Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 6

Es seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung

$$p\colon Y \longrightarrow X$$

heißt *Überlagerung*, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und eine Familie diskreter topologischer Räume F_i, $i \in I$, derart gibt, dass $p^{-1}(U_i)$ homöomorph zu $U_i \times F_i$ (versehen mit der Produkttopologie) ist, wobei die Homöomorphien mit den Abbildungen nach U_i verträglich sind.

Aufgabe 6.1. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1,\, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\},\, z \longmapsto \exp z,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 6.3. Zeige, dass es bei einer Überlagerung $p\colon Y \rightarrow X$ zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ und einen stetigen Schnitt $s\colon U \rightarrow p^{-1}(U)$ zu p gibt.

Aufgabe 6.4. Es seien F und H kommutative topologische Gruppen und es sei $G = F \times H$ ihre Produktgruppe (versehen mit der Produkttopologie) und es sei

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Sequenz. Zeige, dass zu jedem topologischen Raum X eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-, F) \longrightarrow C^0(-, G) \longrightarrow C^0(-, H) \longrightarrow 0$$

vorliegt, für die die globale Auswertung hinten stets surjektiv ist.

Aufgabe 6.5. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, $Q \in Y$ ein Punkt und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Zeige, dass der Halm der vorgeschobenen Prägarbe $\varphi_* \mathcal{F}$ im Punkt Q gleich

$$\operatorname{colim}_{Q \in V} \mathcal{F}\big(\varphi^{-1}(V)\big) = \operatorname{colim}_{\{U \subseteq X \mid \text{ es gibt } Q \in V \text{ mit } \varphi^{-1}(V) \subseteq U\}} \mathcal{F}(U)$$

ist.

Aufgabe 6.6. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ einer stetige Abbildung und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Zeige, dass der Halm der zurückgezogenen Garbe in einem Punkt $P \in X$ gleich dem Halm von $\mathcal{G}$ in $\varphi(P)$ ist.

Aufgabe 6.7. Es sei X eine Menge mit zwei Topologien τ_1 und τ_2 derart, dass die Identität

$$\varphi\colon X_1 = (X, \tau_1) \longrightarrow X_2 = (X, \tau_2)$$

stetig ist, die erste Topologie ist also eine Verfeinerung der zweiten Topologie. Es sei $\mathcal{F}_1$ eine Garbe auf X_1 und $\mathcal{F}_2$ eine Garbe auf X_2. Bestimme $\varphi_* \mathcal{F}_1$ und $\varphi^{-1} \mathcal{F}_2$. Wie sieht es aus, wenn τ_1 die diskrete Topologie und τ_2 die Klumpentopologie ist.

Aufgabe 6.8. Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi\colon X \to \{P\}$ die konstante Abbildung. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Bestimme $\varphi_* \mathcal{F}$.

Aufgabe 6.9. Es sei X ein topologischer Raum und $P \in X$ ein Punkt mit der zugehörigen Abbildung $i\colon \{P\} \to X$. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf $\{P\}$. Beschreibe die Garbe $i_* \mathcal{F}$ auf den offenen Mengen von X. Wie sehen die Halme von $i_* \mathcal{F}$ aus, wenn P ein abgeschlossener Punkt ist?

Solche Garben nennt man *Wolkenkratzergarbe*.

Aufgabe 6.10. Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi\colon X \to \{P\}$ die konstante Abbildung. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf $\{P\}$. Bestimme $\varphi^{-1} \mathcal{G}$.

Aufgabe 6.11. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y und es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeige, dass es einen natürlichen Garbenmorphismen

$$\varphi^{-1}(\varphi_* \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$$

auf X gibt.

Aufgabe 6.12. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y und es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Zeige, dass es einen natürlichen Garbenmorphismen

$$\mathcal{G} \longrightarrow \varphi_*(\varphi^{-1}\mathcal{G})$$

auf Y gibt.

Aufgabe 6.13. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y. Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y. Zeige, dass es eine natürliche Bijektion zwischen den Garbenmorphismen

$$\psi\colon \varphi^{-1}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$$

auf X und den Garbenmorphismen

$$\theta\colon \mathcal{G} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{F}$$

auf Y gibt.

Aufgabe 6.14. Es seien L_1, L_2, M Mengen und

$$p_1\colon L_1 \longrightarrow M$$

und

$$p_2\colon L_2 \longrightarrow M$$

Abbildungen. Wir definieren

$$L_1 \times_M L_2 := \{(x_1, x_2) \mid \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)\} \subseteq L_1 \times L_2.$$

(1) Zeige, dass es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L_1 \times_M L_2 & \longrightarrow & L_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & \longrightarrow & M \end{array}$$

gibt.

(2) Es sei T eine weitere Menge und $\psi_1\colon T \to L_1$ und $\psi_2\colon T \to L_2$ Abbildungen mit

$$p_1 \circ \psi_1 = p_2 \circ \psi_2.$$

Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi\colon T \longrightarrow L_1 \times_M L_2$$

derart gibt, dass die Projektionen auf L_1 bzw. L_2 mit ψ_1, ψ_2 übereinstimmen.

Aufgabe 6.15. Es seien L_1, L_2, M topologische Räume und

$$p_1\colon L_1 \longrightarrow M$$

und

$$p_2\colon L_2 \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen. Wir definieren

$$L_1 \times_M L_2 := \{(x_1, x_2) \mid \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)\} \subseteq L_1 \times L_2$$

mit der induzierten Topologie.

(1) Zeige, dass es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L_1 \times_M L_2 & \longrightarrow & L_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & \longrightarrow & M \end{array}$$

mit stetigen Abbildungen gibt.

(2) Es sei T eine weiterer topologischer Raum und $\psi_1\colon T \to L_1$ und $\psi_2\colon T \to L_2$ stetige Abbildungen mit

$$p_1 \circ \psi_1 = p_2 \circ \psi_2.$$

Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung

$$\psi\colon T \longrightarrow L_1 \times_M L_2$$

derart gibt, dass die Projektionen auf L_1 bzw. L_2 mit ψ_1, ψ_2 übereinstimmen.

Aufgabe 6.16. Es seien X und Y topologische Räume und $\varphi\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Es sei $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel über X. Zeige, dass $Y \times_X V$ (siehe Aufgabe 6.15) ein Vektorbündel über Y ist.

Aufgabe 6.17. Es sei X ein topologischer Raum und seien $p\colon V \to X$ und $q\colon W \to X$ Vektorbündel über X. Zeige, dass $V \times_X W$ (siehe Aufgabe 6.15) ein Vektorbündel über X ist, das mit der direkten Summe von Vektorbündeln übereinstimmt.

Aufgabe 6.18. Es seien X, Y und Z topologische Räume und seien $\varphi\colon Y \to X$ und $p\colon Z \to X$ stetige Abbildungen. Es sei

$$p_Y\colon Y \times_X Z \longrightarrow Y.$$

Zeige, dass ein stetiger Schnitt $s\colon Y \to Y \times_X Z$ das gleiche ist wie eine stetige Abbildung $t\colon Y \to Z$ mit $p \circ t = \varphi$.

Aufgabe 6.19. Es seien X, Y und Z topologische Räume und seien $\varphi\colon Y \to X$ und $p\colon Z \to X$ stetige Abbildungen. Es sei $p_Y\colon Y \times_X Z \to Y$. Es sei $\mathcal{G}$ die Garbe der stetigen Schnitte zu p auf X. Zeige, dass der Rückzug $\varphi^*\mathcal{G}$ mit der Garbe der Schnitte zu p_Y übereinstimmt.

Abbildungsverzeichnis