに賴んで，なるべく多くその機會を得るやうにしたいものである．實に暗算は學習力の根本である．

次に必要な事は驗算である．問題は必ず最後の答が出

るまでやらなければならない事は前に述べた如くであるが，私はかくして答を出しても，之を書物にある答と合はせる事を以て滿足せず，出來るならば書物の答を參照しないで，自分で何等かの方法で自信のつく迄驗算して見ることをお勸めしたい．この事は特に受驗生に其の必要を認める．私の經驗では高專入試に際しその答案の約 30 % は誤算を作つて居る．即ち驗算によつて平均 30 點回復できるものである．5題の中4題解かうとするよりは3題解いて驗算する方が餘程有利である．確實と云ふ方から云へば2題解いて完全に驗算しておいた方が確實である．4題解いた者は 80 點とれるかも知れないが，これが3題誤つて居て 20 點しかとれないと云ふ事も決して稀な現象ではないのである．試驗場に於ける心得は取りも直さず實社會に於ける心得である．實社會に出でゝ如何に明敏な頭腦を以て事を處理しようとしても，屢ゝ誤りを犯してはその施策が成功せぬのみか，甚だしい損害を受ける事さへある．常に自分の主張し又計畫して居る事の正否を驗する注意は，如何なる職にあつても必要な事ではないか．

驗算の方法としてはなるべく主運算と無關係な徑路をたどる事と，問題の要求する條件を直接驗する方法をとると云ふ事が望ましい．例へば方程式を解いたら代入して見るとか，式を計算したら文字に特別の値を代入して見て驗するとか，作圖題では實際圖を正確に畫いて見るとか，條件を求めたときはその條件に適する數を作つて

果して假設が滿足されるか驗する等である．驗算が合はなかつたら運算の各部に驗算を行ひ，どこに誤りがあるかを探るがよい．例へば

問題 $\left.\begin{array}{l}3x+2y=16\\5x-6y=8\end{array}\right\}$ を解け．

解 $\left.\begin{array}{l}15x+10y=80\\15x-18y=24\end{array}\right\}$ を邊々相減じ $28y=56$, $y=2$.

原の第二式に代入し $5x-6=8$, $x=2.8$.

こゝで驗算をするに，原方程式に代入するわけであるが，第二式は最近に使つたから第一式に代入するが本筋である．然るに第一式に入れると $3x$ が小數位を含み滿足される筈がない．そこで $15x+10y=80$ に代入して見るとやはり滿足されない．$28y=56$ は滿足されて居る．さうすると此の間で誤つたのかも知れないが，驗して見るとさうでない．從つて x の値を誤つたのである事がわかる．

此の例のやうに小數位が出る事が不合理のやうな場合には直ちに氣がつかなくてはならない．又原式の第二式に代入すれば x の値の誤りである事はすぐわかるのである．

もう一つこゝで述べておきたいのは概算である．概算はその問題の答が大體どの位になるか豫測するものであるが，之は數量の概念が發達して來れば簡單な暗算でわかる場合が多い．從つて實際計算の結果が之と一致しないときは疑を持つて見直すのである．概算も問題解答の

形式化を防ぎ且誤りを少くする上に有效なものであるから出來る丈之を行ふがよい．試驗などになると上つてしまふせいか，實に滑稽な答案がある．私がある所で入學試驗に汽車の速度が答となる問題を出した所，最大が一時間14萬餘里，最小が3町何間かであつた．尙代數式の計算でも，次數が豫定より大きくなつたり，同次なるべき所を次數の異る項が出て來たりしたら直ちに注意すべきである．殊に幾何學的量の計算には次元の一致（線分と面積と加へたりしない事，線分を文字で表せば代數的に常に同次式となる）に注意すべきである．

本節で述べた驗算は後に方程式の解法で無緣根を除く爲の驗算とはちがふから，この點注意しておかなければならない．本節で述べた驗算や概算は問題を解く爲の便宜上する事で，解答の一部ではないから答案には强ひて書かなくともよい．

12. 初步に徹底せよ

數學は旣習事項の上に次の事項を組立てゝ行く學科である．步一步と知識を固めつゝ進む學科である．それ故初步の知識程，幾度も活用されその價値が大きいのである．旣習事項の知識が徹底して居れば次の教材に對して積極的となりその理解が極めて容易であるに反し，旣習事項が不安ならば次の教材の學習に當つて常に背後に不安があり力を旣習事項の學習に割かねばならぬ．恰度聲學を學ぶ者が發聲法と音階とを徹底的に練習しておくと否とで曲を學ぶに當つてその表現の硏究に專心し得るか否かに大きな差を生ずる如くである．それ故數學はやさしい事程大切で，やさしい事さへよく徹底して居れば可成先の方まで實力を行使し得るものである．私の經驗では多くの高專校の入試は中學三年までの教科書をミツチリやつておけば殆ど80％の點をとる事が可能である．中學二年でも恐らく50％の點はとり得るので，この點は合格者の最低點よりは遙かに高く，合格者の平均點と餘り違はないものである．不合格者は大部分二次方程式の解法を知らず，分數式の計算を誤り，又は圓周角が等しい事が證明できないで落第して居る．入學試驗でさへさうであるなら，在學中の勉强は尙更で，常にやさしい事，根本的の事又は非常に大切な事に力を注ぎ，之を徹底的に己の物とする事に主力を注ぐべきである．

一番いけないのは，どこの試驗にこんな問題が出たから，それを覺えておかないと，と云ふやうな氣分で無暗に枝葉にわたつたむづかしい問題をやる（ならまだよいが覺える）事である．之は旣に試驗に吞まれて居るので學習の根本たる好學心など毫程も認められない．之によつて力のつくべき道理もなし，又こんなものは出來なくたつて決してそれが爲に落第するものではない．どうせ少數の者しか出來ないので，之が及落の鍵になる程の點數にはならないから，勢ひ及落は他の馬鹿氣た程やさしい問題できまるのである．教科書を充分やつて居た者が試驗に當つていくら考へても出來ないと云ふ程度の問題

だつたら，恐らく出來る者は受驗者の1％に過ぎない．5題中2題この種の問題だつたとして，之が出來て入學できる者は高々受驗者の2％，合格者の10％に過ぎない．他の98％の者は殘り3題の爭奪によつて殘り90％の席を爭ふ事になる．此の場合，合格者の平均點數は2題に滿たないから，もう1題しくじつても入學できると云ふ事になる．結局前の2題を失つた事は入試に於て何等の傷にならないのである．但しこの2題中1題出來た事は相當の幸運である事は勿論である．併しこの幸運も決して偶然に見舞ふものでなく，よく勉强して居る者は幸運の機會も多くなるわけである．只この幸運を當にして勉强する事は幸運を確實に摑む所以でもなく，一方からは着實に合格し得る道を失ふ所以である事を牢記しておいてもらひたい．

かやうに入試に鞭打たれて勉强する事はそれ自身が邪念で眞正の學習を害するものであるのみならず，**結局入試其物にも有利なる所以ではない．**

計算力も根柢事項の一つで重要な部面である．然るに中學生の計算力の不足には實に驚くべきものがある．入試に例をとつて云へば，全問題の50％は相當の計算を要する問題であらう．この50％の中，受驗者が解答のヒントを摑み或程度迄之を解決するのがその約30％とすると，最後迄出來上るのはその中の40％にも滿たない．殘り60％は惜しい(?)所と云ひ度いがそんな所でなく，馬鹿氣た計算の誤や，計算能力不足により遂に途中で挫

折と云ふやうな狀態である．之に反し，單に計算だけで出來る問題も全問題中20％位はある．計算力さへ確實ならばこの20％は安全にその者の得點となる．入試に於ける20點は數學の合格點の半分に近いのである．

入試に關する限りかやうに計算力の擴充は最も有利なる事であるが，これは決して入試に限つた事ではなからうと思はれる．計算は決して單なる技術ではなく，相當の數理思想を要し，又計算中數理思想が養はれ，又他の理論がハツキリする事も少くない．のみならず我々の理論は計算によつて始めて具體化されるのであるが，理論家と雖も或程度具體化された狀態を見乍ら前進する方が足許がしつかりしてよい理論が生れる．かやうな意味で何人も計算を輕んずる事なく，充分に之を練習しつゝ進む事にしたいものである．

計算力の基礎は暗算である事は前節で述べた．暗算力を充分に活用した筆算の練習は算術及び代數の始めの方の教材の大部分である．併しこれから先に進むと計算は獨立には練習する機が少くなる．この場合我々はその所の問題を解くに當つて必ずその答を完全に出し且驗算して確信を得るまでやる事にしたい．各問題は相當の計算を含むものであるから，之によつて可成計算の練習ができるものである．受驗生の計算力の不足は功を急ぐあまり問題のヒント又は略解を知つて滿足し最後まで計算しない場合が多い爲に起つた結果ではなからうか．その結果は上に述べたやうに入試其物にも非常な惡影響を與へ

て居る．問題の數など決して多くを望む必要はないのである．いくら多くやつても無數にある問題の何パーセントもやれるものでなし，之を知識として頭に殘さうとすれば數多い丈に記憶が困難，不確實となる道理である．問題解法によつて養はれる能力は之に費した努力に比例するので決して問題數によるものではないのである．

かく觀じ來れば學生が試驗に引摺られ試驗に鞭打たれて學習の正道を失ふ事が，一々却つて試驗の成績を害し不成功の因となつて居ると云ふ事を感ずるであらう．入試は之を利用すべきもので，之に引摺られてはおしまひである．學習の正道をふみ外す勿れ．どこ迄も正々堂々の陣を張つて入試なと何なりと之を征服しつゝ進まうではないか．

13. 己の力に頼れ

最後にもう一言申述べておきたい．之は既に所々で斷片的に述べた事であるが，その精神を一まとめにしてこゝで繰返しておく．それは數學を學ぶには常に强い意志の力を作はしめ，己の力を信じ，之に頼つて進むべきだと云ふ事である．多くの學生は已の知識，經驗にのみ頼り已の能力に頼らうとしない．過去の知識經驗を生かす事は數學の本領でなく，新しい智能分野を創造する事が數學の本領である．數學に於てはごく僅かな知識も之を活用すれば何千何百の新事實を生むので，之を生ませる能力こそ眞の數學である．代數學と幾何學とを充分學べば

三角法は殆ど學ばずして之に通ずる事が出來る．立體幾何を少しも知らぬ者でも問題の意味を解する事が出來れば（定義を知つて居れば），大抵の問題は平面幾何の知識だけで解けるのである．只その解法に多少難易の差があるだけである．然るに多くの學生は自分の見た事のない問題，殊に多少毛色の變つた問題に對しては最初から恐れを抱いて充分之を考へようとしない．少し毛色の變つた問題を出すと非常に出來がわるい．又立體幾何，三角，對數など云ふ所に來ると始めから投げて居る者がある．自分は立體幾何を餘りやらなかつたから立體幾何の問題はダメであると云ふ風に始めからきめてしまふ．これが爲に甚だしい損をする．學科の程度が進めば問題は却つてやさしくなるので，かやうな所の問題の方がやさしいものが多いのである．考へさへすれば容易にできるものを始めから忌避するが如きは自信が無い事甚だしい．數學の力は精神力の發揮であり，精神力の發揮は意志の力によるものである．已の能力に信頼しどこ迄も努力しようとする意力なしに數學の問題を只既習事項を頼りに解かうとするが如きは，木によつて魚を求むるに等しい．

この故に私は數學の學習に當つて**萬遍なくと云ふ事を餘り重視しない**のである．數學の知識，殊にずつと進んだ所の知識には多少缺けた所があつてもよいので，之は他の知識と自己の能力によつて充分補ふ事ができるのである．等差級數の問題を一題もやつた事がなくとも，之に直面して驚かず冷靜に工夫する事さへ出來れば大抵の

場合解けるのである．あまりに隅から隅まで剩す所なきを期し，少しでも缺陷のある事を心配すると云ふ態度は結局「備へざる所なければ備へざるに等し」の結果を招來する．基礎的の知識は勿論缺く事はできないが，之は正道をふんで充分學習し練習して居る者にとつては，自然頭にしみ込んで忘れようとしても忘れられるものでない．それ故知識に缺陷のある事を恐れなければならないやうな狀態は正しく學んで居る者には到底あり得ないのである．かやうな事は決して心配せずどこ迄も自己の能力に信頼し，たとへどんな毛色の變つた問題に直面しても，範圍外の問題にぶつかつても恐れず，之が解決の道を見出さうとする態度を忘れないでいたゞきたい．「天は自ら助くる者を助く」とは數學學習に最もよく適合した格言である．

この事は數學以外の學科に對しても言へるのである．數學以外の學科に於てもその言葉の意味を解する事ができ，その事情を知悉する事ができれば，進んでこの問題を解剖し何等かの判斷を求めて行かうとする努力は數學の努力と全く一致する．故に數學を學習した者は他學科に於ても學習の效果を生かし充分の學習能率を發揮し得べきである．「數學の力を あらゆる 學科に」と云ふ事が數學學習の最終の目標で，之が數學の神髓である．從つて數學を學んだからには，自分の得た能力が世上百般の事象を 理解し 計畫する に役立つものである事を確信しなければならない．「考へ得らるゝものは すべて 之を考へよ．之數學者なり．」と或人が言つた．味ふべき言葉であらう．

第三章 算　　術

14. 算術の範圍

算術は國民學校で既に充分習つて居り，中學に來てまでそんなにやらないでもよいではないかとの聲をきく．それは極端だが，代數の初歩に算術の教材を吸收して算術としての科目をとつて居らない學校は可成あるやうである．私もこの程度には贊成であるが，一應算術としてどの位の事を習つておくべきかを反省しておく．

算術では數の四則運算の練習をする．これは國民學校で充分やつた事だが，更に先に進まうとする者の爲にはもつと もつと 土臺を しつかりする事が 望ましいのである．次に度量衡やら暦やら貨幣制度などの實用的知識がある．これは數學の他の部分と大分味がちがつて只きいておけばよいやうな事項が多い．更に四則應用問題があるが，これは單なる算術的興味と云ふ點を除けば代數に吸收してしまつてさしつかへない．今日必ず算術でやれと云ふやうな要求を受ける事は稀である．開平や利息算などは昔は算術に入つたものだが，今日では殆ど代數に入つて居る．かく考へると算術の領分は殆ど計算練習だけと云ふ事になる．計算の練習については前に述べたからこゝでは省略する．只數字を正しく整頓して書く等の練習も將來複雜な計算に進む準備として必要な事である事だけを附記しておく．

15. 算術的考へ方

算術には特に學ぶべき事は少いが，さうなると中學の初年では，代數もまだ始まつたばかりだし，趣味ある考へ方を要する問題が少く，國民學校でいろいろの問題を手にかけて來た學生にとつては少し淋しさを感じるかも知れない．それで私はこの頃の，特に數學に趣味を有する學生に，算術特有の問題を解いて見る事をおすゝめしたい．この種の問題は四則問題と云つても代數方程式を用ひるに適せず，算術的な考へ方による他ないので數學の主系統からは外れて居るが，思考力を養成する上には又特殊の效果があるものである（この種の問題を解くに文字を用ひる事はさしつかへない）．次に二三の例を擧げておく．

(1) 1, 3, 0, 1, 5, 2 を並べて最大の數及び最小の數を作れ．

(2) 1から 100 までの整數を全部掛合せた數は 終りに幾つ 0 がついて居るか．

(3) 1から 521 までの數を書くに 數字が何個要るか．その中 0, 1, 2, ……, 9 は各幾つあるか．

(4) 二月に日曜が 5 回ある年があるか．最も近いのは昭和何年か．

(5) 三門の大砲がある．各 2.5 秒，3 秒，3.5 秒おきに發射する．これらが同時に發射してから各 100 發を發射し終る迄に何回砲聲がきこえるか．

(6) 次の計算の缺字を補へ.

(i)

```
      □□□
  ×    □□
  ───────
    □1□□
    5□□
  ───────
  □□□6□
```

(ii)

```
              □□7□
     ───────────
□□□□)□□□□□□□□
       □□□□
       ──────
       □□□□□
       □□□□□
       ──────
         7□□□
         □□□□
         ────
          □□□7
          □□□□
          ────
             0
```

(7) 100を幾つかの整數の和として表すときその積が最大となるやうにせよ.

(8) 分母子共二位の整數なる分數の中 $\sqrt{2}$ に最も近いものを求めよ.

(9) 一日に1圓づゝ銀行に預入れ，銀行では預金の元金100圓以上の部分に對し，日歩1錢を附し之を毎日元金に繰込むとき二年後に於ける元利合計如何.

(10) 正八角形の對角線を全部引いた圖形の中に三角形が幾つあるか.

この種の問題を更に進めるといはゆる數學考え物や數學遊戯と呼ばれる種類のものになる．私は數學遊戯や考え物に特に興味を持ち，その學習効果を相當大きいものと思つて居る．殊に智能檢査などが行はれて形式的能力を試される機會が多くなるとこの感の深いものがある.

第四章　代　　數

16. 代數の展望

代數の中心は方程式で，その又中心は二次方程式である．方程式の前にはその準備とも考へられる代數式の計算法があるが，方程式の後には一寸方向が變つて**級數**及び**對數**がある．方程式では**二次方程式**を中心として，その前には一次方程式及び聯立一次方程式があり，その後には之を應用する種々の方程式がある．かやうに代數學の主流は方程式で，その方程式の根柢となるものは代數式の取扱である.

これは現在の中學の代數學の内容であるが，もう一つ之を進めて考へて見ると，方程式で論ずるものは代數式の性質の一部に過ぎず且之は靜的のものである．或値を求める事を主とするのは算術の思想で，數學の目標は更に突進んで或事象の全貌を見極める方向に進まなければならない．之を代數について言ふならば式の取扱を學び之によつて未知の數を求めると云ふ事はその靜的方面で我々は更に進んで代數式其物の本性を究明し，動的，積極的な知識をそこに求める方向に進むべきである．代數式の本性はその値の變化が主たるもので之を究明する最善の方法はグラフによるものである．この意味に於て私は代數の主流が靜的な方程式解法から動的知識たる**グラフ**の研究へと進む日が遠くない事を確信して居る．即ち

グラフによる代數式の性質の究明と云ふ事が明日の代數學の主題である．グラフを主流とする事になれば，代數學の最後の教材として唯一の超越函數たる對數が登場する事も極めて意義深いものがある．

方程式にしてもグラフにしても式の値と云ふ事を主眼とした取扱である．例へば a^2+b^2 と云ふ式は a, b にそれぞれ値を與へた時に之の有する値を考へ，かやうな値の對應の關係をこの式で表して居ると見るわけである．中學に於ける代數は主としてこの見地に立つので，近來の形式代數たる式を單に式として見ると云ふ思想は餘り取り入れられて居ない．之は中學の代數が數學で言ふ所謂代數學の初步を目標にしたものでなく，解析學の第一步と云ふ意味で**變數の函數關係**に立脚したものだからであらう．これは私も當然と考へて居るので以下この見地から述べる事にする．

17. 正　負　數

代數の始めには先づ正負數の四則にぶつかる．負數の取扱は以前は非常にめづらしく，面喰つた生徒があつたものだが，現在では國民學校でも少しはその概念を得て居るし，世間でも段々之を使ふ所が多くなつて，學ばない先から常識的になつて居るから，かやうな生徒は稀であらうと思はれる．負數の計算法は**幾度も練習して頭にしみ込ませる**と云ふ以外に方法はない．併しその方法を正しく頭に入れる爲には先づその運算の形式的法則を記

憶し之によつて正直に計算する外ない．之を續けて居ると次第に負數の本性が吞み込めて來るから，さうしたら一一法則に照し合せなくとも自分の持つ概念に從つて計算して誤りなくなる．大體負數は常識的のものであるから正常な心理の持主ならば間もなく常識化し計算を誤らなくなる筈であるが，私の經驗では之が思ひの外に反對で，多くの生徒が形式的法則を一々適用する事をうるさがり，自分の常識に從つて計算しては誤りをして居る．この誤りは非常に惡い結果を招くもので，久しくかやうな事をして居ると誤りが性となつてなかなか匡正し難くなる．それ故私はこの計算が絕對確實になるまでやはり形式的法則を重んじ，一々之に從つて計算する方が安全であると思ふ．例へば $(-3)-(-5)$ を求めるに，先づ「或數を減ずるには符號を變へて加ふべし」と云ふ法則に從ひ之を $(-3)+(+5)$ とし，次に「異符號の二數を加ふるには絕對値の差に絕對値の大なる方の符號を附すべし」と云ふ法則により絕對値の差 2 に絕對値大なる方 $+5$ の符號 $+$ をつけ $+2$ を以て答とする．-3 から -5 を引けば $+2$ なる事は負數の本性を掴めば常識的にすぐわかる筈であるが，その常識が思ひの外に誤つて居る人が多いのである．本筋から言へば勿論なるべく早く負數の本性を掴み，こんな計算は常識でやつてまちがひないやうにすべきであるが，案外誤りの多い所を見るとやはりなるべく確實な道をとるべきで，なるべくおそく迄形式法則を重視して計算する方がよいと思ふ．充分自己の

力を反省して決して誤らぬ自信がついてから，この法則を一々適用する事を省略する事にするがよい．

負數の計算の練習の一つの方法としてグラフを作つて見る事をおすゝめしたい．代數式のグラフは大體正則な曲線となるから，このグラフを畫く爲の計算は誤るとすぐわかる．又グラフを作るにはずゐぶん多くの計算をしなければならないし，その計算がお互に密接な關係があるから知らず知らず多くの計算をさせられ且負數の特性が直觀される機も多い．例へば $\dfrac{(x-3)(2x+1)}{x^2+x+1}$ の値を

$$x=0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, 0.5, 1.5, 2.5, -0.5, -1.5$$

等について計算し，グラフを作つて見給へ．ずゐぶん多くの計算に出逢ふ事がわかるであらう．

負數の性質を知る爲に教科書には種々のたとへを引いて說明してある．併しすべての性質をたとへで說明しようとすると可成無理がある．生徒としてはそんな說明はどうでもよいから，負數とはこんなものであるとの假定をそのまゝ承認して，あとは之を回數多く取扱ふ事によりその概念化を計るがよい．負數の本性が充分に掴まれ，之が概念化して來れば負數は常識となり，負數に關する法則など說明を要せぬ程自明のものと感ぜられるやうになる．之が本當の負數の知識で，我々が眞の數理思想の根本たらしめるにはかやうな知識を必要とするのである．

18. 代數式の四則

代數式の四則も正負數の四則と同樣の心得を以て學んでもらひたい．繰返へすやうであるが，私は簡單な代數式の計算など常識的のもので，一々法則に照さなくとも計算して誤りない筈と思つて居るが，實際はこれに反しその誤りの多い事は實に驚くべき程である．而も一旦誤り易く練習してしまふとその先入觀は甚だ深く匡正が甚だ困難である．例へば $(a+b)^2=a^2+b^2$ と云ふやうな誤つた計算をする癖のある者など高等數學を學ぶ樣になつてさへ直らない者がある．それで私は甚だ遺憾ではあるがやはり計算を絕對確實となる迄一々形式法則に照して行ひ常識化をおそくするやうおすゝめしなければならない．計算を決して誤らない自信のつく迄は式の變形の一段階毎にこれは如何なる法則又は公式を適用したものか反省しつゝ進むのである．而もかやうな方法で計算して居る間は未だ代數式なるものゝ概念を得たものと言へないので，この域を脫し常識的に計算して誤りのない所まで進まなければならない事は勿論である．これらの注意は分數式や無理式の計算についても同樣である．

計算に當つて式の整頓と云ふ事が思ひの外に有效である．整頓とは式中の或文字に着目し，この文字の冪指數の大きさの順に項を並べ變へる事である．例へば

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$$

はかう書いておくと如何にも順序よく並んで居るやうで

あるが，これは整頓された形ではない．整頓するには式中の一文字，例へば a だけを重視し之について

$$a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$$

と並べるのである．着目すべき文字は掛算などのときはなるべく次數の高い文字を選ぶがよいが，因數分解などのときはなるべく次數の低い文字（即ちあまり目立たない文字）に着目するがよい．例へば

$$ac(b^2+ac)+c^2(b-a)+a^2(b-c)+a^4$$

を因數分解せよと云ふ問題があつたとする．この式を見るに，a については四次，c については三次，b については二次である．それ故 b を含む事が最も低いからこれに從つて整頓するがよい．さうすると

$$acb^2+(a^2+c^2)b+a^2c^2+a^4-a^3c-ac^3$$

となる．さて之を因數分解するには直ちに「二次式 $\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}$ を 0 に等しと置いて得られる二次方程式の二根を α, β とするときこの式は $\mathrm{A}(x-\alpha)(x-\beta)$ と因數に分解される」と云ふ法則を適用するが本筋であるが，さうでなく最後の常數項を因數分解して見るもよい．

即ち

$$\begin{aligned} a^2c^2+a^4-a^3c-ac^3 &= a(ac^2+a^3-a^2c-c^3) \\ &= a\{a(c^2+a^2)-c(a^2+c^2)\} \\ &= a(a-c)(a^2+c^2). \end{aligned}$$

そこで假に之を二つの二次式に分けて b^2 の係數 a, c を掛けて加へて見ると

$$a(a^2-ac)+c(a^2+c^2)=a^3+c^3$$

で所題の式は $(ab+a^2+c^2)(cb+a^2-ac)$ と因數分解される．

因數分解と言へば，これは代數で工夫を要する問題の最初のものである．それでこれにぶつかると一寸あわてるものがあるが，よくのみ込んでしまひさへすれば四則運算などゝ左程に變つた事はなく，大體敎はつた方法をそのまゝ用ひてできるものである．殊に上に擧げた二次式の因數分解の法則などはずゐぶん有効なもので，式中に含まれた文字が一つでも二次以下であれば適用できるのである．徒らに因數分解を考へ物的の工夫を要する計算であるかの如く思ふのはよくない．それに因數分解はそれ自身さう重要な計算ではなく，他の運算(分數式等)の補助としての役目の方が重要である．この意味では餘り複雑な因數分解は實際運算には起らない．その範圍であれば殊に公式數個を記憶しておいて之に合せる丈で大抵事足りるのである．

19. 倍數約數と剰餘定理

代數式の計算の途中で倍數，約數に關する理論及び剰餘定理を學ぶ．これは分數式の計算の豫備を目的とするものであつて，左程詳しく學ばないでもよい事のやうに思はれるが，それ自身にも興味がある爲か可成深入して學んで居るやうである．併し私はこれは代數全體から見て一寸道草であると思つて居る．

これらの理論は代數の始めの方としては珍らしく理論

的なものである爲か，割合に誤解が多い．以下二三例を擧げて之を訂正しておきたい．

第一は約數倍數の理論は算術と代數とで殆ど同様に組立てられて居るが，之を內容的に見ると全くちがふと云ふ事である．例へば式Aが式Bで割り切れると云ふ事は式Aの値が式Bの値で割り切れる事とはちがふのである．A,Bの最大公約數がCであると言ふとき，代數で言ふのと算術で言ふのと意味が全くちがふ．ab と ac の最大公約數は代數的には a であるが，$a=3$, $b=6$, $c=4$ とすれば，$ab=18$ と $ac=12$ との最大公約數は算術的には6であつて a ではない．然るに時々次のやうな解答を見る事がある．

問題 1. n が奇數なるとき $5^n-3^n-2^n$ は 30 で割り切れる事を證明せよ．

解 $(x+y)^n-x^n-y^n$ に於て $x=0$ とおけば0，$y=0$ とおいても0，$x+y=0$ とおいても0である．故にこの式は $(x+y)xy$ で割り切れる．$x=3$, $y=2$ とおいて $5^n-3^n-2^n$ は $5\times3\times2=30$ で割り切れる事がわかる．（終）．

これなどは全く式の整除と數の整除とを混同した誤解である．$(x+y)^n-x^n-y^n$ は $(x+y)xy$ で割り切れ，その答Pは x,y に關する整式であるが，我々の證明すべき事はPが整式であると云ふ事でなく，Pに於て $x=3$, $y=2$ とおいたときの數値卽ち $5^n-3^n-2^n$ を $5\times3\times2$ で割つた答が整數であると云ふ事である．整式の數値が

整數であると言へるのは整係數の場合に限るのである．卽ち上の證明を生かさうとすれば答Pが整係數である事の證明を要し，從つて上に用ひた剰餘定理による證明の部分は效力がうすい事になる．

第二に，次の定理は屢ゝ用ひられて居り乍ら注意される事が少い．

定理 Pが整式で $x=a$ のとき0となり又 $x=b$ のときも0となるならばPは $(x-a)(x-b)$ で割り切れる．但し $a\neq b$．

證明 Pが $x-a$ で割り切れる事は剰餘定理から明かである．故に

$$P(x)=Q(x)(x-a)$$

とする．$x=b$ とおくと

$$P(b)=Q(b)(b-a)=0$$

であるが，$b-a\neq0$ であるから $Q(b)=0$．故に $Q(x)$ は $x-b$ で割り切れる．卽ち

$$Q(x)=(x-b)R(x).$$

故に

$$P(x)=(x-a)(x-b)R(x).$$

$R(x)$ は整式であるから $P(x)$ は $(x-a)(x-b)$ で割り切れる．

用例 x^3-bx+a が $(x-1)(x-a)$ で割り切れるやうに a 及び b を定めよ．

解 $(x-1)(x-a)$ で割り切れる爲には $x-1, x-a$ で別々に割り切れなければならない．故に

$$1-b+a=0,\quad a^3-ba+a=0.\cdots\cdots\cdots(A)$$

これから　　$a=0,\ b=1$ 又は $a=1,\ b=2$………(B)
を得る．然るに $x-1,\ x-a$ で別々に割り切れゝば上の定理で $(x-1)(x-a)$ で割り切れる．但しそれには $a\neq1$ なる但し書が必要である．即ち $a=0,\ b=1$ は適するが $a=1,\ b=2$ は適しないかも知れない．實際入れて見るとこの方は適しない事がわかる．

かやうに此の定理を用ひるときは但し書に注意しなければならない．尚この例で「ければならない」と「すればよい」との區別，「適しない」と「適すると言へない」との區別がたいへん大切のことであることがわかる．之は一般に必要條件と充分條件との區別で苟も常識ある者の誤り得ざる所であるが，どうも數學に限つて之を誤る人が時々ある．數學はかやうな誤をしないやうな正確な頭腦を作る事を目的として居るにもかゝはらず，かやうな誤があり得る事は甚だ奇怪なる事である．之について は後に又詳述する時があらう．上例では x^3-bx+a が $(x-1)(x-a)$ で割り切れるならば (A) が成立するので，(A) が成立しても割り切れるとは限らない．又 (A) が成立し $a\neq1$ なら割り切れるが $a=1$ なら割り切れないとは限らない．(A) は必要條件，(A) と $a\neq1$ は充分條件であるが，何れも必要充分條件ではない．

第三の例として次の問題を擧げる．

問題 2. $x^4+2x^3-2x^2-3x+2$ を0ならしめず，$x^4+x^3-3x^2-x+2$ を0ならしむる x の値を求む．

解 この式をA，Bとしその最大公約數をGとすると，

連除法により

$$G=x^2+x-2.$$

そこで　$A=A'G,\ B=B'G$　とおくと

$$A'=x^2+x-1,\quad B'=x^2-1.$$

AとBとを同時に0ならしめる x の値は $G=0$ の根である．この事と考へ合はせてAを0ならしめずBを0ならしめる x の値は $B'=0$ の根であるやうに考へられるが之は誤である．實際 $G=0$ からは $x=1$ 又は -2 となり，$B'=0$ からは $x=1$ 又は -1 となり，$x=1$ が共通である．$x=1$ はAを0ならしめるので本題の解ではない．A' と B' とは互に素であるから共通因數はないが，A' 又は B' とGとの間には共通因數があり得るので，從つて B' の因數でもGにも含まれAを0ならしめる場合もあるのである．

以上の諸例が示すやうに，かうした理論を用ひるときは細心の注意が必要である．否細心の注意など拂はなくとも普通に考へてさへ居ればかやうな誤はないわけであるが，兎角誤の少くない所を見ると，理論的取扱が甚だ粗雜な學生が多いと言ふ事になる．繰返して言ふが，世上百般の事象を論ずるに當つて，こんな下らぬ誤をする人は少いと思はれるのに，殊更論理の嚴正を尙ぶ數學に於て誤の少くないのは甚だ心得難い現象である．細心の注意を拂ふよりも，注意せずとも馬鹿氣た論理の誤などしないやうな正常の頭腦を作つてほしい．

20. グ　ラ　フ

グラフが中學の代數に導入せられてからもう二十年になるが，まだ一向に發展しない．私の學校など毎年グラフを試驗に出して居るがその成績さへ一向に向上しない．それは何故であらうか．私の考へる所では未だグラフの導入が中途半端で，根本的に從來の教材と融合しない點があるのではないかと思はれる．我中等教育に於て採用されて來た代數は，全然形式的で，式の取扱法，等式の利用法を主としたものであつた．スミスやクリスタルの代數に近いものであつた．グラフを導入した思想は之に反し，式の本性に立入つて之を究明し，進んでは函數觀念を養成して解析學の基本たらしめんとするにある．中學の代數が單に代數學を教へるのが目的ではなく，解析學の初歩を教へるのが目的であるとすればこの後の行き方の方が本筋のやうに思はれる．さうすれば代數學の組織を根本的に改め，グラフを，さうして函數觀念を中心として形式的取扱は之を補助する方法として進むことにしなければならないわけである．かくあつてこそグラフもその眞意を發揮し發展することが出來るであらう．然るに從來の形式的取扱を主とする組織をそのまゝとし，之にグラフを附け加へようとしたから，グラフが兎角繼子扱を受ける事になり，一向その眞價を發揮せず，他章と水と油の如く融合しない狀態で過して居るのであらう．

この狀態は早晩改められる事は必定である．併しその

早晩が甚だ困るので，早ならば早で晩ならば晩で之に應ずる對策があるが，早か晩かわからないでは我々はグラフに對し如何なる態度をとつてよいか決定するに苦しむ．併し本書としては序文に述べた如くなるべく自主的に，現狀を全然無視してしまはない範圍で我々の理想とする方向に向つて進むことにしたい．結局それが我々の進むべき正道であり，又我々の目的に達すべき最も確實なる道であらうからである．

グラフはある文字，例へばxを含む式$f(x)$の値がxの變化に從つて變化する模樣を圖示したものである．$f(x)$なる式は之を內容的に見ればxの値を與へたときのその式の値の集團であると見られるので，この値の變化が$f(x)$なる式の本性と見てもよいわけである．從つてグラフは式の本性を圖式的に直觀的に表したものと考へる事ができる．即ちグラフは代數的には式と云ふ文字や記號の集團として表される存在の幾何學的の表示法と見てよい．この存在が即ち解析學の基本觀念たる函數で，その代數的の表し方が式(式で表されない函數もあるが)，幾何學的の表し方がグラフであると見ればよい．即ち從來の代數は解析學の初步と云ふ方面から見ればその形式的部面を代表し，グラフが直觀的部面を擔當したものである．かやうにグラフは非常に重要な意義を持ち，而もその考へ方が代數の他の部分と可成異るのである．グラフの學習に當つてはこの本性を掴む事が第一の要件である．

グラフを畫くには方眼紙を用ひるが，この方眼紙は餘

り精密なものでなくてよい．勿論目に見えるやうな差があつてはいけないが，之を用ひて圖計算でもしない限りさう1粍の十分の一迄も正しいものを必要としない．又目も3粍位ので充分で，それ以下はこの中に目分量でとる習慣をつけた方がよい．之を畫くに當つては計算を主とし，グラフに關する知識を活用して簡單に畫くと云ふ事に餘り意を用ひなくともよい．畫いて居る內に對稱性などは自然目について來るからその上で豫想が正しいかどうか式について吟味すればよい．最も注意すべき事は

(i) **誤りと認められる點を計算し直す事** 代數式のグラフは普通のごく單純な，從つて非常に美しく滑らかな曲線となる筈であるから，一寸でも計算を誤ると形が崩れ醜くなる．かやうな點を早く見付けて計算し直さなくてはならない．グラフが單純な美しい曲線となる事も代數式の本性の一つである．

(ii) **重要な點を細かく計算する事** 計算して行く中に曲り方のはげしい所や增減の狀態の變る所などが豫想がつくから，その近所をなるべく細かく（點をたくさんとる事）計算して，形を誤らないやうにする事が必要である．殊に式の値が無限大になる所はその點自身は勿論畫けないから，そのごく近くまで（紙面に點がとれる限り）細かに計算してたくさん點をとるがよい．之によつて代數式の値が無限大になる狀態についても概念を得る事ができる．

尙なるべく多く計算して曲線の形を正確に定め想像で

點の間の曲線を定める事を避け，又その結果をなるべくきれいに細い線で（線を畫く爲にとつた點はあとに殘らないやうにするがよい）畫き出す工夫をするがよい．又紙や單位などが指定されて居ないときは，グラフの重要部分が適當の大きさに紙面に畫き出されるやうに，位置や單位のとり方などを工夫すべきである．かやうに正確に，美しく，適當にグラフを畫く事は，結局グラフの本性，代數式の本性を摑む助けとなるのみならず，之によつて計算能力を高め，製圖の能力を養ふ等の利益もある．

グラフの說明として例へば x^2 なる式のグラフを $y=x^2$ とし，(x, y) を座標と考へるものがある．グラフには座標の思想は離す可からざるものと考へて居るものもあるが，私はグラフと座標とは離して考へてよいものと思つてゐる．x^2 のグラフは x^2 なる代數式が x なる變數の値の變化に應じて變化する模樣を圖示するもので，別にこの函數値を y と置かなければならない理由はない．私はいつも先づこの考へでグラフを導入することにして居る．方程式，例へば $x^2+y^2=r^2$ のやうなグラフは代數式のグラフよりずつと思想が高尙になつて來るし，是非座標の考へを導入しなければならないから，この方はずつと先に進んでから學んでよいと思つて居る．兎に角グラフとしては變數 x の變化による與へられた代數式の値の增減の模樣を圖示すると云ふ考へに徹すべきであらう．

グラフを用ひて方程式を解いたりする事は技巧的の事で左程重要でない事と思ふ．どうせグラフを用ひたとて

計算による以上精密な解が出來るわけでなく，簡單に出來るものでもない．それよりもグラフにはグラフ特有の代數式の値の變化に關するやうな問題がある．例へば

問題 1. x に如何なる値を與ふるとも ax^2+bx+c が p 及び q なる値をとらざるときは，この式は p と q との間の如何なる値をもとり得ざる事を證明せよ．

解 ax^2+bx+c に於て x に充分大なる値を與へるとこの式の値は絶對値に於て非常に大きくなる．從つてこの式の値は常に p と q との間にある事は出來ない．それ故もしこの式が p と q との間の値 m をとるとし又 p と q との間にない値 n をとるとすれば，この式の値が m から n まで變化する間に必ず p 又は q を通過しなければならない（こゝにグラフによつて得た式の値の連續的變化と云ふ考へを使ふ）．然るに p 及び q なる値はとらないのであるから p 及び q の間の値をとる事は出來ない．

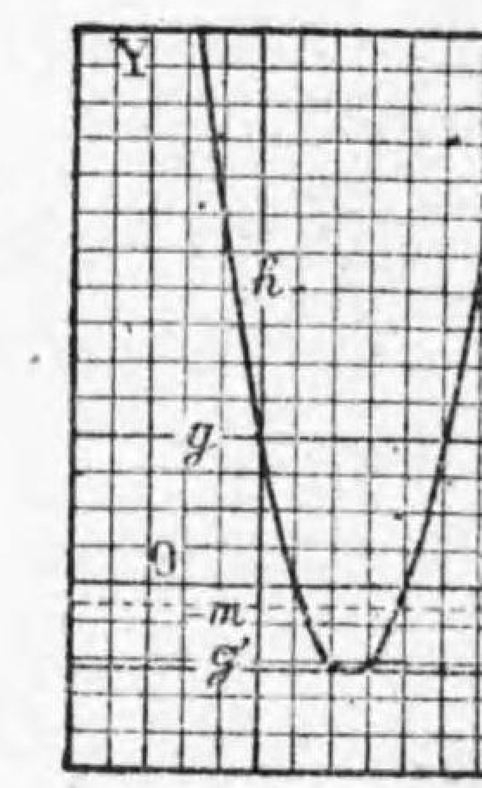
問題 2. x に關する二次式 ax^2+bx+c に於て $x=m$ なるときに此の二次式の値の符號が a の符號と反對なるときは，方程式 $ax^2+bx+c=0$ は相異なる實根を有し，而も m は此の二根の間にある事を證明せよ．

解 x の値を非常に大きくすると ax^2+bx+c の三項の中で ax^2 の絶對値が他項に比して非常に大きくなる．故に此の式の値の符號は a の符號と同じになる．この時の x の値を α としよう．次に x の値を非常に小さく（負で絶對値を大きく）する．さうすると二次式の値の符號はやはり a のと同じになる．この時の x の値を $-\beta$ としよ

う．二次式の値は $-\beta$ で a と同符號，m で a と異符號，α で a と同符號であるから，この式のグラフは $-\beta$ と m の間で一回，m と α の間で一回，横軸即ち 0 の線をきる．こゝが $ax^2+bx+c=0$ の根であるから二根は實で m はその間にある．

問題 3. $x^2-11x+m+28=0$ が實根を有し，且二根が共に 3 より大なる爲には m は如何なる範圍の數値をとるべきか．

解 これを $x^2-11x+28=-m$ と書き直す．$x^2-11x+28$ のグラフを作り，之を $-m$ のところで横に切つて見るとその交點の x の値が根である．この根が 3 より大きいのは交點が右圖の直線 h より右にある事である．二交點が共に h の右側にある爲には點線が直線 g より下に來ればよい．又交る爲に g' より上に來なければならないから



第 1 圖

$$-\frac{9}{4}\leqq -m<4,\quad -4<m\leqq\frac{9}{4}$$

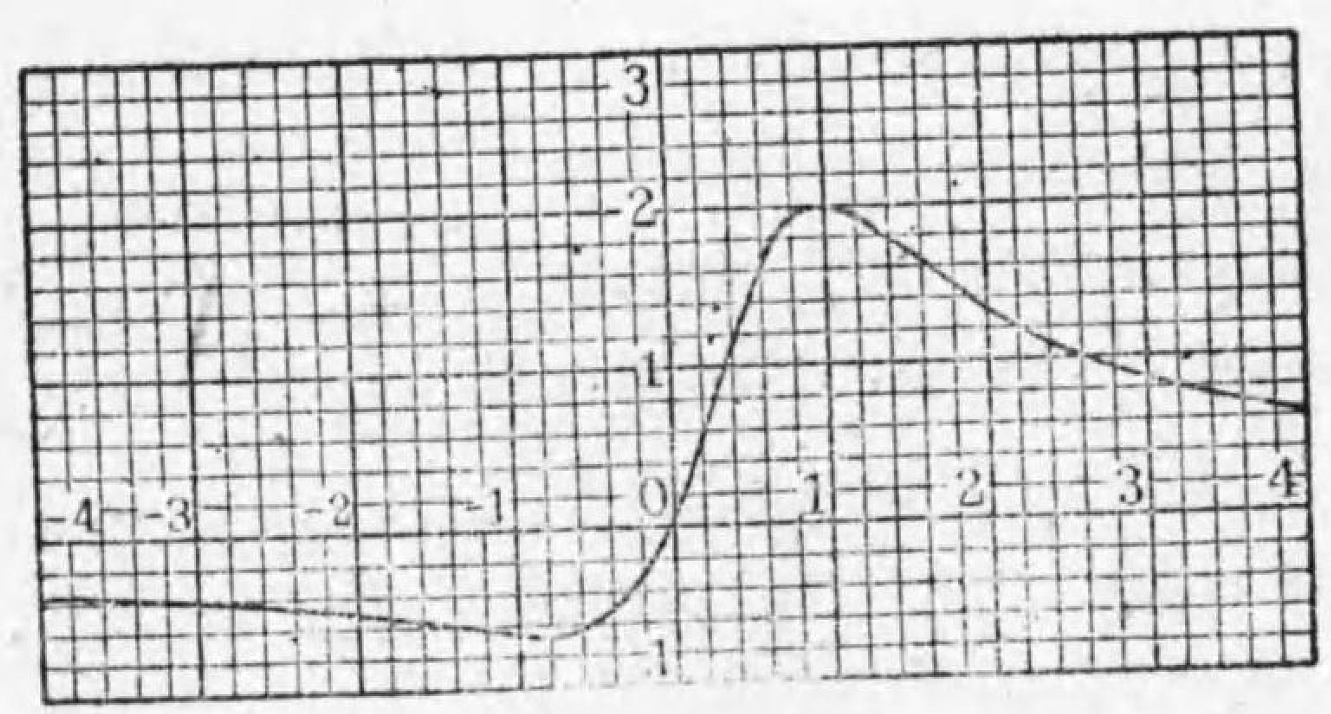
（等號に注意）．（終）．

以上は何れもグラフの問題ではないが，グラフを中心とする，代數式の値を主として考へる代數の部面に近い問題なので，グラフ的な考へ方が解法の助となるわけである．將來は更にグラフ化した，例へば次のやうな問題の提出を見る事とならう．

問題 4. 次圖（第 2 圖）はある簡單な分數式のグラフで

ある．この分數式を作れ．

解　このグラフを見ると，この式の値は∞となる所がない．それ故にこの分數式の分母は0とならないであらう．卽ち虛根を持つ二次式又はその積である．こゝでは「簡單な式」と云ふ語を生かして先づ二次式と見ておかう．次に式の値が0となるのは $x=0$ のときだけであるから，分子は只一つの因數 x のみから成る．故に求むる式は



第 2 圖

$$\frac{x}{Ax^2+Bx+C}$$

なる形をなす（分子の常數係數は分母に廻せるから省略してよい）．

次に $|x|$ の小さい所では分母の Ax^2 及び Bx を無視して計算しても大差ない．故にそのグラフは大體 $\frac{x}{C}$ のグラフと似て居る．與へられたグラフのこの近傍の狀態と見合せて $C=\frac{1}{2}$ であらうと考へられる．あとは $x=1$, $x=-1$ のときの値を用ひて

$$\frac{1}{A+B+0.5}=2,\quad \frac{1}{A-B+0.5}=\frac{2}{3}$$

として　$A=\frac{1}{2}$,　$B=-\frac{1}{2}$ を得る．

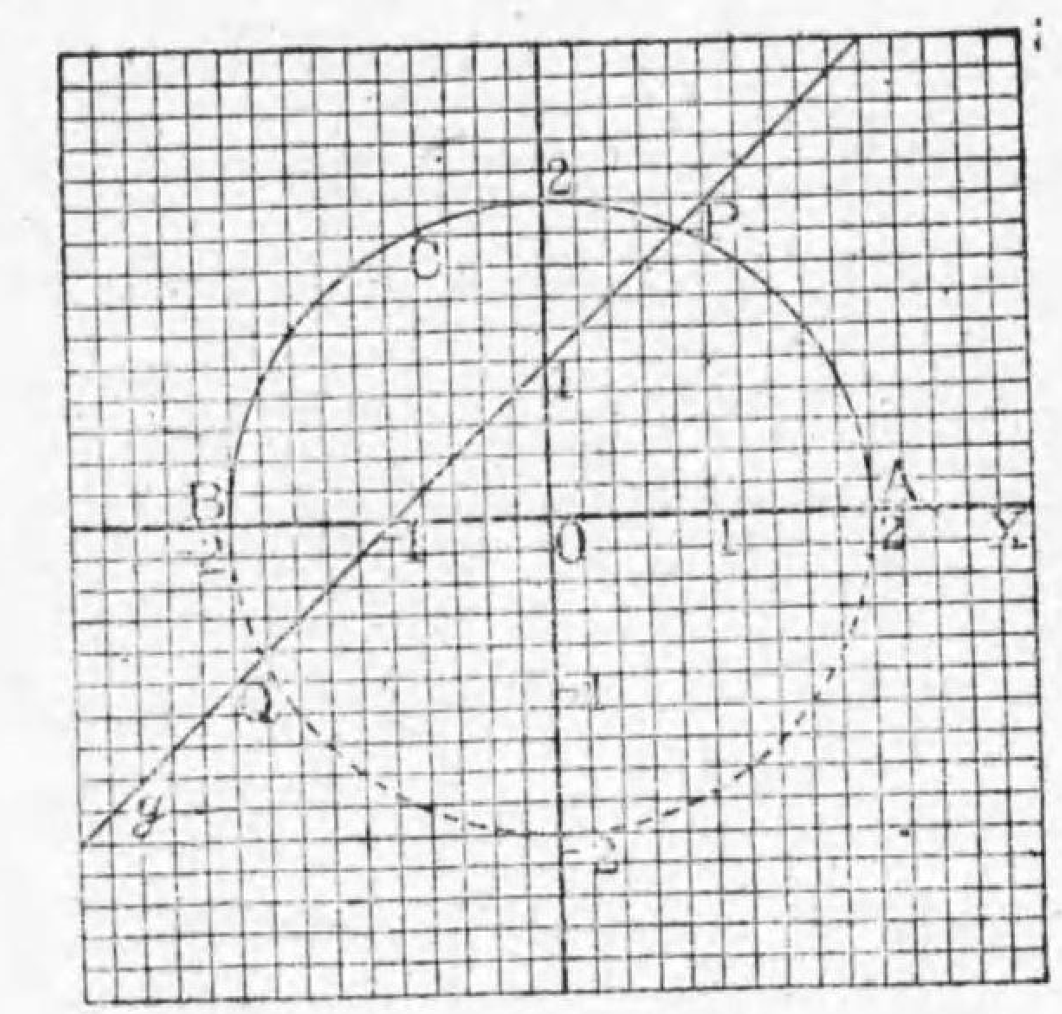
求むる分數式は

$$\frac{2x}{x^2-x+1}$$

であらう．實際この式のグラフを作つて見て與へられたものと一致する事がわかる．

問題 5. $\sqrt{4-x^2}$ が $x+1$ より大なる如き x の範圍を求む．

解　$\sqrt{4-x^2}$ のグラフは第3圖の半圓Cであり $x+1$ のグラフは直線 g である．求むる範圍は半圓の點の方が直線の點より上にある所である．Aより右，Bより左はCの點がないから勿論範圍に入らない．PからAまでは半圓の方が下にあるからだめである．故にPからBまでが求むる範圍である．Pは



第 3 圖

$$\sqrt{4-x^2}=x+1$$

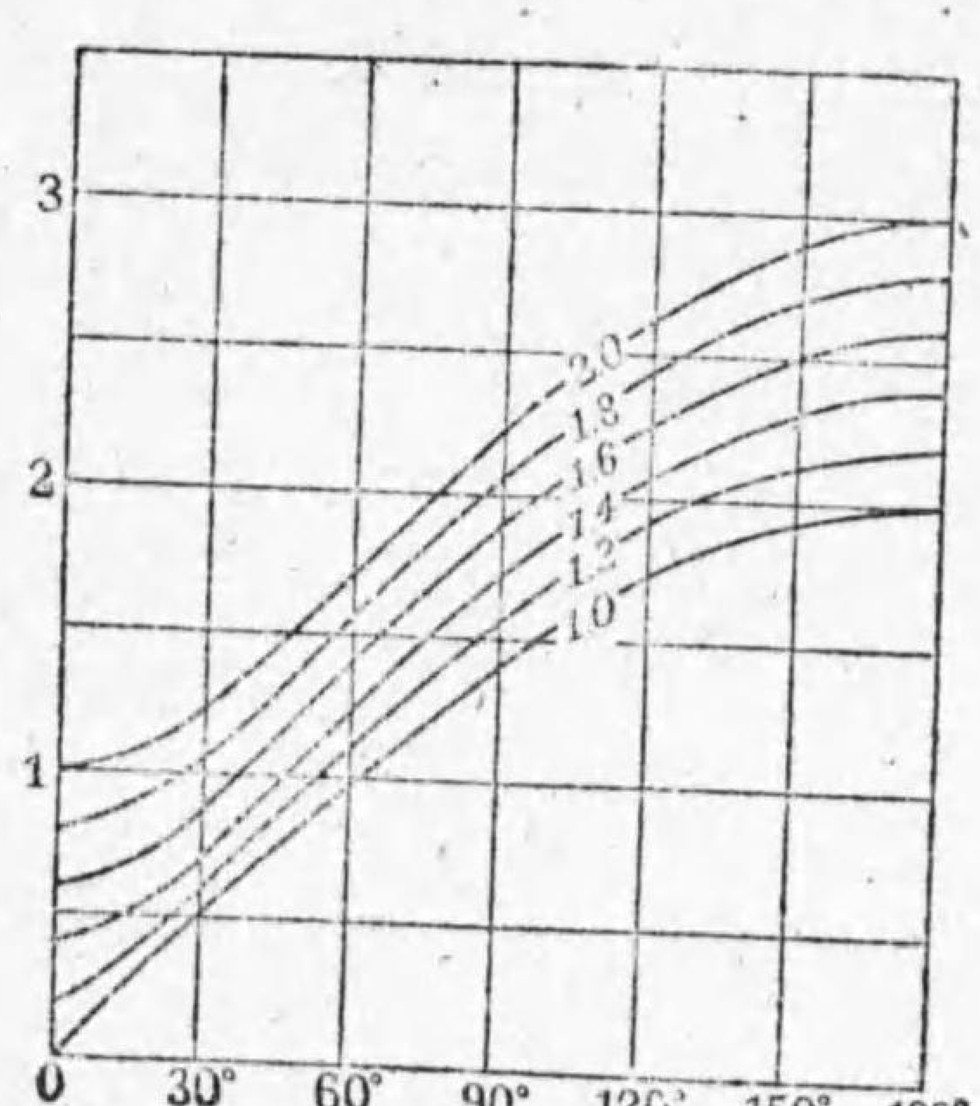
の根として求められる．之を平方すると

$$4-x^2=x^2+2x+1,$$
$$2x^2+2x-3=0,$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}.$$

然るに $x=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ の方は無緣根である．それは $-\sqrt{4-x^2}=x+1$ の根で，グラフでは點Qで表されて居る．故にPの x は $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ である．從つて求むる範圍は

$$-2\leqq x<\frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$

かやうにグラフは數學の新しい考へ方の具となるものであるから，之を學ぶ以上は之を數學一般に押し廣めてできる丈數學の知識內容をかやうな見方に改めて行かなければならない．例へば $\sin x$ と云ふ函數を學んだならば，この函數の變化の狀態はどうであるかと云ふ事をグラフによつて大要頭に入れておくやうにする．又「三角形の二邊の長さが一定なるときその夾角が大きくなるに從ひ第三邊は大きくなる」と云ふ定理があつたならば，この大きくなり方はどの程度かと云ふ事を，グラフに作つて見て調べて見るがよい．この場合第三邊の大きさは定規と分度器を用ひて，實際作圖して計ればよいのである．第4圖は一邊を1とし，他の邊を 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2 と種々に變へて夾角の變化による第三邊の大きさのグラフを幾つも作つて比較したものである．



第 4 圖

21. 座　標

グラフに關聯して起るのは**座標**の問題である．**座標**とは點の位置を示すに數を用ひる方法をいひ，その目的は代數と幾何との完全な連絡をつけるにある．之を押し進めて行けば代數的に幾何學を研究する**解析幾何學**に入るわけであるが，そこ迄進まなくとも，座標の考へはあらゆる方面で必要缺くべからざるものであるから（碁や將棋にさへ4の6とかいつて古くから座標が用ひられて居るではないか），極めて近い將來に座標が中學の重要な敎材となる事は必至である．これもグラフと同じやうに數學の新しい方面の考へ方として是非その正しい概念を掴んで居てほしいものである．

座標の概念に次いで來るものは「二變數」と云ふ概念と「方程式」と云ふ概念である．二變數と云ふ事は，二つの文字 x, y の各々の値が任意に變化する事を考へたもので，之により (x, y) を座標とする點は平面上をあちこちと動き廻る，即ち點の運動と云ふ事が二變數の變化と

云ふ事に對應して居るのである．二變數の變化と云ふ事は之を種々の方面に適用しようとすると，決してさう簡單な概念ではないのである．併し我々の見聞し研究する事象が複雜となるに從ひ，之を考へる數學的方法も複雜となるわけであるから，かやうな複雜な物の考へ方も，數學で整理する方法を學ぶ必要があるわけである．例へば入學試驗の合格と不合格を決定する方法について言へば，答案につけられた點數の多少による事は之は一變數による判斷である．一變數による判斷は之に序列をつけ得るからごく簡單であるが，之を學科試驗と身體檢査を併せ考へる事となると二變數となり，序列と云ふ事が考へられなくなる．かやうに全く性質の異る二つの事象を同時に考へようとすれば勢ひ二つの變數の考へを用ひねばならず，この場合二變數を如何に處理して入學の序列を作るかと云ふ事は一變數の場合とは全く異つた事情が生ずるわけである．

二變數の變化が考へられゝば之に伴つて二變數の函數も考へられる．これは代數の範圍では二文字を含む代數式の値の變化と云ふ事を考へる事になる．この場合座標の考へが確實に摑まれて居れば，この函數は平面上の點に對應してその値が定まり，點の運動に從つてその値を變ずると云ふ直觀的な考へ方が可能となり，更にこの函數値をこの平面に直角にとつて，この函數のグラフを曲面として表すと云ふ考へ方にまで到達する事ができるわけである．かやうな考へ方は現在の代數學に於ては困難

かも知れないが，可成り多方面に實用化されるやうになつて來たので，近い將來に中等學校の教材にとり入れられる事と思ふ．

二變數 x, y が各々勝手に變化せずに或條件の下に變化すれば，之を座標とする點の運動徑路は一つの線となる．この場合條件は一つの方程式であるから，之により方程式のグラフと云ふ概念が生ずる．この方程式のグラフは，例へば

$$x^2+2xy+3y^2-5x=0$$

のグラフは，之を解いた

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{15x-2x^2}}{3}$$

の右邊 $\frac{-x\pm\sqrt{15x-2x^2}}{3}$ なる代數式のグラフと一致する．それ故前節に述べたグラフと方程式のグラフとは同一物であるが，只考へ方の根本が多少異るのである．方程式のグラフに於ては二變數の變化と座標と云ふ考へ方を必要とし，單に x が變化するに從ひ之を含む式 $f(x)$ の値が變化すると云ふのとは多少異るやうに思はれる．

方程式のグラフなる考へは二變數の函數 $f(x, y)$ が或一定値をとる點の軌跡と云ふ風にも考へる事ができる．$f(x, y)$ のグラフを一つの曲面と見れば $f(x, y)=c$ のグラフはその平面截口である．かやうに考へると方程式のグラフは，二變數の函數の一部を表すものであるとも言へるのである．かやうに

座標——二變數——二變數の函數——方程式

のグラフ——普通のグラフ—— 一變數の函數

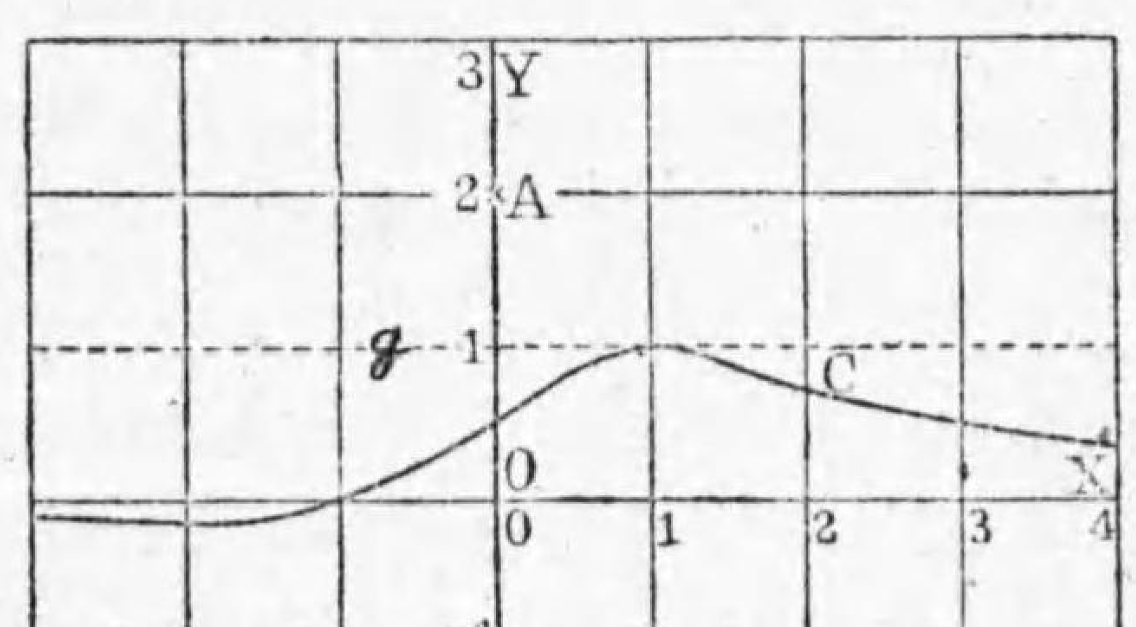
等の觀念は一系の環を作つて相互に連絡して居るのであるから，これ等をなるべく一つのまとまつた思想として摑んでしまふ事が望ましいのである．以下この思想範圍にあると思はれる問題を二三擧げておく．

問題 1. mを零ならざる實數とする時xに如何なる實數値を與ふるも二次式 $mx^2-(m+1)x+2m-1$ の値が常に正なる爲にはmを如何なる範圍の數とすべきか．

解 x及びmを變數とし，二次式の値を考へるのである．都合によりmの代りにyを用ひ

$$u=yx^2-(y+1)x+2y-1$$

とする．x, yの値を與へたときuが正になる場合と負になる場合とあらう．平面上の各點のx, yについて之を定め正の部分と負の部分とを分けて見る．この場合正の部分から負の部分に入るには必ず$u=0$なる點を通るわけであるから$u=0$なるやうな點の軌跡を作つておけば$u>0$の部分と$u<0$の部分とは之によつて分たれるわけである．$u=0$なる點の



第 5 圖

軌跡は

$$yx^2-(y+1)x+2y-1=0$$

のグラフ，即ち

$$y=\frac{x+1}{x^2-x+2}$$

のグラフで第5圖のCである．$x=0$としyを大きくすれば$u>0$であり，例へば點Aに於ては$u>0$である．それ故CについてAと同じ側にある點については$u>0$である．

そこでxの値如何にかゝはらず$u>0$なる爲にはyはどの位大きければよいかといふと，之は點線gより上になればよいのである．此の所では$u=0$とおくとxについて等根を得るわけだから

$$(y+1)^2-4y(2y-1)=0,$$

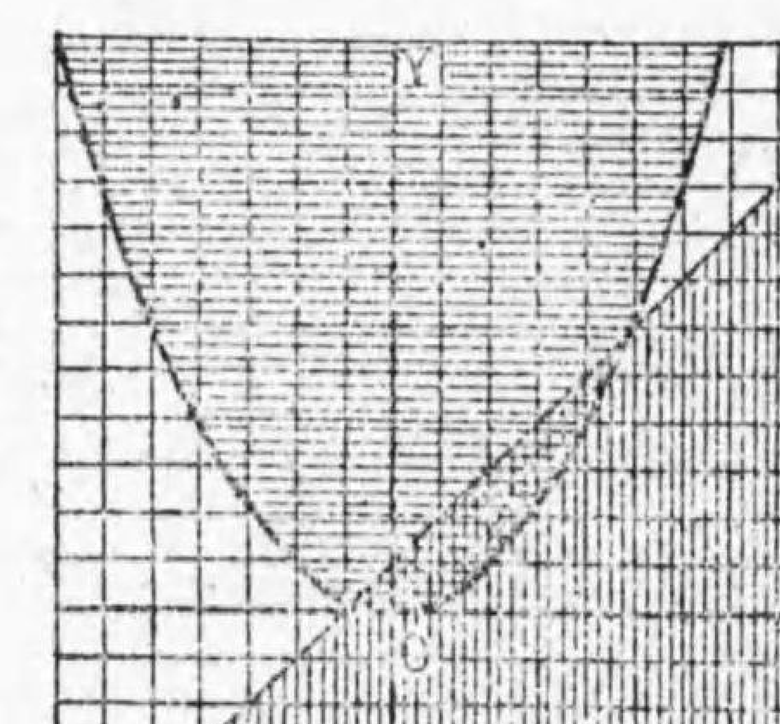
$$y=1 \quad 又は \quad -\frac{1}{7}.$$

正の方をとり$y=1$のときである．それ故求むる範圍は

$$m>1$$

となる．

かやうに二變數を含む整式Pが正となる範圍を求めるにはP=0のグラフなる曲線の何れの側になるかと云ふ事を見ればよい．



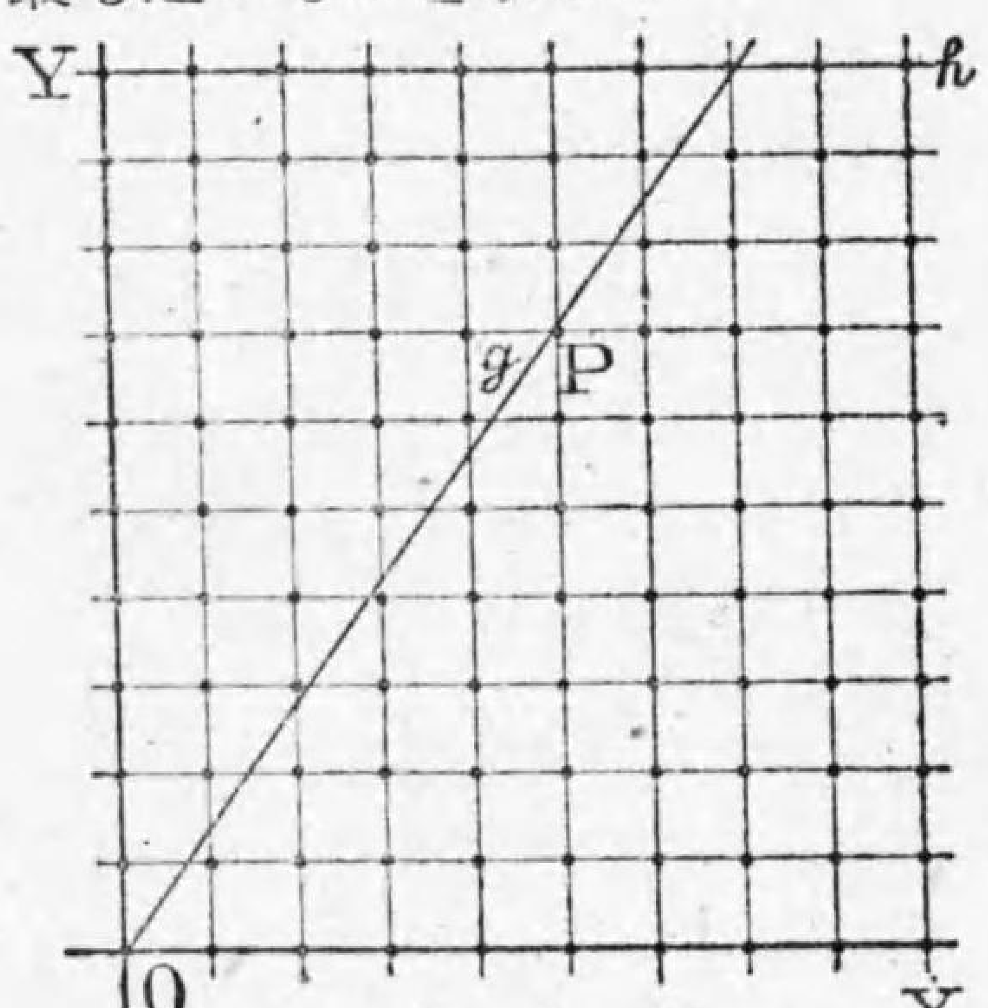
第 6 圖

問題 2. グラフに陰影を施して $4y>x^2$, $y<x+1$

の成立する範圍を求めよ.

解　$4y>x^2$ なる範圍は $4y=x^2$ のグラフの上にある部分卽ち第6圖で横の影線を施した部分で, $y<x+1$ に適する部分は $y=x+1$ の下にある部分, 卽ち縦の影線を施した部分である. 此二つの不等式の成立する部分はこれらに共通な, 第6圖で方眼形に影の入つた部分である.

問題 3.　分母子が一桁の整數なる分數の中で $\sqrt{2}$ に最も近いものを求めよ.



第 7 圖

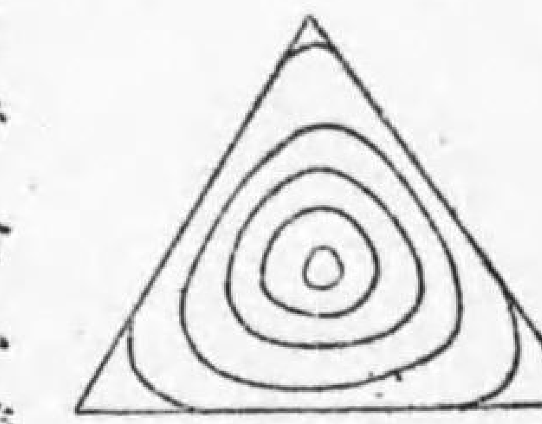
解　分數を $\frac{y}{x}$ とし, (x, y) を座標とする點をPとする. さうするとPは方眼紙の目にあたる點でこの分數の大きさはOP(Oは原點)とOX(X軸)との交角が大なる程大である. そこで

$$\frac{y}{x}=\sqrt{2}$$

なる直線 g を作るとこの上には勿論方眼の目はない. 分子が10より小さいのであるから點Pは直線 h から下側になければならない. それ故この範圍で直線OPが g に最も近いやうにPをとればよいのである. これにより求むる分數は $\frac{7}{5}$ である事がわかる.

問題 4.　三角形内の點から三頂點への距離の和の大小を論ぜよ.

解　これは幾何の問題だがやはり二變數の函數思想範圍にあるものである. 一角が 120° より大なる場合とさうでない場合とで樣子がちがふが, 之を地圖に於ける等高線と同樣な方法で表して見ると第8圖を得る.



第 8 圖

22.　一次方程式と二次方程式

一次方程式, 殊に聯立一次方程式と二次方程式とは現在の中等代數に於ける中心教材である. 從つてこれには充分力を注いで學習しなければならないが, それだけに學習法も整つて居り, 餘り論議すべき事もない.

第一には解法に通曉すべきである事は勿論である. この解法としては

根本原理の利用→公式の利用→特殊形の利用

の順序に進むべきであらう. 但し公式の利用は時によつては省略する方がよい. 例へば聯立一次方程式の解法の公式の如きは餘り記憶し易いものでなく, 却つて根本原理の利用の方がやさしいかも知れない. 特殊形の利用とは, 例へば

$$x^2+x=a^2+a \quad を解け$$

と云ふ場合に, 「一根は明かに a である. 他の一根は二根の和が -1 なる事から $-1-a=-(1+a)$ である.」

と云ふ風にするのである．これは數學の目的の一つたる工夫の精神を養ふ事になり，又考へる事自身に興味があるのはよいが，あまりかやうな特殊法に走ると本筋たる解法其の物の系統的練習を害する事となる．それ故私はかやうな工夫はあまりすゝめない．先づ第一に地道に根を求める事を練習すべきである．

第二には驗算を怠らぬ事である．方程式の驗算は解法と逆のコースを進む事となるから，その効が非常に多い．それ故方程式を解いたら必ず驗算すべきものとしておいた方がよい．殊に特殊形を利用した解法に於ては理論上驗算の必要な場合もある．之については次節に詳しく述べる．

第三に二次方程式に於ては之に附帶した種々の教材が多いから之を整理して適當に利用すべきである．即ち

根と係數との關係，二次式の因數分解，
二次の不等式，　　二次式の極大極小

等で，多くは二次式の性質に關係するものである．之は前前節のグラフにも深い關係がある．

二次方程式が係數に文字を含む場合，即ち文字方程式の吟味については，時々高專校の入試には出るが全體の系統から言つて左程重要な問題ではないと思はれる．適度に問題を練習する程度でよい．これは前節に述べた如く既知數の文字と根との函數關係として考ふべきであるが，入試問題もそこ迄は突込んで居ないやうに思ふ．

23. 雜方程式

二次方程式を利用して解き得る方程式に

高次方程式，分數方程式，無理方程式，
聯立二次方程式

がある．何れも二次方程式の應用であるが，その解法は單一でなく，方程式の形により夫々異なる．のみならずその形の如何によつては解き得ないものもある．例へば $x^2+y=1$，$y^2+x=2$ と云ふ聯立方程式など，簡單ですぐ解けさうに思はれるが決して解けない．それで之を解かうとするには次の二つの方針があると思はれる．

(A) 基本形を多數記憶しておいて解き得る範圍を廣くする．

(B) 多くの問題を手掛け，解法に種々の工夫をする能力を養ふ．

前者は記憶に頼る方法であるが，與へられた方程式がどの基本形に歸するかと云ふことを早く判斷するにはやはり相當の能力を必要とする．後者も多くの問題を手掛けると云ふ點に於て多少記憶に依存する所がある．何れにしても之に要する勞力は大きく，雜方程式位學ぶにしては償ひが少い．それで私は此の材料は第二義的に見て餘り詳しくやらないでもよいのではないかと思ふ．一通り練習して，あとは實際問題にぶつかつた時練習する位でよいのではないかと思ふ．ごく基本的な

$$x^4+Ax^2+B=0,\quad x^3=A,\quad \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=1,$$

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=\sqrt{ex+f},$$

$$\begin{cases}x+2y=a\\ x^2+xy+y^2=b^2\end{cases}\text{(一次と二次)},$$

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=a\\ x^2-3xy+y^2=b\end{cases}\text{(同次形又は對稱形)}$$

位のところが解けるやうになつておけば充分だと思ふ．即ち

(C) 少數の基本形を記憶し，これに適するものだけ確實に解けるやうにしておく．

位でよいと思ふ．

次に注意すべき事は雜方程式の解法は二次方程式や聯立一次方程式の解法と異り充分完備したものでない事である．方程式の解法に於ては與へられた式を順次に變形して行き $x=a$ と云ふ形に導くのであるから，「方程式の根は $x=a$ なり」と云ふ證明にはなつて居るが「$x=a$ は方程式の根なり」と云ふその逆證にはなつて居ないのである．二次方程式等に於ては之が完全に證明せられ解法に缺陷はないのであるが，雜方程式に於ては左程證明が完備して居ないから，この後の分即ち a が方程式の根なる事を確かめる爲の驗算がいるわけである．無緣根が入つて來るのを不思議に思ふ者もあるやうだが，實は入つて來ない方が不思議なので，解法を論理的に見ると，根以外の數値を拒むやうな方法は殆どとられて居ないので，無緣根が入つて來るのは極めて當然なのである．即ち雜方程式に於ては驗算は論理的に必須な條件で，答案の一部であり，決して自己安心の爲ばかりではないのである．これは一次方程式や二次方程式でも教科書に示された以外の獨特の解法を用ひた場合には，やはり言はれる事である．

證明問題と消去法の問題は雜方程式と同樣の氣持で學んでよい．唯これは證明すべき事が一方的であるから，上に述べた驗算の必要と云ふやうな事が起らないと云ふ點は注意すべきである．要するに此の種の問題は二次方程式迄の知識が充分であれば餘り困難なしに解けるべきもので，その程度を超えたものは次第に世の中から姿を消すであらうと想像される．こんな問題に多くの憂身をやつすより，二次方程式をシツカリ摑んでおいた方がよい．

24. 應用問題

代數の應用問題は主として方程式の應用である．これは事實問題を數學化する最初の例であるから重要なる事は言ふ迄もない．然るにこの應用問題の練習が稍もすれば不充分になり易い．それは次のやうな妙な事にその原因があるのだと思ふ．

應用問題は問題が長い．他の代數問題は一行か二行で表される事が多いが，應用問題は大抵數行以上を費す．それ故教科書でも問題集でも，ずゐぶん頁をとつて出題

してあると思つても實際は案外その數が少い．又教師がかやうな問題を作らうとしても，式の問題とちがつておつくうであるし，プリントにするにも勞が多い．勢ひ出題が少くなる．之に反し入試問題としては應用問題は極めて適切である．入試問題を作つたり，印刷したりする時の勞は大した事はない．それよりも採點の勞が最も深い關心を呼ぶわけであるが，應用問題は解法は殆ど式で書かれ，方程式の適否，答の正否と云ふやうな採點の標準が樹て易い．かやうな理由で入試にはずゐぶん應用問題が提出されて居る．こゝに學習と實際とのギヤツプが見出される．

それ故我々はなるべく應用問題を多く練習する事を心掛けるが適當である．教科書にある問題を標準として學習する場合には應用問題だけ特に補充するがよい．又應用問題の中でも特に文章の長い，文意の繁雜なものをいとはずやるがよい．世の中で數學が用ひられる時，その條件は決して單純化されて示されては居ない．世上の問題を細心の注意を以て觀察するとき，そこには殆ど限りないと言つていゝ程多くの因果關係がまつはつて居る．その中，特に重要なものだけ拾ひ上げ，なるべく單純化して之を式にかけるのが數學の役目である．應用問題としては世上にあるありのまゝの姿で之を取入れて來る方が適當なのであるが，それでは文章にならず，取扱も困難だから，或程度單純化して提出されるのである．從つて條件の複雜なものゝ方が應用問題の眞の姿に近いわけで

ある．前に述べた應用問題を練習する機が少いと云ふ理由は，問題が複雜になる程ひどくなるわけであるから，問題の補充もかうした方面を主にするが適當であらう．條件過剩又は條件不足の問題も，近頃時折見受けるやうになつたが，これも上に述べたと同じ理由で當然我々の練習材料とならなければならないものである．將來はこの種の問題が更に數を增す事であらう．

應用問題の練習に當つて注意すべき點を擧げると

(A)　題意をしつかり摑む事

(B)　方程式のたて方

(C)　計算を正確になす事，必ず答まで出す事

(D)　驗算をする事

である．題意をしつかり摑む事は應用問題の第一の眼目である．之が數學を日常生活に生かして行かうとする第一步である．日常生活の中に數學の問題を拾ふ，それが數學の目的の一つであつて見れば，その縮圖である所の應用問題の題意を正しく理解する事の重要な事は言ふ迄もない．次に之を式に移す事はその第二步である．拾ひ上げた問題が之により數學化し，旣知の利器を用ひ易くなる．

この方程式をたてる場合に二つの方針がある．一つは題意をありのまゝに式化するので，それには式の意義と，文章と式との關係を，よく理解して居れば可能である．從つてこの場合，未知數も多くたてゝよいし，式も可成複雜になつてかまはない．もう一つは題意をよく吟味研

究して未知數の選擇，式の選び方に適正を期し，方程式をなるべく簡單にたてる事である．この二つの方針で，後者の方が勝つて居るやうに見えるが，あながちさうでもない．前者の方針に從つても，計算力さへ勝つて居れば充分解けるので，之によれば方程式を立てるまでの面倒さは全くないのである．それ故この二つの方針は時により又趣味によつて何れになつても差支へない．

計算に就ては既に述べたが，特に應用問題では之を充分正確にやつて，答まで出し驗算して自信ある解にまで達する必要が強い．應用問題の解答は直ちに用ひらるべきもので，我々は之を用ひて問題の要求する事實が圓滿に成立するか否か反省して見る必要がある．これも廣い意味の驗算である．之が爲には $3\sqrt{2}$ と云ふやうな答がよいか，4.24… と云ふ形がよいか，又 1日 13時 18分といふ答がよいか，37.3時と云ふ答がよいかも，その場合によつて判斷せねばならない．問題にある 120 粁と云ふ數字は果して正しい數字か又は1米位の差があり得る數字か，然らば之から得た答がどの程度正しいか，小數第何位ぐらゐまで出しておけば充分かと云ふやうな事まで考へる餘裕があつてほしい．電柱の高さを求める問題で 12.863 m と答が出たら「電柱の高さはそんなものだらうか？ うちの前のはどの位だらう？ それにしても電柱の高さを粍まで出す必要があらうか．これなら 13 m か高々 12.9 m 位にしておいてよいのでないか．」と云ふ位考へる餘裕があつてほしいものである．かやうに應

用問題では念を入れて解くと云ふ事が特に必要である．

問題 1．午後 9 時 30 分柱時計を時報に合せ，翌朝柱時計が 7 時のとき懷中時計を之に合せたところ，その日の正午の時報と懷中時計が合つて居た．然るに柱時計が午後 3 時 25 分を示したとき，懷中時計は 3 時 35 分を示して居た．このときの正しい時刻如何．

解．問題が長いからよく讀んで眞意をとる事を心掛ける必要がある．柱時計は 9 時 30 分，懷中時計は正午に，各一回時報に合つて居た丈であるから，何れも正しく動いて居ないのであらう．午前 7 時と云ふのは正しい時刻の 7 時ではない．柱時計が (7+2.5) 時間分進み，それから懷中時計が 5 時間分進んだ時間を合せると丁度 9 時半から正午まで，卽ち 14.5 時間となるのである．こんな事を頭において，さて未知數は何にしようか．一寸複雜だから二つ立てるとして求むる時刻と兩時計が 7 時を指して居た時刻をとつて見るもよい．それにしても單位は何にするか．すべて時を單位としてもよい．

求むる時刻を午後 x 時，兩時計が 7 時を指して居た時刻を午前 y 時とする．方程式を立てる目安は，同一の時計の進む長さは時間に比例すると云ふ事である．柱時計から

$$2.5+y : 12+x-y = 2.5+7 : 12+3\frac{25}{60}-7,$$

懷中時計から

$$12-y : x = 12-7 : 3\frac{35}{60}.$$

これから

$$\begin{cases} 9.5(12+x-y)=\frac{505}{60}(2.5+y), \\ 5x=\frac{215}{60}(12-y). \end{cases}$$

y を消去して

$$101(29\times 43-120x)=103\times 19\times 12x,$$

$$x=\frac{125947}{35604},\ \text{直して 3 時 32 分 15 秒弱.}$$

この答を見るに，懷中時計の示時に近いが，これは懷中時計の方が正午の時報に合つて居たのだから當然であらう.

これは又次のやうに考へる事もできる．時計の誤差は進む示度に比して小さいのであるから，之をちがつた單位で表して見るもよからう．柱時計は1時間進む間に x 分おくれ，懷中時計は1時間進む間に y 分進むとする．柱時計が午後9時30分から午前7時まで進む間におくれた分數と懷中時計が7時から正午まで進む間に進んだ分數とは等しいから

$$9.5x=5y.$$

又柱時計が9時30分から3時25分まで進む間におくれた分數と，懷中時計が正午から3時35分まで進む間に進んだ分數とで10分の差ができたのであるから

$$17\frac{55}{60}x+3\frac{35}{60}y=10.$$

併し我々が求めたいのは $17\frac{55}{60}x$ か $3\frac{35}{60}y$ である．そこ

で之を x', y' としておくと

$$x'+y'=10.$$

$17\frac{55}{60}$ と $3\frac{35}{60}$ を假分數に直して見ると $\frac{215}{12}$ と $\frac{43}{12}$ で，前者は後者の5倍である．$9.5x=5y$ から

$$9.5\times\frac{x'}{\frac{215}{12}}=5\times\frac{y'}{\frac{43}{12}},\qquad 1.9x'=5y',$$

$$x'+y'=x'+0.38x'=10,$$

$$x'=\frac{10}{1.38}=\frac{500}{69}.$$

求むる時刻は3時25分$+x'$分であるから3時32分15秒弱となる.

後者の方が巧妙であるが，それは主として算術的の考察によるもので，代數的に自信があれば强いて巧妙なる法を工夫しようと努力しなくともよい.

驗算　前者に就て見るに

$$y=12-\frac{300}{215}x=12-\frac{175740}{35604}\fallingdotseq 7\frac{3.84}{60}.$$

これで柱時計のおくれる有樣を見るに，9時30分から7時までに3.84分，9時30分から3時25分までに7.25分（32分15秒$=$32.25分），そこで

$$9.5\text{時}:17\frac{55}{60}\text{時}=3.84\text{分}:7.25\text{分}$$

となればよい．計算が少し亂暴だが，大體合つて居る事がわかる.

問題 2.　縱25間，橫20間の矩形の畠に茄子苗 3000

本を植ゑた所，周に面して植ゑられた數は226本であつた．畦巾何尺，株間何尺か．

解 物を植ゑるには矩形に並べて植ゑるのが普通である．その列と列との間の距離を畦巾と言ひ，一列の中で相隣る二株の距離を株間と言ふ．こんな事は大體字義からも判斷されよう．列の數をxとし，一列に並ぶ苗の數をyとすれば，周に面して植ゑられる苗の數は明かに$2x+2(y-2)$であるから

$$xy=3000,\ 2x+2(y-2)=226$$

となる．これから

$$x, y=75, 40$$

を得る．

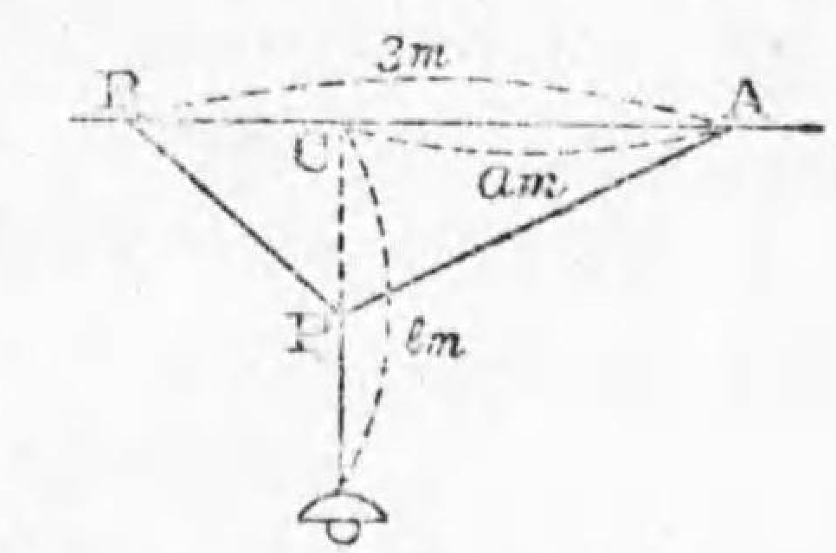
さて畠の巾は20間であるが之に40本の畦を作るとするとその間隔は大體$\frac{20}{40}$間$=3$尺である．之は外側の畦は周から畦巾の半分だけ引込んで居ると假定しての事である．こんな事は問題に詳しく規定してないから勝手に常識的に假定してよいであらう．もともと矩形に等距離に並べて植ゑると考へたのも常識的の假定である．

x, yの値と25間，20間とを組合せて大きい方を畦巾，小さい方を株間とすれば

畦巾3尺，株間2尺，又は畦巾3.75尺，株間1.6尺を得る．何れも常識的である．

問題 3. 天井の一點Aから4 mのコードで吊された電燈がある．Aから3 m距たつた天井の點Bから張ら

れた紐でこのコードの一點Pをゆはへ，電燈をAからBの方へam行つた點からbm下に固定しようと思ふ．紐の長さ及びAPの長さを求む．



第 9 圖

解 $\mathrm{AP}=x(m)$とする．

$\mathrm{CP}=\sqrt{x^2-a^2}$であるから

$$\sqrt{x^2-a^2}+4-x=b.$$

これを解いてから別にBPを求めればよい．

$$x^2-a^2=(b+x-4)^2=x^2+2x(b-4)+(b-4)^2,$$

$$x=\frac{(4-b)^2+a^2}{2(4-b)}.$$

驗算をして見ると

$$x^2-a^2=\frac{\{(4-b)^2+a^2\}^2-4(4-b)^2a^2}{4(4-b)^2}=\frac{\{(4-b)^2-a^2\}^2}{4(4-b)^2},$$

$4-b>0$ 又 $4<a+b$ から $a^2>(4-b)^2$ であるから

$$\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a^2-(4-b)^2}{2(4-b)}=\frac{a^2+(4-b)^2}{2(4-b)}-(4-b)$$

$$=x+b-4$$

で丁度適して居る事がわかる．

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(3-a)^2+(\sqrt{x^2-a^2})^2}$$

$$=\sqrt{(3-a)^2+\frac{\{(4-b)^2-a^2\}^2}{4(4-b)^4}}.$$

尙この問題に關聯して一體電燈はどのへんに吊し得るかと云ふ事を考へて見るのも面白い．この場合電燈の位

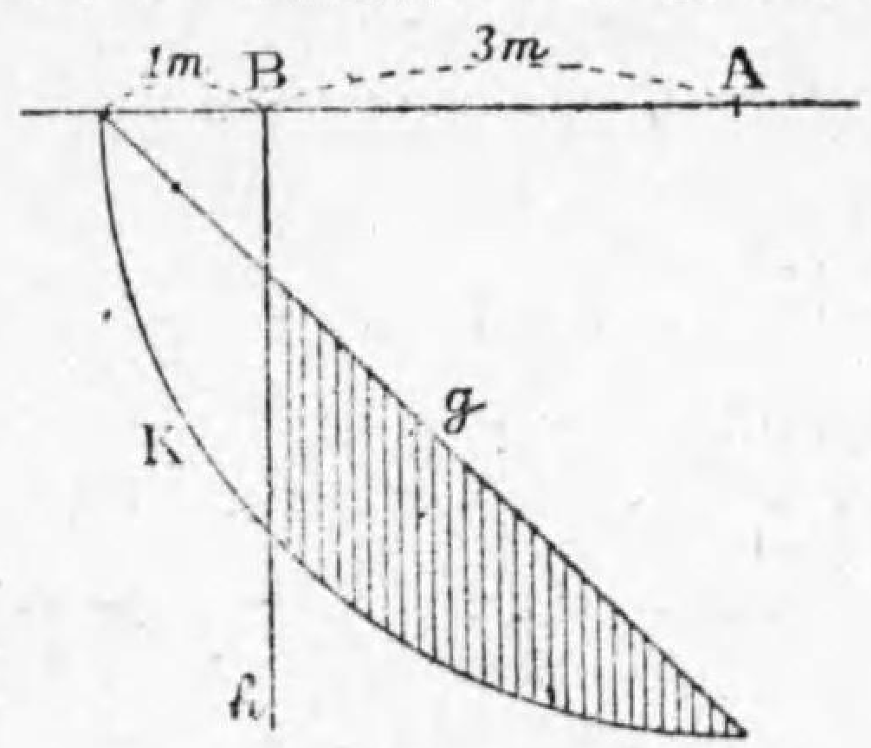
置は a,b で示されるから a,b を座標と考へることができる．この問題で x が4より大きくなく a より小さくなく求められゝば，實際コードを留める事ができるので，その場合 $a\leqq3$ ならばその點Pを B と結んで安定する．故に求むる條件は

$$a\leqq\frac{(4-b)^2+a^2}{2(4-b)}\leqq4,\qquad a\leqq3.$$

第一の不等式の左の等號は $a=x$，即ち CP=0 のとき起る．故に $a+b=4$ となるべきで，電燈のかやうな位置は一つの直線 g 上にある．右の等號は $x=4$，即ちPが電燈の位置と一致したとき，言ひかへれば電燈がAから4 m の距離にあつたとき起る．この位置に於てはAを中心，4 m を半徑とする圓K上にある．$a=3$ のときはBから下した鉛直線 h 上にあるから結局電燈は h と g と K とで圍まれた部分の中にあるべき事がわかる．言ひかへればこの部分に電燈が來るやうに，即ち

$$a\leqq3,\quad a+b\geqq4,\quad a^2+b^2\leqq4$$

なるやうに a,b が與へられたとき，この問題は解を有し，その解が上の式で與へられるので，之に反する場合は上の式は意味ないのである．



第 10 圖

かやうに應用問題は之を單に形式的に解かずに，いつも與へられた問題の實際的意義と照し合せて考へて行くと，趣味もあり又解法の指針も得る事ができる．

25. 不等式と極大極小

不等式は方程式より更に一般的のものであるから，方程式よりも應用が廣いわけである．それ故將來はこれがもつともつと盛に用ひられるやうになるであらう．但し實際問題に當つては不等式は方程式で代用される事が多いので，此の點から考へると，先づ方程式をしつかりやつておいて，不等式に入つてはその方程式で間に合はない所だけ學ぶと云ふ事にならう．例へば「或職工は日給2圓50錢で食費一日80錢である．一ケ月(30日)に食費を差引いた收入40圓以上となるには何日以上働けばよいか.」と云ふ問題では，「……40圓となるには何日働けばよいか.」と云ふ問題を解いて，それ以上働けばよいと答へればよいのである．かやうに不等式の解法は多くは方程式の解法に特別な考察を加へればよいので，この特別の考察だけが不等式の理論となるわけである．この考察は主として式の値の變化，即ち函數やグラフの考へによるもので，グラフと不等式とは極めて密接な關係がある．從つて極大極小問題なども同じ思考範圍に屬するわけである．

尚不等式には方程式に對應するものの外に，恆等式に對應する絶對不等式と云ふのがある．之に對し前者は條件不等式と云ふ．條件不等式はその中に含まれて居る未

知數の範圍を求めるのであるが，絕對不等式はその內に含まれる文字の値如何にかゝはらず（實數と云ふやうな條件はつくが）成立するので，これに關する問題は一種の證明問題である．兩種の不等式は關係はあるが，氣分的には非常に異るものである．

問題 1. $\sqrt{4-x^2}>x+1$ を解け．

解 これは旣に，グラフの節の問題5として出してある．そこの第3圖にある如く $x<-2$, $x>+2$ は $\sqrt{4-x^2}$ が實數にならないから不等式は成立せず（虛數には大小はない），$2\geqq x\geqq\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ では $\sqrt{4-x^2}\leqq x+1$ となつて適しない．この $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ を求めるのは方程式の問題で，この根をもとゝして適當に考察して不等式の解を作るのである．この場合第3圖が非常に役に立つ事が認められるであらう．

問題 2. $\sqrt{4-x^2}-x$ の極大値を求めよ．

解 同じく第3圖で直線と圓との同じ縱線上の點の距離が $\sqrt{4-x^2}-x-1$ であるから之が最大となる所を求めればよい．それにはこの直線を自己に平行に上の方にずらして行つて半圓と離れる點まで行けばよい．このとき直線は圓の切線となるから
切點は $x=-\sqrt{2}$ の點で，從つて

$$\sqrt{4-x^2}-x=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

が極大値である．

別解 代數的には次のやうにして解ける．

$$\sqrt{4-x^2}-x=y$$

なる無理方程式が實數値 x で滿足される y の範圍を求めるがよい．

$$\sqrt{4-x^2}=x+y, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

$$4-x^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$2x^2+2xy+y^2-4=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

判別式を作り $y^2-2(y^2-4)\geqq0$,

$$8-y^2\geqq0,$$

$$2\sqrt{2}\geqq y\geqq-2\sqrt{2}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

こゝで $y=2\sqrt{2}$ が極大値であると速斷してはいけない．數學の問題を解くには速斷は常に禁物である．

$y=2\sqrt{2}$ のときは (B) は實根をもつが，之が (A) の根かどうかわからない．之が (A) の根なる爲（無緣根でない事）には右邊が負でない事，即ち

$$x+y\geqq0$$

を要する．(B) は等根をもつから

$$x=-\frac{2y}{2\times2}=-\sqrt{2},$$

$$x+y=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}>0.$$

即ちこの $x=-\sqrt{2}$ は無緣根でないから適する．反對に $y=-2\sqrt{2}$ の方をとると之は無緣根になるので，(A)が根をもつ眞の範圍は (C) ではない．(B) の根は

$$x=\frac{\pm\sqrt{8-y^2}-y}{2}.$$

$$x+y=\frac{\pm\sqrt{8-y^2}+y}{2}$$

が負でないやうな y は（複號の一方だけ適すれば充分であるから正號をとり）

$$\sqrt{8-y^2}+y\geqq 0,\quad \sqrt{8-y^2}\geqq -y.$$

$y\geqq 0$ ならば之は勿論成立する．$y<0$ ならば

$$8-y^2\geqq y^2,\qquad y\geqq -2.$$

卽ち y の範圍は (C) でなく

$$2\sqrt{2}\geqq y\geqq -2$$

なのである．かやうに考へれば本題のやうな問題は無理方程式の解法に歸するので，これが充分解けなかつた者は無理方程式の無緣根の事を忘れて居た者である．

かやうな問題は特殊な工夫を要するのでなく，旣知の知識を組合せて靜かに考へれば解決できる問題である．徒らに式を形式的に取扱ふばかりでなく，かうした種類の問題を考察する事もたいへん必要な事と思ふ．

別解　こんな種類の問題は大抵相加平均と相乘平均に關する定理が使へる．a, b を二正數とすると

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab},\qquad \frac{a^2+b^2}{2}\geqq ab,$$

$$(a+b)^2\leqq 2(a^2+b^2)$$

等は皆同じやうな不等式である．最後のものを用ひると

$$(\sqrt{4-x^2}-x)^2\leqq 2\times 4$$

但し $x<0$ である．$x>0$ の方には極大値はない事明かである．之により

$$\sqrt{4-x^2}-x\leqq 2\sqrt{2}$$

但しこのときは $x=-\sqrt{2}$ に於て實際 $2\sqrt{2}$ に等しくなる事を試しておかないと $2\sqrt{2}$ が極大値であるとは斷言できない．

問題 3.　$4y>x^2$，$y<x+1$ を解け．

解　座標の節の問題 2 である．第 6 圖の範圍內に (x, y) があればよいのであるが，之を式で表すには，先づ曲線と直線との交點を求め（$4y=x^2$，$y=x+1$ から），$x=2\pm 2\sqrt{2}$ を得，之を用ひ

$$\left.\begin{array}{ll}x\text{ の範圍は} & 2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2}\\ \text{この範圍の }x\text{ に對し }y\text{ の値は} & \dfrac{x^2}{4}<y<x+1\end{array}\right\}$$

として表す他ない．之を單に

$$2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2},\quad 0<y<3+2\sqrt{2}$$

としたのでは不充分である．從つてかやうな問題はグラフに賴る外簡明な解法がない．

26. 比　　例

代數の比例の章は方程式などの章と比べて，どこがちがふかと云ふ感じを起す者が多いであらう．始めの方の比例式の變形は，只：と云ふ記號を用ひて居ると云ふだけで，分數式の變形法と何等異る所がないし，比例式の解法は方程式の特殊なものに過ぎない．應用問題も殆ど比例と云ふ言葉を用ひないですむものが多く，之が解法も方程式應用問題と何等異る所がない．第一比例の定義

にしてからが，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるとき $a:b=c:d$ と書くと云ふのでは，分數式と何等異る所がなく，何の爲にこんな事を云ふのかその意を解し難い．從つて代數に比例の章を入れた眞意はこんな所にあるのではないのであらう．

比例の章の眼目とする所は「互に比例する量」と云ふ概念であらう．比例變化は因果關係，卽ち函數關係の中最も簡單で最も有用なものである．それ故この觀念を徹底させようと云ふのがこの章の眼目である．これから始まつて反比例，複比例，平方比例と順次複雜な函數觀念に進んで行く，さうして函數觀念を空に終らせず，日常生活とよく結合させて行かうと云ふのである．それ故學ぶ者はこの眞意を解し，重點をこゝにおいて學習しなければならない．

併し函數觀念は代數全體をおほふ根本觀念でなければならない．その根本觀念の，その又最も根本的のものが代數のこんな終りの方に出て來るのはおかしい．事實比例の章は代數でも一寸やさしい章になつて居る．之は恐らく函數やグラフの思想が代數でまだ充分重要なものになつて居なかつた頃，せめて比例變化の觀念丈でも與へておきたいと云ふ考へから，こんな章ができた爲であらう．それ故將來は比例はもつと簡單になつて，代數の始めの方に出て來る事にならう．今では函數觀念がそれ程充分徹底して居ないから，かうした變態の比例の章も止むを得ないので，その積りで充分學習してほしいもので

ある．

27. 級　數

級數になると代數もずゐぶん樣子がちがつて來る．第一は公式が多くなつて來る．別にあんなに多くの公式を一々覺えなくとも，級數の特性からすぐ求められるものであるが，代數もこゝ迄進んで來ると新しい數學的概念，之に伴ふ公式と云ふやうな事になれさせる爲にかうした形式が選ばれたものであらう．三角などになると，どうしても公式を覺え之を運用する必要が多くなつて來るのでその練習とも見られる．

併し何と言つても級數の概念は單純でその公式も簡單である．それ故いつも公式を丸呑みにして之を使ふと云ふ態度でなく，級數の概念にかへつてその定義や特性と考へ合せつゝ問題を處理して行くやうにしたい．公式を形式的に運用するのはまだ早い．

級數の章でついでに學んでほしい事は添數の取扱ひである．卽ち $a_1, a_2, \cdots$ と云ふやうな書き方を學び，之になれていたゞきたい．この添數は數學では非常に多く使ふし，其他の物理や工學でもよく用ひるので，殆ど誰でも將來は之に馴れなくてはならない．それにはこの級數の章が一番よい機會で，これから先は遠慮なく添數が用ひ得るやうにしたいものである．

もう一つ級數の章で學ぶべき事は無限並びに極限の概念である．卽ち「無限等比級數の和」と云ふ所で，是非と

も極限の觀念を明白にしなければならない順序になる．これまででも極限と云ふやうな言葉は用ひない事もなかつたが，それはごく單純に「2に近づく」と言ふ代りに「極限が2である」と言ふといふ位に考へて居てよかつたのであるが，級數の和を考へる事になると，もう少しハツキリした概念がほしくなつて來る．元來「極限」と云ふ概念は面倒に言へばきりがないが，之を直觀的に頭に入れてしまへば，別にむづかしい概念ではないのである．單純な常識的の考へ方をそのまゝで，正確にしさへすればよいのである．それ故にかうした機會に極限の觀念をだんだん正確にして行く事が望ましいのである．極限の觀念は高等數學の根源である．級數も高等數學では無限級數のみが重要な意義をもつ．高等數學と言つても決してそんな高い所でなく，誰しも心得て置かねばならぬ程度の所も，極限の觀念なしには進めない．かやうに非常に大切な觀念であるから，初等數學の中から之を受入れる素地を作つておくべきである．

級數の章になるともう方程式や，不等式や，グラフの知識は充分徹底して居る筈であるから，機ある毎に之を有効に使ふ事を心懸けなければならない．數學の知識は漸進的に，甲の知識を得たら之を利用して乙に，更に之を利用して丙にと進むのであるが，如何に先に進んでも甲，乙等始めの方の知識は何時役に立つかわからないので，いつも頭の中において置く必要がある．殊に方程式などの知識は數學全般に亙つて應用されて居るものであるから，いつも之を念頭から離してはならない．これはその場所場所の學習が滑らかに行くばかりでなく，既習の知識を次第に確實にし常識化し，又前後の知識の綜合を厚からしめる等の利がある．他學科では先に進むに從ひ前に習つた所はだんだん記憶がうすれてもよい場合もあるが，數學では之と反對に，進めば進む程既習の知識が確實になつて行かなければならないのである．代數の級數以下の項は方程式を中心とした代數の主要部と一寸氣分が變るから，この心掛けを實施するに極めてよい機會である．

問題 1. $S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$, $S'=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$ を二つの等比級數とすれば $S=a_1a_nS'$ なる事を證明せよ．

解． $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ が等比級數ならばその逆數 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$ も亦等比級數である．又等比級數であるから $a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\cdots\cdots$ なることも頭において見る．さうするとすぐに次の解を得る．

$$S'a_1a_n=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_1a_n$$

$$=\frac{a_1a_n}{a_1}+\frac{a_2a_{n-1}}{a_2}+\cdots+\frac{a_na_1}{a_n}=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1.$$

一寸突飛な解のやうに見えるが，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ と $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_u}$ とは大小の順が反對になつて居るが項順に比例して居り，後者に或一つの數を掛ければ前者の各項になる

だらうと云ふことを考へても，この解に思ひ及ぶのが當然である．

問題 2. 初項1なる無限等比級數の總和がその各項の三乘の總和の k 倍に等しきとき原級數の公比を求む．

解 初項1なる等比級數の公比を r とすれば，これは

$$1,\ r,\ r^2,\cdots\cdots$$

である．その各項の三乘を項とする級數は

$$1,\ r^3,\ r^6,\cdots\cdots$$

で，やはり等比級數をなして居る．$|r|<1$ であるが，さうすると $|r^3|<1$ となるから無限等比級數の和が求められる．そこで題意を方程式に書くと

$$\frac{1}{1-r}=\frac{k}{1-r^3}.$$

$r\fallingdotseq 1$ であるから $\quad r^2+r+1=k,$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{4k-3}}{2}.$$

この場合 $|r|<1$ なる事が必要である．これが爲には先づ

$$k\geqq\frac{3}{4}$$

なる事を要する．又 $r=\dfrac{-1+\sqrt{4k-3}}{2}$ をとれば

$$1>\frac{-1+\sqrt{4k-3}}{2}>-1,$$

$$3>\sqrt{4k-3}>-1.$$

右の不等號はいらない．左からは

$$9>4k-3,\ 3>k$$

を得る．又 $r=\dfrac{-1-\sqrt{4k-3}}{2}$ からは

$$1>\frac{-1-\sqrt{4k-3}}{2}>-1,$$

$$3>-\sqrt{4k-3}>-1.$$

左の不等號はいらない．右からは

$$\sqrt{4k-3}<1$$

$$4k-3<1,\qquad k<1.$$

この結果を綜合すると

$1>k\geqq\dfrac{3}{4}$ のときは $r=\dfrac{-1\pm\sqrt{4k-3}}{2}$

$3>k\geqq 1$ のときは $r=\dfrac{-1+\sqrt{4k-3}}{2}$

其他のときは　　解なし

と云ふ結果を得る．この問題はかうした完全な結果が要求されるとすれば一寸難題だが，併し既習の知識を自然の順序に組合せればできるのであるから，實力ある學生は之を試みられるがよいと思ふ．

問題 3. 次の級數の無限項の總和を求めよ．

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots,\ |x|<1$$

解 これは雜級數であるが等比級數と密接な關係を持つて居る．雜級數の和を求めるには種々の工夫を要するが，これは數學全體を通じて見ても餘り重要な問題ではない．私は中學では雜級數はやらんでもよいものと思つて居る．併し本題は無限級數の和と云ふ觀念を等比級數

でない級數にまで一歩進めたもので，その點玩味して見る價値がある.

無限項の和といふのは有限項の和の極限である事を頭におき，必ず有限項の和で計算を進めなければならない.

即ち $\quad 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})+(x+x^2+\cdots+x^{n-1})$$
$$+(x^2+x^3+\cdots+x^{n-1})+\cdots+(x^{n-1})$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}+\frac{x-x^n}{1-x}+\frac{x^2-x^n}{1-x}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}-x^n}{1-x}$$
$$=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{1-x}-\frac{nx^n}{1-x}$$
$$=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}.$$

さてこゝで $n\to\infty$ とするのであるが，$\dfrac{x^n}{(1-x)^2}$ は等比級數の所でも學んだ如く $n\to\infty$ に從ひ 0 に近づく．併し $\dfrac{nx^n}{1-x}$ の方は n と云ふ係數がついて居るだけに 0 に近づくか否か簡單にはわからない．まあ x^n の方は等比級數的に小さくなつて行くから n が大きくなると非常に小さくなるが，n の方は等差級數的であるからその割に大きくはならず，從つて積は小さくなるであらう事が想像される．之を證明するには次の方法によるのであるが，之は自分で工夫する事は難かしいだらう．先づ $x>0$ とし $x=\dfrac{1}{1+t}(t>0)$ とおくと $x^n<\dfrac{1}{1+nt}$ である．それは

$(1+t)^2=1+2t+t^2>1+2t,\ (1+t)^3>(1+2t)(1+t)>1+3t,$
$(1+t)^4>(1+3t)(1+t)>1+4t$ 等であり，一般に
$(1+t)^n>1+nt$ が成立つからである．そこで更めて，

$$x=\frac{1}{1+t}\times\frac{1}{1+s}\ (s,t>0)$$

とおく．これは $x<1$ であるから之を二つの 1 より小さい數の積に分ける事ができるのでそれを $\dfrac{1}{1+t}$，$\dfrac{1}{1+s}$ と書けばよいのである.

$$\frac{nx^n}{1-x}<\frac{1}{1-x}\,\frac{n}{1+nt}\,\frac{1}{1+ns}<\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{t}\,\frac{1}{1+ns}.$$

こゝで n を大きくすれば右邊は第三の分數が 0 に近づくから 0 に近づき，從つて $\dfrac{nx^n}{1-x}$ が 0 に近づく事がわかる ($x<0$ の場合は最初から x の代りに $-x$ をおいて考へればよいし，$x=0$ なら言ふ迄もない).

すつかり脱線してしまつたが要するに

$$n\to\infty \text{ のとき } \frac{x^n}{(1-x)^2}+\frac{nx^n}{1-x}\to 0$$

を示す事が無限級數の和が $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ に等しい事を示す爲に不可缺の條件である事を理解してもらふ必要がある.

28. 對　　數

對數になると又すつかり樣子が變つてしまふ．元來對數を初等代數の一章に加へたのは全く便宜上のもので，數學の系統から云つても大分ちがふものである．第一對

數とか一般指數とか云ふものは代數運算ではない. a^x の x は a^2 の2とは全然意味がちがふ. a^x に於ける x は連續變數で, 之を自由に變化させようとするには a^x の定義に於て極限の觀念を要するのである. それ故 a^x を x の函數と考へたとき, もはや初等代數の範圍外に出て居る. それ故對數を學ぶに際してはすつかり頭を新しくして新しい知識に臨む態度で入らなければならない. この心掛さへ忘れなければ對數も決して難かしい學科ではない.

對數の章で學ぶべき事は

(A) 對數の定義

(B) 對數の特性

(C) 對數計算法

の三つである. この中で最も重要で且困難なのは(A)の對數の定義である. 對數の觀念は上述のやうに初等代數としてはやゝ高尚なものであるから, その定義を充分呑み込む事, 云ひ換へれば對數の本質を直觀的に頭に入れてしまふ事が最も急務である. この概念が正しく頭に入つてしまへば(B)も困難なく諒解できるし, (C)などは全くその應用として形式的に學習できる事になる. 併し對數の定義と云つても, 單に文句を覺えると云ふ丈ではその本性に徹する事ができない. それ故對數の性質を學ぶときにも, 問題を練習するときにも, いつも對數の定義を頭において之と照し合せ, 各方面からこの定義を照して見て之が確實に自分のものとなるやうに努力しなければならない.

對數を學ぶ目的は大部分之を對數計算に利用しようと云ふ事にある. 其他にかうした超越函數の概念と取扱ひに馴れさせようと云ふ深遠の目的もあるであらうが, それよりも對數の實用價値が餘りに大きい. 近頃計算器が發達普及して來た爲對數の必要性は多少減じたが, 以前は對數表がなければ計算と云ふものは殆ど不可能のやうな狀態であつた. 今でも計算器でまに合はない計算もあるし, 又一面から言ふと高尚な計算を用ひる部面がどんどん增して來るから, 依然として重要である事は言ふ迄もない. 併し對數計算を學ぶ事は, 對數の定義を呑み込むよりは遙かに容易であり, 殆ど數學を解せぬ者でも機械的に之を學ぶ事が出來る. 只我々の立場からすると, やはりかやうな數學的の操作に從事する者は, 根本に於て數學的頭腦を要し, 之が深いか否かは作業の能率に大きな影響があると信じられる. 故に對數計算が重要であればある丈, その根源たる對數の特性を學ぶ事も亦重要なりと考へざるを得ない.

かやうに重要な事項であるにもかゝはらず, 中學に於ける對數計算の練習は充分重視せられて居ない. それは恐らく入學試驗に出ない爲で, 入試に出ないのは對數表を與へる事が困難な爲であらう. 併しかやうな本質的でない理由によつて, かやうな重要な事を輕視するのは甚だ心得難い事である. 一體對數に貴重な時間を割くのは何の爲かと云ふ事を考へたならば, その大半の目的たる對數計算を輕視するが如きは, 眞面目なる態度と言ひ難

く，自己の大を致す所以でない．將來は必ずこの種の問題が多く提出される事にならうが，それと無關係に對數計算は充分よく練習してほしいものである．

尙對數はかやうに便利なものであるから，之を利用して計算尺や對數方眼紙などが作られ，種々實用に供せられて居る．

29. 數値計算の注意

こゝで一寸，數値計算の誤差について注意しておきたい．これは算術に屬するかも知れないが，問題が可成面倒だから代數に於て論ぜられる場合が多いであらう．而も之を嚴格に論ずると可成難解の節もあるので，餘り深く立入つて敎へる事はして居ないやうである．併し數學を實際問題に用ひようとする時は，多くの場合結果の誤差は避けられないので，それがどの程度であるかと云ふことは非常に重要な問題である．それ故ごく大ザツパに常識的になりとこの方面の概念を得ておく必要がある．

我々が物の長さを測つて 1.52 m だと言つたとき，この物の長さは正確には 1.52 m ではない．そこには多少の差があるが，我々の目，又は測定法がそこ迄とゞかないか，又はとゞいたとしても事實そんなに詳しい値はいらないから 1.52 m と言つておくのである．それならこの物の長さは正確にはどの位であらう．まさか 1.52 m と言つたものが 2 m もあつたりはしない筈である．せいぜい 1.53 m から 1.51 m の間であらう．この間の値をもつ

長さを我々は近似的に 1.52 m と呼ぶのである．我々の用ひて居る數は，大部分かうした「誤差をもつ數」卽ち「近似數」である．從つてこれらの數を用ひて計算した結果も近似値であり，かやうな計算はすべて近似計算である．近似計算によつて得た數値は，その誤差の程度がどの位かわからなければ全く價値がない．例へば得た答が 1.52 m だつたとしても，或は之が 2.32 m ではないかといふやうな疑があつてはこの値は全然意味がない．誤差の程度がわからないでは 1.52 m としたものが 2.32 m はおろか 100 m ででもあり得る疑があるわけである．從つて近似値の計算に際しては，その誤差の程度を知る事は絕對必要の事である．

近似數の計算でなくとも，普通の數の計算に於ても近似計算を餘儀なくされる事が多い．例へば π を 3 倍せよといふとき，掛算は最後の位から掛けて行くが，π には終りがないからこの運算は始める事ができない．それ故 π を或所できつて之を 3 倍するのである．卽ち近似計算を行はざるを得ないのである．

近似計算に於て注意すべき事は次の諸點である．

(A)　結果の誤差の程度を明確にする事

(B)　途中で餘り不必要な手數を掛けない事

例へば　$3.524 \times 4.163 \times 1.252$　のとき　$3.524 \times 4.163 = 14.670412$ に 1.252 を掛けるとき後の數は 4 數字しかないのであるから前の數字を全部とる事は無駄でせいぜい 14.670 までとつて掛ければよいのである．大體常識

的に云つて，加減法ではその末位をそろへて加減を行ひ（例へば 0.52345 と 0.126 と 13.1543 と加へるときは第二數が小數第3位迄しかないから他の數も小數第3位できつて加へてよい．但しこゝに書いた數は皆上の約束に從ひ，末位の1未滿の誤差があるとする．），乘除のときは數字の數を揃へて計算し，答は加減法では末位を一つ四捨五入し，乘除法では數字の數を一つへらす事にすれば正常な近似數が得られるのである．

問題 1. $\sqrt{2}\times\pi$ を小數第3位まで求めよ．

解 求むる數は10より小さいから求むる數字は4數字である．それ故二數共5數字づゝとつて掛ければよい．

$$1.4142\times3.1416=4.44285072$$

故に答は 4.443 となる．

之をもつと正確に計算しようと思へば次のやうにする外ない．

$$1.4\times3.1=4.34,\quad 1.5\times3.2=4.80$$

$$1.41\times3.14=4.4274,\quad 1.42\times3.15=4.4730$$

$$1.414\times3.141=4.441374,\quad 1.415\times3.142=4.44593$$

$$1.4142\times3.1415=4.44270930,$$

$$1.4143\times3.1416=4.44316488$$

こゝで始めて左右の結果が小數第3位を3ときめ得る程度まで一致したのである．始めの方の計算はいらないわけであるが，どの邊から始めたらよいか豫めわからなければ，そんなに終りの方から始めるわけにも行かない．

それ故この計算法は時として甚だ厄介である．故に上のやうな考へ方により，大事をとつて必要より一つ多い位數字をとつて計算しておく方が得策であらう．

問題 2. $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$ を知り $\log 75$ を求めよ．

解 $\log 75=\log 25+\log 3=2-2\log 2+\log 3$

$$=2-0.6020+0.4771=1.8751$$

とすればよいわけであるが，この誤差が問題である．$\log 2=0.3010$ と云ふのは勿論近似値で，四捨五入法によつて得た値と考へるべきであるから

$$0.30095<\log 2<0.30105,$$

同樣に $\quad 0.47705<\log 3<0.47715.$

故に $\quad 2-0.6021+0.47705<\log 75<2-0.6019+0.47715,$

$$1.87495<\log 75<1.87525.$$

かうして見ると正しい値としては

$$\log 75=1.875$$

までしか書けないわけである．

30. 雜　例

最後に代數の問題で二三氣づいた誤り易いものや，誤題などを擧げて參考に供する事とする．これらの問題は決して代數の本質に觸れる程本筋のものではないが，それ一つ一つとして又何等かの練習價値があらうと思ふ．但し私はかやうな問題に深入りする事を一般の學生におすゝめするものではない．

問題 1. 次の聯立方程式を解け.

$$x^{x+y}=y^2,\quad y^{x+y}=x^2.$$

解 この二式を組合せて

$$(x^{x+y})^{x+y}=(y^2)^{x+y}=(y^{x+y})^2=x^4,$$

卽ち $$x^{(x+y)^2}=x^4.$$

こゝで $$(x+y)^2=4$$

となるなら簡單だがさう速斷する事はできない. $a^n=a^m$ なら $m=n$ なりと云ふ定理がどこかにあつたか! よく考へてから手を下さねばならない. 例へば $x^3=x^1$ とおくと $x=0,\ \pm1$ なる三つの値を得る. この三つの値については決して $x^n=x^m$ から $n=m$ は出て來ない事は上の事から $3=1$ とならない事で明かである. 併し $0,\ \pm1$ を除いたらどうかと云ふと, その場合この定理は成立するのである. 何となれば $|a|>1$ ならば $n>m$ なるとき $|a^n|>|a^m|$ となり $a^n=a^m$ とならない. $m>n$ でも同樣であるから歸謬法で $n=m$ なる事がわかる. $0<|a|<1$ のときも同樣である. 卽ち

「$a^m=a^n$ なるときは $a=0,\ \pm1$ なるか又は $m=n$ なり」

と云ふ定理が成立するのである.

こゝまで注意すれば本題の解は極めて順調に進む. 卽ち

I. $x=0$ 又は ±1 なるとき.

$x=0$ とすれば當然 $y=0$ となり x^{x+y} が意義を失ふから之はとれない. $x=1$ とすれば $|y|=1,\ y=\pm1$. 何れも方程式に適する. $x=-1$ とおけばやはり $y=\pm1$. これらは何れも原方程式に適し $x=\pm1,\ y=\pm1$ なる四組の根を得る.

II. $x\neq0,\ x\neq\pm1$ のとき.

このときは $x+y=\pm2$ となるから, 上の方程式は

$$x^{\pm2}=y^2,\ y^{\pm2}=x^2$$

となる. 複號の $+$ をとれば $x=\pm y$ となり $x=1,\ y=1$ しか出て來ない. 複號の $-$ をとれば

$$x^{-2}=y^2,\qquad xy=\pm1.$$

之と $x+y=-2$ から $x=y=-1$ の他に

$$x=-1\pm\sqrt{2},\ y=-1\mp\sqrt{2}$$

なる根が出て來る. 同値關係が吟味してないから驗算を必要とするが何れも適することがわかる.

問題 2. $ax^2+2bxy+cy^2$ に於て $x=3X+2Y,\ y=4X+3Y$ とおくとき, 之が $AX^2+2BXY+CY^2$ となるとき $AC-B^2$ を a, b, c にて表せ.

解 實に妙な問題である. なぜかやうな問題が提出されるかと云ふことは, 少し高等數學をやつて見るとわかるのである. 高等學校の先生は高等數學をやつて居るから, その中で代數の問題を拾つて出さうと云ふ事はあり易い事で, 從つてかやうな動機で出されたと見られる問題が可成ある. 併しそれかと云つて中學生としては高等數學に溯つて問題の起原をたづねるには及ばないから, 正面からぶつかればよいのであるが, 只かうした妙な問題の出される原因丈は知つておいてもよい.

さて本文は恒等式に關する問題である．恒等式の取扱を巧にすればよいが，別に巧にしなくとも x, y のところに $3X+2Y$，$4X+3Y$ を代入して A や B 等を a, b, c で表し，$AC-B^2$ を計算すればよいわけである．併し數學に趣味を有する者としては何とか少し面白い解をして見たい．この見地から次のやうに工夫して見た．

求むる式 $AC-B^2$ が $AX^2+2BXY+CY^2$ の判別式である事に注意すると，多分完全平方の條件が用ひられると考へられる．併し $ax^2+2bxy+cy^2$ 等は完全平方式ではないから完全平方の條件を用ひるには一寸細工をして之を完全平方式に直す．即ち

$$ax^2+2bxy+cy^2+kx^2 \equiv AX^2+2BXY+CY^2+k(3X+2Y)^2$$

そこで　$b^2-(a+k)c=0,\qquad k=-\dfrac{ac-b^2}{c}$

とおくと左邊は完全平方となる．故にこれに只置きかへをした丈の右邊も亦完全平方である．右邊は

$$(A+9k)X^2+2(B+6k)XY+(C+4k)Y^2$$

であるから

$$(B+6k)^2=(A+9k)(C+4k),$$
$$AC-B^2=-(4A-12B+9C)k$$
$$=+(4A-12B+9C)\frac{ac-b^2}{c}.$$

そこで $4A-12B+9C$ を求めなければならない．こゝ迄來て平凡な計算を使ふのは殘念だから少しこの式を眺めて考へて見る．さうするとこの式 $4A-12B+9C$ は $AX^2+2BXY+CY^2$ に於て $X=2$，$Y=-3$ とおいたも

のである事がわかる．$X=2$，$Y=-3$ は $x=0$，$y=-1$ と同じであるから $ax^2+2bxy+cy^2$ に之を代入し

$$4A-12B+9C=c,$$

即ち　$$AC-B^2=ac-b^2.$$

判別式の關係だらうと想像した事が圖星だつたわけである．

これは又，次のやうに簡單に考へても誤りではない．代入の結果を考へると A, B, C は a, b, c の一次式なる事が明かである．それ故 $AC-B^2$ は a, b, c の二次式である．而も $ac-b^2=0$ ならば $ax^2+2bxy+cy^2$ は完全平方だから $AX^2+2BXY+CY^2$ も完全平方で $AC-B^2=0$ である．$ac-b^2=0$ のとき 0 となる式は（例へば $a=\dfrac{b^2}{c}$ とおけば 0 となるから）$ac-b^2$ で割り切れるが，これは二次式だから

$$AC-B^2=k(ac-b^2)$$

となる．k は a, b, c を含まない常數である．之を定めるには a, b, c に特別の値を與へて求めてよい．例へば $a=0$，$b=1$，$c=0$ とすれば

$$AX^2+2BXY+CY^2 \equiv 2xy=2(3X+2Y)(4X+3Y),$$
$$A=24,\ B=17,\ C=12,$$
$$AC-B^2=-1.$$

即ち $k=1$ なることがわかる．この方法は一寸インチキのやうに見えるが，決してさうではないのである．

問題 3.　$a^2=b^2+c^2$ なるときは次の式が成立する事を

證明せよ.

$$a+b+c:c+a-b=a+b-c:b+c-a.$$

解 逆に第二式の方から崩して行くと

$$(c+a-b)(a+b-c)=(a+b+c)(b+c-a), \cdots(A)$$

$$a^2-(b-c)^2=(b+c)^2-a^2,$$

$$a^2-b^2-c^2+2bc=b^2+c^2+2bc-a^2,$$

$$a^2=b^2+c^2$$

で第一式を得る. 故に之を證明するには上の式の變化を逆にたどればよいわけで (A) まではこのまゝ順番にもどせる. (A) が成立するとき比例式が成立するかと云ふと, こゝでは比の二項が共に 0 でない事が必要である. (教科書によつては一項が 0 でもいけないと書いてあるのがある. こゝでは二項共に 0 なる場合だけを除く.) そこで

$$a+b+c=0, \quad c+a-b=0$$

とおくと $a+c=0$, $b=0$ で確かに假設は滿足されるがこの場合は終結は眞でない. $a+b-c=0$, $b+c-a=0$ のときは $a-c=0$, $b=0$ となつて同樣である. それ故この特別の場合については本題は誤りである. 即ち本題には但し $b\neq0$ とす, とか云ふやうな條件を入れておくべきであつたのである.

この程度の誤題はずゐぶん多いもので, 受驗者も出題者も餘り誤題と氣づかず濟んでしまふ場合もあらう. 餘り氣にかけぬ方がよいが, 幸か不幸か誤題に氣づいたときは, 自分が誤題と考へる理由を明かにしておくべきであらう.

問題 4. 時速 40 粁を以て正西に向つて進行中の汽船が前方に時速 15 粁で正北に進行中の颱風があり, このまゝ進めば颱風の中心にぶつかる事, 及び中心から 400 粁以内は危險區域である事を知つた. そこで現在の位置から正南に若干距離進んだ後正西に進み, この危險區域を避けようとするには何程正南に進んだらよいか.

解 一寸考へると颱風の中心の進行路に船が來たとき颱風が通り過ぎて居ればよいやうに思はれる. 船と颱風との關係的位置が今よりも 400 粁だけちがへばかやうになるから, 南下すべき距離を x とすると

$$x:400-x=40:15,$$

$$x=\frac{400\times40}{55}=291 \text{ 弱}.$$

即ち船は 291 粁南へ進めばよいわけである.

ところがこの考へは根本的の誤りである. 颱風の進路に於て危險が避けられたからとて他の所で安全とは言へないのである. 正しく解くには颱風の中心と船との最短距離が 400 粁より大きいやうにしなければならない.

今船が颱風の中心の進路に達したとき, 颱風の中心はその北 x 粁にあつたとすると, t 時間前には船はその東 $40\,t$ 粁に, 颱風はその北 $x-15\,t$ 粁にあるから, その距離の二乘は

$$(40\,t)^2+(x-15\,t)^2=(40^2+15^2)t^2-30xt+x^2,$$

t についてのこの二次式の極小値は

$$t=\frac{15x}{40^2+15^2}$$

のときに起り，その値は $\dfrac{40^2}{40^2+15^2}x^2$ である．即ち

$$\frac{40^2}{40^2+15^2}x^2>400^2,$$

$$x>50\sqrt{73}.$$

故に南下すべき距離は

$$50\sqrt{73}\times\frac{40}{55}=310.6\cdots.$$

即ち約311粁である．

第五章　幾　　何

31.　幾何學の展望

幾何學は空間の概念を詳かにし，且空間に於ける圖形の性質を研究する學科である．空間の概念はすべての科學的の概念の舞臺であり，數の概念と相待つて科學的思索を可能ならしめるものである．從つて之が研究は科學の基礎であり，科學が進步する程空間の概念も進步を要求せらるべきものである．

空間の概念は一面から見ると，科學的概念の基礎の一方面であるが，之を他の觀點から見ると數の概念と一體不可分のものである．數の概念を實際問題に適用せんとするときは必ず空間の概念を通じなければならないし，又空間の概念も數量の概念なしには到底用ひ得られない程幼稚なものとなる．それ故代數と幾何とは數學の二方面とは云へ，やはり一體不可分の關係にあるものであつて，別に二つの學科として對立せねばならない根本的の理由はないのである．現在代數と幾何とが餘りに異つた外貌を具へて居ると云ふ事は，その原因を尋ねるに主として傳統によるものであるが，併し此の傳統は現代の教育に於ては，むしろ便利な區別であるとして利用されて來た傾きがある．傳統の利用は結構であるが，傳統はどこまでも傳統であり，科學的根據のないものであるから，之は利用する範圍に於て價値があり，決して之に捉

はれてはならないものである事を銘記しておかねばならない．而もその傳統たるや決して我が民族性に根ざした傳統ではなく，他の異つた民族性を持つ民族の間に作られた傳統であり，我々が之を尊重せねばならぬ理由は少しもないのである．

代數と幾何の外貌に於て最も異る點は，幾何學の論理性であらう．幾何學の問題は主として之を「證明」する事に努力が拂はれ，殊にその當初に於ては無益と思はれる程に自明な事實の證明が要求されて居る．之を幾何學は論理の練習に最も便利だから，之を利用したのであると見れば意味あるが，單に昔の人がかやうにやつて居たから，それを遵奉して居るのだとすれば反省の必要がある．代數學に於ては思考の順當な經路をたどつて結果に到達できる問題が多いが，幾何學に於ては種々の工夫をし，多少飛躍的な思索を經て始めて結果が導かれる問題が多い．私は此の點については幾何學の直觀性が工夫研究の練習に便である事を指摘して，傳統の利用を便とする事を主張したいのである．

もう一つ幾何學の傳統として反省せねばならない事は，その範圍が餘りに限られて居る事である．之は論理の嚴正を餘りに固執した爲，作圖用具(定規とコンパス)の性能にしばられ，圖形的にも方法的にも之を一歩も出る事ができなかつたのであらう．今日實社會に之を活用せんとするに當り，角の三等分が作圖不可能であると云ふやうな事は全く意味のない事であるし，又楕圓とか螺

線とか日常生活に關係深い圖形が全然顧みられて居ないと云ふ事は不便極まる事である．この點は幾何學としては深く反省せねばならぬ所であらう．

現在の初等幾何學を横斷的に見れば，直線圖形，圓，比例，立體幾何等の章があり，之を縱斷的に見れば證明問題，計算問題，軌跡問題，作圖問題等に分ける事ができる．圖形的に見ると餘りに平面圖形に重點を置き過ぎて居る觀があるが，これは私は決して悪いと思はない．平面は空間の縮圖であつて，平面の性質を詳かにすると云ふ事は，空間の性質の大部分を詳かにする事になるからである．我々の五感の性質から云つて平面圖形を觀察，思索する事は立體圖形に對するよりも著しく容易であるから，之を立體幾何學の學習に代用するのは賢明の方法である．併しそれは立體の概念が適當に養成される範圍の事であり，それ以上平面幾何學を偏重するのは面白い事でない．定理，軌跡，作圖の區別に於ては餘りに窮屈でもう少し測量と云ふやうな能動的の分子を加へたいと云ふ事と，推理から進んで求理的な方面を多くする事が希望されて居る．之は幾何學の將來を示唆する有力な材料であらう．

32. 幾何學の基礎

幾何學の論理性はその基礎に於て甚だ奇異の感を我々に與へる．即ち直觀的に誰しも明白と見るであらう事實を苦心して證明せんとして居る事である．之が爲に學習

者は先づ第一歩に於てつまづかされる．代數に於ては $a+b=b+a$ なる事や $ab=ba$ なる事はそんなにやかましく證明して居ないのに幾何では二直線の交點が一つである事まで證明しようとして居る．之は前に述べたやうに代數を創めたアラビヤ人と幾何學を創めたギリシヤ人との民族性の相違から來てゐるのである．ギリシヤ人は相當進んだ知性を持ち乍ら，之を適用すべき進歩した科學を持たなかつた爲に，その知性はあらぬ方に走り，論理を弄び，遂には詭辯まで持出して自慰して居たのである．當時僅かに科學として彼等の間に起つて居た幾何學がその犠牲となり，好む好まざるにかゝはらず固い傳統を植えつけられてしまつたのである．この傳統は彼等の學系をふむ歐洲人によつて繼承されて今日の體裁を作りあげてしまつた．

併し乍ら時代は全く變つた．吾々の科學の基礎を築いてくれたギリシヤ人等には深い敬意を惜しむものではないし，ユークリッドの幾何學原本が美しい創造物である事にも異論はないが，吾々はあれ丈の簡單な幾何學的事實を學ぶにあの尨大な原本を讀破する餘裕はもたないのである．吾々は進歩した科學があり，之を驅使すべく餘りに多くのなすべき事をもつ．電波も飛行機もなく，原子力など夢にも考えなかつたギリシヤ人の悠長さを學んで居る暇はないのである．

併しまだ一部の人達の間には，數學の整然たる學的體系を尊重するの餘り，その論理的構成の大要を中學生に

教へる事の利益を說く者があり，その結果稀に入學試驗にかうした基礎的の問題が提出される事がある．教科書にもまだ垂線は斜線よりも短いと云ふ證明もあるし，又「公理」と云ふ語も說明してある．それ故現實に則するとすれば，全然かうした方面を無視すると云ふわけにも行くまい．まあせいぜい教科書に書いてある事を覺える位はせねばなるまい．それ以上突込んで公理の眞意を理解し，平行線公理と非ユークリッド幾何の關係を云々すると云ふやうな事は私は中學生としては無用の事だと考へて居る．定理の證明も直觀で自明と思へない程度，例へば「同一の弧の上に立つ圓周角は相等し」とか「三邊がそれぞれ等しい二つの三角形は合同である」とか云ふ位のところから身を入れ始めたのでよいと思つて居る．論理的關係の練習も勿論必要であるが，それは複雜な定理の證明をして居る間にでもできるから，强いて簡單な定理に之を適用して見るに及ばない．私は先づ直觀によつて圖形の簡單な性質を自得し，その觀念を深めた上で相當複雜な圖形に進み，こゝに始めて論理的の研究に入るのを適當と思つて居る．

33. 實驗と實測

次に之を反對の立場から行つて實驗實測を主とし，之によつて空間の概念を深めて行かうとする事はどうであらう．實驗實測は勿論それ自體甚だ重要な事である．近時五感の鋭敏と云ふ事が非常に必要になつて來た事は當

然であり，音感教育などその一つの表れである．スイスの中學生などは角を一目見て何度とまで云ひあてる程練習がつんで居る由であるが，それ丈直觀教育が進んだらずゐぶん利益は多からう．此の意味に於て數學上の實驗實測が，現在よりもずつと重視せらるべきは論を待たない．併し私はこれが數學の本道に入つて來る事は少し疑問と思つて居る．幾何學の定理の證明を直觀——と云つてもそれは何等か言外の推理を含んだ知的直觀——に代へる事には贊成だが，之を實驗實測によつて置きかへようとする事には不贊成である．定理の發見過程に於て，實驗實測を用ひる事は贊成できるが，これも數學の本道ではない．數學の本道はどこまでも人智の能力を發揮するにあり，知性による推理を根本としたいものである．前節で直觀を主張したその「直觀」なるものは「自明」と云ふ知的判斷を含んだ素朴なる直觀を指したのであつて，實驗とか實測とかによつた判斷を指したのでない事を繰返し斷つておく．

實驗實測はかやうに，それ自體として數學の本筋を離れて獨立に重視せらるべきものである．之と共に幾何學的の作業即ち製圖とか工作とかも同樣に重視せらるべきものであらう．殊に立體圖形に對する工作は，立體幾何の學習に大きな効果のあるものである事は特記してよろしいと思ふ．かやうな事はなるべく低學年に於て之を行ひ，空間の概念を正確豐富にし，爾後の學習の助けとするが得策であらう．作圖もなるべく正しい圖を美しく畫いて推理の助けとすべきで，之により知らず知らずの中に圖形に對する正確な概念を作つて行くのである．餘りに正しい圖形のみを見る事は之に賴つて正しい論理を忘れさせると言ひ，特に不正確な圖形を畫いて考へることを主張した人もあつたが，之は餘りに論理性に偏した議論であらうと思ふ．

34. 證明の工夫

幾何がだんだん進んで來ると難問にぶつかる．之を解決するに種々の工夫を要する．補助線の引き方など始めの中はなかなか工夫のつかないものである．これが幾何を學ぶ者にとつて最も困難の所で，それが餘りに多くの勞力を要するが爲にそれ程の犧牲を拂ふ事について疑問を抱く者が出て來る．幾何學の難問それ自體は數學全體から見ても之を應用する方面から見ても決してさう重要なものではない．それ丈を考へれば之に拂つて居る勞力は實に無駄の限りである．之が反省を要求せらるゝも亦當然の事である．

併し私は，これに對して全然否定的な決定を與へる事は躊躇するものである．なる程幾何の小問題など苦心して解決して見たからとて何の足しにもならない．數學の先生の興味の犧牲となるだけである．併し之が爲に費される勞力が何等か他の方面に有効な結果を與へて居はせぬか，少くとも工夫研究と云ふ精神と習慣とを養ふ上に何等かの寄與をして居る事はないか．もしそれがありと

すれば平面幾何學の如く，圖を畫いてそれに目を曝しつゝ考へると云ふ絕好の條件にめぐまれた學科を，之に利用した事は決して無意義ではないと思ふのである．實際幾何は工夫研究をするに最も都合よい學科である．工夫研究の精神とか能力とかゞ，少しでも形式的に養成できるものとしたら，幾何學の難問に浪費すると考へた勞力も決して浪費でない事となる．この點まだまだ考慮の餘地があると考へる．

そればかりでなく，私はもつと之を支持すべき經驗を持つて居る．それは幾何の問題を解く事が零細な時間を利用するに便であると云ふ事である．少し慣れると可成り複雜な圖形でも之を宙に考へる事は餘り困難でない．さうすると步いて居る時，草をとつて居る時，電車の吊革にぶら下つて居るとき等，全く無駄に捨てられてしまふ時間を利用して幾何の問題を考へる事ができる．この場合机に向つたときと異り，氣が焦らないせいか思ひの外よい考へが浮ぶものである．之が常に物事を考へ工夫すると云ふ習慣を養ふ上に非常に役立つ事は勿論である．私は自身の經驗からこの學習法を切におすゝめしたいのである．

單に私の經驗だけから言ふとかくして得た初等幾何の能力はずゐぶん多方面に效果を表してくれるものである．私は二十歲前後に初等幾何の問題に力を入れて學習したのであるが，之が後年學位論文を書く際その主力をなしたと思つて居る．私の如き經驗は特殊であらうが，

併し程度の差こそあれ工夫研究に精進せんとする者にとつて，何等か寄與する所があるのではあるまいか．國民一般に工夫研究の精神を昂揚する必要に迫られて居る今日，幾何學の難問と雖も，無下に之を捨て去る氣にはなれないのではあるまいか．

幾何學の難問の必要か否かは識者の判斷に委せるとして，現今未だ多少この種の問題が行はれて居る以上，之を如何に學ぶべきかと云ふ事も考へなければならない．蓋しそれは上に述べた私の主張によつて明かであらうし又第二章で問題の取扱ひ方について一般的に述べた所からも了解できよう．只繰返し云つておき度い事は，幾何の問題其物は何等の學習價値があるのではないから，自らの努力に於て工夫研究し，この努力の中に自己の能力の向上を求めようとするのでなければ，之を取扱ふ事には何の意味もないと云ふ事である．解答書を讀むとか，友人に教はるとか，教師に逐題講義をしてもらふと云ふやうな事は，幾何の問題に於て殊に全く無意義である．そんな事なら幾何の難問はやらぬ方がよい．入試にだつて極めて稀にしか出ないし，それも次第に數が少くなつて行くのであるから，全然やらないでも餘り不安でもなからう．

之を學ぶとしたら次のやうな注意が肝要である．

1. **どこまでも考へ拔く事**．時間を惜しまぬ事．その爲には机に向はない零細の時を利用するが便である．

2. **なるべく筋道を立てゝ考へる事**．下手の考へ休む

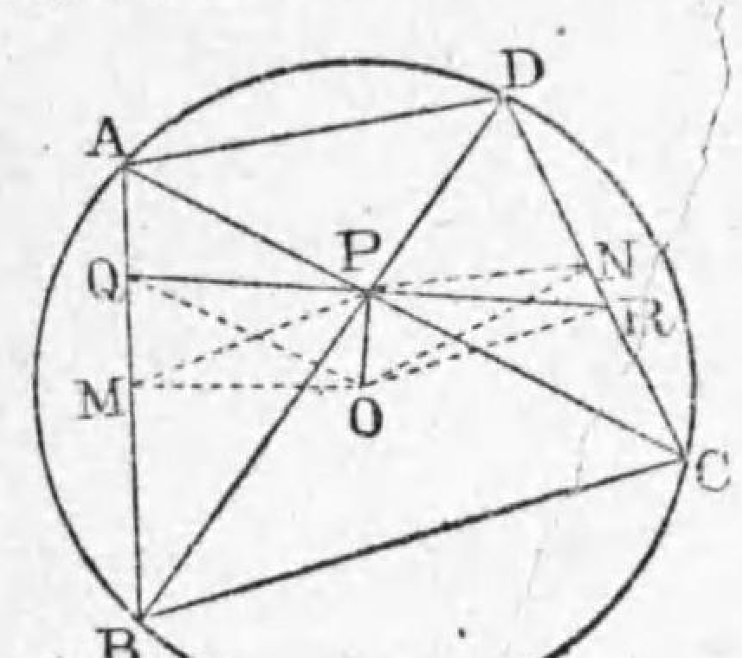
に同じとならない事.

3. **筋道が立たない場合には多方面から順次に考へて行く事.** 補助線等もでき得るすべての場合を考へて當りさうな所から次々と引いて試みる.

4. **教科書にある定理をいつも頭にうかべ之を利用する事.** 但し類題を記憶して之を模倣する事は私はすゝめない.

5. **安全な道があれば, 一先づ之を利用する**のはよい. 殊に試験場ではさうである. 併しそれ以外に自己の工夫による他の巧妙な解を求めるのは更によい.

問題 1. 圓 O に内接する四邊形 ABCD の AC, BD の交點を P とする. OP に垂直な直線が AB, CD と Q, R で交はるとき $PQ=PR$ なることを證明せよ.



第 11 圖

解 P が QR の中點である事を證明するのであるが, $OP \perp QR$ を利用しようとして考へると $OQ=OR$ を證明すればよいと云ふ事がわかる. これでOを利用する事ができるやうになるから工夫をする範圍が廣くなる. 次に $OQ=OR$ なる事の證明であるが, これは見た所三角形の邊となつて居ない ($\triangle OPQ$ 等は利用できない). 中心から等距離と云ふ事で $AQ \cdot QB=DR \cdot RC$ を證明してもよいが Q, R の位置について手懸りがないから之も困難

であらう. さうすると $\angle OQP=\angle ORP$ の方がよくはなからうか.

さてかやうな方針が立つと $\angle OQP$ についての何かの材料を求める事になる. $\angle OPQ$ が直角であるから之を利用する爲にもう一つ直角を作る. 即ちOから AB に垂線 OM を下すと M は AB の中點となる. これで二つの手懸りが一度についた故, 解決の希望が見えた事になる. OPQM は圓に内接する四角形であるから $\angle OQP=\angle OMP$. 同樣に $\angle ORP=\angle ONP$ (但し N は CD の中點). 故に $\angle OMP=\angle ONP$, 即ち $\angle PMA=\angle PND$ を示せばよい. かうなると材料がよく揃つて居るからあとは考へ易い. $\triangle PAM$ と $\triangle PDN$ とを比較して相似である事を云へばよいので, それには $\triangle PAB$ と $\triangle PDC$ の相似を利用すればよいのである. 或は一足飛に PM, PN は相似三角形の中線だから底邊となす角は等しいと考へてもよい.

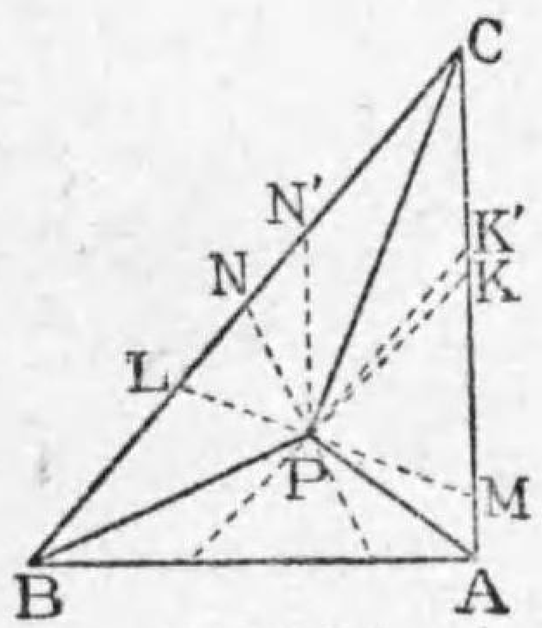
かやうに解決したならば次は答案であるが, 之は順序立てゝ記述する能力さへあれば別に工夫は必要でない. 上の記述と大體逆に次のやうにすればよい.

O から AB, CD に垂線 OM, ON を下す. $\triangle APM$, $\triangle DPN$ に於て $\angle A=\angle D$, $AP:DP=AB:DC=AM:DN$ であるから相似である. 故に $\angle AMP=\angle DNP$, $\angle PMO=\angle PNO$. 又 O, P, Q, M は同一圓周上にあるから $\angle PMO=\angle OQP$. 同樣に $\angle PNO=\angle ORP$. 故に $\angle OQP=\angle ORP$. 即ち $PQ=PR$.

本問など可成り難問の方であるが，時間をかけてどこまでも考へ抜けば，自力で解決することは決して困難でない．一度かうした問題を自力で解決すると，その爲に得る自信と經驗とは非常に大きなものである．

問題 2. AB<AC<BC なる三角形 ABC 內の任意の一點をPとするとき AP+BP+CP<BC+AC を證明せよ．

解 これもどこかに出た問題である．AP, BP, CP を AC, BC と比較するのであるから，前の三線分を AC, BC 上に移す事が適當であらう．如何なる方法で移すか．圓を畫いて移すのが最も完全且安全であるが，後に圓弧を處理せねばならないから一寸厄介である．之を試みてもよいが，先づ直線で試みて見よう．Pを過り BC, AC と L, M で等角に交る直線を作れば CP<CL なる事は明かである．之で CL を CP に代用できる．同樣に PN, PK を引いて BP, AP の代りに BN, AK をとる．これでは各線分は少しづゝ大きくなるから必ずしも之で證明できるとは保證できないが，先づ之で試みるのである．さうすると結局LN<KC を證明すればよい事になる．



第 12 圖

そこで KC を LN に持つて來る工夫をする．角の大さが皆比較できるからさう困難ではあるまい．PNCK は平行四邊形の樣な形をして居るが，KP はPの方に向ふ程 BC に近くなつて居るし NP もPの方に向つて AC に近くなつて居るから多分 PN の方が CK よりも小さいであらう．PN と LN との大小は角を比較してできるであらう．前者卽ち PN<KC を具體化するにはP及びKから BC に垂線を引きPからの垂線の方が小さい事，及び ∠PNB が ∠C より大きい事を云へばよいであらう

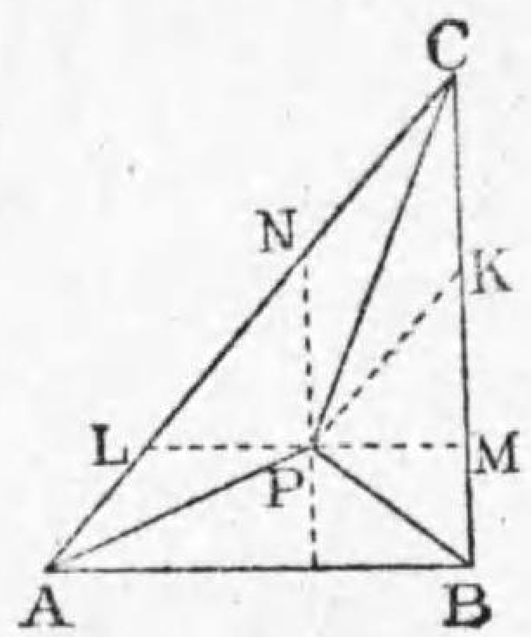
かやうに次から次へと突込んで行くと，結局解決の曙光が見えて來る．併しここまで突込むと，さて振返つたとき自分の通つて來た道が餘りに長く，之を思ひ返す事さへ困難を感ずる．かやうに深く突込んだ思索をするには非常に大きな努力を要するので，この努力こそ科學の世に處する我々の最も力強い武器である．我々はかやうにつき進んだ思索も頭の中で整理しまとめ上げる迄その經路を失はないやう努力を盡すべきである．併し一方から云ふと餘りに大きな努力の結果は，解答が餘りに複雜となり面白くない．考へるときはどんな複雜な考へをしてもよいが，一度解決の曙光を見出したら，その考へを整理しつゝ且簡易化できるものはなるべく簡易化するがよい．

上の例で PN<KC を證明するに，此形が平行四邊形に似て居る事を利用しPから KC, CN に平行線を引き平行四邊形を作つて見ると面白い．この平行四邊形を PN'CK' とすると結局

$$LN<LN'=N'P=CK'<CK$$

と簡單に證明できる．

尙進んで二等邊三角形 CLM を作る代りに LM を AB に平行に引いても出來はせぬか.



第 13 圖

$CL>CM$ であるから $CL>CP$ である. PN,PK も BC,AC に平行に引くと $AP<AN$, $BP<BK$ で $LN<CK$ を證明すべき事となるが, 之は反對である. 卽ちこの方法ではいけなかつた. 併し一寸工夫すると

$$AP<AN,\ BP<BK,\ CP<PN+NC$$

を加へても證明できるし, 又 LM を引いた丈で

$$AP<AL+LP,\ BP<BM+MP,\ CP<CL,$$

$$\begin{aligned}AP+BP+CP&<AL+LP+BM+MP+CL\\&=AC+LM+MB\\&<AC+CM+MB\\&=AC+BC\end{aligned}$$

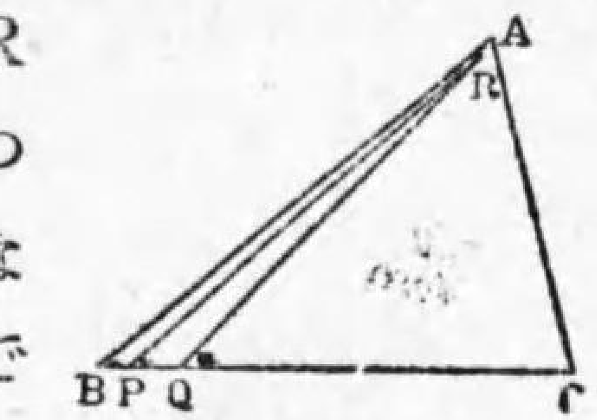
としても證明できる. こんな簡單な證明法があるのに前記のやうな面倒な事を考へても何にもならぬではないかと思ふかも知れぬが, 決してさうではない. 面倒な證明だとて證明たる以上, 答案としても充分の價値があるし, 又かうした面倒な證明を考へ出した努力を思へば更にその價値は量り知れないものがある.

問題 3. 三角形 ABC に於て $AB>AC$ である. さうすると BC 上に二點 P, Q をとり三角形内に一點 R をとつて

$$PR+QR>AB+AC$$

ならしめ得る事を證明せよ.

解 これは前題とよく似たやうに見えるが問題の本質が大分ちがふ. こゝでは P, Q, R をこれから適當にきめるのであつて $PR+QR$ がなるべく大きくなるやうな點を見付ければよいのである. それは圖を畫いてよく眺めて見ればすぐ氣づく所で, PR も QR も之をなるべく長くしようとすれば AB 又は BC ($BC>AC$ のとき) の近くにとるがよいのである. BC の方は大きさの順序が與へられて居ないからこゝでは AB の近くをとり, 圖のやうになるべく AB に近づけて二線分をとればよい. この二線分は AB に如何程でも近くとれるから AC より大きくとる事ができ, その和が $AB+AC$ よりも大きくなるやうにとれるのである.



第 14 圖

かやうな工夫は幾何學的思想さへ豐かならば, 自然にわいて來るもので, 本題の如きは決して「難問」ではない. かやうな問題が出來ないものがあつたとすれば, それは幾何學的知識の本質的の不足を表して居るのである. 補助線を引いたり, 定理を引用したりする工夫はつかなくとも, 本題のやうに常識的な問題は必ずできなくてはいけない. 之が出來ない者が多い (實際本題が提出された時はあまり成績がよくなかつたと聞く) と云ふ事は, 幾何の問題の取扱が形式に流れ, 難問に捉はれ, 肝腎の「空間の概念を豐かにする」と云ふ目的を沒却して居る

事を示すものである．

かやうに工夫はついたが，さて答案となると何と書いたものであらうか．

PQ をBの充分近くにとり R を A の充分近くにとる．さうすると PR+QR は 2AB に充分近くなる．2AB>AB+AC であるから PR+QR を 2AB に充分近くとれば AB+AC より大きくなる．

この程度の答案で中學生としては充分であると私は思ふ．併し完全を期するならばもう少し工夫をして例へば

$$BP<\frac{AB-AC}{5},\quad PQ<\frac{AB-AC}{5},\quad AR<\frac{AB-AC}{5}$$

なるやうに P, Q, R をとる．さうすると

$$BP+PR+RA>AB \text{ から } PR>AB-\frac{2}{5}(AB-AC),$$

$$BQ+QR+RA>AB \text{ から } QR>AB-\frac{3}{5}(AB-AC).$$

故に　　$PR+QR>AB+AC.$

こんな工夫は上の方針さへ定まつてしまへばあとは自由裁量で容易にできるものである．

35. 幾何學と論理

幾何學の初歩に於ては論理性は必要以上に重視せられて居る事は第 32 節で述べたが，幾何學の先の方に行くとその割合にこの論理性が閑却されて來る．幾何學に於て論理の練習をする事は決してさしつかへないと思ふが，その可否の議論は別として，幾何學が今日の如く形式的

證明を主とした體系を作つて居る以上，その論理性をいい加減にしておくことは自己矛盾である．代數の章でも述べた如く，論理の中で最も誤り易い點は本定理と逆定理の混同である．本定理と逆定理など常識で考へたら決して混同し得ない筈であるが，之が數學で屢々混同されて居るのは，論理が餘りに形式的に取扱はれ過ぎて居る爲であらう．併し世の中の一般の事項についても，それが餘りに複雜になると論理が兎角形式的に扱はれ易く，議論の誤りを起し易いのであらう．それ故かやうな論理の練習も必要な事で，幾何がその道具に使はれて居るのは決して不幸な事ではない．只論理を重んずる以上はいい加減の事をせず正しく之を學ばねば何にもならないのである．

本定理と逆定理の重要なものを對照すれば

	本定理(これは求むるものなり)	逆定理(他には求むるものなし)
方程式	驗　算	解　法
軌　跡	逆證明	本證明
作　圖	證　明	解　析

方程式については代數の章で述べた如く一元一次，二元一次，一元二次の三種の方程式に就いてだけは，解法が本定理を兼ねる事が證明されて居るが，他種の方程式については之は證明されて居ない．それ故方程式の驗算は軌跡の逆證及び作圖題の證明と同樣に必要なものである．然るに方程式に於ては驗算を閑却し，作圖題に於て

は却つて解析を閑却するが如きは，論理的關係から見れば全くでたらめである．かう云ふ事は思ひつきや習慣から來たものでなく，論理的必然性から來て居るものであるから，個人の意見やなにかで之を省略したり出來るものではない．

細かい事を云へば，軌跡で範圍をきめたり特別點を除いたりする事は，その點が條件に適しない事を示すのであるから「この圖形外の點は條件に適せず」又は「條件に適する點は此の圖形上にあり」卽ち本證明の方に屬するのである．之を逆證の方に入れる者が大部分であるが，形式は兎に角として逆證の一部でない事はよく頭に入れておかねばならない．作圖に於ても求むる點が或範圍外にあれば之は適しないと云ふ事は，「適しない」と云ふ事を云ふのであるから，逆證卽ち解析の方に屬する．之をよく頭においておかないと，この範圍の點に關する事が中途半端になつてしまふ．

兎に角幾何學に於ては，その論理性が不自然なまでに重視され乍ら，意外にも論理の誤りが閑却されて居るのは非常に面白くない現狀である．現狀は現狀として，幾何學によつて論理を學ぶ事は，有效な事であるから，正しく之を學び論理の誤りはどんな小さな事でも見逃さない熱心さがあつてほしいものである．

問題 1. 弓形 AB の弧上に點 P をとり AP の延長上に PQ=BP にとるとき Q 點の軌跡如何．

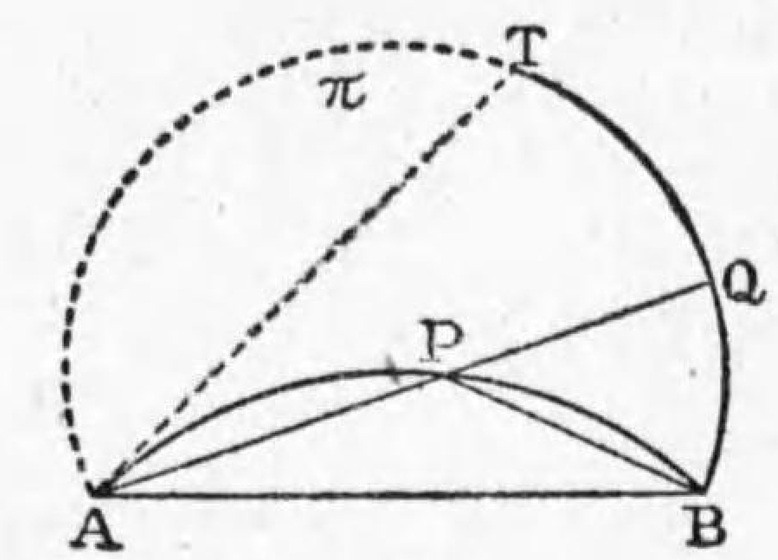
解 $\angle APB=\angle PQB+\angle PBQ$

$=2\angle PQB$

であるから

$$\angle PQB=\frac{1}{2}\angle APB$$

で一定である．AB を弦とし弓形 APB と同じ側にこの定角 $\frac{\alpha}{2}$ を含む弓形の弧 π を作れば Q はこの弧 π 上にある．又 A に於て弧 APB の切線 AT を作れば之は π と交るからその點を T とすると，Q は角 BAT 內にあるから弧 BT 上にある．



(第 15 圖)

逆にこの弧 BT 上の一點を Q とすれば Q は角 BAT 內にあるから AQ は與へられた弓形の弧 AB と交はる．この點を P とすれば $\angle AQB=\frac{1}{2}\angle APB$ であるから PQ=PB である．卽ち Q は條件に適する點である．

故に軌跡は弧 BT である．

この場合 Q が弧 AT 上にない事は本證の方に入るべきである．逆證に入つてから，Q を弧 BT 上にとつて證明したのでは「條件に適する點は弧 π 上にあり」「弧 BT 上の點は條件に適す」では證明にならない．更に逆證を終つてから「但し Q は B と T との間にある」など云ふのは沙汰の限りである．弧 π 上のすべての點が條件に適する事を證明し乍ら，その中の AT 上の點が條件に適しなくなつたのでは前の證明はどうしたのであらう．又 Q が BT 上にある證明にしても「P は A から B まで動く．P が A に近づくとき Q は T に近づき P が B に近づくと

きQはBに近づく．故にQはTB上にある.」と云ふのがあるが，之は全く豫想であつて證明ではない．PがAからBまで後返りせず動いたとしても之に伴つてQが後返りせず動くと云ふ事は別に證明しなければわからぬ事である．こんな事を證明するのは今の幾何では餘り適當でない．やはり上記のやうに「角內にあり」と云ふやうな的確な證明をつけてほしいのである．

B及びTについてはAPの延長とか BP=PQ とか云ふことを嚴格に解釋すれば除くべきである．之をハツキリさせるには本證明に於て角內と云ふ事をハツキリ云ふ事と逆證明でQを BT 上（端を含まず）にとると斷るがよい．

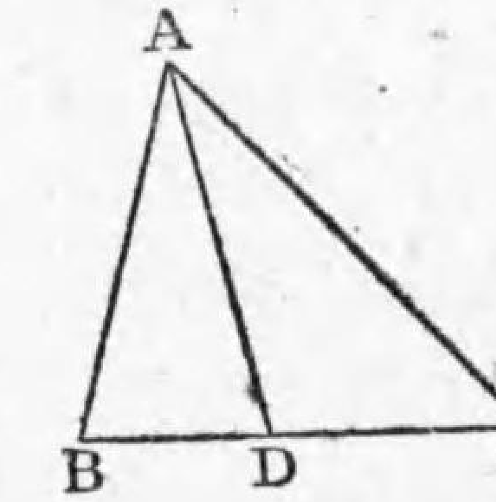
かやうに細かい所まで注意して完全無缺の答案を作る事は中學生には勿論無理である．私は之をすゝめようと思ふのではない．併しかやうな細かい部分についても論理的の誤りをする事は許されない事である．正しい論理は如何なる順序によるかをよく心得た上ならば省略すべきは省略し，閑却し得る所は閑却して一向さしつかへない．

問題 2. 底邊BCと底角Bとが與へられたりとし，頂角Aの二等分線がBCと交る點をDとするとき，△ABDが二等邊三角形となる如き三角形ABCを一つ作れ．

解 これは作圖題である．併し三角形ABCを一つ作れと云ふので，條件に適する三角形を殘らず作る事を要

求されて居ない．それ故「作圖法」を示し，且之が條件に適する事を「證明」すれば解析はいらないのである．勿論問題のヒントを摑む爲に解析をやる事は一向さしつかへないが，之は答案に必要缺くべからざるものではないのである．

さて△ABDが二等邊三角形と云ふけれども $AB=AD$ か $AB=BD$ か $AD=DB$ かわからない．第二の場合が不可である事は $\angle ADB>\angle DAC=\angle BAD$ である事から容易にわかるが，それでも第一，第三の二つの場合が起る．



（第 16 圖）

$AB=AD$ とする．この場合

$$\angle BAD=180^\circ-2\angle B,$$

$$\angle DCA=\angle ADB-\angle DAC$$

$$=\angle B-(180^\circ-2\angle B)$$

$$=3\angle B-180^\circ.$$

もしこれで三角形ができれば他の場合例へば $AD=BD$ は考へる必要はない．それはかやうな三角形を只一つ作ればよいのであるから，$AB=AD$ で求むる三角形が一つできればそれでよいのである．然るに上の場合 $3\angle B-180^\circ>0$ でないと $\angle BAC$ を $\angle BAD$ の二倍にとつたとき，このACがBDの延長と交らず三角形が作れないのである．即ちこの方法で三角形を作れるのは

$$\angle B>60^\circ$$

なる場合だけである．それ故 $\angle B\leqq60^\circ$ のときは上の解

法では三角形が作れない．この場合は又他の方法でかやうな三角形が作れないかを考へて見なければならない．そこで AD＝DB のときを考へて見る．このときも作圖は簡單だが，之が作れる條件は

$$\angle C=\angle ADB-\angle DAC$$
$$=(180^\circ-2\angle B)-\angle B$$
$$=180^\circ-3\angle B$$

が正なる事，即ち $\angle B<60^\circ$ なる事である．かくして

$\angle B>60^\circ$ ならば AB＝AD として

$\angle B<60^\circ$ ならば BD＝AD として

條件に適する三角形が作れるのである．この他には條件に適する三角形を作る方法はないから $\angle B=60^\circ$ のときは求むる三角形は存在しない．

この場合のやうに，たとへ解析が不要の場合でも，解が存在しない場合があれば，結局あらゆる方法を試みる必要があり，解析をすると同様の結果となる．又解答に於ては $\angle B$ のあらゆる値に對し解答を與へる必要があり，之は問題に「一つ作れ」と云つてある事とは別問題である．但し第一の作圖が $\angle B$ のあらゆる値に對して成功すれば，第二の作圖は試みないでよい事は勿論で，この場合には「一つ作れ」なる文句が生きて來るのである．

問題 3. 三角形の周が與へられたとき，此の三角形から内接圓を切取つた殘りの面積が最大となるやうにすると，内接圓の面積は三角形の面積の半分に等しい事を證明せよ．

解　三角形の周を $2s$，内接圓の半徑を r とすると三角形の面積は sr，内接圓の面積は πr^2 であるから

$$sr-\pi r^2$$

が r の變化に伴つて最大となればよい．二次式の極大極小の定理から

$$r=\frac{s}{2\pi},$$

$$\pi r^2=\frac{sr}{2}.$$

かう云つてしまへば極めて簡單であるが，そこに論理の缺陷はないか．思ひがけない缺陷がある事は同様の論法を次の問題に適用して見るとわかる．

「半徑 10 cm 及び 1cm なる二圓の中心間の距離が 12 cm である．中心を結ぶ線分上の點から二圓に引いた切線の平方の和の最小なる點を求めよ．」

二圓の中心を上の順に O, O′ とし，求むる點を P, OP＝x(cm) とする．O′P＝$12-x$，O への切線の平方は

$$OP^2-半徑^2=x^2-10^2.$$

故に

$$x^2-10^2+(12-x)^2-1^2=2x^2-24x+43.$$

之を最小にすれば

$$x=\frac{24}{4}=6$$

である．OP＝6 cm．さうすると P は O 圓内にあるのである．それでは切線が引けないから條件に適しない事は

明かである．

$$10 \leqq x \leqq 11$$

であるが，上の二次式はこの範圍では x の增加と共に增加するから最小値は $x=10$ の所，即ち O 圓周上にあるのであるが，上のやうに二次式の極大極小を式の上でだけ取扱つて居たのでは此の結果は出て來ない．幾何の問題を餘りに代數的にのみ考へ過ぎた誤りである．

この例を見れば明かなやうに，上解は結局論理的には正しくない．もう一つ，$r=\frac{s}{2\pi}$ なるやうな三角形を作る事ができると云ふことを證明しなければならないのである．早い話が $\pi r^2<sr$ なる事は明かであるから $r=2s$ など云ふ事が要求されゝば勿論かやうな三角形は作れるものではない．

そこで上のやうな三角形を作らうとするのであるが，$r=\frac{s}{2\pi}$ だけでは三角形は決定しない（條件が一つでは足りない）から無數の條件に適する三角形が存在するであらう．併し上の結果を補正する目的であれば，かやうな三角形を一つ作る丈で事足りるのである．その爲にはなるべく都合のよい特別の場合を考へるがよい．二等邊三角形とか直角三角形とかにして求めればよいのである．r があるから直角三角形がよいであらう．直角三角形の二邊を x, y とすると

$$2r=x+y-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{s}{\pi}=\frac{1}{2\pi}(\sqrt{x^2+y^2}+x+y),$$

$$(2\pi+1)\sqrt{x^2+y^2}=(2\pi-1)(x+y),$$

$$4\pi(x^2+y^2)=(2\pi-1)^2xy,$$

$$\frac{y}{x}=\frac{(2\pi-1)^2\pm\sqrt{(2\pi-1)^4-64\pi^2}}{8\pi}$$

と出る．この $\frac{y}{x}$ が正數であればその比に二邊をとれば條件に適する三角形が作れるのである．實際之を計算して見れば，この値は $\frac{4}{3}$ 及び $\frac{3}{4}$ に近くなり，三角形が作れる事，從つて本問の正しい事が證明される．代數を幾何に適用するとき，かうした幾何學的の事情を常に考慮に入れて議論を進める事を忘れてはならないのである．

36. 軌跡と作圖

軌跡と作圖はそれ自體の理論にも價値があるが，それ以外にこの二つの章は幾何學の中で最も系統的の取扱に適して居ると云ふ點で興味がある．幾何學に於ける系統的考へ方と云ふものが果して價値ありや否や，之にも疑問があらう．考へると云ふこと自體は思考力及び思索の習慣の養成と云ふ點に於て價値があらうが，「考へ方」と云ふものは考へる事の結果に價値が無い以上，價値ありと考へられない．つまり「考へ方」が巧になると云ふ事は考へる事の結果がうまく出ると云ふ事で，考へる事が結果を要求せず，考へる努力自體のみを主として要求する場合には，結果がうまく出ると云ふ事は別に好ましい

事でない．例へば將棋をする目的が單に之によつて樂しむと云ふ事であれば將棋が上手になると云ふ事は必ずしも必要な事ではない．併しもし上手な程將棋が面白いならば，上手になる事に價値がある．それと同樣に幾何の「考へ方」もそれを學ぶ程考へる努力を更に大きくする事が出來るならば價値があると云ふ事になる．どうであらうか？ 私はやはり或程度まで「考へ方」と云ふものを知つた方が思考範圍が廣くなり，思考の程度が深くなり，錬成に便利ではないかと思つて居る．只決して忘れてならない事は「考へ方」を知つたが爲に從來自力で考へて居た事を此の「考へ方」によつて解決してしまひ却つて思索の努力を少くしてはならぬと云ふ事である．幾何の問題一つ一つが大した價値がないやうに，幾何の系統的な考へ方と云ふものも決してそんなに價値あるものでなく，只思考の努力を更に深くすると云ふ意味で價値があるのであるから，この目的とその手段とを主客轉倒させない事である．將棋は下手でもお互に奇手を考へ合つて闘へば興味はあらう．それを「定跡」を習つた爲奇手が奇手でなくなり，興味が無くなつてしまつたのでは甚だつまらない話である．定跡を習ふのは，それを活用して更に進んだ興味ある戰闘法を考へる爲で，さうすれば將棋の興味は更に深く大きくなるであらう．それを定跡を習つた丈で活用する事を考へなければ，定跡を習つた效は更になく惡果が殘るのみである．

之を要するに軌跡及び作圖に於ける系統的の考へ方を學ぶと云ふ事は，決して避くべき事ではないが，その目的は與へられた問題をなるべく「容易」に解かうと云ふのではなくて，更にむづかしい問題を考へ得るやうになり，更に多くの道具を使ふ爲に更に多方面に頭を向けなければならなくなり，學習の效を一層强くしようと云ふのであるから，この目的に副ふやうその「活用」を主として學ばなければならないのである．「容易に」と云ふことは數學の學習とは常に相容れない思想である．

さて，軌跡及び作圖の系統的研究の主題をなすものは圖形の「**變換**」である．即ち與へられた圖形又は求むる圖形と或關係を保つ圖形(例へば相似とか平行移動とか)を考へる事により考へ方を容易ならしめるのである，この「變換」なる思想は幾何學全般に亙つて重要な思想であるから，之を充分理解しておいた方がよい（軌跡，作圖の解法と關係なく）．數の變換は即ち函數であるから，幾何學的變換は代數に於ける函數觀念にも比すべきものである．さうとすればこの變換の思想を理解する爲に多少でも助けになるとすれば，この方面からも軌跡及び作圖の系統的研究に意義が認められるわけである．

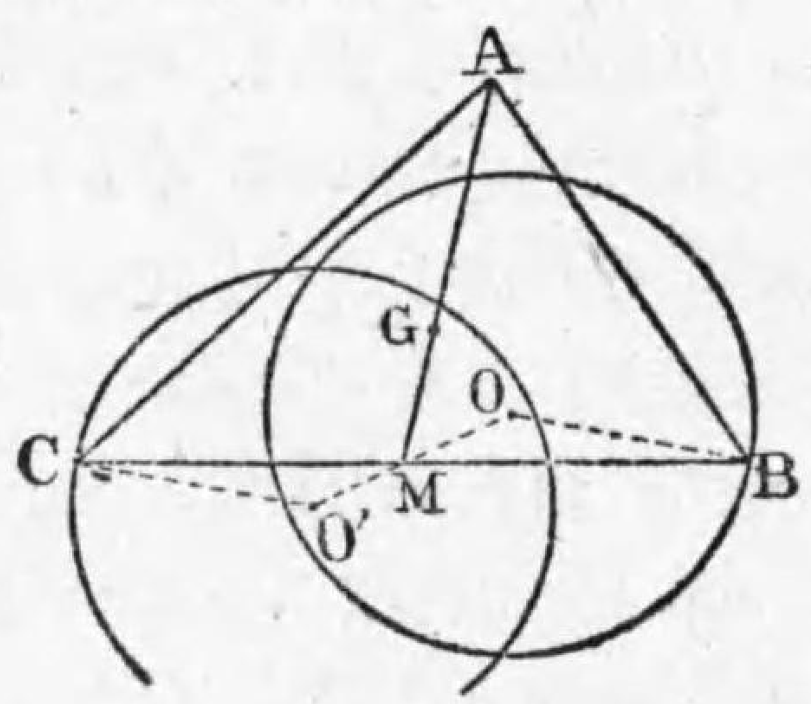
問題 1. 三角形 ABC の重心 G 及び頂點 A が定點にして頂點 B は定圓周上を運動するとき，頂點 C も亦他の定圓周上を運動する事を證明せよ．

解 これは軌跡問題であるが，逆證を省略させる爲にかうした文章にしたものであらう．一體入試には軌跡問題は少い．逆證の問題などがあり，採點が面倒な爲であ

らうが好ましい傾向ではない．

さてこの問題のやうに，Bが定圓周上を動くときCが何を畫くかと云ふ風の問題は最も明白に幾何學的變換を示して居る．Bの運動とCの運動とを對照してしらべて見るがよい．さうするとすぐにBCの中點Mが定點であり，CはMに關するBの對稱點である事に氣がつく．つまりBが或圖形を畫けばCはMに關し之と對稱な圖形を畫くべき筈で，この**對稱變換法**を中心として考へればこの種の問題は容易に解かるべきである．

Cの動く圓はMに關しBの畫く圓Oと對稱なのであるから，その中心O′はMに關するOの對稱點O′で，半徑はOの半徑 r と等しい．これで圓は決定できるからあとは $O'C=r$ なる事を證明す



(第 17 圖)

ればよいのであるが，これも O′C が OB の對稱圖形である事を考へれば容易である．つまり點對稱形の證明法に從ひ OCO′B が平行四邊形なる事を利用すればよいのである．解法の根本方針が點對稱ときまつてしまへば，あとの細い部分は單なる「作文」に等しい．證明は次のやうになる．

BCの中點をMとすれば，MはAGの延長上 $GM=\frac{1}{2}AG$ なるやうな定點である．Bのある圓の中心を

O，半徑を r とし，OM を二倍に延長した點を O′ とする．OO′, BC は共に M を中點とするから OCO′B は平行四邊形である．故に $O'C=OB=r$，即ちCはO′を中心とし，r を半徑とする圓周上にある．

細かい事を云へばBがOO′上にあるときは直線BC上でOO′, BCの中點が共にMであるから $OB=O'C$ であると云はねばならないし，OがMと一致したときはMBが一定だからMCも一定と云はなければならない．後者では第一「他の」圓なる文句がおかしくなる．併しこんな細かい事を云ふ程の事はあるまい．軌跡として考へるときは圓O′とABとの交點が除かれる．

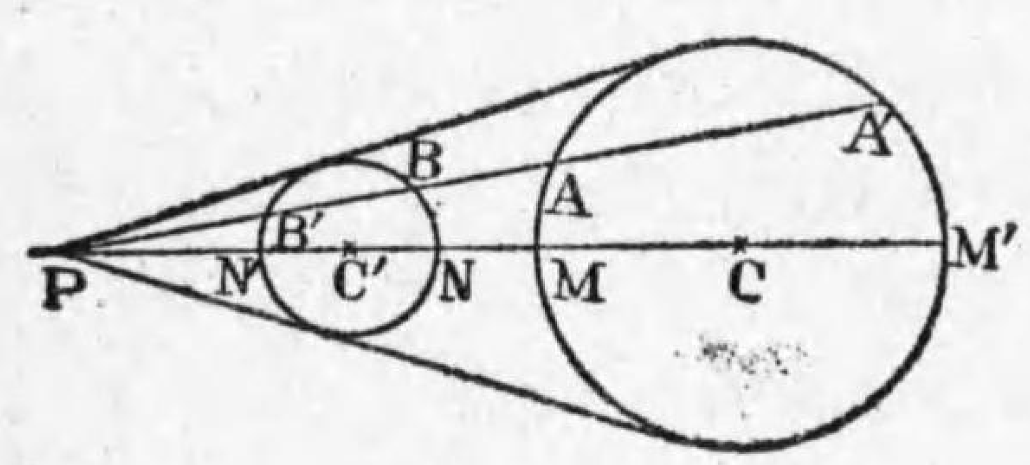
問題 2. $\angle XOY$ 內に點Pが與へられて居る．Pを過る直線を引き OX, OY と A, B で交らせ AP·PB が與へられた量 m^2 に等しくなるやうにせよ．

解 $AP\cdot PB=m^2$ がこの問題の主要條件である．これによつてAとBとの關係がつくからこの關係を幾何學的變換と考へる事ができる．それを利用して本題の作圖ができれば，更に進んで積に關する問題には，この變換を利用する事を先づ考へることが出來るやうになるわけである．

さて $AP\cdot PB=m^2$ なる幾何學的變換であるが，之は平行移動とか相似變換とかのやうに簡單なものでないから教科書には餘り書いてない．かやうな變換について詳しく知る事は少し行き過ぎのやうに思はれる．從つて本問の如きも變換の考へを用ひず直接何等かの工夫によつて

解を求めようとするもよい．その得失についてはこゝで早斷はし兼ねる．併し此の變換其物は數學上多少價値があるので，こゝでは此の變換を利用する方針で進んで見る．

定點Pを過る直線を引き曲線Cとの交點をAとし，此の直線上に PA·PB$=m^2$ なる如くBをとるときBの軌跡如何．これが用ひようとする變換である．この變換は平行移動や相似變換と異りやゝ複雑である．そこで先づCを圓とし，「積一定」なる條件を「圓の弦の二つの分の積が一定」なる定理と結びつけて考へて見る．



(第 18 圖)

圓Cと圓C′の共通切線の交點（共通切線がないときは中心を結ぶ線分を半徑の比に分つ點を用ひるがよい）をPとしPを過る直線とCとの交點を A, A′; C′との交點を反對の順に B, B′ とする．さうすると

PA·PA′=一定，　PA′:PB=一定

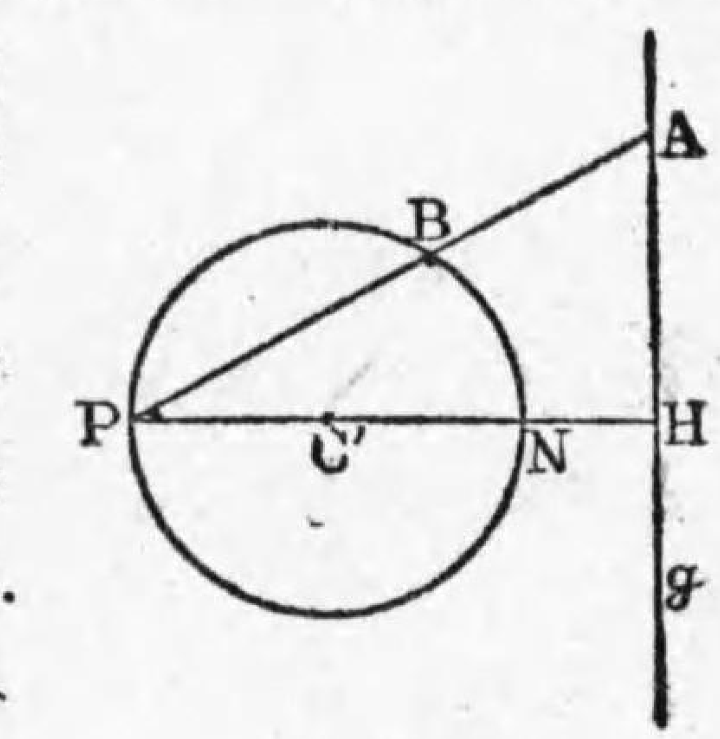
であるから自然

PA·PB=一定

となる．之が m^2 となるやうにC′の大きさを適當に調節しておけば求むる軌跡は圓C′となるのである．卽ち此の變換で圓に對しては圓を得る．

次に圓Cが直線になつたときは如何．その爲には圓C

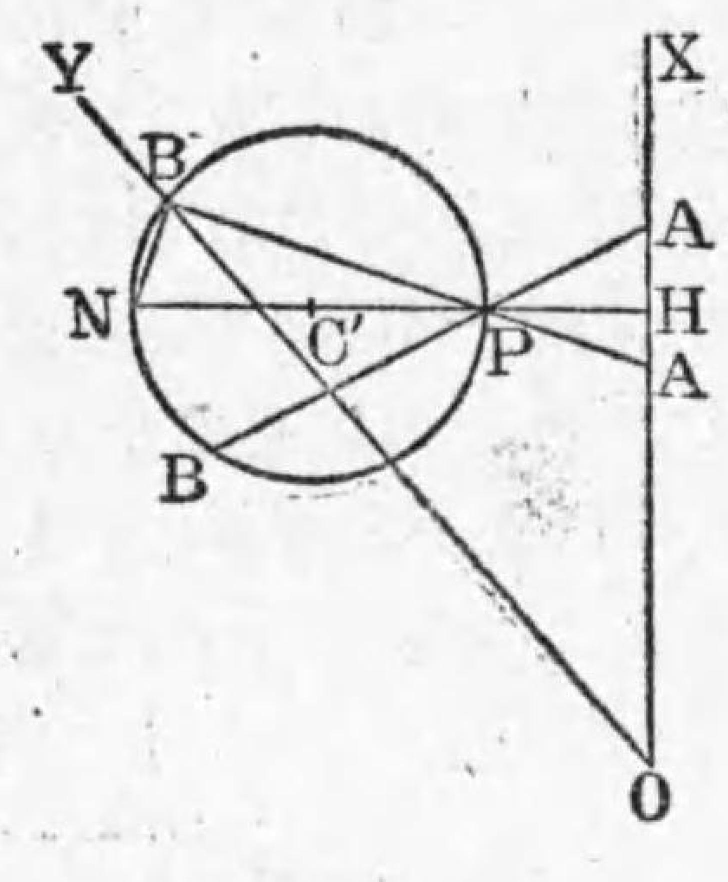
が段々大きくなつたと考へよう．CのPに最も近い點Mを固定し，最も遠い點M′を次第に遠方へやつたとする．C′のPに最も遠い點Nは固定し最も近い點N′はPに向つて近づいて來る．遂にはPに重なるであらう．此のときがCが直線となるときであらう．かやうに考へて行くと結局「定直線 g に定點Pから垂線PHを下し，この上に中心を有しPを過る圓をC′，Pを過る直線と g, C′との交點を A, B とすれば PA·PB は一定である」との定理に達する．この定理は問題として各方面に出て居るし，簡單に證明できるから讀者諸氏にとつては恐らく既知問題であらう．かくも廻り遠くこの既知問題に達した所以はこれらの定理の一貫した關聯を見度かつたからである．此の g を上のCと見れば考へた變換で直線が圓に變つた事がわかる．之により「この變換により一般の圓は圓に，Pを過る圓は直線に，直線はPを過る圓に變換される」と云ふ事がわかつた．この變換はPを中心とする**反轉**と呼ばれ，初等幾何學の知識としては珍らしく實用的應用の多いものである．



(第 19 圖)

さて本問題に還りOX上にAを，OY上にBをおかうとするのであるが，OXを上の g と考へると，A, BはPについて反對側にあるからC′はPについて第19圖と

は反對の側にとらなければならない. さうするとBはC'上にあるからC'とOYとの交點が求むる點Bとなる.



(第 20 圖)

之で解答の手懸りを得て次の如く答案ができる.

Pから OXに垂線PHを下し,之をPをこえて延長し,その上にNを $PH \cdot PN = m^2$ なるやうにとる. さうすると $PA \cdot PB = PH \cdot PN$ であるから A, H, B, N は同一圓周上にあり, 從つて ∠PBN は直角である.

上の如くとつたNとPを直徑の兩端とする圓を畫きOYとの交點をBとし, BPとOXとの交點をAとすればよい.

何となれば　∠PBN＝∠AHP＝∠R　であるから

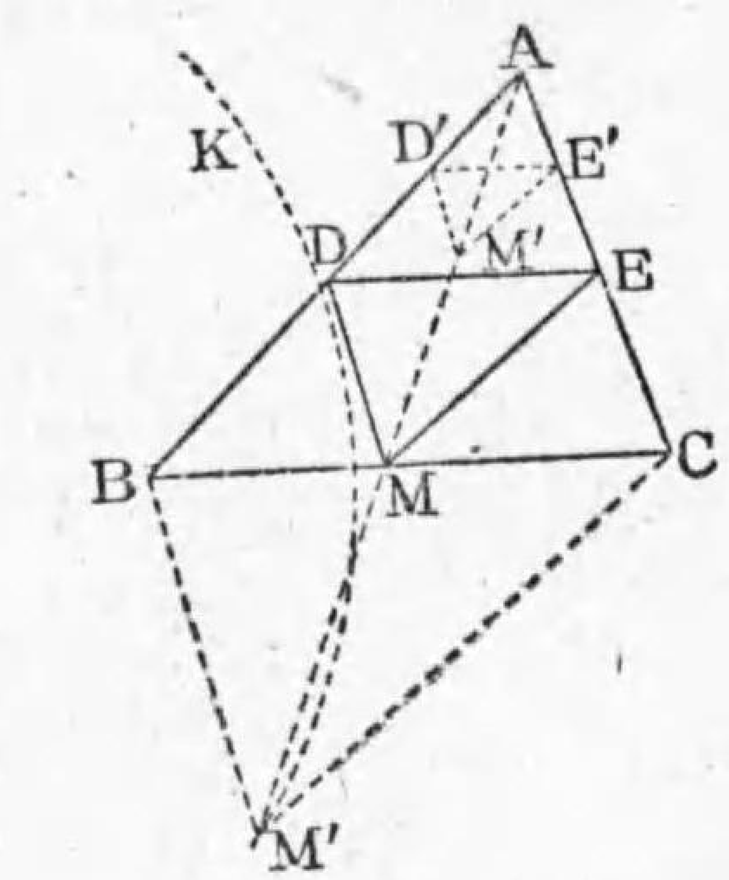
$AP \cdot PB = PH \cdot PN = m^2$ となるからである.

かやうな問題で吟味をすると興味があるが, こゝでは略しておく. 吟味は必ずしも答案に必要なものとは認められない. 變換などを考へたのは「考へ方」であるから之は答案には表さず, 上のやうにまとめて書くがよい.

問題 3. 三角形ABCの底邊BC上に一點Mが與へられて居る. BCに平行にDEを引き AB, AC と D, E で交らせ $DM : EM = m : n$ ならしめよ.

解 △DEMをAを中心として縮圖して△D'E'M'を

作つたとするとD'E'はやはりBCに平行でありM'はAMの上にある. それ故M'がMと一致する事を顧はずに, 兎に角どこかに△D'E'M'を作り; 之を適當に擴げて△DEMを作る事が考へられる. △D'E'M'を作るにはD'E'の方から先にきめてかゝれば簡單である. かやうに先づ相似形を作つておいて之を縮小又は擴大して所要の圖を



(第 21 圖)

作る法を**相似法**と云ふ. D'E'はどこに作つてもよいからBCを利用してもよいわけである. そこで次のやうな答案ができる.

B, CからDM, EMに平行にBM', CM'を引き, その交點をM'とすればM'はAM上にある. それ故

$$BM' : CM' = DM : EM = m : n$$

でなければならない.

そこでB, Cからの距離の比が $m : n$ なる點の軌跡なる圓Kを作り, 之とAMとの交點をM'とする. M'Bに平行にMDを引きABとの交點をDとし, DからBCに平行にDEを引きACとの交點をEとすればよい.

何となれば

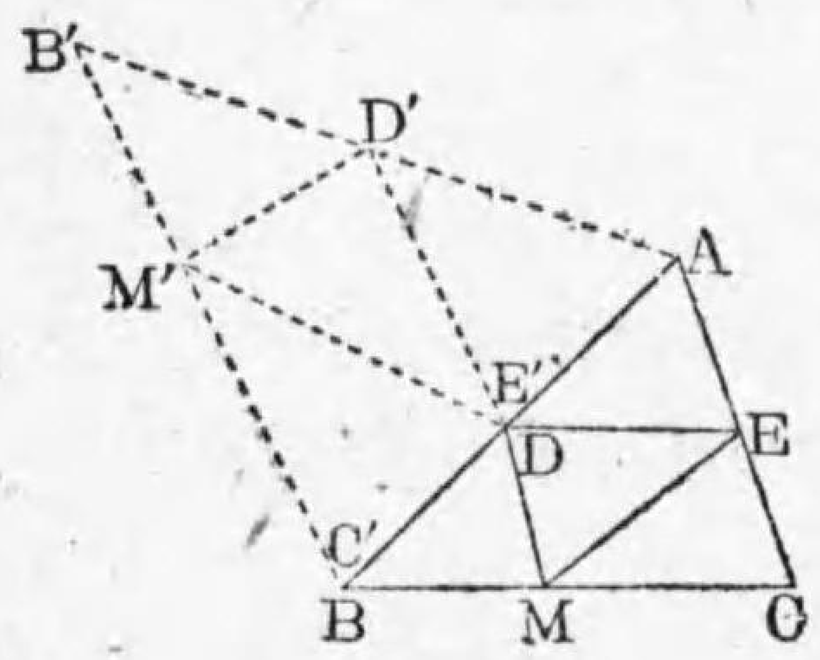
$$DM : BM' = AD : AB = DE : BC, \quad \angle EDM = \angle CBM'$$

であるから　△CBM'∽△EDM　となり

$$DM:EM=BM':CM':=m:n.$$

作圖の所でDが求められてからEを求めるにはMから M′C に平行線を引いてもよいが，さうすると證明法が異つて來る．かやうな事もあるから，作圖題を解くにもヒントを得ただけで滿足せず，完全な答案を書いてしまふまで徹底的にやるべきである．

別解　DE∥BC だけを考へて DE を動かして見る．Dの運動に伴つてEも運動する．Dを定速度で運動させるとEも定速度で運動するがその速度は異る．それ故Dの畫く點の列とEの之に伴つて畫く點の列とは相似形であると考へてよい．この相似形なる點の列が重なるやうにEの畫く點の列をAB上に移して考へる．即ちAB上に △ABB′ を △ACB に相似に作る．このとき新三角形に於ける新しい點を皆舊三角形の對應點にダッシュをつけた字で表すと第22圖の如くなり，C′ はBに，E′ はDに重なる．殊に後者に於てはDを動かし之に伴つてEが動いてもDとE′とはいつも同じ點として動き，決して離れないのである．之が本解法の眼目で，かやうな性質を利用して圖形の一部の置換へ又は相似移動をして作圖題の解を求める事は最も巧妙な解析法である．最後に殘しておいた條件 $MD:ME=m:n$ にかへり，



(第22圖)

之から

$$\frac{MD}{M'E'}=\frac{MD}{ME}\frac{ME}{M'E'}=\frac{m}{n}\frac{AC}{AB}$$

を得て次の如く解答を得る．

$$\angle ABM'=\angle ACM,\quad BM':CM=AB:AC$$

なるやうに M′ をとる．$EC:DB=AC:AB$ であるから $\triangle DBM' \backsim \triangle ECM$．故に

$$\frac{MD}{M'D}=\frac{MD}{ME}\frac{ME}{M'D}=\frac{m}{n}\frac{AC}{AB}$$

でなければならない．

そこで上のやうに M′ をとり，M, M′ からの距離の比が $mAC:nAB$ となるやうな點の軌跡なる圓を畫き，之と AB との交點をDとし DE を BC に平行に引けばよい．

かやうにすれば $BD:CE=AB:AC$ となるから

$$\triangle DBM' \backsim \triangle ECM,\quad \frac{DM}{EM}=\frac{DM}{DM'}\frac{DM'}{EM}=\frac{mAC}{nAB}\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$$

となり條件に適する．

妙な所に補助點などをとつて相似形や合同形を作り出し，之を利用して作圖する方法は，多くは此の種の變換法からヒントを得たものである．

37. 吟　　味

吟味と云ふ事が幾何でも代數でも行はれて居るが，その言葉の意味はハツキリしない．時として軌跡の除外點

を指摘する事まで吟味と云ふ人もあるが，軌跡は除外點を除外して始めて軌跡になるので，之を除外しない限り證明も何もできないわけであるから，かやうな事が證明の本筋から遊離して吟味なる一部分を作る理由はない．作圖題で特別の場合の作圖法を別に示さなければならない場合とても同じである．特別の場合とて別に軽重があるわけでないから，その作圖が一般の場合と異るなら，之も完全に解決しておかなければ作圖が終つたと云へないのである．從つて作圖や證明の他に吟味と云ふ一項があることは認め得ない．始めざつと解いておくのが解法で，細かい所まで注意して調べ上げるのが吟味だとすれば，吟味と云ふ言葉は數學的意義を有しない．解法は正しくなければならないので，細部まで注意すべき事をざつと解いたのでは，解法と云ふ語に適しないし，又ざつとと云ふ言葉にも數學的意義が與へにくい．

最も首肯し得る事は作圖題が解けてから，その作圖の能不能や解答の數や，得た圖形の性質やらを調べるのが吟味だと云ふ定義である．さうとすれば吟味は作圖題の中に必ずしも含まれないし，又その範圍も一定しない．それ故問題が吟味を要求するならば如何なる事を吟味せよと明示すべきである．實際入試問題などはこの形式をとつて居るものが多い所を見ると「吟味」なる語には此の解釋をして居る人が多いのであらうか．何れにしても論理性を重視される幾何學に於て，かやうな意味不明の語が術語の如く用ひられると云ふ事は奇怪至極のことゝ

云はざるを得ない．併し私とて的確に吟味と云ふ言葉の意味を定め得るわけではないから，やはりありのまゝで用ひておく外ない．

さて，吟味をすると云ふ事は，一面に於ては一つの問題をていねいに調べ上げる事になり，問題の本質に立入つて直觀的な觀念を得る助けにもなり，兎角粗雜に陥り易い問題解法の缺點を除去する爲に有效な事である．又一面に於て吟味は細心の注意を要する事が數學の中でも最も强く，かやうな能力の修練と云ふ意味で好適の材料でもある．更にもう一面から云へば吟味は一定の經路をとれば必ずできるものであり，その工夫もし易いから，研究的態度を敎へるにも甚だ便利である．この三點から私は吟味と云ふ事は能力を養ふ意味に於て，數學中でも特に好ましい敎材であらうと思つて居る．

吟味はかやうに，數學の問題解法中でも特に學ぶ甲斐のある材料であるが，併しそれ自身の數學的價値に於ては，前述べた如く至極あいまいであるし，何れに考へてもさう大したものでない．それ故吟味をする場合は此の點を誤解せず，之を手がける事によつて上記の三つの能力の修練をすると云ふ事を主眼，否全目的として進まるべきである．數學の問題解法の練習は，問題或は解法其物の數學的價値にあるのではなく，練習の努力が眞の目的である事は繰返し强調した所であるが，吟味に於てはこの言葉は更に一層强調しなければならないのである．

吟味と云ふ事の性質も之によく適して居る．吟味は努

力と細心の注意さへすれば必ずできるので，決して他力を恃む必要が起らない．反對に他から或問題の吟味を教へられても，他の問題になると全く之は役に立たない．自力で考へねばだめであるし，又自力で考へる事が可能である．かやうに便利な材料をその目的に副ふやうに用ひないで何の意義があらうか．

問題 1. 與へられた四點より等距離なる圓を作れ．

解 圓と點との距離とはその最短距離の事である．一般に二つの圖形の距離と云ふのはその最短距離の事である．

四つの點は圓の內と外に分れるであらう．その分れ方は三つと一つに分れるか，二つと二つに分れるかである．もつとも四つとも內，又は四つとも外と云ふ場合も一應は考へて見なければならない．二點が共に圓內又は共に圓外にあれば，その二點から中心までの距離は等しい．それ故中心はこの二點を結ぶ線分の垂直二等分線上にある．三點が共に圓內又は圓外にあれば，圓の中心はこの三點を頂點とする三角形の外心である．之によつて次の作圖を得る．

與へられた四點を A, B, C, D とする．この中三つ，例へば A, B, C をとり，$\triangle ABC$ の外心を O とする．O を中心とし $\dfrac{OA+OD}{2}$ を半徑とする圓を作れば之は求むる圓である．

何となれば，この圓と A, B, C との距離は

$\dfrac{OA+OD}{2}\sim OA=\dfrac{OA\sim OD}{2}$ であり，又 D との距離も

$\dfrac{OA+OD}{2}\sim OD=\dfrac{OA\sim OD}{2}$ となるからである．

又この四點を二つづゝの二組に，例へば A, B と C, D とに分け AB, CD の垂直二等分線の交點を O とし，O を中心，$\dfrac{OA+OC}{2}$ を半徑とする圓を作れば之も求むる圓である．

證明は上の場合と同樣である．

これで解法は大體完成した．細かく云へばまだ書くべき事はある．例へば

四點 A, B, C, D が同一圓周上にあるときは，この圓と同心なる圓は皆條件に適す．第二解法で AB, CD の垂直二等分線が一致するときは，その上の點を中心とし $\dfrac{OA+OC}{2}$ を半徑とする圓は皆求むる圓である（但しこの方は前の解法で交點と書かず，共通點と書いておけば之に含まれる．單に言葉の上の問題である.）．

等書かねばならないが，中學生としてはこんな面倒な事は先づ省略してもよからう．併し解法が上のやうに二つの場合に分れる事は吟味でも何でもなく，作圖法として是非書かねばならない事であるから決して省略できない．殊に解析に於て解法が二つに分れる理由を明かにし，他に解がない事を示す點が大切である．

次に吟味であるが，解の數をしらべると云ふ事になる

となかなか厄介である．併し先づ解の數が7つであると云ふ事を見つける丈でも吟味としての價値がある．それ以上は特殊の場合の吟味になるから，中學生としては省略してもよいであらう．

併し念の爲之を詳しくしらべて見よう．第一解法で困る場合は A,B,C が一直線上にあるとき（Oが求められない），A,B,C,D が同一圓周上にあるとき（二つのOが一致する）である．第二解法では AB,CD が平行のとき困る場合が起る．これらの場合を整理統合して，解の數を求めると次のやうになる．

	第一解法	第二解法	其他	計
四點同一圓周上にあらず 三點一直線上にあらず AB, CD 等が平行ならず	4	3		7
三點だけ一直線上にあり	3	3		6
不等脚梯形の頂點のとき	4	2		6
平行四邊形の頂點のとき	4	1		5
四點同一圓周上にあり：等脚梯形の頂點	1（其他に含まる）	∞	∞	2∞
四點同一圓周上にあり：矩形の頂點	1（其他に含まる）	2∞	∞	3∞
四點同一圓周上にあり：其　他	1（其他に含まる）	1（其他に含まる）	∞	∞
四點一直線上：AB=CD 等	0	∞		∞
四點一直線上：AB, CD 等が等しからず	0	0		0

∞と書いたのは無限に多くの連續した一組の解ができると云ふ事で，例へば同心圓の一群が解となる如くである．從つて 2∞ は二組の性質の異つた解の組がある事を，3∞ は三組の性質の異つた解の組がある事を示す．

こんな吟味は面倒であるが，やり方がきまつて居るから（例へば外心と云へば一直線上にあるときと思ひ，二直線の交點と云へば平行のとき，一致するとき，と考へて研究を進める），自信ある學生にとつては興味ある練習題である．

問題 2. 底邊 AB，頂角 C 及び AC^2-BC^2 を知つて三角形を作れ．

解 AC^2-BC^2 と云ふのが一寸厄介のやうに思はれるが，之は C から AB に垂線 CH を下すとき

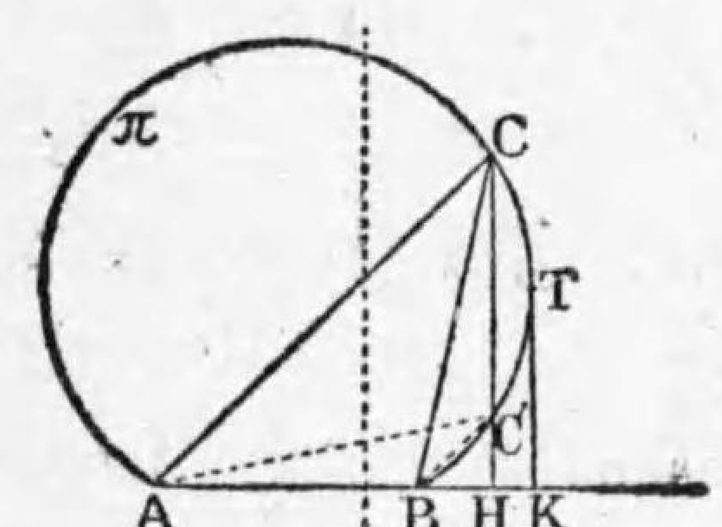
$$AC^2-BC^2=AH^2-BH^2=(AH-BH)(AH+BH)$$

となる事を思ひ出せば容易に用ひる事ができる．そこで直ちに作圖法を述べる．

$AB=a$，$\angle C=\alpha$，$AC^2-BC^2=m^2$ とする．AB 上に $AH^2-BH^2=m^2$ なる如く H をとる（それには $\dfrac{m^2}{a}$ が AH+BH 又は AH−BH に等しいやうに H をとればよい）．H に於て AB に垂線を立て，AB を弦とし，角 α を含む弓形の弧πとの交點を C とする．△ABC は求むる三角形である．證明は略す．

さて，本題は吟味をするに丁度手頃な問題である．前題は與へられた圖形の特別の位置について吟味すべき場合が起つたのであるが，本題は與へられた量の特別の場合についてゞなく，與へられた量の大きさの範圍によつ

て場合が分れるのである．之を考へるには，例へばπの方を固定しておいてCHを遠くの方から次第に近づけて來て交點の模樣を調べればよい．先づCHが餘り遠くては交點はない．だんだん近づけると先づπに切し，次は二點で交り，HがBをこえてABの間に入ると一點でしか交らない（HはAの方には來ない．AC^2-BC^2 でACが先になつて居るから）．併しこれは上圖のやうに α が鋭角のときであつて，之が鈍角になるとπは線分ABの上側にしか存在せず，HがABの間にあるときだけ一個の解がある事となる．



（第 23 圖）

さて，かやうに解の數の變化はわかつたが，之を表現するにはその結果を與量 a, α, m^2 で表さなければならない．「πとCHが交るときは」など云ふのは作圖の結果を用ひた表現法であつて，「解が二つあれば解は二つ」と云ふのと大差ない．問題の答は與へられた條件から結果を表す事を原則とするから，吟味に於ても之を原則とすべきであらう．但しこの場合線分と角の關係には三角函數が入つて來るが，之は止むを得ない所と思ふ．

Hが遠くにあれば AH^2-BH^2 は大きく，近づくに從ひ小さくなるから，上の吟味に出て來るHの位置は m の大きさによつて置換へらるべきである．Hの位置の變

化によつて解の異る境界は一つはBであり，一つはCHがABに切したときの位置Kである．このときの切點をTとする．前者に於ては $m^2=a^2$ であるが，後者に於ては

$$AK+BK=\text{圓の直徑}=\frac{a}{\sin\alpha},$$

$$AK^2-BK^2=(AK+BK)(AK-BK)=\frac{a^2}{\sin\alpha}$$

となつて居る．故に上の結果を書き表すと

（I）α が鋭角のとき

(i) $m^2>\dfrac{a^2}{\sin\alpha}$ 　解なし

(ii) $m^2=\dfrac{a^2}{\sin\alpha}$ 　解一つ

(iii) $a^2<m^2<\dfrac{a^2}{\sin\alpha}$ 　解二つ

(iv) $m^2\leqq a^2$ 　解一つ

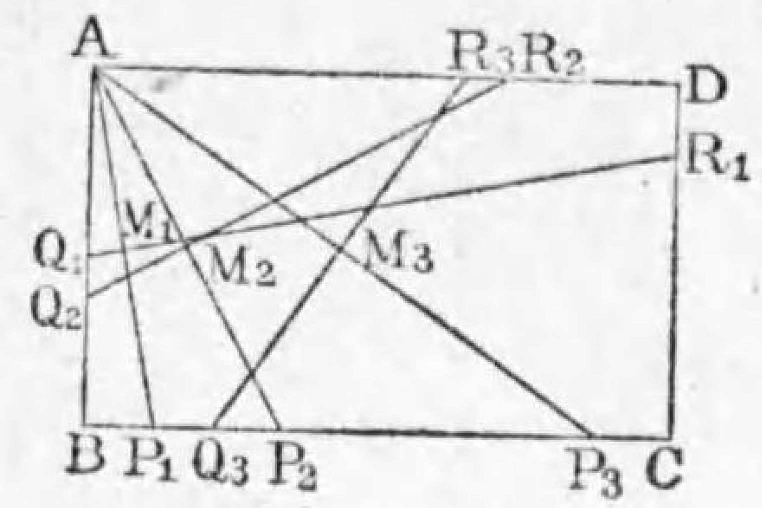
(II) α が直角又は鈍角のとき

(i) $m^2\geqq a^2$ 　解なし

(ii) $m^2<a^2$ 　解一つ

問題 3. 矩形ABCDに於て $AB=a$, $BC=b$, $a<b$ である．BC上にPを $BP=x$ なる如くとりAPの垂直二等分線を作るとき，その矩形内にある線分の長さ如何．

解 作圖題ではないが，吟味と同じ考へ方で解かれるからこゝに一緒に擧げた．先づ次頁の圖の P_1, P_2, P_3 のやうな三つの場合がある事に氣づかなければならない．垂直二等分線をQR，APの中點をMとし，何れもPと



(第 24 圖)

同じ番號をつける．Q_1R_1 に於ては Q_1 から CD に垂線を下すと之と Q_1R_1 とで $\triangle ABP_1$ と相似の三角形を作るから

$$AP_1 : AB = Q_1R_1 : BC,$$

$$\sqrt{a^2+x^2} : a = Q_1R_1 : b.$$

故に $$Q_1R_1 = \frac{b\sqrt{a^2+x^2}}{a}.$$

同様に $$AP_2 : AB = Q_2R_2 : AR_2,$$
$$AP_2 : BP_2 = AR_2 : AM_2.$$

故に $$AP_2^2 : AB\cdot BP_2 = Q_2R_2 : AM_2.$$

$$a^2+x^2 : ax = Q_2R_2 : \frac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2},$$

$$Q_2R_2 = \frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{2ax}.$$

又 $$AP_3 : BP_3 = Q_3R_3 : AB,$$
$$\sqrt{a^2+x^2} : x = Q_3R_3 : a,$$

$$Q_3R_3 = \frac{a\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

かくして何れの場合にも計算ができるが，これだけでは不充分である．x の如何なる値に對してどの答が用ひられるかを明かにしておかなければ，この答を用ひる由がない．P_1 と P_2 との界は上の式で與へられる Q_1R_1 と Q_2R_2 とが一致するときで

$$\frac{a^2+x^2}{2x} = b, \qquad x = b\pm\sqrt{b^2-a^2}.$$

但し $b>x$ であるから複號は一の方をとる，x がこれより大きければ P_2 となり，小さければ P_1 となる．又 P_2 と P_3 との界は Q_2R_2 を Q_3R_3 と等しいとおいて

$$\frac{a^2+x^2}{2a} = a, \qquad x = a.$$

然るに $b-\sqrt{b^2-a^2} = \dfrac{a^2}{b+\sqrt{b^2-a^2}} < a$ であるから，上の限界より此の限界の方が大きい．これを用ひて結果を書き表すと

$$x \leqq b-\sqrt{b^2-a^2} \quad \text{ならば} \quad \frac{b\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$b-\sqrt{b^2-a^2} < x < a \quad \text{ならば} \quad \frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{2ax}$$

$$a \leqq x \leqq b \quad \text{ならば} \quad \frac{a\sqrt{a^2+x^2}}{x}$$

となるのである．かやうな問題は困難ではあるが，努力と研究的態度で克服し得る種類のものであるから，投げずにやつて見る事を希望する．

38. 極大極小

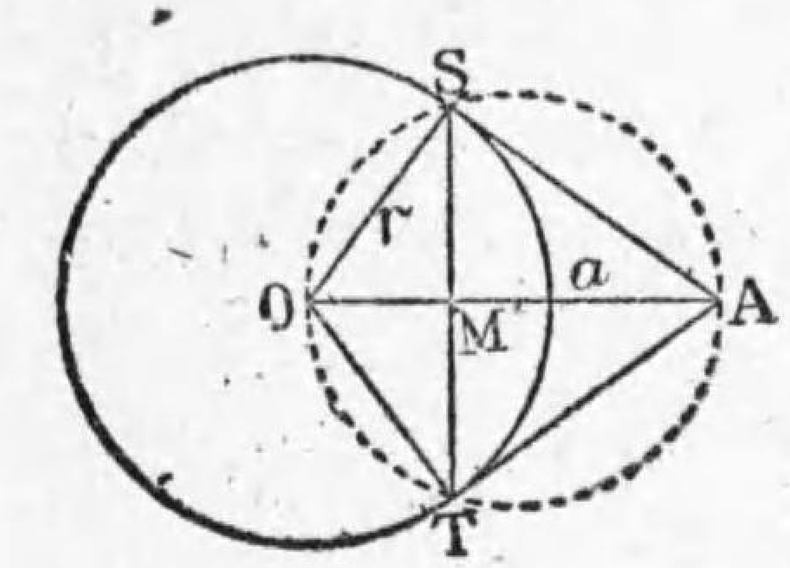
極大極小は幾何に於ても代數と同様に重要である事は勿論である．而もこれは各方面との關聯が深く，知識の活用や復習にも，數學全體の綜合的觀察にも便である．從つて之を學ぶには代數の極大極小や軌跡，作圖等とも關聯せしめ，比較研究を怠らぬやうにしたい．

又極大極小は函數的變化の一部である．之を學ぶにはその背景たる函數の變化——增加減少——を觀察し，更に進んではこの增加減少の原因を探究し，極大極小の因つて起る所以を明かにする態度で進むべきである．數學の問題を取扱ふときは常にさうであるが，わけてもこの極大極小問題に於ては問題の表面に上すべりせず，よくその本質を捉へようとする努力が望ましいのである．

幾何學に於ては極大極小は變化する量の增加から減少減少から增加に移る所，と云ふやうな定義は下されて居らず，一群の量中最大或は最小のものと云ふことに考へられて居る．即ち極大極小は最大最小と同じと考へられて居る．初等幾何に於ては連續的變化と云ふ事は餘り考へないから，勢ひかうした定義となつたものであらう．さうとすれば上に述べた事はこの定義と矛盾しはせぬか．勿論それは現實には矛盾して居るが，私は初等幾何のこの態度は決してよいものだと思はない．初等幾何に於ても量の連續的變化と云ふ事を考へて惡い筈はなく，更に進んで函數關係も考ふべきものである．さうして極大極小は主としてこの函數の連續的變化の所產として見らるべきものであると信ずる．恐らく將來次第にかうした見方が多くなつて來る事であらう．

問題 1. 二點 O, A あり．その間の距離を a とす．O を中心として圓を畫き，A より之に二つの切線を引く．圓の半徑の長さが如何なるとき，その二つの切點を結ぶ弦の長さが最大となるか．

解 切線を AS, AT とし，ST と OA との交點を M とする．



(第 25 圖)

半徑 r = OS があまり小さいと ST の長さは勿論 $2r$ より小さいから餘り大きくない．r があまり大きくなると AS も AT も小さくなり ST も餘り大きくない．そこで r は大きからず小さからず適度の大きさでなければならない．かやうなときに最大最小の問題が起る事が多い．ST は r が小さい間は r の增加と共に增加し，r の或値について最大となり，その後は次第に小さくなつて行くのであらう．即ち單に ST の最大値を求めると考へずに，r の增加に伴ふ ST の變化中に於て增加から減少に移る，代數で云つた所謂極大値と云ふ觀方をする事ができる．

之を求めるに，第一の方法は S の軌跡を考へるのである．S の軌跡を求め，その軌跡上で OA から最も遠い點を求めれば，そこが最大値を與へるであらう．S の軌跡は OA を直徑とする半圓となるから OA から一番遠ざかるのはその中點に於てである．このとき OSAT は正方形となるから

$$ST = a$$

である．

第二の方法は M に着目する事である．$SM^2 = OM \cdot MA$ であるから $OM \cdot MA$ が極大となるやうに M をとればよ

い．これは $OA=a$ を二つに分けてその積を最大ならしめる問題で M が OA の中點に來るべき事は代數の教へる所である．代數に於ても相加平均と相乘平均との大小に關した極大極小問題がたくさんあるが，幾何でも此の種の問題が多い．例へば

「周が一定の矩形の面積最大のもの」，「圓に內接する最大の矩形」，「表面積一定の最大體積の直方體」

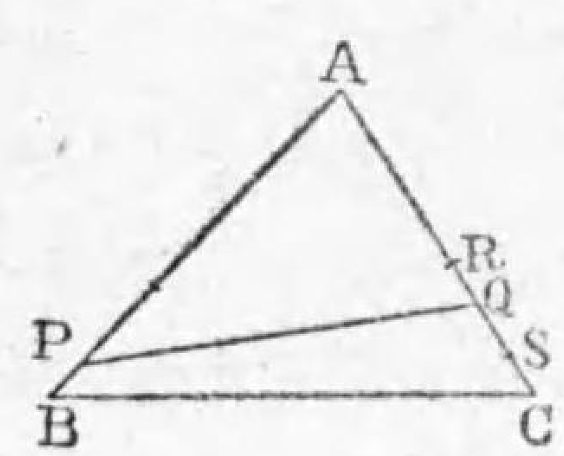
等，皆此の種の極大極小問題である．

問題 2. 三角形 ABC の邊 AB, AC の上に夫々點 P, Q をとり，直線 PQ によつてこの三角形を二つの部分に分け，各部分の周が相等しく且つ $\triangle APQ$ が最大となる場合と最小となる場合とを求めよ．

解 問題の本質を捉へる爲に「周が相等しく」と云ふ語をもう少し變形して見よう．PQ は双方に共通であるから

$$AP+AQ=BP+BC+CQ$$

となるが，この兩邊の和は三角形の周に等しいから結局 $AP+AQ$ が三角形の周の半分で一定だと云ふ事になる．



(第 26 圖)

そこで $\triangle APQ$ の面積を考へると，$\angle A$ は一定であるから之は $AP\cdot AQ$ に比例する．從つてこの問題もやはり和が一定なる二つの數の積の極大極小に歸するのである．只ちがふ所は此の場合 AP, AQ の變動の範圍に限りがある事である．これらは勿論負にはなれないし，

又 AP は AB より，AQ は AC より大きくなれない．P が B に來たとき Q は A と C との間の一點 R に來る．この R は $CR-AR=AB-BC$ なるやうな點で $AB\sim BC$ は AC より小さいから A と C との間にある事がわかる．Q の動く範圍は CR である．P の動く範圍も同樣にきめられる．それ故代數と同じように，只極大極小を求めても，そのときの P, Q がこの範圍に入らなければ用ひる事ができない．

そこで二數の和が一定なるとき，その積の變化を全般的に考へて見る．二數を $a+x$, $a-x$ とするとその積は

$$a^2-x^2$$

で $|x|$ が大なる程小さい．即ち「二數の差を小さくする程積は大となる」この事は「二數が等しいとき積が最大となる」と云ふ事よりも一歩廣い進んだ結果で，後者から決して前者は出て來ない．これを用ひると $AP\sim AQ$ を小さくすれば $\triangle APQ$ は大となり，大きくすれば小となる．今 $AB>AC$ とし，$AP=AQ$ なる Q が CR の間にあつたとして之を S とすると，$AP\sim AQ$ は Q が C から S に來るまで減少し，それから R に來るまで增加する．C に於てより R に於ての方が大きいから，Q が R のとき極小値が，S のとき極大値が起る．S が存在しないとき AP は常に AQ より大であり，$AP\sim AQ$ は Q が C から R に進むまで增加するばかりである．それ故 Q が C のとき極大値が，Q が R のとき極小値が起る．

然らばかやうな S が存在する條件如何．$BC=a$, $CA=b$,

AB$=c$ とすると，かやうな AS は $\dfrac{a+b+c}{4}$ となるから

$$\frac{a+b+c}{4}<b$$

がその條件である．即ち

$$3b>a+c.$$

之によつて以上の結果をまとめるに

$b<c$ とし AP$=x$ とすれば

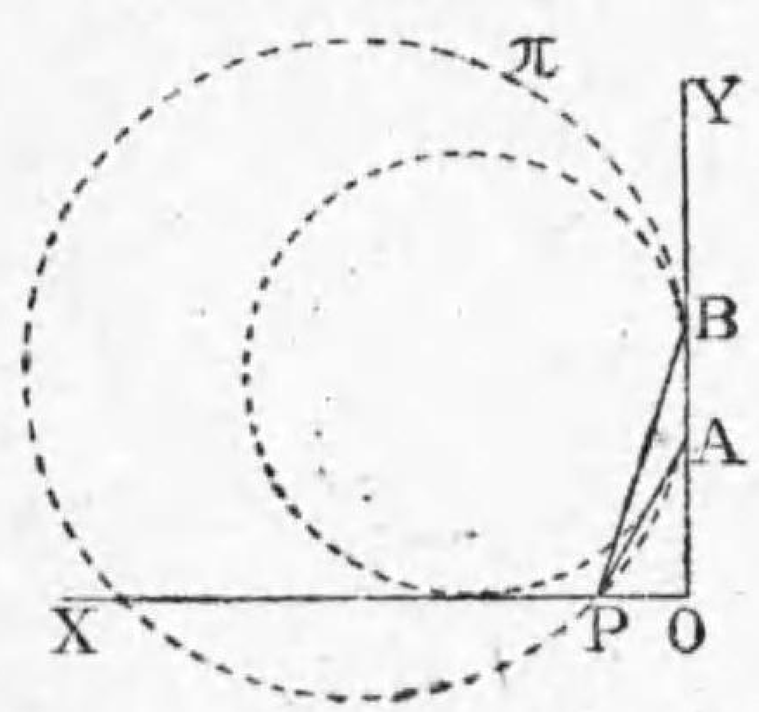
$3b>a+c$ のとき $x=\dfrac{a+b+c}{4}$ で極大，$x=c$ で極小

$3b\leqq a+c$ のとき $x=\dfrac{a+b+c}{2}-b=\dfrac{a-b+c}{2}$ で極大，

$x=c$ で極小

問題 3. 鉛直の壁に高さ 1.5 m の所から 2.5 m の所まで窓が開いて居る．床上の點でこの窓を最大角に視る點は壁から何米離れた所か．

解 之を幾何の問題に直して見る．直角 XOY を作り OX を床，OY を壁の斷面と見る．OY 上に OA=1.5m OB=2.5m なるやうに A,B をとり 之を 窓の 斷面 とする．さうすると直線 OX 上に P をとり ∠APB を最大ならしめる問題である．P が O に近ければ ∠APB は 0 に近いし，P が非常に遠くても 0 に近い．それ故適當の所に最大となる所があるであらう．



(第 27 圖)

∠APB は角であるから代數では扱ひにくい．之を數式的に取扱ふには，三角を用ひるのが適當である．即ち OP$=x$ とし

$$\tan \mathrm{OPA}=\frac{1.5}{x},\quad \tan \mathrm{OPB}=\frac{2.5}{x},$$

$$\tan \mathrm{APB}=\frac{\dfrac{2.5}{x}-\dfrac{1.5}{x}}{1+\dfrac{1.5}{x}\dfrac{2.5}{x}}=\frac{x}{x^2+3.75}.$$

之を y とおき，その最大値を求めればよい．

$$\frac{x}{x^2+3.75}=y,$$

$$x^2y-x+3.75y=0,$$

$$1-4\times 3.75y^2\geqq 0,$$

$$\frac{1}{2\times\sqrt{3.75}}\geqq y.$$

等號をとれば

$$x=\frac{1}{2y}=\sqrt{3.75}=1.94.$$

三角もかう云ふ所にも應用して見たいものである．併し此の解法は本問題に對しては充分適當とは云ひ難い．

最も適當な考へ方は之を作圖題の吟味の所産とする事である．即ち問題を變へて「∠APB が與へられた角 α に等しくなるやうに P を求む」として見る．さうすると ∠APB が α に等しくなるやうな點の軌跡が問題となり，この軌跡なる弧 π と OX との交點が求むる點 P である．そこで α を次第に大きくすると遂には π と OX が交ら

ず解が存在しなくなる．解が存在する場合のαの最大値が求むる値で，これはπがOXに切するときである事は明かである（このとき$OP^2=OA\cdot OB$で上の答と一致する）．この考へ方に從へば極大極小問題は作圖題に歸し，作圖題は軌跡に歸するので，此の三者の關係も興味ある所である．

尙第35節問題3も參考に供せられたい．

39. 計算問題と融合問題

幾何では單なる計算問題と代數的方法を可成りの程度まで必要とする所謂融合問題とある．何れも計算を主とする事に變りはない．元來代數と幾何とはその成立の始歷史的の差異はあつたが，根本觀念に於ては決して本質的差異あるものではないのである．3尺と2尺と加へると云ふ事は數の取扱でもあり，線分の取扱でもある．これらの概念は，論理的にむづかしく云へば限りがないが，常識的に考へれば決して本質的に區別せらるべきものではないのである．それ故代數と云ひ幾何と云ふも，結局便宜上の區別で，必ずかくあるべき數學的の理由があるわけではない．更に先へ進めばグラフから高等數學に入るとき，代數的概念と幾何學的概念とは區別できない所がいよいよ多くなつて來る．方法に於ても，代數的方法と幾何學的方法とは外見上著しく異るが，之を我々の數學的思索の形式としてよく解剖して見れば，その心理過程に到つては本質的に同一のものである．卽ち代數と幾何とは之を區別しようとする方が不自然なのである．之を幾何の單なる計算問題について見ても，幾何學的量の數的取扱ひが如何に自然的であるかを感ずるであらう．融合問題こそ最も自然の問題で融合と云ふ言葉が旣に當らないのである．

從つて計算問題及び融合問題はこの不自然な代數と幾何との間隙を少しでも少くしようとする使命を持つて居るものである．之によつて我々は數と量との概念を單一化し，圖形の數量的觀察を盛にし，數學的概念の整備に資し得るのみならず，進んで高等數學に入る場合に之が概念の消化を容易にし，その進步を助ける事が大である．之を重視すべきは勿論であつて，之を學ぶ上に次の如き心掛けが望ましい．

1. 代數と幾何との概念の一體化を目標とする事．兩者の關聯を深めると云ふ程度では不足である．

2. 問題の範圍を廣める．卽ち出來得る限り多くの問題を代數，幾何兩方面から眺める．

3. 式の幾何學的解釋，圖形の式的表示を常に怠らず，之によつて解法の各段階の代數と幾何との方法の關係をつける．

4. 三角法等も遠慮なく用ひる．

本書でも此の方針で旣に各所に此の種の問題を取扱つた．

問題 1. 長さ10糎の線分を二分し，その一方の上には正三角形を，他方の上には正方形を畫くとき，此の兩

形の面積の和の最小なるものは何平方糎なるか（一平方糎未滿四捨五入）．

解　これを定線分を二分し……面積の和が最小となるやうにせよ，と云ふ問題にすれば單なる極大極小問題となつてしまふので，計算問題にするか否かは一寸した手加減である．線分の長さを x 糎及び $10-x$ 糎とすれば面積は

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+(10-x)^2 \quad (\text{平方糎})$$

である．之を最小にするには二次式の極大極小の定理を用ひればよいので

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2-20x+100-y=0,$$

$$10^2-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(100-y)\geqq 0,$$

$$100-\frac{20^2}{4+\sqrt{3}}\leqq y.$$

y の最小値は

$$y=100-\frac{400}{4+\sqrt{3}}=\frac{100\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{100\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{13}$$

$$=\frac{400\sqrt{3}-300}{13}.$$

但し之が求むる値である事を示すには，この y が實現できる事，即ちこの y に對する x が0と10との間にある事を示しておかなければならない．然るにこのとき

$$x=\frac{10}{1+\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

であるから勿論0より大，10より小である．それ故上の y を計算しさへすればよい．

さて此の y を計算するに種々の方法があるが，最も着實な方法は

$$y=\frac{\sqrt{480000}-300}{13}=\frac{692.8\cdots\cdots-300}{13}=30.2\cdots\cdots$$

で答を30平方糎とするのであるが，少し大膽にやれば

$$400\sqrt{3}=1.73\times400=692.0 \ (\text{誤差}\,4\,\text{以內}),$$

$$\frac{692-300}{13}=30.15\cdots\cdots(\text{誤差}\ \frac{4}{13}<0.31\ \text{以內}).$$

それ故何れにしても答は30平方糎である．この位の問題では前者の方がよいと思ふ．

上に求めた x の値を見ると，之は 10 cm を $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$ に分けたのである．1と $\frac{\sqrt{3}}{4}$ と云ふのは同じ長さの線分の上に作つた正方形と正三角形との面積の比である．線分の長さが違へば面積の比は線分の比の平方比となるから，正三角形と正方形の面積の比は

$$1^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}:\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times1=1:\frac{\sqrt{3}}{4}$$

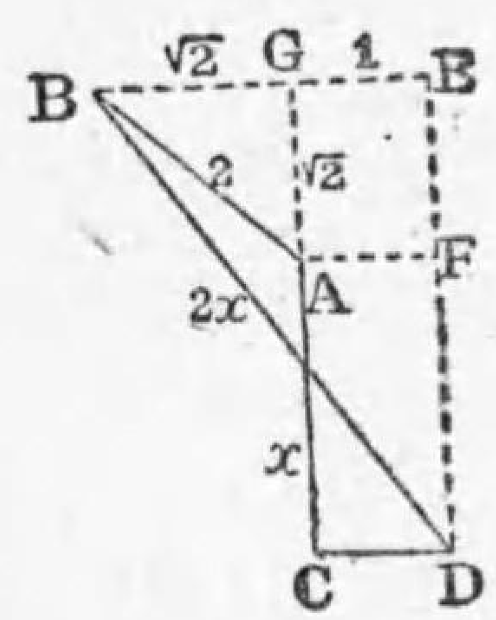
となり，線分の比と面積の比が丁度等しくなつて居る．かやうな x の値を作圖する事も容易であるから試みておくがよい．

問題 2. 正南に向ひ 10 ノツトの速さで進行して居る母船の西北方 2 浬の位置にある捕鯨船が母船の東方 1 浬の位置につくことになつた．捕鯨船の速さは 20 ノツトだつたとすると，指定の位置に到るまでの最短航路は何程か．

解　A, B を現在の母船及び捕鯨船の位置とし，C, O を捕鯨船が定位置についた時の兩船の位置とする．D の北，B の東にあたる點を E とし，A から ED, BE に垂線 AF, AG を引く．AC$=x$（浬）とすれば

BD$=2x$，AF$=$CD$=1$，AG$=\sqrt{2}$

BE$=\sqrt{2}+1$，DE$=x+\sqrt{2}$



（第 28 圖）

であるから

$$(x+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2=(2x)^2,$$

$$3x^2-2\sqrt{2}\,x-(5+2\sqrt{2})=0,$$

$$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{17+6\sqrt{2}}}{3}\quad（正根だけとる）.$$

求むる長さは

$$\mathrm{BD}=2x=4.308\ 強（浬）.$$

問題 3. 四邊形 ABCD の四邊 AB, BC, CD, DA 上に夫々點 P, Q, R, S をとり

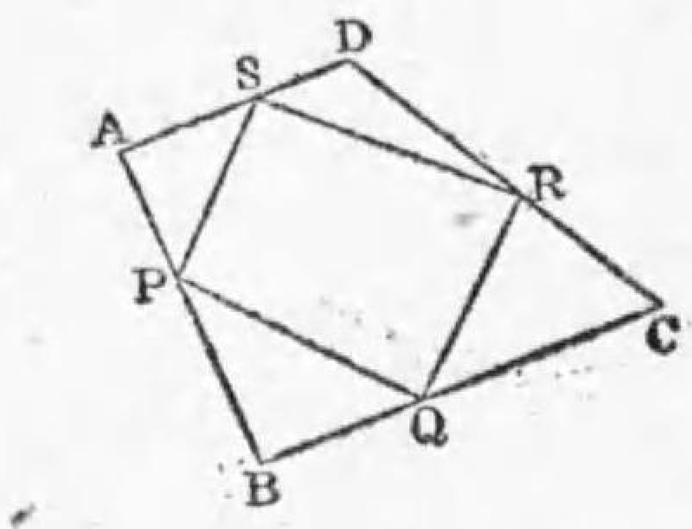
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}=\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=\frac{m}{n}$$

ならしむるときは

四邊形 PQRS : 四邊形 ABCD $=m^2+n^2:(m+n)^2$

なることを證明せよ．

解　どしどし計算してしまふがよい．



（第 29 圖）

$$\frac{\triangle\mathrm{APS}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AS}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{m}{m+n}\,\frac{n}{m+n},$$

$$\frac{\triangle\mathrm{CQR}}{\triangle\mathrm{CBD}}=\frac{\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{CR}}{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}}=\frac{n}{m+n}\,\frac{m}{m+n}.$$

故に　$\dfrac{\triangle\mathrm{APS}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\dfrac{\triangle\mathrm{CQR}}{\triangle\mathrm{CBD}}=\dfrac{mn}{(m+n)^2}$

又　$=\dfrac{\triangle\mathrm{APS}+\triangle\mathrm{CQR}}{\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{CBD}}=\dfrac{\triangle\mathrm{APS}+\triangle\mathrm{CQR}}{四邊形\ \mathrm{ABCD}}$

同様に　$=\dfrac{\triangle\mathrm{DSR}+\triangle\mathrm{BPQ}}{\triangle\mathrm{ADC}+\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\triangle\mathrm{DSR}+\triangle\mathrm{BPQ}}{四邊形\ \mathrm{ABCD}}.$

故に　$\triangle\mathrm{APS}+\triangle\mathrm{CQR}=\triangle\mathrm{DSR}+\triangle\mathrm{BPQ}$

$$=四邊形\ \mathrm{ABCD}\times\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

四邊形 PQRS$=$四邊形 ABCD$-$四邊形 ABCD$\times\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$

$$=四邊形\ \mathrm{ABCD}\times\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

40. 極限と無限大

平面幾何の最後に圓周の長さを求める事が敎へられる事になり，そこで極限と無限大の概念にふれる．丁度代

數でも此の邊で無限等比級數が教へられる事になつて居る．幾何では之より前に比例のところで，數と量との關係を論ずるに當つて，無理數を取扱ひ極限を論じなければならない事になつて居る．例へば「矩形の面積を表す數は縦を表す數と横を表す數との積に等し」と云ふ定理の證明などはどうしてもこれが必要になつて來る．

極限の觀念は勿論必要である．殊に高等數學に進まねばならない者に於て然りである．併し乍らこの概念はその眞相を掴めば，極めて常識的な自明な概念であるにかゝはらず，之を皮相的に形式的に扱へば，思ひの外に複雜難解となり，却つて純朴な數學的思想を破壞するおそれがある．從つて之を學ぶ者はよく注意して後者の弊におちいらぬやうにしなければならない．極限の概念は少し進んだ數學的思想を持つものならば必ず既に之を潜在的に持つて居る筈で，この常識に照してピッタリしないやうな事項は決して正しくないのである．自己の捉はれざる常識に信頼し，この觀念の眞相を把握する事を努めるがよい．或一線を突破すれば展望極めて遠くまで急に開ける事を感ずる筈である．この事は代數でも全く同じで，兩者はなるべく關聯して學ぶがよい．

上に述べた無理數の理論は常識的には一寸平地に波瀾の感がある．私はこのやうな事まで理論的嚴正を期さなければならないかどうかと云ふ事には疑を持つて居る．併し前者即ち圓とか一般の曲線の長さと云ふやうな觀念はやはり正確に教へられて居た方がよいと思ふ．之が手段たる極限の觀念を教へられる事が更に重要であるとすれば尚更の事である．

41. 立體幾何學

立體幾何學は幾何學の本體である．我々の住んで居る空間が立體的のものであり，我々の觀察も，運動も皆この立體的の空間に於て行はれて居る事を考へれば明かであらう．殊に近年の航空機の發達は可成り大きな場所に對してまで立體的の考察を必要とするやうになつて來た．立體幾何の重要性は云ふまでもない事である．

然らば何故今日幾何學と云へば殆ど平面幾何學に限られ，立體幾何學は僅かにその一隅に餘命を保つて居ると云ふやうな狀態が許されて居るのであらうか．これは決して現狀のまゝで滿足せらる可きではない．現狀は眞の教育的立場以外に學制（中學四年から高校に入り，中學四年迄には立體幾何だけ無し）などによつて歪められて出來上つたものだからである．併し乍らそれ以外に平面幾何學が重視せられると云ふ事には別に正しい理由もあるのである．

平面幾何學は立體幾何學の單なる一部分でもなく，又は立體幾何と本質的に異るものでもなく，實にその代表者であり極めて適當なる縮圖なのである．此の點鑛物學の博物學に於ける關係とも異るし，日本歷史の世界歷史に對する關係とも異るのである．平面は廣さこそ立體に比し一次元小さいが，その有する性質は殆ど立體の性質

を代表し得るので，之を研究する事は概念的に見て，一般の次元の幾何學を學ぶと餘り變らない價値があるのである．その上平面的考察はその便利さ，容易さに於て到底立體的考察の比ではない．それ故我々が平面幾何學を見る事は幾何學の代表者としてゞあつて，決してその特別の一小部分としてゞはないのである．

併し一面に於ては平面幾何學では想像もできない事柄が立體幾何では屢々起る．例へば正多面體が五種に限るが如きその好例である．即ち平面幾何では代表し得ない幾何學の概念も少くないのである．其の上三次元の空間の觀念を豐富にすると云ふ事も重要な事柄である．して見れば便宜上平面幾何を幾何學の代表者として之に主力を注いだとしても尚且立體幾何學に遺された仕事は可成り多い．私は此の點五年になつて始めて立體幾何を學ぶ現制度には疑を持つて居る．立體幾何を學ばぬ先に物理化學に於て，地理に於て，どんどんその知識を必要として居るではないか．かやうに立體幾何の目的は三次元空間の概念を豐富にし，且平面幾何で見られなかつたこの空間の特性を學ぶにあるのであるから，その學習法も平面幾何學の場合と異るものがある．平面幾何學ではその概念は紙上に表示して直觀によつて之を確かめる事ができ，之を豐富にする事が極めて容易である．之に反し立體の觀念は直觀を適用し得るにしても平面圖形とは比較にならぬ程困難で，之を豐富にする事には相當の努力を要するのである．それ故立體幾何では難問の解決や問題

の吟味はしばらく平面幾何にゆづり，この概念の構成と云ふ事に主力を注ぐべきである．

立體の概念の構成は直觀を主とすべきである事は一般の常識であらう．が併し之も必ずしも絶對的でない．一面に於ては直觀によらず，理論によつてこの概念を解剖してほしい氣もする．本來我々の幾何學なるものは物質を容れる，我々の住んで居る空間の性質を研究するものではあるが，一面に於ては我々の思想を容れる，科學的概念を包藏する，或は我々の住んで居ない空想の空間の性質を研究する爲のものとも考へられる．「空間とは思想の舞臺なり」と定義した人があるが至言と云へる．從つて我々は進んで複雜なる思想，科學（相對論とか量子力學とかは既に經驗濟である）を體得せんとするには，更に高次なる空間の概念を必要とし，又我々の直觀と異る性質の空間をも必要とする．之が爲には空間の非直觀的概念も亦望ましいのであつて，その第一着手として比較的直觀の困難な立體幾何に於て，之を求めようと云ふ事は餘りに慾張つた考へであらうか．慾張つたかどうかは第三者の批判に委せるとして，私としてはこれが必ず近い將來缺くべからざる概念となる事を信じて居る．

例へば音樂などうであらう．之を科學的に取扱ふ必要の生じた時，之を表示する幾何學的構圖は如何になるか想像して見給へ．音程，音色，音量，時，言葉等多くの獨立な變數を同時に表示しなければならないので，その圖形は到底直觀では理解されない複雜なものであら

う．音の聽き分けが重視され，音感教育まで行はれて居る今日，音樂の數學的解析が必要にならぬと誰が云ひ得よう．現今行はれて居る所でもレンズに於ける光の行動などは，單なる直觀的圖形では表されない複雜なものである．普通の立體圖形にした所が，飛行機の盲目着陸の場合の如く，直觀によらずその觀念を捉へる必要のある場合も起るであらう．

さて，かやうな目的の爲に如何なる學習法が選ばれるか．第一に直觀的概念を養ふ方法としては投影畫法と模型の工作法がある．前者は間接的ではあるが慣れると空間の概念の把握には非常に役立つし，又之を用ひてやゝ複雜な事項を考へる事もできる．後者は面倒ではあるが直接空間の概念を豐富にする上に於て非常に有効なものである．私は立體幾何の教育をもつと盛にする事を主張すると共に，この二つの方法を是非採り入れる事を主張したい．投影圖法は既に圖畫科で之を教へて居るのであるから，之を數學に入れ又は密接な連絡をとり，もつとずつと理論的にすればよいのである．工作もその科の一部を數學教師の受持とし，簡單なボール紙細工や針金細工でよいから立體幾何の重要定理の證明用の圖位は學生自身作るやうにしたいものである．之は現在の學校設備を以てしても一擧手一投足の勞であらうと思はれる．併し學生としては之に無關係にでも，厚紙細工でもよいからなるべく實物を製作する機會を多くして空間の概念の養成に努め，なるべく複雜な立體圖形を頭の中で畫き出

せる習慣を養ふがよい．赤道と黄道とが天球上にあり，それに地平線が交り，子午線がある，と云ふやうな圖形を容易に想像し得るやうになつてほしいものである．

次に非直觀概念の養成の一助として，私は立體座標の重視をおすゝめする．平面幾何に於て座標は勿論必要であつたが，それは圖形の更に進んだ取扱ひをなす爲であつた．立體幾何に於ては圖形の表示の一助としても是非座標を用ひる事が望ましい．之によつて空間の概念を數値化し，抽象化し，更に複雜な空間への擴張を可能ならしめ，又直觀が困難な場合にも之によつて圖形の有樣を知り，對策を立て得るやうになる．飛行機の盲着も，高射砲の照準も皆この種の對策を必要とする一種の問題ではあるまいか．この立體座標は現在中學では殆ど行はれて居らないが，私は之が當然近い將來に必要になつて來ると信じて居る．

併し要するに立體幾何の目標の第一は直觀力の養成であるから，上に述べた畫法幾何，工作等による方法を主とし，後者即ち非直觀概念の養成は第二と考ふべきであらう．最も避くべき事は平面幾何の延長に惰し，空間の概念を把握する事をせずに，平面幾何の模倣と擴張とを主とする事で，かやうな事を言ふ丈なら立體幾何は全然不要の學科なのである．

42. 直線と平面

立體幾何で第一にぶつかるのは，直線と平面の章であ

る．而もこの章は最も容易なる如くで，實は最も難解の章である．この章の學習に當つては大約次の三つの方面があらうと思ふ．

(A) 理論の構成の系統を知る事

(B) 空間の概念，殊に直線と平面との關係を明かにする事

(C) 平面幾何學と立體幾何學との關係を知る事

一つの定理を學ぶに當つても，その定理の持つ直觀的內容を明かにし，之によつて直線や平面の關係について直觀的な概念を得ると云ふ事は(B)にあたり，その定理の證明法を知り，之が前後の定理との關係，全系統に於ける地位を知るのは(A)に，此の定理が平面幾何の如何なる定理によつて代表せらるゝや，又は如何なる定理から如何なる方法で導かるゝやを知るのは(C)にあたる．

立體幾何學では定理の數が非常に多い．立體幾何の內容の少いのに比し，定理の數が多く，その相互間の關係の複雜な事は到底平面幾何の比ではない．立體幾何を理論的に學ばうとすれば，此の定理の關係をよくしらべ，どの定理とどの定理を用ひてどの定理が證明されるか，その系統を明かにしなければならない．平面と直線との平行關係を先にし，之を用ひて垂直關係を述べた書物が多いが，中には垂直關係の方を先にした書もある．一見容易に見える定理でも定理の順序を間違へるとなかなか證明できない場合もある．これが私が(A)なる見地を必要であると云つた所以である．併しこれは立體幾何の理

論的構成を知る必要ありや否やにかゝつて居り，「平面上の相交る二直線に垂直なる直線はこの平面上の何れの直線にも垂直なり」と云ふやうな定理まで直觀で承認してしまふことができれば(A)は殆ど不要になると思はれる．理論的方面は平面幾何に委せておけ，立體幾何は立體の觀念を養ふを以て主眼とすべし，と云はれるならばそれ迄である．我々數學者としては，數學上の事は何も彼も重要に見える．併し中學生としては餘りになす可き事が多い．省ける事は省かうではないかと云はれゝば又もつともと思ふ．この點第三者の批判に委せるが，もしこの見解をとるものとすれば(A)は之をやめ，立體幾何の基礎となる簡單な定理は，之を實物について徹底的に理解させる丈で，證明を全部省略してしまふが得策かと思ふ．

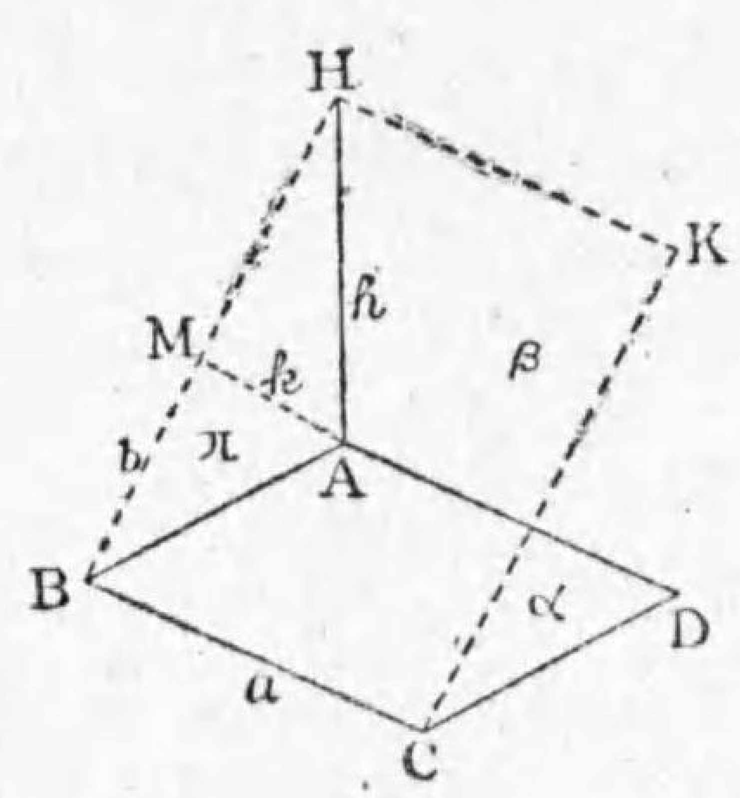
(B)についてはその重要なる事は云ふまでもない．之が立體幾何の本領であつて，殆ど大部分の努力が之に費さるべきである．殊に直線と平面との章は實體があまりハツキリしないものを取扱ふ丈に，その直觀的把握が比較的困難であり，(B)なる方面の努力が切望されるのである．

(C)に到つては，その重要さは(A)にも(B)にも劣ると思はれる．只立體幾何に入るにあたつて，平面幾何がどれ程立體幾何に利用又は移駐されるかを知る事は，便利で且有益であると云ふ丈である．平面幾何の定理（と云つても平面幾何では定理の形にならぬ程簡單なものも

ある）を示す圖形を，そのまゝ平行移動したり回轉したりしてできる圖形が，立體幾何の定理を示して居る事も多いので，かやうな定理は平面幾何の定理の擴張としてどんどん述べて行つてしまふがよい．かやうな意味で立體幾何の定理をまとめて頭に入れておく事も便利と思はれる．併しこれが過ぎると平面幾何と全然異つた立體幾何の事情を無視してしまふ恐れがあるから氣をつけなければならない．

要するにこの章は立體幾何で始めてぶつかる，而も立體幾何に於ては典型的の章であるから，前節で述べた方針を殊に强調しなければならない次第である．

問題 1. 平面 α と直線 h とが垂直なるとき，他の平面 β と α との交り a は h の β に於ける正射影 b と垂直なることを證明せよ．



(第 30 圖)

解　これは投影畫法に於て必要な定理である．讀んで見ると何だかわかりにくいやうな定理だから，先づ實物について之を考へて見よう．ABCD を教室の床とし，AH を柱とする．之を α 及び h と考へる事が出來る．β は任意の平面であるが，a, h は h の周圍の各方向に向つて同じ關係にあるから β は α と任意の角をなせば，その位置はどこにとつて

も別にさしつかへない．そこで β を平面 BCH として見る．即ち天井の一隅 HK と BC との定める（教室を斜に二等分する）平面である．さうすると a は BC であるが b は多分 HB であらう．問題は HB と BC が垂直だと云ふので，大した事ではないらしい．

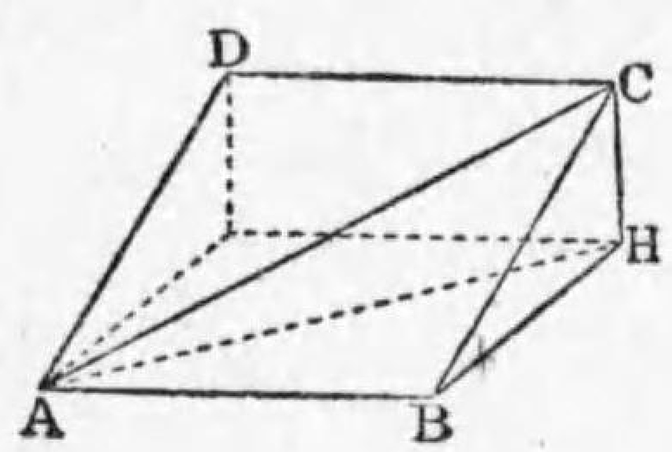
さて之を證明するのであるが，それには AH の正射影が BH であると云ふ事をもつとハツキリさせなければならない．正射影とはその直線上の點からの垂線の足の軌跡であるから，AH 上の一點，例へば A から β に垂線 AM を下して見る．さうすれば HM が求むる正射影となる筈である．この平面 AHM が平面 ABH と一致するのであらう．かやうに直觀的に大體豫想できる事は，この豫想を現實化させるべく考へ進めばよいのであるから，その證明も容易である．平面 AHM は AM を含むが之は β に垂直な直線であるから，この平面自身が β に垂直である．然るに AHB が β に垂直であることは BC と AHB が垂直なことから明かで，之によつて問題解決の方針がたつたわけである．證明は次の如くなる．

h 上の一點 A から β に下した垂線を $AM \equiv k$ とし，k と h の定める平面 (ABH のこと) を π とする．さうすると π は k を含むから β に垂直である．π は又 h を含むから a にも垂直である．それ故 π は α と β との交はり a に垂直である．從つて a は π 上にある直線 b に垂直である．

こんな證明が直觀の助けなしに，論理的に言葉の組合

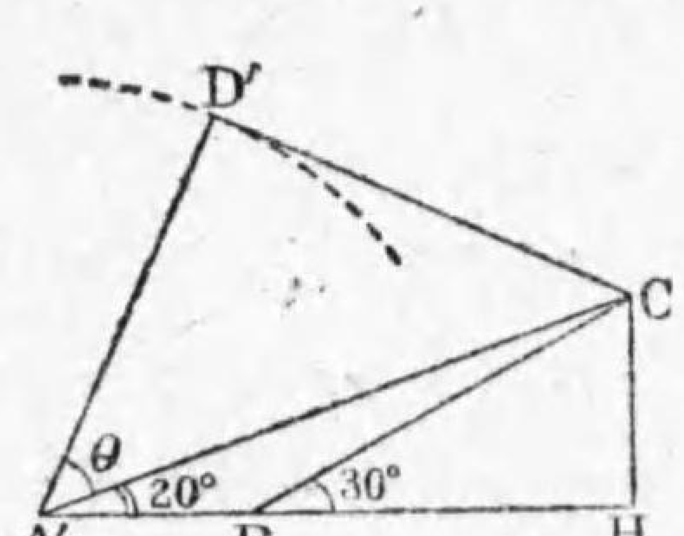
せを見て行くだけで出來るやうになるであらうか．それは困難な事に違ひないし，又それを必要とする者は多くない．それ故先づ上のやうに直観によつて情勢を知り乍ら證明を進めるがよいと思ふ．尙この定理は平面幾何學に於ける對應定理を見出し難い．

問題 2. 斜面がありその傾斜角は 30° である．之を斜に登り，傾斜角 20° の道をつけようとするには眞直に登る道と，どれ丈の角をなさしめたらよいか．



(第 31 圖)

解 之を作圖題として解いて見よう．作圖題と云つても求むるものは一つの角であるから，立體的の圖形を用ひなければならない必然性はない．かやうな問題は立體幾何の問題であつても，平面幾何の方法だけで作圖できるのであつて，その方法を系統的に記述したものが畫法幾何學(投影畫法等)である．但し本題では 20° と云ふ角があるから分度器が必要な事は勿論である．



(第 32 圖)

ABCD を斜面とし，AB をその上の水平線，AD を AB に垂直な直線とする．AC を求むる坂道とし，CH を鉛直線とする．$\angle CBH=30°$，$\angle CAH=20°$ で $\angle CAD$ が求むる角である．そこで先づ BH の長さを假に定

め（この長さは結果に關係ない），$\angle CBH=30°$ なるやうに C をとる．次に HB の延長上に $\angle CA'H=20°$ なるやうに A' をとれば $\triangle CA'H$ は $\triangle CAH$ と合同である．次に D' を $\angle CD'A'=\angle R$，$A'D'=BC$ なる樣に作れば $\triangle CA'D'$ は $\triangle CAD$ と合同であり，$\angle CA'D'$ は求むる角である．

三角法によれば

$$CH=BC\sin 30°=AC\sin 20°,$$

$$\cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{\sin 20°}{\sin 30°},$$

$$\theta \fallingdotseq 43°10'$$

となる．

43. 多面體，曲面體

次に多面體の章に入ると，取扱ふものが實體をもつて來るので，前章よりは餘程考へ易くなる．この間に多面角の理論があるが，之が丁度中間的のものであらう．平面幾何學と對稱して見ると，多面體，多面角，空間多角形が何れも平面上の多角形に對應するので，かやうに平面幾何の圖形や定理が立體幾何に擴張されるとき，多種の樣相を表すことも珍しくない．

多面體の理論の大部分は體積に關するものであらう．併しこれは殆ど常識的の定理ばかりで餘り面倒な事はない．證明の系統を理解する事が一仕事だが，之も一度充分了解すると云ふ丈で，それ以上活用できる迄に進まな

くともよいであらう．

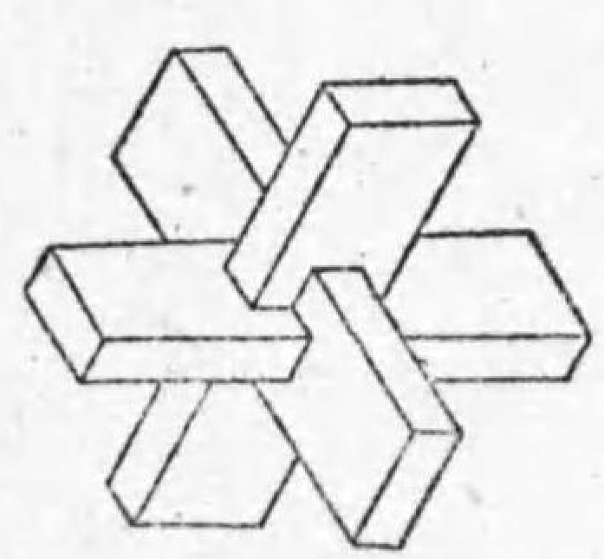
曲面體，殊に圓錐，圓壔，圓錐臺等についても同樣のことが云へる．

問題 1. 三面角の三つの稜に於ける二面角を二等分する三つの平面は一直線を共有する事を證明せよ．

解　これは三角形の内角の二等分線が一點に會すると云ふ定理にあたる．四面體については，六つの稜に於ける二面角の二等分面が一點に會すると云ふ定理があるが，それは本定理と餘り異つたものでない．四つの三面角については二等分線と云ふやうなものは考へられないからかやうな定理はない．

さて三面角にかへり，この圖形を平面で截つたとき，そこに出來る圖形は別に三角形及びその内角の二等分線にはなつて居ない．平面幾何の定理に對應すると云つても，その圖形の間に直接關係あるわけではない．併し證明はその平面上の一點から三面角の面への垂線が等しい事を使つて平面幾何のときと同樣にできる．

問題 2. 三稜の長さが 2 cm, 5 cm, 18 cm なる3個の直六面體が二つづゝ互に垂直に貫通して居る圖の如き立體の體積を計算せよ．



(第 33 圖)

解　圖形が複雜で一寸考へにくい．このまゝ正直に考へて行くと，先づ一つの直方體の體積はそのまゝとし $2\times5\times18=180\,(\text{cm}^3)$

二番目の立方體は第一の立方體に含まれる部分を除くが，之は 2 cm, 2 cm, 5 cm の三稜をもつ直方體で體積は 20 cm³ である．第三のは全く他に見えて居る部分だけ計算すればよいが，之は凹字形の部分二つである．その一つは

$$8\times5\times2-2\times2\times1.5=74(\text{cm}^3).$$

故に體積は

$$180+(180-20)+74\times2=488(\text{cm}^3)$$

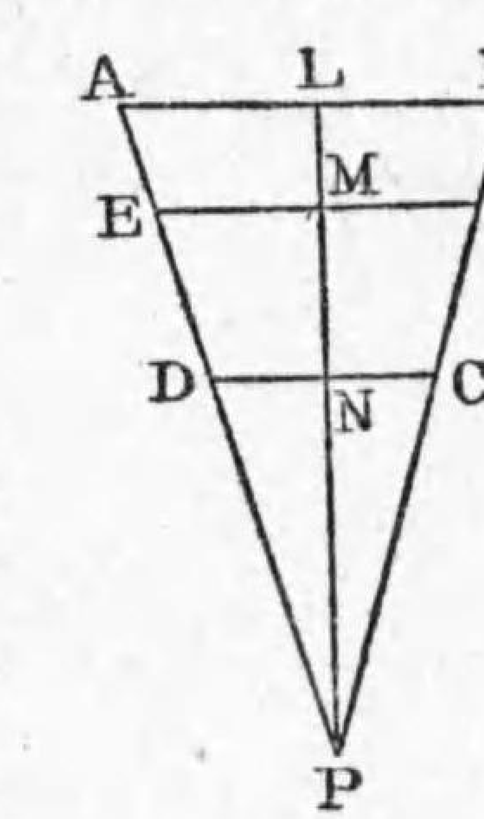
である．

又これは次のやうにも考へられる．この立體を作るに稜の長さ 2 cm, 5 cm 及び $(18-2)\div2=8(\text{cm})$ の直方體を6箇組合せると中央に稜の長さ 2 cm の立方體が殘る．それ故體積は

$$2\times5\times8\times6+2^3=488(\text{cm}^3)$$

となる．

問題 3. 直圓錐臺形の「バケツ」がある．上底の直徑は 30 cm, 下底の直徑は 18 cm, 深さは 22 cm である．このバケツに水を容積の半分入れると水の深さは何程となるか．



(第 34 圖)

解　バケツの斷面を ABCD とし AB が上底, CD が下底の斷面とする．水面を EF ; AD, BC の交點を P とする．P を頂點とした圓錐を考へると AB を底とするものと CD を底

とするものの和半が EF を底とするものになる筈である．體積は高さの立方に比例するから P から AB に下した垂線と AB, CD, EF との交點を L, N, M とすれば

$$PN^3+PL^3=2PM^3.$$

又　　$PL:PN=30:18,\ PL-PN=22$

であるから $PL=55,\ PN=33$. 從つて

$$PM=\sqrt[3]{\frac{55^3+33^3}{2}}=46.59,$$

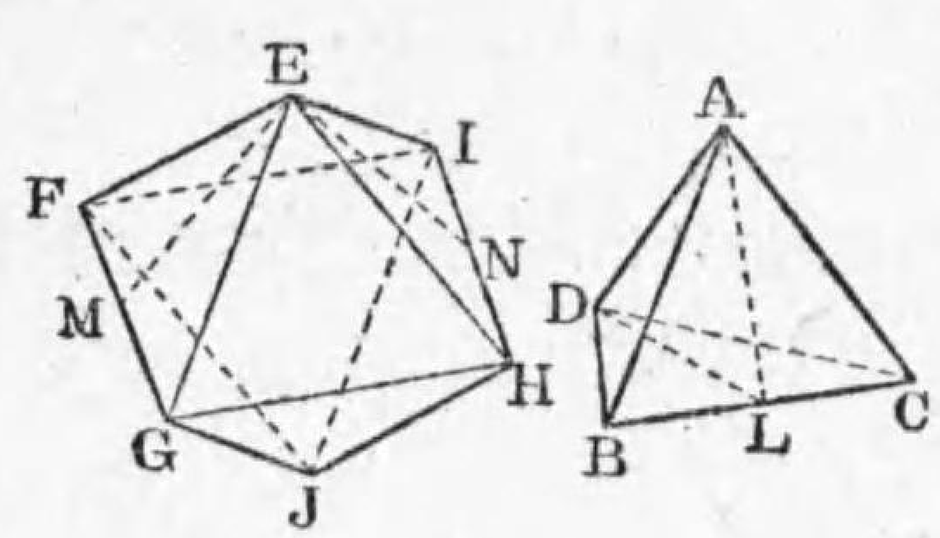
求むる深さは

$$MN=46.59-33=13.59$$

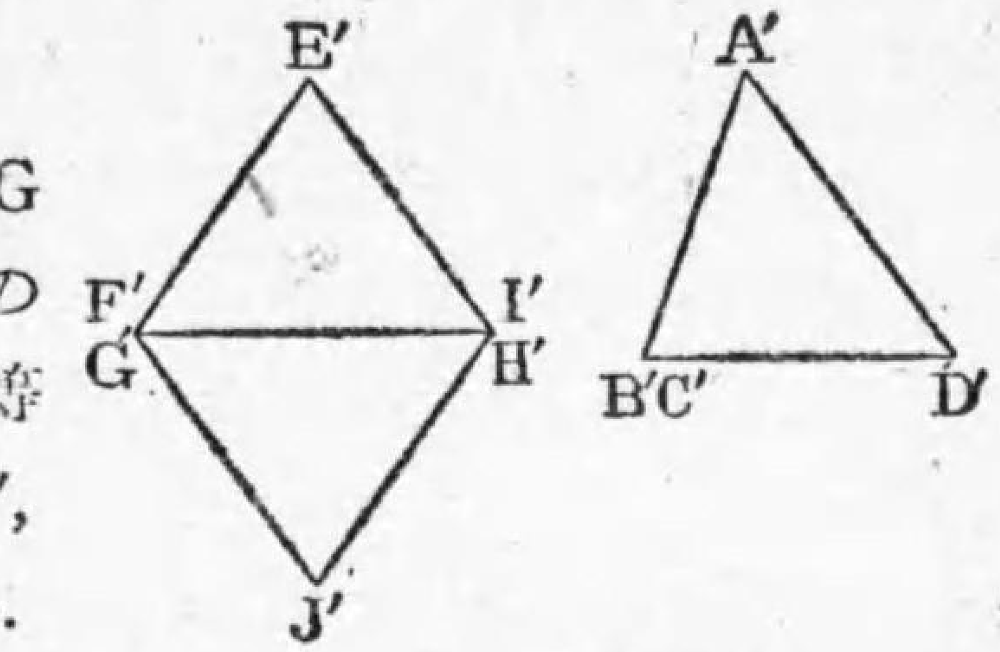
である．水の深さであるから 13.6 cm 位にしておいたがよからう．

問題 4. 正四面體と正八面體との稜に於ける二面角は互に補角をなす事を證明せよ．

解 正八面體及び正四面體を左圖の如くであつたとしBC 及び FG にそうた二面角を比べて見よう．この二面角は稜に直角な平面による截口と同じであるから，これらの立體をその稜の方向から見ればその大きさを見る事ができる．それ故投影畫法の考へによりこの二つの立體の BC, FG に垂直な平面上への正射影を畫いて見よう．正射影の各點には原の點の符號にダッシュをつけて表す．



（第 35 圖）



（第 36 圖）

このとき GH は FG に垂直であるからその投影 G′H′ は GH と等長である．併し E′F′, E′H′ 等はさうでない．之は △EFG, △EHI の高さ EM, EN にあたるので，これらと等長である．正四面體の方でも同様に A′D′ は實長であるが A′B′, B′D′ は高さ AL, DL の投影と見られ之と等長である．今 AB と EF と等しいとしておけば

$$A'D'=AB=G'H',$$

$$A'B'=B'D'=AL=EM=E'F'=E'H'$$

である．故に

$$\triangle E'F'H'\equiv\triangle B'A'D',$$

$$\angle A'B'D'=\angle F'E'H'=2\text{直角}-2\angle E'H'G'$$

$$=\angle E'H'J'\ \text{の補角}.$$

これで本題は證明できた．投影畫法の考へにより圖形を直觀的に表した事が成功したのである．

44. 球　面　圖　形

球面圖形は立體幾何學の最後に，即ち中學校の數學の最後に出て來る爲か，甚だ粗末に扱はれて居る感があるのは殘念である．と云ふのはこの章には又特殊の重要性があるからである．

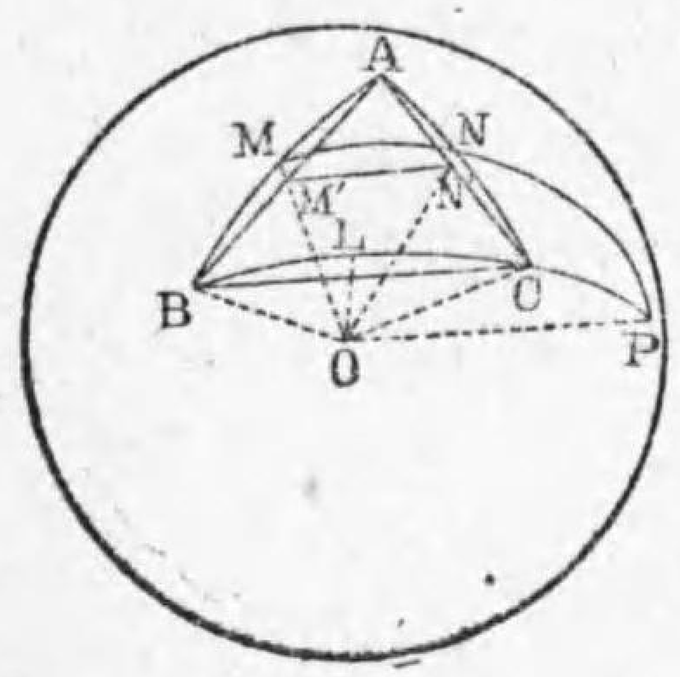
我々の日常生活に深い關係のある球面が二つある．卽ち天と地である．天はその距離が無限に遠い爲距離を考へず，之を一つの假裝球と考へるが適當である．之を天球と云ふ．天球上の出來事は我々の日常生活と離れ難い關係がある事は勿論であるが，その取扱ひが複雜な爲か之に關する知識が殆ど利用されて居ない．我々は今日何時に夜が明けるか，午前十時には太陽の高度はどの位で座敷のどの邊迄日がさすか，今夜の月はどの位の明るさで何時位まで出て居るか，何れも球面圖形の知識だけで之を求める事ができるのである．かやうな知識は中學でも敎へられないし，一般の人達は知る事を望んで居るやうにも見えない．併し生活は日々に科學化して來るとすれば，早晩かやうな事を知る事が非常に便利であると云ふ時があるのではなからうか．地球にしてもさうである．一般人は殆ど地圖の見方すら知らない．天動說も地動說も吾々の生活に大した關係がなかつた頃はとにかく科學によつて地球面が縮小されラジオの聽取にも天候の豫測にも日常茶飯事にまで地球の形が關係して來る時代に，我々が地球の球面である事を無視しては，距離の概念も，面積の觀念もすべて現實と遠く離れたものとなつてしまふ．東京で云ふ東北とニューギニヤで云ふ東北とは同じ方向であらうか，東へ1000粁とは如何なる意か，大圓に沿うてか等緯線に沿うてか，等々．かやうな問題を地圖の上から判斷する事も，やがては日常茶飯事とせねばならない時代が來よう．球面圖形の取扱が大きな必要性をもつて來る事は必至と考ふべきではなからうか．

球面圖形を取扱ふ實際的の方法が二つある．一つは球面黑板を利用する法で，この場合は球面定規や球面尺などが登場して來よう．もう一つは極射影法を利用する畫法幾何學的方法で，現に兩半球に分けた地圖などは之を利用して居る．この方法によれば，球面上の問題は大抵紙面で定規やコンパスを用ひて解ける事になるのである．この何れかの方法が將來上記のやうな問題の解決に用ひられる事にならうが，それは將來の事としても球面圖形に關する知識を豐富にしておく事が望ましい事は勿論であらう．

球面圖形と平面圖形とはよく似た性質を持つやうであるが，又可成り違つた所もある．例へば球面上には相似形と云ふものが無い．從つて長さは絕對値を有し（平面上では長さは相對値しか持たない），之が角と同じやうな單位で測られる．結局長さも一つの角と考へてよい．圓の內，外と云ふ觀念がつけにくい．圓の中心も二つ考へられる．圓周角が一定と云ふ定理は球面上では成立しない．と云ふやうなわけであるから，球面圖形は平面圖形の一寸した變形であるにしても，一應よく檢討して見ておく必要がある．之について三角函數を用ひたものは，球面三角法と云つて一つの學科をなして居る．又天球を考へた如く「球面上の點」と云ふものは「一つの方向」の代表とも考へられ，方向の間の關係もやはり球面圖形として論ぜられる．

問題 1. 球面三角形の二邊の中點を結ぶ大圓に關し如何なる定理があるか.

解 平面三角形では二邊 AB, AC の中點 M, N を結ぶ直線は BC に平行で MN は BC の半分である．併し球面上には平行と云ふ事はないし，半分になると云ふ事も正しくない．北緯 45° で東經 130° の地點と 140° の地點との距離は赤道上の同經度の地點の距離の半分ではないのである．之を考へるには球の中心 O から此の圖形を平面 ABC 上に射影して見るがよい．球面上だけでかやうな問題を解決する方が理想かも知れないが，球面に關する知識はそれ程深くないからやはり平面圖形の知識を借りるが順路であらう．



(第 37 圖)

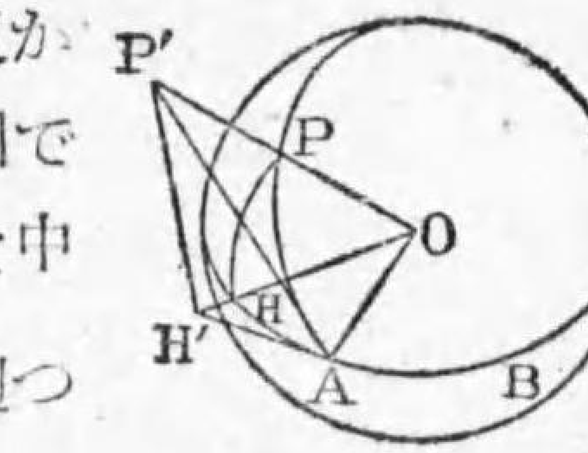
OM は ∠AOB の二等分線であるから AB の中點 M' を過る．ON も AC の中點 N' を過るから MN の射影は直線 M'N' で直線 BC に平行である．この二直線 BC と M'N' が平行であると云ふ事が大圓 BC と MN の間の如何なる關係に移されるかを考へればよい． BC と M'N' とが平行だとしても，大圓の平面 OBC と OM'N' は平行ではない．この二平面について考へて見るべきであるが，之については只「平行二直線を一つ宛含む二平面の交りはこの直線に平行なり」と云ふ定理が思ひ出される．即ちこの二平面の交り OP は BC に平行なのである．

之を球面上の事實として云ひ表せばよい．弧 BC の中點を L とすれば OP は OL に垂直である．OP と球面との交點を P とすれば P は大圓 BC と大圓 MN の交點であり，又 BC 上にあつて L から四分圓だけ離れて居る．即ち「MN は BC の中點 L から大圓の四分の一だけ離れた點を過る」と云ふのが BC∥MN の代りの性質である．但しこの P は二つある．

MN が BC の半分であるかと云ふことになると，線分 M'N' は線分 BC の半分であるが，M'N' は大圓の弦でなく簡單な等式は得難い．線分 MN は線分 BC の半分より大きいが，それ丈からは弧 MN が弧 BC の半分より大とも言ひ得ない（この事は他方面から證明出來るがこゝでは省略しておく）.

問題 2. 春分の日午前十時には太陽はどの方向のどの位の高さにあるか．但し北緯 30° の地點とする．

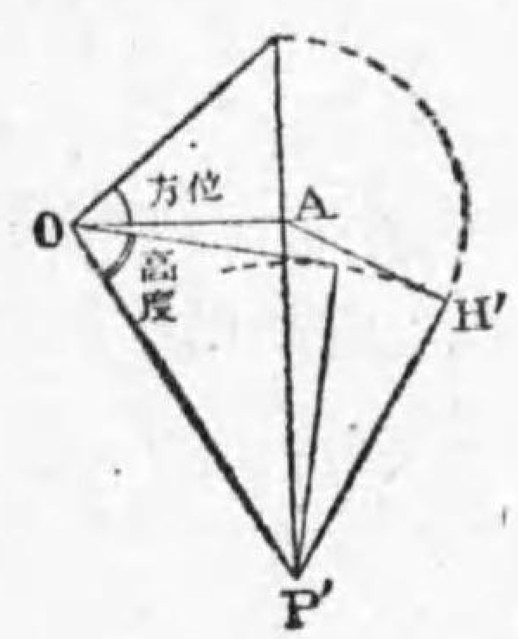
解 春分であるから太陽は正東から出て正西に沈み，その道は大圓である．午前十時には此の大圓上を中心角 60°，即ち全長の $\frac{1}{6}$ だけ廻つて居る．この大圓と地平線とのなす角は緯度の餘角 60° に等しい事は容易にわかる．それ故問題は「一つの球 O の大圓 AB と 60° の角をなす大圓 AP 上に弧 AP を ∠AOP = 60° なるやうにとり，P から AB に垂線 PH を下すとき ∠AOH 及び ∠HOP を



(第 38 圖)

求む」と云ふ事になる．即ち球面上の作圖問題である．

これは球面黑板があれば卽座に作圖して與へられるものであるし，又極射影法を知つて居ればそれでもよいのであるが，今はどちらも不可能であるから止むを得ず直接考へて見る．先づ $\angle PAH$ が $60°$ だと云ふ事を使ふ爲にAに於て切線を作る事が考へられる．それなら一層の事，Aに於ける切平面上に一切を投影して考へるがよからう．この投影を P', H' 等とする．$OA=r$ を與へれば $\angle AOP'=60°$ であるから AP' も OP' も作圖できる．從つて $\angle P'AH' = 60°$ を利用し $P'H'$ も AH' も求められ $\angle P'OH'$, $\angle H'OA$ もわかる事は第 39 圖の如くである．之を分度器で測つて高度約 48.5 度，方位東より 41 度南と云ふ事がわかる．



（第 39 圖）

計算によつても

$$OP'=2r,\ AP'=\sqrt{3}\,r,\ AH'=\frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

$$P'H'=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\,r=\frac{3}{2}r,$$

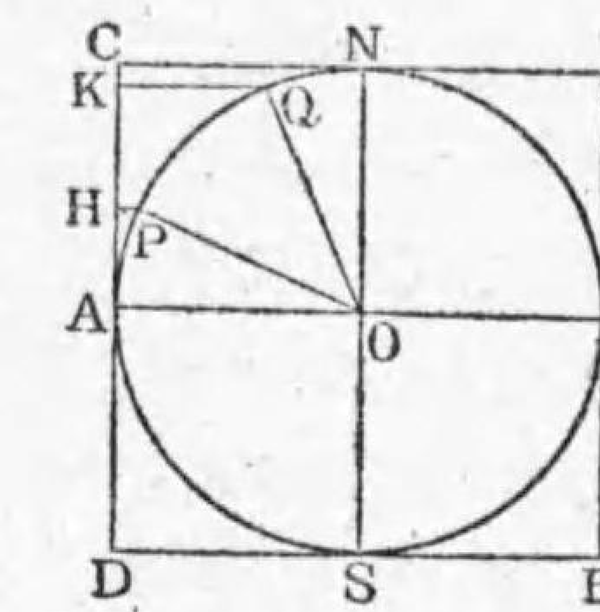
$$\sin POH=\frac{P'H'}{OP'}=\frac{3}{4},\ \tan HOA=\frac{AH'}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求める事ができる．これを系統的に敎へるのが球面三角法である．

問題 3. 熱帶と溫帶と寒帶との面積の比如何．

解 球面の面積に關しては「球面の面積は外接圓壔の側面積に等し」と云ふ定理があるが，その證明に於て見られる如く，「球面圖形の面積はその外接圓壔の側面上への，軸と直交する直線による投影の面積に等し」と云ふ事ができる．

之を本題について見るに，球とその外接圓壔とを軸を含む平面で截り，截口の圓を O，外接正方形を CDEF とする．正方形の邊の切點を結ぶ直徑を AB, NS とし，之を赤道の斷面及び地軸と考へる．$\angle AOP=23.5°$, $\angle NOQ=23.5°$ なるやうに P, Q を圓周上にとれば AP は熱帶，NQ は寒帶の部分を表す．P, Q から CD に垂線 PH, QK を下すとき，球の AP, NQ の部分の面積は外接圓壔の側面の AH, CK の部分の面積に等しく，その比は AH, CK の比に等しい．故に熱帶，溫帶，寒帶の面積の比は



（第 40 圖）

$$AH:HK:KC \fallingdotseq 10:13:2$$

又は　　$=\sin 23.5°:\sin 66.5°-\sin 23.5°:1-\sin 66.5°$

である．寒帶の面積が意外に小さいのを感ずる．

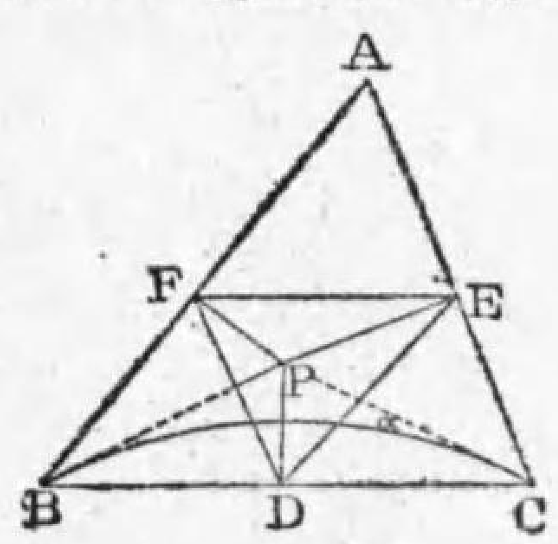
45. 雜　　例

最後に幾何の問題中，特殊の注意を引くものを二三擧げて本章を結ぶ．

問題 1. 與へられた三角形 ABC 內の一點 P から BC, CA, AB に下した垂線の足を D, E, F とする時，$\triangle DEF$

が鋭角三角形なる爲にPのあるべき範圍を求む．

解 Pのあるべき範圍は問題の性質上一つの線の上ではなく，或る面積を持つた平面形の內部全體と云ふやうな事になるであらう．かやうな場合にもこの範圍はPの軌跡と云ふ事ができるが，こゝでは普通の線になる軌跡と區別する便宜上，之を軌跡と呼ばないでおく．軌跡問題とこの種の問題との關係は，代數に於ける方程式と不等式との關係に當るもので，この事は座標を用ひ，これらの圖形を式で表さうとすれば，方程式及び不等式を得ることを考へれば更にハツキリする．範圍の限界となるものは軌跡である事も，不等式の限界を與へるものが方程式である事と同樣である．それ故先づその限界たる軌跡を考へるもよいが，併し推論に當つては，不等式の取扱ひに於て不等號をどこまでも守つて行つた如く，「何は何より大なり」とか「この圓の內側にあり」とか云ふ言葉使ひを正確に用ひる事を忘れてはならない．



(第 41 圖)

さて $\triangle DEF$ が鋭角三角形なる爲に先づ $\angle D$ が鋭角なる事を考へる．垂線と云ふ性質を生かして P,D,B,F が同一圓周上にある事に着眼し，PB を結んで見ると

$$\angle PDF=\angle PBF.$$

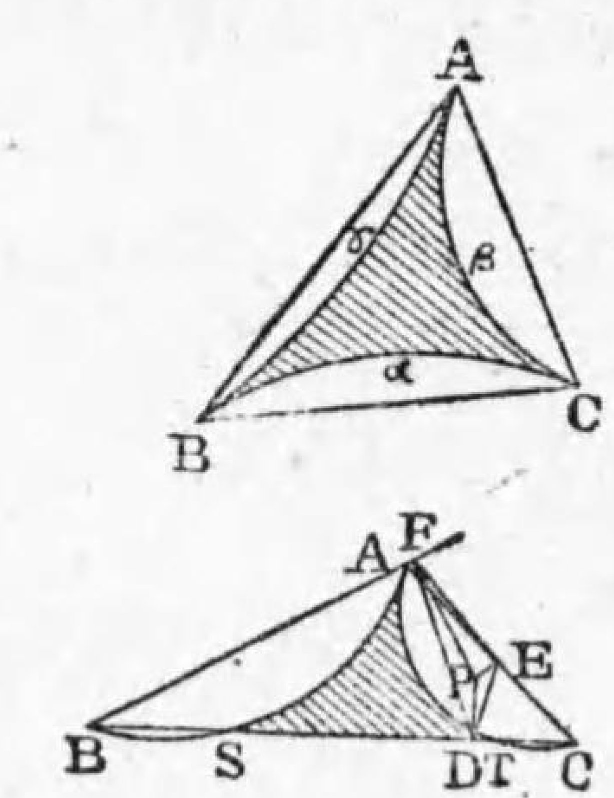
同樣に $\angle PDE=\angle PCE.$

この二角がわかれば之と $\angle BPC$ との間に關係がつく．

$$\angle BPC=2\text{直角}-(\angle PBC+\angle PCB)$$

$$=2\text{直角}-\angle B-\angle C+\angle PBA+\angle PCA$$
$$=\angle A+\angle EDF$$
$$<\text{直角}+\angle A.$$

$\angle A$ が鈍角又は直角の場合には $\angle EDF$ は常に鋭角である．$\angle A$ が鋭角のときは $\angle BPC$ は $\angle A+$直角より小さいから，BC を弦とし此の角を含む弓形の弧 α を作れば，Pはこの弓形の外になければならない．この弧 α はB及びC が鋭角ならば三角形內にあり，これが $\triangle DEF$ が直角三角形 ($\angle D$ が直角) となる時のPの軌跡である．鋭角三角形の場合にはかやうな弧が他にも二つ (β,γ) 出來てその外部にある圓弧三角形の內部が求むる範圍である．これらの圓弧は頂點に於て切して居るので，圓弧三角形は尖つた頂點を持つて居る．鈍角三角形の場合，例へば $\angle A$ が鈍角ならば β 及び γ は BC をきるので此の點を S,T とすれば SAT なる圓弧と線分 ST の三角形の內部が求むる範圍である．此の場合，線分ST は $\triangle DEF$ が直角三角形となる爲の限界ではなく，Pが三角形內にあると云ふ爲に起つた限界である．又 $\angle A$ が直角なら S,T は B,C と一致する．尙何れの場合にも此の範圍はその周邊を含まない．



(第 42 圖)

この證明に於て圓周角に關する定理をたくさん使つて居る．此の定理が實に厄介なも