定の位置に物體が在りて、平面 V の方に動きしとせば、此物體に作用する力を起したりとすべき媒質は物體に仕事 Ph をなせりとすべし。之を次の如く表はす。物體の A 位置に於ては媒質は仕事能即ちエネルギー

$$U=Ph \qquad \text{(10)}$$

を有す。

此大さは物體の位置に關係せる故に、之を位置のエネルギーと名く。又屢物體自身が此エネルギーを有すと云ふ。此云方は完全に正確ならざれども、所謂媒質を考へざらんと欲する故に之をなすなり。

是に又一一四節の規則を適用す。物體が落下し、然れども未だ平面 V に達せざるときは媒質がなしたる仕事は其エネルギーの減少に等し。即ち初め高さ h にして次に h' なれば、落下の高さは垂直方向に $h-h'$ なり。斯くして(一二〇節 d) 仕事は $P(h-h')$ にして、物體が一位置より他へ如何なる線に沿て移れるかに無關係なり。位置のエネルギーは始め Ph にて次に Ph' にて表はさるゝ故に、實際に重力の仕事は位置のエネルギーの減少に等し。

此規則が $h'>h$ なる場合、仕事並に位置のエネルギーの減少の負なる場合にも適用せらるゝことは更に言を俟たず。

今尚從來述ぶる機會なかりし若干の點に注意すべし。此章の初に於て、一物體が或る最初の狀態より或終の狀態に移り行けるときになせる仕事は其エネルギーの減少に等しきことを述べたり。是に依てエネルギーは各狀態に於て一定の値を有することを考ふ。今一狀態より他へ遷移するに種々の仕方に之をなし得べし、即ち種々の中

間狀態を經過し得べし、之を遷移が種々の道に於て起り得と云ひ表はすべし。然れば上述の定理は物體の仕事が始と終との狀態を同じくせる諸變化の各連續に於ては皆同一値を有すと云ふ場合にのみ意味を有す。此の如くならずして仕事が一の道にて A なる値、他の道にて之と異れる A' なる値を有すとせば、始の狀態と終の狀態とのエネルギーの差は A に等しとすべきか、又 A' に等しとすべきかを知らざるべし。然れば一定の仕事能と云ふものを云ふを得ず、又同樣に仕事能の保存の原則なるものも云ふを得ざるなり。何となれば此法則は自明のものならずして、却て觀察より導ける定理、即ち一物體が一狀態より他の狀態への遷移に於てなせる仕事は常に經過せる中間狀態に無關係なりと云ふに基けばなり。

壓縮せる發條又は膨脹せる氣體の如き、又重力の作用せる一物體の變位に於ても遷移の起り得る種々の道に就ては何等云ふ所なし。故に是に於て仕事は如何なる中間位置を物體が占むるか、又如何なる狀態を媒質が經過するかに無關係に定めらるゝことを明かに示したり。後者に關しては物體の位置が媒質の一定の狀態に相當する樣に考へざるべからざるを注意すべきなり。

他の尚注意に値するは物體を落下せしめたるとき其達すべき V 平面の選擇の事なり。選擇が不定にして、例ば其上にて實驗をなせる机面の代りに、室の床、又は尚低き平面を選み得べき故に、エネルギー U の値に不定生ず。又勿論此の如くなるべきなり。何となれば此大さは媒質が或一定せる限界に至るまでの運動に於てなし得べき仕事を表はすものにして、恰も發條が一定の長さまで壓縮する際になす仕事を考へ、悉く延び盡せしまでの仕事を考へざるが如くな

るを以てなり。

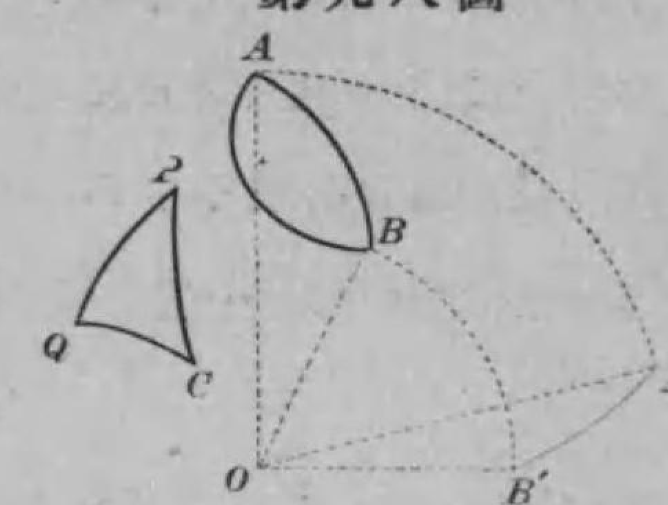
平面 V は物體が尚其下に至り得る樣に選み得べし。此場合に於ては平面よりの物體の距離を一負量として見、又位置のエネルギーとして重量と此負なる距離との積を考ふべし。今「仕事能」の量が負なる事は稍異樣に聞こゆべし。然れども實際に物體が平面の下に在れば、此平面へ變位するに於て重力は負の仕事をなすべきに依り少しも否むべき所なし。又此の如く平面を選めば、上方又は下方への變位に於て重力の仕事は位置のエネルギーの減少（代數の規則に依り計算したる)に等しと云ふ定理は存續す。

以下の諸節に於て位置のエネルギー或は所謂伏在エネルギーの概念を尚若干の他の場合に擴張すべし。是に於ては前述のもの多くは僅に變ずれば繰返し得べきは容易に知り得。今前述に續け、一般に諸物體の一系のエネルギーを如何樣に定義し得べきかを示すべし。此爲には系が占め得べき凡ての狀態の中より一定の狀態を選び此と他の凡てを比較すべく、之を「零狀態」と名け、文字 N にて記すべし。任意一狀態 A に於ける系のエネルギーは此狀態より零狀態に移れるときに其の爲す仕事にて定め得。又 U が此エネルギーにて、U' が或他の狀態 A' に於けるエネルギーなれば、$U-U'$ は A より A' への遷移に於ける仕事なり。何となれば U は系が A より N への凡ての遷移に於て系がなす仕事にして、即ち始め A より A' に、次に A' より N に行ける場合の仕事なるべければなり。A より A' への遷移の仕事の量は U の大さより系が A' より N に至るになす仕事即ち U' 丈減じて見出さる。

一二七　一固定點に引かるゝ一物體に於ける位置のエネルギー

(Energy of Position of a Eody, which is attracted from a fixed Point.)　O（九八圖)を固定點とし引力の大さが O よりの距離に關係すとす。仕事は例ば A より B への一變位に於て之等の點の位置が與へらるれば直に完全に定めらるゝ事を證明し得べし。即ち仕事は A 及 B 間の凡ての道に就て同樣なり、圖中には道二個を示せり。

第九八圖



又仕事は變位の唯始と終とに於ける O よりの距離に關係せることを證明し得べし。物體が或場合に道の一つ AB を行き、他の場合に $A'B'$ の道を行きたらば、是等二個の場合に於ける引力の仕事は $OA=OA'$ 並に $OB=OB'$ なれば互に相同じ。

今一任意位置 C を選む、其の O よりの距離は觀察せる諸運動に於ける O よりの距離が決して OC より小ならざる樣に選むを最適宜とす、又之を一度選めば問題の間に於て變化せられざるものとす。物體が任意一位置 P に於て有せる位置のエネルギーとして P より C への一變位に於て引力がなし得べき仕事を考ふ。

引力が O 點に近づくことに於て一の正の仕事をなす故に、位置のエネルギーは物體が O 點より遠かる程益大なり、O より等しき距離に在る凡ての位置に於ては同大なり。

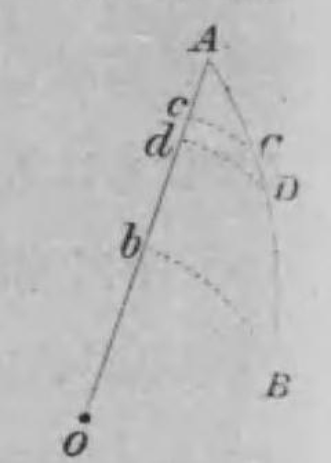
U_p を P 點に於ける物體の位置エネルギーの値とし、U_q を Q に於ける其値となす。然れば U_p-U_q は P より Q への變位に於ける引力の仕事なり。即ち、始に物體を P より Q に、次に C へ動かしめ得べし。然れば PQC の道全體に於ける仕事は U_p なり、

QC の道に就ては U_q なり、PQ の道に就ては是等二値の差にて與へらる。

斥力に就ては凡て前述の事を少しく變じて適用し得べし。然れども此場合には C 點は物體の運動の間其距離が OC より決して大ならざる樣に選むを最可とす。

上記の定理の證明。物體が A より B に(九九圖)動き、第二の物體が O より同じ法則にて引かれて直線 AO 上に動き、各瞬時に於て O よりの距離第一の物體に同じとす。CD は AB の一極微部分なり、又 $Oc=OC$, $Od=OD$, $Ob=OB$ とす。CD の道に於ける仕事は cd の道に於けると同一なるは容易に證明し得、是により AB の全道程に於ての仕事は Ab に於けると同大なり。後者に於ける仕事は唯だ OA 及 $Ob=OB$ の二距離にのみ關係すべし。

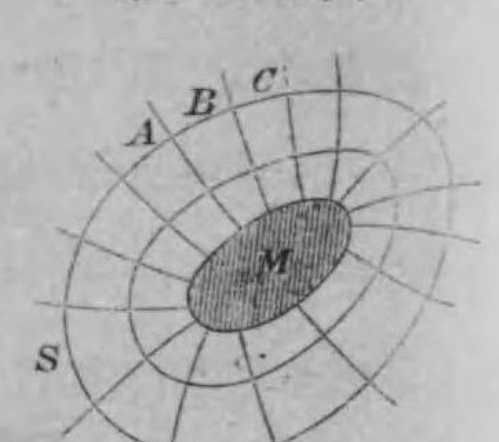
第九九圖



此等の觀察に於て AB 線は一平面に在るを要せず。

一二八 任意一固定系に於ける引力又は斥力 力界 力線及平衡面 (Attraction or Repulsion by any fixed System. Field of Force. Lines of Force and Level Surfaces.) 今一質點が九八圖に於ける如く單一の點 O のみならず任意數多の諸點相集り一系 M (一〇〇圖) を成せるものより引かると考ふ。點の變位と共に之に作用せる全力(一二六節)の仕事は各引力の仕事を個々に計算し、其代數和を作りて見出す。故に或位置(九八圖の O 位置に相當せる) を取り點が夫より遠かり動き得らると考ふれば、點は其實際に占むる各位置に於て位置のエネルギーを有し、そは之を牽引せる諸點の各に關して有する位置エネルギーを取り夫等を加へて得

第一〇〇圖



るものなりと云得べし。各變位に於て力の仕事はこゝにも亦位置のエネルギーの減少に等し。

一質點が或空間にて占め得る凡ての位置に就て之に作用せる力が與へらるれば、何處に於ても此力の方向を有する樣なる一線を畫き得べし。

即ち任意一位置に就て動點を其無限小の道の出發點に於て之に作用せる力の方向に動かしめ得べし。然れば始めと稍異なれる或他の力が之に作用せる一位置に至る。此力の方向に又第二の無限小の變位を之に與へ得べし。第三の變位は更に新に變せる力の方向に起るべし。此の如く進めば力線と名くる一の線を得。此の如き線が引かれ得べき空間を力界と名く。

一〇〇圖に於ては M の方に引きたる種々の線が力線を示せり。

動點を A よりして或無限小の道丈、力線に直角に經過せしむれば、力は何の仕事もなさず。斯くして位置のエネルギーは不變なり。此の如き一變位を力線に直角なる種々の方向に於て得べきが故に、無限小の一平面ありて、其各點に於て位置エネルギーが A に於けると同じ値を有するもの存在するを知る。動點が此極微部分を過ぐれば點は恰も之を過ぐる力線に直角なる方向に進むべし。即ち一表面に於て、力線は其表面の各點に於て直角に之を切り、又各點に於て位置のエネルギーが同一の値を有する樣なるを得べし。

一〇〇圖には牽引する質量を圍める此の如き表面二個を畫けり。勿論最外側のものに於て位置エネルギーは最大なり。

此等表面の一が或る固體物質より成り、動點が此表面上に置かれたりとせば、點は之に作用せる力に依りて變位せられざるべし。故

に此表面を平衡面と云ひ、又水準面と名く。觀察の下に在る諸力に作用せられたる流動體が此の如き表面に依りて限られ得べければなり。

個々の引力點 O の周りの空間に於ては此等の表面は O を中心とせる球なり。力線は直線にして O の方に向けらる。

僅小の偏倚を除けば地球を圍める重力の力界にも同様なること適用せらる。小なる廣延の一空間に於ては、例ば吾人が實驗を行へる室の如きに於ては、力線は平行なる直線として、又水準面を此等の線に直角なる平面として、又力は凡ての點に於て同大として觀察し得べし。

此の如き性質の力界は等質なりと云ふ。

前述の事柄を僅に變ずれば、又斥力の作用せる場合にも之を適用し得らるゝなり。

一二九　相互に引き或は斥くる諸質點の一系に於ける位置のエネルギー (Energy of Position of a System of Material Points, which attract or repel each other.) 此の如き一系の位置と云ふは凡ての點の位置を考ふるなり。故に其系の位置を定むるには各點の位置を示さゞるべからず。こゝに又諸力の仕事は唯始の位置と終の位置とにのみ關係することを證明し得べし。

可能なる凡ての位置の中より一を選出し、之を文字 N にて記し、之に他の凡てを比較すべし。其系が任意の一位置 A より N の位置に移り行くときに諸力がなし得る仕事を A の位置に於ける位置エネルギーと名く。

今 A' を第二の任意位置とせば、系は此にも亦一定の位置エネル

ギーを有す。A より A' へ移り行くとき諸力のなせる仕事は位置エネルギーの減少に等し。

諸質點が互に相引けば、諸點の距離互に遠かるに從ひ、位置のエネルギーは益大なり。諸力が反撥的なれば、距離と共に位置エネルギー減少す。

又今述べたる場合に於て、引力或は斥力を媒質の作用に歸せしむれば、位置エネルギーは此媒質のエネルギーとして考へざるべからず(一二六節參照)。

一般に一系の各點は他の凡てより或は少くも其若干より引かれ或は斥けらる、然れども仕事を定むるとき(一二一節)同一點に働ける種々の力を始に合成するを要せず。各二點は等しくして反對なる力を相互に作用せる事を利用し得べし。仕事を定むるとき此の如き力各對を直に合成し得べし。無限小の時間の内に、二點が AA' 及 BB' (一〇一圖)の變位を受け、又此間不變なりとし得べき引力が F なる値を有すとすべし。AB に直角に $A'C$ 及 $B'D$ を引けば、B が A に作用せる力の仕事は $F\times AC$ なり、A が B に作用せる力の仕事は $F\times BD$ なり。此等の式の和は

第一〇一圖

$$F\times(AC+BD)=F\times(AB-CD)$$

無限小なる變位を觀察すとせば CD と $A'B'$ との差は AC 及 BD よりも遙に小なり、故に之を省畧し得べし。從て仕事は

$$F\times(AB-A'B')$$

なり。即ち一極微時間内の仕事は唯力と諸點間の距離の受くる無限小の變異とにのみ關係す。又此 A 點が靜止し、他點が是に一直線上に於て近き來り、此極微時間の前後に夫等の距離が實際の運動に於けると同様なりとする場合にも亦仕事は上記と同大なるべし。

無限小なる時間より有限なる時間に移れば、A 點及 B 點の變位が如何なりとも、此等の相互の力の仕事と B より A への或は反對に A よりの直線上の運動に於ける仕事

とは、若し後者に於て A を固定し、距離が實際の運動に於けると同様なる變化をなすものとすれば、同一なり。後者に於て A 及 B 間に作用する力の仕事は唯だ距離 AB の始値と終値とにのみ關係す。是よりして直に全系に於て凡ての仕事は唯系の始位置と終位置とにのみ關係するを知る。

又是により位置エネルギーに就て與へたる定義の可能なるを示し得。P 位置より Q 位置に移り行くときに爲す仕事 A は、是等の位置にて位置エネルギーが U_p 及 U_q の値を有すとせば、次の如くにして見出さる。初に P より Q へ、次に Q よりして他の凡てを比較すべき位置へ運動せしむれば、其仕事は $A+U_q$ 又は U_p にて表はさるべし。即ち是に依りて $A=U_p-U_q$ を得。

一三〇　エネルギー保存に就て尚他の例 (Further Examples of Conservation of Energy.)

更に說明の爲、尚若干の特別の場合を精細に觀察すべし。

a)　質量 m, 重量 P なる一物體が既に垂直に上方に一速度 v を有し、是へ此重量よりも大なる一力 K を此の上方向に作用したりと假定す。然れば物體は一樣なる加速運動を得。h なる高さに昇りたる後、速度 v' を得ば、合成力は $K-P$ なるが故に

$$(K-P)h=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2$$

即ち

$$Kh=Ph+\left(\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

此方程式に於て Kh は實驗者に依りてなされたる仕事にして、又其エネルギーの減少に相當す。此仕事は位置のエネルギーの增加 Ph (換言すれば媒質のエネルギー)に運動エネルギーの增加を加へたるものに等しきを知る。

上昇の間に速度が不變なるか或は夫れが各瞬時に於て(11)に於ける終りの項を省略し得べき程小なりとすれば、上昇に於てなされたる仕事は積 Ph に等しと云得べし。是よりして又此場合に於て各瞬時に $K=P$ と置き得べきことを知る。

同様なる注意は他の場合にも亦適用す。例ば一の螺旋發條を延長するに要する力(一一五節)が各瞬時に於て張力に等しと云へば、其延長は甚遲緩に行はるゝことを暗に假定せるなり。發條が初め靜止せば、嚴密に云へば張力よりも稍大なる一力を作用せしめざるべからず。然れば、爲せる仕事は發條が其延びの爲めに得るエネルギーよりも、更に此針金の各微部分に與へたる運動エネルギーに相當する量丈大なり。

b)　アットウッドの落下機械の實驗に於ては九四節にて知れる如く、加速度は

$$\frac{P'-P}{P'+P}g$$

なり。

今運動が t 秒時間續き、錘が初速度を有せずとせば、終速度は

$$\frac{P'-P}{P'+P}gt$$

にして、從て兩個の錘の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}(m+m')\left(\frac{P'-P}{P'+P}\right)^2g^2t^2\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

なり。

經過せる距離は

$$h=\frac{1}{2}\,\frac{P'-P}{P'+P}gt^2$$

なり。即ち (12) の代りに

$$(P'-P)h$$

と記し得べし。

此式は又實際に一錘の位置エネルギーが他錘の增加より以上幾何減少せざるべからざるかを示せり。

c) 自由に重力の作用の下に動ける、或は不動の滑なる一表面上に下り又は上れる一物體に於ては、運動及位置のエネルギーの和は不變なり。 不變長の絲にて一定點と結ばれたる物體にも亦同樣なること適用す、即ち絲のエネルギーは變せざるなり。 一の振子に於ては絕えず位置エネルギーより運動エネルギーに、並に其逆の遷移行はる。

太陽の周りに橢圓に動ける惑星に於ても亦同樣なり。軌道上太陽に最も近き點に達するとき每回、位置エネルギー最小にして、運動エネルギーは最大の値を有す。

d) 簡單振子を或る高さにて放ち、一の棒を振動平面に直角に、且絲が平衡位置に達したるとき之に出會ふ樣なる位置に置けりとす。棒が不動なれば、振子の球は絲が棒に出會ふ點を中心とせる圓弧上に元の高さまで上る。振子が棒に何の仕事もなさず、同じエネルギーを保存する故に、此の如くならざるべからず。

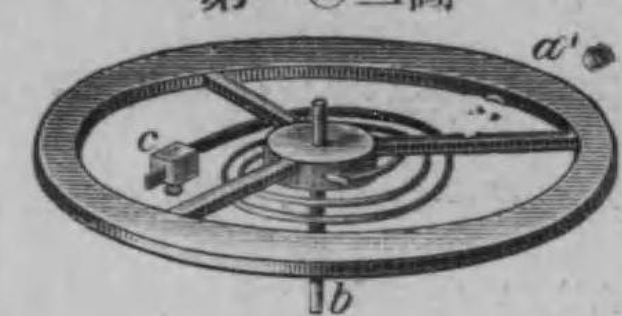
之に反し棒が絲に會ひしとき退けられしとせば、球の上昇する高さは稍減ずべし。 逆に棒を絲の運動の方向に反對して移動せしめば、先よりも一層高く昇るべし。此場合には振子に仕事をなし、即ち其エネルギーを增大したるなり。

e) 一彈性體の諸微部分を其等の平衡位置より動かして之を放てば、夫等は加速運動をなして戻る。 其爲に夫等は最初の位置を越え、今反對の方向に作用せる諸力によりて運動の方向が轉ぜらるゝまで進むべし。物體は斯して振動をなす。是に於てエネルギーの大さは不變なり、然れども物體が平衡の位置を過ぐるときに運動のエネルギーを有し、最極端の位置にて變形に相當せるエネルギーを有す。

後に若干の是等の振動運動に就て詳細に論ずべし。今は時計仕掛に於て、發條によりて一動子が往復運動を得ることを擧ぐべし。

一小車 a (一〇二圖) が b 軸の周りに廻轉し得とす。此車は發條の內端に固定し、又發條外端は c に固定せり。車が廻轉に依りて其平衡の位置より或角度丈動かさるれば、發條の彈性の影響に依りて廻轉的振動を生ずるなり。

第一〇二圖



f) 二個の相等しく完全に彈性的なる球が等しくして反對なる速度にて衝突せば、其接觸の間に接觸點は同じ位置に止る。 一球が他球に何の仕事もなさず、即ち各球は其有したるエネルギーを持續す。唯變形が起れる間遷移あり、元來の運動エネルギーは變形のエネルギーにて置換せらる。

一三一 エネルギーの一種類としての熱 (Heat as a Kind of Energy.)

氣體の膨脹に依て仕事がなさる、此膨脹は氣體を或熱體と接觸せしめて生じ得らる。此場合には爲されたる仕事の根源を後者の狀態の中に認むるを得べし。他方に又屢一物體に仕事がなされたるとき、其受くる狀態變化は熱を受くるに在ることあり。 既記の如く、氣體を壓縮すれば此の如きことあり。 又他の例としては二物體を互に摩擦して其の熱せらるゝは人の熟知せる現象なり。 最後に、一物體が既述エネルギーの諸種類の一を有し、之を或現象に於て失ひ、然れども同時に熱せらるゝ事屢あり。 是は二個の相衝突せる

物體が其の「完全に彈性的」(一一七節)ならざる爲に、衝突後先に計算したる(一一八節)よりも小なる速度を有する場合例ば槌を屢一金屬塊上に落下せしめたるとき、或は一球を大速度にて金屬板に打ちたる如き場合に於て常に之を認むるなり。

既に皮相的觀察に於て一物體は熱せらるゝ程大なるエネルギーを有すと云ふ觀念に至らしむべき多くの現象あり。是等が此考察はエネルギー保存の法則を一般に適用すと識認するに導き得ることを確らしとなせしなり。又十分に熱せられたる物體が光を發すと云ふ事實も此考を强めしなり。即ち光の現象の研究に依り或振動的運動が物體より發することを示せり。是は物體内の不可視の微部分の振動に依りて剌戟せられしものにて即ち物體内に此振動の運動エネルギーが存在せりと容易に考へしむるなり。

熱はエネルギーの一の形なりと云ふ理論は通常「力學的」熱理論と名けられ、既に久しき以前より若干の物理學者は之を想定したり。然れども熱が一の物素なりと云ふ考は、十九世紀に於て初て新見解の爲に全く排棄せしめられしなり。又實に今までに述べたるエネルギーを力學的エネルギーと名くるに、其の消滅或は發生が之に比例せる熱量の發生或は消滅と結合せることを證明したる後に於て然るを得しなり。之を證明せる實驗は今直に學ぶべし。

一三二 溫度 寒暖計 (Temperature. Thermometer.) 觀察によりて、一般に物體は熱せらるゝ程大なる容積を占むることを知る。寒暖計は熱に依りて起る容積の小變化を觀察し得る一物體なり。普通の水銀寒暖計は既知のものとし、又之にセルシウスの度盛を用ゐ、即ち寒暖計が融解しつゝある氷.並に標準氣壓(水銀 760 粍)の下

に沸騰せる水の蒸氣の中に入れたるときに、水銀の達する二點に 0 と 100 との數を附せるものと假定すべし。寒暖計の讀みを示さんとするとき、必要なる場合には文字 C を度の數の次に記してセルシウスの度盛を用ゐたるを表はすべし。

寒暖計の管の中の水銀の位置は寒暖計自身の溫度を示す。同樣に他の或物體に於て溫度を容積によりて判定し得べし。然れども亦種々の物體の溫度を相互に比較し得。即ち二物體 A 及 B が互に接觸せらるれば三個の相異れる場合を區別し得べし。或場合には A が收縮し、B が膨脹す、然れば A が B に熱を與へたること疑なし。此場合に A は B よりも高き溫度を有したりと云ふ。又其反對も可能なり。第三に、物體が接觸の後にも其前の狀態と同樣なることもあり得べし、此場合に夫等は同一溫度を有したりと云ふ。

任意に數多の物體が與へられたるときに、其各二個を前述の方法に依りて研究し得べし。斯して之等を凡て其溫度の順に從ひ並ぶることを得べし。即ち各物體は、列中低き他の物體と接觸せしむれば、之に熱を與ふべし。物體の或群が夫等の二個を互に接觸せしむるも何等熱を交換せざる樣の性質を示す場合もあり得べし。然れば其群の凡ての物體は列中同じ位置を占めざるべからず。

今凡ての物體の溫度を一定の度盛にて與ふる爲には、夫等各個を水銀寒暖計に觸るゝを以て足れりとす。後者が一定の狀態を占めたるとき、其溫度は物體と同一なり。嚴密に云へば、物體が甚大ならざれば、其溫度は恰も寒暖計との接觸に依りて少しく變じ得べきことを注意せざるべからず。

種々の寒暖計の讀みが同じ狀態の下に不同なるあるは重要なる意

味を有せず.此章に於ては一般に之を考の外に置くべし。

一三三　熱量　熱の單位 (Quantity of Heat.　Thermal Unit.) 前述に依りて一物體の溫度は、此物體を他と共に置けば、是に熱を與ふるか或は逆に是よりして熱を受くるかを定むる一の量なることを知る。他の問題は幾何の熱を是が失ひ或は受くるかなり。即ち又熱の本質に就て何等の假定をなさずして熱量の大小に就て述ぶるを得るなり。直に明なるは、溫度を益高めんとするに從ひ、物體に益多くの熱量を導入せざるべからざること、並に同物質の種々の量が同じ丈溫度を高むるに要する熱量は質量に比例することなり。

熱量の單位としては一瓩の水を $15°C$ より $16°C$ まで暖むるに要する熱量を選ぶ。此熱量を 1 カロリーと名く。又往々是れの千倍が單位として用ゐらる(大カロリー)。

一三四　一量の水の種々の溫度上昇に要する熱量 (Quantities of Heat, which are required for different Rises of Temperature of a Quantity of Water.) 今先づ一物體が一定の溫度上昇を受くるに是に或量の熱を導入せざるべからざれば、夫が最初の溫度に戻るには同大の熱量を放出せざるべからざること、並に又異れる溫度の二物體の接觸に於ては全熱量が不變にして、即ち一物體が他の物體の失ふと同量の熱を受入るゝことを考ふべし。尙又 $t_1°$ の溫度の水 m_1 瓩と、$t_2°$ の溫度の m_2 瓩とを互に混じたりと假定すべし。混合物の終の溫度を $t°$ とす、又 $t_1>t_2$ とす。

w_{t,t_1} は 1 瓩の水を $t°$ より $t_1°$ へ熱するに要する熱量、即ち溫度が $t_1°$ より $t°$ に下るときに一瓩が放出すべき熱量とすべし。同樣に 1 瓩を $t_2°$ より $t°$ に熱するに要する熱量を $w_{t_2,t}$ にて記すべし。

今熱き水が冷き水の得たる丈の熱を失ふことを表はせば次の如し。

$$m_1 w_{t,t_1} = m_2 w_{t_2,t}$$

即ち

$$w_{t_2,t} : w_{t,t_1} = m_1 : m_2$$

故に實驗よりして 1 瓩の水の種々の溫度上昇に要する諸熱量の比を知り得べし。

此原則に依りて行はれたる實驗及又他の研究は 1 瓩の水が相次げる同じ溫度上昇に就て殆同大の熱量を加へざるべからざるを示せり。又他の物質に就ても同樣の事適用す。上記の同じ溫度上昇に就て要せらるゝ熱量が精密に等しかりしならば前述の場合に於て熱き水は $m_1(t_1-t)$ カロリーを與へ、冷き水は $m_2(t-t_2)$ カロリーを受入るべし。兩式を等しとすれば終溫度に就て次の値を得。

$$t=\frac{m_1t_1+m_2t_2}{m+m_2},$$

若し $m_1=m_2$ なれば

$$t=\frac{1}{2}(t_1+t_2).$$

1 瓩の水の溫度を $1°$ 丈高むるに要する熱量は實際には其初溫度に關係す。$20°$ 及 $30°$ の間に於て最小なり。最近の研究に依れば上の如くカロリーを定義すれば $0°$ より $1°$ に熱するに於て殆 1,01 カロリー又 $99°$ より $100°$ に熱するに殆 1,04 カロリーを要するなり。

次に於ては水並に他の物體に於て相次げる同じ溫度上昇に就ては毎回同量の熱を加へざるべからずと假定すべし。

一三五　熱量計 (Calorimeter.) 水の或る既測の量を有せる一器に、感じ良き寒暖計(十分一乃至五十分一度まで目盛したるもの)

を入れ、熱量を測るに用ゐるものを熱量計と名く。此目的には熱を水に與へて其温度上昇を測らざるべからず。此仕方にて例ば電流に依りて金屬線に發生せる熱は其金屬線を熱量計の水中に入れて之を測り得べし。力學的仕事に依りて生せる熱、或は水中に螺旋狀に卷ける管を入れ、管中に若干の蒸氣を導き、此蒸氣の液化によりて生ずる熱も亦同様に測り得べし。

熱量計より熱を取出す實驗もなし得らるゝなり。其量は水の量及温度降下によりて見出さる。

此の如き實驗の例としては單位質量の氷を融かすに要する熱量の測定を擧げ得べし。

一三六　氷の融解熱 (Heat of Fusion of Ice.) 一器中に或量の氷ありて、其温度 0° 以下に在りとす。此器に熱を導き、之を一様に全質量に分配せしめば、温度が 0° 以上に昇るまでは氷は、少しも融けざるべし。0° に達すると共に、絶えず熱の増加ありつゝ融解始まる。然れども凡ての氷が融け終るまでは温度は 0° に止る。

同様なる現象は凡ての融解物體に於て觀察せらる。一固體一瓩を既に融解點まで熱したる後、之を同温度の液體に變ずるに要する熱量を其物體の融解熱と名く。

氷に就て此熱量を見出すには熱量計中に 0° の乾きたる氷の一塊、完全に水中に入り得る位の大さのものを入る。熱量計の終温度、水の重量及氷の重量よりして融解熱を算出し得べし。

是が 79,2 カロリーに等しきを知れり。

此數を知れば、種々の熱量は、夫が 0° の一氷塊に與へて幾何の氷を融かすかに依りて測り得らるべし(氷熱量計)。然れども次には前

節に云へる熱量計が用ゐらると假定すべし。

一三七　比熱 (Specific Heat.) 一固體或は液體の或る既測の量を取り、或温度 t_1 に熱し、其温度が熱量計の初の温度 t_2 より高しとす。今前者を後者に入れ、水と此研究せる物體との熱の交換が止める瞬時に於ける寒暖計の讀みを t とす。熱量計中の水の質量 m_2 瓩なれば其温度 t_2 より t に上りたる故そは $m_2(t-t_2)$ カロリーを受入れたるなり。從て同量の熱は此研究せる物體より與へられしものならざるべからず。物體の質量 m_1 瓩、其温度 t_1 より t に下れり。之を逆に t° より t_1° に熱するに要する熱量も同大ならざるべからず。是よりして

$$c=\frac{m_2(t-t_2)}{m_1(t_1-t)}\text{カロリー}$$

が此物體の一瓩の温度を 1° 丈高むるに要する熱量なるを知る。此數 c を物體の比熱と稱す。

又一物質の比熱は此物質一重量を熱するに要する熱量と、水の同じ目方を同じ丈温度を上昇するに要する熱量との比なりと云得。

比熱は研究せられたる凡ての固體及液體に於て一よりは小なり。例ば一量の水銀は一定の温度上昇に就て之と同じ目方の水よりも殆三十倍小なる熱量を要するのみなり。

「比熱」なる記號の代りに又往々熱容量なる言葉用ゐらる。是は一物體が其重さ恰も一瓩ならず、又等質の物質より成らずとも、其温度を 1° 丈上昇するに要する熱量を示すに用ゐらる。物體が等質にて、其質量 m 瓩、又其物質の比熱 c なれば、其熱容量は mc なり。物體が比熱 c_1 なる一物質 m_1 瓩、比熱 c_2 なる一物質 m_2 瓩等より成れば、熱容量は $m_1c_1+m_2c_2+etc$ なり。

此式は又同じ溫度上昇に就て物體に於けると同量の熱を要すべき水の量を示す、即ち此點にて物體と一致せる水の量なり。故に又上式を物體の水當量と云ふ。

熱量計の實驗に於ては常に水の溫度が變ずるのみならず、又同じ度に於て、熱量計の器、即ち普通眞鍮葉或は白金葉より成れる此水量の容器、又寒暖計、並に水量中凡て同溫度を與へしむる爲に要する攪亂棒等の溫度を變ずるなり。

是等は全熱量計の水當量を知れば計算に入れ得。即ち實驗の計算に當りて水の目方を此水當量にて置換するなり。

水當量は又觀察に入れる種々の物體の目方及比熱を知れば計算し得。又實驗的にも定められ得べし。讀者は容易に其方法を考へ得べし。

同樣に熱量計に於て、必要の場合には、水よりも他の液體が、若し其比熱の旣知なること假定せらるれば、用ゐ得らるゝは容易に知り得べし。後に氣體が熱量計的物體として用ゐ得らるゝことを學ぶべし。

一三八　熱量計と周圍との間の熱の交換　冷却の法則 (Exchange of Heat between the Calorimeter and its Surroundings. Law of Cooling.) 熱量計の測定に於ける誤謬の重要なる根原は、一物體が之を圍繞せる物體と溫度を異にせるときには、後者に熱を與へ又は後者より熱を受入るゝことに在り。熱が熱體より冷體へ移り行く仕方に就ては直に述ぶべし。今は唯だ等しき狀態の下に於て單位時間に移り行く熱量は、溫度の差が充分に小なる間は、此差に比例すと云ふを記載するに止むべし(ニュートンの法則)。一物體が或時

間內に周圍に與へ又周圍より受る熱量の大さは、物體に於て熱に依りて生じ或は滅する何の作用も起らざりしときには、實驗的に之を定め得べし。此爲には物體の一溫度を刻々に讀めば足れり。

一熱量計に就て之を用ゐる實驗の前後に於て上記の測定を行へば、其溫度が周圍の溫度よりも種々の高さに在る場合に、夫々幾何カロリーが例ば 1 分間に周圍に與へらるゝかを見出し得べし。此結果を利用して、器械が實驗の間に於て失ひ或は受入れたる熱量を推定し得べし。勿論此場合に實驗を行ふに要する時間を注意すること必要なり。

周圍の影響は斯樣にして計算し得らるれども結果の精細を得る爲には、稍大なる相對誤差が含まれ得べき樣の補正の僅少なること重要なり。故に周圍との熱交換は出來得る丈之を防がざるべからず。其他に現象は、唯小なる溫度差に於てのみ、簡單なる變化を有することも注意すべし。故に決して大なる溫度の差に於て實驗せず。

補正を小にする工夫の一は、實驗の半ばの間、熱量計の溫度を周圍より低くし、他の一半の間に却て高からしむるに在り。是に於て兩半の間の溫度差が同大なれば、補正を加へざることを得べし。

一三九　熱單位の力學的當量 (Mechanical Equivalent of Thermal Unit.) 是は一熱單位が消滅せるときに生ずる力學的エネルギーの量、又は逆に一カロリーを生ずるに用ゐざるべからざる力學的エネルギーの量を云ふなり。一三一節の終りに記せる實驗を今玆に記すべし、夫によりて此量は凡ての狀態の下に同大なること示されたり。力學的熱當量に關しては吾人は英國の物理學者ジュールの數年に亙れる研究を基とす、其最初の結果は一八五〇年に發表せられたり。

彼の用ゐたる方法の一を詳述すべし。

熱量計として用ゐる、水を充たせる眞鍮葉の一器中に、眞鍮製の一垂直軸ありて、是に十六個の翼が八個の異れる垂直面に置かる。軸は熱量計の蓋を貫きて、其上端は尚大なる一圓壔より成り、其の周りに二本の絲を卷き、絲は二個の落下する錘に依りて卷き戻さるゝものとす、其仕方の委細は玆に云ふの要なし。軸及之と共に全車翼は此仕方にて廻轉運動を得。此運動は、錘を放ちし後短時間にして、水の摩擦の爲に、不變の一速度を得べし。此抵抗を大にする爲に、熱量計中には若干の固定せる分壁ありて、夫に依り翼には唯僅に動き得る位の空隙を殘せり。研究の目的は、錘が受くる位置エネルギーの減少と熱量計中の熱の發生とを比較するに在り。

水中には或る任意の度盛の感じ良き一寒暖計あり。之をファーレンハイトの度盛(氷點 32°, 沸騰點 212°) の一標準寒暖計と比較して、12,95 度目が $1°F$ に一致せることを知れり。讀取りに於て度盛の二十分一まで定め得らるゝ故 $^1/_{200}°F$ まで觀察し得しなり。

用ゐ得し或高さ錘を一回落下せしめたるに、唯僅小の溫度上昇を生ずるのみなりしなり。故にジュールは各實驗に於て錘を 20 回落下せしめたり。絲を卷き付けたる圓壔と車翼の軸との連結を離し得べく、即ち之を一曲柄にて廻轉せしめて、車翼を共に動かしむることなく、絲を卷き上げ得べからしむ。

ジュールは熱量計及周圍との熱交換を出來得る丈小にせしむるため有ゆる注意をなせり。全體の裝置は地下室内に設け、其空氣の溫度の變化僅少とす。熱量計は之を載する木の机と僅の接觸點を有するのみにて、又軸は二部分より成り、木片にて結び着き、是等部分

間の熱傳導甚小なるものとす。最後に熱量計は木製の大衝立にて觀察者の體の熱輻射に對し防ぐ樣にせり。

凡て此等の注意に拘らず熱輻射及熱傳導の影響を定むること必要なり。依てジュールは既述の如く錘を 20 回繰返し落下せしむる各實驗の前後に於て、熱量計を放置し、其溫度が實驗其者の要する時間と同大の時間にて受くる變化を定めたり。此時間は 35 分なり。

ジュールは 40 回實驗を行へり。其結果よりして、1 瓦の水の溫度を $15°C$ より $16°C$ に高むるに之に與ふるを要する熱量は $416,0 \times 10^5$ エルグのエネルギーに相當せるを算出し得べし。

一四〇　ジュールの他の實驗 (Other Experiments of Joule.) 前述のと同樣なる實驗を、鐵の器に水銀を充たし、其中に鐵の翼車を廻轉して、試みたり。此實驗の第一回には前述の數に就て $416,1 \times 10^5$, 第二回には $417,4 \times 10^5$ を與へたり。

又水銀を充せる熱量計中に於ける鐵と鐵との摩擦を利用したり。是に依て數回の實驗の結果上記の單位に於て $417,8 \times 10^5$ 及 $416,7 \times 10^5$ を得たり。ジュールの其後の實驗(一八七八年)にて水を用ゐて $417,3 \times 10^5$ の値を得たり、之を彼の最後の結果と認め得べし。

種々の方法にて得たる結果の一致せるに依りて、實驗の方法が如何樣なりとも、消失せる力學的エネルギーの各單位に就て常に同大の熱量現ると云ふ結論を導き得べし。即ち實際に力學的エネルギーが熱に轉換すと云ふを得。

此推論をジュールは尙ほ他の實驗によりて確めたり。そは精密の度は小なれど全く方法を異にせるが故に玆に述ぶるの價値あり。即ち空氣の壓縮に依る溫度の上昇に關する實驗よりして $429,1 \times 10^5$, 及

狹き管を過ぐる水の流に於ける熱の發生に關する實驗よりして $414,1 \times 10^5$ を得たり。

一四一　ブルイの裝置 (Apparatus of Puluj.)　力學的熱當量を定むる此簡單なる裝置は、尖端を鈍くせる圓錐形の、小なる鐵の鉢二個の其一が恰も他の內に適合せる如きものより成る。外圓錐 A は垂直の一軸の尖端上に垂直の位置にて固定し、其幾何學的軸の周りに速に廻轉し得るものとす。是が內圓錐 B を摩擦に依りて共に動かさんとす。然れども B は一の力に依りて固定せられ、其力は測り得るものとす。B の上端は少しく A の上に出で、是に一半徑の延長上に水平に木の腕を固定す。此腕の端に絲を固定し、絲は水平の方向に又腕に直角にして一の滑車を過ぎ其自由なる端は下方に掛れるものとす。此端に錘 P ありて、A が廻轉すとも B が出來得る丈十分に靜止に在る樣に調整せらるゝものとす。內圓錐は水銀の一量を有し此中に寒暖計の球部を插入す。速に又任意に長時間廻轉せしめ得べき故に、容易に數度に上れる溫度上昇を得べし。(ジュールの諸實驗にては溫度の上昇は $^1/_2F$ を超ゆること大ならず。)

外圓錐と之を置く軸とは熱を導くこと遲き或物質に依りて分たるゝものとす。然れども適當なる觀測に依りて幾何の熱が周圍に與へらるゝかを定むるは必要なり。

此點に於て補正せる溫度上昇と鐵圓錐及水銀の水當量とよりして、發生せる熱の量を見出し得べし。爲されたる仕事に就ては實際に爲されたる仕事全體を定めざるを注意すべし。此の如き全體を見出すは便宜ならず。何となれば此等の仕事は二圓錐間の摩擦のみならず、垂直軸の支へらるゝ所に於ける摩擦に打勝つになせる仕事を

含めるが故なり。此所に幾何量の熱が發生するかは測定する能はず。實際に實驗の與件よりして演繹し得るは、二圓錐間の摩擦にのみ打勝つべき場合に、外圓錐を動す爲に要せらるゝ仕事なり。是が恰も測られたる熱量に相當せる仕事なり。

一軸の周りに廻轉せる一物體に一力作用し、力の方向が其作用點と軸との平面に直角なりとすれば、軸よりの作用點の距離を力の働く腕と名くべし。今二圓錐の一に作用せる此の如き力を、そが外圓錐の運動の方向或は其反對の方向に於ける廻轉を生ずるに從ひ、正或は負とすべし。

內圓錐には摩擦の爲に正方向の數多の力作用す。然れども是等は腕に於て作用せる負の方向の絲の張力にて釣合に保たる。此腕は容易に測り得、其長さを a とす。是に依り凡て摩擦より生ぜる諸力は正の方向に腕 a に於て作用せる一力 P に等しきことを知る。作用反作用の法則に依りて、內圓錐が外圓錐に作用せる諸力は上記と同じ腕に作用せる一負力 P に等しからざるべからず。即ち內圓錐を去り、木の腕を外圓錐に固定し又廻轉の間に腕の端に直角に且負の方向に一抵抗 P 作用せば、外圓錐は今內圓錐に於けると同じ强さにて止めらるべし。此抵抗に打勝つには同じ端に於ける一の正力 P にて十分なるべし。換言せば、二圓錐間の摩擦のみが作用せば外圓錐は腕 a に於ける一正力 P にて動かされ得べし。一廻轉に依りて力の作用點は $2\pi a$ の道を畫き、即ち仕事の大さは $2\pi aP$ なるべし。廻轉數を n とすれば所求の仕事は $2\pi naP$ なり。

一四二　ローランドの實驗 (Rowland's Experiment.)　ブルイのと同じ原理の下に、米國の物理學者ローランドは大なる割合に於て力

學的熱當量の研究をなしたり。其用ゐたるは殆 8 瓩の水を有せる熱量計にて、ジュールのと同様に裝置せらる。然れども車翼は一の蒸汽機關にて運動せしめられ、又熱量計自身は一の針金にて吊され、ブルイの內圓錐と同じ方法にて、此車翼の運動に伴ふことを妨げしめらる。斯樣にして大なる注意を用ゐたる測定の結果は、1 瓦の水を 15° より 16° に熱するに要する熱量は 419×10^5 エルグの力學的エネルギーに相當すとせり。此數はジュールの見出せるものよりは大なり。然れどもローランドは其差の原因を知ることを得たり。彼自身は溫度を空氣の膨脹に基ける一寒暖計の度盛にて與へ、又此方法は後に說明せる理由よりして精密なる實驗に大なる利あるものなり、然るにジュールは水銀寒暖計を用ゐたりしなり。是等の寒暖計に於ける詳細なる實驗によりて、以上の差の少くも其著しき部分は此理由に基かざるべからざるを示し、差の殘餘はジュールの實驗の精密度の比較的小なることに歸すべきを知れり。

故に熱單位の力學的當量は 419×10^5 エルグに等しと置き得べし。

一四三 熱の力學的エネルギーにおける變換 (Transformation of Heat in Mechanical Energy.) 凡て前述の實驗に於ては熱を他のエネルギーよりして生ぜしめたり。其逆が蒸汽機關に於ては行はる。ヒルンは此の如き現象に就て詳細なる硏究をなし、蒸氣が唧子を動かせる間に其のなせる仕事を測定し、又汽罐に於て水に依りて受取らるゝ熱量、並に蒸氣が水に凝化する際に於て生ずる熱量之等を定むるに必要なる材料を集めたり。上記の二熱量に於て後者は前者よりも實際に稍小なるを見出せり。兩者の差を仕事と比較して

若し大蒸汽機關に於ける複雜なる現象を實驗室內に於て特に簡單にせる狀態の下になせるものゝ如きと同じ精密度にて硏究し得れば、是よりして熱の力學的當量を計算し得べし。然れどもヒルンが其實驗よりして算出せる數は一四二節に與へたる結果とは著しく相違せり。

後に氣體の性質よりして力學的熱當量を測定することに就て述ぶべし。是はジュール及ローランドの實驗程には直接ならず。是よりしては熱が消失せる現象よりして、熱が生ぜる現象に於けると同樣なる値を見出し得る事の一新證明を與ふるなり。

一四四 エネルギー保存の法則の一般の適用 種々の見方 (Universal Validity of the Law of Conservation of Energy. Several Considerations.) 熱現象の硏究に於けると同樣に、他の物理的諸現象の硏究も亦常にエネルギー保存の法則を確證せり。既に一一四節に云へる如く各物體は一定量のエネルギーを有すと考へざるべからず。此量は容積、溫度及一般に其物體の狀態を定むる凡ての量に關係す。諸物體の一系に就ては其の各個に固有なるエネルギーに就て論ずるを要し、尙は其他に、媒質が物體に作用せる諸力に相當せる位置のエネルギー、嚴密に云へば媒質のエルネギーと考へざるべからざるものも加はるなり。一系が外の諸影響を避け得らるれば全くエネルギーは不變なるべし。之に反して、仕事が系の上に或は系に依りてなされ、或は之にエネルギーが加へられ或は減ぜらるれば、此全エネルギーは增し或は減ずるなり。是に於て此增加又は減少は、爲されたる仕事又は附加せる或は引去れるエネルギーの量と一致するなり。

觀察を進むるに從ひエネルギーの種々の「形」を學ぶべし。今次のものを考ふ。

a)　一系のエネルギーの諸變化を追隨せんとせば、常に一定の時間或は一定の過程を眼中に置かざるべからず。又エネルギーの法則を表はす方程式に於て、各項が一の仕事或はエネルギーを意味せざるべからざるを考へざるべからず。張力、抵抗、電氣量(後に示す如く)は此方程式の項として現はるゝ能はず、然れども張力又は抵抗の仕事、熱量、帶電體のエネルギーは然るを得。

b)　物體が全體として動ける場合に其有する運動エネルギー並に重力の如き諸外力に相當せる位置エネルギーに對して、物體が尙ほ其外に有せるエネルギーを其物體の內部エネルギーと名く。吾人は各物體が一定の內部エネルギーを有すと云ふ洞察や、並に其大さを觀察により知るを得と云ふを以て多く滿足し得。然れども現象の機關に立入り、最小微部分(分子、原子)の運動及相互作用に依りて之を解釋せんとせば、內部エネルギーは互に引斥する微部分の位置エネルギー(此エネルギーは元來は是等微部分間の媒質中に求むべきもの)及分子運動の運動エネルギーより成ると考ふべし。

今或現象に於て內部エネルギーの各個々の部分が幾何量丈變ずるかはエネルギーの法則のみよりしては演繹する能はず。是に尙ほ他の多少不確なる觀察を要するなり。例ば彈性體を延ばし或は曲ぐれば、先づ、互に作用せる其諸分子の位置エネルギーを變じ、且此場合に恐らく微部分の運動エネルギーも亦全然同一に止まらざるべしと假定し得らるゝなり。同樣に、凡てが、熱は分子運動に存すと云ふ假定に適應するが故に、溫度上昇せば先づ微部分の運動エネルギーが

增加すと考ふべし。然れども同時に物體の膨脹に依りて相互に牽引せる諸分子が又大なる位置エネルギーを得ることも亦忘るべからず。

c)　今用ゐ得らるゝ種々の考察を基として尙一度或粗き水平面 B 上に動き、摩擦によりて靜止せしめらるゝ一物體 A に注意すべし。唯だ物體全體としての運動に注意し、發生せる熱を考ふることなければ、物體の運動エネルギーは平面の作用せる摩擦の負の仕事に等しき量丈變ずと云ひ得べし。之に反して平面 B は固定せらるれば、何等運動エネルギーを有せず。又物體 A が此に作用せる力は何の仕事もなさず、何となれば此力の作用せる諸點(即ち B の諸點)は變位せざればなり。此考察によりて全エネルギーは減少すと云はざるべからず。蓋し物體等は互に等しくして且反對なる諸力を作用すれども、此等の力は等しくして且反對なる仕事をなさず、一力の作用點のみが動き他力の作用點は動かざればなり。

實際には何等エネルギーが失はれざることは、發生せる熱に注意して始て之を知るなり。今之を一の分子運動として考へ、如何樣に此運動が强さに於て增すかを明かにせんとすれば、一物體が他に作用せる摩擦を一個の力として考ふべからずして、之を無數の力の合成として、即ち夫に依りて一物體の諸分子が他物體の諸分子に作用せるのもとして考へざるべからず。

一四五　熱運動の詳細なる觀察 (Closer Observation of the Thermal Motion.)　溫度上昇によりて增すものは唯運動エネルギーのみなりと假定すれば、分子運動によりて起る諸速度を評價し得るに至る。例ば 1 瓦の水銀を 0° より 100° に熱するには、其比熱が 0,031 な

る故に 3,1 カロリーを要し、殆 13×10^7 エルグのエネルギーに相當す。分子の平均速度を毎秒糎にて表はして 0° に於て v_0 並に 100° に於て v_{100} と記せば、第一の溫度に於ける運動エネルギーは $\frac{1}{2}v_0^2$ 又後者に於ては $\frac{1}{2}v_{100}^2$ なり。運動エネルギーは運動の方向に關係せざる故に、分子は或平均速度にて不規則に彼方此方に動くとも、夫等が凡て同速度にて同方向に運動せると同大なり。

今

$$\frac{1}{2}v_{100}^2-\frac{1}{2}v_0^2=13 \times 10^7$$

なり。是よりして

$$v_{100}^2>26 \times 10^7$$

を得。即ち

$$v_{100}>16000 \text{ 糎每秒}$$

此結果は全然正確にはあらざる假定に基けども、然れども分子速度に就て是が全然謬れる觀念を與ふるものにも非ざるは確實なり。

此觀察に尙次のものを添ふ。誰も熱體は冷體よりも多くの「熱」を有すと云ふべき故に、「熱」と云ふ名を、溫度上昇に依りて增加する內部エネルギーに用ゐんとすべし。然れども、今此名を又 0° の水が 0° の氷よりも多分に有するエネルギー——熱の導入に依りて物體が高め得たるエネルギー——に用ゐるべしとせんか、然かも此場合に溫度は兩者に於て同一なり。又之を熱せられ同時に張らるゝ發條のエネルギーに用ゐるべしとせんか、然かも是に於て幾何が形の變化に、幾何が溫度上昇に相當するかを全然決する能はざるなり。

精密に表はさんとすれば「熱」なる語の此の如き用法は廢むべきに非ず、寧ろ「內部エネルギー」と云ふを可とす。然れども亦「熱」なる

名が何等誤解を導かざれば之を用ゐるを妨げず、又實に全內部エネルギーとして、或は運動エネルギーとして、或は又稍不定に分子運動自身としても之を用ゐ得べきなり。

「熱」なる名稱は一物體 A が其溫度の高き爲に一物體 B と接觸の場合に是に與ふるエネルギーを記すには甚だ適せり。此エネルギーは普通の力學的作用(一一五節)によりて運ばるべきエネルギーと嚴密に區別し得らるべし。然れども根本的には分子論に從へば此等兩種類の遷移は同一事に歸着すべし。A が B に力學的作用によりて與ふるエネルギーは A が B に作用せる力がなす仕事に一致す。同樣に、接觸によりて熱として移るエネルギーは一物體の微部分が他物體の微部分へ作用する無數の分子力の仕事に等し。然れども是等諸力の作用を個々には研究するを得ず、唯其全體の仕事が觀察に上り得るのみなり。

一四六 熱の傳導と傳播 (Conduction and Propagation of Heat.)
熱の遷移は種々の仕方に於て起り得。異れる溫度の二物體の直接の接觸に依て、一物體の微部分は、他物體の之に密接せる微部分に其速度を與ふ。同一物體の諸分子間の熱の遷移も同じ仕方に起り得。一の場所に於て溫度が他よりも高ければ、熱は溫き部分より此に直接觸れたる部分に傳はり、之よりして尙ほ遠方に傳はる、結局熱運動が全物體に擴がるに至る。この熱傳導と名くる現象は種々の物質に於て甚だ異れる程度に於て起る。物體二部分間の同じ溫度差に於て、其傳導能に從ひ、同一時間に或は多大の或は僅少の熱量遷移す。諸金屬は良導體なり、木、硝子、動植物の組織は此に劣り、氣體及液體は、液體的金屬を除けば、凡て不良の導體なり。

全然他の仕方、即ち輻射に依りて熱は傳播す。是は眞空なる空間に於て起り得。熱傳導が既に數糎の距離に就て著しき時間を要すれども、輻射熱は甚大なる速度にて傳播す。此現象は光と密接なる關係に在るを見出し得たり。其關係は一物體が 500° 以下にては唯熱のみを發すれども、此温度にては又光をも發することを觀察し、尙ほ分子運動の性質が俄に是に於て全然變ずとすることも確からしからざるを思へば理解し得らるゝなり。

熱體が液體又は氣體の中に在れば、熱輻射及直接の傳導の外に尙ほ第三の現象を認むるなり。先づ熱體と接觸せる周圍の物質の部分は熱せらる、是に於て膨脹し、輕くなり（比重を減ずること）、從て高く昇るべし。物質の新しき部分が此位置を占め、同樣に熱せらる、斯して熱が物質全量中に擴がるべし、熱は物質自身之を受けて之を伴ふが故なり。

一四七　一物體又は數多の物體の一系の二狀態に於ける內部エネルギーの差を定むること (Determination of the Difference of the Internal Energy in two States of a Body or a System of Bodies.) — 物體又は數多の物體の一系の二狀態を文字 P 及 Q にて記し、此等の狀態に於ける內部エネルギーの値を U_p 及 U_q と名く。實際に第一の狀態を第二の狀態に移し得べく、又此爲めに w カロリーを加へざるべからずと假定す。其他に A エルグの仕事をなす外力働くとすべし。此仕事(一一五節)並に加へたる熱によりて、物體の內部エネルギーが增加する故に、內部エネルギーをエルグにて表はせば

$$U_q - U_p = Ew + A \quad \text{.............................(13)}$$

を得。又カロリーにて示せば

$$U_q - U_p = w + \frac{A}{E}$$

なり。E は力學的熱當量を表はす。此等の方程式は w 又は A、或は兩者が共に負なる場合にも成立つ。此場合には之等を稍他の言葉にて表し得。例ば外力の仕事が $-A$ にて、即ち第一の方程式が

$$U_q - U_p = Ew - A \quad \text{.............................(14)}$$

に移れば、加へられたる熱は一部分、此狀態變化に反對せる、即ち物體をして仕事 A をなさしむる外部抵抗に打勝つに費され、一部分は內部エネルギーの增加に用ゐらると云ふを得べし。

此等の方程式の意味を今既に若干の例にて說明するを便宜とす、然れども若干の現象に就ては後に一層精密に說明すべし。

a) 一液體が蓋なき器中にて沸騰點まで熱せらるれば、尙是に熱を加ふるとも温度は上昇せず。液體は同温度の蒸氣に移る。一單位質量の液體を同温度の蒸氣に轉ずるに加ふべき熱量を氣化熱と名く。其量は觀察によりて知るを得べし。

簡單の爲に液體は一圓筒中にて喞子の下にありて、液體が蒸發の間に喞子を外方に移動すと考ふべし。蒸氣は喞子に一の壓を用ゐるが故に、移動によりて此壓は一の仕事をなす、其仕事は壓の大さ及喞子の變位の大さよりして之を知り得べし。方程式(14)中に A の代りに此仕事を置き、w の代りに氣化に於て加へざるべからざる熱量を置けば、範式は蒸氣の內部エネルギーが液體の夫れよりも幾何大なるかを示す。後に Ew は A より大にして、即ち實際に $U_q > U_p$ なるを示すべし。是は、液體分子が互に牽引せるは多くの現象よりして知る所にして、且つ氣化に於ては相互の距離が增加し、位置のエネ

ルギーを大にする故、考へ得らるゝなり。運動のエネルギーに關しては此等に就て同じ確實の度に於て述ぶるを得ず。既述の如く蒸氣は液體と同溫度を有す、此理由に依りて多く、分子の速度は兩者に於て同大なるを示すと云ふ。實に、一物體より他への熱の遷移が完全に分子の速度に依りて定められ、即ち蒸氣と液體とが此等の速度同大なる場合に寒暖計を同一度に熱し得べしと云ふは假定すべからずとせざるなり。蒸氣と液體とに於ける壓が完全に相等しと假定せば、運動エネルギーは氣化に依りて變せず、即ち加へられたる熱は內部仕事をなし、又引力に打勝つ爲に用ゐらると論結し得るに至る。

b) 壓縮及冷却に依りて蒸氣を液體に凝化せしめ得べし。先きに圓筒內に於て起りしものは、例ば又之を逆に起らしめ得。喞子が下方に動かされて、先きに加へられたると同大の熱量が圓筒より引出さる。此熱量は一部分は外方より喞子に作用せる力の仕事に、一部分は內部エネルギーの減少に歸すべきなり。

上述の熱は蒸氣より液體に凝化せるによりて生せりと云得べし。今之を系より引去りたり、然れども之を其系に殘し置くことを得べし。此場合に起れる溫度上昇を一部分は此系に爲せる外部仕事、一部分は諸分子間の諸力に歸し得べし。互に牽引せる微部分の接近に依りて速度は增大せらる、失はれたる位置エネルギーの代りに熱なる運動エネルギーが入り來れるなり。

c) 化合物の生成の際に於ける熱の發生は同樣の原因に歸せざるべからず。化合する諸微部分は互に加速運動にて相近づく。發生せる熱即ち運動エネルギーは、微部分が其牽引の結果を生せし前に其れが有したる位置エネルギーの當量なり。此エネルギーを「化學的位置エネルギー」と名け得。化學的分解に於ては熱を得て增加す。

然れども尙注意すべきは、化學的現象に於ける熱發生に關する實驗(熱化學的測定)に於ては、普通、熱は系より引き去られ(又は此に加へられ)又外力が此に仕事をなし得ることなり。故に方程式(13)及(14)の一を應用せざるべからず。例ば一熱量計中に物體の一系を考へ、系は薄き白金葉にて水より分たるとす。系は化學的作用に依りて P 狀態より Q 狀態に移り得べし。溫度の變化よりして、幾何の熱が此系に水に依りて與へられ或は引き去られたるか、又必要なる場合に外力の仕事を注意せるとき、內部エネルギーが化學的變化の後に於て其以前より幾何增減せしかを算出し得べし。

前述に於て相互に牽引せる二物體は、夫等が遠く相隔り、引力が著しからざるものに於ても尙ほ位置のエネルギーに就て云得べきことを注意すべし。例ば一個の石が床の上に在るとき、地球に關して位置エネルギー零なりと定むれば、其石が或る高さまで上げらるれば、位置エネルギーは或正値を有すとすべし。今地球よりの距離が或値 l を越ゆれば引力が著しからずと考ふれば、此距離に至るまでは石の位置エネルギーは絕えず增加すべし。又地球より更に尙遠く隔れば、距離 l に於て有したる値 A を保存すべし。或る任意の大距離に於てエネルギーが常に尙此値を有すと云ふは、石が地面に落下するとき(即時にはあらずとも)、之に仕事 A をなす一力作用すと云ふの他に意味なきなり。同樣に、水素一原子と鹽素一原子とが互に未だ何の引力も作用せずとも或位置エネルギーを有すと云ふを得るなり。

化學的位置エネルギーが如何に大なるかは簡單なる計算よりして之を示し得。鹽素 1 瓩は水素と化合して 600 カロリーを發生す。是よりして、鹽素は、其結合し得る水素に對して 1000 瓩の重量が 250 米の高さに在りて地球に對して有すると同大のエネルギーを有することを知るなり。

d)　蒸發に就て云へると同様なる注意は又融解に就ても適用す。集合狀態の變化の間に加へざるべからざる熱量、即ち融解熱(一三六節)は、融解に依りて何等著しき外部の仕事をなさゝるが故に、內部エネルギーを高むるに用ゐらるとすべし。溫度の相等しき爲に運動のエネルギーが變化せずと假定せば、液體は固體よりも大なる位置エネルギーを有すと云ふ結論に至る。微部分が互に相引ける故に、融解に依りて容積が增大せる如き場合に於ては、此の如きは甚だ解し易きなり。然れども氷の如く融解と共に收縮する物體に於ては事柄は稍簡單ならず。恐らくは氷の有する微部分の群が、全容積は減少すとも、夫自身は膨脹し、其爲に大なる位置エネルギーを得るなりとすべし。

e)　終りに尙ほ示すべきは、或物理的又は化學的變化の前後に於ける一系の內部エネルギーの大さは、其變化の前後に於ける物體の狀態、並に其每回に有せる溫度の示されたる場合にのみ意義を有することなり。

例ば 15°*C* の水蒸氣一瓩の內部エネルギーは、其の含める酸素及水素が氣體として同溫度に於て互に混ぜられたるものゝエネルギーよりは幾何小なるかを測定せり。今 15° の液體の水を此混合氣體と比較すれば、稍大なるエネルギー差を見出す、水のエネルギーは水

蒸氣の夫よりも小なるが故なり。種々の狀態に於ける水のエネルギー及種々の溫度に於ける酸素及水素のエネルギーに就て研究をなせば、例ば一瓩の氷のエネルギーが 0° の酸水素混合氣體一瓩より幾何小なるかを知るを得べし。

化學的變化の熱は變化の前後に於ける物體の狀態を或る第三の狀態と比較して定め得ること屢あり。

例ば燐の燃燒熱よりして、燐一瓩 + 自由なる酸素の其割合相互に化合し得る一系の內部エネルギーが、燃燒に依りて造られたる燐酸の同溫度に於けるエネルギーよりも幾何大なるかを算出し得べし。其結果は黃燐に於ては赤燐よりも 600 カロリー丈大なるを示せり。此大さだけ第一狀態に於ける燐一瓩の內部エネルギーは第二狀態に於けるものよりも大なり。黃燐が赤燐に變せる場合に是丈の熱量が發生せざるべからざるなり。

一四八　自然に於けるエネルギー (Energy in the Nature.)　自然界には大なる度合に於けるエネルギー變遷の多くの例を見るなり。植物の生長は日光のエネルギーに基き、夫に依りて炭酸瓦斯並に水の如き物質よりして植物體の物質を造るを得るなり。炭酸瓦斯に於て又水に於て諸元素が化合せる強き結合が日光によりて分解せられ、酸素の逃るゝによりて諸原子の一層小にして密なる結合をなさしむるなり。

植物が後に動物界に營養として用ゐらるれば此所に亦熱及力學的エネルギーを造る。動物體に於ける複雜なる化學的變化は主に營養物中に含まるゝ物質と呼吸によりて取らるゝ酸素との化合に基けり。此物質の酸素に對する位置エネルギーが動物に利用せらる

ゝなり。斯くして又人類は其エネルギーを直接に或は植物界よりして間接に之を得るなり。

是等のエネルギーの他,吾人は又自然が與ふるエネルギー、即ち風及水流の運動エネルギー、高處より落つる前の水の位置エネルギー、石炭が酸素に對して有する化學的エネルギーの如きを利用するなり。此等のエネルギーが吾人の機械を動す前に受くる變化を考ふれば、夫等は凡ての場合に於て太陽より出で來れるものなるを論結し得るに至る。太陽が水を蒸發し山の頂に導き、又太陽が地表面を不平等に熱するが故に風を起し.又太陽が植物を養ひ、其衰殘が石炭として吾人に與へらるゝなり。石炭の火の熱及光は、遠き過去に於て地球を照したる日光のエネルギーが其一部分炭層に貯藏せられたるものとして之を認め得べし。

第三章

不變形の固體 (Solid Body of Invariable Form.)

一四九 進行及廻轉 (Translation and Rotation.) 固體の微部分間の連結は多くの場合に於て、之に作用せる外力に比し、之をして何等著しき形狀の變化を生せざらしむる程十分に大なり。之を剛體に就て論ずと云ひ表はす。此の如き物體の運動及平衡に就て此章に於て述ぶべし。

一物體の進行又は移動とは、其の凡ての點が同じ方向に等しき距離を經過せる運動なり。

廻轉とは、各點が一定の直線即ち軸に直角なる平面に於て之を中心とせる圓弧を畫ける運動なり。是に於ては凡て同じ時間に於て畫ける圓弧は等しき中心角を有す。軸は物體の內又は外に在るを得。

進行運動に於ては、物體の凡ての點が同一速度を有す。廻轉に於ては、各點の速度は軸よりの其點の距離に比例す。

質點の運動に關しては速度に就て述ぶるが如く、物體の廻轉に關しては角速度に就て述ぶ。

廻轉が一樣なりとは、物體が任意に選べる同大時間に於て同大の角を廻轉するを云ふ。此場合に於て角速度は單位時間に畫ける角に依りて測り、任意時間に畫ける角を其時間にて除したる數にて表は

す。一樣ならざる廻轉に於ては、角速度は物體が或無限小の時間に於て廻轉せる角度を無限小の時間にて除して（六一節參照）見出さる。角速度を示すには角を弧度（一九節）にて表はす。從て角速度は普通の意味に於ける物體諸點の速度（線速度）と簡單なる關係に在り。即ち ω を角速度とすれば、軸より距離 1 なる點が毎單位時間に圓弧 ω を經過するを示す。故に ω は又此點の線速度なり。又軸より距離 r なる一點に關しては速度は方程式

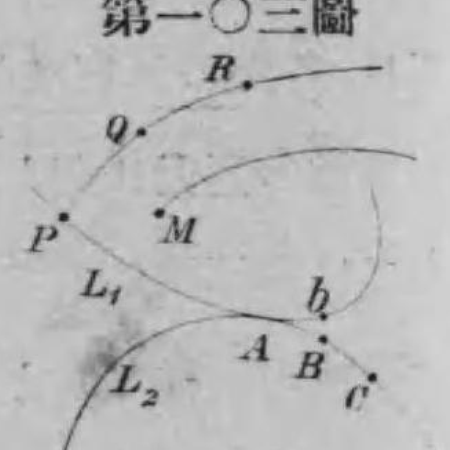
$$v=\omega r$$

に依りて定めらる。

一五〇　一平面内に於ける圖形の運動 (Motion of Figures in a Plane.)　一平面内に動き得て、形狀及大さ不變なる一圖形に於ては進行並に一定點の周りの廻轉が其最簡單なる運動なり。尙複雜なる運動は是に歸せしむるを得。例ば此圖形は順々に種々の點の周りに廻轉するを得べし。此の如きは一多角形が一直線上に其稜にて轉じ行くものに於て之を觀察し得。又毎回、唯或時間内或一點の周りに廻轉し、然る後直に或る新しき廻轉中心に移ることも可能なり。

一曲線 L_1（一〇三圖）が一直線或は曲線 L_2 上を轉がれるときには此の如くなるべし。接觸點 A は是が廻轉の中心なり、然れども無限小の角度が經過せらると共に L_1 の或他の點 b が L_2 の或他の點 B に至る。然れば第二の無限小の時間に於ては此 B 點の周りに廻轉せしめらるゝなり。L_1 線の一點 P は L_2 及 A, B, C 等の諸點を中心とせる無限小の圓弧 PQ, QR 等を順に列ねて得べき一の道

第一〇三圖

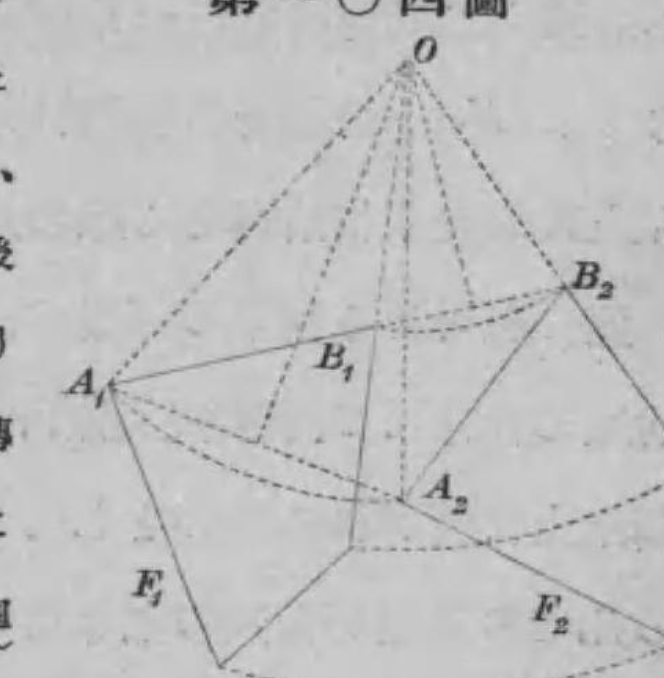


を書く。旋轉線 L_1 に任意の圖形が固く結合せりとし得べし、圖形の一點は、例ば A が接觸點なるとき、M なる位置に在りとすれば、又同樣に A, B, C 等を中心として無限小の圓弧を順次に書くべし。

一の圓が一直線又は或他の圓上を其外側又は內側に轉がれる場合に書き得る道に就ては容易に其觀念を得べし。

一平面內一圖形の二位置が與へらるれば夫が一位置より他の一位置に移り得る無數の運動を考へ得。F_1 及 F_2（一〇四圖）が此等二位置にて、第一の位置に於て A_1 及 B_1 に在りたる點が第二の位置に於て A_2 及 B_2 に來りたりと假定す。A_2B_2 は A_1B_1 に平行ならずとす。圖形を第一の位置より第二の位置へ移すには、始に圖形を移して A_1 を A_2 に來らしめ、然る後 A_2 の周りに廻轉すとなし得。或は變位に依りて B_1 を B_2 に重ね、然る後 B_2 の周りに廻轉をなさしむるを得。又二個以上の變位又は廻轉にて同じ結果に至り得べく、同樣に又唯一回の廻轉によりても之を得べし。即ち A_1A_2 及 B_1B_2 の中心に於て垂線を立て、O が夫等の交點なりとすれば、角 A_1OA_2 及 B_1OB_2 の相等しきを證明し得べし。夫に依りて O の周りに角 A_1OA_2 丈の廻轉は同時に A_1 を A_2 に、又 B_1 を B_2 に、從て全圖形を F_2 の位置に運ぶべし。

第一〇四圖



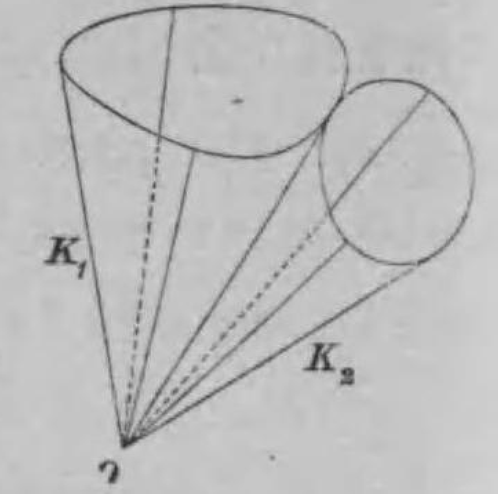
何樣かの仕方にて F_1 及 F_2 の二位置に通じて同じ場所を占むる一點を見出し得ば、勿論其點が上述の如き廻轉をなさしむる點なり。

一五一　一定點の周りの一物體の運動 (Motion of a Body about a Fixed Point.)　一物體が其一點 O を固定し、然れども其他に其運動全く自由なれば、其物體は此點を過ぐる何れの線の周りにも廻轉し得。又 O を過ぐる種々の軸の周りに順々に廻轉するを得。軸の方向が絕えず變り、即ち物體が唯無限小の時間、同一の線の周りに廻

轉する場合には、其運動は前節に述べたる諸線の旋轉運動と相類似せるなり。

頂點 O なる圓錐面 K_1（一〇五圖）が可動體と連結せりとし、又第二の圓錐 K_2 が同じ頂點を有し、第二圓錐は空間內不變の位置を有するものとす。從て圖に示す如く K_1 と K_2 と其母線の一に於て合せる後、第一圓錐を第二圓錐の上に轉がし得べし。即ち二表面は常に一母線に沿ひ接觸せるなり。K_1 と連結せる物體は每瞬時に於て恰も上述の如く相接觸せる線の周りの此廻轉の運動に伴ふなり。

第一〇五圖



速に廻轉せる獨樂の運動は、人の知る如く其斜軸が圓錐面を書き、前述の仕方にて、獨樂と連結せる、頂角小なる一圓錐が固定せる他の圓錐上に轉がれるものとして考へ得。又實に一物體の一定點の周りの凡ての運動が前述の如きものなるを證明し得。唯注意すべきは、圓錐の代りに多角面體が互に其上に轉がり行くとすべきことあること、又二圓錐の一が平面にて置換し得られ得べきこと、並に一圓錐が他の內面に置かれ得べきことなり。

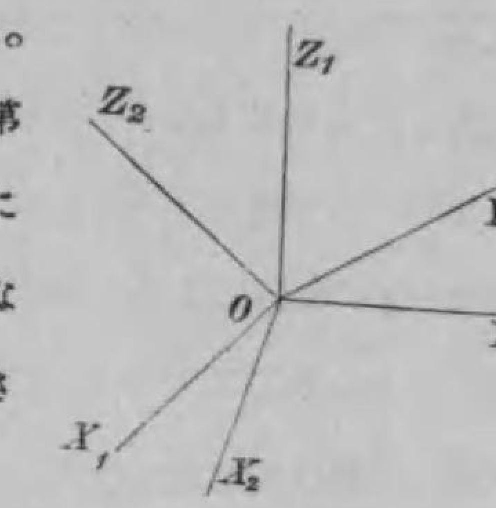
一平面內に於ける一圖形と同樣に、一定點を有せる一物體に於ては運動は始の位置と終の位置とにては定められず。即ち一位置より他へ移り行くは種々の仕方にて起り得。

之を說明する爲に、定點 O より互に直角なる三直線を引き、之等を物體に固定すと考ふべし、又之等を第一、第二及第三の軸と名くべし。OX_1, OY_1, OZ_1（一〇六圖）の位置より OX_2, OY_2, OZ_2 の位置へ移り行くは就中次の種々の仕方にて起り得。

a) 物體を第一軸の周りに廻轉し、第二軸を OY_1 の位置より OX_2Y_2 の平面に至らしむとす。然る後第二軸の周りの廻轉に依りて、第一軸も亦此平面に來る。是によりて第三軸は既に OX_2Y_2 の平面に直角なる位置 OZ_2 を占むべし。此線の周りの廻

轉に依り第一及第二軸は OX_2 及 OY_2 と合すべし。

第一〇六圖



又是等の軸の周りの廻轉を他の順序に於て行ひ得べし。例ば最初第三軸の周りに、次に第一軸の周りに、最後に第二軸の周りに廻轉せしめ得。物體が此等の軸の一の周りに廻轉すべき角度は始に云へる順序に於けるものとは同一ならず。故に所求の位置の變化は唯三軸の周りの既定の大さの廻轉のみに依りて得らると云ふを得ず。

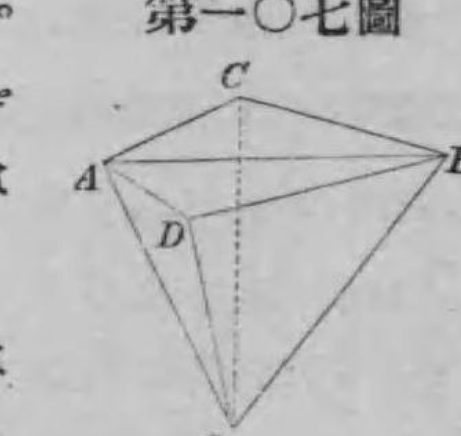
b) 其他尚ほ種々の軸の周りの單一の廻轉に依りて第三軸に OZ_2 の位置を與へ得べし。然る後 OZ_2 の周りの廻轉は他の諸軸を所求の方向に來らしめ得。

c) 位置の全變化は又單一の廻轉に依りて得らる。唯是は一定の線の周りに起らざるべからず。即ち一軸の周りの廻轉に於ては、物體の任意一線が之となす角は變ぜざる故に、此線は OX_1 及 OX_2 と等しき角をなさゞるべからず、又 OY_1 及 OY_2 も同樣なり。故に是は O を過ぐる次の二平面の交線なり、即ち其二平面の一は X_1OX_2 の平面に直角にて OX_1 及 OX_2 と等しき角をなし、他は Y_1OY_2 の角に關して同樣の位置に在るものなり。其造れる三面角を見れば、此の如くにして定めたる軸の周りの廻轉に依りて、上記の目的を實際に達し得べきは容易に知るを得べし。

一五二・廻轉及角速度の合成 (Composition of Rotation and Angular Velocity.)

OA 及 OB を空間內の二定線とす（一〇七圖）。一物體が先づ OA の周りに角 α 丈、次に OB の周りに角 β 丈廻轉すとす。此等の廻轉の方向を普通用ゐる方法に於て示すべし。各軸を O よりして唯一方の側にのみ引く、其側に於ける觀察者には各廻轉の方向が時計の針の動くと反對の方向に見ゆとす。

第一〇七圖



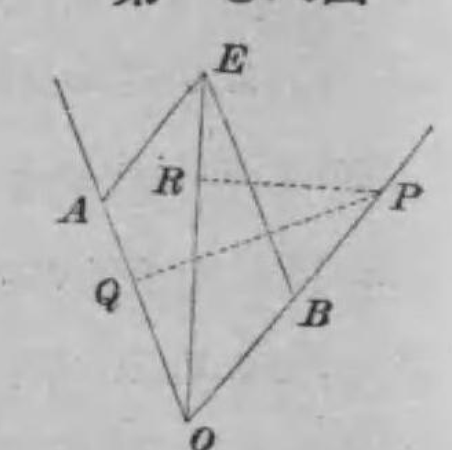
今 OA を過ぐる二平面 AOD 及 AOC を考ふ、夫等は AOB 平面の前面及後面に於て是と $\frac{1}{2}\alpha$ なる角をなす。同樣に OB を過ぐる二平面が各 AOB と角 $\frac{1}{2}\beta$ をなすとす。AOB の前面に於ける二平面は OD 線に於て切る、他の兩者は OC 線に於て切る。

AOB の各側に於て三面角ありて、此等の二圖形は同形なり、故に $\angle AOD=\angle AOC$ 及 $\angle BOD=\angle BOC$ なり。是によりて物體内の一線の初め OD と合せるは第一の廻轉の後に OC の位置を占む、然れども第二の廻轉に依りて再び OD に戻る。即ち此線は二廻轉の經過後再び其最初の位置を占むるが故に、物體の位置の全變化は又 OD の周りの唯一回の廻轉によりて得らるべし。

同じ仕方に於て始め OB の周りの廻轉、次に OA の周りの廻轉が起るときには OC 線が其位置に終に戻さるゝを見る。即ち二廻轉が起る順序は無關係ならず。

今角 α 及 β を充分に小さく選び得と假定す。OC 及 OD 線は AOB 平面上の同一の線 OE (一〇八圖)に近づく。即ち OA 及 OB の軸の周りの無限小の廻轉に於ては廻轉の起る順序には無關係なり。凡ての場合に於て夫等は OE 線の周りの廻轉に依りて置換せられ得。

第一〇八圖



此線の位置を定むるには先づ一〇七圖に於て

$$\sin AOC:\sin BOC=\sin\tfrac{1}{2}\beta:\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

即ち又一〇八圖に於ては

$$\sin AOE:\sin BOE=\sin\tfrac{1}{2}\beta:\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

ならざるべからず。然れども α 及 β が無限小なれば上式の代りに次の如く記し得べし。

$$\sin AOE:\sin BOE=\beta:\alpha$$

此條件を滿足する OE 線は又 OA 及 OB の長さを α 及 β の廻轉として考へ得べき大さとし、此二線を邊として一平行邊形を畫きて見出さるべし。其對角線 OE は α 及 β の廻轉に相當せる廻轉、即ち物體を α 及 β の廻轉が至らしむると同じ位置に至らしむる廻轉をなすべき軸なり。其他に OE は此廻轉の方向及大さを與ふ。前者の證明は之を讀者に委ぬべし。後者を知るには唯だ物體の一點に就て證明するを要するのみなり。簡單の爲に此點を OB 上に選ぶ。PQ 及 PR は OA 及 OE に直角なりとす。P 點は OB の周りの廻轉に於ては移動せざるべし。OA の周りの一廻轉 α に依りて後方に、AOB 平面に直角なる方向に $\alpha\times PQ$ なる距離を經過すべし。同じ移動は OE の周りの廻轉に依りて得られざるべからず、其大さは角度 ϵ に相當すと假定す。即ち

$$\alpha\times PQ=\epsilon\times PR$$

今三角形 OAP 及 OEP が同面積を有するが故に

$$OA\times PQ=OE\times PR,$$

之と先の方程式とより

$$\alpha:\epsilon=OA:OE.$$

今 OA の長さが α の廻轉の大さを表はせる故に ϵ は OE に依りて表はされざるべからず。

一〇八圖を用ゐて重要なる一定理を記載すべし、然れども其證明は畧すべし。物體の三個の相異れる運動を考ふ、即ち OA, OB 及 OE の三軸の周りの廻轉にして、夫等の角速度が OA, OB, OE のヴェクトルの長さにて與へられ、又其等の方向が是等のヴェクトルの方向にて示さるとす。物體内 AOB 平面の内或は外の任意一點は之等何れの運動に於ても一定の速度を有す。又夫が第三の運動に於て得る速度は他の二個の運動の速度を平行邊形にて合成して得らるべきを證明し得べし。即ち物體内の一點は OA 及 OB の周りの廻轉の速度を同時に有せるときは OE の周りの廻轉の速度を得。之を尙次の如く約言し得。即ち、物體が同時に OA 及 OB の周りの廻轉を有すれば物體は OE の周りに此ヴェクトルにて定められたる角速度にて廻轉すと云ふべし。二運動を、此場合には二廻轉を、一物體が同時になせりと云はゞ、物體の各點は此等の運動の速度を同時に有せるを表せるなり。

又 OA 及 OB にて示したる二角速度は OE にて示さるゝ唯一の角速度に「合成」せられ得と云ふべし。同樣に又二個以上の角速度を合成し得。逆に所與の一角速度を二個以上に分解し得。

一五三 固體の最も一般なる運動 (Most General Motion of a Solid Body.)

一物體は同時に一進行と一廻轉とを有し得、尙はこの進行の方向及速度、廻轉軸の方向及角速度を毎瞬時に變じ得べし。一固體の任意の運動は凡て此仕方にて了解し得。

一物體が絕えず同一軸の周りに廻轉し、尙其軸の方向に一の進行をなせば、兩運動が一樣なるとき、各點は一の螺線を書く。凡て此等

の螺線の歩みは同じ、是即ち一廻轉の間の進行によりて經過せらるゝ距離なり。

一五四 外力の仕事と物體のエネルギーとの關係 (Relation between the Work of the External Forces and the Kinetic Energy of the Body.) 今觀察せる物體が內部の狀態に於て何者も變らず、即ち內部エネルギーに於て何等變化あらずと假定せり。又熱が加はることも減ずることもなしと考へたり。然れば前章の所述に依り、外力の仕事は知覺し得べき運動エネルギーの增加に等しきを知るなり。

媒質に依りて外力働き、即ち其仕事が位置エネルギーの減少に等しとすれば、此エネルギー及上述の運動エネルギーの和が不變なりと云得べし。

一五五 平衡に關する一般の條件 (General Condition for Equilibrium.) 此定理よりして、始に靜止に在る一物體が、諸力の所與の一系に依りて運動せしめらるべきか、又其場合には如何なる方向に於てするかを知り得べし。何となれば運動が生ずれば運動エネルギーも亦生ぜざるべからず、即ち位置エネルギーは減少せざるべからざればなり。 從て

始に靜止に在る一物體は位置のエネルギーが減少するが如き方向に於てのみ運動し得。

物體が占め得る凡ての位置の內其一——之を P と名く——に於て位置エネルギーが他の凡ての位置に於けるよりも小なりと假定す。 然れば物體が此位置に在れば夫は運動せしめらるゝを得ず、何となれば位置のエネルギーは更に之より減ずるを得ざればなり。即ち P は一の平衡位置なり。 尙ほ是に少しく附言すべし。 物體を

P と稍異れる位置に置き、之を放てばそは P の位置に戻る、物體は常に位置エネルギーが最初よりも小なる位置を求むるが故なり。平衡の位置 P は僅の攪亂の後には再び求め得らる、之を云表はして平衡が安定なりと云ふ。 即ち

一物體は其位置エネルギーが一の極小に在れば安定の平衡に在り。

例ば球狀の一椀の最低點に在る球の如し。

平衡の第二の種類としては例ば一球が或る他の球の最高點に在る如きものあり。 然れば第一球は墜ち得べし。 然れどもその落つるは右の方に於ける運動にも、左の方に於ける運動にも全く同樣にして、即ち夫が一方に墜ちて他方に墜ちずと云ふ何の理由も存在せざるなり。然れども僅の偶然なる變位によりて最初の位置より益遠く離るゝなり。 故に物體が此の如き位置に在るを不安定の平衡と云ふ。

此の如き平衡は位置のエネルギーが極大なる場合に常に起る。

其意味は或一方或は他方へ移動すれば位置のエネルギーが減少すとして了解せざるべからず。物體は位置エネルギーの一層小なる位置に達せんと努むれども、是が或一方又は或他方に運動せしむべしと云ふ何の理由もあらず。然れども偶然の僅少なる打擊が之を動し始め、物體は益平衡の位置より遠かる。

此の如き攪亂的影響を全然避くることを得ざるが故に不安定の平衡は實現し得ざるなり。

又注意に値するは一球が或る鞍狀の表面に靜止せば、位置エネルギーは或變位に關しては極小にして、他の變位に關しては極大なる

ことなり。是に於ても亦平衡は不安定なり。

最後に尙物體は又中立の或は無差別の平衡に在るを得べし。是即ち物體が變位の後尙平衡にあるを云ふなり。是は水平面上の球に於て然り、又一般に變位に依りて位置エネルギーが增減せざる場合に此の如し。

位置のエネルギーに關して前述の何れの場合にも屬せざるときは物體は平衡に於て在らず。然れば位置のエネルギーは或一方向に於ける運動に於ては減ずべく、反對の方向の運動に於ては增加すべし。物體は第一の方向に運動するなり。

一五六　平衡條件の他の形 (Another Form for the Condition of Equilibrium.)　前節に用ゐたる例、一球が球狀の椀の最低點或は他の一球の最高點に在るものゝ如きは尙他の注意を與ふるなり。即ち球が其上に靜止せる表面が接觸點に於て水平なれば、球は無限小の變位に於て同じ高さに止り位置のエネルギーを變せず。他の場合に於ても亦同樣なり。例ば一系が安定なる平衡の一位置 P を過ぐれば、位置のエネルギーは P に近くと共に減じ、然る後再び增加せざるべからず。此の如きは位置 P を過ぐる無限小の變位に於て位置エネルギーが同一値を有すと云ふ場合に於てのみ可能なり。即ち

一物體が平衡に在れば其の無限小の變位に於ては位置のエネルギーは變せず。

此規則を如何に解釋すべきかは四一節所述よりして之を知り得べし。其節に於て既に、極大或は極小の場合には函數が獨立變數の增加 δ に依りて得る增加は δ の二乘以上の冪を省畧せば零なることを見出せり。同樣に上の規則を小變位 δ 或は角 δ の廻轉に應用

せば δ^2 を含む量を省畧せざるべからず。此の如くすれば平衡が成立てば位置のエネルギーの變化に就て零なる値を見出すなり。

然れども位置エネルギーの減少は媒質が物體に働ける諸力の仕事に等し。位置のエネルギーが變せずと云ふ代りに此等の諸力が(相集まりて)何等仕事をなさずと云ふを得。是よりして次の規則を得。

平衡が成立せば、無限小の變位に於ては諸力は何の仕事をもなさず。

規則は此形に於ては、諸力が媒質に依りて作用せられず、即ち位置のエネルギーに就て論じ得ざる場合にも適用するなり。其外に此定理を逆にして次の如く云得べし、無限小の如何なる變位に於ても諸力が仕事をなさゞれば、平衡は成立す。若し此の如くならざれば諸力は物體を運動せしむべし、然らば是に運動のエネルギーを與ふべく、そは諸力が或る仕事をなす場合にのみ可能なるなり。

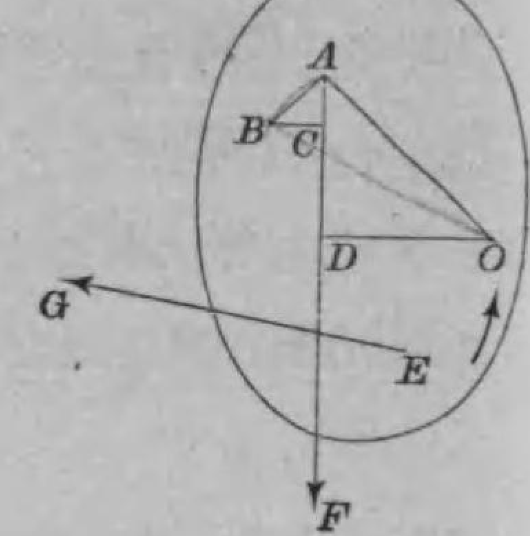
尙ほ注意に値するは一物體を運動せしめ得ざる諸力は又其既存の運動に就ても何の影響をも有し能はざることなり。

一固體の凡ての運動は進行と廻轉とに歸し得べきが故に、其平衡に就ては物體が無限小の變位又は廻轉をなしたる場合に諸力が何の仕事をもなさずと云ふことのみが必要なるなり。廻轉の場合に於ける力の仕事に就て次に詳述すべし。

一五七　無限小の廻轉に於ける力の仕事 (Work of a Force in an infinitely small Rotation.)　物體が O を過ぎ（一〇九圖）圖の平面に直角なる一軸の周りに矢の方向に廻轉すと假定す。此平面內 A 點を力の作用點とす。之を圖の平面に於ける AF 及此平面に直角なる第二の分力に分解す。後者は何の仕事をもなさず。AF の

仕事を計算するには物體が廻轉する無限小の角を ε と名け、此角を弧度にて測れりとす。故に ε は軸より距離 1 に在る一點の變位を示す。作用點 A は無限小の圓弧 AB を書く、弧の長さは $\varepsilon\times OA$ なり、此弧は OA に直角なる一直線と見做し得べし。

第一〇九圖



AF の仕事は BC を AF に直角に引きしとせば

$$AF\times AC$$

にて表はさる。OD を AF に直角に引けば之を

$$\varepsilon\times AF\times OD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

と記し得べし。三角形 OAD 及 ABC の相似なること及 AB の値よりして

$$AC=\varepsilon\times OD$$

なればなり。

軸に直角なる力 AF と其作用せる線の軸よりの距離 OD との積は此軸に關する AF の能率と名けらる。又 A 點に作用し、AF を軸に直角なる分力とせる全力の能率とも云ひ得。

一定の廻轉方向を正として選めば、一力の能率は其力が物體を此方向或は其反對の方向に廻轉せんとするかに從ひ正或は負と名くべし。一〇九圖に於て矢が正の方向を與ふれば、力 AF の能率は正なり、之に反して力 EG の能率は負なり。

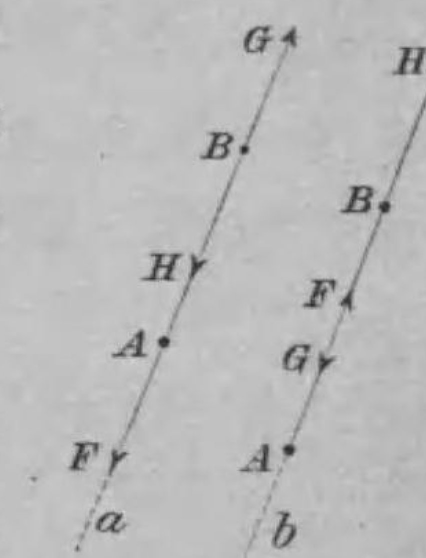
又 ε が適當なる符號を有すれば、ε 及能率の積は符號並に大さに於て力の仕事を示す。力の能率並に廻轉が符號を同くし、或は

異にするに從て仕事が正或は負なるは圖を用ゐれば容易に明かにし得べし。

仕事が力の大さのみに依らずして、尙ほ能率に依りて定めらるゝ故よりして既に、一固體が唯一定軸の周りに廻轉し得るのみならば、一力の生ずる運動は唯此軸に關する其能率のみに關係すと論結し得べし。

一五八　簡單なる平衡の場合 (Simple Case of Equilibrium.) 相等しき二力 AF 及 BG (一一〇圖)が同一直線上互に反對なる方向に沿ふて、然かも夫等の作用點を異にして作用せるものは互に平衡に在り。凡て物體の無限小の變位或は廻轉に於て此等の力の仕事が互に相等しくして符號を反對にせるは容易に知るを得べし。

第一一〇圖



今又 AF の力は BH なる力、即ち BG の力に等しくして反對にて之と同一點に作用せる力に依りて置換せられ得べしと論結し得。

物體上に力 AF が單獨に或は他と結合して作用せりと假定す。物體を運動せしめ或は既存の運動を特に變化することなくして、B 點に於て、二個の相反せる力 BG 及 BH、共に AF に等しきものを導き得、何となれば此等の新しき二力は互に其作用を消去すればなり。又三個の力の中 AF 及 BG を去り得。是等が互に釣合に在るが故なり。結局力 AF の代りに力 BH が殘る。

故に一固體に於ては凡ての力を其作用せる線に沿ふて任意に移動し得べし、然れども唯だ此線の方向に於てのみなり。一力を方向及

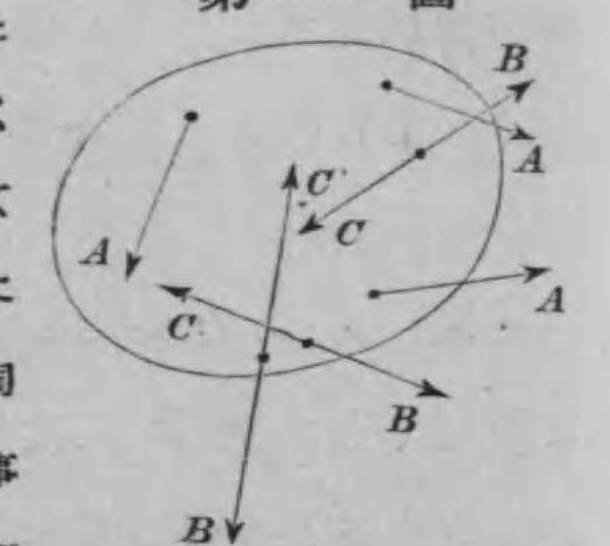
大さを不變にして線以外の一點に於て作用せしむれば他の作用をなすべし。

今 AF に置換したる力 BH は物體の凡て無限小の變位に於て力 AF 自身と同大の仕事をなす。

一五九　同價の諸力の系 (Equivalent Systems of Forces.) 一般に次の如く云得。一固體に作用せる諸力の二系が、物體の凡ての無限小の變位に於て、同じ仕事をなせば、其一系は他と同じ作用を有す、故に前者は後者によりて置換せられ得べし。

此の如き諸力の系は互に同價なりと名くべし。

第一一一圖



一一一圖に於て A の諸力が其一系を示し、B の諸力が他の系を示すとす。第一系のみが物體に作用せりと假定すべし。然れば狀態に就て何等變化することなくして、B の諸力を加へ、同時に B の諸力に等しくして反對なる C の諸力を働かしめ得べし、後の兩者は互に消去す。B の諸力は凡ての變位に於て A の諸力と同大の仕事をなすと假定せられたるが故に C 諸力の仕事は A の仕事とは唯符號に依りてのみ異れるものならざるべからず。A 及 C の二系を合せては何の仕事をもなさず、故に是等は互に釣合に在り。依て此等兩者を同時に取去るを得べく、然らば最初の系 A の代りに唯 B の諸力のみが殘るべし。

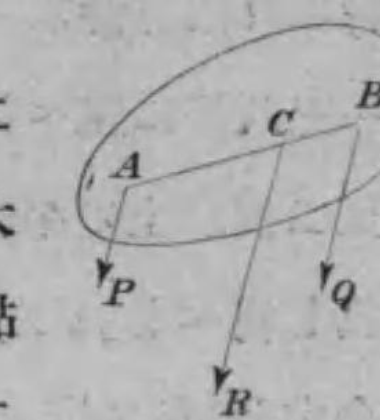
次の諸節に於て種々の例にて之を說明すべし。簡單の爲に必しも物體の可能なる運動凡てに就て述べざるべし。

一六〇　平行力 (Parallel Forces.) 二個の平行力 AP 及 AQ (一一二圖)が同じ側に向けりとせば次の如き單一の力 CR に同價なり。CR は所與二力と同方向を有し、所與の二力の和に等しく、A 及 B 間の一點 C に作用す、C の位置は次の比例

$$AC:BC=BQ:AP \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

にて定めらる。

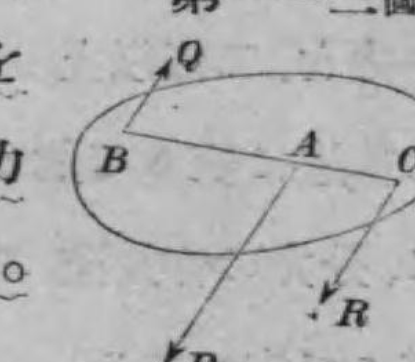
第一一二圖



$CR=AP+BQ$ なるが故に、物體の凡ての變位に於て、CR は AP 及 BQ を合せたるものと同大の仕事をなす。廻轉に於ても亦同樣なるは、C 點の位置が然らしむる結果なり。任意の廻轉に於て之を證明し得べきも、玆には C 點を過ぎ所與の諸力の平面に直角なる一軸の周りの廻轉に就て述ぶべし。先づ (2) の比例式に依りて AP 及 BQ の此軸に關する能率は相等きを知る。是等能率互に反對の方向を有し、C の周りの廻轉に依りて一力は正、他力は同大の負の仕事をなす。夫等を合成せば何の仕事をもなさず、然るに CR の力も亦同樣なり。

二個の平行にして且向きの反對なる力 AP 及 BQ (一一三圖)は夫等が大さを異にすれば唯一の力と同價なり。此一力は所與の二力の大なるものと同じ方向を有し、兩者の差に等し。作用點 C は大なる力が作用せる側に於ける AB の延長上に在り。其位置は次の比例に依りて定めらる。

第一一三圖



$$AC:BC=BQ:AP$$

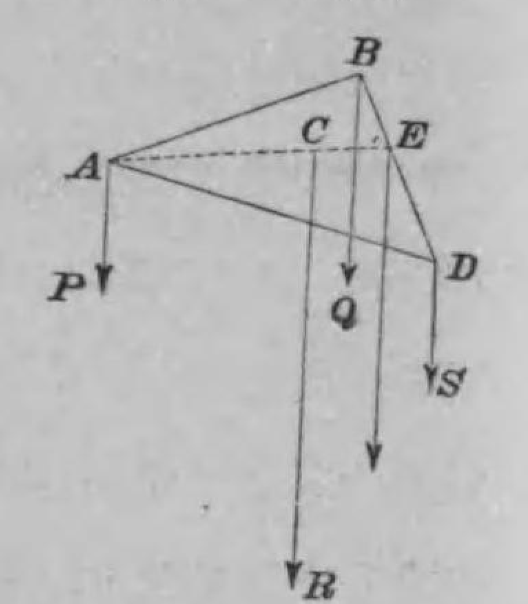
此場合に於けるが如く唯一の力が諸力の一系と同價なれば、之を此系の合力と名く。

又注意すべきは一一三圖に於て C 點が物體の外に在るを得ることなり。又一一二圖の場合に於ても C 點に於て何等物質が存在せ

ざることもあるべし(例ば中空の物體或は曲げられたる棒に於けるが如し)。所與の諸力の合成は C に於て物體と固く連結せる一點を考ふれば可能なり。同様なる注意は又他の場合にも適用す。例ば一五八節に述べたる仕方に於て一力を物體外の一點に移し得。

又二個以上の平行力は代數和が零に等しからざれば單一の合力に合成し得べし。之を見出すには、所與の規則に從ひ第一力を第二力と合成し、是に依りて得たる合力を第三の力と合成する、等なり。一一四圖に於ては例ば CR は AP, BQ 及 DS の合力なり。是等の諸力を相互に合成する順序は如何樣なりとも常に同一合力を得。

第一一四圖



所與の平行諸力が凡て同じ方向に向かざる場合には、先づ或一方向を有する諸力を合成し、次に他の方向を有せるものを合成し、結局得たる二の合力を互に合成す。

一力を、二個以上の他の平行力に如何にして分解し得べきかは、容易に前述に依りて知ることを得べし。一一二圖に於て CR の力の外に、分力の作用點 A 及 B が與へらるれば、後者の大さは次の方程式にて定めらる。

$$AP=\frac{BC}{AB}\times CR \quad 及 \quad BQ=\frac{AC}{AB}\times CR.$$

CR なる力(一一四圖)を他の三力に分解し、夫等が C と同一平面上に在る A, B 及 D なる諸點に作用するものとすれば、AC 及 BD の交點 E を求め、先づ CR を A に於ける力と E に於ける第二の力とに分解す、次に後者を BQ 及 DS に分つ。

此仕方に依りて、一水平滑面上に立てる三脚の上に在る力が各脚點即ち支持點に於て幾何の壓を作用するかを定め得。

支持點の數が三個よりも大なれば、此問題は、既に注意し得らるべき如く、不定なり、或は寧ろ各點に於ける壓力を知る爲には他の觀察(形狀の變化の如き)を加へざるべからずと云ふべし。

一六一　平行力の中心 (Center of Parallel Forces.)　簡單の爲に、前節の始に於て、力 CR (一一二圖)は C 點に於て作用せざるべからずと云へり。然れども夫は CR 線の他の何れの點に作用せしむとするも同樣なり。同様の注意は又任意に數多の平行力の合力にも適用す。

然れども一一二、一一三及一一四の諸圖中 C 點は CR 線上の他の點が有せざる一特質を有す。即ち互に合成せざるべからざる諸力の作用點、大さ及相互の平行なることを變ぜずして、諸力に他の方向を與ふるに、合力は尙常に C 點を過ぐる一線に沿ふて作用す。又三個以上の力があり、作用點が凡て同一平面上に在らざる場合にも常に此特質を有する一點あり、又此點は前節所與の規則を繰返し應用するに依りて見出し得。此點は合力の作用點として了解し得べく、所與の諸力が如何なる方向を有せりとも同樣なり、之を平行力の中心と名く。

一六二　重心 (Center of Gravity.)　地球が一物體の諸微部分を引く諸力は互に平行なりと認め得べく、即ち前述を應用し得べき一系をなすなり。是等は其和が即ち物體の重量に等しき一の合力を有す、又玆に上記の性質を有せる一點存在せり。實に物體の位置を不變ならしめて重力の方向を變ずることを得ず、然れども物體自身

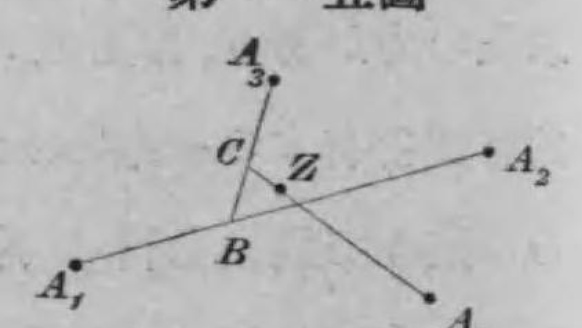
を廻轉し得べく、是に依りて物體自身に關して諸力が他の方向を占め得べし。重力の合力の作用點と見做すべき點は物體を何れの位置に持ち來るとも同一にして、之を重心と稱す。諸力の一系の合力は是等諸力全體と同じ仕事をなす力に外ならざる故に次の如く云ひ得。

物體の任意の運動に於て重力の仕事は重量を重心の垂直落下の高さに乘じて見出さる。之と連繫して、重力に關する位置のエネルギーは重量と一定水平面上の重心の高さとの積に等し。

是よりして一固體が一不動點の周りに凡ての方向に廻轉し得るもの、其重心が此定點の垂直下方に在れば安定なる平衡に在り、又垂直上方に在れば不安定なる平衡に在ることを知る。

尙注意に値するは重心の位置は諸質點の質量によりて完全に定め得らるゝことなり。故に又之を質量の中心と名く。即ち p_1, p_2, p_3, p_4 を以て、互に不變に結び付けられたる質點 A_1, A_2, A_3, A_4（一一五圖）の重量なりとすれば、前述に從ひ、重心は、始に A_1A_2 上に B 點を

第一一五圖



$$A_1B : A_2B = p_2 : p_1$$

なる樣に定め、次に BA_3 線上に C 點を

$$BC : A_3C = p_3 : (p_1 + p_2)$$

と定め、此の如く進めば求め得らるゝなり。重量は質量 m_1, m_2, m 等に比例するが故に以上の代りに又

$$A_1B : A_2B = m_2 : m_1,$$

$$BC : A_3C = m_3 : (m_1 + m_2),\ 等$$

の如く記すを得べし。

此等の比例式に依て、重力が全く作用せざる場合にも用ゐ得る質

量の中心の定義を得。

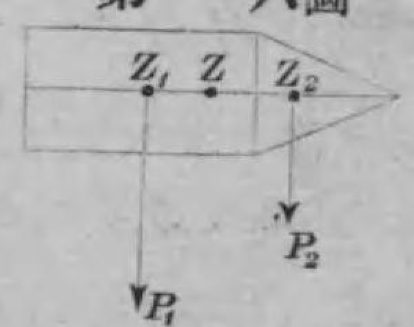
此定義は、互に不變に結び付けられざる諸質點に於ても亦應用し得。故に或る液體量、或は數多の質量微部分の互に全く連結なきものに於ても亦夫等の重心又は質量の中心に就て述ぶることを得。然れども今次の諸節に於ては、固體に就て論ずるものと假定し、重心を重力の合力の作用點として考ふべし。

一六三 重心を定むること (Determination of the Centre of Gravity.) 凡ての物體に於て重心の位置は、理論的には、諸平行力の合成に於て（一六〇節）知り得たる規則を繰返し應用するに依りて、定め得べしと考へ得。實に是等の力の數は無限なり、然れども高等數學は是等の合成を實際に施し得る方法を有せるなり。

簡單なる場合に於ては次の諸定理に依りて之を定め得。

a) 一物體が二部分より成り、其等の重量 P_1 及 P_2 又其の重心 Z_1 及 Z_2（一一六圖）なれば、全物體の重心 Z は P_1 及 P_2 二力の合力の作用點なり。物體を三個、四個或は尙多數の部分に分てば又略同樣なること適用す。凡ての部分の重心が一平面或は一直線上に在る如きことが可能なれば、全物體の重心も亦此平面或は直線上に在り。

第一一六圖



b) 物體內に一平面 V を考へ、其平面の一側に於ける物體の各微部分が、平面の他側に於ける第二の微部分と恰も同じ質量を有し、V より同じ距離に在る樣互に相當すとせば、重心は此平面內に在り。

先づ此の如き二微部分に作用せる力を合成せば合力の作用點は夫等の連結線の中點に在り、即ち V 平面內に在り。同じ事は諸微部

分を二個づゝ總括して得らるゝ凡ての作用點に適用すべし。

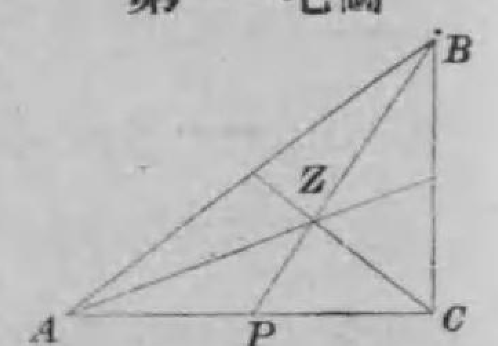
一六四　例 (Examples.)　物體のみならず、表面又は線の重心に就て述ぶるを得。即ち或る質量が或接續せる層に於て一表面上に或は同樣の仕方に一線上に配布せらると考へ得べし。勿論平面一部分に於ては重心は其平面自身の上に在り。又同樣に一直線に於ては直線上に在り。

薄き板或は細き棒の質量は殆ど一表面上或は一線上に配布せるものと考へ得。

次の諸例に於ては物質の配布が等質にして、即ち物體、面或は線の任意の同部分が同じ質量を有すと假定すべし。

a)　三角形の面　AC 邊に(一一七圖)平行なる諸線にて三角形を無限に細き帶に分ち得。各帶の重心は其長の中心に在り、即ち B と AC の中心とを結べる BP 線上に在り。即ち三角形の重心も亦 BP 線上に在らざるべからず、又同樣に A 及 C の各點を夫々對邊の中心と結べる二線各個の上に在らざるべからず、此等の諸線の交點は能く知らるゝが如く $PZ=\frac{1}{3}PB$ なる樣の點に在り。

第一一七圖

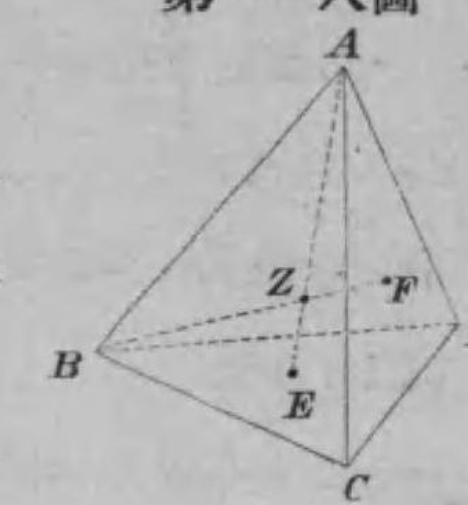


多角形の重心は之を三角形に分解して見出し得。

b)　角柱及壔　是等の物體を其基面に平行なる平面にて分ちて無限に薄き板を得、夫等の重心は凡て兩基面の重心を結び付くる線上に在り。即ち物體の重心も亦此線上實に其中央に在るべし。何となれば高さの中央を過ぎ基面に平行なる平面は一六三節 b に記せる性質を有するが故なり。

c)　三角塔　之を薄き板に分解せば重心は角點 A と底面 BCD (一一八圖)の重心とを結び付くる AE 線上に在ることを知り得。同樣に夫は B 角點と ACD 三角形の重心とを結び付くる BF 線上に在らざるべからず。是等の AE 及 BF 二線は Z に於て $ZE=\frac{1}{4}AE$ なる樣に切る。

第一一八圖



d)　多角塔及圓錐　多角塔を其頂點を過ぐる平面にて多數の三角塔に分解すれば、夫等の重心は底面に平行にして高さの四分一に等しき距離に在る平面內に在り。之を底面に平行なる薄き板に分解することゝ結合せば、重心は頂點と底面の重心とを結び付くる線の上に在るを知る。且つ底面の重心より全長の $\frac{1}{4}$ の距離に在り。此定理は角點の數に無關係にして、又圓錐に就ても適用す。

e)　廻轉面或は廻轉體の重心は其軸上に在り。

f)　圓弧の重心は、b を弧の長さとし、k を弦、r を半徑とすれば、弧の中心より kr/b の距離に在り。

半徑 r の圓扇形を其中心を頂點とする無限小の三角形に分解せば、扇形の重心は $\frac{2}{3}r$ の半徑を以て扇形の弧と同心にて畫ける圓弧の重心と一致するを證明し得。

球面の一部分、球帶又は球冠の如き形を有するものゝ重心は其高さの中央に在り。

半徑 r の球扇形の重心は扇形の內部に $\frac{3}{4}r$ の半徑にて球扇形の球冠と同心にて造れる球面部分の重心と一致す。

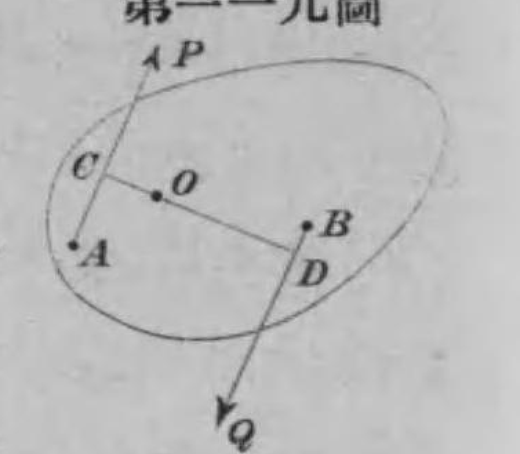
二圖形より成れる一圖形の重心を與へ得る如く、重心を知れる二圖形の差なる一圖形の重心も求め得。此仕方にて尖端を除ける多角塔及圓錐、圓及球の一部分、又球層の表面積の重心を定め得べし。

一六五　偶力 (Couple.)　偶力とは互に平行にして、而も方向反對

に、大さ相等しき二力の一系を云ふ。是は單一の力にて置換し得ず、物體の變位に於て單一の力は仕事をなし得るも、偶力はなし得ず。

一一九圖を一見すれば偶力は廻轉を生ぜんとするものなるを知るべし。廻轉の方向は、同じ平面或は平行なる二平面に於て作用せる二個の偶力に於ては、相等しく或は反對なるべし。

第一一九圖



一一九圖の偶力が作用せる物體が O 點に於て偶力の平面に直角なる一線の周りに無限小の廻轉 ε をなしたりと考ふべし。其廻轉の方向は偶力が物體を動さんとする方向と一致すべし。COD を此等の力の方向に直角に引けば一五七節に從ひ偶力の仕事は

$$\varepsilon \times BQ \times OD + \varepsilon \times AP \times OC = \varepsilon \times AP \times CD.$$

なり。O 點を何處に取るとも又夫れが AP 及 BQ 二線の間に在らずして夫等の外又は其一線上に在りとなすとも常に同一の結果に來るべし。

二力の作用せる二線の距離 CD を偶力の腕と名く。是と力の大さとの積を偶力の能率と云ふ。上の計算により廻轉軸が偶力の平面に直角なれば能率と廻轉角とを乘すれば其仕事を見出し得。

是は一五七節の所述と一致す。唯其相違は單一の力に於ては一定軸に關する能率に就て述ぶるを得るのみなれども、偶力の能率は軸を定めずとも或一定の値を有し得ることなり。

廻轉の方向が、偶力が物體を廻轉する方向に反對なれば、偶力の仕事の負なるは更に云ふを要せず。

能率が同一なれば、所與の一平面に於ける一偶力の仕事は力の大

さ、其作用せる方向及作用點に無關係なり。平行なる平面に作用し廻轉の方向並に能率に於て一致せる二偶力は平面に直角なる軸の周りの廻轉に於て其爲す仕事相同じ。

之を知れば、次の定理の正しきを考へ得べし。

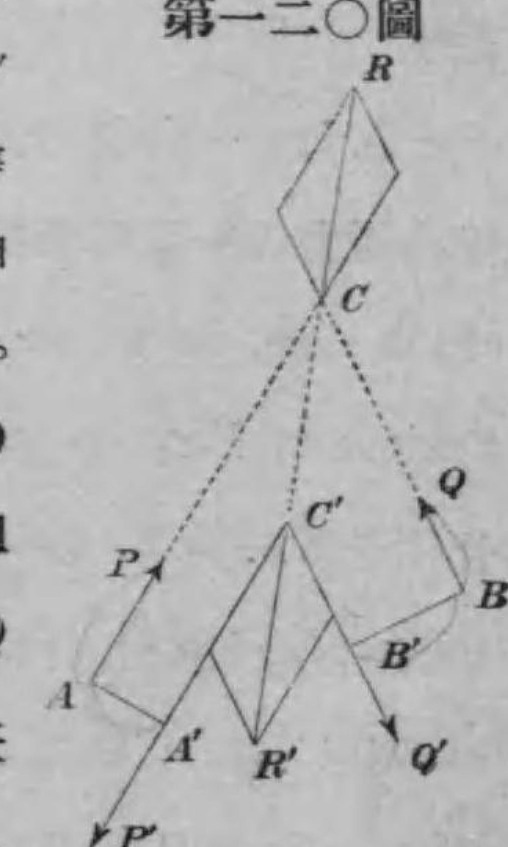
a) 同一平面或は平行なる平面に在りて同じ能率、同じ廻轉方向を有せる二偶力は互に同價なり。

b) 同一平面或は平行平面に於て同じ能率、然かも反對なる廻轉方向を有せる二偶力は互に平衡に在り。

c) 同一平面或は平行平面に於ける數多の偶力は之等の平面に平行なる一平面に於て、所與の偶力の能率の代數和に等しき能率を有せる單一の偶力に同價なり、能率の符號は偶力が一方或は他方の廻轉方向を有するに從ひ正又は負とすべし。

是等の定理は一五八節所述よりして導き得べし。例ば (*b*) に云へる二偶力が同一平面（一二〇圖）に在りとすれば、AP 及 BQ の二力を C 點に移し合力 CR に合成し得べし。同樣に $A'P'$ 及 $B'Q'$ の二力を $C'R'$ に合成し得べし。二力 CR 及 $C'R'$ は等しくして反對なり。二能率 $AA' \times AP$ 及 $BB' \times BQ$ が相等しければ夫等は CC' 線の方向に作用し、互に相消去す。

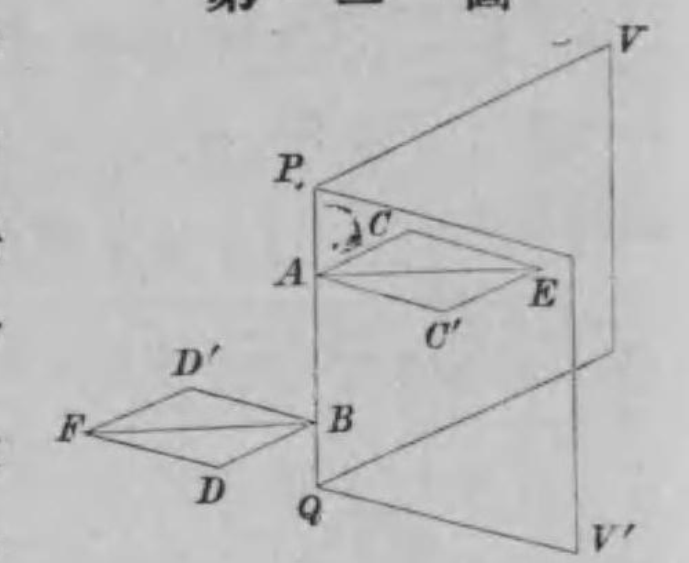
第一二〇圖



一六六　平行ならざる平面に於ける偶力の合成 (Composition of Couples not in parallel Planes.) V 及 V'（一二一圖）の二平面が PQ に於て切れりとし、此等の平面上に二個の任意なる偶力ありて其能率を M 及 M' とす。二點 A 及 B を任意に PQ 線上に取り、之等の點に於て互に反對

なる二力 AC 及 BD が V 平面内に在りて AB に直角に作用し、共に M/AB に等しとすれば、是等二力より成れる偶力が前節所述に依り V 内所與の偶力と若し廻轉方向が兩者相一致せば同價なり。兩者の廻轉方向は適當に AC 及 BD の方向を選めば常に相一致せしめ得べきなり。同樣に第二平面に於ける偶力は、二力 AC' 及 BD' の、互に方向反對にして共に M'/AB に等しく、二平面 V' 中に在りて AB に直角なるものと置換し得べし。最後の AC 及 AC' を AE に又同樣に BD 及 BD' を BF に合成し得。是に依りて新しき偶力 (AE, BF) を得、最初の二偶力に同價にして、明に V 並に V' と或角をなせる一平面内に作用す。

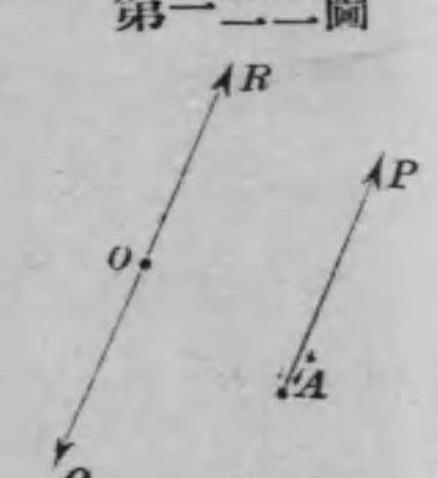
第一二一圖



此方法を繰返し應用して常に種々の平面に於ける任意數多の偶力を單一の偶力に合成するを得。

一六七 一力を其作用の方向に於ける線外の一點に移すこと。任意諸力の一系の取扱 (Transference of a Force to a Point outside of the Line, in whose Direction it acts. Treatment of an arbitrary System of Forces.) AP (一二二圖)を一固體に作用せる一力とし、O を物體内任意一點とす。O 點に相互反對方向の二力 OQ 及 OR を置く、兩者共に AP に等しく且平行なりとす。是等三力の一系は明に AP の力と同價にして、之を又 O に作用し方向及大さに於て AP と一致せる

第一二二圖



一力 OR と偶力 (AP, OQ) とより成ると考へ得べし。

故に一力は一任意點に作用せる同方向同大の或る他の力を以て、若し尚之に適當なる偶力を加ふれば、置換し得べきなり。

之を用ゐて、一固體に作用せる諸力の數如何に多しとも其任意の一系を合成するを得べし。此爲には一點 O を選び、此點へ凡ての力を移すべし、然れば O に於ける凡ての力は單一の力に合成し得、又同樣に此移すことに依りて得る全偶力を一偶力に合成し得べし。斯して諸力の一系は凡て一力及一偶力に依りて置換せられ得べし。一力及一偶力は決して互に相消去し得ざるが故に即ち、物體は所與の力の一系の作用の下に於ては全力並に合成偶力が消失せる場合にのみ平衡に在り得べきを知る。

合力に就ては三〇節の定理を應用し得べし。即ち任意一方向に於ける其投影は所與の諸力を其方向に投影したるものゝ代數和なり。此和が零に等しきとき平衡を得。

例ば此場合物體に作用せる諸力を垂直と水平との分力に分解せば、上方に向へる分力の和は下方に作用せるものゝ和に等しからざるべからず。

上記の仕方により三力が互に平衡に在る場合を研究せば、先づ夫等が一平面内に在らざるべからざるを知る。尚二個の場合可能なり。

a) 是等三力が互に平行なる線に於て作用す。然れば其中二力の合力が他の一力に等しくして反對にて(一六〇節)又之と同一なる線上に於て作用せざるべからず。

b) 三力が作用せる諸線が一點を過ぐ。諸力を此點に移し其二

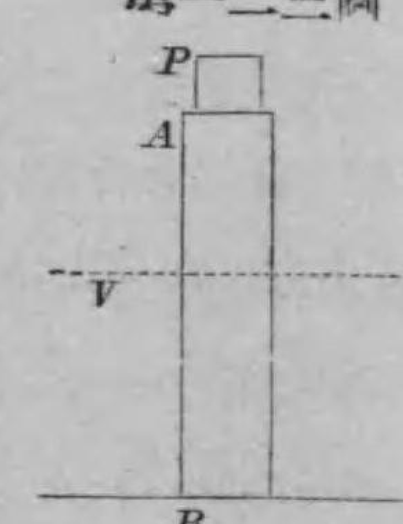
個を力の平行邊形に依り合成し得べし。然れば第三の力は此合力に等しくして反對ならざるべからず。

其他諸力の一系の合成に於て上記の點 O を何處に選むかは場合に依りて異なり。物體内の一點が固定せらるゝ場合には諸力を此點に移すこと最適宜に、全く自由なる物體に於ては是等を重心に移すを最適當とするなり。

一六八 固體に於ける内力を定むること (Determination of the Internal Forces in a Solid Body.) 一物體が靜止に在らば、其任意の部分に作用せる諸力は相互に平衡に在らざるべからず。此考よりして、或る限られたる部分が此の如き他の部分に作用せる諸力に就て少しく論ずるを得べし。

a) AB (一二三圖)を垂直なる一柱とし、水平面上に立ち、重量 P を荷ふものとす。思考上此柱を一水平面 V にて二部に分つ。此上部の平衡の爲には、上方に、重量 P に等しき一力に倘 AB 自身の重量を加へたる力作用すること必要なり。此力は唯だ柱の下部分よりのみ作用せられ得。倘凡ての作用が夫に等しくして反對なる反作用に對することを知れば、V の兩側に在る柱の二部分は此面に直角なる方向に於て相互に壓せりと論結し得。

第一二三圖

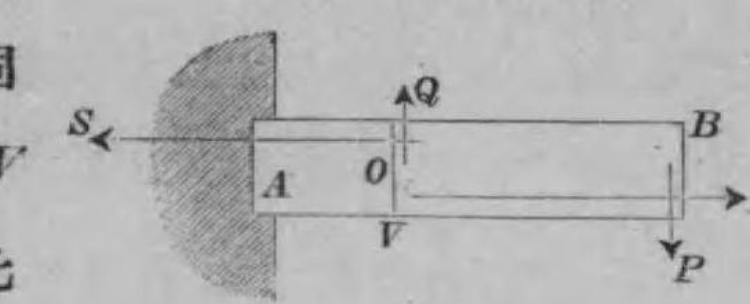


b) 同様に、上方に於て吊され其下端に重量 P を有せる一の棒に於ては一水平切斷面の兩側に於ける部分は此斷面に直角なる力を互に作用し、*a*) の場合に於ける如く夫等が反對の方向を有せるを知る。此の如き諸力を法線張力と名く。

一般に張力なる語は一物體の或面の兩側に於ける部分が相互に作用せる力を記すに用ゐらる。

先に既に學びたる絲の張力は絲が之に結べる物體に作用する力なるのみならず、絲の相接せる兩部分が互に作用する力なり。

第一二四圖



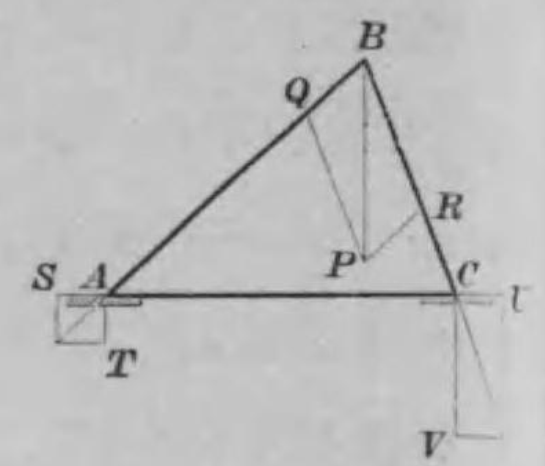
c) 一二四圖に於て AB は一の棒にて其一端にて水平の方向に固定し、他端は重量 P を荷ふ。V は長さに直角なる切斷面なり、此斷面の右方の棒の部分に就て平衡條件を求む。此部分に於て垂直方向に作用せる諸力は相消去せざるべからざる故に、V の左方の棒の部分は右方の部分に一力 Q を垂直上方に作用せざるべからず。此力は棒の重量を省略せば P に等し。勿論 VB は VA に等しくして反對なる力を作用す。故に P なる荷は VA 部分に移されたりと云ふを得べし。

此等の力は V 面に沿ふ方向に在るが故に切線張力と名く、然れども之等が棒の部分間に作用せる唯一の者に非ず。何となれば力 Q は P と共に一の偶力を作り、平衡の爲には是が能率を等しくせる他の張力に依りて消去せらるゝを要すればなり。是は Q にて記せるものゝ外に唯、VA に依りて VB に作用せる諸力、例ば R 及 S にて示せる如き諸力に依りてのみ可能なるなり。此の如き張力が如何にして生ずるかを知るには諸外力は固體に僅少なりとも常に或る形狀の變化を與ふるを考へざるべからず。諸内力は之を彈力と記し得べく、此形狀變化に依りて始て生じ得らるゝなり。一二三圖の場合に於ては内力は壓縮に依りて生ず。一二四圖にては重量は棒の*d*

VB なる部分を稍 VA に沿ふて下方に引き Q なる力を生ずるのみならず、尚此部分を少しく O 點の周りに廻轉することを考へざるべからず。是に於て VB は上部に於ては VA に離れんとし、之に反して下部に於ては兩部分を互に壓縮せり。

d) 一二三圖の棒が重量を荷はずして、下端が固定し、上端に於て水平面内に一偶力をなす二力作用せりと考ふべし。然らば棒の BV の部分は AV の部分に對し此偶力に等しくして反對なる偶力を作用せざるべからず、此力は勿論唯 V 平面内の切線張力のみより生じ得るなり。是に等しくして反對なる即ち A 端に於けるものと同じ方向を有する一偶力を AV は BV に作用す。

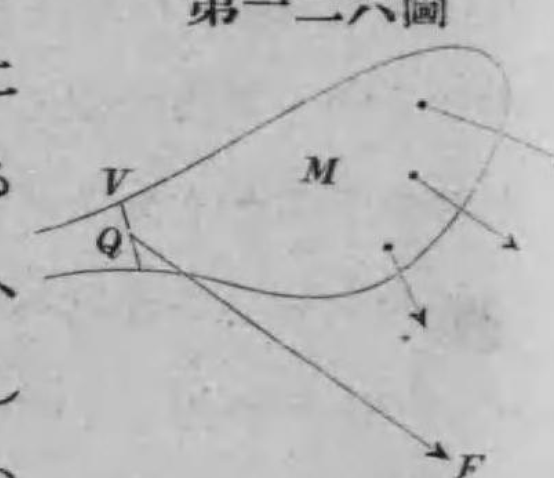
第一二五圖



e) M (一二五圖)を平面 V にて限らるゝ物體の一部分とし、此部分に任意諸力の一系作用すとす。此等の力を凡て V 上の一點 Q に移せば一合力 F 及一偶力を得、後者は圖中に示さず。平衡の爲には物體の V の左部分より M に作用する諸力が F 力に等しく且反對なる一力 Q 及一偶力に歸して、上記のものと釣合ふを要す。

f) 一二六圖は梁を三角形狀に連結せるものを示す。垂直位置に於て A 及 C 二點にて二個の同じ高さにて完全に滑かなる水平面上に靜止し、頂點 B に重量 P を荷へりとす。梁の重さは此荷に比して省略し得べしと假定すべし。又 B に於ける梁の

第一二六圖



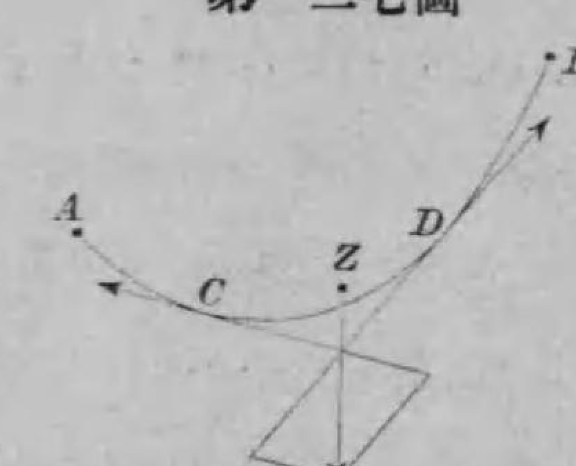
結合は一梁が他に關して僅に廻轉をなし得るものと考ふ。故に AC が存在せざれば、B 點は下方に又同時に A 及 C 點は外方に動くべし。三角形を全體として見れば支持面に於ける垂直壓力は、P を一六〇節の規則に從ひ A 及 C に於ける平行力に分解して見出し得べし。然れども内力は次の如くにして見出す。P を BA 及 BC の方向に BQ 及 BR に分解し、此等分力を A 及 C に移し、之等を此點にて水平及垂直の分力 AS 及 AT, CU 及 CV に分解す。勿論是に於て $AS=CU$ なり。是等の力に依りて AC は延長せられ、梁 AB 及 BC は BQ 及 BR の力に依りて壓縮せらる。

荷を加ふると共に AC に於ける張力が此梁の小なる延長に依りて如何にして生ずるかは前述に依りて明なるべし。

一六九　上記定理若干の變形物體に於ける擴張 (Extension of some of the above Theorems to a Body of Variable Form.) 其形を變じ得べき物體が諸力の一系の作用の下に平衡に在らば、其任意一部分に於て、平衡を亂さずして其組成部分を互に固く結合するを得べし。故に此部分に作用せる諸力は不變形の固體に就て學びたる諸條件を常に滿足せざるべからず。

例ば絲が其兩端を A 及 B にて固定し重力の作用に依りて一二七圖に示せる形を占めたりとす。CD の部分は同じ形同じ重さの不可曲の捧にて置換し平衡を亂さざることを得べし。此部分には第一に重力作用し、重心に作用せりと考へ得べし。又第二に AC 及 BD の絲の張力あり。平衡の爲には C

第一二七圖



及 D に於ける切線が Z を過ぐる垂直線上にて交ること必要なり。是等三力の大さに關しては既知の關係成立すべし。

第二の例として平衡に在る液體の一量を考ふ。一閉表面內に在る一部分は其容積を變せずして固結せりと考へ得。即ち此部分に作用せる諸力は固體に於ける平衡條件を滿足せざるべからず。然れども液體に於ては尙他の平衡條件を充すべきなり、何となれば、固體に作用せば平衡に在る諸力も、液體に作用せば然るを得ざる場合を容易に考へ得べければなり。

上記の定理を應用するには觀察せる部分に外方より作用せる諸力のみを考ふるを要するなり。例ば之を水平と垂直との分力に分解せば上方に向へる分力を凡て下方に向へるものと同數と考へざるべからず。是に於て內力に就ては全く考へざるを得べし、何となれば一物體又は一物體の一部分は其分子の相互作用によりては決して全體として一定の方向に動くことなかるべければなり。是れ內力が各二個づゝ等しくして反對なるの結果なり。

柔軟なる絲又は液體の一量に於て地球が此等の分子に作用せる諸力は重心に於ける單一の力と同樣なる作用をなし得ざれども、然も此點が固體に於て有せる一性質は尙ほ存せるなり。

即ち各物體に於て或運動に於ける重力の仕事、同時に其位置エネルギーは固體に於けると同じ仕方にて重心の昇降よりして見出さる。

一二八圖が一一五圖と異なるは、水平面 V を用ゐ是に垂線 A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3, ... Bb Cc, Zz を下せることなり。一六二節の比例式よりして

$$(p_1+p_2)\times Bb=p_1\times A_1a_1+p_2\times A_2a_2,$$

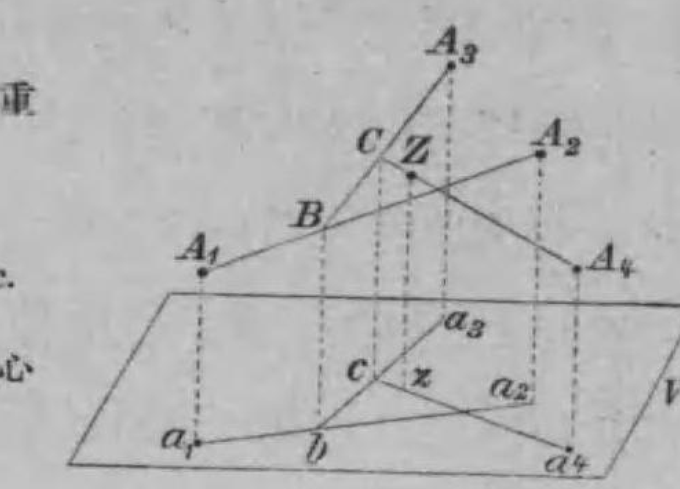
$$(p_1+p_2+p_3)\times Cc=(p_1+p_2)\times Bb+p_3\times A_3a_3$$
$$=p_1\times A_1a_1+p_2\times A_2a_2+p_3\times A_3a_3.$$

是等の方程式を尙續け得べく、結局 P が全系の重量ならば

$$P\times Zz=p_1\times A_1a_1+p_2\times A_2a_2+p_3\times A_3a_3+etc.$$

なり。此方程式は位置エネルギーは全質量が重心に一致せると同じ値を有せるを表はす。

第一二八圖



例ば此定理を二定點に掛かれる絲(一二七圖)に應用し得べし。絲が不可伸且完全に柔軟なりとすれば內部エネルギーは常に同じ。故に(一五五節)絲は重力に對する位置エネルギーが極小なるとき、即ち重心が出來得る丈低き場合に平衡に在り。

一七〇 物體の運動に於ける重心の性質 (Properties of the Centre of Gravity in the Motion of a Body.) 運動せる一系の各瞬時に於ける重心の位置は一六二節の規則に從ひて定め得べし。此點は恰も全質量が此に合一し又系の諸點に應用せる凡ての力が此點に作用せるが如く動く。故に各力は何れの點に作用せりとも其大さに比例せる速度變化を質量中心に與ふるなり。

此定理よりして次の如く演繹し得べし。

a) 重心の運動は內力に無關係なり。何となれば內力は各二個づゝ等しくして且反對にして、即ち之等を重心に移せば互に消去すればなり。

何等外力あらざれば、重心は靜止するか、或は不變速度にて一直線上に動く。

例ば是は全太陽系の質量中心に就ても、少くも此系に何等著しき外力作用せざるを假定し得べき場合には適用し得べし。

b) 棒が斜めに上方に投げらるれば重心は一の拋物線を畫く、其外に物體は此點の周りに廻轉し得。重心が拋物線狀の運動をなすは榴彈が空中に於て爆發し其一片も地に落ちざる間は亦然るなり。

c) 吾人は吾人の身體を內力に依りて相互に比較的に動かし得べし、然れども吾人の重心は唯外力の助によりてのみ動かし得べきなり（八一節）。

完全に滑かなる水平面上に滑べれば重心は垂直線上に動く。

d) 固體に作用せる偶力は重心の運動には何の影響をも有せず。物體が始に靜止に在れば偶力に依りては重心を過ぐる軸の周りの廻轉のみを得べし。

上記の定理の證明。　直角三坐標軸を取り第一點の坐標を x_1, y_1, z_1, 第二點を x_2, y_2, z_2, 等とし、又重心の坐標を x, y, z とす。然れば（一六九節參照）

$$Px=p_1x \;+p_2x_2+etc.$$

重量と質量との相比例せるにより上式は又

$$Mx=m_1x_1+m_2x_2+etc.$$

と記し得べし、此中 m_1, m_2 等を以て諸質點の質量、並に M にて全系の質量を記す。

此方程式は y 軸及 z 軸に關せる他の方程式と共に重心の位置を定むるに用ゐらる。

方程式は各瞬時に於て適用し得。是よりして諸坐標の無限小の時間 dt に於ける增加 $dx_1, dx_2, \ldots\ldots$ 及 dx の間に次の關係

$$Mdx=m_1dx_1+m_2dx_2+etc.$$

を得。此方程式を dt にて除すれば

$$Mu=m_1u_1+m_2u_2+etc.$$

を得。$u_1, u_2, \ldots\ldots$ 及 u を x 軸の方向に於ける諸質點及重心の速度とす。

故に x 軸の方向に於ける諸運動量の代數和は全質量が重心に集れるときに重心が同方向に於て有すべき運動量と同大なり。每瞬時に於て是が正確なる故に極微時間 dt の間の

此代數和の變化は重心に於て質量 M の運動量が受くる變化と同大なり。然れども X_1, X_2 等が系の諸點に x 軸の方向に作用せる諸力なりとすれば、此變化は

$$(X_1+X_2+\ldots\ldots\ldots)dt$$

なり。即ち重心の速度 u は、質量 M が此に集り、其運動量が此の如き增加を受くる如く、變化せざるべからず、是は此質量に $X_1+X_2+\ldots\ldots$ の力が作用せる場合に然るべし。同樣なる結果は y 軸及 z 軸の方向に於ける速度の變化にも適用せらるゝが故に定理は證明せらる。

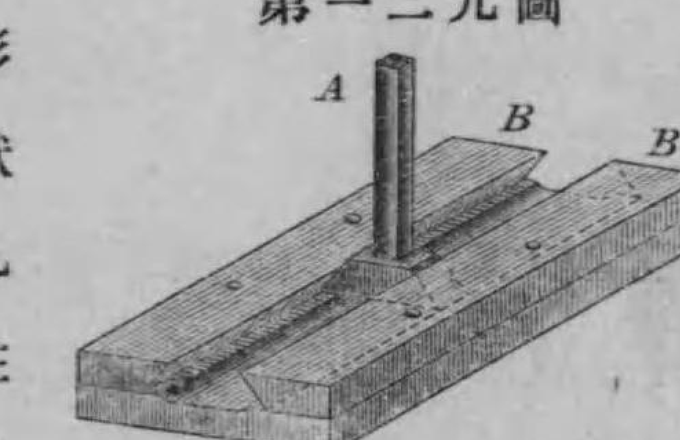
又次の定理も記載を値するなり。一剛體が始に靜止にあれば重心に作用せる一力に依りて廻轉なき進行を得。

任意諸力の一系が作用せば之等を重心に移し得。合力は進行運動を、合成偶力は廻轉を生ず。

一固體に旣定の運動を與へんとせば、各點に恰も其運動に要する力を作用せしむるを得べし。然れども夫等諸力の系の代りに又他の之と同價なるものを取り得べし。進行運動に於ては凡ての微部分が同じ方向に於て同じ加速度を得るが故に、是爲には平行力が各微部分に作用し其質量に比例せりとすべきなり。然れども此の如き力は重心に作用せる單一の力と同價なり。

一七一　固體の運動の制限（Constraint in the Motion of a Solid Body）.　多くの場合に於て一物體が或旣定の仕方に動くことを强制せらる。

第一二九圖

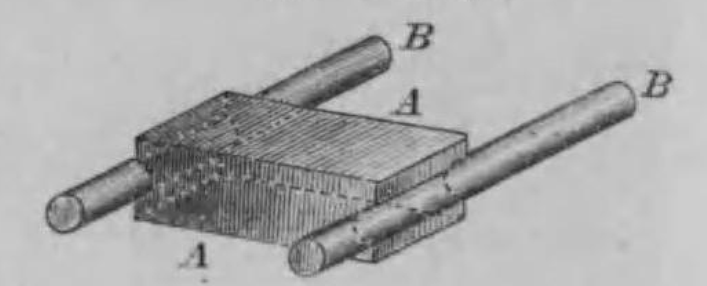


a) 物體が唯直線的にのみ移動すべきならば、其一部分に或角柱の形を與へ、夫が固定せる B 片の角柱狀の溝の內に適合する樣にす。一二九圖よりして此角柱と之に連結せる柱 A とが唯角柱の側緣の（圖に於ては

水平の）方向にのみ動き得る事を見るべし。

角柱の斷面は種々の形を有し得べし。一三〇圖に於ては物體 A は二個の圓壔 BB に依りて導かる。又唯一個の圓壔にても何等かの仕方にて廻轉を妨げ得れば之を用ゐ得。

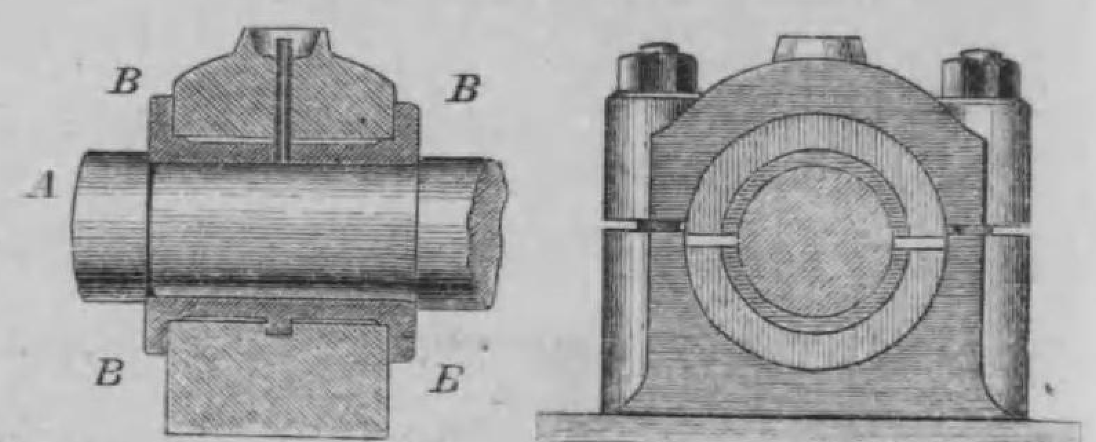
第一三〇圖



b) 之に反して一圓壔が一空所に適合し、移動を妨げらるれば唯廻轉のみが可能なり。此の如き廻轉し得る圓壔を軸と名く。

一三一圖に於て A の移動を不可能にせる仕方を見るを得。此軸の圍まれたる部分を樞軸と名け、圍める物體 B を軸承と名く。此物體は必しも常に圓壔狀の孔を有すとせず、他の形なるもあり。

第一三一圖



水平軸に於ては通常二個の樞軸を兩端に於て有す。長き軸（工場に於ける起動軸）は尙他の場所に於て同じ仕方にて支へらる。

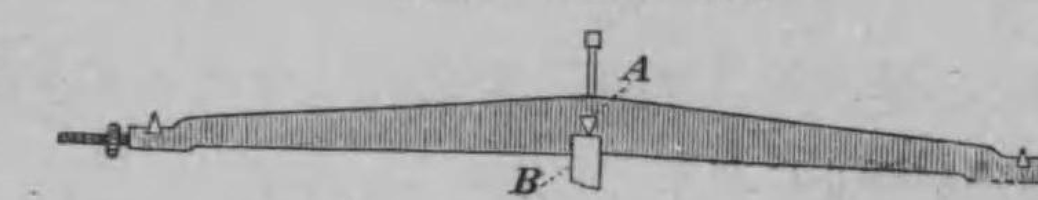
樞軸は、二片の、一は軸の下に、一は軸の上に在るものゝ間に靜止し、適當に互に壓せらる。或場合には唯下方の軸承のみが在ることもあり。

垂直軸は下端に於て圓錐狀に突出し、之を以て固定せる物體の孔の中に靜止せしめ得べし。

c) 物體が水平軸の周りに僅の摩擦にて廻轉することを得る爲に

是に一の刄端を附す、即ち鋭角の三角柱にて、其端を水平板上に置くなり。兩者共に固き物質より成らざるべからず。一三二圖に示せる天秤の桿にては鋼鐵より成れる刄端 A は塊 B の上に在り。多くの天秤にて B は瑪瑙より成る。刄端が鋭き程運動は一軸の周りの廻轉に近づく。然れども實際には常に一平面上一圓壔の轉するものたり。

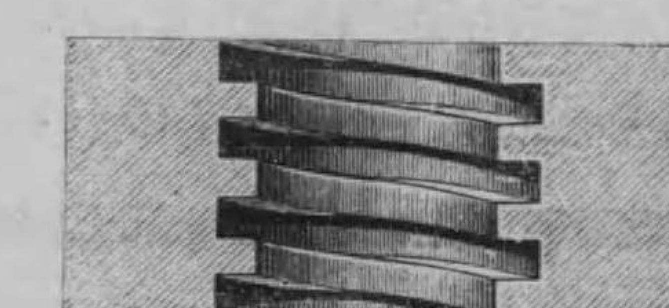
第一三二圖



d) 矩形又は三角形を一圓壔に沿ふて其平面が絶えず圓壔の軸を過ぎ、且一邊を圓壔面上に置く樣に動かし、各點をして螺旋の線を畫かしめ得。此線を螺絲と名く。此の如く外方に立てる線を有せる圓壔を螺旋と云ふ（一三三圖 A）。之を一の孔に適合せしめ、孔の緣には螺線に沿ふて走れる溝を備ふるものとす。此孔は一三三圖 B に於て背面を見得べく、母螺旋と名くる片中に在り。之を固定せば螺旋のみが廻轉及夫と同時に移動をなすを得べし。即ち各廻轉に於て螺旋の歩み（二五節）に等しき丈の變位あり。

第一三三圖 A

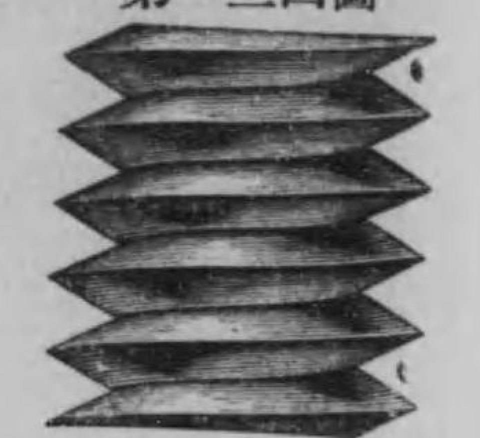
第一三三圖 B



既述の如く螺旋の側面、即ち軸を過ぐる平面にて螺絲を切りたる斷面は種々の形を有し得。矩形（一三三圖）又は三角形（一三四圖）なるあり。同じ母螺旋を同大の種々の螺旋に用ゐること屢あり、

其逆も亦屢あり。此為には歩みのみならず、側面が一致すること必要なり。故に種々の大さに就て各一定の歩み及一定の側面の相當する樣螺絲の系を定む。

第一三四圖

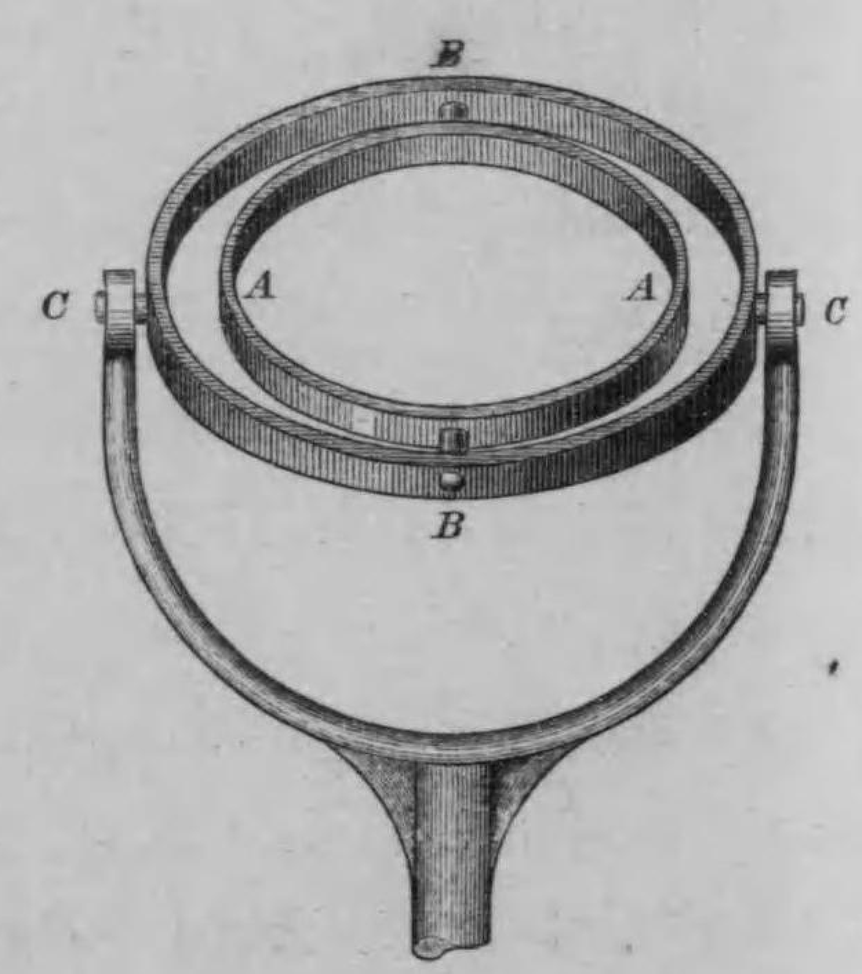


凡て前述の場合に於ては B を以て記せる物體が靜止に在りと假定せり。然れども常に此の如くなるを要せず、一般に既記の結合に依りては唯だ一物體の他物體に對する相對運動が定めらるゝのみなり。船舶の車は船舶に對して廻轉をなす、車を機關に結び付くる桿は車に對して廻轉す、其實際の運動は實は移動なり。

c) 既述の外尚他に種々の、又或は甚だ複雜なる仕方にて固體の運動を制限することあり。

例ば物體の或一點が常に其位置を變せざる樣に制限するを得べし。即ち物體に固定せる球を中空なる球片内に廻轉せしめ、此球片が一部分球を圍めるものあり(球關節)。或は物體を一三五圖に於ける AA の輪の如く BB 軸の周りに廻轉せしめ得、此軸の支持點も亦一の輪の上に在りて、輪自身は CC 軸の周りに廻轉し、又此軸が第一軸に直角なるを得(カルダニの吊り方)。

第一三五圖



機械は唯一定の目的に必要なる仕方にのみ動き得る物體

或は數物體の系なり。其一部分に與へたる運動は他部分に移り、斯して屢全く其種類を異にするに至る。

機械の諸部分間の結合は、多くの場合に於て、其一部分の表面が絶えず他部分の表面と接觸するを要する樣のものなり。上述の種々の場合は此例とすべく、又他の例としては二個の互に相嚙める齒車の如きあり。

機械の二個の部分は又鏈、索或は調革にて連結せられ得。

一七二 諸機械に於ける平衡 (Equilibrium in Machines.) 一機械の種々の部分の相觸るゝ表面が互に轉がれば(少くも廻轉摩擦[一八二節 d] 即ち表面の形狀變化に依りて生ずるものを省略せば)諸部分間に作用する諸力は運動に依りて何の仕事をもなさず。何となれば作用は反作用に等しくして且反對に、夫等が觸るゝ表面上の諸點は同じ速度を有すればなり。諸力の仕事は互に滑べれる表面に於ても亦唯表面が完全に滑かなるときは零に等し。運動が索又は調革にて傳へらるゝ場合にも、夫が兩端に於て機械の部分に固定せらるとも、又其表面に若干の長さ觸れ、摩擦に依りて之を伴ふとも、等しく此の如し。後者に於て力は索が表面を滑らざる間は何の仕事をもなさず。何となれば索の諸點及表面の諸點が同じ速度を有し、摩擦は之に上記の力と等しき力を以て反對の方向に作用すればなり。索が延長せられざれば其張力の仕事も亦零に等し。何となれば是が作用せる二點は索の方向に於て同じ向きに同じ丈移動すればなり。

終りに索の内部エネルギーの變化も亦省略し得べし。唯若干の場合に於て索が稍硬く其曲率を變ずる場合には然かする能はず。

故に多くの場合に於ては機械の諸部分に作用せる外力のみが考へ

らるゝを要するなり。然れば全機械に於ては一五六節に於て單一の物體に與へたる如き考察が適用せらるゝなり。

斯して凡ての無限小の變位に於て力の仕事が零に等しきときに平衡があり得べし、二力即ち運動せしむる一力 F 及打勝つべき抵抗 P のみが與へらるゝ場合には此條件は特に簡單となる。今 f 及 p を以て F 及 P が作用せる線上へ作用點の無限小の變位を投影したるものとし、第一のものには力と方向を一致せる場合に正とし、第二には P と方向を反對にせる場合に正とすれば

$$F\times f=P\times p\qquad\qquad(3)$$

ならざるべからず。

機械が動けば全仕事 $Ff-Pp$ は運動エネルギーの增加に等し。緩漫なる運動に於ては運動エネルギーは省略し得べし。即ち方程式(3)に歸す。是に依りて定めたる F の値は抵抗 P と平衡に在る力として考察し得るのみならず、又運動の間に抵抗に打勝つ力として見るを得。運動が大速度を以て起れるときにも其が絶えず同大なりと假定せば適用す。然れば運動のエネルギーは不變なり、故に再び $Ff-Pp=0$ ならざるべからず。

抵抗 P は上ぐべき荷の重量たるを得。又物體を小刀又は鋸にて切るとき物體の微部分の連結よりして生ずるものたるを得。或は制動機の抵抗として機械の一部分が他部分に作用せる力に依りて壓せらるゝものたるを得。力 F が與へらるれば制動機は其抵抗が力 F と釣合ふ大さに達するまで壓せらる、此大さは Ff/p と記し得べし。f と p とは上記の仕方にて機械が抵抗あるに拘らずになす無限小の運動に關係す。即ち上式は力 F に依て働かるゝ壓を定む。前

述により、重荷を小なる力にて上ぐるには後者の作用點が荷よりも遙に大なる道を經過すべきこと、又同樣に抵抗 P を道 p 丈打勝つには常に同じ仕事を要し、如何なる機械を用ゐるとも同一なる事も容易に知るを得。

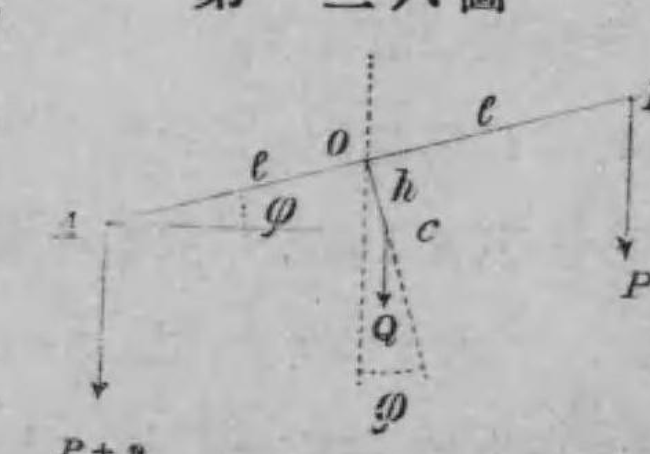
仕事の考察に依る外又力及偶力の合成及分解に依りて平衡條件を求め得べし。第一の方法は容易に目的に導く、然れども少くも之を機械全體の上に應用する場合には互に觸るゝ表面間の壓又は索の張力は遂に知るを得ずと云ふ缺點あり。是等の力は唯機械の諸部分の特別の考察によりてのみ算出し得べきなり(一六九節參照)。

次の諸節に於て若干の例にて前述の説明を見るべし。

一七三　槓杆　秤 (Lever. Balance.)　一定軸の周りに廻轉し得て直線狀或は曲れる棒の形を有せる一物體を槓杆と名く。其平衡條件は一五七節及一七二節所述に依り此軸に關する諸力の能率の代數和が零ならざるべからざることなり。

天秤の杆は水平軸を有し腕を等しうせる槓杆なり。平衡の位置に於ては重心は平衡が安定なる爲には軸の垂直下にあらざるべからず。兩腕が重量を荷ひ、夫等が互に少しく異れりとすれば、天秤の杆は斜めの位置を取り、過重と天秤の杆の重量とにて平衡に在り。故に此重量と過重とを比較すべし。

第一三六圖



一三六圖に於て O を廻轉軸とし、C を天秤の杆の重心とし、皿が A 及 B に掛れりとす。又 P を二個の皿各個及其上に在る等しき荷重の重量とし、Q を天秤の杆の重量とす。又 A, O 及

Bが一直線上に在りて且 $AO=OB=l$ なりとし、即ち秤は兩腕を等しくし $OC=h$ が廻轉軸と重心との距離を表はすものとす。一方の皿の上に小なる過重 p を加ふれば φ なる傾きにて再び平衡を得。之は

$$tg\varphi=\frac{pl}{hQ}$$

或は近似的に(三二節)

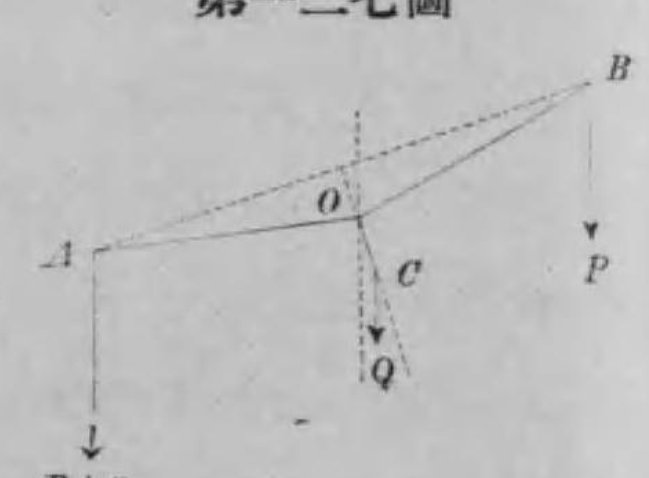
$$\varphi=\frac{pl}{hQ}$$

にて定めらる。

感度は φ 及 p の比にて測られ、荷 P に無關係なり。h が小なる程感度增加す。調整の螺旋にて h を變じ從て感度を變じ得べし。又天秤の杆を長くして重量 Q が增大せざれば、l の增加は感度を高む。然れども Q は l よりも更に速に增加す、何となれば l を增加すると共に杆の曲がらぬ爲には太さを大にせざるべからざればなり。斯して全體として感度が減ずべし、故に恰も短くして輕き天秤の杆を用ゐるを利とするなり。

天秤に於て A, O 及 B 諸點が一直線上にあらざれば感度は荷に關係す。一三七圖の場合には Aを過ぐる垂直線は B を過ぐるものよりも O よりの距離大なり。同じ荷 P を兩者に於て增加するに依り振れの增すは容易に知るを得べし。斯して是に於ては感度は增加す。

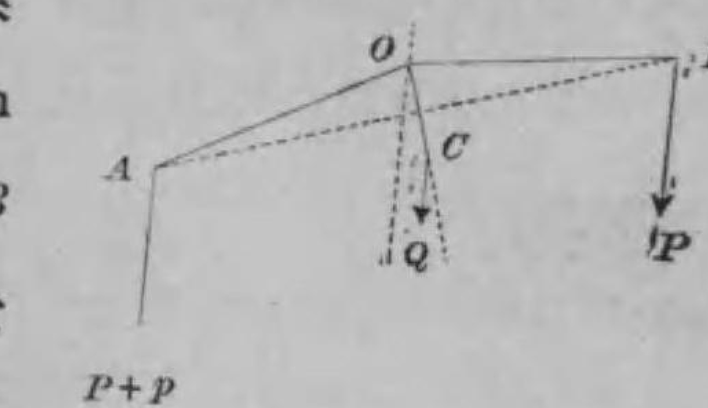
第一三七圖



一三八圖の場合に於ては其反對にして、感度は荷重を增すと共に減ず。種々の荷重に於ける感度の精密なる研究により、往々天秤の杆は曲りの爲に一三七、一三六及一三八の諸圖の形を順に占むる

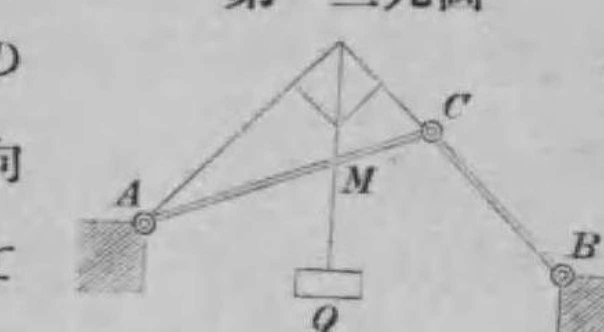
ことあるを示し得べし。

第一三八圖



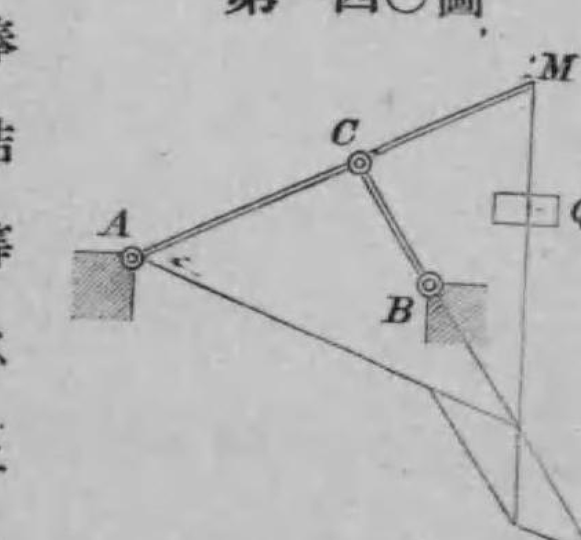
一七四　互に連結せる棒の諸系 (Systems of Rods connected with each other.) 一三九圖に於て AC 及 CB の棒が垂直平面内に在りて C に於て連結し A 及 B に於て支へらるとす。M 點に荷重 Q あり、棒の重量は省略す。A, C 及 B に於ける連結は少くとも僅小の廻轉を容るすと假定すべし。又棒は少しく延び又は壓縮せられ得べき故に小廻轉は實際に起り得べしと考ふべし。CB の棒は C に於ける壓力が棒の長さの方向に在るときにのみ平衡に在り得。斯して此壓力並に A に於ける壓力も圖に示せる作圖に依りて求め得。又勿論 C に於ける壓力は A を過ぎて圖の平面に直角に引ける線に關する其能率と重量 Q の能率とが相等しからざるべからずと云ふ條件にて定め得。

第一三九圖

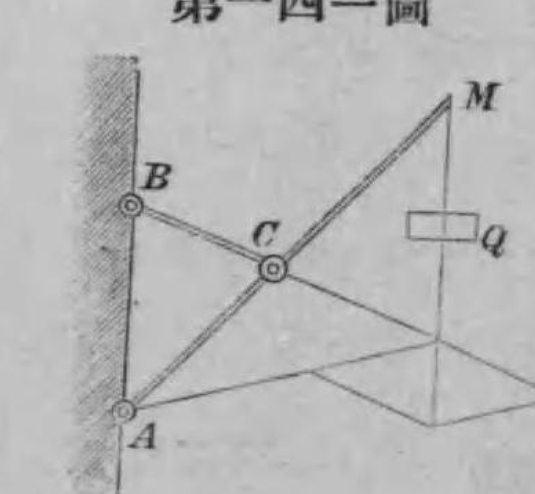


一四〇圖及一四一圖に於て棒は同樣なる連結をなせども是等に於ては M は AC の延長線上に在り。最後に一四二圖に於て、三棒の一系が A, B, C 及 D の周りに廻轉し得べ

第一四〇圖

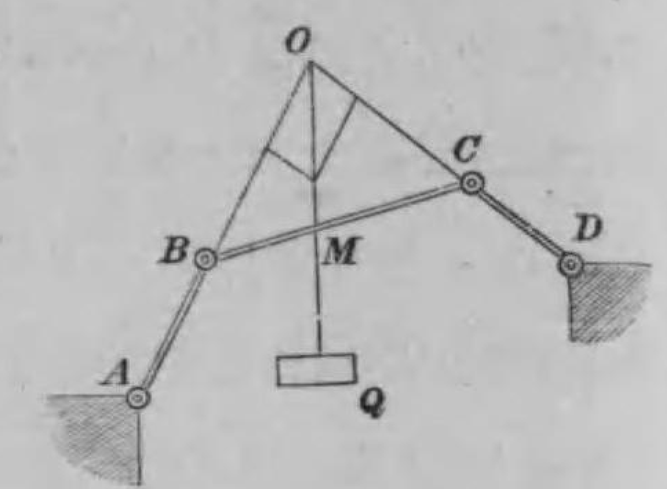


第一四一圖



く、其の中央のものに荷重 Q を負へるものを表はせり。棒の重量を省略せば平衡の爲には AB 及 DC を延長せば垂直線 QM 上にて交はるを要す。勿論此排列に於ては平衡は不安定なり。

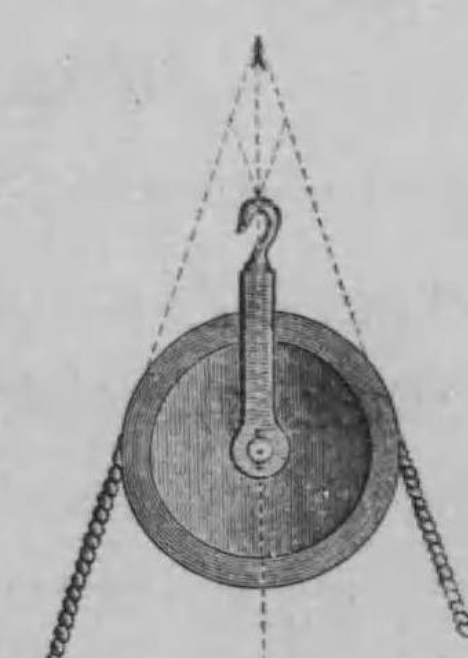
第一四二圖



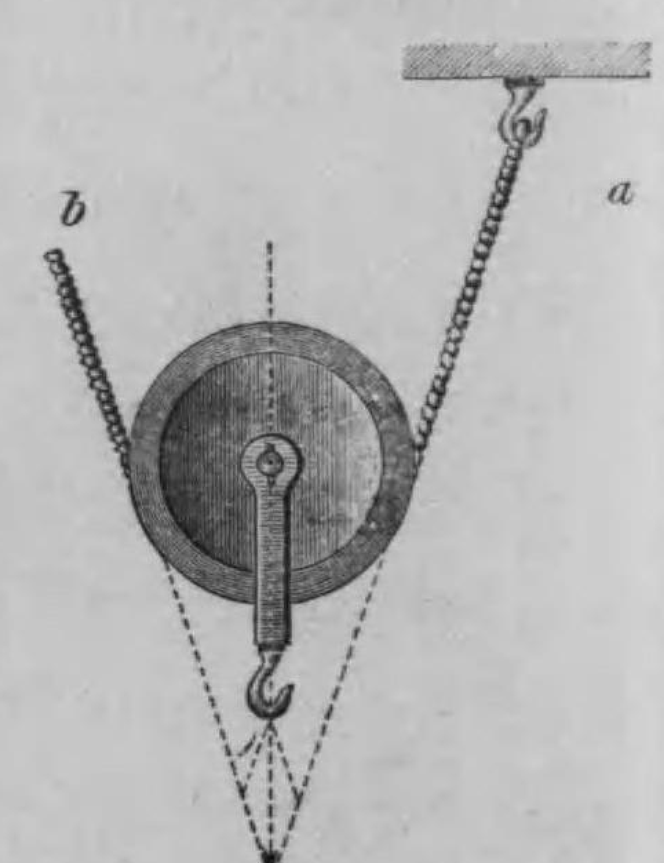
一七五　滑車及連滑車 (Pulley and Train of Pulleys.) 滑車とは圓狀の板が其中心を過ぎ其平面に直角なる軸の周りに廻轉し得るものなり。其周圍に溝を備へ是に索を掛け得。摩擦は此索が板の上に滑べることを妨ぐ。

固定滑車（一四三圖）に於ては軸は移動し得べからず。平衡の爲には索の兩端に等しき力作用せざるべからず。軸上の壓力は圖に示せる仕方にて求め得らる。

第一四三圖



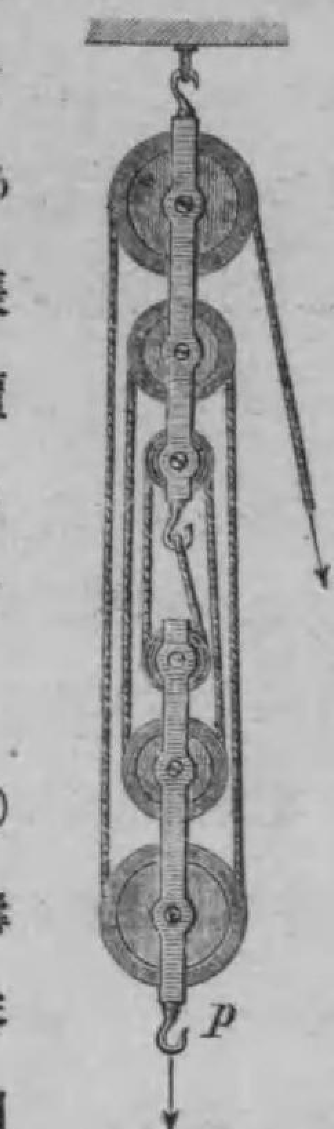
第一四四圖



動滑車（一四四圖）は一端 a にて固定せる索に掛り索の他端に運動の力作用す。軸の鐔に鈎ありて此に引上んとする荷を吊す。平衡條件は力の平行邊形の作圖に依りて求め得らる。

一四五圖は普通の連滑車の裝置を示す。三個の滑車が上方に在りて固定し同數の滑車が下方に在りて可動なり。全滑車を過ぐる索が凡て諸滑車間に於て同方向を有すと假定せば釣合の爲には力 $\frac{1}{6}P$ にて b 端を引くを要するなり。荷が六本の索に掛り、且張力は何所にても同大ならざるべからずして上記の價を有すべきにより之を知る。或は又 P を或る高さに上ぐるには b を幾何丈下方に引くべきかによりても見出し得らるべし。

第一四五圖

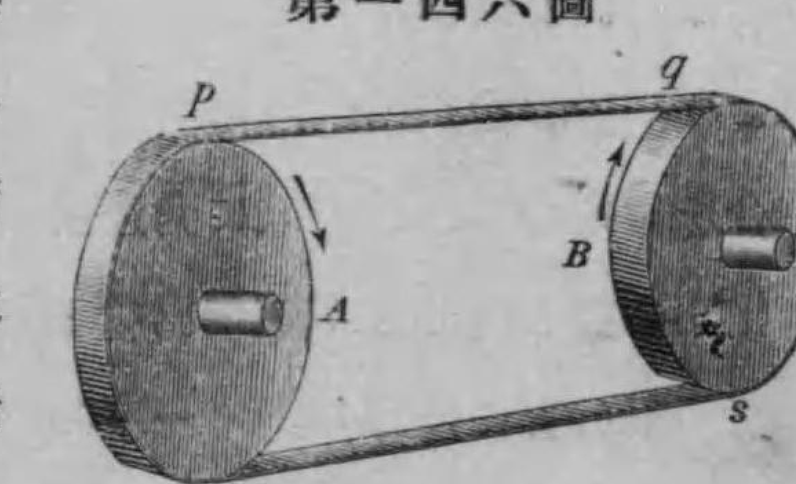


一七六　捲揚機 (Windlass.) 捲揚機（轆轤、等）は水平なる圓壔が其軸の周りに廻轉し得て、圓壔の周りに索を幾回か卷き廻轉に依りて卷上げ又は卷戻し得べく其端に荷重を負へるものなり。廻轉を圓壔に與ふるには其軸に直角に固定せる把手あり。平衡條件は能率を考へ或は一七二節の定理を用ゐて之を得べし。

一七七　一軸の廻轉を他軸に移す方法 (Means to transfer the Rotation of an Axis to another.)

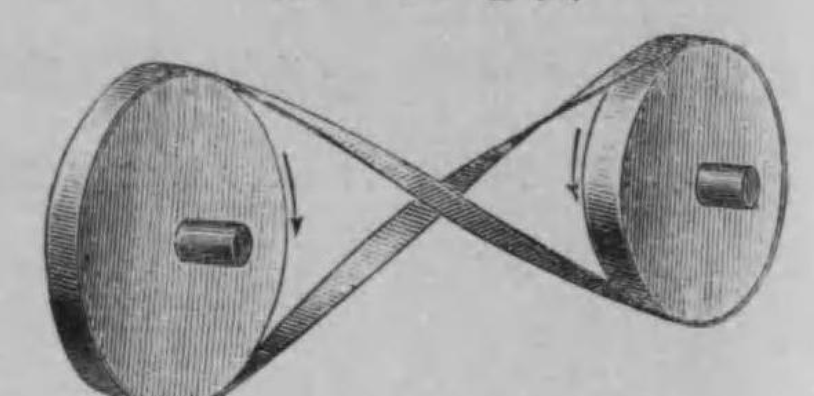
a) 無終の索。A 及 B を（一四六圖）二個の圓狀の板とし同一平面に在りて、此平面に直角に其中心を過ぐる軸の周りに廻轉し得るものとす。索或は調革の兩端を互に結び付けたるものが之等の圓板の周りに掛り充分に緊張し圓板上の滑りを不可能なら

第一四六圖



しむ。A が矢の方向に廻轉せば B は同方向に動くべし、是に於て角速度は半徑に逆比例す。索の rs の部分は pq の部分よりも強く張らる。是によりて B を運動せしむる力を生ず。圓板を互に反對の方向に回轉せしむる爲には交叉せる調革(一四七圖)を使用す。

第一四七圖

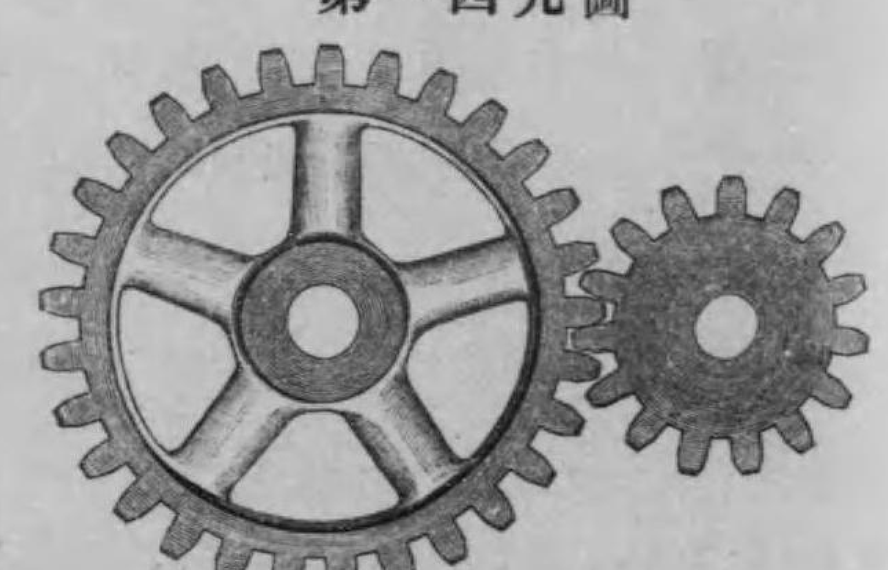


b) 平行軸に於ては圓筒狀の、並に相交れる軸(一四八圖)に於ては圓錐狀の摩擦車を用ゐ得。夫等の互に接觸せる表面は十分に粗ならざるべからず、之に依りて一圓板は他の圓板によりて伴ひ動かさるゝなり。

第一四八圖

c) 或る大なる抵抗に勝たざるべからざるとき或は角速度に就て一定の比を確實に得んとするときは齒車を用ゐるなり。一四九圖は此の如き車の一對を示す。之等は圖の平面に直角なる軸に取附けらる。同じ時間に於て二車より同數の齒が兩中心の結合線を過ぎて進むが故に角速度は齒の數に逆比例するなり。

第一四九圖



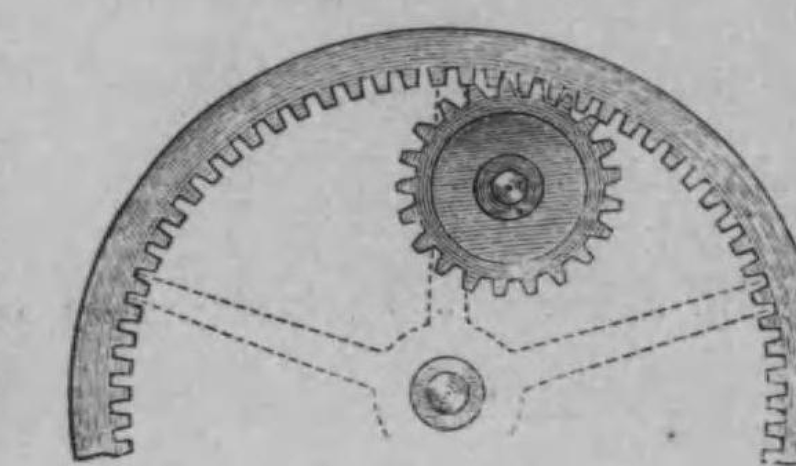
僅小の齒を有せる車を起動輪と名く。

又一五〇圖に於ける如く一車の內側に齒を備へしめ得。此場合には二軸は同じ廻轉方向を有す、一四九圖の場合には互に反對の

方向に廻轉せるなり。

軸を交叉せるものに於ては圓錐狀の車用ゐらる。之は一四八圖に於ける如く尖端を除ける圓錐が母線の方向に走れる肋狀の突起を有せるものと考ふれば其概念を得べし。

第一五〇圖

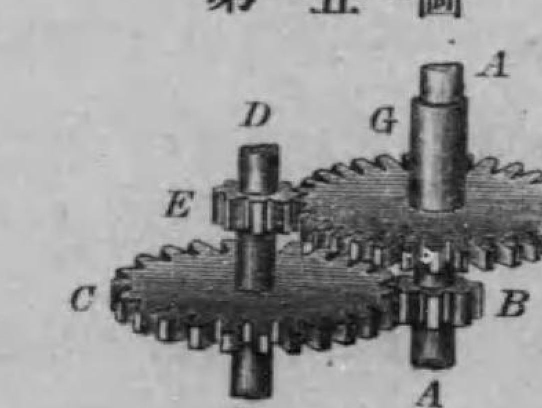


車を正しく進行せしむる爲には齒の形は無關係ならず。之を定むる幾何學的考察に就ては玆には論せず。唯注意すべきは每瞬時に於て一對以上の數齒が相接觸せる樣に爲せる事なり。

車の甚大又甚小なるものゝ使用は困難を伴ふが故に角速度の大なる差を要する場合には運動を直接に一軸より他軸へ傳へしめず。此爲に數多の車の一系を取り、一部分は軸自身に、一部分は補助の軸に固定せしむ。即ち一軸 A の運動を一軸 B に、又之よりして之に附せらるゝ第二の車に依りて C の軸に移す等の如くす。

例として時計の針を 1 と 12 との比に在る角速度にて同じ中心の周りに廻轉せしむる仕掛を記すべし。分針は A 軸(一五一圖)に固定し其運動は車の系に依りて之を動す力より得。B 及 C の車に依りて A の運動は D 軸に傳へらる。此軸は第二の車 E を有す、其齒は F の車に嚙み、F は中空の軸 G に固定し、G は A を圍み時針と連結せらるゝなり。

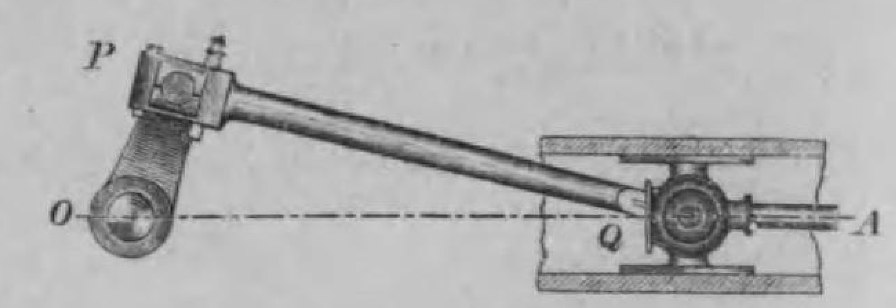
第一五一圖



一七八　直線運動を廻轉に換ふる方法及其逆 (Means to convert a rectilinear Motion into a Rotation and its Inverse.)

a) 曲柄及桿 (Crank and Rod.) AQ (一五二圖)を唯其長さの方向にのみ往復運動し得る桿とし、OP は一の曲柄にして圖の平面に直角に O を過ぐる軸の周りに廻轉するものとす。最後に PQ は其兩端が OP 及 AQ と連結し連結點は廻轉し得るものとす。曲柄が廻轉せらるれば桿は往復運動し、又其逆をなす。此樣にして蒸汽機關の唧子の往復運動は一定方向の廻轉に換へらる。

第一五二圖



b) 側心圓板 (Eccentric Disc.) 一五三圖に於て S を圓板とし其平面内にて中心を過ぎざる一軸の周りに廻轉し得るものとす。圓板は一の輪 R にて圍まれ、輪は圖に示せる仕方にて Q に於て AQ 桿と連結し、其點にて廻轉し得るものとす。此桿は其長さの方向に往復運動し得べく、又 S の廻轉に依りて之を强制するなり。

第一五三圖

又輪を取去り、桿 AQ が S まで延び、其圓くせる或は小車を附せる端にて絶えず S の周圍に對し壓せる場合にも然るべし。圓板 S に或他の形を與ふるに依りて AQ の「振動の形」(五〇節) を任意に變じ得べし。

c) 又齒車並に齒を附せる桿にて廻轉運動を直線運動に變じ得。

一七九 螺旋 (Screw). 一螺旋が其適合せる母螺旋に對する或は逆に螺旋に對する母螺旋の相對運動は常に廻轉と進行とを伴へり。

兩物體の一が固定せらるれば他が之等二運動をなす。然れども一物體が進行し他が廻轉することも亦可能なり。

物理機械の使用に當り螺旋の種々の應用を見るが故に次に簡單に之を概括すべし。

a) 螺旋が之に固定せる把手に依りて廻轉せしめられ、其母螺旋が不動なりと考ふ。軸が垂直なれば螺旋は相當の廻轉方向に於て上昇すべし。之に依りて重き物體を上げ得べく、其重量は、物體が一廻轉にて螺旋の歩み丈上るを考ふれば計算するを得。

b) 螺旋は容易に全廻轉の一定部分丈廻轉せしめ得るが故、之を用ゐて既知の大さの極小の變位をなさしめ得るなり。例ば歩みが $\frac{1}{2}$ 粍なる螺旋に圓筒狀の頭を附し、其周圍を 100 に等分し、之を一定の目標に對して廻轉せしむれば、度盛 1 だけの廻轉に依りて $^{1}/_{200}$ 粍の變位を得べし。

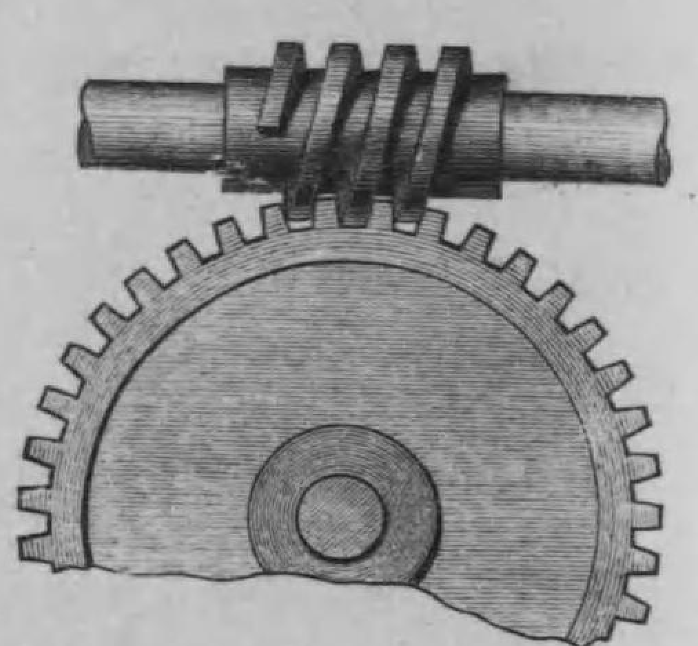
此目的に用ゐる螺旋を測微螺旋と云ふ。是に於て螺旋自身は變位し得ざる樣にせること屢あり。例ば目盛機械の長き螺旋に於ては然り、此場合には母螺旋は一の滑子中に在りて後者は唯螺旋の軸に平行にのみ移動し得。滑子に筆例ば金剛石の尖端を附し、是に依りて螺旋の傍に固定せる物體上に螺旋軸に直角に度盛を引き得。螺旋を一定角度丈廻轉し進めて毎回此の如き度盛をなせば一の尺度を得。

螺旋が完全に精密に作られたる場合にのみ移動が廻轉に比例せるは明なり。實際には常に偏倚が存在せり。此誤差は先づ螺旋が母螺旋にて完全に包まれず、兩者の間に幾分の空隙あるに依りて生じ得。然れば螺旋を廻轉せしめずして之に小移動を與へ得。此誤差は讀む前の最後の廻轉を毎回常に同じ方向になす樣にせば障害をな

さず。又他の誤差は歩みが漸々に變ぜること、又は螺旋が理想の形と異り從て螺旋の頭の同じ度盛に對して、同じ移動が相當せざることに基く。後者は一般に一廻轉毎に繰返され、從て週期的誤差と名けらる。此等種々の誤差を實驗的に測定し、計算に入れしむる精密なる方法あり。

一八〇 無終の螺旋 (Endless Screw.) 是は一五四圖に示せる如き一螺旋と一齒車との結合を云へるなり。兩者の軸は互に直角に在りて螺旋の線は齒の間の間隙に適合せり。螺旋を一回廻轉すれば、車の齒一個に沿ふて螺旋の全一卷きが進む、是により凡ての齒が夫々次の齒の位置に來らざるべからざるは容易に知るを得。故に車が n 個の齒を有すれば其得る角速度は螺旋の角速度よりも n 倍小なり。此仕方に依りて速なる運動を遙に遲緩なる運動に換ふることを得。例ば速に廻轉せる軸の廻轉を數ふるに應用せらる。

第一五四圖

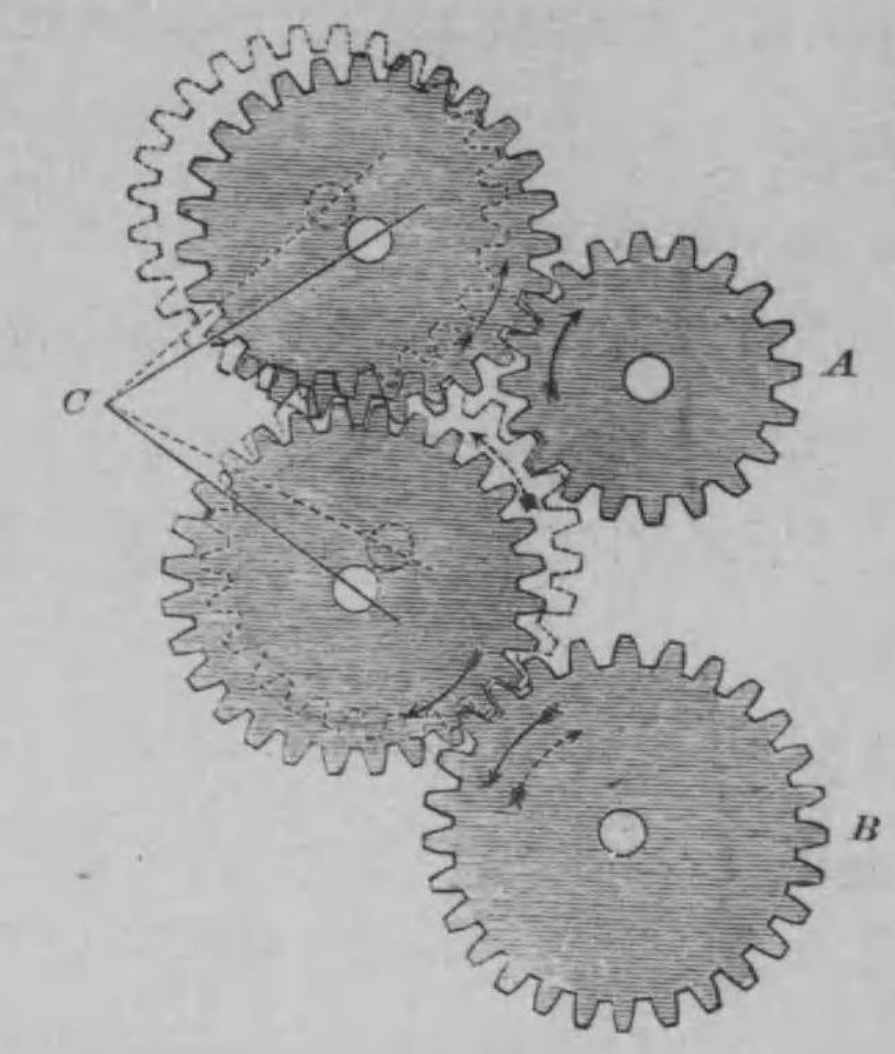


一八一 一機械の二部分間の結合を取附け又は取外す方法 (Means to connect and disconnect two Parts of a Machine.) 例として次の諸裝置を擧ぐ。

a) 一の車仕掛に於て一齒車の軸を移動せしめて隨意に諸車の齒を互に嚙合せ又は離し得る樣になし得。齒車と螺旋とに於ても同樣なり。

一五五圖に於て示せる裝置は A 軸の運動を中間の車に依りて B 軸に傳ふるに用ゐらる。黑線案を附し示せる位置に於ては二個の中間齒車が働き、二軸は反對の廻轉方向を得。點線にて示せる位置にては唯一中間車のみが働き、B の廻轉方向は A と同一なり。其中間の位置にては兩軸の結合は取外さる。一位置より他への移り行きは一軸 C の周りの二中間車の廻轉に依りて得らる。

第一五五圖



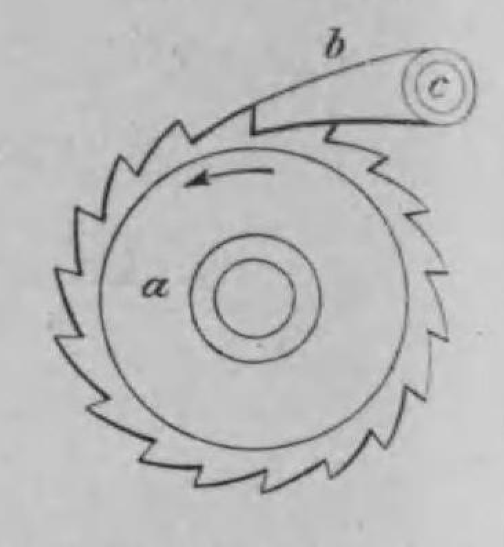
又二軸を各他の延長上に置き之等を結合せしめ得。此爲には互に向き合へる兩端に圓板を取り附け、其端の面を軸に直角ならしむ。此圓板には齒を備へ其嚙むことに依りて一軸が他を伴ひ動く。一圓板は軸に固定し、他の圓板は軸の廻轉に伴へども其上に移動し得せしむ。

b) 無終の調革を用ゐれば、運動せしめらるべき軸上に軸と固く連結せる圓板外に是と無關係に廻轉し得る第二の圓板を加ふべし。調革を包み又移動せしめ得べき叉手に依りて調革は一圓板より他圓板へ移し得。

c) 一五六圖に示せる制動車 a は制動鍵 b を有せり。鍵は棒狀の一小片にして容易に C 點の周りに廻轉し、其端を車の齒の間に落し得るものとし、又必要なれば發條にて齒の間に壓するものとす。齒の形は、軸 c が固定せば、車 a は矢の方向に動き得れど

も反對の方向には動き得ざる樣のものなり。

第一五六圖



此の如き裝置は九一圖(172 頁)に於て A 軸に唯一方向に於ける運動のみを可能ならしむる如きものに用ゐらる。

軸 c が第二の車に固定せられ、其車が a の車と同じ幾何學的軸の周りに廻轉し得るものとすれば、此車は一運動方向に於ては a に依りて伴ひ動かされ、之に反し他の方向に於ては然らず。

一八二　摩擦に關する詳論 (Closer Observation on Friction.) ― 物體が完全に滑なる水平面上に一力 F にて引かるれば、此力の仕事は物體の運動エネルギーの增加に等し。然れども摩擦が在れば此の如くならず。此場合には運動エネルギーの增加は F の仕事よりも小なり、恰も發生せる熱に相當する丈小なり。

是は此現象を如何に觀察すべきかの一の方法なり。他の見方は力 F の仕事のみならず、摩擦の、勿論負なる仕事を考ふるに在り。物體全體としての運動は通常の仕方にて是等二力に依りて定めらるゝ故に、物體の運動エネルギーは力 F 及摩擦の全仕事に等しき丈の增加を受けざるべからず。此第二の見方に依りては熱の發生に就て述ぶるを要せず。(一四四節 c 參照)

同樣なる觀察は摩擦の作用せる諸物體の系凡てに適用す。可視運動の運動エネルギーの增加は摩擦を算入せざる他の凡ての作用力の仕事よりも小なり、其差が發生熱に相當す。

第二の見方に依り、なほ次の如く云得。

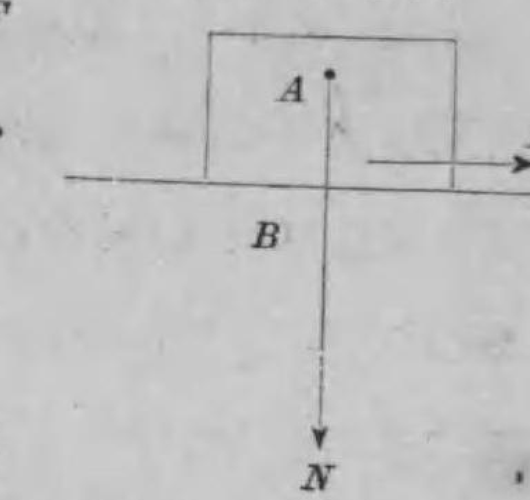
可視運動の運動エネルギーの增加は摩擦を算入せる凡ての力の仕事に等し。

二定理の後者に從へば、此章にて學びたる平衡條件は、摩擦を唯特別の力として計算せば、常に之を應用し得るなり。

今此力の影響を尚精密に考ふべし。

一五七圖に於て A 及 B を互に滑り得る物體とす。其一 B が固定し、他が或力 N にて垂直に之に對して壓せりとす。今此外に A に第二の力 F を分界面に平行に作用せしむれば、此力小なる限り尙ほ何の運動をも生ぜず。此力と消合ふ丈の摩擦が生ぜらる。F の增加と共に摩擦も亦增大す、然れども後者は或大さより以上增大するを得ず。其大さは法線壓力 N に比例す、即ち cN を以て之を記すべし。c を摩擦係數と名く。是は金屬と金屬との摩擦に於ては 0,3 より決して大ならず、然れども減軌料を用ゐれば之を 0,01 に減少せしめ得べし。此値は表面及減軌料の性質、並に溫度に關係す。力 F が cN の値を超ゆれば摩擦にて消合ふを得ず、物體は運動せしめらる。

第一五七圖



是により如何なる單一の力 P が物體 A を B 上に進行せしめ得るかを演繹し得。此力が B の側に引きたる法線と銳角 α をなせりと假定すべし。然れば法線の方向に分力 $P\cos\alpha$, 表面の方向に第二の分力 $P\sin\alpha$ に分解せらる。摩擦の値は $cP\cos\alpha$ より大なるを得ず。$P\sin\alpha < cP\cos\alpha$ なれば運動は生ぜず、然れども $P\sin\alpha > cP\cos\alpha$ なれば物體は運動せしめらる。

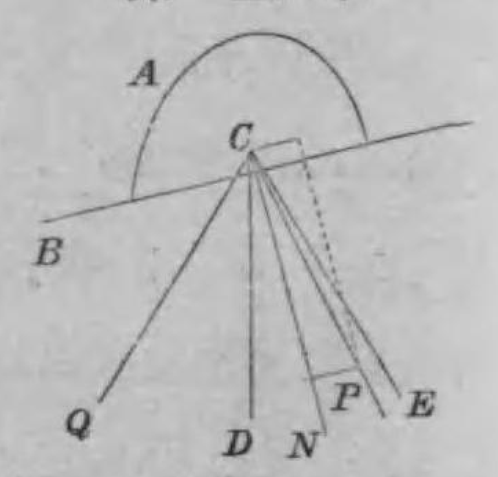
此不等式を $\mathrm{tg}\alpha < c$ 並に $\mathrm{tg}\alpha > c$ と書き得。斯くして β の角を

$$\mathrm{tg}\beta = c$$

なる樣に定むれば、$\alpha >$ 或は $< \beta$ なるに從ひ、力は物體を運動せしめ或は靜止せしむ。

角 β を摩擦角と名く。力が法線と恰も此角をなせば、其力に極小の增加を與ふるとも物體を運動せしめ得。又物體 B が A に作用せる反作用によりて、A に作用せる力を消去し得るものに於ては反作用と法線とは決して摩擦角よりも大なる角をなさずと云得。

前述に依りて物體が斜面上に如何にして平衡に在り得べきかを直に知り得。CN（一五八圖）を法線とし、夫が CD 及 CE と摩擦角に等しき角をなすとせば、物體に作用せる凡ての力の合力が DCE 角內に在る間は物體は靜止すべし。例ば此力が CP の方向を有すれば、斜面の方向に於ける其分力は摩擦に打勝つに十分ならず、摩擦の極大の大さは法線方向の分力に依りて定めらる。CQ の如く前述の角度以外に在る力は凡て物體を運動せしめ得。若し重力のみが物體に作用する場合に平面の傾斜角を變ずれば、其角が β を超ゆれば、物體は滑り出だすべし。



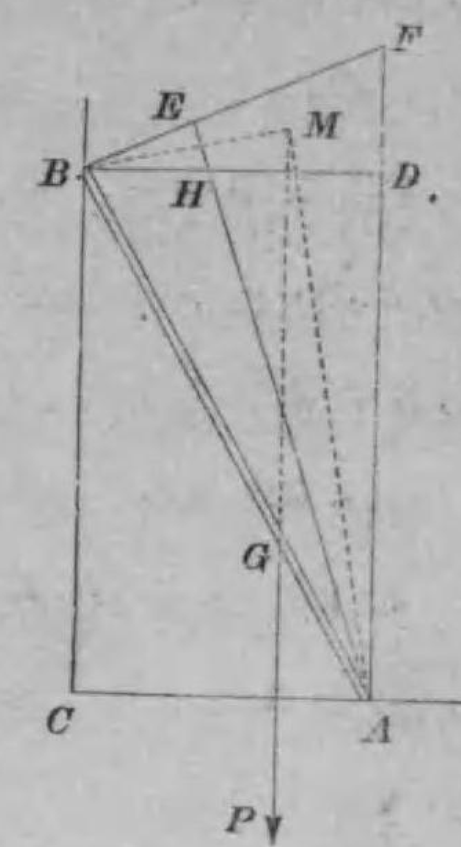
第一五八圖

斜面に於けると同樣に、又摩擦の作用せる他の凡ての場合に於て、一方に或は他方に運動を起すに恰も十分なる力の幾何なるかを研究し得。此等二個の場合の中間に何の運動も生ぜざる場合數多あり。

更に說明の爲に次の例を擧ぐべし。

a) 一物體 AB（一五九圖）が水平面 AC 及垂直平面 BC にて支へらる（壁に倚せ掛けたる梯）。P を以て物體に作用せる諸力の垂

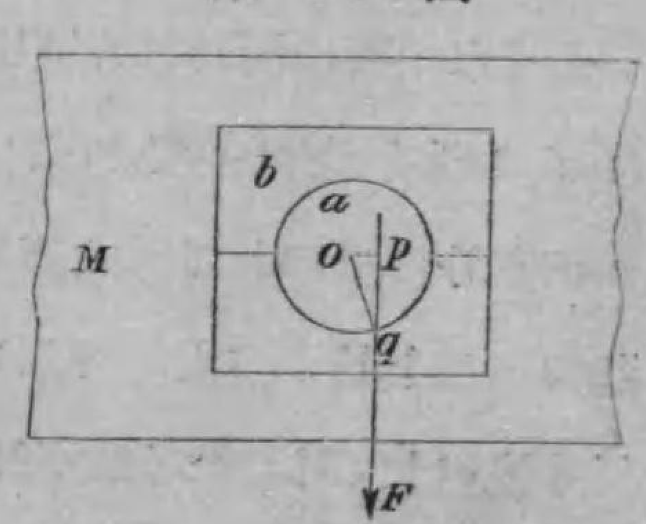
直の方向に於ける合力とす。A 及 B に於て法線 AD 及 BD を引き、角 DAE 及 DBF を摩擦角に等しく取れば、A 及 B に於て支面によりて作用せらるゝ諸力の方向は此角の內に在らざるべからず。此等の力の作用せる線が PG の延長上にて交はると云ふ條件は此線が $HEFD$ の四角形を切る場合にのみ滿足せらる。PG が E の左に來れば物體は滑り出づ。此觀察に於ては傾斜の爲に滑り出づるに對し、反作用は A に於ては左に、B に於ては上方に向けらるることを商量せり。



第一五九圖

交叉點 M が知らるれば、A 及 B に於ける壓は、P を此交叉點に移し、MA 及 MB の方向に分解して之を定め得べし。然れども M は PG の延長上四角形 $HEFD$ 內の任意の點なるを得べきが故に壓は、或度までは不定なり。其結果として、A 及 B に於ける摩擦が其占め得る最大の値を取るに至らざる間は、物體を平衡に保つものは主として第一のもの、或は主として第二のものたるを得。是は物體が是等の平面に倚掛かれる狀況の微細の點に關係せるなり。

b) 一物體 M（一六〇圖）が精密に軸承 b に適合せる一軸 a を備ふ。凡て M に作用せる力が單一の垂直力 F に合成せられ得と假定すべし。角 Oqp が摩擦角 β に等しき樣 O の右或は左に在りとせば此力は極小の增



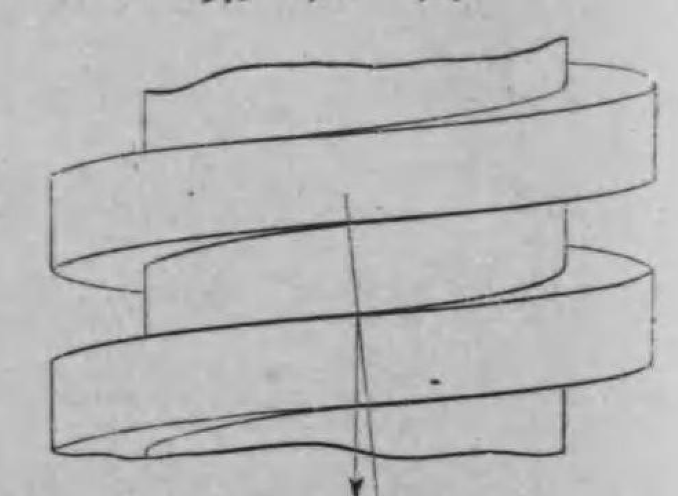
第一六〇圖

加に依て物體を運動せしめ得べし。此爲には $Oq=r$ ならば $Op=r\sin\beta$ ならざるべからず、即ち軸の徑は影響なしとせず。

c) 螺旋に於ては摩擦は大なる影響を有せり。側面の矩形なるものに於ては(一七一節 d) 螺旋の長の方向に於ける力は螺旋の表面に於ける法線が此方向と摩擦角よりも小なる角をなせば、此力は全く廻轉を生じ得ず(一六一圖參照)。螺絲が軸に直角なる平面となす角が摩擦角よりも小なれば此條件の滿足せらるゝは容易に知るを得べし。三角狀の側面を有する螺旋に於ては摩擦の影響は更に大なり。後者は永久的固定を要する場合には常に用ゐらる、四角の側面を有する螺旋は寧ろ運動を傳ふるに用ゐらる。

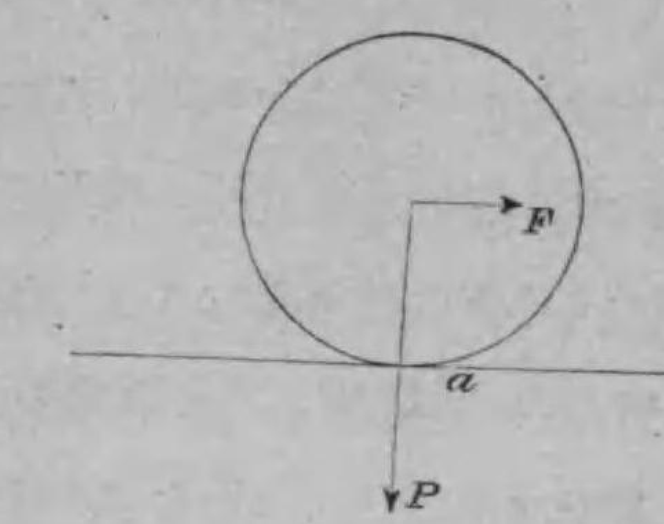
歩みの小なる螺旋は軸に直角なる平面内に作用せる微小の力を以て之を運動せしめ得。固定するに用ゐる螺旋に於ては偶然の打擊又は振動の結果を妨ぐる爲に螺旋の螺絲が母螺旋の螺絲に強く壓すること必要なり。此爲には次の如くす。一三三圖 B に於ける母螺旋を上下二個の部分より成れりとし、是等が廻轉に於て反對方向に互に壓するものとす。母螺旋の一は螺旋の螺絲に對し他を壓着くるなり。

第一六一圖



d) 水平面に横はれる圓壔の中心に一水平力が軸に直角に作用すれば、摩擦が全然存在せざれば、圓壔は滑り行くべし。之に反して表面が充分に粗にして又夫等が充分に互に壓すれば摩擦は平面上接觸點の運動を妨ぐべし。然れば圓壔は唯前方に轉じ得るのみにして、從來述べたるものゝ他の種類の抵抗、所謂廻轉摩擦が之に反對せざれば、此運動は甚小なる水平力に於て既に存在し得べし。此摩擦は圓壔及支持面が少しく壓縮せられ、即ち茲に小なる接觸面を生ずるに基く。今運動を生ずる力 F (一六二圖)は圓壔を a 線の周りに轉ずべく、又其爲に力は或大さを有せざるべからざるなり。

第一六二圖



此廻轉摩擦に對して此節の始に述べたる抵抗は滑動摩擦と名けらる。

車輛の車輪は滑動摩擦を小なる廻轉摩擦に換へ、又車に對する制動機の加壓に依りて滑動摩擦を生じ車輛を止らしむることは更に云ふを俟たざるべし。

最後に尙注意するは滑動並に廻轉摩擦は運動が始る瞬時に於けるよりは運動の間に於て小なることなり。一物體を一定の速度にて前進せしむる爲に要する力は之を運動し始むるときに要するよりも小なり。

一八三 運動せる機械に於ける仕事及エネルギー (Work and Energy in Machines, which are in Motion.) 或一定の場合を眼中に置く爲めに、數多の鋸機械を運動せしむる一蒸汽機關を考ふべし。此等凡てを一蒸汽機關と共に合せて物體の一系と考ふべし、然れども此系の中には蒸汽並に鋸にて切らるゝ木材は除外すべし。唧子に對する蒸汽の壓力、並に木が鋸の運動に反對する力は外力にして、前者は運動を生せしむる力、後者は抵抗なり。此抵抗に打勝つことが

機械の目的なるが故に、往々之を「有効の」抵抗と名く。此外に「有害の」抵抗とは空氣の摩擦及抵抗の如きものなり。

運動あれば運動を生じたる力は正の仕事をなせしなり。之は喞子に對する壓力及其受くる變位よりして演繹し得。之に反して凡ての抵抗は負の仕事をなす。此仕事は例ば一の鋸に於ては、其經過する道、並に木材が之に反對する力よりして計算し得べし。

若干時間に於て A を以て上述、運動せしむる力の仕事、$-B$ を以て有効抵抗の仕事及 $-C$ を以て有害抵抗の仕事とす。然れば $A>B+C$ 或は $<B+C$ なれば系の運動エネルギーは增加し或は減少す。$A=B+C$ なれば不變なり。

此系が一度正しき運轉を初むれば系の諸部分の速度は週期的に變ずべし。然れども若干週期の後同じ運動エネルギーを復すべし。即ち此の如き週期に就ては $A=B+C$ ならざるべからず。

効率は $\dfrac{B}{A}$ の大なる程大なり。

短き時間に於ては其間を通じて $A=B+C$ なるを要せず。打勝つべき抵抗には大さに於ては著大の變化あるべし。又喞子が極て種々の速度を有するを考ふれば、運動の力は同時間に於て同じ仕事をなさゞること明なり。故に短き時間の間に運動エネルギーは不變ならず。是に依りて得る速度の變化を出來得る丈小ならしむる爲め機械に大なる質量を附し、之を運動に伴はしむ。運動エネルギーの同一の增加或は減少は、大なる質量に於ては小なる質量に於けるよりも僅少なる速度變化を生ずるなり。

此の如き質量に輪の重き車の形を與へ、廻轉軸の一に裝置せしむ。

此の節動輪は一度運動に置かるれば B の增加或は減少と共に其仕事能の貯蓄よりして機械の他部分にエネルギーを與へ得べし。

又仕事をなすべき一機械の動力は單位時間に其のなせる仕事に依りて測らる。1 ワットの機械とは 1 秒に 10^7 エルグの仕事をなすものにて、1 秒に 75 瓩米をなすものを 1 馬力の機械と云ふ。是により 1 馬力は 736 ワットに等しきなり。(註)

一八四 廻轉體のエネルギー 物理的振子 (Energy of Rotating Body. Physical Pendulum.) 一廻轉體に於て廻轉軸に對する質量の配布が與へらるれば各角速度に於ける運動エネルギーは數學的に算出し得べし。此計算は唯或一つの角速度に於て計算するを要するのみなり、何となれば結果は角速度の自乘に比例せざるべからざればなり。即ち例ば角速度を二倍にすれば凡ての線速度も(一四九節)亦二倍す、物體の各微部分に就て運動エネルギーは四倍大となる。

角速度 1 に於ける運動エネルギーの値の二倍を廻轉軸に關する惰性能率と名く。此量を Q にて記せば角速度 ω に於ては運動エネルギーは $\frac{1}{2}Q\omega^2$ なり。

惰性能率は實驗的に定め得べく、又簡單なる形の物體に於ては之を算出し得べし。例ば、半徑 R 並に質量 M の圓輪に於ては、中心を過ぎ、輪の平面に直角なる軸に關する惰性能率は $Q=MR^2$ なり。是は角速度 ω なれば各點の線速度は $R\omega$ なるを知れば容易に考へ得べし。

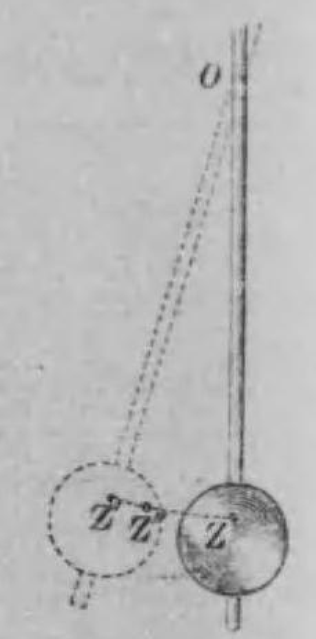
(註) 日本馬力=4000 貫尺/分=0,9963 英馬力
=1,01 佛馬力=743,2 ワット

惰性能率は如何なる軸に參照するかに從て種々の値を有す。物體に新しき質量を增す每に、惰性能率も亦增加す。此量は物體の諸部分の質量に關係するのみならず又其軸よりの距離に關係す。即ち同一の質量の一定の角速度に於て、是が軸より隔る程大なる運動エネルギーを有すべし。

惰性能率を用ゐれば廻轉せる物體に關する種々の問題を解き得。其最も重要なる一は所謂物理的振子の運動を定むる事なり。

物理的振子とは固定せる一水平軸の周りに重力の影響の下に廻轉し得る樣なる任意の固體を云ふ。此の如き物體は重心 Z（一六三圖）が軸 O の直下に在る場合に安定なる平衡に在り。振子が此位置より或角度振れ、重心が Z' に來りしとき之を放ちたりとすれば、振子は平衡位置の彼方此方に振動し、兩側に同じ距離丈け振る、エネルギー保存の法則よりして演繹し得る如きなり。又此法則に依りて、振子が或任意の位置、例ば重心が Z'' に至りたるときに其有する角速度 ω の如何を知り得。何となれば振子が其端の位置より離るゝ瞬時の後位置のエネルギーが減少する大さは重量 P と $Z'Z''$ の垂直投影とを乘じて見出し得べければなり。其大さは OZ'' の位置に於ける運動のエネルギーに等しからざるべからず、即ち Q を軸に關する惰性能率とせば $\frac{1}{2}Q\omega^2$ なる積なり。Q が知らるれば角速度 ω は定めらる、夫によりて運動を悉く追究するを得。

第一六三圖



此仕方により振幅小なれば如何なる點も數學的振子の質點と同樣

に簡單振動をなすを知れり。一極端の位置より他の極端へ運動するに要する時間は範式

$$\theta=\pi\sqrt{\frac{Q}{Pl}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

に依りて計算し得、l は重心より軸までの距離を表はす。

此範式に

$$P=Mg$$

と置き、M が振子の質量なりとせば次式を得。

$$\theta=\pi\sqrt{\frac{Q}{Mgl}}$$

是に依り若し Q が定めらるれば振動時間の觀測よりして重力の加速度を算出し得るを知る。

Q を定むる代りに、振動體は同一振動時間を與ふべき廻轉軸として種々の平行軸を有すと云ふ性質を應用し得。重心の反對の側に且重心より異れる距離に於て此の如き二軸を見出し得。略ぼ之等を知れば或る可動的の重量に依りて振動時間を調整して兩軸に就て其同大なる樣になすを得べし（可逆振子）。理論に依り此場合に兩軸の距離は之と同じ振動時間を有する數學的振子の長さに等しきを知る。此時間並に兩軸の距離よりして一〇四節の範式に從て g を見出し得。

又振動時間を計算せずとも (4) の範式によりて振動の時程に就て或判斷を與へ得。例ば軸よりも上に質量を加ふれば振動時間は增大し、又天秤の杆は、l が小にして且つ兩腕の質量を運動せしむるを要する故に、其振動は緩漫ならざるべからざる如きは容易に知るを得。天秤の杆を短くせば Q の減少の爲に振動時間は短縮すべし。又皿並に荷の質量も振動時間に影響を有す。振動時間は餘り長からざるを可とす。

一八五　惰性能率に關する詳論 (Closer Observation on the Moment of Inertia.)　a) m_1, m_2, m_3 等を一物體の諸質點の質量とす。r_1, r_2, r_3 等を軸よ

りの夫等の距離とす。角速度 ω なれば此等の點は $r_1\omega,\ r_2\omega,\ r_3\omega$ 等の速度を有す。運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}(m_1r_1{}^2+m_2r_2{}^2+m_3r_3{}^2+\ldots\ldots)\omega^2$$

或は

$$\tfrac{1}{2}Q\omega^2$$

なり、茲に

$$Q=m_1r_1{}^2+m_2r_2{}^2+m_3r_3{}^2+\ldots\ldots\ldots=\Sigma mr^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

とす。此式は惰性能率を計算すべき方法を示す。

M が物體の質量なれば

$$\rho=\sqrt{\frac{Q}{M}} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

は、物體が實際に有すると同じ運動のエネルギーを同じ角速度に於て有する爲に、物體の全質量が廻轉軸より隔るべき距離を示す。

ρ を惰性半徑と名く。(5) 及 (6) の式を用ゐて之に就て次の諸値を見出し得。

半徑 R の一球は其一直徑に關して

$$\rho=R\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

半徑 R, 高さ H の圓壔は其幾何學的軸に關して

$$\rho=R\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

同一物體に於て重心を過ぎ幾何學的軸に直角なる線に關しては

$$\rho=\sqrt{\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}H^2}.$$

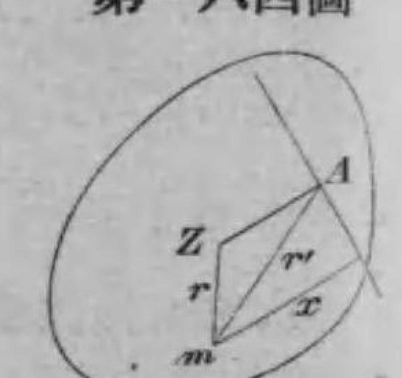
直角平行面體の邊を $a,\ b$ 及 c とせば、中心を過ぎ a 邊に平行なる線に關しては

$$\rho=\sqrt{\frac{1}{12}(b^2+c^2)}.$$

以上に於て物體は等質なりと假定せり。

$b)$ Z (一六四圖)を一物體の重心、Q を以て Z を過ぎ圖の平面に直角なる軸に關する惰性能率とす。是が知らるれば此軸に平行に平面の任意の點 A を過ぎて引ける軸に關する惰性能率 Q' を計算し得。

第一六四圖



此爲に A を過ぎて AZ に直角なる一平面を取り、物體の微部分の一に就て質量 m, 此平面よりの其距離 x, 又 Z 及 A を過ぐる二軸との距離夫々 r 及 r' とし、尚 $AZ=d$ とす。然れば

$$r^2=r'^2+d^2-2dx$$

依て

$$\Sigma mr^2=\Sigma mr'^2+d^2\Sigma m-2d\Sigma mx.$$

又(一七〇節)

$$\Sigma mx=Md$$

なる故に

$$Q'=Q+Md^2.$$

兩軸に關する惰性半徑 ρ 及 ρ' に就て次の關係を得。

$$\rho'^2=\rho^2+d^2.$$

一八六　固定軸の周りの物體の運動 (Motion of a Body about a fixed Axis. $a)$ 一物體が一固定軸の周りに廻轉し得て、此軸に直角なる一平面内に於て一定の偶力 K が此物體に作用すとせば一樣に加速せる廻轉を得。單位時間に於ける角速度の増加を角加速度と名く。之を q とし、ω を τ 時間の始めに於ける角速度とす。然れば此時間の終りに於ける角速度は $\omega+q\tau$ にして、運動エネルギーの増加は

$$\tfrac{1}{2}Q(\omega+q\tau)^2-\tfrac{1}{2}Q\omega^2=\tfrac{1}{2}Q(2\omega+q\tau)q\tau \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

此中、Q は廻轉軸に關する惰性能率を示す。

物體が τ 時間に廻轉する角度は平均角速度によりて求めらる(九二節參照)。故に夫は $(\omega+\tfrac{1}{2}q\tau)\tau$ なり、又偶力の仕事は(一六五節)

$$K(\omega+\tfrac{1}{2}q\tau)\tau$$

此式と (7) の式との相等しきに依りて

$$q=\frac{K}{Q}$$

を得。此結果と八七節の式 (14) との一致せるは變位と廻轉とに於て運動のエネルギーが同じ形の式にて表さるゝが爲めなり。

$b)$ 所與の力が物體に凡て軸に直角なる諸平面内に於て作用せるときは、之等を軸の諸點に移して一偶力及是等諸點に於て作用せる諸力に歸することを得べし。後者は軸上に在る故に運動には何の影響もなし。偶力の能率が變ずとも極微時間の間には之を不變と見なし得。斯して角速度の變化は一々追究するを得(八九節參照)。

一八七　物理的振子の振動時間に關する範式の演繹 (Deduction of Formula for the Period of Oscillation of a Physical Pendulum.)

a) 一八四節に於て、最端の位置に於ける振れが與へらるれば運動の間に振子が有する角速度はエネルギー保存の法則よりして求め得べきを知れり。故に此法則は振動の時間を計算するにも十分なりとせざるべからず。無限小の振動のみに限れば此計算は稍簡單なり。

弧度にて表して振子の任意の位置に就て φ を以て其平衡位置よりの振れの角度とす(即ち一六三圖に於ける $Z'OZ$ 角)。之を一方に正、他方に負に計算す。然れば角速度は(一四九節) $d\varphi/dt$ なり。又運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

なり。尙又平衡位置 Z 上重心の垂直の高さを $OZ=l$ とせば

$$l(1-\cos\varphi)=2l\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

young 様

なり。此代りに

$$\tfrac{1}{2}l\varphi^2$$

と記し得。重量を P にて記せば位置のエネルギーは平衡位置に於けるよりも

$$\tfrac{1}{2}Pl\varphi^2$$

丈大なり。又エネルギーの保存の法則よりして

$$\frac{1}{2}Pl\varphi^2+\frac{1}{2}Q\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

なる和は常に同一値を有するを知る。

今實際に振子は一定の週期 T にて簡單振動をなし、即ち φ と時間との關係は距離 s が五四節 *c*) 及 *d*) に考察せる運動に於ける如きものなりとす。此場合に於ては a が振幅なれば

$$\varphi=a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+p\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

なり、又(四〇節 *c*)

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+p\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

此値を (8) に置けば一項には $\cos^2\left(2\pi\frac{t}{T}+p\right)$ を得、他項には $\sin^2\left(2\pi\frac{t}{T}+p\right)$ を得。

是等平方數が同じ係數を有すれば和は時間に無關係なり。是により次の條件を得。

$$\frac{1}{2}Pla^2=\frac{1}{2}Q\frac{4\pi^2a^2}{T^2}$$

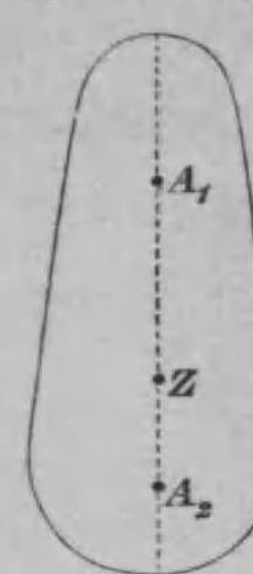
即ち

$$T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{Pl}}$$

$\theta=\frac{1}{2}T$ なるを知れば是より方程式 (4) を得。

b) Z, A_1 及 A_2 を以て(一六五圖)重心 Z 並に是と同一直線上に在る A_1 及 A_2 諸點を過ぎ圖の平面に直角なる諸軸を表はし、又 $ZA_1=d_1$, $ZA_2=d_2$ とし、質量を M にて、又 Z に關する惰性能率を Q にて記せば A_1 及 A_2 に關する惰性能率は夫々 $Q+Md_1^2$ 及 $Q+Md_2^2$ なり。振子が始に A_1 に、次に A_2 にて吊さるれば振動時間は (4) によりて夫々

第一六五圖



$$\theta_1=\pi\sqrt{\frac{Q+Md_1^2}{Pd_1}} \quad 及 \quad \theta_2=\pi\sqrt{\frac{Q+Md_2^2}{Pd_2}}$$

今 $\theta_1=\theta_2$ なれば

$$\frac{Q+Md_1^2}{d_1}=\frac{Q+Md_2^2}{d_2}$$

是よりして d_1 及 d_2 が等しからずと假定せば

$$Q=Md_1d_2$$

又 $P=gM$ なる故に

$$\theta_1=\theta_2=\pi\sqrt{\frac{d_1+d_2}{g}}$$

是によりて可逆振子の既述の性質を證明し得たり。

c) (*a*) に用ゐたる方法は又一物體或は數多の物體の一系が平衡位置の周りに振動する種々の場合に應用し得。此位置よりの振れを單一の量 φ (種々の量たるを得)にて定め得べく、又狀態は此量の有限或は單に無限小の値に就て、位置エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}A\varphi^2,$$

又運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

と記し得と假定すべし、A 及 B は不變量なり。此等の式の和は不變ならざるべからず。實際に φ が方程式 (9) にて表はされ、又振動時間が

$$T=2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

なる値を有する場合には然り。

是は振動せる磁石に於て、發音體に於て、叉電氣振動に於ても亦應用せられ得べき一般なる範式なり。

常數 A の値は系の微部分を其平衡位置に復歸せしむる力によりて定められ、B は此微部分の質量に關係す。

d) 範式 (11) の應用の一例として、一〇二節に云へる如き、一質點が一直線上を一力の影響の下に往復運動し、其力は平衡位置の方に向き、叉力の大さは此平衡位置 O よりの點の距離に常數 α を乘じて求め得らるゝ場合を觀察すべし。此力は何等かの媒質にて作用せらるとし、先づ振れ s に於ける位置エネルギーを求む。此エネルギーは平衡位置までの運動に於て力がなす仕事を以て表はし得。之を計算するには距離 s を數多の同部分に分ち、其數を n とし、先づ O に近寄る際、力は各部分の經過に於て其部分の始に於ける値を保存せるものとす。然れば仕事は

$$\left(\alpha s+\alpha\frac{n-1}{n}s+\cdots\cdots+\alpha\frac{1}{n}s\right)\cdot\frac{s}{n}=\frac{1}{2}\alpha s^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$ sハ振幅

實際の仕事即ち s の距離に於ける位置エネルギーは此式の $n=\infty$ に於ける極限値即ち $\frac{1}{2}\alpha s^2$ なり。今斯して、一般に φ にて記せる量として距離 s を考ふれば、係數 A は α なる値を有せるを見る。B は質點の質量 m に外ならざるは容易に知るを得。故に方程式 (11) は一〇二節の範式 (20) に變ず。

e) 同じ仕方にて、一物體が一固定軸の周りに廻轉し、軸に直角なる平面に於て之に偶力作用し、其能率が平衡位置よりの振れに比例せるものゝ振動時間を定め得。φ を振れの角、並に $K\varphi$ を以て引戻さんとする偶力とし、K を一常數とすれば、前揭の如き推論を用ゐ、尙一六五節所述を考量せば、位置のエネルギーは $\frac{1}{2}K\varphi^2$ なり。故に茲に $A=K$ となる。係數 B は惰性能率 Q なり、叉振動時間は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{K}}$$

に依りて定めらる。

一八八 時計仕掛の運動の調整 (Regulation of Motion in a Clockwork.)

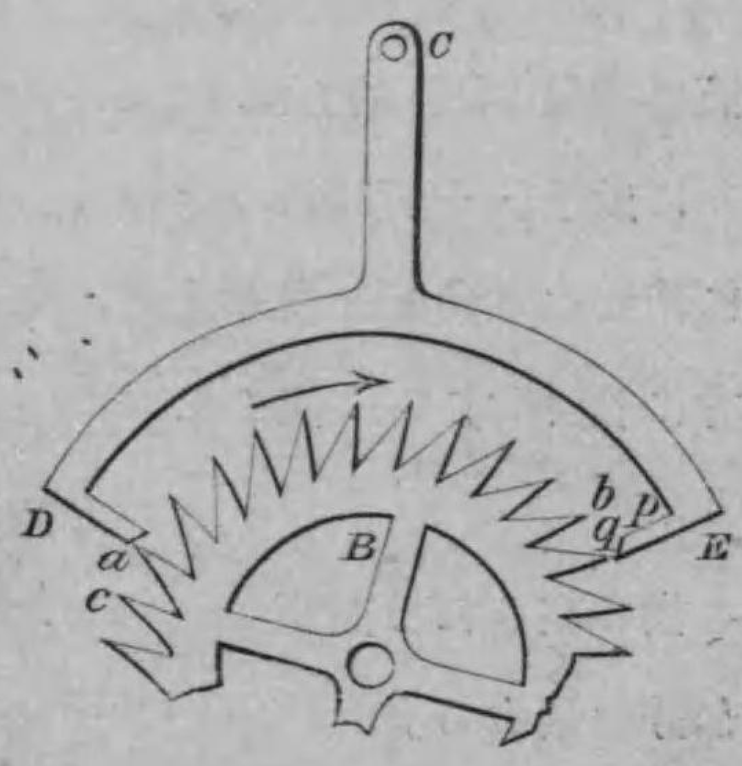
時計仕掛の齒車に、運動の力の外に唯摩擦と空氣の抵抗

とのみが作用せる場合には、速度は運動の力の正の仕事が恰も抵抗の負の仕事にて平均するまで（一八三節）增加すべし。抵抗を十分に大ならしむるに依りて（風翼）、終速度を餘り大ならざる樣になし得。然れども其速度は抵抗が增減する每に變ず。

之を避くる爲に或る往復する部分を加へ、其每振動に依りて車仕掛が一瞬間停止し、然る後放たれ、再び小距離丈進行する樣にす。此の如き部分が此目的を以て一齒車所謂平衡輪に嚙み、夫にて齒止をなす。此輪が每振動と共に一齒づゝ進行する故に、其平均の運動、叉同樣に之を一部分とせる齒車仕掛全體の運動は、往復する部分が常に同じ時間にて振動すれば、一樣なる運動なるべし。

一六六圖は錨形齒止を表はす。CDE の錨は C の周りに一振子によりて往復運動せしめらる。振子は稍 C より上に掛けられ、其杆が錨に固定せる叉手にて包まる。B は平衡輪なり、運動の力は絕えず矢の方向に之に廻轉を與へんとす、然れども每回短時間錨の D 及 E 端が交互に齒の間に嚙む爲に此廻轉は妨げらるゝなり。

第一六六圖



錨が圖に示せる位置より左方に動くと共に齒 a は進行し得。是に依りて齒が D の傾斜せる端面を壓して錨の運動を助く。然れども a が此端面を去りたる後、齒 b の尖端が此間に左方に移動せる面 pq と接觸し來る。然れば齒車仕掛は暫く靜止し、其間に CDE は左方に其振動を終り、q が再び b 尖

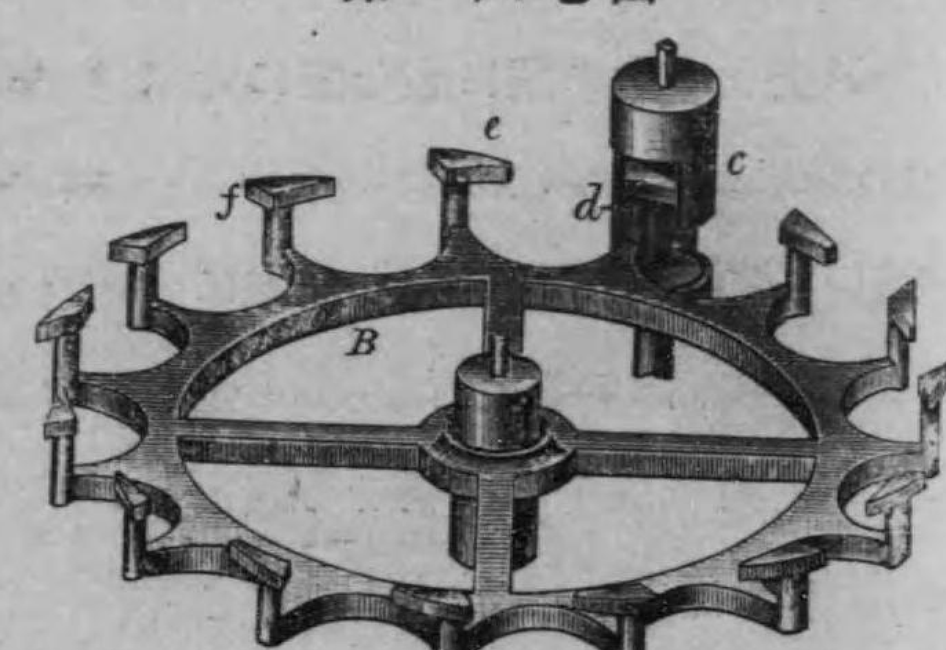
端に達するまで戻る。此とき錨は右方に於ける其運動を續くれば、b は再び動き得、E の傾斜せる端面に對して右方に向ける力を作用す。直に平衡輪は新に靜止し、D は歯 c と接觸し來る。B は靜止し、其間に錨は右方に振動し、再び圖の如き位置に至るまで左方に戻る。此とき歯 c が恰も a の位置に來れるが故に錨の全一回の往復運動によりて輪が一歯丈進行するを見る。

平衡輪が錨の上に、又斯くして間接に運動の力が振子の上に作用する加速作用は、絶えず之を抵抗あるにも拘らず振動せしむ。然れども同時に之をして運動の力の振幅並に歯車仕掛に於ける抵抗に關係せしむべし。振子の性質に基きて此狀態は振動時間に對して皆無或は單に僅小の影響を有するのみなり。

尙は記載すべきは振子が短き帶狀の鋼にて吊され、帶の上端を固定せば其屈曲性に依りて振動を可能ならしむる事なり。

一六七圖は圓筒狀歯止を示す。其名は平衡輪 B の諸歯が中空なる圓筒 C に嚙み、此圓筒が其幾何學的軸の周りに動子(一三〇節)の爲に稍大なる角度を彼方此方に廻轉するに依るなり。

第一六七圖

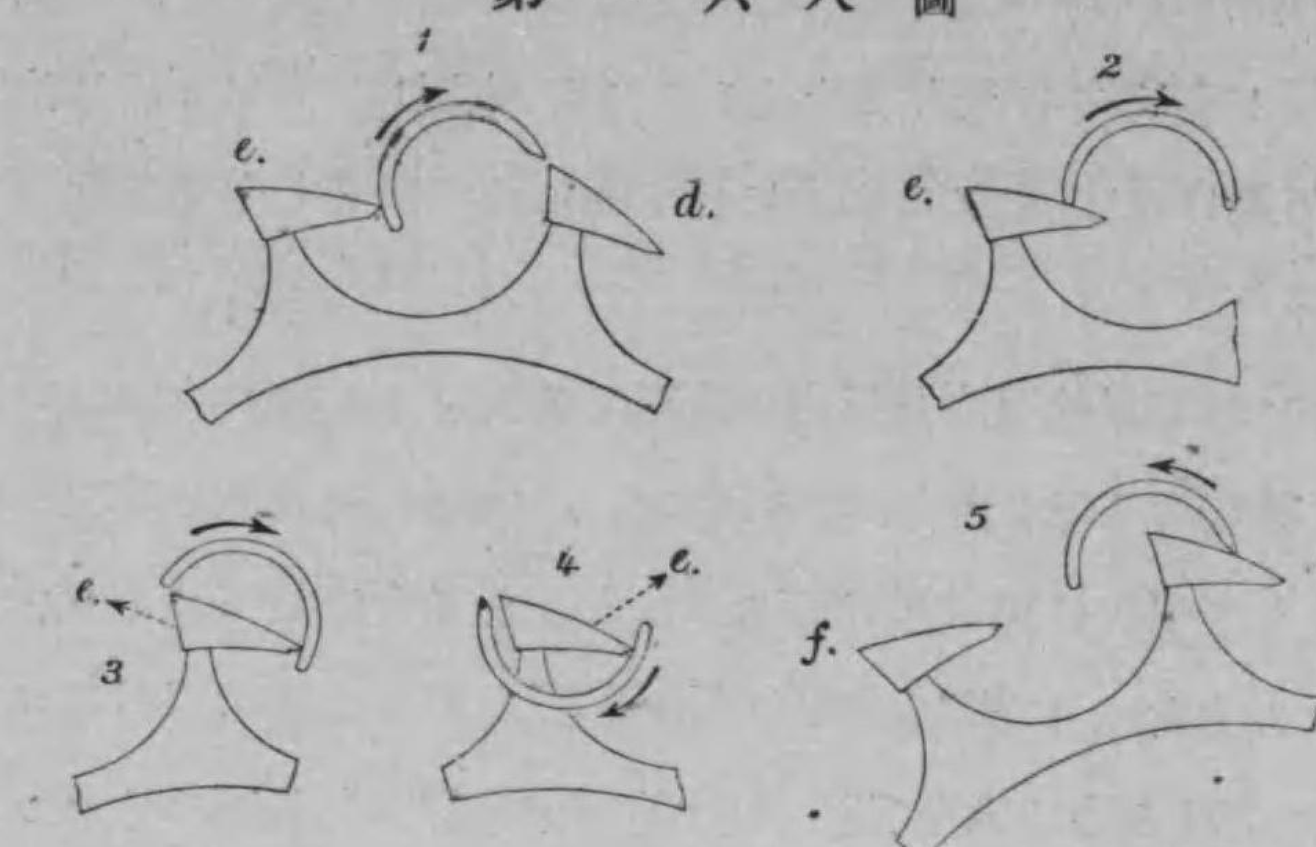


歯の高さだけ圓筒の一部分を切去る。

此歯止の作用は一六八圖に於て詳細に示さる。1 の位置にては平衡輪は靜止し、其僅に前に最端の位置に達したる圓筒は圖に示せ

る如き方向に運動す。直に後に歯 e が放たれ、動きて (2 の位置) 圓

第一六八圖

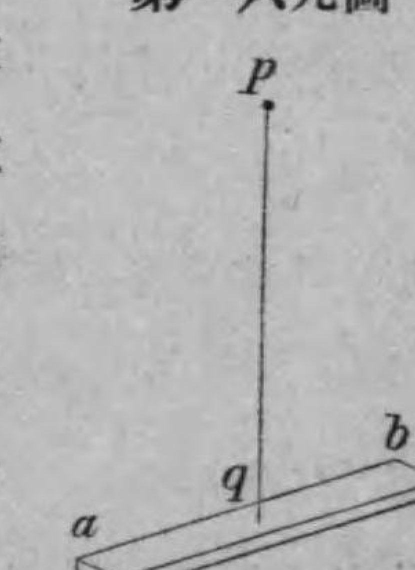


筒の內面を突くに至る(3 の位置)。圓筒は再び最端の位置 (4) に至りて戻り、然る後 (5 の位置) 歯を脫出せしむ。其後直に第二の歯 f は歯 e と同樣に圓筒に依りて止めらる。

又玆に歯止の裝置は平衡輪に依りて振動せしめらる。2 及 5 の位置に於て歯が圓筒に作用する壓に依りて之を生ずるなり。

一八九　振れの彈性の影響に依る振動 (Oscillations under the Influence of Torsional Elasticity.) 絲 pq (一六九圖) の上端を固定し、之に棒 ab を吊し、棒は水平の平面に於て q の周りに廻轉し得るものとす。其儘に放置せば棒は一定の位置を占む。然れども此位置より振れしむれば、絲は振られ (一六八節 d)、其彈性に依りて棒に偶力を作用せしめ、之を其平衡位置に戻さしめんとす。此偶力は振れの角(振れの角)に比例せること見出さる。

第一六九圖



此法則を應用して小なる力を測り得べし。即ち ab の棒に一偶力 K が水平面内に作用せば、棒は廻轉せしめられ、之を戻さんとする偶力が K に等しきに至りて止まる。故に振れの角は K に比例す。絲が細ければ、小なる偶力に於て既に此角は著しき大さを有すべし。

クーロンが電氣的引力及斥力の法則を發見せる振秤に於ては、棒の一端に帶電せる球を附し、之と同じ高さに於て固定せる第二の帶電球によりて引かれ或は斥けらるゝなり。此場合に於ては電氣作用より生ずる力を q に移して偶力 K を得。此場合に偶力以外に存在せる q に於ける力に依りて棒 ab は稍側方に移動し且高めらるゝを見る。然れども ab の重量は此力に比して大なる故に之を除外し得べし。

此器械に依りて力の絶對の大さを算出せんとせば、絲が其振れの角 1 に於て棒に作用せる偶力を知るを要す。是は棒を平衡位置より動かして放置したるときになす廻轉振動の週期よりして演繹し得べし。

彈性より生ずる偶力は振れの角に比例せる故に、此振動は先に考察せる簡單振動と多くの類似の點あり。振動時間 θ は物理的振子(一八四節)の無限小の振動に於けると同樣の簡單なる範式にて定め得らる。

即ち今甚小なる振動のみならず、又大なる振動に於ても θ は

$$\theta=\pi\sqrt{\frac{Q}{K}}\qquad\text{(12)}$$

に依りて與へらる、Q は ab の廻轉軸に關する、即ち pq に關する惰性能率にして、K は絲が弧度 1 なる振れの角に於て作用せる偶力

なり。θ 及 Q よりして此範式にて K を計算し得。

困難なる點は惰性能率を定むることに在り。一般に之を糸に吊さるゝ物體の形及質量の配布よりして充分精密に計算するを得ず。然れども、動す力を變せずして質量を增大したる場合の振動時間を測定して、惰性能率を見出し得。即ち棒に尙或る質量を加へ、廻轉軸に關する其惰性能率が Q' なりとすれば(勿論棒は水平ならざるべからず)振動時間は

$$\theta'=\pi\sqrt{\frac{Q+Q'}{K}}\qquad\text{(13)}$$

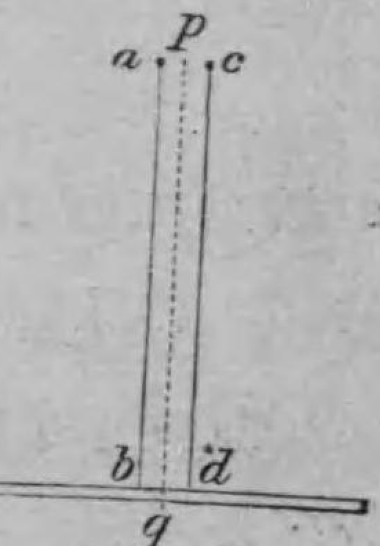
此式と (12) とよりして

$$Q=\frac{\theta^2}{\theta'^2-\theta^2}Q'\quad 及\quad K=\frac{\pi^2Q'}{\theta'^2-\theta^2}$$

玆に要するは、加へたる質量は其惰性能率を計算にて見出し得べき如き簡單なる形を有することのみなり。例ば q より同距離に在る二個の等しき重量、又は q を中心とせる水平の輪の如きものなるべきなり。

一九〇　二本吊り (Bifilar Suspension.)　多くの器械に於て水平の方向に容易に廻轉し得るを要する物體が二本の同じ長さの絲 a 及 cd (一七〇圖)にて吊さる。今其兩下端は上端と同じ間隔に在りと假定すべし(二本吊り)。然れば其平衡位置に於ては二本の絲は平行なり。然れども物體が垂直線 pq の周りに廻轉せしめらるれば二線は此方向を保續すること能はず。故に此の如き廻轉の後には絲は始めと同じ水平の平面 bd に在る能はず、物體は稍高められ、重力は之を戻さんとす。重力は振れを惹起したる或他の力と平衡に在らざるべからず。又重力の作用によりて物體は廻轉の振動をなすを得るなり。精密に云はゞ運動に依りて振ぢらるゝ絲の彈性も亦作用せるなり。

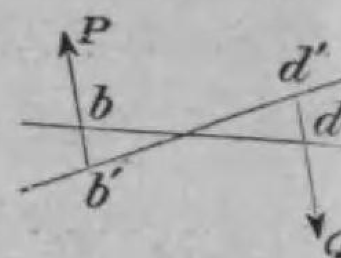
第一七〇圖



一七一圖は之が水平の投影を示して説明せるものなり。絲の

下端が廻轉に依りて b 及 d より b' 及 d' に來れば、絲自身は b' 及 d' より斜に上方に走り、即ち b 及 d の上に在る吊下げの二點に達せり。b' 及 d' に作用せる張力は垂直に上方に作用せる分力並に $b'P$ 及 $d'Q$ に分解せらる。前者は重力と平衡に在らざるべからず、後者よりして物體を引戻さんとする偶力を生ず。

第一七一圖



所與の振れに於て、即ち絲の所與の方向に於て張力は重量に依りて定めらるゝ故に、引戻さんとする偶力も亦後者に關係す。

二本吊りの物體の小振動は振子の運動と同じ法則に從ふ。又其の如く位置エネルギーより運動エネルギーに、並に其逆に、絶えず轉換せり。絲が延びる事なく、又其捩れも省略し得れば、位置エネルギーの變化は重心の垂直線上の上下よりして計算し得。

振動の週期は一八七節の範式 (11) よりして計算し得。

一九一 磁石の相互作用 磁極の强さ (Mutual Action of Magnets. Strength of Magnetic Pole.) 磁石の平衡及運動を述べて此章を終るべし。先づ磁石が細き棒の形を有し、唯兩端即ち極(七六節)に於て磁氣的作用を作用し又は受くと假定す。

此等の作用は次の法則に從ふを見出せり(クーロンの法則)。

a) 兩極間の引力及斥力は距離の自乘に逆比例す。

b) 兩磁極 A 及 B が第三の極 C に同じ距離よりして働く作用の間には、C が如何なる極なりとも常に同一の比存在す。

A 及 B の極が第三の極 C に同じ距離に於て同じ力(引力又は斥力)を作用せば A 及 B は同强なりと云ふ。

c) 同じ磁石の北極並に南極は常に同じ强さを有す。

同じ距離に於て、A 極が C に作用する力が B 極が C に於けるよりも p 倍大なりとせば、A は B よりも p 倍强しと云ふ。換言せば

一磁極が働く作用は其强さに比例す。

作用反作用の相等しきことの法則よりして尙次のことを得。

一磁極に或他の磁極より働く作用は第一の極の强さに比例す。

以上の二法則は次の規則に總括するを得。

二磁極の相互作用は兩極の强さの積に比例す。

斯して極の强さの單位を固定するを得。普通之は一磁極が同强の他の磁極と單位の距離に於て單位の力を以て反撥する如き是等磁極の强さを云ふ。然れども電氣の理論に出づる諸方程式を出來得る丈簡略にする爲に、極の强さ並に此理論に出づる他の諸量に新しき單位を選ぶべし。一磁極が他の同大の磁極と單位の距離に於て $1/4\pi$ の力にて反撥する如き極の强さを單位とすべし。然れども、讀者が普通の單位を用ゐるを望むこともあるべきにより、凡て單位の選擇に依り異る場合には新單位に基ける範式及數値の次に直角括弧に入れて普通の單位に基ける範式及數を示すべし。

極の强さの新單位は普通のゝ $1/\sqrt{4\pi}$ なること、又兩單位は長さと力との單位を選めば完全に定めらるゝことは容易に知るを得。後者に關しては常に $C-G-S$ 系を基本とすべし。

m 及 m' の强さの二磁極が互に r の距離に在れば夫等の相互作用は次の如し。

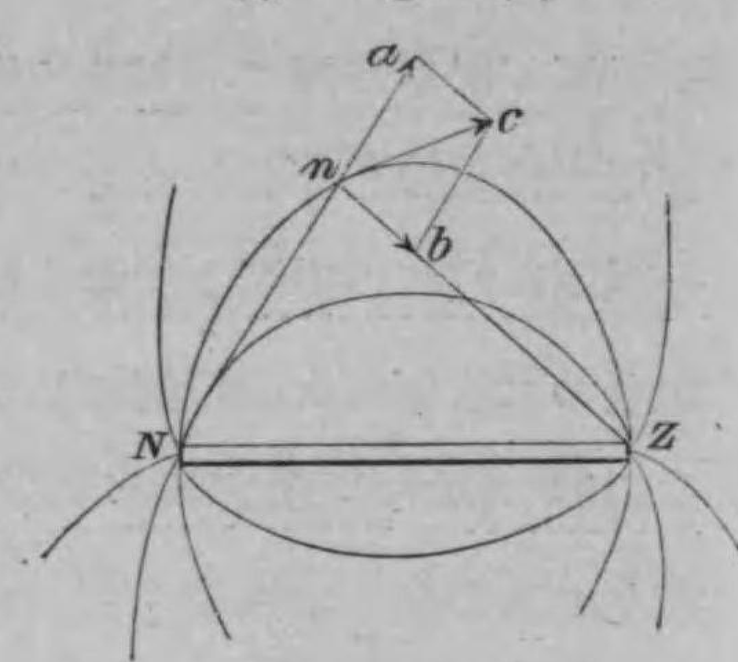
$$\frac{mm'}{4\pi r^2}\left[\frac{mm'}{r^2}\right] \qquad \cdots\cdots (14)$$

一九二　磁石の周りの力界 (Field of Force about a Magnet.) NZ (一七二圖)を磁石とし、其近傍の任意の一點に可動の一北極 n ありとす。na 及 nb の長さにて N 及 Z が n に作用せる力を表はさしむ。此等の力の比は

$$na:nb=nZ^2:nN^2$$

なる比例にて定めらるゝ故に、合力の方向は n 極の强さに無關係なり。

第一七二圖



前述の如き作圖法を各點に於て施し得る故に、磁力界(或は磁界又磁場)に於ける力線の道を(一二八節)示し得。此線二三を圖に表はせり。

一力線の方向とは一北極が進行せしめらるゝ方向を示す。磁場の一點に於ける磁力、即ち磁場の「强さ」とは此點に置きたる單位の極に作用する力を云ふ。

實際に磁石は此に假定せるよりも複雜なる構造を有す。同長の數多の細き棒が太き棒に合一して兩端に磁氣的性質を示せりと考へ得。又磁石棒を各個々が他の延長線上に在る樣にして合一せしめ得。又一般に何等かの仕方にて前節に於ける如き磁石の任意の方向及强さのものを相互に合一して一磁石系を造り得。

磁氣體の構造と共に勿論其周圍の力線の道も亦變す。

又注意すべきは力線は如何樣に走るとも、甚小の距離に於ては之等を直線とし又互に平行なりとして認め得べく、又極小の空間に於ては磁力は何處も同大なりと做し得。斯して一磁場の小部分は殆

等質なり。今此の如き空間に極小の磁石棒を置き、是が其中心の周りに凡ての方向に廻轉し得とせば、そは力線の方向を取る。即ち此位置に於て、等しくして反對なる二力が兩極に長さの方向に作用す。

一九三　地球の周りの磁場　地磁力の方向 (Magnetic Field round the Earth. Direction of Terrestrial Magnetic Force.) 既に七六節に於て地球が一磁石の極に作用する力に就て述べたり。諸現象よりして地球は磁石と同じく或る力界にて圍まるゝを知る。此力界は吾人が實驗を行ふ室の廣延の程度に於ては等質と見做し得。

力線の方向を定むるには、前節の終りに云へる如く、重心の周りに凡ての方向に廻轉し得る磁石棒を用ゐ得べし。此の如き磁石は七六節に磁氣子午線と名けたる垂直平面内に靜止す、且磁石は其北極を下方に向く。磁石が水平面となす角は今西部歐州に於ては 61° より 69° の間にあり(日本にては 49°)。之を伏角と名く。

此磁石(伏角針)の方向が力線の方向を與ふ。

實際に磁場が一樣なるは、第一に室の凡ての點に於て伏角針が同一方向を有し、第二に地磁力が其何處にも同强の作用あるによりて示さる。之を實證する方法は次節に記せり。又夫により全體として移動し得る磁石も地磁力の影響の下には之をなさゞるを知る。即ち若し兩極の在る場所に於て地磁力が同じ强さならざれば、反對の方向に於て是等の極に作用せる二力も亦相等しからざるべきなり。

伏角を測るには、磁石針を重心の周り凡ての方向に廻轉し得る樣になす必要なし。重心を過ぎ、長の方向に直角なる水平軸の周りに廻轉し得る樣になせば十分なり。唯此軸が水平面内種々の方向を有し得る樣にすべし。軸が磁氣子午線に直角なるとき、針は極に作用する

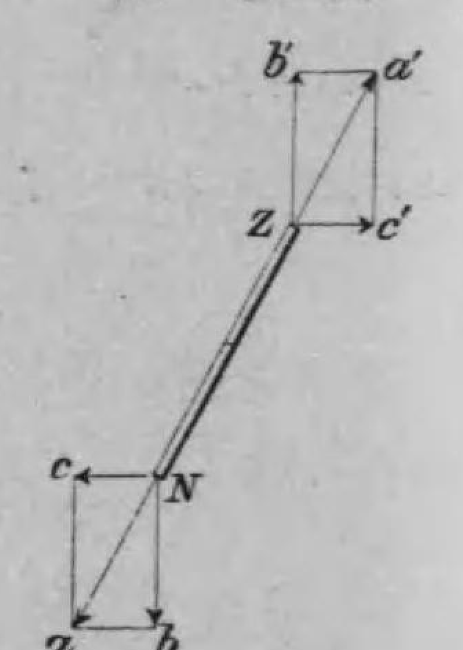
力の方向を占む。

廻轉軸が水平面内任意の方向を取りたる場合に、磁針が如何なる位置を占むるかを研究するは讀者に委ぬべし。軸が磁氣子午線内に在れば針は直立す。

伏角針の觀察に於て甚だ重要なるは、軸に於ける摩擦を出來得る丈小になすことなり。弱き磁力に對しては、是が著大の影響を與へ易ければなり。又廻轉軸は決して精密に重心に置かれ得ざることを注意せざるべからず。此爲に生ずる誤差は、針を逆の方向に帶磁せしめたる後、實驗を繰返して除くことを得。重心が始め北極の側に在りて其爲に伏角を過大に示したりとせば、そは後には南極の側に在りて、傾斜は過小なるべし。

地球表面上伏角の變化は水平なる大磁石棒上、小磁針を重心の周りに廻轉し得る樣になしたるものにて認め得るものと大體に於て一致す。此磁針は棒の何れの一半に在るかに從ひ、其何れかの極を下方に向く。又棒の一極に近づく程、針の傾斜は大なり。同樣に、伏角針は地球表面の北半に在りては其北極を下方に、南半に在りては南極を下方に向け、傾斜は赤道より遠かると共に増加す。是等地球表面の兩半は一線、其上の點にては伏角が零なる樣の線にて分たる。然れども此線は赤道とは一致せず、稍不規則の道を有す。

第一七三圖



一九四　地磁力の大さ (Magnitude of Terrestrial Magnetic Force.)　一七三圖に於て圖の平面が磁氣子午線と一致し Na (又は Za') は地磁氣が一磁石 NZ の一極に作用する力を示す。此力は垂直分力 Nb (又 Zb') 並に水平分力 Nc

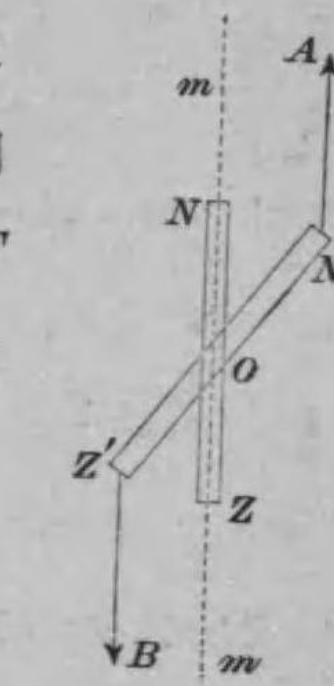
(又 Zc') に分解せらる。i を伏角とせば明に

$$Nc = Na\cos i$$

合力 Na を求むるには伏角と水平分力とを測るを要するのみなり。

一磁石の極に作用する水平分力の大さは磁石を絲にて吊して唯一水平面内に於てのみ廻轉し得る樣にせるとき、此磁石の振動する週期よりして之を算出し得。即ち(一七四圖) NZ が磁氣子午線 mm に於ける磁石の平衡位置とせば、其占むる位置の如何に拘らず、極には $N'A$ 及 $Z'B$ の力が NZ に平行に作用す。垂直の方向に NON' の平面に直角に作用する力は除外し得べし。$N'A$ 及 $Z'B$ の大さを F にて、磁石の長さを l にて、振れの角 NON' を φ にて記せば、磁力 ($N'A, Z'B$) の能率は

第一七四圖



$$Fl\sin\varphi \qquad \cdots\cdots(15)$$

なり。

斯して振子に於けると同樣に、引戻す偶力は振れの角の正弦に比例する故に、磁石は其運動の際、振子と同じ法則に從ふ。故に無限小の振動の週期は一八九節の範式 (12) にて定められ、今其中に K は偶力が $\varphi=90^\circ$ に於て占むる値を表さゞるべからず。依て範式は

$$\theta = \pi\sqrt{\frac{Q}{Fl}}$$

となり、是よりして次式を得。

$$F = \frac{\pi^2 Q}{l\theta^2}.$$

惰性能率は一八九節に示せる方法に依りて求めらる。

力 F を定むるには磁石を吊せる糸の彈性が振動週期に影響を有せるを注意すべし。

地磁力の大さ或は水平分力 H と云はゞ夫々單位極に作用する力を示せり。地球が一極に作用する力は極の强さに比例するを知れる故に、上述の力 F を極の强さ m にて除せば H を求め得。極の强さは其磁石の他の磁石に於ける作用よりして算出し得。

H の値は場所と共に異る。一二の値を次表に示せり。

	新單位	普通の單位
アムステルダム	0,052	0,184
伯林	0,053	0,189
ボン	0,054	0,193
ケーニヒスベルグ	0,052	0,184
ミュンヘン	0,058	0,207
維納	0,059	0,209
東京	0,085	0,300

次の關係

$$F=Hm$$

に依りて (15) の式は

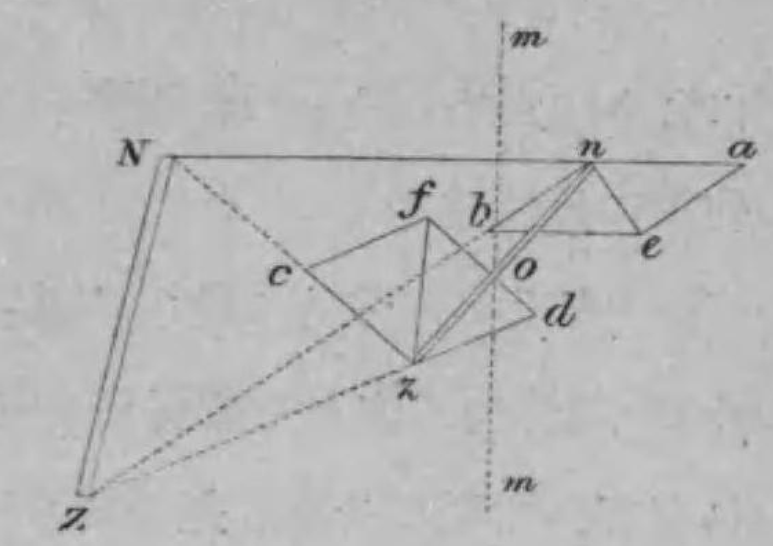
$$Hml\sin\varphi$$

に變ず。

磁石を平衡位置に戻す偶力は、振れの角と地磁力の水平分力とに又極の强さと長さとの積にも亦關係す。此積は屢其磁氣作用を定むるに用ゐらる、此磁石の磁氣能率と名く。

一九五 一磁石が他の磁石に依る振れ (Mutual Deflection of two Magnets) nz (一七五圖) を以て其中點 o の周りに一水平面内に廻轉し得る磁石とし、又 NZ を是と同一平面内に固定せる磁石とし、

第一七五圖

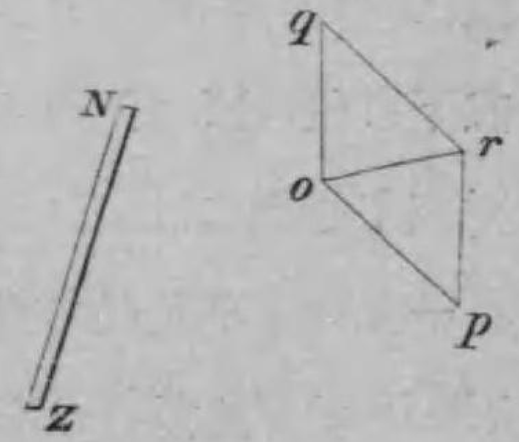


其爲に nz が磁氣子午線 mm より振れたりとす。一方に n 及 z の二極、又他方に N 及 Z の間に凡て四個の力ありて、na, nb, zc, 及 zd によりて表はさる。合力 ne 及 zf を o の方に移せば地磁氣の偶力と平衡に在らざるべからざる二偶力を生ず。

nz が NZ の二極よりの距離に比して甚小なれば事柄は特に簡單なり。此場合には na 及 zc、又同樣に nb 及 zd を等しく且つ平行なりと考へ得。又此場合には諸力を o に移すことなくして既に偶力を得。

nz の長さ小なれば又次の樣にも考へ得。磁石 NZ (一七六圖) は任意の一點 o に於て一磁力 op (一九二節) にて、地球は一磁力 oq にて作用す。合力 or は o に於ける力線の方向を定む、又甚小なる磁針は此方向に於て靜止せしめらる (一九二節)。

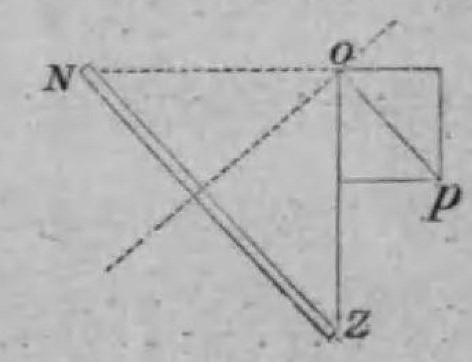
第一七六圖



玆に尙次の事を注意すべし。

a) o 點が NZ を直角に二等分する線 (一七七圖) 上に在らば N 及 Z の合作用なる磁力 op は NZ に平行なり。

第一七七圖



b) 力 op (一七六圖) が磁氣子午線即ち又 oq に直角なれば o に在る小磁針が NZ となす振

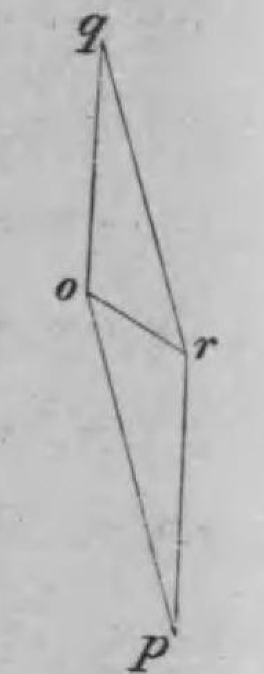
れの角 α は

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{op}{oq}$$

によりて定めらる。即ち振れの角の正切は此場合に於ては NZ の作用に比例す。

c) 多くの電流計に於ては磁針を一定の位置に固定せしむる力を小さくし、夫に依りて微弱なる電流が磁針に大なる振れを與ふる樣にせり。是が爲には一磁石を或位置に固定し(補整磁石)、其作用にて磁針の極に於ける地磁力の作用を全部或は大部分消去する樣にせば之を得べし。

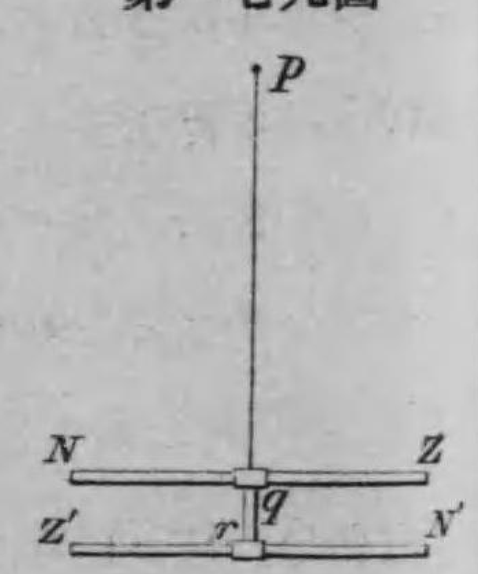
第一七八圖



此とき磁針の靜止する方向は吾人の隨意なり。即ち地磁力 oq (一七八圖)を所與とせば、適宜に選める力 op と此 oq とを合成して任意の方向に合力 or を得べし。勿論 or が小なるべきにより op は殆 oq の延長線上に在るべし。故に磁針の廻轉の中心が、水平に置ける補整磁石の中心の直上又は直下に在れば、針に與へんとする方向の如何に拘らず、此磁石は殆ど磁氣午子線に置かれざるべからず。

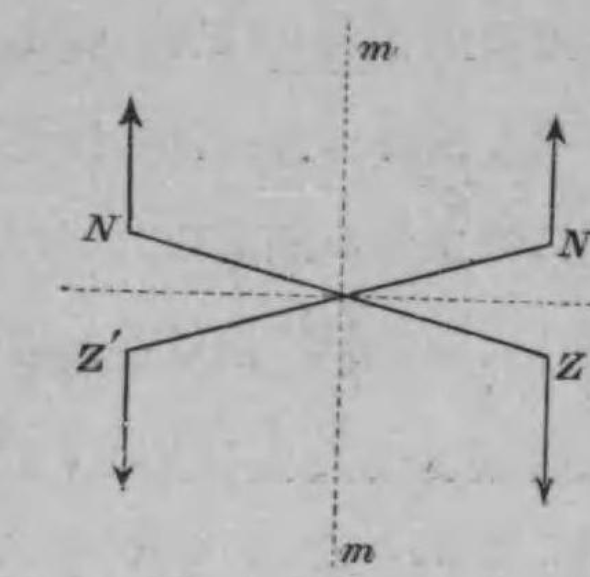
一九六　不定位の磁針系 (Astatic System of Needles.) 地磁力の影響を減少する他の方法としては、二個の水平に且平行なる磁針 NZ 及 $N'Z'$ (一七九圖) を垂直の小棒 qr にて固く連結し、反對の極が上下に相重れる樣にせしめたるもの用ゐらる。系は絲 pq にて吊され、水平の方向に廻轉し得るものとす。二

第一七九圖



磁針が全く平行に且同强なれば、地球は此系には全く何等の方位上の力を作用せず (是よりして其名あり)。系は唯絲 pq の彈性に依りて其平衡位置を占むべし。二針が平行なれども等强ならずとせば、夫は尙磁氣子午線面に靜止す。是等が互に或小なる角をなせば、子午線面より遠かる。一八〇圖は水平投影を示せるものにて、二個の等しき磁針の互になす銳角を二分する線が磁氣子午線 mm に直角なるときに平衡の狀態を占むるを示せり。何等他の平衡位置の可能ならざるは容易に知るを得べし。

第一八〇圖



一九七　感度と振動週期との關係 (Relation between the Sensibility and the Period of Oscillation.) 「方位力」の影響の下に物體が安定なる平衡の位置を占むるものを、或他の力にて此位置より動かすことに關する凡ての場合に於て、其感度は方位力の小なる程大なり。又小なる方位力に於ては物體が此力のみの影響の下になし得る振動は緩漫なり。

感度と振動時間との此關係は次の諸例にて說明せらる。即ち振れ秤に於て小なる角を測る爲に極めて細き絲にて吊したるものは極めて緩漫に振動すること、又二本吊の物體に於ては二本の絲が互に近き程感度及振動時間が增加すること、又補整磁石を有せる電流計に於ても此磁石を移動して磁針が振動する磁場を微弱ならしむれば、前の二例の如く針の振動緩漫となること等なり。

一九八　振動物體に於ける抵抗の影響 (Influence of Resistance on an Oscillating Body.) 抵抗なる名の下に總括し得る種々の原因に依りて、振動體は凡て多少の時間の後に皆靜止せしめらる。運動の此の如き鈍りは普通少くとも一部分は空氣に依りて起さる（九五節）、其外に尙ほ他の影響あり、及端にて吊さるゝ振子に於て、又尖端に靜止せる磁針に於ては摩擦が作用し、捩ぢらる絲に吊さるゝ物體に於ては絲に於ける內抵抗が作用す。

理論によりて、抵抗が速度に比例せる場合に於ては、平衡位置の兩側に於ける振れは順次に等比級數をなすを知る。實驗に依りて是が證明せられ、又其級數の等比に依りて抵抗の大さを定むべき量を得。

此比が 1 と僅に異れりとせば、相次げる三個の振れを等差級數の項と見なして誤差は極て小なり。然れば物體の靜止を待たずして三個の相次げる最端の位置の觀察よりして平衡位置を容易に算出し得べし。

即ち一物體が或る度盛に沿て振動せりとし、a_1, a_2 及 a_3 を上記に相當せる其位置とし、A を平衡位置とせば、差

$$a_1-A,\ A-a_2,\ a_3-A$$

は等差級數をなさゞるべからず。是により一方の側に於ける二位置の平均 $\frac{1}{2}(a_1+a_3)$ は、他側に於ける a_2 と、A よりして同距離に在らざるべからざるを知る。斯して A を $\frac{1}{2}(a_1+a_3)$ 及 a_2 の中央に在る點として知る。固より運動が鈍められざれば

$$A=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2)$$

なるべし。

上記の方法に依り、例ば一の天秤に於ける靜止の位置は回歸の點

若干よりして算出し得べし。

尙注意すべきは、唯だ運動に依りてのみ生ずる抵抗は、平衡位置に決して影響を及ぼさゞることなり。其理由は簡單にして、物體が終に靜止に在れば抵抗も亦存在せざるに依る。即ち單に平衡位置の觀察をのみ要すとせば、物體をして速に靜止せしむる爲、空氣の抵抗を表面の增大に依りて强め得。又屢同じ目的の爲に液體の抵抗を利用す。

一九九 急激なる打擊に依る振れ (Deflection by a Sudden Impulse.) 物體が一固定軸の周りに或る方位を與ふる偶力の影響の下に振動せしめられ、偶力は平衡位置よりの振れに比例するものとす。物體が始め平衡の位置に在りて、次に偶力 M に依りて之を離れ、偶力は短時間 τ の間働き、其間に或る著しき振れをなしたりとす。然れば物體は平衡位置を角速度

$$\frac{M\tau}{Q}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

にて過ぐと云得、偶力よりして此角速度を得（一八六節 a）。Q は廻轉軸に關する惰性能率なり。

物體は簡單振動をなす、其平衡位置を通過するときの角速度は每回 (16) の式にて定めらる。此振動を一八七節 (a) に於ける範式 (9) 及 (10) にて表せば $2\pi a/T$ は (16) の値を有し、即ち最初の振れ a は

$$a=\frac{M\tau T}{2\pi Q}=\frac{M\tau\theta}{\pi Q}$$

の値を有す。

此範式にて $\theta=\frac{1}{2}T$ なり。今 $\theta=\pi\sqrt{Q/K}$ なる事を考へ、K が一八七節 (e) に示せる意味を有し、即 $Q=\dfrac{K\theta^2}{\pi^2}$ なれば、次の如く記し得。

$$a=\frac{\pi M\tau}{K\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

此式は物體が平衡位置を運動エネルギー $\frac{1}{2}M^2\tau^2/Q$ にて過ぎ、又最大の振れの瞬時に於ける位置のエネルギー（一八七節 e）$\frac{1}{2}Ka^2$ が之に等しからざるべからざるを知れば求め得。

今絶えず働きて同大の永久の振れを生ずべき偶力 N を求むべし。是が引戻さんとする偶力と平衡に在らざるべからざるが故に

$$N=aK \quad \text{......(18)}$$

なり。故に偶力 M 及 N が同じ振れを一は最初の振れとして、他は永久の振れとして與ふるものとせば、其關係は

$$N=\frac{\pi M\tau}{\theta} \quad \text{......(19)}$$

なり。

凡て前述に於ては何等鈍りあらずと假定せり。速度に關係する或抵抗存在せば a は (17) にて定めらるゝ値を有せず。(18) の範式は尙ほ成立す、然れども (19) は一層複雜なる形の關係に換へられざるべからず。

第四章

液體及氣體の平衡並に運動 (Equilibrium and Motion of Liquids and Gases.)

二〇〇 液體及氣體の壓 (Pressure of Liquid cr Gas.) 外力に依りて生ずる狀態の變化、並に是に依りて生ずる內力は、固體に比すれば、液體並に氣體に於ては其性質特に簡單なり。

是等の物體の觀察に於て先づ微部分相互の排列が凡ての方向に於て常に同樣なる容積の諸變化のみに就て論ずべし。是に於ては內力は一の「壓」にして簡單なる法則の下に在り。

一液體が、可動の一喞子にて閉塞せられたる一圓筒內に在り、或は一部分此の如き圓筒をなせる空間內に在りとすれば、喞子を內方に壓するに依りて容積を減少し得べし。然れば直に液體は再び膨脹せんと努め(彈性)、是に依りて器の壁に對して壓を作用す。同樣に、物質の相接近せる部分も亦互に壓するなり。

上述は氣體に於ても同樣なり。然れども是等二個の集合狀態間には一定の外力に依りて微部分に與へらるゝ近接の度に關して大なる差別あり。普通の液體に於ては容積の減少は甚だ小にして長き觀察の時間に於てすらも計上せられざる程なり。逆に、始に存せる外

壓が減少し或は消滅したるときにも極て僅に膨脹するのみなり。實際上の見方よりしては此等の物體は多くは壓縮せられざるものとして見るを得べし。之に反して氣體は甚大なる容積の變化を示す。壓の減少に依れる其膨脹に就ては又何等極限あらず。故に氣體は外壓なければ決して限られたる容積内に在るを得ず。

其他、壓は側壁を推し入るゝに依りてのみならず、又他の外力に依りても生ぜらるべし。重力は常に上層を下層に向ひて壓し、後者の占むる容積を減少せしむ。

二〇一　壓の方向 (Direction of Pressure.) 液體及氣體に於て壓は其作用する平面に直角なり。此事は先づ其周圍の壁又は其中に在る他の物體に對して作用する力に於て適用す、又物質を思考上任意の面にて互に別ちたりとせば其部分間の相互の力に於ても同樣なるものなり。固體に於ける如き切線的張力（一六八節 c）は少くとも靜止せる液體に於ては存在せず。

平面 V を以て上記の面とす（一八一圖）。然れば物體の部分 I は部分 II に對して數多の平行力を作用す、圖中平面の一部分 ab に就て示せる如し。勿論 II は I に對して等しくして且つ反對なる力を作用す。

第一八一圖

圖中に示せる力を合成し、即ち互に加ふるに依りて「平面 ab に於ける壓」を見出し得。此壓は V に沿ふて何處も物質が同じ度に壓縮せらるれば ab の大さに比例す、之を ab の大さにて除せば單位表面に於ける壓を見出すを得。

各點に於て狀態が異れば、平面 V の相隣接せる同大の部分に不同の力作用し、又平面一部分に於ける壓は其部分の大さに比例せざる

べし。然れども P 點の周りに此平面の小部分を考へ、其の凡ての點に於て狀態が同樣なりと見るを得べしとす。此小部分に於ける壓を其面積の大さにて除して P 點に於ける毎單位面積の壓を得。

面積の單位を十分に小さく選べば、此小部分を面積單位に等しとするを得べし。屢毎平方粍の壓として實際に一平方粍に於て作用せる力を取るを得。

壓の大さに就て云ふときには玆には特に云はずとも常に毎單位表面の壓に就て云へるものとす。

液體及氣體の運動現象に於ては物質の二部分間の相互作用が境界面に直角ならざる場合あり。此の如き場合は先づ考察の外に置くべし。

二〇二　或一點に於ける壓は凡ての方向に於て同大なること (The Magnitude of Pressure at a definite Point is equal in all Directions.) 液體又は氣體の内部の任意一點に於て一極微面を種々の方向に置くに、是等に於ける壓は何れに於ても同大なり、故に面の方向を特別に與ふることなくして唯「P 點に於ける壓」と云得。

此重要なる法則は分子が大なる可動性を有する結果なり。固體は一方向に於て壓縮し得。一六八節 a の棒を壓縮し、之を後に示す如く水平の方向に延長したる後、是と恰も精密に適合せる袋にて之を包めば、棒は此袋の側壁には全く壓を加へず、唯だ B に於ける支面に對してのみ壓すべし。然れども圓筒内喞子の下に在る液體が壓縮せらるれば、諸微部分は常に側方にも亦動かんとし、是が妨げらるれば、夫等は圓筒の軸に直角なる方向に於ても亦軸の方向に於けると同じ度に於て密にならんとすべし。同樣に、液體又は氣體に於て

夫等が如何樣に動くとも又如何なる力が之に作用すとも小部分は凡ての方向に同じ强さに壓縮せらる、內部の壓に於ける上述の事は直接此結果なり。

二〇三　壓が凡ての點に於て同大なる場合 (Case, when Pressure is equal at all Points.) 靜止せる液體又は氣體內の各點に於て壓が如何樣に異れるかは、一物體は其任意の部分に作用せる諸力が互に相平均せる場合にのみ平衡に在り得ることを考ふれば（一六八節）知り得べきなり。或る想像上の閉表面の內に在る液體又は氣體の部分に就ては、重力の如き力の外に周圍の物質に依りて作用せらるゝ凡ての壓が働き得。平衡の條件を得るには其部分が液體なることを考ふるを要せず（一六九節）。極て細き角柱狀或は圓壔狀の液體の部分を考へ、其端の面が長さに直角なりとす。是に依りて長さの方向に作用せる力に對する平衡條件を求むべし。側面に於ける壓は凡て長さに直角なるが故に此壓は考へざるを得べし。

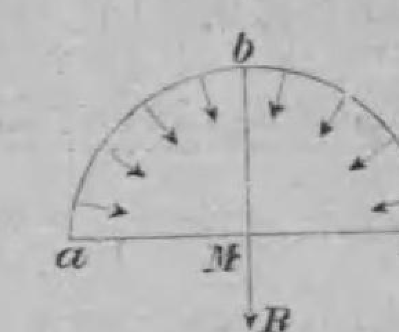
液體又は氣體の內部に於て何等外力作用せざれば、壓力が何處に於ても同大なる場合にのみ平衡に在り得るは直に知るを得。何となれば上記任意一小柱の兩端面に同大の力が作用するを要し、且つ端面が同大なるが故に、每單位表面に於ける壓も亦兩側に於て同じ値を有するを要すればなり。此條件が滿足せられざれば液體は運動すべし。勿論此定理は重力の作用を省略し得る場合にのみ應用し得即ち最下層に於て重力が起せる壓が他の仕方にて生ぜる壓に比して小なる場合なり。例ば大なる廣延の氣體の如き、或は液體が喞子に依りて大なる壓を作用せらるゝもの（水壓器內の水）の如きなり。

液體が其內部に於て何等外力作用せずして一度平衡に在り、然る

後閉表面內に在る部分を同形の或る任意の固體にて代へ、周圍の液體の壓を少しも變せずとせば、液體が物體に作用せる力は常に尙ほ互に消去せざるべからず。是よりして次の定理を得、又直接にも之を證明し得るなり。任意の一物體に凡ての側より同大の法線壓作用せば、物體全體としての運動に關しては凡て此等の力は互に相消去すべし。

此結果を用ゐて、一不閉曲面に作用せる、何處も同大なる法線壓の合力を見出すを得。例ば一八二圖に示せる半球面 abc に之を用ゐ、aMc の平面每面積單位に同大の壓作用せば、半球狀の物體 $abcM$ が平衡に在るべきを考へ得。所求の合力 R は bM 線上に作用し、其大さは每面積單位の壓を aMc 平面の面積にて乘じて見出さる。

第一八二圖



二〇四　內部の壓に於ける重力の影響 (Influence of Gravity on Internal Pressure.) 液體又は氣體の下層が上部の重量に依る壓縮は液體內に考へ得る小柱（二〇三節）が凡て平衡に在るまで進む。此場合に壓が各點に於て其値を如何に異にせるかは次の如くにして知るを得。

a) 重力は一水平小柱を其長の方向に動さんとせざるが故に、一水平面の凡ての點に於て、少くも其平面內一點より他點へ液體を去らずして移り行き得る場合には壓は皆同大なり。

b) 垂直小柱 ab（一八三圖）は下面に於ける壓が上面に於ける壓に對し、小柱の重さ丈大なるときにのみ平衡に在り得。單位面積に就て a に於ける壓と b に於ける壓との差を直に知るを得る爲に、

小柱の斷面を單位面積に等しと假定す。b に於ける壓は a に於けるに對し、斷面1にして a 及 b の間に在る液體又は氣體の垂直柱の重さ丈大なり。

氣體に於ては、此定理の應用は、高さと共に密度の變化する爲に、柱の重量が容易に計算し得ざるに依り困難あり。然れども是は定理の正確なるを妨げず。例ば一平方糎の切口の垂直柱が野外に於て大氣の極限に至るまであるものに於ても之を應用するを得。地球が此柱内の空氣を引く力は底面に於ける壓を定む。然れば又(二〇二節)此面と同じ高さに垂直又は斜めに置かれたる一平方糎に於けるものも同大なり。又一室が狹き孔に於ても外氣と連絡すれば室内に於て前者と同一水平面に在る面に於ける壓は同大なり。室の天井に達する空氣の柱の重量は小なる故に、是に於ける壓の差は通常省略するを得。

第一八三圖

室内の空氣が壁又は他の物體に作用する壓は此空氣自身の重量の結果に非ず、外氣の重量の結果にして、夫に依りて室内の空氣が壓縮せらるゝなり。

c) 一液體が其表面の一部分、大氣と接觸せるものに於ては後者は何處にも同じ壓を作用す。故に又表面の直接下に在る液體に於て壓は何處も同じ値を有すべし。液體が一平面にて限らるれば、表面の直接内部に横はれる小柱を考ふべし。此の如き小柱は長さの方向に於て一方にも又他方にも壓せられず。重力の如き外力が作用せば、小柱は此力の方向に直角なるときにのみ平衡に在るを得。故に通常の場合に於て液體の自由表面は水平面なり。表面が彎曲せば、

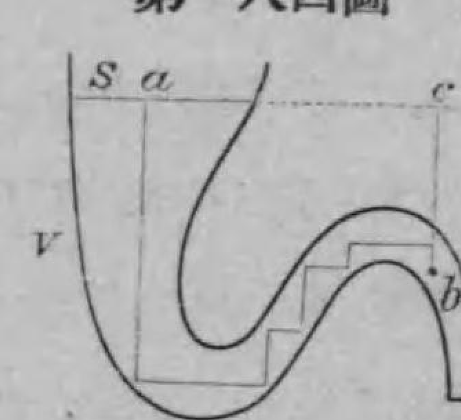
常に其小部分を觀察して之を一平面と見なし、此部分に小柱片を考へ是に就て又前同樣の論法を應用し得べし。平衡の狀態に於ては自由表面は其何處に於ても之に作用せる力に直角なり。

液體が一垂直軸の周りに廻轉せしめらるれば、廻轉があらずして液體徴部分に遠心力の作用せるときに示し得らるゝものと(一〇七節)同じ現象を認むべし。凹める液體表面は何處も此力と重力との合力に直角なり。

先に既に示せる如く一〇〇圖(190 頁)に於て液體が物體 M を圍み、液體徴部分が一二八節に云へる諸力に作用せらるれば、外部に於ては、其節に述べたる平衡表面にて限られざるべからざるは容易に知るを得。

d) 重力の一樣なる場に於ける液體に就て再び論ずべし。此液體が何處かに於て大氣と接觸すれば、其場所に於ける壓を知るを得。然れば *a*) 及 *b*) の所述に依りて、任意點 b が自由表面 S より發して液體を去ることなくして達し得る點ならば、此點に於ける壓を知るを得。即ち(一八四圖に於て V の形が如何樣なりとも)液體の内部に於て a より b へ水平面に垂直なる線片より成れる一線を引く。此線上を進むに、若し水平に進めば壓の同大なる諸點を過ぐ、而も亦上方或は下方に垂直線上に進むこともあり。下方又は上方に動く長さを夫々 h 及 h' と記し、單位面積を切口とせる液體柱の重さは其長さを括弧の内に入れて記す。下方に動く毎に壓は $[h]$ 丈增し、上方に動けば $[h']$ 丈減す。P が氣壓なれば、b に於ける壓は

第一八四圖



$$p=P+\Sigma[h]-\Sigma[h']$$

式の中、和の符號に就ては何等說明を要せざるべし。

今 bc を以て、b より垂直方向に液體の表面 S 或は其延長へ引きたる線とせば、b が液體表面の下に在れば(一八四圖)

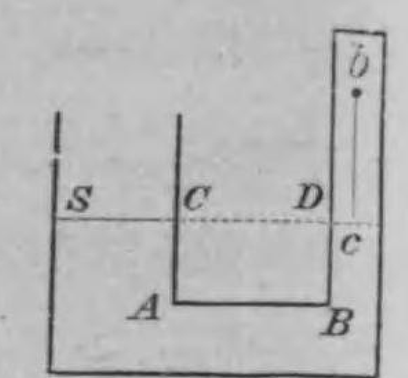
$$p=P+[cb]$$

又 b が上に在れば(一八五圖)

$$p=P-[cb]$$

なること明なり。

第一八五圖



玆に特に注意すべきは $[cb]$ なる記號は液體柱が cb なる長さを有したるとき有すべき重量を表はせることなり。上記の範式の適用せらるゝには cb 線が實際に液體の內に在ることは必要ならず。

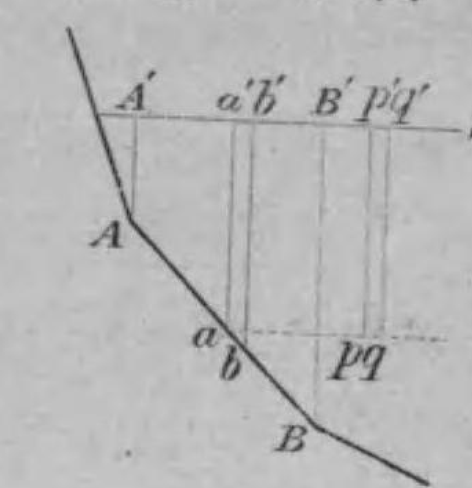
其他次のことを知るを得。同じ高さに在る任意の二點に於て、其間に液體內に在る一線を引き得ば壓は常に同大なり。又表面の延長上に於ては何處にも壓 $=P$ ならざるべからず。又液體の自由表面が二個の互に分離せる部分より成り、同大の外壓の下に在れば、此兩部分は同一水平面に在らざるべからず(連通器の法則)。

二〇五 應用 (Applications.) *a)* 氣壓を省略せば、無蓋の器の水平底面に於ける壓は底面より垂直に液體の表面まで達せる液體柱の重量に等し。此重量が液體全體の重量よりも大又は小なる如き器の形は容易に考ふるを得べし。然れども側壁に於ける壓を考に入れ、是が壁に直角に作用し、又一般に何處も垂直並に水平の分力に分解せらるべきを考ふれば、液體が器に作用する凡ての力の合力は液體の重量に等しきを知る、又實に然らざるべからず。 垂直

b) 一八五圖に示せる器の水平の壁 AB は上方に向ひ、$ABCD$ なる容積の液體が有すべき重量に等しき壓を受く。

c) 水平ならざる壁 AB に對する壓(一八六圖)。S を以て(次の諸圖に於ても亦同樣に)液體の表面とし、ab を壁の無限小の部分、pq を是と同じ高さに在る同大の水平面積部分、$pqp'q'$ を其上に在りて S に達せる液體柱とす。此液體柱の重量は ab に於ける壓を與ふ。是が實際に ab の上に在る $aba'b'$ なる柱の重量よりも大なるは明なり。壁全體に對する壓は、各部分に就て前述の如くにして得たる諸力を互に合成して求め得らる。

第一八六圖



壁 AB が水平なりとし、任意の點 a の上に一八六圖の aa' に等しき高さまで液體ありと考ふ。然れば實際に各部分 ab の上に在る液體柱は一八六圖に於て ab に作用せる壓に等しき丈の重量を有す。故に此圖に於て AB に於ける全壓は前述の方法に依りて水平なる壁の上に在りて上方を斜に一平面にて切れる液體全量の重量に等し。此柱體の重心より水平底面へ引ける垂線の脚點に依りて一八六圖に於ける壓の合力の作用點を定め得。

此觀察は垂直の壁にも應用し得。

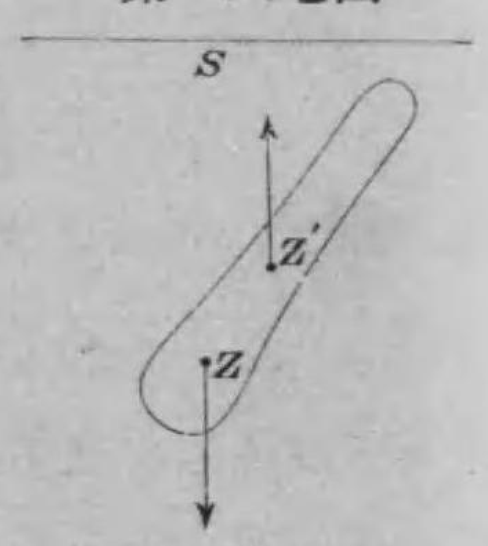
d) アルキメデスの法則。液體內に沈める固體に下面に於ては上面よりも大なる壓を作用するが故に、表面に於ける凡ての壓の合力は垂直に上方に向へる一力なり。是は固體の占むる空間を充せる液體の重量、換言せば此固體と換位せる液體の重量に等し。後者は水平底面を有する直柱に就て直に認め得。即ち下面及上面に於ける壓は此面上に在りて液體の表面に達せる液體柱の重量に依りて與へらるべければなり。

任意の形の一物體に就て各部分に於ける壓を觀察して、此等の力を相互に合成し、或は一層簡單に二〇三節と同樣なる推論を之に應用するを得。即ち固體を是と同容積を占むる液體にて置換せば、是は其周圍の液體と平衡に在り。前者が周圍より受くる凡ての力は勿論先に固體に働けるものと同じくして、夫等の合力は置換せる液體の重量に等しくして反對ならざるべからず。其他此合力は此重量と同一線上に作用せざるべからず。是よりして、固體に於ける壓は是に換位する液體の重心を過ぎて上方に向へることを知る。

又前述の事は唯一部分丈沈みて水上に浮べる物體に於ても適用す。是に於て換位せる液體と云ふは液體の表面下に在る物體の占むる空間を充すべき液體のことなり。

全然水中に在る物體は其重量が換位せる液體の重量に等しければ、液體內に於て平衡に在るを得。然れども此場合に物體は一般に一定の方向を占め、廻轉すとも常に再び其方向に戻る。即ち任意の一位置に於て（一八七圖）物體には重心 Z に於て働けりと考へ得べき重力作用せり。又換位液體の重心 Z' を過ぐる線上に同大の壓を上方に作用せり。是等の二力が偶力をなす。Z が Z' の垂直線下に在るとき、物體は安定なる平衡に在り。

第一八七圖

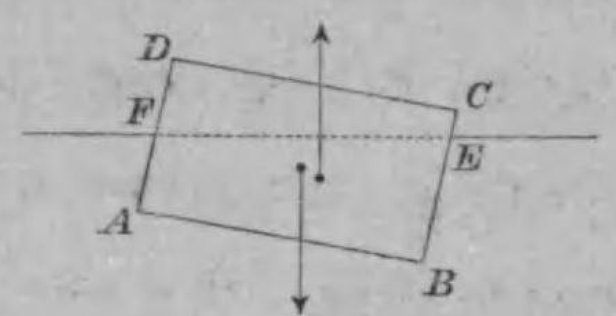


物體が等質なるときは如何なる位置に於ても平衡に在り、即ち此場合には Z 及 Z' が一致せるなり。

同樣なる觀察に依りて、浮べる物體が如何なる場合に安定なる平衡に在るかを知るを得。例ば一八八圖は等質なる直平行面體の垂

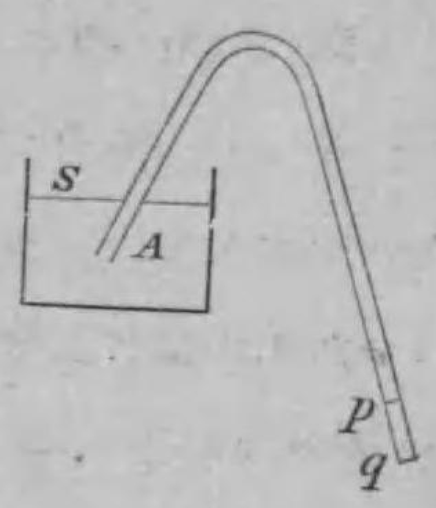
直斷面を示す。圖の平面は中心を過ぎ、側面の一に平行なるものとす。換位液體の重心は $ABEF$ の梯形の重心と、又物體の重心は梯形 $ABCD$ の重心と夫々一致す。重量と上壓とが偶力をなし、平行面體を動かして AB を水平なる位置に至らしむるを見る。

第一八八圖



等質なる圓壔が其長さ橫の廣延に比し甚大なれば、直立なる位置に浮べるときに屢不安定なる平衡に在ることは容易に知るを得べし。此の如き物體を此位置に保つには下端に錘を附せざるべからず。

第一八九圖



最後に尙記するを要するは、アルキメデスの法則は周圍の物體が氣體なるときにも適用し得べく、又浮沈せる物體が液體にても、又氣體にてもあり得ることなり。輕き氣體が重き氣體の中に於て上昇することに於て此法則の立證を見るべし。

c) サイフォン　一八九圖に示せる彎曲管の其一端を A 器中の液體に入れ、全く液體を充たしたる後 q に於て指にて塞ぐ。然れば管內 q に於ては q が A に於ける液體の表面より低きか高きかに從ひ氣壓よりも大或は小なる壓あるべし。第一の場合に於て指を放てば p 及 q 平面間の液體には下方よりは上方より大なる壓作用し、液體は流出すべし。之に反して第二の場合には A の方に逆流すべし。

第一九〇圖

f) 種々の液體を有せる連通器 晴雨計 一九〇圖の U 形の管內に a より b まで水銀ありて、其上には一方の腕には c まで水あり。b の一點及他の腕上之と同じ水平面に在る第二の點に於て壓が同じかるべき故に、平衡の條件は a 及 c の此水平面上の高さが水銀及水の密度に逆比例せざるべからざることなり。

是に於て注意するは、兩腕に於て二點が同じ高さに在りとするも夫等が b の上に在りて、即ち異れる液體內に在れば、壓は同じからざることなり。

第一九一圖

一九一圖に圖せる如き普通の水銀晴雨計に於ては abd の水平面に於て壓は何處も同大なるべし。器中液體の表面に於て氣壓作用す。c の上に眞空の空間あれば、管內 d に於ては水銀柱 cd に依りて作用せらるゝ壓あり。即ち大氣の壓は、空氣の存在を除外し、一器に水銀を充たし、其液の高さが晴雨計管內水銀柱の其容器の水銀面よりの高さに等しきとき、前記の器の底に於ける壓に等し。

同樣にサイフォン晴雨計(一九二圖)に於ては氣壓は水銀面 c 及 b の垂直距離にて與へらる。

晴雨計の高さよりして容易に氣壓を毎平方糎ダインにて表はし得。晴雨計 76 糎 ($0°$ の水銀)の平均の高さに於て此値は $1,014 \times 10^6$ ダインなり。

晴雨計の管が傾けるときは器中の水銀面上水銀柱の垂直の高さは不變なり。管を傾斜せしめ、水銀が完全に之を充たせば、閉端に對して自ら壓を作用す。此壓は管の端の水銀面上垂直の高さを晴雨計

の高さより減じたる長さの水銀柱の重量に等し。

第一九二圖

晴雨計の高さよりも短かく、全然水銀にて充さるゝ垂直の管に於ても同樣なり。同じ計算を晴雨計の高さよりも長き管に應用し、液體が管頭に達したりと假定せば、壓は負値を有すべし。是は唯だ水銀が硝子に懸り、又水銀柱の上部が下部の液體を引力に依りて荷へる場合にのみ水銀が管を充すべきを示す。十分に煮沸したる水銀を有せる晴雨計に於ては器中に管を轉倒し指を放てる際、水銀柱は管頭を少しく叩きて始めて落つることあるを屢實見するなり。

凡て上述の場合に於て壓は、或一の場所に於て其値知らるれば何處に於けるものも計算し得らるべきを尚附言すべし。一液體が凡ての側に於て固定の壁にて圍まるゝときは、壓は他の材料即ち物質の量、溫度及容積よりして算出せざるべからず。

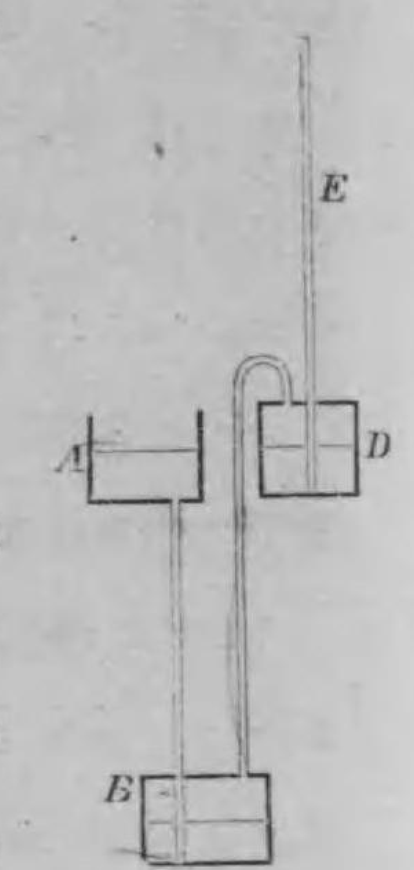
g) 凡ての液體及氣體に於ては既に記せる如く壓は上方に於けるよりも下方に於て大なり。然れども此差が幾何なるかは物質の密度に關係す。

例ば A を以て一瓦斯管內の下點、A' を上點とし, B 及 B' を夫々 A 及 A' と同じ高さに在る空氣中の二點とす。燃燒瓦斯は空氣よりも輕き故に、管內に平衡あるときには AA' 間の壓の差は BB' 間のよりも小なるべし。故に瓦斯管內、外氣との壓の差は家屋內に於て上部に於ては下部よりも大ならざるべからず。

空氣は普通の密度に於て水よりも殆 800 倍輕きが故に、空氣柱に

於ける壓の差は同じ高さの水柱に比して省略するを得。一空氣量に依りて低所に在る點よりして高所の點へ、壓を著しく變ずることなくして移すを得べし。例ば一九三圖に示せる裝置に於ては之を應用せり。器 B に於ける空氣は無蓋の器 A に於ける水の高さに相當する壓を受く。此壓は管を通じて D 器に移され、是よりして水を E 管に依りて D と E との水の高さの差が殆 A と B との差に等しき程の高さに上ぐるを得。

第一九三圖

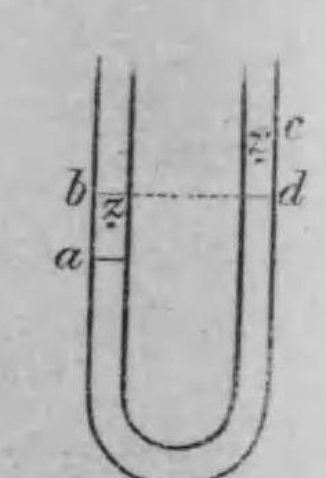


二〇六　液體の運動に於ける重力の仕事 (Work of Gravity in the Motion of Liquids.)

此仕事、或は換言せば重力に對する位置エネルギーの減少は、全液體の重心の下降する高さを其重量にて乘じて求むるを得(一六九節)。然れども多くの場合に於て他の見方に依るを一層簡單なりとす。

例ば U 形の管(一九四圖)内に液體が始め兩側に於て同じ高さに在り、即ち b 及 d に在り。之を移動し、a 及 c に至らしめしとせば、此新しき位置は液體量 ab を取去りて夫にて空間 dc を充して得たるものと考へ得。即ち全體の位置エネルギーに關しては、何れの液體微部分が或る高さに在るかゞ關係せざるは明なり。今 z が ab 部分の重心、z' が dc 部分の重心とせば、位置エネルギーの増加は z 及 z' の高さの差を此部分の重量にて乘じて求め得。

第一九四圖



二〇七　外壓の仕事 (Work of External Pressure.)

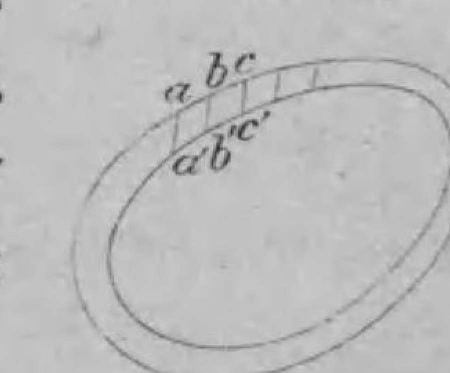
a) 何處も同大なる外壓は容積の如何なる變化にも仕事をなすべし。

一圓筒内可動の喞子の下に觀察せる物質ありとす。此喞子に毎平方糎 p ダインの法線壓作用す。喞子の表面が S 平方糎なれば全力は pS ダインなり。喞子が内方へ δ 糎の長さ移動するとき所求の仕事は $pS\delta$ エルグなり。$S\delta$ の積は容積の減少を示す。故に外壓の仕事(エルグにて表はす)は壓(毎平方糎ダインにて)に容積の變化(立方糎にて)を乘じて見出さる。

喞子が外方へ動けば外壓は負の仕事をなす。是に同じ定理が應用せらる、此場合には容積の減少が負なればなり。尙定理は常に物體の表面上の凡ての點に於て同大の法線壓が作用せるときに適用せらる。物質が圓筒内喞子の下に在ること必要ならざるなり。

始に abc……(一九五圖)が物體の表面にして a, b, c……諸點が無限小の移動をなして a', b', c'……に移れりと假定すべし。表面を無限小の部分に分ち、圖に示せる斷面上 ab, bc………にて與へらるとせば、此等の部分の諸點の移動は相互に平行にして且等しかるべし。$aba'b'$ の容積は之を圓壔と見なして計算し得べし。δ が a' より小面積 ab に引ける垂線、σ が此小面積なりとすれば前述の容積は

第一九五圖



$$\tau = \delta\sigma.$$

又 σ に於ける壓は單位面積に就て p なるが故に $p\sigma$ に等し。其仕事は

$$p\sigma\delta = p\tau,$$

即ち所求の全仕事は

$$p\Sigma\tau,$$

明に $\Sigma\tau$ は容積の減少に等し。

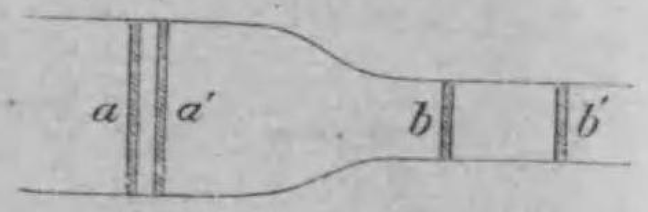
表面の諸點が外方に動ける場合、或は若干が内方に、他が外方に動ける場合は讀者に委ぬべし。

定理によりて、容積が變せざる限り、何處も同大なる壓は何の仕事もなさゞるを知る。二個の喞子の間に封ぜられたる液體に於て此等の喞子の一が內方に進み、他が後退せしめらるゝときには此事は容易に證明し得べし。是に於て喞子に作用せる力は喞子の表面に比例することを顧みざるべからず。

$b)$ 液體或は氣體が之を限れる壁に作用する壓は、物質自身が受くる壓に等しくして反對なり。故に其仕事は單位面積に於ける壓を容積の增加に乘じて求め得。

$c)$ 不可壓縮の液體に於ては液體が高き壓の場所より低き壓の場所へ流るゝとき外壓は仕事をなすなり。例ば液體が a 及 b の二喞子間に在りて(一九六圖)每面積單位に p 及 p' の壓作用し、二喞子が a' 及 b' に移動したりとすれば、上の(a)の定理の應用に依りて壓の全仕事は

第一九六圖



$$(p-p')V$$

なるを知る。

是に於て V は a 及 a' の間又は b 及 b' の間に在る容積にして即ち a 及 b 間の任意斷面を過ぎて流るゝ液體の容積に等し。

二〇八　液體の平衡に仕事の原理の應用 (Application of the Principle of Work on the Equilibrium of Liquid.) 後に云ふ如き事狀を除外せば凡ての現象よりして、一液體の內部エネルギーは容積及溫度に依りて定めらるゝを示す。之等が不變にして又熱量の出入を省略するを得れば、外力の仕事は凡て可視の運動の運動エネルギーの增加に相當せざるべからず。次の諸節に於て之に關し運動現象

に於ける應用を示すべし。然れども先づ一五五及一五六節の推論並に夫等より演繹せる平衡の條件は液體に於ても亦適用することを注意すべし。

例ば一九〇圖(315 頁)に於ける場合に之を應用するを得。此目的を以て、表面 a が無限小の距離 δ 丈平衡位置より下方へ移動したりと考ふ。管が何處も同大なれば b 及 c の表面は同じ丈上方に進む。今 S を管の斷面とし、h を a 及 b の間の高さの差、h' を b 及 c の高さの差、s を下方の液體の比重、s' を上方の液體の比重とす。然れば前者の位置エネルギーは

$$hsS\delta$$

丈減少す(二〇六節)。又後者に於ける增加は

$$h's'S\delta$$

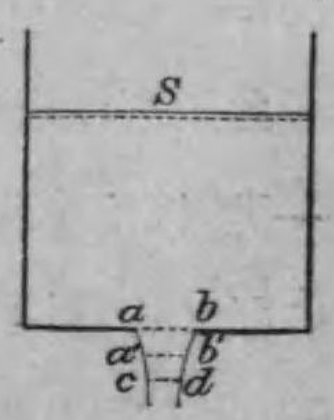
なり。位置エネルギー即ち重力の仕事の減少の全量は

$$(hs-h's')S\delta.$$

當初の位置に於て平衡あらば、此式は零に等しからざるべからず。是に依りて再び既知の條件を得。

二〇九　壁に於ける一孔よりの流出 (Flow through an Opening in a Wall.) $a)$ 器の底に(一九七圖)孔 ab あり。流出の間、液體の表面が ab 上一定の高さ h を保てりと假定すべし。然れば運動狀態不變(定常)なり、唯だ孔の場所に於てのみならず、液體を充せる空間の任意一點に於ても亦、凡て此等の點に來る液體は常に新なるも皆同一の速度を有すべし。

第一九七圖



今一定の瞬時に於て S 及 ab 平面間に在る液體

量に就て考ふ。此量は無限小の時間の後には S の直下に點線を附せる平面に下降し、下方に於ては例ば $a'b'$ に至る。位置エネルギーは表面の薄き層を取去りて $aba'b'$ に持來りたると同じ丈減少すべし。この減少は、P を以て流出せる量の重量とせば Ph に等し。又此の細き流れに於ては壓は何處も氣壓に等しとなすを得。液體は表面 S 及 ab に於て毎單位面積に同大の壓を受く、即ち此場合には外壓の仕事に就ては全く云ふ必要なし。是に依り運動エネルギーは Ph 丈增加せざるべからざるを知る。此エネルギーは點線を附せる表面と ab との間の空間に於ては常に同じ。又此點線を附せる平面と S との間の液體は何等著しき運動をなさず(表面 S が ab よりも遙に大なるときは斯く假定するを得)、然るに流出せる量 $aba'b'$ は或る速度 v を有し、m が其質量なれば運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{Pv^2}{2g}$$

を有す。故に

$$\frac{Pv^2}{2g}=Ph$$

なるべし。即ち

$$v=\sqrt{2gh}\text{........................}(1)$$

即ち流出の速度は物體が h なる高さより落ちたるときに有する速度に等し(トリチェリの法則)。

此規則は液體が側壁の一孔より流出する場合、又液體が水平壁の一孔、例ば一八五圖(312 頁)の AB 壁を過ぎて上方に噴出するときに於ても亦適用す。此ときには其速度に依りて各液體微部分は液體面 S と同じ高さまで、若し落ち來る微部分の出會するに依り之を妨

ぐることなければ、上り得べし。然れども凡ての場合に於て流出の速度は此他に摩擦に依りて減少せしめらる。

全く摩擦が存在せざればサイフォンよりの流出に於ても亦前述の範式を應用するを得。

$b)$ 又液體の表面上に尙ほ或る壓作用し、例ば壓縮氣體の壓ある場合にも流出速度の計算は甚だ簡單なり。即ち此壓の仕事を計算に入るべきなり。或は之を S の上に尙或液體量あるものと考へ、其重量に依りて S に作用せる壓が、今實際に存在せる壓と氣壓との差に等しと見るを得べし。然れば範式中 h を、液體が此の如くにして得る全體の高さとして考へざるべからず。

重力の作用を省畧し、又器中の壓が外壓に對して p 丈超過し、密度 d なりとすれば、小質量 m の流出の際、壓の仕事は pm/d なり。得たる運動エネルギーは之と相等しく、即ち流出速度

$$v=\sqrt{\frac{2p}{d}}$$

を得。

壓同じければ、速度は密度の平方根に逆比例す。

$c)$ 液體を容れたる器中に液體が一孔よりして流入する、即ち前述と逆なる運動も、液體に充分に大なる速度を內方に向ひ與へたりとすれば可能なり。例ば此節の初に觀察せる運動が逆の方向に起れば、重量 P なる一液體量の流入の際、位置エネルギーの量は Ph 丈加はるべし、此間に運動エネルギーは $Pv^2/2g$ 丈失はれ、是よりして又 $v=\sqrt{2gh}$ を得。即ち液體は流入の際流出に依りて得ると同じ速度を有すべし。

二一〇　單位時間に流出する液體量 (Quantity of Liquid, which flows out in a Unit time.)　一液體(又は氣體)が之を限れる一平面 S に直角に通過し、又何處も同じ速度 v を有せりとせば、τ 時間に $v\tau$ の高さの液體圓壔が此平面を過ぐべし。其容積は $vS\tau$ なり。

即ち單位時間に於て平面を過ぎ流るゝ容積は vS なり。

然れども之を一九七圖に於ける孔 ab に應用する能はず、圖に示せるが如く孔の周圍の微部分は垂直の方向に動かざればなり。是に依りて液體流は收縮し、ab の下若干の距離例ば cd に於て始て殆圓壔狀となる。此とき速度が凡て垂直にして、其大さは二〇九節に計算せる速度 v より唯僅に大なるのみなるが故に、流出量は cd に於ける流の斷面に v を乘じて求め得らる。

觀察に依れば、O を以て孔 ab の大さとすれば、毎單位時間流出量は殆 $0{,}6vO$ なり。

二一一　廣所或は狹所を有せる管を過ぐる液體の運動に於ける壓の差 (Differences cf Pressures in the Motion of a Fluid through wide or narrow Portions of a Tube.)　管内の液體の運動を示す法則は管の直徑異なれば相同じからず。摩擦が是等現象に及ぼす影響は斷面に關係せり。然れども先づ摩擦を全然除外し得べき程管が充分に大なりと假定すべし。然れば壁の減速的影響に就ては顧みるを要せず、一斷面の凡ての點に於ける速度は皆同大と考ふるを得。茲に斷面は常に管の長に直角なりとす。其大さが管内各所に於て變せず或は唯緩漫に變ずとせば、液體微部分は何處も斷面に直角に動けりと云ふを得。S を其面積、v を其速度とせば、單位時間に斷面を流るゝ容積は vS なり。常に悉く管を充せる不可壓縮の液體に於ては、勿論此量は凡ての斷面に於て同大ならざるべからず。故に圓筒狀の管に於ては速度は管全長を通じて同大なり、凡て他の場合に於ては斷面に逆比例して變ず。

簡單の爲に、運動が常に同じ仕方なる場合に考を限る。其外先づ

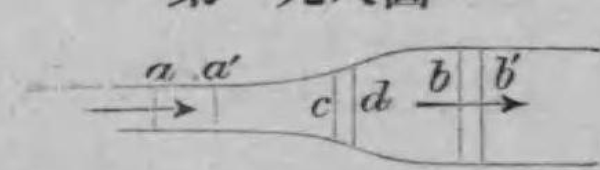
管は水平に在りと假定すべし、又然らざる場合には重力の作用は運動を起す壓の作用に比して省略し得るものとすべし。

今思考上二個の極て相近き斷面にて液體の一部分を他より分ち此部分の運動を追究すべし。是は其背後に在る液體に依りて推し進められ、其前に在る液體に依りて止めらる。壓の合力が何れの方向に在るかに從ひ、運動は加速せられ或は減速せらる。

管が何處も同大ならば、運動は一樣なり。即ち此液體部分に何等の力も作用せず、換言せば前方に於ける壓が背部に於ける壓に等し。或瞬時に於て背部に一層大なる壓あらば、加速を生じ又前方の液體に稍壓縮を起すべし。是は壓が再び何處も同大になるまで續くべし。

廣所或は狹所を有せる管に於ては事稍異なる。例ば液體が一九八圖に示せる管中に矢の方向に流るれば、b に於ける速度は a に於けるよりも小ならざるべからず。c 及 d の斷面間に在る液體微部分は管の廣き部分に移り行く際減速運動をなすべし。然るに此の如きは壓が d の右に於て c の左に於けるよりも大なるときにのみ可能なるなり。

第一九八圖



c 及 d の斷面の兩側に於て毎單位面積の壓同大なりとも、兩斷面の大さの相違の爲に、左方に向へる力が之に作用すべしと考ふべからず。此場合には液體は c 及 d の間の管壁に同じ壓を作用し、斯して又壁よりして同大の壓を受くべし。從て液體は凡ての側に於て同大の壓を受くべく、何等合成力を生せず。

管の廣き部分に於ける壓は狹き部分に於けるよりも大なりと云ふ

結論は液體が前者より後者へ動くときに其然るを見るなり、此ときに運動が加速せらるゝを注意せざるべからず。

管の狹き部分が二個の廣き部分の間に在り、或は廣部が二狹部の間に在らば、前の推論を二度應用すべし。第一の場合に於ては狹部に於ける壓は其兩側に於けるよりも小なり。液體流の速度が充分に大ならば、一局部の狹所が壓を氣壓以下に低むるを得。此所に枝管を附せば空氣は是に於て吸はれ、水流に依りて運ばる。所謂水空氣喞筒は此原理に基けり。

液體の運動は一管の各斷面を過ぎて同量流るゝ樣に調整し、又此の如きは前述の如き壓の差あるときに於てのみ可能なるが故に、此壓差は自ら生ずるものならざるべからず。然れども如何にして其生ずるかの微細に就て論ずるは容易ならず。

又上に用ゐたる推論を九三節のものと比較すべし。

エネルギー法則により壓の差を計算し得べし。a 及 b（一九八圖）斷面間に在る液體全量を考ふ。之等が無限小の時間 τ の後に a' 及 b' 間に在り。p_1 を a に於ける面積單位の上の壓、p_2 を b に於けるもの、尙 S_1 及 S_2 を二斷面、v_1 及 v_2 を速度とせば $v_1S_1=v_2S_2$ なり。左方の壓の仕事は $p_1v_1S_1\tau$ にして、右方の壓のは $-p_2v_2S_2\tau$ 又壁が作用する壓は何の仕事をもなさず、運動方向に直角なればなり。斯して運動エネルギーは $(p_1-p_2)v_1S_1\tau$ 丈增加せるものなり。今 τ 時間の前後に a' 及 b の間の液體は同じ運動エネルギーを有せり、然れども先に觀察したる液體量は始に容積 $v_1S_1\tau$ にして速度 v_1、後に容積 $v_2S_2\tau$ 速度 v_2 なり。斯して運動エネルギーの增加は

$$\tfrac{1}{2}v_1S_1\tau(v_2{}^2-v_1{}^2)d$$

なり、d は密度とす。是よりして

$$p_1-p_2=\tfrac{1}{2}d(v_2{}^2-v_1{}^2).$$

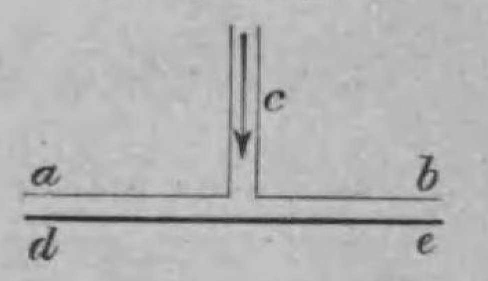
凡てを C-G-S 單位にて表せば、壓の差は每平方糎ダインにて與へらる。

此節の所述は又大體に於て氣體にも適用す。其他、壓の差は管內の運動に於て存するのみならず、又一液體量或は一氣體量の運動の道に於ても其道の狹まれる所に於て常に最小の壓あるものとす。

次に二三の現象を記し、前述に依りて幾分之を了解せしむべし。然れども若し是等に充分滿足なる說明を求めんとすれば餘り遠く進むことゝなるべし。

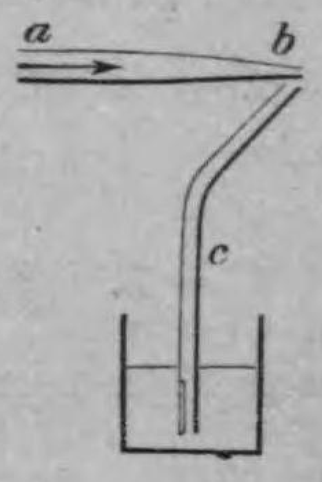
a)　一板 ab（一九九圖）の中央に一孔ありて之に c 管を附す。ab より僅小の距離に於て第二の板 de あり。管を過ぎ矢の方向に於ける強き氣流は、狀態凡て正しくば、板 de を板 ab に近かしむべし。管より出づる空氣は二板間の全空間に擴がる、此の如く道の擴がるに依りて壓は增加せざるべからず。然れども今周圍に於て氣壓が作用せる故に、二板間何處にも、又特に中央に於て氣壓より小なる壓あり。de の下面に於ける外氣の壓が前述の現象を生ず。

第一九九圖



b)　圓錐狀に尖れる管 ab（二〇〇圖）よりして氣流を噴出せば、噴出後直に氣流は大なる空間に擴がる。氣流が其過ぐる道の最狹の位置 b に於て壓は周圍の空氣に於けるよりも小なり。是に依りて液體を入れたる器中に立てる c 管に於て液體は吸上げられ上端に達し、又氣流に伴はれて飛沫となる。

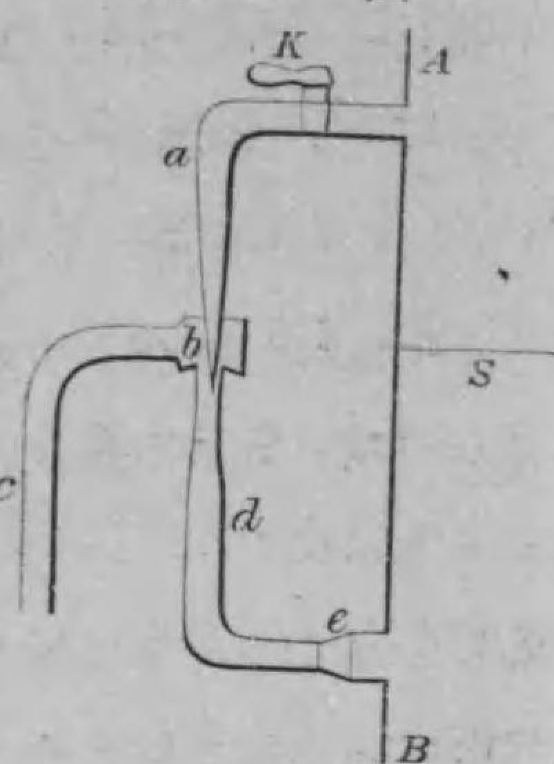
第二〇〇圖



c)　此の如き吸入作用は種々の目的に利用せらる。最重要なる應用はジッファールの發明せる蒸汽罐の給水注射管（インジェクター）なり。詳細の點を省けば此裝置は二〇一圖にて示さる。AB は

汽鑵の側壁なり、其內部に S まで水あり。活栓 K を開けば蒸汽は圓錐狀に尖れる a 管より噴出す。從て b の空間に於ては空氣稀薄になり、給水は貯蓄所よりして、c 管を過ぎて吸上げらる。遂に此水は a より來れる蒸氣に依りて d 管に伴はれ、蒸氣は液體と出會して液化し、共に大速度にて e 瓣に至り、瓣を突開きて汽鑵內に入る。K を閉づれば管內の壓に依りて e は閉さるべし。

第二〇一圖



此作用に特殊なるは物體が蒸氣の空間よりして壓が之と同高若しくは本來稍高き場所に動ける事に在り。是が可能なるは、小なる壓を有する場所即ち b が得られたると、又汽鑵中の物質が之を去りたるときとは異なる集合狀態にて戻り來るとの故のみなり。冷水と接觸するに依りて蒸氣は液化するなり。此仕方にて生じたる水の流線は大なる速度を有す。是は流るゝ蒸氣量が全體として之に何の外力をも作用せざれば、其の凝縮によりて重心の運動は全く影響せられざるべきを以て知るべし。又水は蒸氣よりも遙に大なる密度を有するが故に、此速度は鑵內の水の壓に打勝つに十分なるなり（二〇八節 b 及 c）。又運動エネルギーの一部分は吸上げたる水に必要なる速度を與ふるに用ゐらる。

二一二　垂直管內の運動に於ける壓の差 (Pressure Differences in the Motion in a Vertical Tube.)　垂直に下れる管を有せる器よりして液體が全管を充して、連續せる一柱として流出すること屢あり。今此管が何處も同大なりと假定すれば、液體は管內に來れるときの速度を保存せざるべからず、是は極微部分に作用せる全力が零なるときにのみ可能なり。故に壓は柱の各部分に於て上部並に下部に

於ける壓よりして重量に釣合ふ一力を生ずる樣に自ら整齊するものなり、是が爲には壓が上方に於て減せざるべからず。壓の差は液體が下端を閉ぢたる管中に靜止せる場合に於けると同大ならざるべからず。何となれば此場合にも亦各部分は上部と下部との壓の差に依りて支へらるればなり。唯是等二個の場合に於ける相違は閉管に於ては下端に於て氣壓よりも大なる壓が作用し、液體の流出の場合には下方の壓は氣壓に等しくして、管頭に於て是よりも小なる値を有することに在り。

此壓の差の生ずることは次の如くにして考へ得。或瞬時に於て管內何處も同じ壓が作用せば、液體微部分の運動は重力の作用に依りて加速せらる。小時間の後には管內下部に在りて即ち長き道を經過したる微部分は、之より上に在るものよりは大なる速度を得べきなり。即ち此間に在る液體の容積は稍增大せられ之に作用せる壓は稍減少す。斯して生じたる壓の差は管內何處も速度が同大となるに至るまで增加すべし。同大となるは重力の作用が生じたる壓の差にて平衡せしめられたるときにのみ可能なり。

管の上端に於ける壓の低下は管の長き程大なるべし。壓は限なく減少し能はざるが故に管が益延長すると共に遂に液體柱の連續が中絕せしめらるべく、故に是が點滴に分るゝなり。

然れども連續せる液體柱の場合に今考を限るべし。管の上端を空氣を充たせる一器と連續せば、器中の壓が管上部の壓に等しくなるまで空氣が之より吸出され、液體によりて運ばるべし。水並に水銀喞筒は此原理に基けり。明に是等の裝置に於て稍良き眞空を得んとすれば水に於ては管は略 10 米以上、水銀に於ては殆 76 糎の長

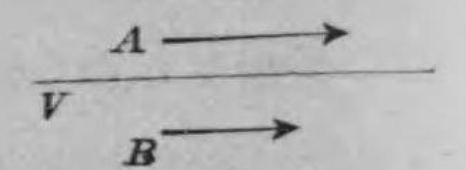
さを有せざるべからず。

一九七圖(321 頁)の ab の孔の下に直立管を附すれば流出速度が増加するは今容易に知るを得。即ち是に依りて ab に於ける壓は從前よりも減少せるなり。且つ管の下端は流出口と考へ得べく、即ち範式(1)に於て h に就ては二〇九節に於けるよりも大なる値を取らざるべからず。

最後に又注意するは點滴として直立管を下る液體は管の上端に於て吸入作用をなすことなり、少くも滴が管を完全に塞ぐ場合には然り。各滴は喞子の作用をなし、流下の際管と連結せる器よりして若干の空氣が流れ來り、次の滴が此空氣を包みて運び出すべし。

二一三　狹管を過ぐる液體の運動 (Motion of Liquid through Narrow Tubes.) 液體が固體に沿て動くときには必ず之に或摩擦を作用す。尙此の如き力は液體各部分が相互に移動せるものゝ間にも存す。後者所謂內部摩擦(粘性)に就て槪念を得る爲、二液體層 A 及 B (二〇二圖)を考ふ、之等は境界面 V に平行に、兩者共に右方に動く、然れども其速度を異にすとすべし。他よりも速に流るゝ A 層は他の層に依り引き止めらる、然れども A は又逆に他層を伴はんとす。V に平行に相互に作用せる等しくして且反對なる諸力は、各液體に就て、所與の速度差に對し、每面積單位に於て一定の値を有す。故に各液體に就て一係數(摩擦係數)を導き、是に依りて各場合に於ける力を與へ得べし。是等諸力を A 及 B 間の法線壓と合成せば諸層間の全作用は V に對し傾斜す。是に就ては略既に二〇一節に於て述べたり。

第二〇二圖



觀察に依りて、一液體が一管を過ぐる運動に於ては多くの場合に於て最外の液體層は壁に依りて全く固定せらるゝを知る。然れば此層は次の層に對し減速作用をなし、後者は又尙內部に在る第三層に作用する等なり。結局壁よりして最も遠く隔れる層は最も速に動く。圓形狀の斷面の一管に於ける液體柱を數多の圓筒面にて分ち、是等の圓筒が管壁と軸を同くし、中央に小なる充圓筒を置き、數多の空圓筒を其周りに置くとせば、液體の此等の部分は凡て其固有の速度にて移動するは容易に知るを得。液體の各空圓筒は內面に於ても、又外面に於ても摩擦を受く、然れども尙詳細に觀察せば、外面に於て運動に反對なる方向を有せる摩擦は內面に於ける摩擦よりも大に、即ち各空圓筒に就て摩擦は兩面に於けるを綜合して運動に反對すべし。

管が何所も同大に、即ち各小部分の運動が一樣なるときに運動を續くるには壓の差を存せざるべからず。

A 及 B を(二〇三圖) ab 管によりて連結せる二器とす。是等の內に何等かの方法にて液體が不變の高さ S_1 及 S_2 を得たるものとすれば、玆に定常の運動を生ずべし。此とき次の如く區別し得、A の器中殆管口に於ける壓 p_1, 管の中 a に近く且つ液體微部分が其保續する速度にて ab の軸に平行に動ける場所に於ける壓を p_1'、又管の內部 b に近く微部分が流出の爲に速度を變ずる直に前の壓を p_2' とし、最後に p_2 を管の口に近く B に於ける壓とす。然れば p_1-p_1' の差に依りて液體の速度を生じ、$p_1'-p_2'$ の差によりて之を保續し、遂に p_2-p_2' の壓にて再び之を失ふべし。

極て狹き(毛細管)並に餘り短かゝらざる管に於ては速度小にして

摩擦大に、p_1-p_1' 及 p_2-p_2' の差を $p_1'-p_2'$ に對して省略し、即ち壓の全差は管內の摩擦に打勝つに用ゐらると假定し得べし。

觀察よりして、此條件を滿足せる管に於て單位時間內に斷面を過ぐる即ち流れの「强さ」と名くる液體容積は兩端の間の壓の差に比例するを知る。强さ 1 の流れが狹管を過ぐるに必要なる壓の差を r とすれば、凡て他の場合に於ける强さ i 並に壓の差の間には次の關係あり

$$p_1-p_2=ir$$

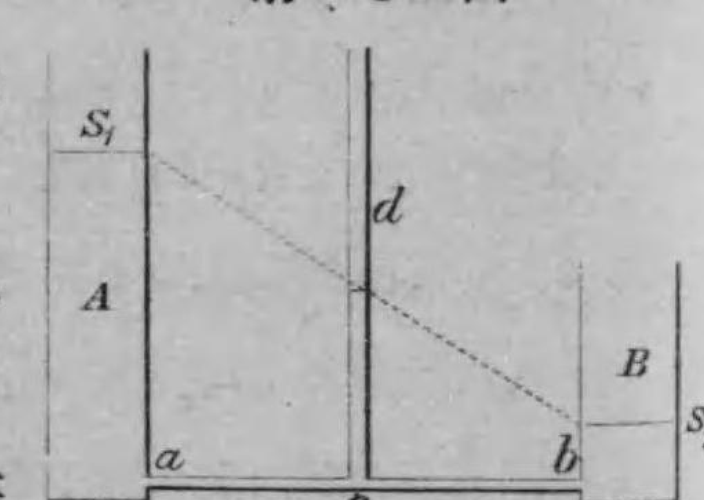
即ち

$$i=\frac{p_1-p_2}{r}$$

此量 r は管が液體を通過せしむる事困難なる程大なり、故に液體が管中にて打勝つを要する抵抗を測るものとすべく、或は之を直に抵抗と名け得べし。

二管の抵抗を相互に比較せんとせば、之等を結び付けて液體流が兩者を順次に通過する樣になし、然る後第一管の始、連結の場所、並に第二管の終の三個所に於ける壓を測らざるべからず。此測定の爲には此等の點に於て直立せる管を附し、其中に液體が昇る高さを觀察すべし。流が定常になりたる後、三個の壓が p_1, p_2, p_3 なれば p_1-p_2 及 p_2-p_3 は二管に於て此流れを得るに要する壓差なり。即ち此等の量は二管の抵抗に比例せり。

第二〇三圖



二〇三圖に於ける管が何處も同じ斷面を有すれば、中央の點に於ける壓は恰も兩端に於ける壓の平均に等し。故に cd 管に於て液體は S_1 及 S_2 二平面間の中央の點に至る。即ち管の兩半が等しき抵抗を有するが故に、壓は a より c に至るまでに c より b に至るまでと同じ丈減せざるべからず。

又同時に全管 ab の抵抗は管の一半 ac の抵抗の二倍なり、同じ液體流は後者に於て前者に於けるものゝ二分一の壓差を受くればなり。一般に一管の抵抗は其長さに比例せり。故に所與の壓差にて管を過ぎて流るゝ液體の量は長さに逆比例す。

前述に依りて二〇三圖に於て壓は漸次に a より b に下降するを知る、故に同じ距離進む毎に壓は同じ丈減少す。一般に管の各同長微部分が凡て同じ抵抗を有するときは此の如きなり。

一管の抵抗は長さの外に尙ほ斷面と液體の性質とに關係す。勿論管の斷面大なる程抵抗は益小なり。

理論的考察によりて液體流の强さ、即ち單位時間に斷面を過ぎて流るゝ容積は次の式

$$i=\frac{\pi(p_1-p_2)a^4}{8\mu l}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を有するを知れり(ポアジュイユの法則)。此式に於て l は管の長さ、a は斷面の半徑、μ は液體の摩擦係數にして、其意味は次の如くにして知悉せらるべし。

二〇二圖の場合に於て V 面の近傍に於て右方に向ける速度は漸次に下より上に增加す(速度の變化は實際に順次に益緩漫となる)、又二平面の一が他の一糎上に在るものに於て速度の差が每秒一糎なりとすれば μ は V 面の一方の液體が他方の液體に作用する力をダイン及每平方糎に於て示すべし。

實驗的研究は範式 (3) に示せる法則を實證せり。

第二〇四圖

範式 (2) により狹き管を過ぐる運動に關する種々の問題を解くを得。

a) A 管 (二〇四圖) が二支管 B 及 C に分れ、夫等が Q に於て再び

一致せりと假定す。i_1 を B に於ける流の强さ、i_2 を C に於ける强さ、r_1 を前者の、r_2 を後者の夫々抵抗とし、p を P に於ける、p' を Q に於ける壓とす。然れば

$$i_1=\frac{p-p'}{r_1},\quad i_2=\frac{p-p'}{r_2};$$

即ち

$$i_1:i_2=r_2:r_1.$$

P 及 Q の間に唯一管ありとし、$p-p'$ の一定値に於て B 及 C に於けるものを合せたるものと同量の液體が流るとせば其抵抗 x は

$$\frac{p-p'}{x}=\frac{p-p'}{r_1}+\frac{p-p'}{r_2}$$

に依りて定めらる。即ち

$$x=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$$

b) 抵抗 r を有する一管を圓筒狀の二器の間に置き、此器に適する喞子に外壓 p_1 及 p_2 を作用し、液體流を通せしむとす。然れば(二〇七節 c)毎單位時間に $(p_1-p_2)i$ の仕事をなさゞるべからず。之を i^2r と書き得。此系のエネルギーは此大さ丈增さゞるべからず。是に於て今互に摩擦する液體層に於ける熱の發生を考へ得。一秒に發生する熱量は

$$w=\frac{i^2r}{E}$$

なるべし(E は熱の仕事當量)。

二〇三圖の場合に於て位置エネルギーの變化を考ふれば又同じ結果を得。

終りに尙此節の所述は又大部分氣體に適用するを注意すべし。唯だ是に於ては密度の變化に依りて現象が稍複雜となる。

二一四　內部の摩擦の他の運動現象に於ける影響 (Influence of the

Internal Friction on other Phenomena of Motion.) 管を過ぐる流の場合のみならず、又一般に凡て液體の運動に於て、液體の各層間の內部摩擦並に液體と是に觸るゝ固體とが互に作用する力の影響を認め得べし。少くも多くの場合に於て此後者の力の爲に直接固體と觸るゝ液體層は固體が靜止すれば靜止せしめられ、然らざれば其運動に伴ふと假定し得。

例ば球狀の固體 A が之と同心にて液體を充たせる不動の容器中に在るものを考ふ。此液體を固體球 A 及容器と同心なる球面に依りて無限に薄き層に分つ。今固體が其一直徑例ば垂直の直徑の周りに廻轉せば、球は最も內部に在る液體層を伴ひ動く。此層が次の液體層に同樣の作用を及ぼす等なり。故に結局凡ての層が一垂直軸の周りに廻轉す、然れども是に於て最外の液體層は容器にて固定せらるゝ故其角速度は外方に赴くに從ひ絕えず減少せり。球が今此の如くして液體を伴ひ動かせば、球は自ら夫等の運動に依りて止めらる。此結果として球を運動に保たんには絕えず之に偶力を作用せしめざるべからずして、又然かせざれば運動は次第に止まるなり。固體の球を其表面の一點にて絲にて吊せるときに生ずる廻轉振動は此の如くして鈍めらる。

又同樣の事は他の形の物體例ば圓形の板が其中心に絲を吊して水平の位置に置かれ、液體によりて圍まるゝものに於ても見るを得。

又注意すべきは固體に依りて液體に與へらるゝ運動は液體に依りて或他の固體に移し得らるゝ事なり。例ば一液體內に二個の水平なる圓板が夫等の中心を同一垂直線上に置けば一板を此線の周りに廻轉せば其結果他を同樣に運動せしむべし。

又摩擦は固體が液體内を進行するときに之に抵抗を與ふ。此場合に於て如何様に液體が動くかは茲に詳論する能はず。唯注意するは凡て此節に記せる諸現象並に管を過ぐる流れの研究は是に於ける速度の大さ、例ば固體の速度の大さ、或は液體流の平均速度の大さが大なる影響を有する事なり。充分に小なる速度に於ては現象は比較的簡單なり。此場合には管内の運動に就ては上記の法則が適用し、又固體に作用する抵抗は夫が廻轉し又は進行する速度に比例せり。大なる速度に於ては之等凡てが複雜となる。液體に於ては不規則なる廻轉運動を生ず。又管壁が液體流に、或は液體が固體の運動に反對する抵抗は速度よりも尚速に增加す。

第五章

氣體の性質 (Properties of Gases.)

二一五　ボイルの法則 (Boyle's Law.)　氣體の性質の實驗的研究は先づ壓力、溫度及容積の間に如何なる關係あるかを知るを目的とす。是に就ては是等の量の一を不變ならしむるを得。即ち一定溫度に於て容積が壓に對して如何に變ずるか(壓縮性の研究)、一定壓に於て氣體が熱に依りて如何に膨脹するか、並に不變容積の氣體に於て溫度上昇すれば壓が如何に增加するかを實驗し得べきなり。凡て是等の問題に於ては氣體が外部よりして受くる壓に　　らよも又氣體自身が作用する壓(張力)に就て云ふも同一なり。

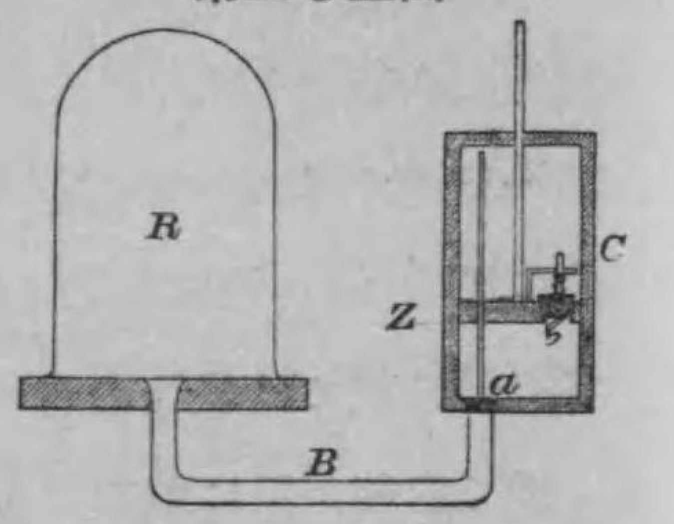
壓縮性の測定に關する數多の實驗に就て共通なるは、氣體を一硝子器中に入れ之を水銀にて封じ、此水銀柱の壓、或は器中の壓縮喞筒に依りて、此水銀を内部へ推入れ得るものとせる事なり。第一法を用ゐるときは、例ば此裝置は直立せるU形の兩腕の長さを不等にし、短き方を封じ、長き方を開けるものとすべし。氣體は短き腕の中、管中に注入せる水銀の上に在り、他管に水銀を加ふるに依りて氣體は壓縮せしめらる。

ボイル(一六六一年)の法則に依れば、溫度不變なれば氣體の容積は之に作用せる壓に逆比例す、換言せば、張力は密度に比例す。

一の氣體も此法則に完全に從ふはなし。用ゐる壓を高むると共に益此偏倚は著るし。然れども空氣並に水素の如き氣體に於ては氣壓より餘り大ならざる壓に於ては此偏倚を省略するを得。此章に於ては常に然かすべし。

二一六. 空氣喞筒 (Air Pump.) ボイルの法則を應用せば二〇五圖に略圖を示せる如き通常の空氣喞筒に於ける壓の減少を計算するを得。空氣を拔くべき受器 R は B 管に依りて圓筒 C と連絡せり、C 中には氣密なる喞子 Z を上下に運動せしむ、a 及 b に於て瓣を有し、瓣は上方に開くものとす。喞子が上行すれば、b 瓣は其重量及發條に依り並に又外氣の壓に依りて閉づ。之に反して適當の裝置に依りて a は開かる。此とき若干量の空氣は R より C に流る。喞子が下方に降れば a は閉づ、喞子の下の空氣は b を開き外方に出づるに十分なる張力を有せり。

第二〇五圖



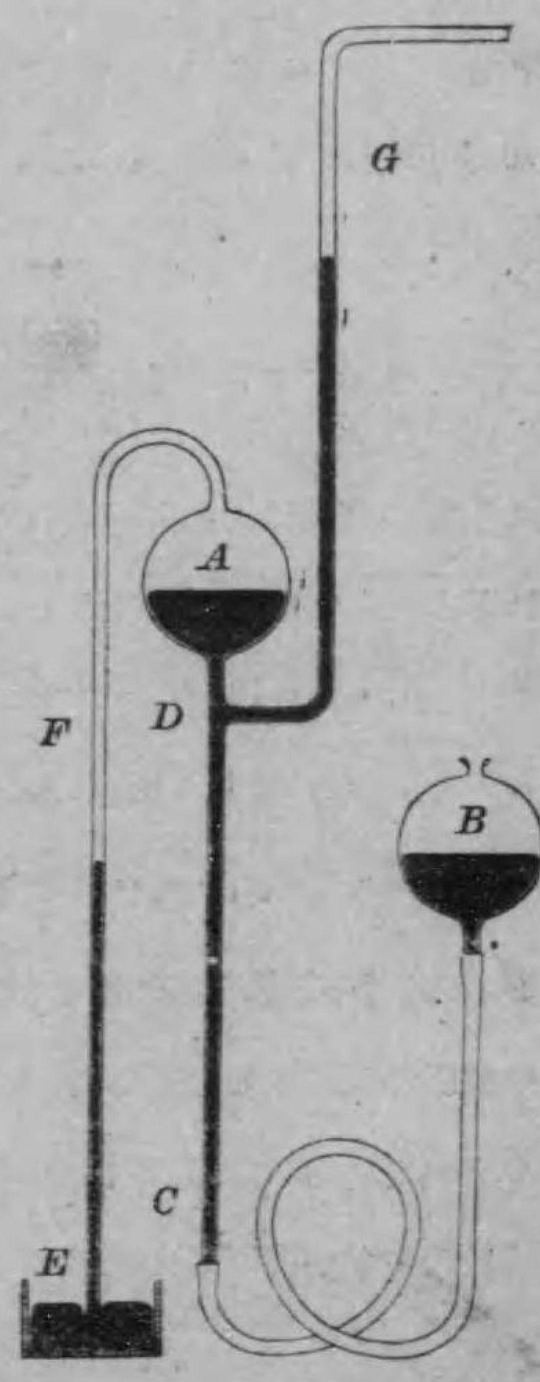
喞子の下面は圓筒の底面と出來得る丈十分に適合せざるべらず。喞子が其最低の位置に至りたるときに尙ほ其下に殘れる小なる「有害の」空隙の中に一氣壓の張力を有する空氣あるべし。是に依りて R に於ける稀薄の程度は極限を有すること容易に知るを得。

此の如き空隙は水銀喞筒には生せず、故に之を用ゐて普通の空氣喞筒に於けるよりは極て高度の稀薄を得べきなり。此作用の概念を

得る爲に、一硝子球が一直立管の上端に在りて、此管に依りて球中に水銀を上せ又は逆に是よりして流出せしめ得るものを考ふ。此球は空氣を拔くべき受器と連絡し、且つ空氣を球中より逐出し得べき出路を備へざるべからず。是等二個の路を或る方法にて適當の瞬時に開閉し、水銀が球より流出の際空氣が受器より球に流れ入り、水銀が上るとき此空氣が前述の出路より逃るゝものとす。即ち球は普通の空氣喞筒に於ける圓筒に、又水銀は其喞子に比較し得べく、是に於て前記有害の空隙を避け得るは水銀が球の壁全部に接觸し、即ち球を悉く充し得るに依るなり。

連絡の路の開閉には舊式の水銀喞筒に於ては括栓を用ゐれども、此の如ければ、括栓には必ず油を塗るを要するに依りて、水銀を不純にし、作用に害あり。二〇六圖に於て極て簡略に示せるベッセル、ハーゲン水銀空氣喞筒は凡ての括栓を避け得たるものにて、前述の缺點を除けり。是に於て水銀を A 球に昇降せしむるには C 管及護謨管を通じて之と連絡せる B 球を上下に動かす。水銀が A よりして D の下まで降れば A は G 管に依りて受器と連絡す。水銀を上昇せしむれば此連絡は直に止めらる、A 内の空氣は水銀の容器 E に開ける F 管に依りて外方に導き出さる。C,F 及 G 管が 76 糎より長からざるべからざるは容

第二〇六圖



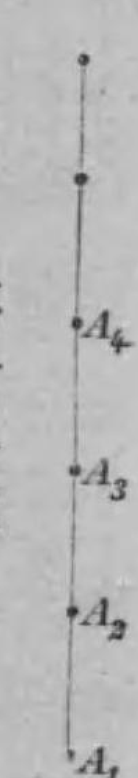
易に考へ得。

斯して水銀喞筒に依りて眞空にせしめられたる硝子器の開端は融かし去るを得。即ち連結管を豫め細くせる場所に於て焰の尖にて之を熱するなり。硝子が軟くなれば外氣は管を壓縮し終る。

二一七 種々の高さに於ける氣壓 (Atmospheric Pressure at Different Heights.) ボイルの法則を用ゐて、高所に昇るに從ひ氣壓が減少する割合を知るを得。今空氣は平衡に在り、且何處も融氷の溫度に在りと假定すべし。

A_1, A_2, A_3, A_4 等(二〇七圖)は垂直線上順次に 1 米の距離に在る諸點とす。是等の點に於ける壓を(平方糎ダインに於て)p_1, p_2, p_3, p_4 等とし、密度を(每立方糎瓦に於て)d_1, d_2, d_3, d_4 等とす。ボイルの法則に從ひ密度及壓の間には一定の比 C あり、故に

$$d_1=Cp_1,\quad d_2=Cp_2,\quad 等$$



第二〇七圖

76 糎の壓及 0° の溫度に於て 1 立の空氣は 1,293 瓦の質量を有するに依りて

$$C=1{,}275\times10^{-9}$$

p_1 及 p_2 の差は A_1 より A_2 に至る空氣柱の重量に等し。A_1 及 A_2 間の空氣の密度は何處も一樣なるにあらず。d_1 より d_2 に變ずるなり。然れども若し何處も d_1 に等しとすれば

$$p_1-p_2=100gd_1=100gCp_1 \quad 即 \quad p_2=0{,}9998749p_1 \quad\cdots\cdots(1)$$

なるべし。之に反して密度が凡て d_2 に等しとせば

$$p_1-p_2=100gCp_2 \quad 即 \quad p_2=\frac{p_1}{1{,}0001251}$$

を得。後者の割算を施せば小數七位まで (1) と符合するを見る、故に今 (1) を以て是等の關係を表はさしむるを得。

$A_1\,A_2$ 柱に於けると同樣の觀察を $A_2\,A_3$ 等の柱にも應用し得。各柱の重量は其全長に於て空氣が其下端に於けると同じ密度を有すとして計算する得。即ち

$$p_3=0{,}9998749p_2,\quad p_4=0{,}9998749p_3 \quad 等$$

換言せば、此等の壓は一の等比級數をなせり。h 米の高さに於ては壓は

$$p=0{,}9998749^h p_1$$

故に高さを米突にて表せば

$$h=18400\log\frac{p_1}{p}$$

此仕方にて、海面に於ける晴雨計の讀みを 76 糎とせば、山頂に於ける晴雨計の讀みよりして山の高さを算出し得べし。然れども實際には以上の如く溫度 0° に等しからざる故、計算は斯く簡單ならず。

二一八 ゲー・リュサックの法則 (Gay-Lussac's Law.) 一定の壓に於ける一氣體の熱に依る膨脹を研究する爲、一硝子球に目盛せる管を附して、實驗すべき氣體を入れ、水平なる管内の一小水銀柱にて之を塞ぐべし。此水銀は輕く移動し、氣體の壓は常に一氣壓に等しきものとす。簡單の爲に、晴雨計の高さが實驗の時間の間、變せず、又器自身は膨脹せざるものと假定す。實際には後者の容積變化に關して補正を加へざるべからず。

上記の如き裝置を數多用ゐて種々の氣體を之に充たし、相互比較すれば、凡ての氣體に於て同じ溫度の上昇に依りて容積が同じ比に增加するを示す。是れゲー・リュサックの法則なり(一八一六年)。是は氣體が一氣壓以外の壓の下に在る場合にも同樣なり。即ち膨脹の二回の研究に於て、一回は壓が常に一氣壓に等しきものとし、又一回は二氣壓に於けるものとすれば、二つの場合に一定の溫度上昇に就て容積が同一の比に於て增加するを見るなり。

此裝置を初め融氷中に置き、次に晴雨計の高 73 糎に於て沸騰せる水の蒸氣中に置けば、容積の增加は當初の容積に 0,366 を乘じたるものに等し。

此の如き裝置を寒暖計として用ゐ得(空氣寒暖計)。此目的の爲には、上記の實驗に於て氣體量が管中に於て達したる二點に 0 及 100 の數字を記し、此二點の距離を百等分し、氣體が t なる數を示せる目盛に達したるとき溫度 t° なりと云ふべし。此の如くにして溫度を定むるは氣體が溫度一度上昇するに對し常に同量膨脹することを含めるは明なり。

膨脹係數は 1° の溫度上昇に際し容積の增加が 0° の容積の幾分なるかを示す分數なり。α が此係數にして v_0 が 0° に於ける容積 v_t が t° に於ける容積とせば

$$v_t = v_0(1+\alpha t) \quad \cdots\cdots (2)$$

前述に依りて膨脹係數の値は

$$\alpha = 0{,}00366 = \frac{1}{273}$$

又溫度を上記の寒暖計にて測り、他の氣體の膨脹を硏究せば、ゲーリュサックの法則に依りて、是に於ても亦容積は各 1° に於て 0° に於ける値の $\frac{1}{273}$ 增加するを示す。故に凡ての氣體に就て (2)の範式は適用し、凡てに就て膨脹係數は同じ値を有す。

實際には氣體はボイル法則に於ける如くゲーリュサック法則にも亦同樣の偏倚を示す。然れども今亦之を省略すべし。

二一九 壓・溫度及容積の一般なる關係 (General Relation between Pressure, Temperature and Volume.) 容積不變なるとき一氣體の壓が熱に依りて如何樣に變ずるかは(二一五節に記せる第三の點)特に硏究するを要せず、前述よりして演繹するを得。氣體が 0° に於て壓 p_0 を作用せりと假定す。然れば一定容積に於て溫度を t° に高めたる場合の壓 p_t を知らんとせば、先づ熱せる際壓を一定に保

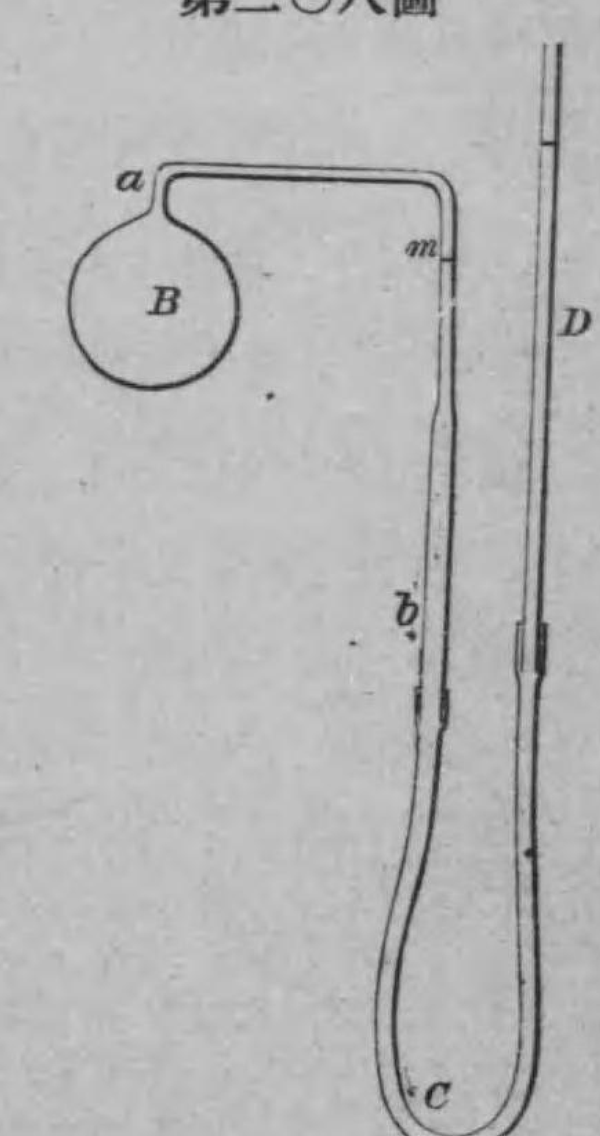
てりと考ふ。然れば容積は $1+\alpha t$ 倍に增大す。是に於て溫度を一定にし壓を高めて容積を當初の値に戻したりとす。ボイルの法則に依り此爲には壓を $1+\alpha t$ 倍大にせざるべからず。若し熱すると同時に壓を此割合に高むれば、容積は變ぜざるべし。即ち

$$p_t = p_0(1+\alpha t) \quad \cdots\cdots (3)$$

此結果よりして、又膨脹係數を何等膨脹を示さゞる實驗に於て定め得べきを知る、即ち封塞せる一氣體量が種々の溫度に於て作用する壓を測りて之を知るなり。

此爲に例ば二〇八圖に示せる裝置を用ゐるべし。氣體は硝子球 B 內に在り、球は ab 管に融着し、此管は C なる護謨管にて直立管 D と連結し、D は上下に移動し得べきものとす。mb, C 並に D 內に水銀ありて氣體を封塞す。D を上下して水銀が低溫度に於ても、又高溫度に於ても ab 間の一定の標 m に達せしむる樣になす。ab に於けると D に於けるとの水銀の高さの差に晴雨計の讀みを加へて氣體の壓を測る。勿論此實驗の計算の際、硝子の膨脹を省略すべからず。α が知らるれば又此裝置にて溫度を計り得べく、即ち之を空氣寒暖計と名け得べきは容易に知るを得べし。

第二〇八圖



壓、容積及溫度の變化に關する最も一般なる關係は次のものなり。壓 p, 溫度 t に於て一氣體が容積 v を占むとせば、壓 p', 溫度

t'なるとき、容積v'の大さ如何。先づ壓を一定にし、唯溫度のみをt'に變ずれば容積は$v(1+\alpha t')/(1+\alpha t)$となる。然る後一定溫度$t'$に於て壓を$p'$に高め得べく、是にボイルの法則を應用し得。故に前述の問題の答は

$$v'=v\frac{p}{p'}\;\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}\quad\cdots\cdots(4)$$

此範式は凡て容積を測りて氣體の量を算出する場合に應用あり。此場合には壓及溫度を觀察せざるべからず。又種々の結果を比較する爲、之を用ゐて凡ての測定を76糎の壓並に0°の溫度に歸せしむるを得。

$\alpha=1/273$なる故に(4)の代りに又次の如く記し得べし。

$$v'=v\frac{p}{p'}\;\frac{273+t'}{273+t}$$

今寒暖計の目盛上に零點下273°の一點を考ふれば、$273+t$及$273+t'$は、此點を起點として度の數を算せるとき、氣體が今順次に有したる溫度を示すべし。此溫度を絶對と名け、T及T'にて記すべし。然れば前記の方程式は

$$\frac{pv}{T}=\frac{p'v'}{T'}\quad\cdots\cdots(5)$$

となる。即ち壓及容積の積は、一定溫度に於てはボイルの法則に從ひ不變にして、然らざれば絶對溫度に比例して變ず。

(5)に(2)及(3)の關係が含まるゝは容易に知るを得。

又記すべきは、多くの場合に於て、一定壓の下に在る一氣體の容積は、1°の溫度下降あるとき常に同量丈減ずることは溫度が$0^\circ C$以下に降れるときにも亦然ることなり。然れば(2)の範式は又tの負値に就ても適用す。ボイルの法則の假定せらるゝ間は、方程式(5)は

273よりも小なるT又はT'の値に適用するなり。

最後に尙重要なる一定理をボイル及ゲーリュサックの法則よりして演繹し得。二氣體が同じ壓の下に在り又同じ溫度を有するものを見れば、夫等の密度の比を定むるを得。此比は、兩物體を他の壓及他の溫度に於て相互に比較すとも、唯だ壓及溫度が夫等の二氣體に於て同高なりとすれば、凡て同一なるべし。以上は一氣體の他に對する比較的密度を與ふるとき常に假定せらる。

最後に尙注意すべきは、此節及前節の範式は溫度が空氣寒暖計、即ち二一八節に示せる如きものに依りて測られたるときにのみ適用することなり。普通の水銀寒暖計は、後に示すが如く、各度に就て空氣寒暖計と同じ數を與へず、然れども其差は一般に稍小なり。

精密なる研究に於ては溫度を常に空氣寒暖計の度にて示すことに一致せり。次に於ては常に然かしたりと假定すべし。之は實驗の際に水銀寒暖計を用ゐるを妨けず、唯だ前に之を空氣寒暖計と比較すべきのみなり。

終りにp, v及Tの間の關係を稍他の仕方にて表はすべし。其爲に氣體の一定量を單位として選ぶ。今恰も之に就て論ずればpv/Tなる量は一定の値を有す、之を氣體常數と名く、Rにて之を記すべし。然れば

$$pv=RT\quad\cdots\cdots(6)$$

是によりて若し一單位ならずしてn單位に就て論ずとせば

$$pv=nRT\quad\cdots\cdots(7)$$

なるを演繹し得。

一瓩を單位として取れば、空氣に就ては

$$R=2,87\times10^6$$

水素に就ては

$$R=41,4\times10^6$$

是は $0°C(T=273)$ に於て水銀 76 糎の壓 ($p=1,014\times10^6$ 二〇五節 f) の下に一立方糎の空氣 0,001293 瓦、及水素一立方糎 0,0000898 瓦の重さなるを知れば容易に知るを得べし。

二二〇　氣體運動論 (Kinetic Theory of Gas.)　上來既に屢述べたる分子及分子運動に關する假定は氣體の本質に就て完全なる理論を演繹せり。此物質の簡單なる諸性質は、此等物質の密度小にして、分子の大さ及二分子が互に或顯著なる作用を呈し得る距離が二個相續ける分子の平均距離に比して甚小なりとせば、既述熱運動に依り容易に説明するを得べし。

此假說は凡ての氣體分子は全然夫自身の儘に放置せらるゝとき其大部分は運動せりとなせるものなり。分子は他の分子又は固壁と甚小の距離に來るまでは直線に飛行す。方向を變ずると共に再び暫時其運動を直線に續く、故に道の全部は之字形折線をなす。

二分子の相互作用は疑もなく其一部分は引力に在るべし、之を假定すべきは、氣體が液化せられ得べきを以てなり。然れども種々の現象に依り、二分子が相接觸し又は互に甚小の距離に來る場合には、相互に斥力を作用することも確からしきなり。此の如き力のみが存在すとせば諸分子は彈性球の假像の下に表象し得べきなり、是等が一空間內に此處彼處に飛行し、屢相衝突すとすべし。明瞭にする爲に、次に於ては此假像を屢用ゐるべし、然かも其の實際と著しく異なるものなるべきは疑もなし。

又氣體分子と固壁との間の作用に就て假定を設くべし、是は結果を演繹するには必要ならざれども概念を簡單にするが爲なり。即ち壁が完全に滑に彈性的なる表面を有し、分子は一一九節に云へる仕方にて反撥せらるとすべし。

氣體に依りて周圍の壁に作用する壓は、此考に從へば、壁が絕えず分子より受くる打擊の結果に外ならざるなり。是は三個の量に關係せざるべからず、即ち分子の數、分子が動く速度及分子個々の質量なり。ボイルの法則の求むる如く、一層多數の微部分を一空間に持來れば壓は增加し、又同樣に氣體の張力は其容積を不變にせば熱すると共に增加し、又氣體を包める壁の一部分を退かしめ得ば夫に依りて氣體が膨脹することは容易に知るを得。即ち氣體を「暖むる」とは諸分子に一層大なる速度を與ふと云ふに外ならざるなり。

簡單の爲に單位容積の器を考ふべし。壓は此中に存在せる分子の數及各分子個々の質量に比例せるは容易に知るを得。速度に關しては、更に詳細に考ふれば、凡ての分子の速度を二倍にし、三倍にする等なれば、壓は四倍、九倍等に增大するを知る。是は速度の增大と共に壁が彼方此方に動ける分子よりして一層多數の衝擊を受け、又其他に各衝擊が烈しくなることを考ふれば容易に了解し得。

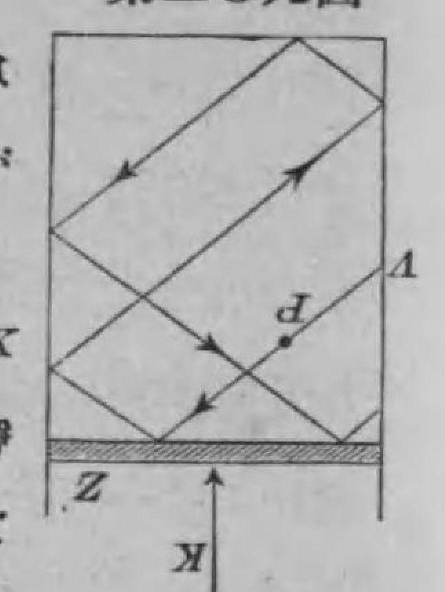
理論的計算に依りて得る結果を最も簡單に次の如く表はし得。即ち、每面積單位の壓の數値は分子の進行運動の爲に單位容積中に在る運動エネルギーの數値の三分二に等し。

斯して壓を(每平方糎ダインに於て)測れば又此運動エネルギーを(每立方糎エルグに於て)知るを得。又一立方糎の質量を定め得る故に、分子の速度、或は寧ろ凡てが同速度にて動くとせざる故に、其

或平均の速度を計算し得。0° の水素に於ては此平均速度は毎秒 184000 糎なり、又他の氣體に於て米突の數百倍を有するあり、是れ一四五節の結果と能く一致せる所なり。

二二一 壓と分子運動との關係の演繹 (Deduction of the Relation between the Pressure and the Molecular Motion.) 氣體が高さ h の圓筒狀の一器 V (二〇九圖)に在りて、此圓筒の上面が可動の唧子 Z にて、又氣體分子は甚小にして全く互に衝突せざる如きものなりと假定す。一分子 P は圖に示せる折線を經過すれども Z に直角なる一方向に於ては常に同じ速度を有す。此分速度を u_1 にて記せば此分子のみが Z に作用する衝擊の數は單位時間に $u_1/(2h)$ なり。

第二〇九圖



Z を其位置より動かさゞらしむるには絕えず外方より一力 K を作用せざるべからず。之を計算せんとす。元來唧子は全然靜止に在るに非ず、各衝擊に依り外方に小なる速度を得。然れども相次げる二衝擊の間に力は再び之を內方に動かす。是が一單位時間に力 K より得る運動量が單位時間に諸分子よりして之に與ふる運動量の和に等しきとき、外見上靜止に在るものなり。

唧子の質量は一分子の質量に比し甚大にして、後者の反撥が一一九節に示せる仕方にて起れりとす。唧子の質量を μ 並に一分子の質量を m とすべし。

分子 P は Z に至る每に既有の其速度に $2u_1$ なる速度を加ふ。故に唧子に $2mu_1/\mu$ なる速度、即ち運動量 $2mu_1$ を與ふ。此一分子が單位時間に唧子 Z に與ふる運動量の總和は mu_1^2/h なり。Z が力 K よりして得るを要する運動量は斯して $(m/h)\Sigma u_1^2$ なり、此和は凡ての氣體分子に關するものならざるべからず。力 K は同じ數にて表さる、故に

$$K=\frac{m}{h}\Sigma u_1^2$$

最後に S を唧子の表面とせば面積單位の壓は

$$p=\frac{m}{hS}\Sigma u_1^2$$

此の和は簡單なる工夫を用ゐて見出し得。即ち氣體內に三個の互に直角なる坐標軸を取り、其第一のものが Z に直角なりとせば、各分子に就て速度 u, 並に其三分速度 u_1, u_2, u_3 間に次の關係あり

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=u^2$$

即ち全氣體に就て方程式

$$\Sigma u_1^2+\Sigma u_2^2+\Sigma u_3^2=\Sigma u^2$$

あり。氣體は凡ての方向に於て同じ性質を有するが故に

$$\Sigma u_1^2=\Sigma u_2^2=\Sigma u_3^2$$

を假定せざるべからず。是よりして

$$\Sigma u_1^2=\frac{1}{3}\Sigma u^2$$

を得。從て

$$p=\frac{m}{3hS}\Sigma u^2$$

なり。又 $v=hS$ が容積なるが故に此式は

$$p=\frac{m}{3v}\Sigma u^2 \quad \text{.........(8)}$$

運動エネルギーは

$$A=\frac{1}{2}m\Sigma u^2$$

故に

$$p=\frac{2A}{3v} \quad \text{.........(9)}$$

斯して前述を證明せり。

又器中の分子の數を n とし、一速度 U を次の方程式にて定むれば

$$U^2=\frac{1}{n}\Sigma u^2$$

(8) の代りに

$$p=\frac{MU^2}{3v} \quad \text{.........(10)}$$

と記し得べし、此中全質量を M と記せり。

U なる量を諸分子の平均速度と名くべし。本來は其自乘が凡ての速度の自乘の平均に等しきなり。

(9) 及 (10) の範式に依りて直接測り得べき量よりして A 及 U を算出し得。例ば

0° の水素 1 瓦が 76 糎の壓の下に在れば $M=1,\ v=11160,\ p=1,013\times10^6$ (二〇五節 f) なり。是よりして

$$U=184000 \text{ 糎每秒}$$

同じ溫度に於て尙他の壓に就て此計算を行ひしとするも、v は p に逆比例して變ずるが故に同じ結果を得べし。即ち、一定溫度に於ては、氣體の分子速度は密度に無關係なり。之を假定するを得とせば、方程式 (10) よりしてボイルの法則を導くを得。

熱せらるゝと共に pv なる積が絕對溫度に比例して增加す、故に (9) に依りて A も亦同樣なり、(10) に依りて平均速度は絕對溫度の平方根に比例すべし。

又同じ溫度、同じ壓の下に在る二個の異れる氣體を比較せば兩物體の同容積內に同量の運動エネルギーあり。即ち平均速度 U は密度の平方根に逆比例す。U は水素に於ては凡ての他の氣體に於けるよりも大なり。

最後に尙注意するは、簡單の爲に前述の如く分子が相衝突せずとなせる假定は、以上の結果を得るに必要ならざることなり。衝突に依りて往々分子を、然らざれば壁を衝擊すべきものを、是によりて之を妨ぐることもあり、然れども分子の互に衝突するに依りて却て之を壁の方に逐ふことも亦あり得べければなり。

唯だ分子が中間の空間に比して甚小なる間は、前述の諸範式は衝突甚だ多數なるときにも亦適用せらるゝなり。

又任意の形狀の器に於ても壓は範式に依りて定めらる。

二二二 分子の成分の運動 解離の現象 (Motion of Constituents of a Molecule. Phenomena of Dissociation.) 一分子の重心が進行運動をなせるとき其外に、(一七〇節 a 參照) 之を組成せる原子が此點の周りに運動するを得。例ば分子は全體として廻轉し得、諸原子は夫等の共通の質量中心の周りに圓形の道を描き、或は平衡位置の前後に振動し得。初め是等の運動が存在せざりしとも、互に近き來る原子間の衝突に依りて作用する力の爲に自ら生ぜらるべし。是に依りて夫等は速度を得、分子自身の進行速度の大なる程此速度大なるべし。

氣體の溫度が益高めらるれば、諸原子は遂に甚だ烈しく運動し、夫等を連結する力が遂に分子の分解を防ぐに足らざるに至るべし。

化學者は氣體に於て所謂解離現象なるものを觀察したり、例ば N_2O_4 が $2NO_2$ に分れ、又 PCl_5 が PCl_3 及 Cl_2 に分るゝことの如きなり。此等及類似の場合に於ては、分解の爲に一定の溫度の、恰も其溫度以下にては二成分に分解すること全く皆無にして、其溫度以上にては完全に分解す、と云ふが如きものありと云ふこと無きなり。之に反して、初て解離を顯著ならしむる溫度、並に解離を終り、或は少くも遙に之を進行せしめたる溫度是等兩者間に多少隔りありて、其中間の溫度に於ては物質一定部分が解離せるなり。此割合は溫度を高むると共に益增加す。熱したる後當初の溫度に復歸せしむれば、再び最初の割合の解離を得。

凡て之等を了解する爲には、先づ一氣體量に於て凡ての分子が同一速度を以て運動せずと考へざるべからず。二彈性球が初に同じ速度を有すれども其方向が互に或角度をなせば、一般に一衝突の後に互に異れる速度にて進むべし。氣體の分子に於ても略同樣なり、故に或瞬時に於て凡ての速度が同大なりとも衝突の爲に差異を生ずべし。比較的低溫度に於ても若干の分子の有する速度は極て高き溫度に於ける平均速度と同じくして、衝突に依りて分解を生ずるに十分に大なる速度なることあり得べし。

然れども各溫度に於て常に物質一定部分が解離せるは次の原因に依る。即ち若干の分子が解離せらるれば、又其反對の現象を起す機會を生ずることなり。解離に依りて生せる原子群の二個が相出會することあるべく、此とき、必しも常に然りとせざれども、夫等が再

び合一することあり得べし。分子が既に分解せらるゝもの多き程、前記第二の現象が生ずる公算も大なるべし。結局、或時間内に同數の分子が分解せらるゝと同時に又合成せらるゝ如き狀態を生ずべし。然れば解離せると解離せざるとの氣體の量、並に夫と共に凡て知覺し得る全體の性質には何等變化なきを得べし、而も實は氣體内分解せられざる狀態に在るものが常に同じ分子にはあらざるべきなり。此仕方にて生ぜる定常の又は永續の狀態を平衡狀態と名け得。玆に「平衡」と云へるは普通に力學にて云へるとは他の意味に在り。

溫度を變ずれば平衡は攪亂せらる。熱せらるれば一定時間に分解する分子の數は增加す。然かも合一する數は尙ほ直に增加せざるべし。然れども恰も多數の自由なる原子又は原子群を生ぜるが故に後者も亦直に增加して、再び新たに分解せる數に等しきに至るべし。

二二三 アヴォガドローの法則 (Avogadro's Law.) 二個の物體が互に接觸し、熱の交換の點に於て平衡狀態に達し、即ち夫等が同溫度を占めたるときは、之等二物體に於ける分子運動の强さに關して或關係成立せざるべからず。氣體に於ては此關係を理論よりして演繹することを得たり。凡ての氣體に就て同溫度に於ては一分子の進行運動の平均運動エネルギーは同大なることを證明せり。

又同じ溫度に在るのみならず、尙又同じ壓の下に在る二氣體を比較せば、二二〇節所述に依りて凡て單位容積内に有せる分子の全運動エネルギーは兩者に於て同大なるべきを知る。以上の二定理を連結せば、アヴォガドローの法則を得。即ち同じ溫度、同じ壓に於

ては、異れる氣體の同容積内に同數の分子を有す、從て分子量は上記の同狀態に於ける密度に比例す。

此法則は化學者に對して甚だ重要なり、是によりて氣體の分子量を測定するを得ればなり。又逆に、氣體の分子範式を知れば、此法則を用ゐて水素に關する其の密度を與ふるを得べし。

アヴォガドローの法則は又氣體の混合にも適用し得。何となれば、是に於ても亦壓は單一の氣體に於けると同樣に、單位容積内の運動エネルギーに關係し、又同じ溫度に於ては一分子の平均運動エネルギーは凡ての氣體に於て其混合體なると否とを問はず同大なればなり。

一般に一氣體の單位質量内の分子の數は、氣體が同溫度同壓の水素に比して比重 d なれば、N を以て水素單位質量内の分子の數とせば、N/d にて表さる。

水素は殆完全にボイルの法則に精密に從ひ、又熱せらるれば、絕對溫度に比例して膨脹するを示せり。此簡單なる性狀は水素分子が常に其個性を保てりと云ふ假定に導けり、即ち水素分子は互に合一もせず、分裂もせず、N なる數不變なりと云ふなり。勿論斯く假定せば pv/T なる量不變なる凡ての他の氣體に於ても亦分子の數不變なりとせざるべからず、是亦上述と一致す、此の如き物體に於ては d が常數なればなり。然れども N_2O_4 に於ける如く、溫度上昇と共に d が減少するを觀察せば、夫に於ては分子の數增加し、即ち解離を生じたりと結論せざるべからず。

勿論 d の減少は、N_2O_4 がゲー、リュサックの法則より偏倚し、又氣體を不變容積の一器中に封せば其壓は絕對溫度よりも速に增加す

ることを含めるなり。即ち解離に依りて增加したる各分子が壁に衝突すと云ふことなり。此場合の速度は、此分子の平均運動エネルギーは同じ溫度に於ける他の凡ての氣體の分子と同大なりと云ふ規則に依りて定むるを得。

玆に注意するは分子の分裂にはエネルギーを加ふるを要することなり。即ち先づ原子間の引力に打勝たざるべからず、故に位置エネルギー增加す、又一定溫度に於ては新に生じたる微分子は各、平均に於て、尙分解せざる分子と同じ進行運動の運動エネルギーを有せるを考ふべし。

終りに特に擧ぐべきは、アヴォガドローの法則に從へば二一九節に導ける常數 R は、同數の分子より成れる二氣體量に於て、同じ値を有すべきことなり。各氣體に就て其分子量と同數の瓦を取れば、明に之を此の如き氣體量と見るを得べし、例ば水素に就て 2 瓦、酸素に就て 32 瓦、等なり。此の如き量を瓦分子と名く、此名は混合氣體にも應用するを得。例ば空氣一瓦分子は全體として恰も水素 2 瓦と同數の分子を有する量を云ふ。

一瓦分子に就ては

$$R=32{,}7\times10^{6}$$

此數は凡ての氣體に適用す、特に「氣體常數」と名けらる。

二二四 氣體の擴散 (Diffusion of Gas.) 氣體分子が全く衝突せざれば、其大速度の爲に、一秒の小部分內に於て旣に直線上著大なる道程を經過せるなるべし。二個の相接せる氣體は是に依りて互に極て速に混合すべし。然れども觀察に依れば實際には此の如くならず、例ば室の一隅に於て一氣體の發生せることが臭氣に依りて知られたるとき、是が室の反對の側に於て知覺せらるゝまでには稍長時間を要すべし。

是は他分子との衝突の結果なり、是に依りて分子は其來れる側の方に反撥せらるゝなり。一秒時間に其畫く之字線の全長は數百米に達すべきも、然かも分子は出發點より遠く離るゝことなかるべきなり。

然れども二個の氣體が緩漫なる混合をなし、即ち擴散することは常に生ずるなり。分子が他と衝突すること屢なる程、即ち分子が二衝突間に經過する距離の小なる程、混合は緩漫なり。勿論此距離は凡ての分子に就て同じきにあらず、故に唯夫等の平均値を定むと云得るのみなり。恰も此目的に擴散並に次の二節に云ふ如き現象に關する硏究が用ゐらるべし。

衝突の數の大なることの概念を得る爲に記載せんに、水素が 0° に於て 76 糎の壓の下に於ける上記の距離は平均僅に 0,000017 糎なるのみなり。先に與へたる速度の値と參照せば一分子は一秒間に殆 10^{10} 回の衝突を受くるなり。

擴散に關する實驗の例としてロシュミットの觀察を擧ぐべし。二硝子管の、各 48,7 糎の長さ並に 2,6 糎の直徑を有し、各一端を閉ぢたるものに、一に炭酸瓦斯を、他に水素を充たし、之等を直立位置にて兩口を合せ、炭酸瓦斯を充たせる管を下方に置く。此の如くするは、唯だ分子運動にのみ依りて混合し、重力の影響に依りて其の著しく速められざるために必要なり。半秒の後に兩管の內部を檢査したるに、炭酸の僅に 37% が上管に侵入したるを示せり。

二二五 熱の傳導 (Conduction of Heat.) 又全く同一の氣體を充

せる一空間内に於ても絶えず各層の混合あり。始に各層間に若干の差存したりとし、例ば上方が下方よりも高き溫度を有したりとするとき之を觀察し得。衝突にも拘らず器の上方よりして下方に至る分子は其速度を伴ひ、器の下方に於ける平均速度を增加する樣の作用あり。之に反して器の上方に於ては平均速度を減少す、上方に於ては恰も上述の分子が他の低き溫度の位置より來れる、即ち小速度を有せる分子にて置換せらるればなり。

今若干時の後には器内上下に於て始めと同じ物質が含まると認むる能はず。唯一つ吾人の認むるは溫度が下方に於て上昇し、上方に於て低減したることなり。現象は外見上一銅棒に於ける熱傳導と同樣なり。故に又之に同じ名を附す。然れども本來は不同溫度の二氣體の擴散と云ふべし。又此擴散の進行は甚だ緩漫なり、換言せば氣體は熱の不良導體なり。其傳導率は、若し分子が常に短時間の後に再び他によりて反撥せらると云ふことなければ、遙に大なるべきなり。

尙は記載すべきは、一層の分子が他層の分子との衝突に依りて若干量の運動エネルギー即ち若干量の「熱」の遷移を生ずることなり。然れども餘り大ならざる密度を有せる氣體に於ては是は顯著ならず、熱傳導は種々の溫度の諸層の混合と見るを得。

二二六 内部摩擦 (Internal Friction.) 是に就ては(二一三節)氣體に於ては熱傳導に於けると同樣なる說明を與ふるを得。氣體が流動せば、凡ての分子は不規則なる熱運動以外に一定の方向に於ける共通の速度(「流動速度」)を得。今此速度が(二〇二圖、331頁)右方に向ひ、V の平面の上部に於ては其下部に於けるよりも大なりとせ

ば、此差は二層間の分子の交換によりて減少せしめらるべし。即ち此場合に V の下方の分子は熱運動以外に右方に一小速度を有せるが、他の大速度を有する分子と置換せしめらる。是が V 以下に在りたる分子と衝突するに依りて V 以下の凡ての分子に大速度を分配す。然れば此ときには無論此全層が右方に有する速度は其の初に有したるよりも增大すべし。V の上部に於ては恰も此反對を生ず、然るに觀察者に對しては凡て此平面を過ぎて何等物質が通過せざると同樣にて、平面の上部に在るものが下部分を接觸面上の力によりて伴ひ動かしたるが如くなるべし。

二一三節に於て、内部摩擦の爲に、液體又は氣體をして細管を通過せしむるには或壓差を要するを知れり。氣體に於てはこの管中の壓に就て次の如くして概念を得。管壁自身氣體分子より成り、即ち密なる氣體層にて覆はる。絶えず此層内に新分子が管中より入り、他分子は此境界の層を去る。今前者が熱運動以外に管長の方向に於ける一速度を有すれば、管壁の層に至れるとき直に之を失ふ。其代りに出づる分子は此の如き速度なくして壁を去る。今氣體が初め管中を流れたりとするも、此流れが維持せられずば、若干時の後には、分子の此の如き交換の爲に、流は全く消滅するに至るべし。不變なる流れの速度が存在する爲には、壁層より出來れる分子が常に新に或速度を得ざるべからず。是が爲には絶えざる壓差を要するなり。

分子の速度は溫度の上昇に依りて增加するが故に、二〇二圖中平面 V を過ぐる、或は壁層と毛細管内部との間の分子の交換が溫度の上昇と共に促さるゝは了解し得。實際に細管を過ぐる氣流の實驗よりして内部摩擦は熱せらるゝと共に增大するを示し得。液體に於ては恰も之と正反對なり。

氣體の內部摩擦は細管內の流動の他又多くの現象に於て顯はる(二一四節參照)。氣體內に於ける凡ての運動は是に依りて鈍めらる。是に依りて嵐も靜められ、又音の振動も止めらる。

前述に依りて、內部摩擦の作用せる簡單なる場合の研究は、一分子の相次げる二衝突間に經過する平均の道程を推論するに導くべきは明なり。又熱の傳導も此道程を定むるに用ゐらるべし。此等の仕方にて得たる結果は其の相互の間にも、又擴散現象より演繹したるものとの間にも滿足なる一致あり。

此長さは分子の大さ並に其數と關係せり。何となれば分子が小に、且其數少き程、夫が他と衝突せずして大距離を經過する公算は益大なればなり。

內部摩擦の數學的理論が導ける著しき結果は、此摩擦が、極て高き稀薄の度に至るまで氣體の密度に無關係なることなり(然れども密度が益減少せば遂に尙小なるに至る)。實に每單位時間に V 平面(二〇二圖)を過ぐる分子の數は稀薄の爲に減少す、然れども一回の衝突の公算が減少するが故に、分子は一層よりして他層へ尙ほ深く侵入すべく、是によりて混合を促すなり。實際に觀察により、二一四節に云へる如き、一板を他板に依りて伴ひ動かす如きことが、普通の空氣喞筒にて得らるゝ最高の稀薄に於ても普通の氣壓に於けると同じ度に起るを知るなり。是は氣體運動論の最も顯著なる證明の一なり。

二二七 一氣體層が他層に對する壓 (Pressure of a layer of Gas against another.) 第四章に於て屢、氣體の一部分が他部分に對して作用する壓に就て云へり。是に於て各部分は絕えず同じ物質より成れりとせり。然れども此の如き見方は唯少數の分子のみを有する如き空間を考ふる場合には棄てざるべからず。例ば一氣體の一立方米に百個の分子ありとすれば、一定瞬時に於て一種の厚さの一層中に在りたる分子は其運動の爲に速に凡ての方向に飛散すべし。然れば

氣體の或一局部分に作用する壓に就て云ふは難かるべし、何となれば此層は此部分より逸出する分子を大抵自由に通過せしむべければなり。

實際に普通の密度の氣體に於ては狀況稍異れり。二衝突間の平均の道程は一萬分一粍にも足らざるが故に、例ば 1 粍の厚さの層に於て側面の近傍に於ける周圍との分子の交換は僅小なるべし。此の如き層は長き時間の間同じ分子より成れりと見なし得。周圍より來れる分子は表面より僅かの距離に於て此層に屬せる分子に衝突し、斯くして之に對して一の壓を作用すること分子が固壁に衝突するときに起る現象と甚だ異ならざるものなるべし。

二二八 斷熱的膨脹及收縮に於ける溫度の變化 (Temperature Changes in Adiabatic Expansion and Compression.) 一氣體を圓筒狀の器に封せる喞子が固定せば、分子は喞子に對して衝突せるときと同じ速度にて反撥す。然れども喞子が動けば此の如くならず。喞子が後退せば、分子は喞子に達したるときよりも小なる速度にて歸り、又喞子が內方に進めば恰も正反對なる場合を生ず。

喞子に出會する凡ての分子に於て此等の速度變化を生ずるが故に、分子運動の平均速度並に之と共に氣體の溫度は變ずべし。是は氣體が前後に移動し得べき一水銀柱にて、或は又他の氣體にて境せらるゝときにも同樣なり(二二二節參照)。一般に氣體の溫度は其膨脹するときに下降し、收縮するときに上昇す、但し其溫度を不變に保つための外部よりの加熱、又は周圍に於ける熱なきものとす。

不變溫度に於て起る容積變化を等溫的と名く、之に反し周圍との熱の交換を隔絕せる變化を斷熱的と名く。之を完全に實現せんには

全く熱を通過せざる壁を有する器中に氣體を封せざるべからず。

此の如き壁は實際には存在せず。然れども甚だ速なる變化は斷熱的と考へ得、是に於ては容器と著大なる熱の交換をなすに要する時間を缺けばなり。

故に又一喞子を厚き硝子圓筒(氣壓發火器)内に急に下壓するによりて熱を發生し、圓筒内の空氣中に入れたる硫化炭素蒸氣の如きものを發火するに至る。之に反して速に空氣を稀薄にせば、空氣喞筒の鐘内の溫度は下降して、其内の空氣に濕氣あれば霧を生ずべし。

一空氣量の斷熱的容積變化の觀察よりして、例ば 15° の空氣を急に當初の容積の五分一に收縮せば、溫度は 280° に上るを知る。又當初の容積の五倍に膨脹せしめば、普通の法則が常に適用せらるとせば空氣は -120° に冷却せしめらるべし。

二二九 エネルギー保存の法則との一致 (Agreement with the Law of Conservation of Energy.) 上述の諸現象がエネルギー保存の法則と一致せるは容易に知るを得。一圓筒内に喞子の下に在る氣體は喞子に對して壓力を作用し、即ち膨脹の際仕事をなす、是は内部エネルギーの減少によりて始て可能なり。分子が運動エネルギーに於て失へるものは喞子が顯著なる一速度を得れば喞子の運動エネルギーとして再現す。或は喞子の運動に依りて一重量が擧げられたりとせば、位置のエネルギーとして現はる。是は喞子と連結せる機關を動かすに用ゐらるべし。

逆に、喞子の下降に於ける分子エネルギーの增加は喞子を内方に動かしたる外力の仕事に相當せり。即ち實驗者が此力を作用したりとせば、實驗者體内のエネルギーの減少に相當せり。

勿論氣體が他物體を運動せしむることなくして膨脹し、即ち眞空なる空間内に侵入せる場合には何の仕事をもなさず。即ち此場合には内部エネルギーは變せず。氣體運動論に從へば此エネルギーは運動のエネルギーなるが故に、此場合に分子の速度並に溫度は不變なるを要するなり。

ジュールの實驗は此期待を實證せり。是に於ては相等しき二圓筒を括栓を有せる一管にて連結し、之等を一熱量計の水中に置けり。始に一圓筒が眞空にて、他圓筒は壓縮空氣を以て充さる。然れば括栓を開けるとき熱量計の溫度は何等の變化も生ぜざるを示す。故に又氣體は熱を受入るゝことなく又出すことなくして其當初の溫度を保てるなり。

此重要なる實驗の意味を尚充分に明にせんが爲に、暫く氣體運動論より離れて、唯エネルギーの法則のみを推理の中に用ゐるべし。熱量計内の水は同じ溫度を保存せり、故に氣體は全く熱を受入れざりしなり。其外に又そは何の仕事をもなさず、故に内部エネルギーは容積の增大に拘らず變化せず。實驗の示すは不變溫度に在る一氣體の内部エネルギーは容積に無關係なることなり。氣體運動論は此無關係なるを説明するため氣體の分子間に顯著なる引力なきを假定せり、即ち膨脹に依りて增加する位置エネルギーに就て考へず、又分子は一定溫度に於ては常に同じ速度を有し、容積の大小に拘らずと假定せり。

然れども前述の事柄は恰もボイル及ゲー、リュサックの法則の如く唯近似的に正確なるのみなり。實際に斷熱的膨脹に於ては何等外部の仕事なされざる場合にも溫度は下降

し、當初の密度が甚大ならざれば其下降は甚だ僅小なれども、強く壓縮せられたる氣體に於ては顯著なるべし。又實に此溫度の下降を氣體の液化に用ゐるなり。

二三〇　不變容積に於ける並に不變壓に於ける比熱 (Specific Heat at constant Volume and at constant Pressure.)　一圓筒內喞子下に或氣體の 1 瓩ありと假定すべし、其溫度を 0° とす。今此氣體を 1° に溫め、其間喞子を固定し膨脹を妨ぐ。是に就て氣體に加へざるべからざる熱量を不變容積に於ける比熱と名け、c_v と記す。是は氣體が 0° に於けるよりは 1° に於て多量に有せる丈の內部エネルギーを示すなり。

今此實驗を次の點の相違を以て繰返す。即ち喞子が自由に動き、氣體が絕えず同じ壓を作用する樣ならしむ。內部エネルギーを增加せんには前述と同じ熱量を要す、即ち此エネルギーは 1° に於て一定の値を有し、氣體の占むる容積の大小に關せず。然れども氣體は喞子を動かせる間に尙或仕事をなせり。是に依りて第一の實驗に於けるよりも多量の熱を加へざるべからず。

玆に要せるカロリーの數を不變壓に於ける比熱と名け、c_p を以て記す。

又實驗を逆にするを得。氣體が不變容積に於て 1° より 0° に冷却せば熱量 c_v を放出す。然れども此場合に壓が不變なれば、即ち氣體が收縮すれば尙多量の熱、即 c_p に等しき量を放出す。此場合に於ける熱の過剩は外力のなせる仕事によりて發生せるなり。

氣體の比熱を測るには始に之を熱せられたる螺旋狀の管中に流し、次に熱量計中に在る恰も同樣なる管中を流す。後者の溫度の上昇、氣體が熱量計に達し又之を去れるときの溫度、氣體の量並に熱量

計の水當量が比熱を算出せしむる材料なり。其結果は不變壓に於ける比熱なり。是は氣體が熱量計を過ぐる道に於て何處も同じ壓を作用せるときに其然るは直に知るを得。然れども氣體を進行せしむるに顯著なる壓差を要する場合にも亦正確なるは實證するを得。

此爲に二一一節(324 頁)に於ける如き考察並に一九八圖の如き圖を用ゐ得。唯玆に a 並に b の斷面の大さが異れるは必要ならず。a' 及 b 間の管の部分が熱量計內に在りて、即ち a 及 a' が熱き、又 b 及 b' が冷却氣體內に在りと假定すべし。t_1 を aa' 空間內の溫度、t_2 を bb' 內の溫度、p_1 を a に於ける、p_2 を b に於ける壓、v_1 を a 及 a' 間の、v_2 を b 及 b' 間の夫々容積とす。始に a 及 b 間に在りたる同じ氣體が後に a' 及 b' の間に在りと假定し得らるゝ故に、定常の運動に於ては

$$\frac{p_1v_1}{1+\alpha t_1}=\frac{p_2v_2}{1+\alpha t_2}$$

a 及 b の間の氣體量に於ける外力の仕事は

$$p_1v_1-p_2v_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

氣體が極て僅小なる流れの速度に於て有せる運動エネルギーは省略し得べきが故に、前記の仕事に等しき熱量、又其他に此氣體に依り失はれたる內部エネルギーに相當する熱を現出す。

然れども a 及 a' 間に在るものに等しき氣體量が器中に來り、又不變壓 p_1 に於て t_1 より t_2 に冷却せらるれば、容積は

$$v_2'=v_1\frac{1+\alpha t_2}{1+ct_1}$$

となるべし。外壓の仕事は

$$p_1(v_1-v_2')$$

にして (11) の値に等し。

レニョーは空氣に就て

$$c_p=0,2377$$

を得たり。玆に注意すべきは小偏倚を省略せば、此數は壓が如何に高きも常に同樣に、不變壓に於ける比熱を示すことなり。

理由は容易に知り得らるゝ如く、不變容積に於ける比熱は直接の實驗によりて定むるは不可能なり。然れども c_p 及 c_v の差は前節に云へる現象と密接に關係せるが故に、其觀察に依りて、c_p が知らるれば c_v を見出し得べき方法を得。此仕方にて得たるは

$$c_v=0{,}1692$$

二三一　熱の仕事當量の測定 (Determination of the Mechanical Equivalent of Heat.)　$c_p-c_v=0{,}0685$ カロリーなる差は一瓦の空氣が不變壓の下に $0°$ より $1°$ に熱せられたるときに喞子又は或他の之を境せる物體を動かす爲に用ゐたる熱量なり。壓を毎平方糎 p ダイン、容積を v 立方糎、又熱に依る膨脹を αv とす。氣體が爲す仕事は αpv なり(二〇七節 b)、今此仕事に對して c_p-c_v カロリーが用ゐられたり、故に單位熱量の仕事當量は

$$E=\frac{\alpha pv}{c_p-c_v}\qquad\qquad(12)$$

を得。

T を以て $0°C$ に於ける絶對溫度とすれば、$\alpha=1/T$ なり。故に上記の仕事は又

$$pv/T=R$$

と記し得、R (二一九節)は一瓦に關する氣體常數なり。熱の仕事當量には又 (12) の代りに

$$E=\frac{R}{c_p-c_v}\qquad\qquad(13)$$

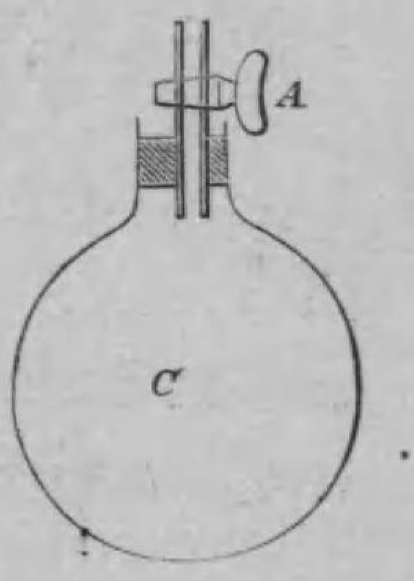
を得。是に c_p 及 c_v に其節に示せる値を置き、又 $R=2{,}87\times10^6$(二一九節)とせば $E=419\times10^5$を得。

此測定は既に一四三節に考へたるものなり。是が斷熱的壓縮又は膨脹に依れる溫度變化に於ける實驗よりして得たる c_v の値に基け

るが故に又 E の値は此實驗よりして演繹せらると云ふを得。其可能なるは容易に知るを得。氣體が斷熱的に收縮せば、容積の減少及外壓よりして此外壓の仕事を算出し得。他方に溫度の上昇と氣體の比熱とにより發生せる熱量を知るを得、故に熱單位の仕事當量を知るに必要なる凡ての材料を有せり。膨脹に依れる冷却を測れるときにも亦同樣なり。然れば幾何の熱が消滅し、幾何の仕事が此熱に依りてなされたるかを知るを得。

二三二　無限小の斷熱的容積變化の觀察 (Observation of an infinitely small adiabatic Volume-Change.)　斷熱的壓縮に於ける溫度の變化を測り得べき一方法は次の如し。大なる一硝子球 C (二一〇圖)を孔廣き括栓 A にて閉ぢ得るものとす。先づ是より幾分空氣を抽出す。然る後括栓を閉ぢ放置して周圍の溫度を取るに至らしむ。氣壓計を用ゐて球中に在る氣體の壓を測り得。此壓が變ぜざるに至れば其の周圍の溫度を占むるに至りたるは確實なり。

第二一〇圖



今括栓 A を開けば、壓は極て速に氣壓に等しくなるべく、然る後直に再び之を閉づ。此瞬間に於て空氣の流入に依りて溫度は上昇す。括栓を閉づるによりて溫度は再び當初の値に下る、夫と共に壓も減少す。

p を氣壓とし、p_1 を最初球中に於ける壓、p_2 を其最後の壓とし、凡て毎平方糎ダインに於て表はす。然れば $p_1<p$ 並に $p_2<p$ なり。又 $p_1<p_2$ ならざるべからず、何となれば結局同じ溫度に於て球中には、最初よりも多量の空氣が存在すればなり。

又周圍の絶對溫度を T とす。最後の狀態變化に依りて壓は p より p_2 に下り、其間容積は不變なり。故に括栓を閉ぢたる瞬時に於ては溫度は $T'=(p/p_2)T$ なり。故に實驗の結果は空氣量が溫度 T 及壓 p_1 よりして斷熱的に壓 p に壓縮せられて溫度は $T'=(p/p_2)T$ に上れるなり。

空氣が圓筒內に於て喞子の下に在りて、上記の壓の變化が斷熱的に起れる場合にも亦

同様なるべし。此時に外壓に依りてなさるゝ仕事に就て又内部エネルギーの增加に就て容易に其式を見出し得。是等の相等しきよりして一方程式を得、(12) と結合して c_v 及 E を算出するに用ゐ得。

即ち斷熱的に壓縮せらるゝ氣體が 1 瓦の質量を有すと假定すれば、斷熱的壓縮の前の容積は (壓$=p_1$, 溫度$=T$)

$$RT/p_1$$

(二一九節)、又其後には (壓$=p$, 溫度$=T'=T(p/p_2)$.)

$$\frac{RT'}{p}=\frac{RT}{p_2}$$

故に容積の減少は

$$RT\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\text{..........}(14)$$

外方より喞子に働かすべき壓は絕えず同一なりとせず、唯差 $p-p_1$ 並に $p-p_2$ 即ち又容積變化が甚小なれば之等を省畧し得べく、仕事を計算するには壓が常に p_1 に等しとし得べし。斯して仕事は (14) 及 p_1 の積にして、即ち

$$RT\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)\text{..........}(15)$$

内部エネルギーに關しては其增加は溫度の上昇に依りて定められ、是が 1° にして、氣體が 1 瓦なれば c_v カロリーに等しく、即ち Ec_v 仕事單位に等しと考へざるべからず。前述の如き實驗に於ては溫度の上昇は $T'-T=T(p/p_2-1)$ 即ち内部エネルギーの增加は $Ec_vT(p/p_2-1)$ なり。是が (15) に等しき故に

$$Ec_v=R\frac{p_2-p_1}{p-p_2}$$

此方程式と (13) とよりして c_v と E とを計算し得べく、後者を除去せば

$$\frac{c_p}{c_v}=\frac{p-p_1}{p_2-p_1}\text{..........}(16)$$

前述の實驗に依りて兩比熱の比を定むるを得。

二三三　氣體の流出 (Efflux of Gases.)　一氣體が一端を可動の喞子にて閉ぢたる一器中に在りて、此喞子に或不變の外力が作用せりとす。其爲に喞子に對せる一孔よりして、不變の低壓を有する空間に氣體は流入す。此ときに氣體が如何なる速度にて孔を過ぐるか

の問題は液體に於ける同様の問題(二〇九節)と同じくエネルギーの法則を用ゐて答ふるを得べし。然れども是に於ては喞子に於ける壓の正の仕事と流出に反對する壓の負の仕事とに注意せざるべからず。且内部エネルギー並に又必要なる場合には外方よりして氣體に加へらるゝ熱量に就て考へざるべからず。孔を有せる壁が甚だ薄く且氣體が唯一小表面上固體と接觸すとせば此熱は省略するを得。然れども此場合に氣體は斷熱的に膨脹するが故に溫度は下降し、内部エネルギーは減少す。斯して流出の溫度は之に相當する運動エネルギーを唯壓の仕事よりしてのみ計算して得るものとは異れり。

此現象を玆には尙精細に觀察する能はず。唯二〇九節所述に比して同一の壓差に於ては速度は氣體の輕き程大なること、並に其速度は孔の兩側に於て液體が氣體に於けると同じ壓の下に在るときに其流出する速度よりも著しく大なることを認むるに止むべし。

第六章

熱力學的考察 (Thermodynamical Considerations.)

二三四 溫度の平衡 (Thermal Equilibrium.) 分子說を用ゐて、氣體に就て、又後に見る如く液體に就ても、多くの現象を說明し得れども、多くの場合に於て分子の運動並に其等が互に働く作用を巨細に至る迄與ふるは不可能なり。既に先に(一一二節)此狀態の下にエネルギー保存の法則が如何なる意義を有するかを示せり。今他の種類の一般なる定理に依りて、現象に就て、之を生ずる機關が知られずとも或程度まで之を了解し得るを考ふべし。

次の觀察に於ては溫度の觀念が重要なる働をなせるが故に、先づ尙一度此言葉の意味を考察すべし。數多の物體を各一定の狀態に於て取り之を硏究するに、是等各に或數を記載して、二物體の接觸に於て熱が一より他に移るか又是が如何なる方向に於て起るかゞ、此數の大さに關係する如きものとなすを得。此の如き數が二個の物體に就て同大なれば夫等が接觸するも凡て不變なり。他の凡ての場合に於ては熱は大なる數を有せる物體より小なる數を有する物體に移る。此の如く選びたる數、例ば一定量の氣體を常に同じ壓の下に順

次に種々の物體と接觸せしめたるとき、其容積が示す數も亦此の如きものとすべく、之を物體の溫度と名く。

先づ注意すべきは、此の如き數が實際に與へられ得べしと云ふこと、從て溫度に就て論じ得べしと云ふことは決して自らに明ならず、却て吾人の觀察の結果として見られざるべからざることなり。之を了解する爲に三個の物體 A, B 及 C を考へ、是等が A を B と接觸せしめたるとき、又 A を C と接觸せしめたるときにも同樣に何等熱の遷移あらざる如き狀態に在るものとす。是に就て上記の性質を有せる數を選ばんとせば、物體 B 並に物體 C に A 物體に於けると同じ數を與へざるべからざるは明なり。是等の數字は凡ての場合に於て熱の移り行くか行かざるかに就て決定的なるべき故に、B と C とが接觸するも亦互に熱を與へざること必要なり。觀察は其實際に然るを示せり、然れども、B も C も A に對しては熱を交換せずとも、B が C には熱を與ふることも亦考へ得べきなり。

故に溫度の同一或は所謂「溫度の平衡」は二個或は夫以上の物體を一四六節に示せる仕方の一にて熱を一より他に移らしめ得る樣の狀態に放置せば、自ら生ずべきことを證明せざるべからず。然れば長き或は短き時間の後凡ての溫度差は平均せしめらるゝなり。

二三五 平衡の狀態 (State of Equilibrium.) 前節に於て觀察せる系に於ては一物體より他へ熱の遷移以外には何等の變化起らずと暗に假定せり。實際には屢他の多くの現象之に加はり得。然れども經驗に依りて、是より更に變化せずと云ふ一定の終局狀態なるもの常に存在するを知る。例ば一閉器中に一氣體量を入れ、初め是が其空間の一部を占むるも、終に若干時間の後には全容積に擴がるべし。

其密度は重力の影響を省略し得ば何處も同大なるべく、又此影響著大なるときは一定の法則に從ひ密度は下より上に減じ行くべし。

初め器中に液體ありて、其上に眞空ありとすれば、液體の量小なれば悉く氣體狀態に遷移し、蒸氣として此空間に擴がるべし。然れども所與の容積に於ては一定溫度に就て唯一定量の液體が蒸發し得るのみなり。器中に尙多量の液體を入るれば液體の一部分が液體として殘り、其上の空間が一定の密度 d 及一定の壓の蒸氣を含める狀態を生ずべし。此の如く終局に液體と接觸して存在せる蒸氣を飽和蒸氣と名く。

今最後に述べたる如き狀態は初に(同じ溫度に於て)液體上に既述よりも大なる密度の蒸氣存在せるときにも亦生ずるなり。然れば蒸氣より液體に轉ずる、凝化或は液化を生じ密度が d に達するまで繼續するなり。

玆に述べたる如き種々の場合に於て終局狀態が得らるれば系は平衡に達したりと云ふ。此の如き平衡狀態の他の例としては一部分溶解せる物體、一固體が其「飽和」溶液と接觸せるもの、又水上にエーテルの一層を注げるものなどあり。最後の場合は水中に或量のエーテル並にエーテル中に幾分の水を溶解せるを示せり。

一系が種々の部分より成り、各部分が夫自身等質に、又全體或は部分的に同物質より組成せられたるときに之等を互に異れる相として區別す。

此の如き平衡狀態は、分子說に從へば力學に於て論ずる普通の平衡とは種類を異にせり。即ち假令吾人に依りて知覺せらるゝ物體の部分は同一の組成及性質を保つとも、個々の分子を見るを得る觀察

者は甚だ複雜なる運動現象の目擊者となるべきなり。此諸變化にも拘らず全系が不變の一狀態に在るは物體を組成せる分子の非常に多數なることに歸すべきなり。

例ば二銅片 A 及 B を融けつゝある氷の中に或時間置きたる後に互に接觸せしめたりと考ふ。一定溫度に在る氣體の種々の微部分が不同の速度を有する如く(二二二節)、銅に於ても亦然るべし。接觸面の一點に於て A の一分子が是と接觸し來る B の微部分よりも遙に大なる速度を有し、或他の點に於ては恰も其反對なる如きこと極て可能なり。第一の場所に於ては若干の熱が A より B に、又第二に於ては B より A に移るべし。

全體として何れの方向にも熱が遷移せざれは、限界面に沿ては極て種々の狀態が存在すとも、而も平均に於ては一物體に於ける速度が他のものと同大なりと云ふに歸すべし。

又所與の容積に於て氣體が一樣に配布するは微部分の非常に多數なるによりてのみ可能なり。一器中に 100 個より多からざる分子が彼方此方に動くとせば、各半に於て精密に 50 個の分子存在せりとする能はざるべし。

液體の蒸發は又若干の分子、特に最大の速度を有するものが液體よりして逸出し、其上の空間內に氣體分子として動けるものなりと考へ得べし。若干の微部分は絕えず之をなすべく、若し何等か他の狀態生せざれば蒸氣の量は絕えず增加すべし。即ち蒸氣の分子は其運動によりて再び液體中に來り、其引力によりて固定せられ得るなり。是は既に存在せる蒸氣が多きに從ひ、益多く起り得。終に液體を去ると同數の微部分が之に復歸するに至りて蒸氣は液體と平衡

に在り(二二二節參照)。

二個の相の間の平衡も亦同樣の仕方にて考へ得。

二三六 平衡狀態の特徴 (Characteristics of the State of Equilibrium.) 物質の密度が各點に就て如何樣に變ずとも、又互に接せる相が如何樣に異るとも、常に系の全部分に於て溫度は同高なるべし。

又物質の一部分が他部分に關する相對的可視の運動は凡て摩擦に依りて消滅せしめらるゝを知る。此の如き系が靜止せる壁にて包まるれば平衡狀態に於ては全く何等可視の運動在らざるべし。

二三七 斷熱的並に等溫的變化 (Adiabatic and Isothermal Changes.) 一系が夫自身に放置せらると云ふ事の意味は、勿論是に於て系には熱が導入せられず又取出されざるを云ひ、例ば或全く熱を通過せざる壁に依りて包まれざるべからざるを云ふなり。此の如きときに尙起り得る變化は斷熱的に經過す(二二八節)。

系は此場合に於て一の平衡狀態を占むるのみならず、又溫度が不變に保たるゝ、即ち變化が等溫的なる場合にも亦然るべし。確實に此狀態を得るには、系を一大熱容量の物體、即ち若干量の熱を系に與へ又は夫より受入るとも、其溫度を著しく變化せざる如き物體と接觸せしめざるべからず。此の如き物體を熱の貯蓄所と名くべし。

二三八 變化の起る方向 (Direction, in which the Changes take place.) 物體の一系が始に平衡狀態に在らずして終に定常狀態に達せるは、自身にて最初の狀態に復歸せず。換言せば受けたる諸變化は逆の方向に起る能はず。

例ば熱傳導又は熱幅射に於ては溫度の差は決して增大せず。實驗

に依れば低溫度の物體、例へば氷の一片も若干の熱を輻射し、夫よりして高溫度の一物體も若干の熱を受取り得。然れども夫が此仕方にて冷物體より受くる熱量は輻射に依りて之に與ふる熱量よりも常に小なるなり。

氣體は其所與容積內に一樣に分配せらる。然れども決して夫自身にて空間の一部分に於て他部分よりも多く集積することなく、又二氣體の混合が夫自身にて一成分が他成分と分離することなし。

一系が平衡狀態に近くときに屢起る變化は「力學的」エネルギーが熱に轉ずることなり、例ば摩擦に依れる如きなり。力學的エネルギーとは可視運動の運動エネルギー並に可視質量に作用せる諸力に基く位置エネルギーを云ふ。

逆の變化は熱を此の如き力學的エネルギーに轉化するに在り、或は換言せば、熱に依りて力學的(機械的)仕事をなすなり。此轉化は可能なり、然れども是は前者よりも一層或所定の條件に拘束せられ、又之が爲には適當なる工夫を要するなり。

此の如きは就中分子運動の不規則なることに基けり。一物體が全體として進行すれば、之に例ば絲を附するによりて一重量を或高さに上げ得べし(一一六節)。同樣に、一水流の凡ての微部分が同一方向に動けるものゝ運動エネルギーを利用するを得、例ば水を水車の車翼に作用せしめ得べし。然れども水中に無數の小渦流存在せば、之をして仕事をなさしむるは既に困難なるべし。凡ての方向に飛行せる氣體分子の運動エネルギーを悉く機械的仕事に用ゐるは全然不可能なり、何となれば吾人は個々の分子に就て取扱ふを得ず、又各分子に就て其運動方向に直角なる小面積に對して壓せしむる樣なすを

得ざればなり。

分子運動の內部エネルギーは物體可視部分全體として有するエネルギーよりも遙に近づき易からず、夫にも拘らず少くも或程度までは利用するを得。次に直に述ぶる如く、是は特に異れる溫度の物體を用ゐ得る場合に然り。

二三九 力學的エネルギーに熱の轉化 (Transformation of Heat in Mechanical Energy.) 今工業的詳細の點に入らずして蒸汽機關並に熱空氣機關に於て如何樣に熱が機械的エネルギーに轉ずるかを明にすべし。

先づ注意するは是等「熱機關」は、望む時間、絕えざる仕事をなすに用ゐ得らるゝこと、並に此目的に用ゐる物體(「作業物體」)は圓筒內に往復せる喞子を壓し、(註)其運動が節動輪に傳はることなり。現象が完全に週期的にして又絕えず此作業物體の同質量が用ゐらると假定すべし。喞子が一回の往復をなす毎に、是等は再び同一狀態に置かれざるべからず、即ち是は變化の一循環を經過するものならざるべからず。

簡單の爲に此物體は喞子の一側とのみ接觸し、他側に於ては氣壓が作用せりと假定す。後者は一回の往復運動に於て凡てを總和して何の仕事をもなさず。

作業物體は喞子を外方に動かせるとき、正の仕事をなし、是が復歸せるとき負の仕事をなす。換言すれば、其作用せる壓に依りて、第一の場合に於ては節動輪の廻轉が加速せられ、此エネルギーは喞子を

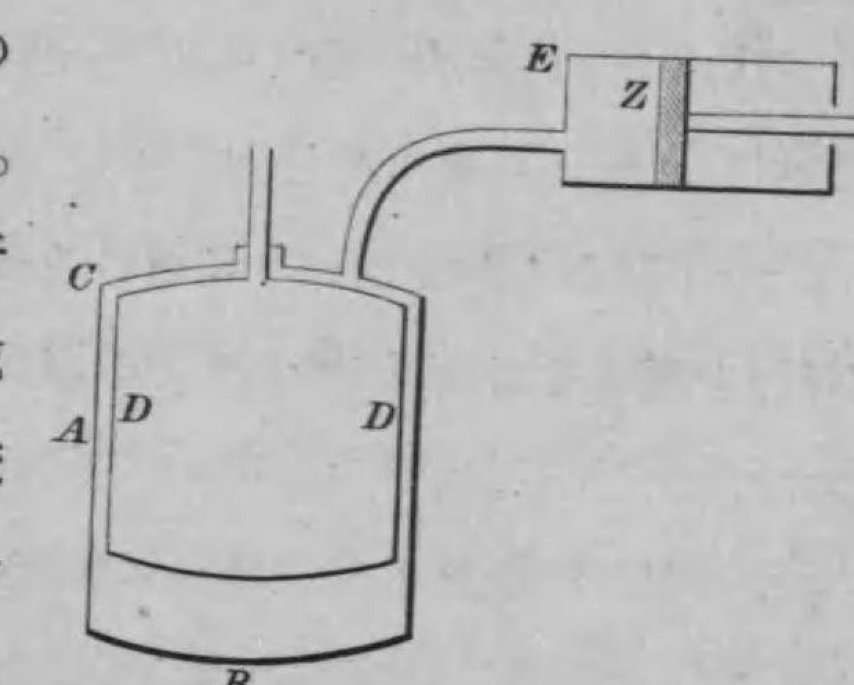
(註) ド、ラヴァールの蒸汽タービンの如き、蒸汽流線が大速度にて車翼に衝撃する機械は今考察の外に置く。

再び內方に動かすに與へられざるべからず。

作業物體の一週期間の全仕事が正なる爲には、喞子が外方へ動ける間に、是が復歸せるときよりも大なる壓を作用せざるべからず。是は循環の兩半に於て物體が異なる溫度を有すれば可能なり。

二四〇 熱空氣機關 (Hot Air Engines.) 例として、交互に冷及熱の空氣が用ゐらるゝ最簡單なる機關の一の構造を論ずべし。空氣鑵 A (二一一圖)が下方に B に於て熱せられ、上方に C に於て環狀に之を包める外套中に冷水在りて之を低溫度に保つ。氣鑵の中には物體 D あり、之を「換置體」と名くべし。其周圍に若干の餘地ありて、上下に動き得。又其とき上方或は下方に若干の餘地を殘し、空氣を以て充たす。「換置體」は此空氣を交互に A の加熱並に冷却部分に送る目的を有し、是に依りて空氣は高き或は低き溫度を占む。

第二一一圖



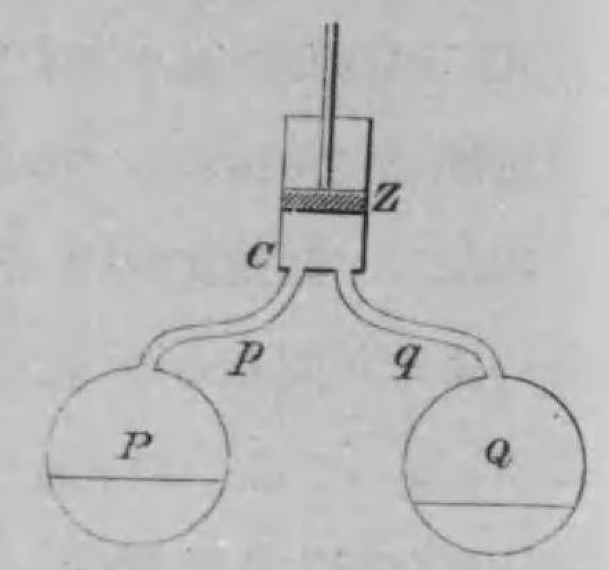
此の如くして生ずる壓の變化は氣鑵と連絡せる圓筒 E 內に喞子 Z を往復運動せしむるに用ゐらる。換置體が高めらるれば喞子は外方に、又低くなれば內方に動く。

喞子は普通の仕方にて節動輪の軸に連結せられ、換置體は適當なる瞬時に於て其運動を此軸より得。軸との連結の詳細は玆に記さず。

二四一 蒸汽機關 (Steam Engine.) 第二例としては二一二圖に略圖にて示せる蒸汽機關を擧ぐべし。C は喞子 Z を有せる圓筒、

P は汽鑵、Q は冷却器なり、即ち之を包める冷水に依りて或低溫度 T_2 に保たるゝ空間なり。汽鑵内は高き溫度 T_1 に在り。C は P 及 Q と管 p 及 q に依り連結せらる。共に隨意に開閉せられ得。

第二一二圖



飽和蒸氣(二三五節)の張力は溫度の上昇と共に增加するが故に、P に於ては高き、又 Q に於ては低き蒸氣壓あり。故に蒸氣をして仕事をなさしむるには喞子が上れるときに p 管を開き、下れるときに q 管を開くべし。然れば實際に二個の場合に於て Z の下面に異れる壓作用し、上昇のときは溫度 T_1 に於ける飽和蒸氣の壓 p_1、下降のとき溫度 T_2 に於ける壓 p_2 作用せり。即ち圓筒が冷却器と連結せば蒸氣は此中に流入し一部分液化し、即ち壓は p_2 となる。

今冷却器内に蒸氣より生ぜる水が汽鑵に給水として用ゐらると考ふれば、汽鑵は絶えず同量の水にて作用し得、水は變化の一循環をなすべし。

二四二　一氣體量の諸變化の圖式的表示 (Graphical Representation of the Changes of a Quantity of Gas.)　二四〇節の熱空氣機關に於ける現象は稍複雜なるが故に、今後の觀察には氣體が或特別に簡單なる變化の一循環をなせる理想的一機關に限るべし。

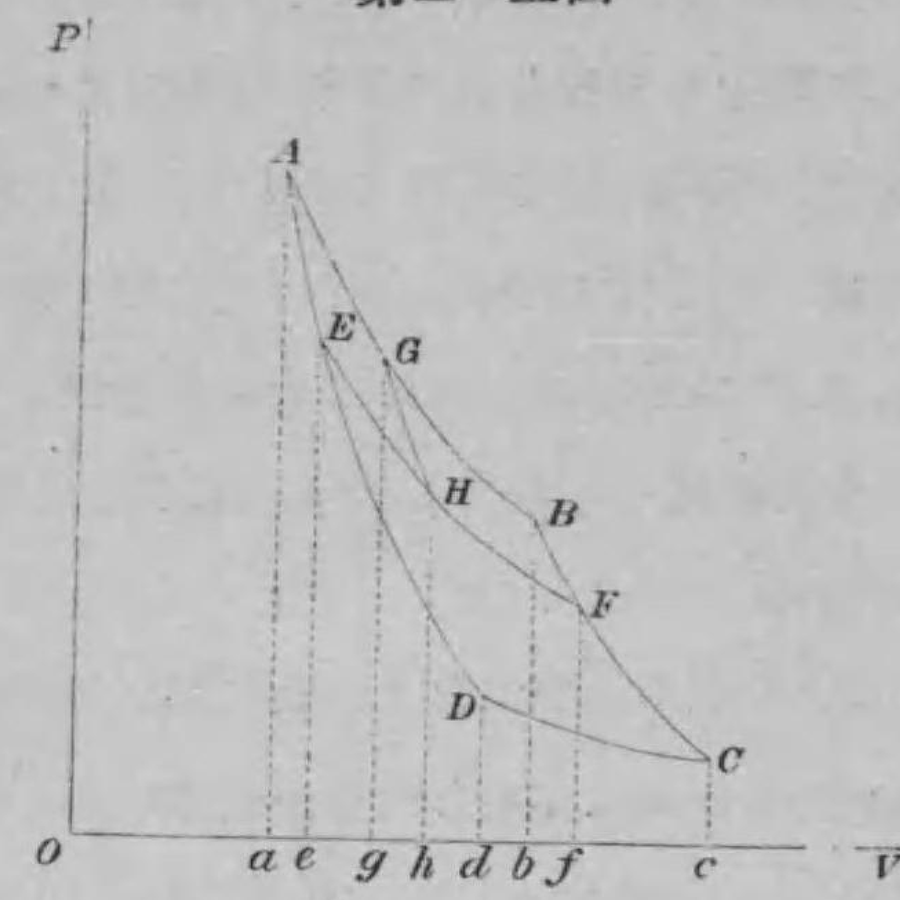
氣體量が平衡狀態に在りて、溫度 T を有し、壓 p 以外の何等の外力に働かれずと考ふべし。容積を v とし、簡單の爲に氣體は一圓筒内可動の喞子の下に在りとす。今此喞子が急速に外方に動けば、夫が氣體の壓に依れりとも又或外力に依れりとも、玆に極て複雜なる狀態を生ずべし。氣體は著大なる流速度を得、而も是が氣體量の凡ての部分に於て同樣なりとする能はざるなり。又其他に密度並に溫度に於て種々差別あるべし。壁が熱を通過せしめざれば氣體は冷却す、冷却は其一部分に於て他部分よりも尙多かるべし。今圓筒の壁と接觸せる熱の貯蓄所に依りて溫度を不變に保つとせば、急速の變化に依りては壁より若干の距離に於ては冷却を生ずべし。約言すれば、喞子の急速なる移動の間に氣體は每瞬時に於て一の平衡狀態、即ち永久に存續し得る一狀態に在りと云ふを得ず。

是より生ずる複雜を避くる爲に喞子の移動は上に假定せる如く外方にも、又内方にも、極て緩漫に行はると假定すべし。嚴密に言へば氣體が常に平衡狀態より少しく異なれりとも、此の如き緩漫なる運動に於ては其相違を省略し得るは明なり。即ち吾人の觀察する變化は漸次に推移する諸平衡狀態の連續より成れり。普通之を可逆的變化と名く、相續ける平衡狀態の一順を一方向にも又他方向にも經過し得べければなり。是等の點に就ては尙後に論ずべし。

氣體の壓 p、絶對溫度 T 及容積 v の間に常に二一九節に述べたる關係が存在せる故に、每瞬時に於ける狀態は是等三量の二個を與ふれば定めらる。今此中容積及壓を選び、氣體の諸變化を了解し易き仕方に圖式的に表示すべし。

互に直角なる二坐標軸 OV 及 OP (二一三圖) を假定し、一點の橫座標にて容積を、縱座標にて壓を表はすべし。故に例ば Oa が容積を、又 aA が壓を與ふれば、A 點が見出さる。然れば此點は其

第二一三圖



位置に依りて氣體の狀態を示すべし。狀態が變ずれば每瞬時に就て又或他の點を得。例ば若干時間の後に容積が og 並に壓が gG になること可能なり、然れば G 點は其時の氣體の狀態を與ふ。明に氣體の各變化は一定の形の一線、例ば AB 線の如きに相當すべし。

斯して簡單に「狀態 A」及「變化 AB」と記載し得。

特に重要なるは等溫的並に斷熱的諸變化を表示する線なり。又通常之等を等溫線並に斷熱線と云ふ。前者には例ば AB, EF 及 DC の如きが屬す、是等の線は右方に於て横座標に近かざるべからざるは明なり。

各等溫線は一定の溫度に相當す。氣體が此線に依りて表出せらるゝ如き變化を受くるには此溫度に在る熱貯蓄所が必要なり。又等溫線の二方向何れにも變化が經過し得るは容易に知り得。

斷熱線の例は AD, GH 及 BC にあり。是等も亦兩側何れにも經過し得べし。變化が膨脹の方向即ち圖上右方に向ひ起るとせば、溫度は下降す。此場合壓は不變溫度に於けるよりも一層多く減少す。故に斷熱線は右方に等溫線よりも一層速に下降す。

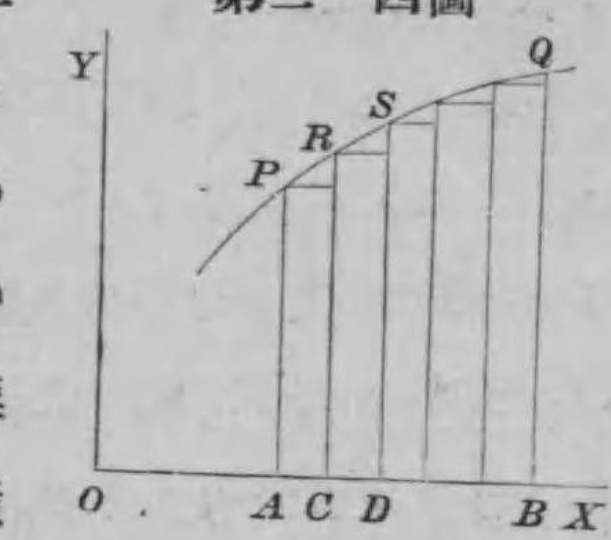
平面內問題に入る部分の各點を過ぎ斷熱線も、又等溫線も引き得

るは更に說明を待たず。

二四三　仕事の圖式的表示 (Graphical Representation of Work.) 氣體の膨脹の間に壓が不變なれば、其の爲す仕事は每面積單位に於ける壓を容積の增加にて乘じて（二〇七節 b）見出さる。壓が變ずれば、全膨脹を無限小の部分に分つを要す（一一三節 d 參照）、是等無限小の容積變化の一つの間には壓は不變として認め得べく、故に上記の規則を應用し得べし。

此仕方に依りて得る結果は圖式的表示を用ゐれば極て簡單に之を示し得べし。氣體量の變化を PQ 線（二一四圖）にて表はし、即ち容積が OA より OB に增加すとせば、全膨脹を上述の如く分つと云ふは、CD の如き無限小の部分に AB を分つに在り。更に縱座標にて每面積單位の壓の値を表はし、容積の增加 CD の間の壓を不變として $=CR$ とせば、求むる仕事の一部分は $CD \cdot CR$ なり。此積の大さは CD 上に立てたる矩形の面積にて表出せられ、即ち爲されたる仕事全體は圖中に畫ける凡ての矩形の和の極限値にて表はさる、即ち $PQBA$ の面積にして、上側に於て曲線 PQ にて境せらる。

第二一四圖



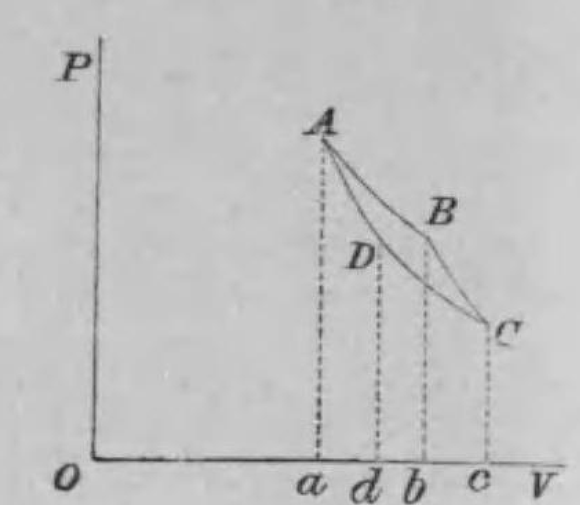
QP に依りて表はさるゝ壓縮に於ける氣體の仕事は上述の面積の、其符號を負にしたるものに等しきは容易に知るを得。

二四四　二等溫及二斷熱變化より成れる循環過程 (Cyclic Process consisting of two isothermal and two adiabatic Changes.) 氣體が最初の狀態に復歸すれば、容積及壓を坐標にて示せる點は再び其最

初の位置を占めざるべからず。故に變化の一循環過程は一の閉線に相當す。逆に、任意に選べる此種の一線に相當せる循環過程も亦常に思考し得。

二四二節の初に記せる簡單なる循環過程は一の曲線四角形に（二一五圖）よりて表はさる。此四角形の二對邊 AB 及 CD は等溫線にして、他の二邊 BC 及 AD は斷熱線なり。循環過程が $ABCD$ の方向に起れりと假定し、AB 及 CD 二線に屬せる絶對溫度を T_1 及 T_2 にて記す。是に用ゐたる熱貯蓄所を R_1 及 R_2 と名く。

第二一五圖



前述凡てに依りて今此氣體量に於て次の如き諸變化が起らざるべからざるは明なり。1, 容積 oa より容積 ob に至る膨脹、此間に氣體は貯蓄所 R_1 に依りて高溫度 T_1 に保たる。2, 此貯蓄所との連絡を隔絶して容積 Oc に至る斷熱的膨脹、是に依りて溫度は第二の熱貯蓄所 R_2 の溫度に下る。3, 氣體が此貯蓄所と接觸しつゝ容積 Od に至れる壓縮、並に 4, 斷熱的壓縮 da, 是に依りて再び最初の容積且又其溫度に達したりとす。是等の變化は實際の熱空氣機關に於ても貯蓄所 R_1 を火室とし、貯蓄所 R_2 を冷却器として働かしめしときに起れるものと考へ得。唧子が其下に氣體を有し普通の仕方にて一節動輪と連結し、如何樣かの方法にて節動輪軸の廻轉に依りて適當の瞬時に氣體を是等の貯蓄所と或は連結し或は隔絶する樣になし得べきなり。

前節所述に依りて此の循環過程に於ては氣體の爲したる仕事は

$$面積\ ABba + 面積\ BCcb - 面積\ CDdc - 面積\ DAad$$

即ち圖上 $ABCD$ の面積に依りて表はさる。

然れども氣體は終に最初の狀態に復歸せるが故に、此仕事は唯之に相當せる熱量を費せるに依りてのみ爲され得たるなり。今膨脹 AB に於て貯蓄所 R_1 は或熱量を與ふ、之を Q_1 と名くべし。壓縮 CD に於ては熱量 Q_2 を貯蓄所 R_2 に與ふ。即ち $Q_1 > Q_2$ ならざるべからず。熱量 $Q_1 - Q_2$ は消滅せり. 是が上に計算せる力學的仕事を爲すに用ゐられしなり。

二四五 等溫的循環過程 (Isothermal Cyclic Prccess.) 前節に論じたる循環過程に於て或力學的仕事を爲すことは作業物體が其の變化の經過の間に二個の不同溫度に在ることと最密接に關係せるを見たり。現象の研究に依り、是は實際に循環過程に依りて仕事を爲すに必要なる條件なることを識認するに至れり。即ち作業物體が其全循環の間に溫度不變に保たるれば、凡てを總和せば是に依りて何等正の仕事を爲し能はざるを知るなり。

此の如き等溫的循環過程は氣體に於ては本來可能ならず。即ち其溫度が全く變化せざれば、等溫線上或長さを進み同一線上に再び復歸する他に何等爲し能はず。之を「循環過程」とは名くるを得ず、今是に於て全仕事は零に等しきは明なり。

之に反して、狀態に就て一層大なる差別を有し得べき物體は此の如き等溫的循環過程を經過し得べし。

例として一固體の棒の延長し又捩り得べきものを用ゐ得。此の如き物體を初め延長し、然る後長さを不變にして或角度丈捩り、捩れが存續せる間に元の長さに壓縮せしめ、終に其の捩れを戻さしめたり

とすれば、實際に一循環過程をなしたるものにして、之を不變溫度に於て十分に行ふを得。勿論是に於ては一の熱貯蓄所を必要とす、然れども周圍の空氣を以て屡又此の如きものとして考ふるを得。

此の如き等溫的循環過程は又多くの他の物體に於ても思考し得べし、今是が平衡狀態の一連續より成り、即ち每瞬時に於て物體の狀態は是に作用せる諸外力が絕えず存在せるときに在るものと同一なりと云ふ假定を用ゐて尙精密に定むべし。是に就ては唯だ變化が甚緩漫に進行し、即ち可視の運動に何等著大の運動エネルギーなしとすること必要なるのみなり。

例ば棒の上記の四變化は延長の力並に振れを起す偶力を適當の仕方にて甚緩漫に變ずることに依りて實現し得。

循環過程の或部分の間には作業物體は正の仕事も、又は負の仕事も爲すを得。例ば此棒に於ては壓縮せられ又は振りもどさるゝときには仕事は正にして、其が膨脹せられ又は振れの角度を增せるときは負なり。

上述の定理は一物體の全仕事は決して正なるを得ざることを示せり。

又一循環過程に於て、之を逆の方向に經過し得べきものに於て、即ち諸平衡狀態の一連續に關する凡ての場合に於ては、仕事は負の値を有し得ざることは容易に知るを得。物體が循環過程の一方向に於て負の仕事をなせば、反對の方向に於ては仕事は正なるべし、此の如きは定理と矛盾せり。

故に次の結論に至る、凡ての可逆的等溫循環過程にありては全仕事は零に等し。

此定理の中にエネルギー保存の法則よりして得られざる或者を表はせるを知らんとせば、等溫的循環過程に於ては常に一の熱貯蓄所存在せること、並に恐らく是に基ける熱に依りて仕事がなされ得たることを考ふべし。

エネルギー保存の法則よりしては唯或斷熱的の循環過程に於ける仕事が零に等しと云ふことを演繹し得るのみなり。

二四六 自由エネルギー (Free Energy.) 二三八節の終の注意に依りて、種々の形のエネルギーに就て吾人の利用の度の不同なることに依り物體の一系に於て現在せるエネルギー並に所與の狀態の下に用ゐ得らるゝエネルギーを區別し得るなり。

後者を如何にして測るかは先づ簡單なる場合に就て之を研究すべし。一氣體量を考へ、其が一熱貯蓄所に依りて不變溫度に於て保たるとす、然れば其の受け得る凡ての變化は等溫的なり。其他是等の變化は極て緩漫に、即ち可逆的膨脹及收縮より成ると考ふべし。

膨脹に依りて仕事がなされ得べき故に、氣體と熱貯蓄所とより成れる系に於ては或量のエネルギーが用ゐ得らるとすべし。是に就て一定の數を與へ得る爲には此膨脹を如何許なさしむべきかを一定す(一二六節參照)。即ち或一定の大さの容積 V を選び、氣體が此容積に至るまで膨脹せるときになし得べき仕事を考ふ。

「利用し得べきエネルギー」なる語を、一定の條件の下に用ゐ得る語、自由エネルギーなるものに依りて置換すれば次の如く云得。

自由エネルギーは、氣體が等溫的に又可逆的の仕方に其が實際に占むる容積よりして一定の大容積 V に至るまで膨脹せるときに氣體がなし得る仕事に依りて測らる。

此定義よりして直に出づるは、

a) 自由エネルギーは氣體が壓縮せられて其容積減少する程大なり。

b) 氣體が實際に膨脹し、然かも容積 V に至らざれば、自由エネルギーは爲せる仕事に等しき量丈減ず。

c) 逆に、氣體の壓縮には自由エネルギーの增加に等しき丈の仕事費さる。

自由エネルギーが氣體内に存在せるエネルギーと少しく異れるは、後者は溫度が不變なる間は如何なる容積に於ても同大なること(二二九節)、又等溫的膨脹に於ける仕事は熱貯蓄所に依りて費さるゝものなるを考ふれば直に知るを得。又其氣體の自由エネルギーと云ふことを得、然れども是に於ては所與の熱貯蓄所に依りて仕事をなす可能性は倘多少膨脹し得る其氣體の存在に基くと云ふ以上何等云ふを得ず。

他の諸物體又は物體の系に於ても玆に論じたる氣體と同一事が適用す。又溫度は熱貯蓄所に依りて不變に保たると假定し、諸平衡狀態の連續に依りて得らるゝ可逆的變化に考を限るべし。今系が觀察せる狀態 S よりして或「零狀態」N に推移せるに依りて仕事 ψ をなし得れば、此系は狀態 S に於て自由エネルギー ψ を有すと云ふ。此系が實際に S 狀態より或他の S' 狀態に推移して或仕事をなしたらば、自由エネルギーは此仕事に等しき量丈減少せり。之に反して、系になせる仕事に相當して、自由エネルギーは其仕事に等しき丈增加すべし。

次の仕方にて所與の定義を說明し、並に前述の定理を證明すべし。

一系が二個の異れる路(共に等溫的且つ可逆的)に依りて S 狀態より S' 狀態に移るを得て、又其の一の路に於て仕事 A_1 を、他の路に於て仕事 A_2 をなしたりと假定すべし。此系を第一の路に依りて S 狀態より S' 狀態に移らしめ得べく、第二の路に依りて之を S 狀態に戻し得べし。然れば仕事は A_1-A_2 なり。然れども(二四五節)等溫的可逆的循環過程に於ては仕事は零に等しきを知れり。從て $A_1=A_2$ なり、即ち仕事は唯最初の狀態と終局の狀態とにのみ關係す。

此の如きが故に一狀態 S に於ける自由エネルギーは系が零狀態 N に移ることに於てなし得べき仕事に依りて測り得べく、此移行きが如何なる路に於て起るかを示すを要せざるなり。

又二個の狀態 S 及 S' を考へ、是等に於て自由エネルギーが夫々 ψ 及 ψ' の値を有せりとす。系が S より S' に移りて幾何の仕事をなせるかを知るのみには、此移行きを任意の路に於て起れりとし得べし。系が最初零狀態 N に在りて、次に終局狀態 S' に移りたりと考ふ。S より N に移れるとき仕事 ψ をなす、N より S' に移るには仕事 $-\psi'$ をなすべし。即ち S より S' に移るに仕事は $A=\psi-\psi'$ なり。

此結果は $\psi'>\psi$ 從て A が負なるときにも適用す。此場合には吾人が此系になす仕事 $-A$ は自由エネルギーの增加に等しと云ひ得。

吾人は物體全體或は其可視の部分の運動に基ける運動エネルギーを悉く用ゐ得、重力の如き力に相當せる位置エネルギーも亦同樣なるが故に、是等エネルギーの二形を自由エネルギーに算入すべし。即ち一般に自由エネルギーは三部より成る。其二個は上述のものにして、此他、物體が可視の運動なく又上記の諸力より離れて、實際に其の存在せる狀態に在るときに有し得る自由エネルギーあり。

二四七 可逆的並に不可逆的現象における自由エネルギーの諸變化 (Changes of Free Energy in Reversible and Irreversible Phenomena.) *a*) 彈性的固體を例として觀察し、特に、一端を固定せる棒(一二四圖、249 頁)に就て論ずべし。棒の重量を省略し得、又熱貯蓄