

# Grundkurs Mathematik I

Prof. Dr. Holger Brenner  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2016/2017

## INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	10
1. Vorlesung - Einführung	11
1.1. Rechengesetze für natürliche Zahlen	11
1.2. Beispiel: Die binomischen Formeln	13
1.3. Die Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen	17
1. Arbeitsblatt	17
1.1. Die Pausenaufgabe	17
1.2. Übungsaufgaben	17
1.3. Aufgaben zum Abgeben	19
2. Vorlesung - Mathematisches Argumentieren	20
2.1. Mathematisches Argumentieren	20
2.2. Geldscheine und Münzen	22
2. Arbeitsblatt	30
2.1. Die Pausenaufgabe	30
2.2. Übungsaufgaben	30
2.3. Aufgaben zum Abgeben	33
3. Vorlesung - Aussagen	34
3.1. Aussagen	34
3.2. Verknüpfungen von Aussagen	35
3.3. Aussagenvariablen und Junktoren	37
3.4. Tautologien	40
3. Arbeitsblatt	42
3.1. Die Pausenaufgabe	42
3.2. Übungsaufgaben	43
3.3. Aufgaben zum Abgeben	47
4. Vorlesung - Quantoren und Mengen	48
4.1. Quantoren	48
4.2. Mengen	51
4.3. Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen	52
4.4. Mengenoperationen	53
4.5. Mengendiagramme	55

4. Arbeitsblatt	57
4.1. Die Pausenaufgabe	57
4.2. Übungsaufgaben	57
4.3. Aufgaben zum Abgeben	61
5. Vorlesung - Zählen und Zählen	62
5.1. Zählen	62
5.2. Zählen ohne Zahlen	65
5.3. Zählen von endlichen Mengen	66
5. Arbeitsblatt	71
5.1. Die Pausenaufgabe	71
5.2. Übungsaufgaben	71
5.3. Aufgaben zum Abgeben	74
6. Vorlesung - Abbildungen	75
6.1. Darstellungsmöglichkeiten für Abbildungen	75
6.2. Die Hintereinanderschaltung von Abbildungen	77
6.3. Die Umkehrabbildung	79
6.4. Die Wohldefiniertheit der Anzahl	80
6.5. Zählen von Prozessen	82
6. Arbeitsblatt	83
6.1. Die Pausenaufgabe	83
6.2. Übungsaufgaben	83
6.3. Aufgaben zum Abgeben	86
7. Vorlesung - Dedekind-Peano-Axiome und Induktion	88
7.1. Die Dedekind-Peano-Axiome	88
7.2. Isomorphieprinzip	90
7.3. Das Induktionsprinzip für Aussagen	92
7. Arbeitsblatt	95
7.1. Die Pausenaufgabe	95
7.2. Übungsaufgaben	95
7.3. Aufgaben zum Abgeben	98
8. Vorlesung - Addition der natürlichen Zahlen	100
8.1. Produktmengen	100
8.2. Verknüpfungen	101

8.3.	Die Addition auf den natürlichen Zahlen	102
8.4.	Addition und disjunkte Vereinigung	106
8.	Arbeitsblatt	107
8.1.	Die Pausenaufgabe	107
8.2.	Übungsaufgaben	107
8.3.	Aufgaben zum Abgeben	111
9.	Vorlesung - Multiplikation der natürlichen Zahlen	112
9.1.	Die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen	112
9.2.	Die Anzahl der Produktmenge	116
9.3.	Potenzen	118
9.4.	Die Ordnungsrelation	119
9.	Arbeitsblatt	119
9.1.	Die Pausenaufgabe	119
9.2.	Übungsaufgaben	119
9.3.	Aufgaben zum Abgeben	122
10.	Vorlesung - Ordnung auf den natürlichen Zahlen	124
10.1.	Die Ordnung auf den natürlichen Zahlen	124
10.2.	Maxima und Minima	127
10.3.	Die Differenz von natürlichen Zahlen	128
10.	Arbeitsblatt	130
10.1.	Die Pausenaufgabe	130
10.2.	Übungsaufgaben	131
10.3.	Aufgaben zum Abgeben	134
11.	Vorlesung - Kommutative Halbringe	136
11.1.	Axiomatik	136
11.2.	Kommutative Halbringe	136
11.3.	Die binomische Formel	141
11.4.	Die Potenzmenge	142
11.	Arbeitsblatt	143
11.1.	Die Pausenaufgabe	143
11.2.	Übungsaufgaben	143
11.3.	Aufgaben zum Abgeben	146
12.	Vorlesung - Teilbarkeit und Primzahlen	148

12.1. Teilbarkeitseigenschaften	148
12.2. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	150
12.3. Primzahlen	151
12.4. Primzahlprobleme	153
12. Arbeitsblatt	154
12.1. Die Pausenaufgabe	154
12.2. Übungsaufgaben	155
12.3. Aufgaben zum Abgeben	158
13. Vorlesung - Elementare Kombinatorik	159
13.1. Elementare Kombinatorik	159
13.2. Die Fakultät	160
13.3. Die Binomialkoeffizienten	162
13.4. Der binomische Lehrsatz	165
13. Arbeitsblatt	167
13.1. Die Pausenaufgabe	167
13.2. Übungsaufgaben	167
13.3. Aufgaben zum Abgeben	170
14. Vorlesung - Division mit Rest und Dezimalsystem	171
14.1. Division mit Rest	171
14.2. Zifferndarstellung für natürliche Zahlen	172
14. Arbeitsblatt	176
14.1. Die Pausenaufgabe	176
14.2. Übungsaufgaben	176
14.3. Aufgaben zum Abgeben	178
15. Vorlesung - Schriftliches Addieren	179
15.1. Der Nachfolger und die Ordnung im Dezimalsystem	179
15.2. Schriftliches Addieren	181
15. Arbeitsblatt	185
15.1. Die Pausenaufgabe	185
15.2. Übungsaufgaben	186
15.3. Aufgaben zum Abgeben	188
16. Vorlesung - Schriftliches Multiplizieren	189

16.1. Schriftliches Multiplizieren	189
16.2. Schriftliches Subtrahieren	193
16. Arbeitsblatt	194
16.1. Die Pausenaufgabe	194
16.2. Übungsaufgaben	194
16.3. Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie	196
16.4. Aufgaben zum Abgeben	197
17. Vorlesung - Terme und Gleichungen	197
17.1. Terme und Gleichungen	198
17.2. Gleichungen in einer Variablen	200
17.3. Umformungen	203
17.4. Ungleichungen	205
17. Arbeitsblatt	205
17.1. Die Pausenaufgabe	205
17.2. Übungsaufgaben	205
17.3. Aufgaben zum Abgeben	209
18. Vorlesung - Die ganzen Zahlen	209
18.1. Die ganzen Zahlen	210
18.2. Der Betrag	217
18. Arbeitsblatt	217
18.1. Die Pausenaufgabe	217
18.2. Übungsaufgaben	218
18.3. Aufgaben zum Abgeben	221
19. Vorlesung - Kommutative Ringe	222
19.1. Kommutative Ringe	222
19.2. Gruppen	224
19.3. Die Ordnung auf den ganzen Zahlen	226
19.4. Die Teilbarkeitsbeziehung für ganze Zahlen	228
19.5. Die Zifferndarstellung für ganze Zahlen	229
19. Arbeitsblatt	229
19.1. Die Pausenaufgabe	229
19.2. Übungsaufgaben	230
19.3. Aufgaben zum Abgeben	233

20. Vorlesung - Euklidischer Algorithmus	234
20.1. Teilerfremdheit und das Lemma von Bezout	235
20.2. Der Euklidische Algorithmus	238
20.3. Darstellung des größten gemeinsamen Teilers	241
30. Arbeitsblatt	242
30.1. Die Pausenaufgabe	242
30.2. Übungsaufgaben	242
30.3. Aufgaben zum Abgeben	245
31. Vorlesung - Primfaktorzerlegung	246
21.1. Kleinstes gemeinsames Vielfaches und größter gemeinsamer Teiler	246
21.2. Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie	248
21. Arbeitsblatt	251
21.1. Die Pausenaufgabe	251
21.2. Übungsaufgaben	251
21.3. Aufgaben zum Abgeben	255
22. Vorlesung - Proportionalität und Dreisatz	255
22.1. Proportionalität	255
22.2. Dreisatz	261
22. Arbeitsblatt	264
22.1. Die Pausenaufgabe	264
22.2. Übungsaufgaben	264
22.3. Aufgaben zum Abgeben	267
23. Vorlesung - Konvergenz von Matrixpotenzen	268
23.1. Die rationalen Zahlen	268
23.2. Rechenoperationen auf den rationalen Zahlen	271
23.3. Körper	274
23. Arbeitsblatt	277
23.1. Die Pausenaufgabe	277
23.2. Übungsaufgaben	277
23.3. Aufgaben zum Abgeben	282
24. Vorlesung - Ordnung auf den rationalen Zahlen	283
24.1. Die Platzierung der rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl	283

24.2.	Die Ordnung auf den rationalen Zahlen	284
24.3.	Der Betrag	287
24.4.	Das arithmetische Mittel	288
24.5.	Die Bernoullische Ungleichung	288
24.	Arbeitsblatt	289
24.1.	Die Pausenaufgabe	289
24.2.	Übungsaufgaben	289
24.3.	Aufgaben zum Abgeben	293
25.	Vorlesung - Archimedisch angeordnete Körper	294
25.1.	Das Archimedes-Axiom für die rationalen Zahlen	294
25.2.	Gemischte Brüche	296
25.3.	Monotone Abbildungen	298
25.	Arbeitsblatt	300
25.1.	Die Pausenaufgabe	300
25.2.	Übungsaufgaben	301
25.3.	Aufgaben zum Abgeben	304
26.	Vorlesung - Dezimalbrüche	305
26.1.	Dezimalbrüche	305
26.2.	Dezimaldarstellung für Dezimalbrüche	307
26.3.	Approximation durch Dezimalzahlen	309
26.4.	Halbierung und Division durch 5	310
26.	Arbeitsblatt	313
26.1.	Die Pausenaufgabe	313
26.2.	Übungsaufgaben	313
26.3.	Aufgaben zum Abgeben	316
27.	Vorlesung - Prozentrechnung und Wachstum	317
27.1.	Prozentrechnung	317
27.2.	Wachstum	319
27.3.	Exponentialfunktionen auf $\mathbb{Z}$	321
27.	Arbeitsblatt	325
27.1.	Die Pausenaufgabe	325
27.2.	Übungsaufgaben	325
27.3.	Aufgaben zum Abgeben	329

28. Vorlesung - Der Divisionsalgorithmus	330
28.1. Folgen	330
28.2. Der Divisionsalgorithmus	330
28.3. Dezimalbruchfolgen	333
28.4. Konvergente Folgen	336
28. Arbeitsblatt	337
28.1. Die Pausenaufgabe	337
28.2. Übungsaufgaben	337
28.3. Aufgaben zum Abgeben	340
Anhang A: Bildlizenzen	342
Abbildungsverzeichnis	342

## VORWORT

Dieses Skript gibt die Vorlesung Grundkurs Mathematik I wieder, die ich im Wintersemester 2016/17 an der Universität Osnabrück im Studiengang Mathematik (Bildung Erziehung Unterricht) gehalten habe.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 4.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 4.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

Bei Jonathan Steinbuch bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs, die Korrekturen und die Vertretungen, bei den Tutoren Larissa Bauland, Mandala von Westenholz und Daniel Geist für ihre Mitarbeit. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und viele Anregungen.

Holger Brenner

## 1. VORLESUNG - EINFÜHRUNG

Wenn der Wind der  
Veränderung weht, bauen die  
einen Mauern und die  
anderen Windmühlen

---

Chinesische Weisheit

## 1.1. Rechengesetze für natürliche Zahlen.

Wir geben eine Einführung in typische Fragestellungen, wie sie in diesem Kurs im Mittelpunkt stehen.

- (1) Welche Rechengesetze für natürliche Zahlen kennen Sie?
- (2) Was bedeuten sie, sind sie inhaltlich einsichtig? Gibt es geeignete Illustrationen, Visualisierungen, gibt es Anwendungen?
- (3) Gelten die Gesetzmäßigkeiten auch für andere Zahlbereiche, wie für die ganzen, die rationalen, die reellen Zahlen? Für Polynome?
- (4) Warum gelten sie?
- (5) Gibt es innerhalb dieser Rechengesetze logische Abhängigkeiten, d.h. kann man die Gültigkeit des einen Gesetzes auf die Gültigkeit eines anderen Gesetzes logisch zurückführen?
- (6) Gibt es innerhalb dieser Rechengesetze entwicklungspsychologische, lernpsychologische, didaktische Abhängigkeiten? Gibt es im Lernen und im Lehren der Gesetze eine natürliche Reihenfolge?

Als Rechengesetze wurden genannt:

- Das Kommutativgesetz, und zwar für die Addition und die Multiplikation. Also die Identitäten  $a + b = b + a$  und  $a \cdot b = b \cdot a$  (hier und im Folgenden für beliebige  $a, b \in \mathbb{N}$ ).
- Das Assoziativgesetz, ebenfalls für diese beiden Verknüpfungen, also  $(a + b) + c = a + (b + c)$  und  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- Die binomischen Formeln, siehe unten.

Das Distributivgesetz, also die Beziehung

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Auf der rechten Seite verwenden wir die Konvention Punktrechnung vor Strichrechnung, um Klammern zu sparen.

$$0 + a = a,$$

d.h. 0 ist das neutrale Element der Addition.

$$1 \cdot a = a,$$

d.h. 0 ist das neutrale Element der Multiplikation.

$$0 \cdot a = 0.$$

In diesem Kurs stehen die Fragen von Typ (4) und (5) an erster Stelle, das Warum<sup>1</sup>. Die Frage nach der logischen Abhängigkeit ist eine Frage nach dem Warum, da man versucht, Gesetzmäßigkeiten auf grundlegendere Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen. Das Zurückführen auf fundamentalere Sachverhalte nennt man argumentieren, begründen, ableiten, beweisen. Da man irgendwo anfangen muss, spielen in der Mathematik die Logik, Axiome und Definitionen eine fundamentale Rolle. Die Frage nach dem Warum soll zu einem vertieften Verständnis der Mathematik führen.

(2) ist auch ein wichtiger Punkt, die inhaltliche Bedeutung der Zahlen und die damit ermöglichten Anwendungen sind letztlich der Grund, sich mit Mathematik zu beschäftigen, Rechengesetze vereinfachen Rechnungen, Anwendungen der elementaren Mathematik sind allgegenwärtig.<sup>2</sup> Die logische Abhängigkeit ist zwar in den Einzelschritten unmittelbar einleuchtend, da aber häufig eine Vielzahl an solchen Einzelschritten aufgetürmt werden muss, um zu einer prägnanten Aussage zu kommen, sieht man manchmal den Wald vor lauter Bäumen nicht. In Interpretationen, Veranschaulichungen, Visualisierungen tritt die inhaltliche Bedeutung einer Formel deutlich hervor, zugleich ist es nicht die Formel selbst. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, die Argumentationsebenen auseinander zu halten. Diese reflexive Fähigkeit zu entwickeln ist ein wesentliches Lernziel. Beispielsweise sind manche Visualisierungen auf den ersten Blick sehr einsichtig, bei genauerem Hinsehen muss man sich aber eingestehen, wie viel an Vorwissen und Vorannahmen eingehen.<sup>3</sup>

Die Fragestellungen (1) und (3) sind auch wichtig, sie stellen aber kein ernstes Problem dar, da die Rechengesetze und sonstige Formeln aus der Schule bekannt sind (sein sollten) und da es letztlich auch nicht so viele gibt. Auch die Formulierungen sind eher einfach, zumindest, wenn man sich auf algebraische Eigenschaften konzentriert, wie sie im ersten Semester im Mittelpunkt stehen (bei der Einführung der reellen Zahlen sieht dies etwas anders aus).

---

<sup>1</sup>Im didaktischen Kontext beschreibt man solche unterschiedlichen Aspekte gerne als *Kompetenzen*. (1) und (3) repräsentieren in diesem Sinne die inhaltliche Kompetenz, die Aspekte (4) und (5) laufen unter Argumentations- und Kommunikationskompetenz, wobei auch die Problemlösekompetenz mit eingeht, da es eben oft schwierig ist, aus einer Gegebenheit etwas anderes herzuleiten. In (2) findet sich die Darsellungskompetenz und die Modellierungskompetenz wieder.

<sup>2</sup>Und banal. Auch die historischen Anfangsgründe der Mathematik in den frühen Hochkulturen sind eher banal, sie liegen wie für die Schrift in der Bürokratie für eine wachsende Stadtbevölkerung begründet.

<sup>3</sup>Man betrachte beispielsweise das Rechteck zur Erläuterung der ersten binomischen Formel weiter unten.

Zur Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten gehört das korrekte algorithmische Anwenden (rechnen) in passenden Situationen.

Die Fragestellungen in (6) sind auch sehr wichtig, insbesondere in Hinblick auf den angestrebten Beruf. Für die didaktischen Aspekte gibt es einen eigenen einjährigen Kurs (Grundkurs Mathematikdidaktik (BEU)). Mit etwas Wohlwollen - insbesondere, wenn man Begrifflichkeiten, Formulierungen nicht überbewertet und sich auf das Verständnis konzentriert - erkennt man große Parallelen zwischen der Lern- und Lehrreihenfolge und dem logischen Aufbau der Mathematik.<sup>4</sup> In den Aufgaben werden gelegentlich gewisse didaktische Szenarien angesprochen. Eine gewisse Gefahr liegt darin, die Didaktik bzw. die angebliche berufliche Situation gegen eine fundierte mathematische Ausbildung vorzubringen. Ein Ziel der angestrebten Reflexionsstufe ist es, dies als ein oberflächliches Ausweichungsmanöver zu durchschauen.

Die Herausstellung der beiden Punkte (4) und (5) gilt für diesen Kurs, ist aber keine Gesamtbewertung über verschiedene Aspekte der Mathematik. Die Mitberücksichtigung der anderen Aspekte schlägt sich an vielen Stellen nieder, ist aber auch eine Aufgabe für die Studierenden.

## 1.2. Beispiel: Die binomischen Formeln.

Als Beispiel betrachten wir die binomischen Formeln genauer.

Aus der Schule sind sicherlich die *binomischen Formeln* bekannt, also die Beziehungen

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

und

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Wir stellen uns die folgenden Fragen.

- (1) Für welche  $a, b$  gelten diese Formeln?
- (2) Gibt es eine Beziehung zwischen ihnen?
- (3) Wie wichtig bzw. wie grundlegend sind sie?
- (4) Welche Anwendungen haben diese Formeln?
- (5) Wie intuitiv sind diese Formeln?
- (6) Warum gelten diese Formeln, worauf beruhen sie, wie kann man sie begründen?
- (7) Kann man die Gültigkeit der Formeln in einem bestimmten Zahlbereich auf die Gültigkeit der Formeln in einem kleineren Zahlbereich zurückführen?

Was fällt uns dazu ein?

---

<sup>4</sup>Konkret: Das Wort Halbgruppe hat in der Schule nichts verloren. Dennoch erfasst es sehr genau ein Bündel an Rechenkompetenzen, das in einem bestimmten mathematischen Entwicklungsstadium vorliegt.

- (1) Vermutlich kann man sich an keine Einschränkung erinnern, die Formeln gelten für alle „Zahlen“, also für natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen. Dennoch kann es große Unterschiede geben, wie man jeweils die Gültigkeit der Formeln beweist. Etwas sonderbar ist allerdings schon, dass man die zweite binomische Formel explizit formuliert, wenn die erste für beliebige ganze Zahlen gilt.
- (2) Denn dann kann man ja das  $b$  in der zweiten binomischen Formel als  $b = -c$  schreiben und erhält unter Verwendung von einfachen Rechengesetzen für  $-1$

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a + c)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-c)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

und so ergibt sich die zweite binomische Formel unmittelbar aus der ersten. Die zweite ist also als eigene Regel überflüssig, wenn man negative Zahlen zur Verfügung hat. Wenn man hingegen nur mit den natürlichen Zahlen arbeitet, so kann man den Trick von eben nicht anwenden und die zweite binomische Formulierung braucht die zusätzliche Voraussetzung, dass  $a \geq b$  ist. Aber auch im Fall von natürlichen Zahlen kann man die zweite Formel auf die erste zurückführen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}a^2 &= ((a - b) + b)^2 \\ &= (a - b)^2 + 2(a - b)b + b^2 \\ &= (a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 \\ &= (a - b)^2 + 2ab - b^2.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt einfach das  $a$  kompliziert geschrieben, im zweiten Schritt die erste binomische Formel angewendet, ausmultipliziert und zusammengefasst. Eine einfache Umstellung (siehe die Abziehregel) ergibt nun

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

- (3) Sie kommen häufig in der Schule vor, doch welche Schlussfolgerung kann man daraus ziehen? Vielleicht sind ja eigentlich wichtigere Sachen für die Schüler und Schülerinnen (oder die Lehrer und Lehrerinnen) zu schwierig? Keine Panik, so ist es nicht, man kann viel über die Gewichtung von Schulstoff diskutieren, aber völlig abwegig ist die Stoffauswahl nicht. Eine andere Frage ist die nach grundlegend. Wir haben gerade gesehen, dass man die zweite binomische Formel auf die erste binomische Formel zurückführen kann. Vielleicht stecken grundlegendere Sachverhalte hinter diesen Formeln? (Siehe 6.)
- (4) Die binomischen Formeln haben eine Vielzahl von Anwendungen. Da ist zunächst die Anwendung bei der Multiplikation von natürlichen

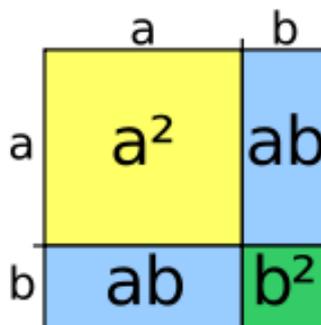
Zahlen und speziell beim Quadrieren. Beispielsweise berechnet man  
 $25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 5 \cdot 20 + 5^2 = 400 + 200 + 25 = 625$

oder

$$104 \cdot 96 = (100 + 4)(100 - 4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984.$$

Weiterhin spielt es beim quadratischen Ergänzen bzw. dem Lösen quadratischer Gleichungen eine herausragende Rolle. Es verallgemeinert sich auf allgemeinere algebraische Strukturen (kommutative Halbringe) und auf höhere Potenzen, also Ausdrücke der Form  $(a + b)^n$ , siehe die allgemeine binomische Formel.

- (5) Die erste binomische Formel kann man sich einfach durch Flächeninhalte wie im Bild veranschaulichen.



Dies erfordert natürlich Grundkenntnisse über Flächeninhalte von Rechtecken, was letztlich mathematisch ein schwierigeres Konzept als das rein arithmetisch-algebraische Konzept der binomischen Formel ist. Es ist eine wichtige Bemerkung und ein Lernziel im Mathematikstudium, dass man das Intuitiv-anschauliche vom Logisch-mathematischen trennen und ihre jeweilige Bedeutung einordnen kann. Beides ist wichtig. Für das mathematische Argumentieren ist aber das zweite das entscheidende.

- (6) Die binomischen Formeln (und zwar alle drei) sind in allen Rechenbereichen, in denen sie gelten, Spezialfälle des *Distributivgesetzes* und des *Kommutativgesetzes* für die Multiplikation. Ersteres besagt für beliebige Zahlen  $a, b, c$  die Gleichheit

$$c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$$

und letzteres besagt

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Unter Verwendung dieser beiden Regeln kann man die erste binomische Formel durch (wir verwenden schon die Regel Punktrechnung

vor Strichrechnung, um Klammern zu sparen)

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\
 &= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b \\
 &= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b \\
 &= a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

erhalten. Es ist eine wichtige Zielsetzung des Mathematikstudiums, die Abhängigkeiten und Hierarchien zwischen mathematischen Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und zu klären. Für die natürlichen Zahlen gelten die binomischen Formeln genauso wie das Distributivgesetz und das Kommutativgesetz. Letztere sind aber grundlegender, da man aus ihnen die binomischen Formeln ableiten kann. Ein tiefes Verständnis für die Hierarchien zwischen mathematischen Sachverhalten wird erst im begriffsorientierten axiomatischen Aufbau der Mathematik möglich.

Diese logischen Hierarchien haben auch einen großen Einfluss auf die Didaktik der Mathematik: das Distributivgesetz ist wichtiger als die binomischen Formeln und es sollte im Schulunterricht mindestens so breit behandelt werden wie diese (Schlüsse von der logischen Hierarchie auf die didaktische Gewichtung sind nie zwingend; es kann auch Gründe geben, didaktisch anders zu verfahren, und das Distributivgesetz durch die binomischen Formeln zu motivieren, etc.).

- (7) Über die Beziehung zwischen natürlichen und ganzen Zahlen haben wir schon gesprochen. Gehen wir davon aus, dass die binomischen Formeln für die ganzen Zahlen schon bekannt sind. Wir hätten die binomischen Formeln gern für die Brüche, also für rationale Zahlen. Wir schreiben die beteiligten rationalen Zahlen als

$$a = \frac{k}{m} \text{ und } b = \frac{r}{s}$$

und erhalten, unter Verwendung von grundlegenden Rechenregeln für Brüche, die Gleichheiten

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= \left( \frac{k}{m} + \frac{r}{s} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{ks + rm}{ms} \right)^2 \\
 &= \frac{(ks + rm)^2}{(ms)^2} \\
 &= \frac{(ks)^2 + 2ksrm + (rm)^2}{(ms)^2} \\
 &= \frac{(ks)^2}{(ms)^2} + 2 \frac{ksrm}{(ms)^2} + \frac{(rm)^2}{(ms)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{k}{m}\right)^2 + 2\frac{ks}{ms} \cdot \frac{rm}{ms} + \left(\frac{r}{s}\right)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2,
\end{aligned}$$

also die erste binomische Formel. Der Übergang von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{R}$  ist deutlich schwieriger.

### 1.3. Die Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen.

Wir haben gesehen, dass das Distributivgesetz grundsätzlicher als die binomischen Formeln sind. Werden wir noch grundsätzlicher: Was ist eigentlich die Addition und was ist die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen? Was ist für Sie die Addition, wie ist sie definiert? An was denken Sie zuerst? Welche Zugänge zu diesen Operationen kennen Sie, wie ist Ihr Verhältnis zueinander? Worin unterscheiden sich die Zugänge, welche sind besonders intuitiv, welche sind einfach begründbar, kommunizierbar, dokumentierbar?

## 1. ARBEITSBLATT

### 1.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 1.1.** Zeige, dass man das Multiplizieren von natürlichen Zahlen durch das Quadrieren, Addieren, Subtrahieren und durch das Halbieren ausdrücken kann.

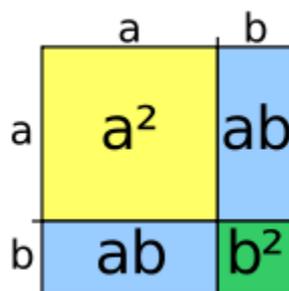
### 1.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 1.2.** Berechne  $1001^2$ .

**Aufgabe 1.3.** Berechne

$$a(a-x)^2 + (xa^2 + a^3) - a(x-a)(a+x).$$

**Aufgabe 1.4.** Welches mathematische Wissen geht ein, um das Bild rechts als eine einleuchtende Begründung für die erste binomische Formel akzeptieren zu können?



**Aufgabe 1.5.** Gelten die binomischen Formeln für Polynome? Gelten sie für beliebige Terme? Kann man für  $a, b$  auch komplexere Ausdrücke wie  $r^2 - stu$  oder  $7t^5 - 4rs^3$  einsetzen?

**Aufgabe 1.6.** Veranschauliche das Distributivgesetz für reelle Zahlen mit der Hilfe von Rechtecken.

**Aufgabe 1.7.** Man leite die dritte binomische Formel aus der ersten binomischen Formel her, indem man

$$(a + b)(a + b) + (a + b)(a - b)$$

distributiv ausrechnet.

**Aufgabe 1.8.** Berechne

$$(a + b + c)^2$$

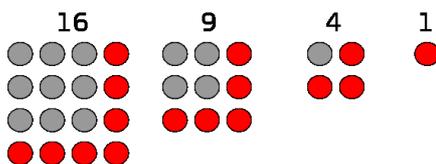
mit Hilfe der ersten binomischen Formel.

**Aufgabe 1.9.\***

Berechne

$$(a + b)^3$$

mit Hilfe der ersten binomischen Formel und des Distributivgesetzes.





**Aufgabe 1.18.** (3 Punkte)

Führe die dritte binomische Formel für rationale Zahlen auf die dritte binomische Formel für ganze Zahlen zurück.

**Aufgabe 1.19.** (3 Punkte)

Zeige, dass man das Multiplizieren von natürlichen Zahlen durch das maximal zweifache Quadrieren, das Addieren, Subtrahieren und durch das Halbieren ausdrücken kann.

## 2. VORLESUNG - MATHEMATISCHES ARGUMENTIEREN

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden eingeführte mathematische Fachbegriffe sachgerecht.
- beschreiben mathematische Sachverhalte mit eigenen Worten und finden dazu Fragestellungen.
- stellen Vermutungen über mathematische Sachverhalte an, begründen und überprüfen sie.
- entdecken und beschreiben mathematische Zusammenhänge.
- beschreiben und begründen eigene Lösungswege und reflektieren darüber.
- überprüfen mathematische Aussagen, kennzeichnen sie als richtig oder falsch und begründen dies.

Die erwarteten Kompetenzen am Ende des Schuljahrganges 4 im Kompetenzbereich Kommunizieren/Argumentieren aus dem niedersächsischen Kerncurriculum für die Grundschule (2006)

**2.1. Mathematisches Argumentieren.**

In einer Argumentation versucht man, eine Behauptung mittels allgemein anerkannter Prinzipien zu begründen, als wahr (oder sinnvoll) zu erweisen. Grundsätzlich kann man mit sich selbst argumentieren, typischerweise gibt es ein Publikum, das man von der Behauptung überzeugen möchte. Argumentationen gibt es in den unterschiedlichsten Kontexten, in der Wissenschaft, in der Politik, in Beziehungen. Dabei gibt es kontextspezifische Prinzipien und Argumentationsmuster, im politischen Kontext beruft man sich gerne auf weitgehend anerkannte Grundsätze wie Menschenrechte, Grundgesetz, den Willen des Volkes, um daraus unter Berücksichtigung von Daten und Fakten eine politische Entscheidung herzuleiten. Die Erfahrung lehrt, dass dort die Argumente nicht so gut sind, um alle überzeugen zu können, und dass dort auch die Interessen von spezifischen Gruppen vertreten werden.

Auch in der mathematischen Argumentation versucht man, die Wahrheit von Behauptungen (oder die Korrektheit eines Rechenweges oder die Angemessenheit einer Modellierung) zu begründen. Die eingesetzten Mittel, die Argumentationsstrenge hängen auch da von der Zielgruppe, ihrem Vorwissen und ihrer Motivation, der Beziehung (Bindung, Vertrauen) zwischen der Person, die die Behauptung vertritt, und den Personen, die überzeugt werden sollen (beispielsweise Lehrer und Schüler), ab.

Die mathematische Argumentation im wissenschaftlichen Kontext verfügt in mehrfacher Hinsicht über gewisse Argumentationsstandards. Eine wissenschaftliche Argumentation zeichnet sich durch (insbesondere im mathematisch-naturwissenschaftlichen Kontext) folgende Punkte aus.

- Die starke Präsenz von Fachbegriffen, die definiert werden müssen und gemäß ihrer Definition eingesetzt werden.
- Die Existenz weniger benennbarer Grundprinzipien.<sup>5</sup>
- Der Einsatz von Logik zum Erschließen neuer Erkenntnisse.
- Die freie Zugänglichkeit und Überprüfbarkeit der Ergebnisse.<sup>6</sup>
- Die freie Verwendung von in der Wissenschaft bereits etabliertem Wissen.
- Der Anspruch, dass die (Gültigkeit der) Erkenntnisse unabhängig von subjektiven Wünschen und Empfindungen<sup>7</sup> sind, dass sie zeitlos und kulturunabhängig sind.<sup>8</sup>

In der mathematischen Argumentation im wissenschaftlichen Kontext treten diese Punkte besonders deutlich hervor,<sup>9</sup> was sich insbesondere schon darin niederschlägt, dass es einen eigenen Begriff für das mathematische Argumentieren gibt: *Beweis*. Eine bewiesene mathematische Behauptung nennt man einen *Satz*.

- Die mathematischen Begriffe werden alle exakt und nur unter Verwendung von anderen mathematischen Begriffen definiert. Die Definitionen sind so angelegt, dass jedes sinnvolle mathematische Objekt entweder unter den Begriff

---

<sup>5</sup>Über die selbst wiederum reflektiert wird und wo die Grenze zwischen Wissenschaft und Philosophie verläuft.

<sup>6</sup>Dies ist ein großer Unterschied zur Esoterik, wo das „Wissen“ nur unter ganz speziellen Bedingungen von Eingeweihten weitergegeben wird.

<sup>7</sup>Das heißt keineswegs, dass die Erkenntnisse und ihre Entdeckungen nicht von Gefühlen begleitet würden. Im Gegenteil, Wissenschaft macht denen, die sie betreiben, ziemlich viel Spass.

<sup>8</sup>Die Generierung von Wissen ist sehr stark zeit- und kulturabhängig.

<sup>9</sup>Dafür fehlt der Mathematik ein entscheidender Punkt der Naturwissenschaften, die Beobachtung, die Empirie, das Experiment. Deshalb wird die Mathematik oft nicht zu den Naturwissenschaften gerechnet. Aber auch die Zuordnung zu den Geisteswissenschaften ist schwierig, so spricht man von *Strukturwissenschaft*.

fällt oder nicht, und zwar unabhängig davon, ob man das immer entscheiden kann.<sup>10</sup>

- Die Mathematik wird heute (seit ca. 120 Jahren) auf Mengen aufgebaut. Sie ist axiomatisch-logisch organisiert, aber realweltlich-anschaulich motiviert.
- Die Logik ist das Handwerkszeug der Mathematik. Es gibt (im Prinzip) eine vollständige Liste von erlaubten Schlussweisen der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik.<sup>11</sup>
- Mathematik wird in Zeitschriften und Büchern veröffentlicht, in Vorlesungen gelehrt, ist im Internet und in Bibliotheken zugänglich.<sup>12</sup>
- Bewiesene mathematische Aussagen, also Sätze, werden weiterverwendet.<sup>13</sup> Für eine systematische Darstellung eines Teilgebietes der Mathematik (wie einer Vorlesung oder einem Buch) bedeutet dies, dass man die grundlegenden Sachen zuerst darstellt und darauf zunehmend komplexere Sachen aufbaut. Wenn ein zuvor bewiesener Satz dann irgendwo eingesetzt wird, wird über diesen Satz nicht nachgedacht, sondern nur, ob in der jetzigen Situation alle Voraussetzungen erfüllt sind, damit man den Satz anwenden kann.
- Die Mathematik wird heute in einer erdumspannenden Gemeinschaft entwickelt.<sup>14</sup>

## 2.2. Geldscheine und Münzen.

Wir möchten an einem alltäglichen Beispiel typische Argumentationsmuster der Mathematik vorstellen. Grundlegende Eigenschaften der natürlichen Zahlen setzen wir hierfür voraus.



<sup>10</sup>Insbesondere sind beispielhafte Definitionen vom Typ etwas wie ... nicht zulässig.

<sup>11</sup>Dies ist Gegenstand der mathematischen Logik.

<sup>12</sup>Einschränkung: Dies gilt nicht unbedingt für sicherheitsrelevante kryptologische Forschung, die zum Teil an regierungsnahen Forschungsinstituten durchgeführt wird.

<sup>13</sup>Sie sind auch nicht patentierbar.

<sup>14</sup>Wobei das Hauptgewicht nach wie vor auf den Industrieländern liegt. Die anderen Länder holen aber schnell auf. Die wichtigste mathematische Auszeichnung, die Fields-Medaille, ging 2014 an eine Iranerin, einen Brasilianer, einen Kanadier indischer Herkunft und einen Österreicher.

Wir betrachten die Euromünzen und Euroscheine (Bargeldmittel), die bekanntlich die Werte

$$1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500$$

haben (um nicht immer von Münzen bzw. Scheinen sprechen zu müssen, nennen wir diese Zahlen schlicht Eurozahlen). Einen zu zahlenden vollen Betrag, beispielsweise 37 Euro, kann man auf viele verschiedene Weisen (ohne Rückgeld) begleichen, etwa durch 37 1-Euro Münzen oder durch

$$37 = 1 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

oder durch

$$37 = 20 + 10 + 5 + 2.$$

Wir fragen uns, ob es stets eine „optimale“ Art gibt, einen gegebenen Betrag zu begleichen, ob sie eindeutig ist und wie man sie finden kann. Ein naheliegender Ansatz ist es, diejenige Bezahlung als optimal anzusehen, bei der die wenigsten Münzen bzw. Scheine verwendet werden. Im Beispiel kommt die zuletzt genannte Möglichkeit mit vier Münzen/Scheinen aus. Gibt es eine bessere Möglichkeit? Wie kann man an eine solche Frage herangehen? Wenn jemand eine Darstellung mit nur zwei oder drei Münzen/Scheinen finden würde, wäre die Frage direkt negativ entschieden, denn dann gäbe es eine bessere Möglichkeit. Wenn man ein bisschen rumprobiert und keine bessere Möglichkeit findet, so sagt das relativ wenig, wenn man sich nicht sicher sein kann, dass man alle Möglichkeiten systematisch überprüft hat. Ein solches systematisches und nachvollziehbares Überprüfen ist eine *mathematische Argumentation*. Wenn die mathematische Argumentation eine präzise formulierte Aussage begründet, so spricht man von einem *Beweis* (für diese Aussage). Unsere Aussage ist also

„Die Zahl 37 lässt sich nicht als eine Summe (wobei Wiederholungen erlaubt sind) von weniger als vier Zahlen aus den Eurozahlen 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 darstellen“.

Wie kann man das systematisch begründen? Grundsätzlich könnte man alle Summen mit einer Eurozahl, alle Summen mit zwei Eurozahlen und alle Summen mit drei Eurozahlen ausrechnen und dann feststellen, dass nie 37 rauskommt. Das ist durchführbar, aber sehr aufwändig. Zu einer guten mathematischen Argumentation gehört auch, dass sie geschickt und ökonomisch ist, dass sie abwegige Situationen schnell ausschließt und sich auf wesentliche Gesichtspunkte konzentriert. Im Beispiel heißt das, dass man Summen, in denen ein Schein mit einem Wert von mindestens 50 vorkommt, gar nicht betrachten muss, da eine solche Summe immer größergleich 50 und somit größer als der Zielbetrag 37 sein wird. Hier fällt sofort eine typische Eigenschaft einer mathematischen Argumentation auf: Sie nimmt Bezug auf schon etablierte oder bekannte oder allgemein anerkannte Eigenschaften, hier nämlich die Eigenschaft, dass eine Summe von natürlichen Zahlen größergleich jedem

Summanden der Summe ist. In einer mathematischen Argumentation geht man nicht immer „zurück auf Los“, sondern man verwendet Bekanntes, das seinerseits irgendwann durch eine mathematische Argumentation begründet worden ist.

Eine weitere Beobachtung, die das rechnerische Überprüfen von sehr vielen Summen erübrigt, geht folgendermaßen: Man betrachtet den 20-Euro-Schein. Das ist der größte Schein, von dem man noch nicht weiß, ob und wie oft er verwendet wird. Wie oft kann/könnte er verwendet werden? Zunächst darf er höchstens einmal verwendet werden, da ja

$$2 \cdot 20 = 40 > 37$$

schon zu groß ist. Muss er in einer minimalen Darstellung verwendet werden? Hier begegnen wir einer typischen Denkfigur im Rahmen einer mathematischen Argumentation: Wir zeigen, dass in einer minimalen Darstellung der 37 mit Eurozahlen die 20 vorkommen muss, indem wir zeigen, dass eine Darstellung ohne den 20-Schein nicht minimal sein kann. Man spricht von einem *Beweis durch Widerspruch*. Dabei formuliert man eine Annahme, die dann durch die mathematische Argumentation als unhaltbar erwiesen wird, also als widersprüchlich zu den gegebenen Voraussetzungen der Aussage. Wir machen also die Annahme:

Es ist möglich, die 37 als eine Summe mit maximal drei Summanden aus den Zahlen 1, 2, 5, 10 (also ohne die 20!) darzustellen.

Durch die Abschätzung, die ihrerseits auf Rechengesetze der natürlichen Zahlen Bezug nimmt,

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 5 + d \cdot 10 \leq (a + b + c + d)10 \leq 3 \cdot 10 = 30 < 37$$

sieht man aber schnell, dass dies nicht möglich ist. Die Annahme ist also falsch und eine jede Darstellung der 37 mit maximal drei Eurozahlen muss die 20 verwenden, und zwar genau einmal.

An dieser Stelle tritt eine weitere wichtige Strategie bei einer mathematischen Argumentation auf, die Vereinfachung der Situation unter Verwendung des schon Gezeigten. Wir wissen bereits, dass 20 genau einmal vorkommt. Wir ziehen daher 20 ab und gelangen zur Fragestellung, ob es möglich ist, die 17 als Summe von maximal zwei der Zahlen 1, 2, 5, 10 darzustellen. In einem gewissen Sinn sind wir jetzt wieder in der Ausgangssituation, wobei allerdings die Zahlen einfacher (geworden) sind. Mit der schon verwendeten Strategie kann man hier weiterargumentieren: Man zeigt, dass die 10 genau einmal in einer solchen minimalen Darstellung vorkommen muss, zieht es wieder ab und gelangt zur Frage, ob man die 7 also Summe von Eurozahlen mit nur einem Summanden<sup>15</sup> darstellen kann, was offenbar nicht möglich ist.

---

<sup>15</sup>Eine Summe mit nur einem Summanden mag sich sonderbar anhören. In der Mathematik sind aber solche Grenzfälle wichtig und stets mitzubetrachten, da man bei einer Situationsvereinfachung häufig - wie hier - bei einer solchen Extremsituation ankommt.

Hier, wie häufig in der Mathematik, hängt also die Gültigkeit einer mathematischen Aussage mit der Gültigkeit einer anderen mathematischen Aussage von gleichem oder ähnlichem Typ zusammen. Von daher ist es sinnvoll, eine möglichst allgemeine mathematische Aussage zu formulieren und diese zu beweisen, wobei man im Beweis zeigt, dass man kompliziertere (größere Zahlen) auf einfachere Situationen (kleinere Zahlen) zurückführen kann. Ein wichtiges Beweisprinzip entlang dieses Schemas ist der *Beweis durch Induktion*.<sup>16</sup>

Wir haben also gezeigt (bewiesen, durch eine mathematische Argumentation begründet), dass man mindestens vier Eurozahlen braucht, um die 37 als Summe darzustellen: Mit weniger als vier ist es nicht möglich, und die eingangs beschriebene Zerlegung

$$37 = 20 + 10 + 5 + 2$$

zeigt, dass es mit vier Eurozahlen möglich ist.

Die 37 ist eine Zahl unter vielen, wir hätten gerne zu einer jeden natürlichen Zahl eine entsprechende Aussage. Zunächst gibt es zu jedem vollen Eurobetrag  $w$  eine minimale Anzahl an Eurozahlen, mit der man den Betrag als Summe erhalten kann, aus den drei einfachen Gründen, dass (1) überhaupt jeder Betrag darstellbar ist (beispielsweise als hinreichend große Summe der 1 mit sich selbst), dass (2) es zu jeder Anzahl an Summanden grundsätzlich die beiden Möglichkeiten gibt, dass der Betrag durch eine Summe aus Eurozahlen mit  $k$  Summanden darstellbar ist oder nicht, und dass (3) das Minimum einer nichtleeren Menge aus natürlichen Zahlen existiert.<sup>17</sup> Wenn wir den Betrag mit  $w$  bezeichnen, so kann man die minimale Summandenzahl als

$$m(w) = \min (k \in \mathbb{N}, w \text{ lässt sich als eine Summe mit } k \text{ Summanden aus Eurozahlen darstellen})$$

schreiben. Wir fragen uns:

- (1) Ist die minimale Darstellung eines Betrages  $w$  eindeutig?
- (2) Wie kann man sie charakterisieren?
- (3) Wie kann man sie finden?

Dabei suchen wir nicht nur nach einer Antwort, sondern diese Fragen sind stets so zu verstehen, wie man mathematisch begründen kann, dass die Antwort auch richtig ist. Solche mathematischen Fragen können im Allgemeinen sehr schwierig sein, und es ist von vornherein nicht klar, ob man eine Lösung finden wird. Wir listen einige Herangehensweisen auf.

- (1) Probieren.

<sup>16</sup>Das Induktionsprinzip werden wir in der siebten Vorlesung genau besprechen, und gelegentlich schon verwenden.

<sup>17</sup>Dies ist unmittelbar klar (?). Wir werden in Lemma 7.6 diese Aussage aus dem Induktionsprinzip herleiten.

- (2) Systematischer Probieren.
- (3) Extremfälle betrachten.
- (4) Hypothese formulieren.
- (5) Voraussetzungen leicht abändern, um mögliche Gründe und Schwierigkeiten zu erkennen.
- (6) Hypothese präziser formulieren.
- (7) Hypothese unter stärkeren zusätzlichen Voraussetzungen beweisen.
- (8) Die Perspektive ändern.
- (9) Reduktionsmöglichkeiten erkennen.
- (10) Hypothese beweisen.

Wir erläutern dies an der ersten Frage, ob es eine eindeutig bestimmte minimale Darstellung gibt.

- (1) Nehmen wir die 37. Es fällt uns keine weitere Darstellung mit vier Eurozahlen ein. Man kann die obige Argumentation, bei der wir gezeigt haben, dass es keine Darstellung mit drei Eurozahlen gibt, etwas abwandeln, und erhält so eine Begründung, dass die minimale Darstellung für die 37 eindeutig ist. Welche Zahl probieren wir als nächstes? Die 146?
- (2) Es ist systematischer, erstmal die kleinsten Zahlen durchzugehen, die  $1, 2, 3 = 1 + 2, 4 = 2 + 2, 5, 6 = 5 + 1$ , bei denen man recht schnell erkennen kann, dass die Darstellungen eindeutig sind.
- (3) Extremfälle sind beispielsweise die einzelnen Eurozahlen selbst, diese sind offenbar durch sich selbst eindeutig minimal darstellbar. Wie sieht es mit der Summe von zwei Eurozahlen aus, kann es für sie eine weitere Darstellung als Summe von zwei Eurozahlen geben? Warum nicht?
- (4) Nach diesen Beobachtungen bzw. Überlegungen formulieren wir die optimistische Hypothese, dass die minimale Darstellung eindeutig ist.
- (5) Wie allgemein könnte eine solche Aussage stimmen? Betrachten wir die gleiche Fragestellung für eine Währung,<sup>18</sup> für die die Bargeldmittel gleich

$$1, 3, 5, 10, 30, 50, 100, 300, 500$$

sind. Das sieht auf den ersten Blick nicht so anders aus. Allerdings gibt es hier die beiden verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten

$$6 = 5 + 1 = 3 + 3,$$

die beide minimal sind, da man die 6 sicher nicht mit einer Münze darstellen kann. Die Hypothese kann also nur stimmen aufgrund spezifischer Eigenschaften der Eurozahlen, eine grobe Argumentation wird man somit wohl nicht erwarten und eine Argumentation, die nicht direkt auf die Eurozahlen Bezug nimmt, kann nicht funktionieren.

---

<sup>18</sup>Hier werden also die Voraussetzungen kurz abgeändert, um sie besser verstehen zu können.

Auch wenn man die Rückgabe von Geld erlaubt, geht die Eindeutigkeit verloren, beispielsweise ist

$$15 = 10 + 5 = 20 - 5,$$

bei beiden Darstellung werden zwei Scheine bewegt.

- (6) Wir meinen natürlich bei eindeutig „eindeutig bis auf die Reihenfolge“, natürlich ist

$$37 = 20 + 10 + 5 + 2 = 2 + 20 + 5 + 10.$$

Es könnte sich als sinnvoll erweisen, immer mit einer bestimmten Reihenfolge der Summanden zu arbeiten, beispielsweise in absteigender Größe.

- (7) Wir beweisen die Aussage zuerst nur für alle Beträge  $\leq 10$  oder  $\leq 100$  oder nur für alle Beträge, die als Summe von drei Summanden darstellbar sind.  
 (8) Wir wollen etwas über Zerlegungen

$$w = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 5 + d \cdot 10 + \dots$$

aussagen. Das kann man von links, also von  $w$  aus betrachten, aber auch von der rechten Seite aus. Kann man einer Darstellung

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 5 + d \cdot 10 + \dots$$

ohne Bezug auf den dargestellten Wert ansehen, ob sie minimal ist? Hier gibt es viele Gesetzmäßigkeiten, z.B. kann  $a$  nicht 2 sein, da man andernfalls die zwei 1-Euromünzen sofort durch eine 2-Euromünze ersetzen und so mit einer kleineren Anzahl von Eurozahlen auskommen würde.

- (9) Hängt die eindeutige Zerlegung für große Zahlen irgendwie mit der eindeutigen Zerlegung für kleinere Zahlen zusammen? Eine zweite Darstellung für  $w$  führt zu einer Gleichheit

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 5 + d \cdot 10 + \dots = a' \cdot 1 + b' \cdot 2 + c' \cdot 5 + d' \cdot 10 + \dots$$

Hier kann man links und rechts, falls eine Eurozahl auf beiden Seiten positiv vorkommt, diese Eurozahl abziehen, und erhält so eine Gleichheit für einen kleineren Ausdruck.

- (10) Siehe unten.

In einem mathematischen Buch (bzw. in der Vorlesung) werden mathematische Aussagen häufig direkt bewiesen, ohne dass die Vorüberlegungen erläutert werden, die zu dem Beweis geführt haben. Dies ist von der Ökonomie her begründet, man möchte einen Beweis haben, und nicht Überlegungen dokumentieren, die für sich allein genommen ziemlich aussagegelos (wie das Durchrechnen von einigen Beispielen) sind und von denen ein Großteil auch in eine falsche Richtung geht. Beim Auffinden von Beweisen und beim Lösen von Aufgaben (zwischen diesen beiden Aspekten gibt es keinen grundsätzlichen Unterschied) ist der Weg dorthin sehr wichtig, und es sollte viel probiert,

Strategien entwickelt und diskutiert werden, auch wenn sich das nicht in der Dokumentation der letztlich gefundenen überprüfbaren Argumentation niederschlägt.<sup>19</sup>

Nach all diesen Vorüberlegungen können wir den folgenden Satz beweisen.

**Satz 2.1.** *Es gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Jede natürliche Zahl  $w$  besitzt eine eindeutige Summendarstellung*

$$w = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 5 + a_4 \cdot 10 + a_5 \cdot 20 + a_6 \cdot 50 + a_7 \cdot 100 + a_8 \cdot 200 + a_9 \cdot 500$$

*(mit  $a_1, \dots, a_9 \in \mathbb{N}$ ) mit der Eigenschaft, dass die Gesamtanzahl der Summanden (also  $a_1 + a_2 + \dots + a_9$ ) unter allen Darstellungen minimal ist.*

(2) *Eine solche Darstellung ist genau dann minimal, wenn die folgenden Koeffizientenbedingungen erfüllt sind.*

a) *Die Koeffizienten  $a_i$ , die sich auf 1, 5, 10, 50, 100 beziehen, sind  $\leq 1$ .*

b) *Die Koeffizienten  $a_i$ , die sich auf 2, 20, 200 beziehen, sind  $\leq 2$ .*

c) *Falls der Koeffizient, der sich auf 2 (bzw. 20 bzw. 200) bezieht, gleich 2 ist, so ist der vorhergehende Koeffizient (der sich also auf 1 bzw. 10 bzw. 100 bezieht) gleich 0.*

(3) *Die eindeutige Darstellung findet man, indem man sukzessive absteigend  $a_9, \dots, a_1$  bestimmt, wobei man folgendermaßen<sup>20</sup> vorgeht*

*$a_9$  ist die maximale natürliche Zahl mit  $a_9 \cdot 500 \leq w$ ,*

*definiere*

$$w_8 := w - a_9 \cdot 500.$$

*$a_8$  ist die maximale natürliche Zahl mit  $a_8 \cdot 200 \leq w_8$ ,*

*definiere*

$$w_7 := w_8 - a_8 \cdot 200,$$

*etc.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass jede minimale Darstellung von  $w$  die in (2) angegebenen Koeffizientenbedingungen erfüllt. Sei also

$$w = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 5 + a_4 \cdot 10 + a_5 \cdot 20 + a_6 \cdot 50 + a_7 \cdot 100 + a_8 \cdot 200 + a_9 \cdot 500$$

eine minimale Darstellung. Wenn der Koeffizient vor 1 (also  $a_1$ ) größer als 1 wäre, also mindestens 2, so könnte man zwei 1-Euromünzen durch eine 2-Euromünze ersetzen und hätte eine Darstellung mit weniger Summanden im Widerspruch zur Minimalität (ebenso für den Koeffizienten vor 10 und vor 100). Wenn der Koeffizient vor 5 größer als 1 wäre, also mindestens 2, so

<sup>19</sup>Das gilt auch für die abzugebenden Aufgaben. Geben Sie ein überzeugendes Endprodukt der Überlegungen ab, keine Dokumentation der Überlegungen.

<sup>20</sup>Dies ist ein sogenannter „gieriger Algorithmus“, da er sich bei jedem Einzelschritt daran orientiert, wie man möglichst viel von dem (verbleibenden) Geldbetrag abzahlen kann.

könnte man zwei 5-Euroscheine durch einen 10-Euroschein ersetzen und hätte eine Darstellung mit weniger Summanden im Widerspruch zur Minimalität (ebenso für den Koeffizient vor 50). Wenn der Koeffizient vor 2 größer als 2 wäre, also mindestens 3, so könnte man drei 2-Euromünzen durch eine 1-Euromünze und einen 5-Euroschein ersetzen und hätte eine Darstellung mit weniger Summanden im Widerspruch zur Minimalität (ebenso für den Koeffizienten vor 20 und vor 200). Wenn eine 2-Euromünze doppelt und eine 1-Euromünze einfach vorkommt, so kann man dies durch einen 5-Euroschein ersetzen im Widerspruch zur Minimalität der Darstellung, ebenso bei einem doppelten Vorkommen von 20 oder 200.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der minimalen Darstellung und nehmen an, dass zwei Zerlegungen

$$\begin{aligned} w &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 5 + a_4 \cdot 10 + a_5 \cdot 20 + a_6 \cdot 50 + a_7 \cdot 100 + a_8 \cdot 200 + a_9 \cdot 500 \\ &= b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 + b_3 \cdot 5 + b_4 \cdot 10 + b_5 \cdot 20 + b_6 \cdot 50 + b_7 \cdot 100 + b_8 \cdot 200 + b_9 \cdot 500 \end{aligned}$$

vorliegen. Da beide Darstellungen minimal sind, müssen nach der bisherigen Überlegung die Koeffizienten jeweils die Koeffizientenbedingungen erfüllen. Wir werden zeigen, dass es überhaupt nur eine Darstellung gibt, die die Koeffizientenbedingungen erfüllt. Wir müssen also zeigen, dass

$$a_i = b_i$$

für alle  $i = 1, \dots, 9$  gilt. Wenn für ein bestimmtes  $i$  die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  beide  $\geq 1$  sind, so kann man beidseitig die zugehörige Eurozahl (eventuell zweimal) abziehen und erhält dann eine kleinere Zahl  $w'$ , für die zwei Darstellungen vorliegen, die die Koeffizientenbedingungen erfüllen. Da man diese Überlegung für jedes  $i$  durchführen kann, gelangt man zu einer Gleichheit, bei der jeweils mindestens einer der Koeffizienten  $a_i, b_i$  gleich 0 ist. Es ist dann zu zeigen, dass auch der andere Koeffizient gleich 0 ist. Dies zeigen wir absteigend, beginnend mit  $a_9$  bzw.  $b_9$ . Da die Situation symmetrisch<sup>21</sup> ist, können wir annehmen, dass  $a_9 = 0$  ist. Aufgrund der Koeffizientenbedingungen ist (die Klammern sind suggestiv und sollen die verwendeten Abschätzungen verdeutlichen, die erste ist echt)

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 5) + (a_4 \cdot 10 + a_5 \cdot 20 + a_6 \cdot 50) + (a_7 \cdot 100 + a_8 \cdot 200) &< 10 + 90 + 400 \\ &= 500. \end{aligned}$$

Daher kann  $b_9$  nicht 1 sein und ist ebenfalls 0. So zeigt man absteigend, dass alle Koeffizienten 0 sind und dass die Darstellung also eindeutig ist.

Wir zeigen nun die andere Richtung aus Teil (2), dass eine Darstellung mit den gegebenen Koeffizientenbedingungen die eindeutige Darstellung sein muss. Mit der gleichen Argumentation wie eben, angewendet auf eine solche Darstellung und die minimale Darstellung, ergibt sich, dass die Darstellungen übereinstimmen.

<sup>21</sup>Die Situation ist symmetrisch, da die beiden Darstellungen gleichberechtigt sind. In einer solchen Situation bedeutet es keine Einschränkung der Aussagekraft der Argumentation, wenn man eine Umbenennung vornimmt bzw. eine Eigenschaft, die eines der beteiligten Objekte hat, dem ersten zuweist. In einer solchen Situation finden sich häufig Formulierungen wie „wir können annehmen, dass ...“.

Der dritte Teil ergibt sich daraus, dass die entstehende Darstellung die in (2) formulierten Koeffizientenbedingungen erfüllen muss.  $\square$

Die Aufgabe 2.17 zeigt, dass das Verfahren aus Satz 2.1 (3) nicht bei jeder Bargeldverteilung zur minimalen Darstellung führt.

## 2. ARBEITSBLATT

### 2.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 2.1.** Wie viele ganzzahlige Geldbeträge zwischen 1 und 100 Euro kann man mit maximal zwei Euromünzen bzw. Scheinen (ohne Rückgeld) begleichen.

### 2.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 2.2.** Sie wollen im Unterricht in der Grundschule vermitteln, dass man nicht durch 0 teilen darf. Wie argumentieren Sie, wenn folgende Erfolgsquoten feststehen.

- (1) Mit einem stichhaltigen mathematischen Argument bewirkt man, dass 80 Prozent der Schüler und Schülerinnen nicht durch 0 teilen.
- (2) Mit dem Argument, dass die 0 ganz ganz traurig wird, wenn durch sie geteilt wird, bewirkt man, dass 90 Prozent der Schüler und Schülerinnen nicht durch 0 teilen.
- (3) Mit dem Argument, dass die Schüler Gummibärchen bekommen, wenn sie nicht durch 0 teilen, bewirkt man, dass 100 Prozent der Schüler und Schülerinnen nicht durch 0 teilen.

**Aufgabe 2.3.** Aus der Schule ist bekannt, dass man nicht durch 0 dividieren darf. Warum eigentlich nicht?

**Aufgabe 2.4.** Gabi Hochster hat Mathematikunterricht (vierte Klasse), der von Frau Doris Maier-Sengupta (mit den Fächern Deutsch und buddhistische Philosophie) gehalten wird. Gummibärchen hin oder her, Gabi Hochster möchte sich nicht damit abfinden, dass man anscheinend nicht durch 0 teilen darf. Die Zahlen  $1/0, 2/0$  u.s.w. würde es geben, ihr Gehalt sei nur etwas mysteriös, und sie möchte sich damit weiter beschäftigen. Man könne für diese Zahlen die Bruchrechenregeln nicht naiv anwenden, beispielsweise gelte nicht die Kürzungsregel

$$\frac{1}{0} \cdot 0 = 1.$$

Ansonsten könne man aber mit diesen neuen Zahlen ziemlich gut rechnen, es gelten die Kommutativgesetze, die Assoziativgesetze und das Distributivgesetz, und es gelte nach wie vor  $0 \cdot a = 0$  für alle Zahlen  $a$ , auch für die neuen.

- (1) Frau Maier-Sengupta weiß nicht so recht, wie sie darauf reagieren soll und wendet sich an Sie, da Sie die Fachleiter/In Mathematik an der Schule sind. Wie beurteilen Sie die Situation? Hat Gabi recht? Was ist Ihr Rat an die Kollegin?
- (2) Gabi hat mittlerweile Spaß an ihren neuen Zahlen gefunden und bringt die ganze Klasse durcheinander, weil sie ständig sagt „man darf doch durch 0 teilen“. Frau Maier-Sengupta befürchtet, dass dies die anderen Schüler zu Fehlschlüssen verleitet und ermahnt Gabi, nicht mehr davon zu sprechen, das sei halt so, dass man nicht durch 0 teilen darf. Daraufhin sagt Gabi: „Frau Maier-Sengupta versteht gar nix von Mathe, noch nicht einmal, dass man durch 0 teilen darf“. Dies vermerkt Frau Maier-Sengupta im Klassenbuch als eine Beleidigung. Wie hätten Sie reagiert?
- (3) Da es der dritte Vermerk war, kommt es zu einem Elterngespräch, zu dem neben Frau Maier-Sengupta, den Eltern, Melissa und Melvin Hochster, der Schulleitung auch Sie als Fachleiter/In teilnehmen sollen. Die Eltern beschwerten sich, dass Frau Maier-Sengupta die kreativen Ansätze ihrer Tochter nicht positiv aufnehmen würde, sondern abblocke. Sie befürchten, dass ihre Tochter in der Schule geistig verarme. Was ist Ihre Position?



Gabi Hochster

**Aufgabe 2.5.** Ein Schwabe hält den Vorkurs. Ein Schwabe hält die Vorlesungen zum Grundkurs. Ein Schwabe hält die Übungen zum Grundkurs. Was bedeutet dies für die Tutorien des Grundkurses?

**Aufgabe 2.6.** Berechne den Geldbetrag, wenn man von jeder Cent-Münze und von jeder Euro-Münze genau ein Exemplar besitzt.

**Aufgabe 2.7.** Es sei vorausgesetzt, dass man einen konkreten Eurobetrag  $w$  mit  $k$  Eurozahlen begleichen kann. Zeige, dass man dann den Eurobetrag  $w + 1$  mit  $k + 1$  Eurozahlen begleichen kann.

**Aufgabe 2.8.** Wie viele volle Geldbeträge zwischen 1 und 100 Euro kann man mit genau 1, 2, 3, 4, 5, 6 Euromünzen bzw. Scheinen (ohne Rückgeld) begleichen. Was ergibt die Summe dieser Zahlen?

**Aufgabe 2.9.** Wie viele volle Geldbeträge zwischen 1 und 100 Euro kann man mit genau 1, 2, 3, 4, 5, 6 Euromünzen bzw. Scheinen (ohne Rückgeld) minimal begleichen.

**Aufgabe 2.10.** Wie kann man das Dezimalsystem für natürliche Zahlen mit einem Bargeldsystem wie in Satz 2.1 in Verbindung bringen? Wie beweist man in diesem Fall die Eindeutigkeit der Darstellung? Wäre das Dezimalsystem für den Geldverkehr sinnvoll?

**Aufgabe 2.11.** An welcher Stelle bricht der Eindeutigkeitsbeweis zu Satz 2.1 zusammen, wenn man mit den Zahlen 1, 3, 5, 10, u.s.w. statt mit den Eurozahlen rechnet.

**Aufgabe 2.12.** Auf Ruggetong gibt es nur zwei Münzen. Es kann jeder volle Geldbetrag damit bezahlt werden. Zeige, dass dann die minimale Darstellung eines jedes Geldbetrages eindeutig ist. Wie kann man sie berechnen?

**Aufgabe 2.13.** Auf Riggatong gibt es  $k$  Münzen mit den Werten  $1, 2, 3, \dots, k - 1, k$ . Ist die minimale Darstellung eines jedes Geldbetrages eindeutig? Ist die Darstellung, die so viele  $k$ -Münzen wie möglich verwendet und den Rest mit einer der anderen Münzen auffüllt, minimal?

**Aufgabe 2.14.** Ein Geldfälscher stellt 3- und 7-Euro-Scheine her.

- (1) Zeige, dass es nur endlich viele Beträge gibt, die er nicht (exakt) begleichen kann. Was ist der höchste Betrag, den er nicht begleichen kann?
- (2) Was ist der kleinste Betrag, den er auf zwei verschiedene Weisen begleichen kann?
- (3) Beschreibe die Menge  $M$  der vollen Eurobeträge, die er mit seinen Scheinen begleichen kann.

**Aufgabe 2.15.** Wir erlauben, dass Geldbeträge auch mit Hilfe von Rückgeld (mit den üblichen Eurozahlen) beglichen werden. Eine Darstellung eines Betrages heißt minimal, wenn die Gesamtzahl der bewegten Münzen bzw. Scheine minimal ist.

- (1) Für welche Geldbeträge  $w \leq 20$  verringert sich die minimale Anzahl an Bargeldmitteln, die bewegt werden müssen.
- (2) Für welche Geldbeträge  $w \leq 20$  ist die minimale Darstellung eindeutig?

### 2.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 2.16.** (4 Punkte)

Auf wie viele Arten kann man mit den üblichen Münzen einen Betrag von 50 Cent begleichen?

**Aufgabe 2.17.** (2 Punkte)

Ein Land besitze Münzen im Nennwert von 1, 4, 5 und 6 Talern. Zeige, dass es nicht unbedingt zu einer minimalen Anzahl von Münzen führt, wenn man einen Betrag sukzessive mit der größtmöglichen Münze begleicht.

**Aufgabe 2.18.** (3 Punkte)

Zu den Eurozahlen soll eine zusätzliche Münze mit dem ganzzahligen Wert  $k < 10$  eingeführt werden. Für welche  $k$  ist die minimale Darstellung aller Geldbeträge eindeutig, für welche nicht?

**Aufgabe 2.19.** (4 (2+2) Punkte)

Auf den quadratischen Inseln, die wegen der annähernd quadratischen Gestalt der Inseln so heißen, sind die Nennwerte der Münzen und Geldscheine die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, ...

- (1) Bestimme für  $w \leq 20$  die minimale(n) Darstellung(en) von  $w$ .
- (2) Ist die minimale Darstellung für alle (!)  $w$  eindeutig?

**Aufgabe 2.20.** (6 (2+2+2) Punkte)

Ein Geldfälscher stellt 4-, 9- und 11-Euro-Scheine her.

- (1) Zeige, dass es nur endlich viele Beträge gibt, die er nicht (exakt) begleichen kann. Was ist der höchste Betrag, den er nicht begleichen kann?

- (2) Was ist der kleinste Betrag, den er auf zwei verschiedene Weisen begleichen kann?
- (3) Beschreibe explizit die Menge  $M$  der vollen Eurobeträge, die er mit seinen Scheinen begleichen kann.

### 3. VORLESUNG - AUSSAGEN

Was Hänschen nicht lernt,  
lernt Hans nimmermehr

---

Volksmund

„Was Hänschen nicht lernt,  
lernt Hans nimmermehr“ hat  
heute keine Geltung mehr

---

Bundesministerium für  
Bildung und Forschung, 2008

#### 3.1. Aussagen.

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das *wahr* oder *falsch* sein kann.<sup>22</sup> Es ist durchaus erlaubt, dass man nicht entscheiden kann, ob die Aussage wahr oder falsch ist, weil man dazu Zusatzinformationen benötigt. Wichtig ist allein, dass die Prädikate wahr und falsch sinnvolle Prädikate des Gebildes aufgrund seiner syntaktischen und semantischen Gestalt sind.

Die Bedingung der Bedeutungsklarheit wird von natürlich-sprachlichen Aussagen selten erfüllt. Nehmen wir z.B. den Satz

Dieses Pferd ist schnell

Einerseits haben wir keine Information, um welches Pferd es sich handelt, von dem da die Rede ist, und die Gültigkeit der Aussage hängt vermutlich davon ab, welches Pferd gemeint ist. Andererseits ist die Bedeutung von „schnell“ nicht so fest umrissen, dass, selbst wenn es klar wäre, um welches Pferd es sich handelt, vermutlich Uneinigkeit herrscht, ob es als schnell gelten soll oder nicht. Weitere alltagssprachliche Aussagen sind

Marsmenschen sind grün.

Ich fresse einen Besen.

Heinz Ngolo und Mustafa Müller sind Freunde.

In der natürlichen Sprache besteht die Möglichkeit, durch Zusatzinformationen, Kontextbezug, intersubjektive Vereinbarungen und kommunikative Bedeutungsangleichungen eine Gesprächssituation zu erzeugen, in der man

---

<sup>22</sup>Statt „wahr“ sagt man auch, dass die Aussage *gilt* oder dass sie *richtig* ist, statt „falsch“ auch, dass sie nicht gilt.

über die Gültigkeit von solchen nicht scharf definierten Aussagen weitgehende Einigkeit erzielen kann. In der Logik und in der Mathematik hingegen sind diese praktischen Notlösungen nicht erlaubt, sondern die Bedeutung einer Aussage soll allein aus der Bedeutung der in ihr verwendeten Begriffe erschließbar sein, wobei diese Begriffe zuvor klar und unmissverständlich definiert worden sein müssen. Einige mathematische Aussagen sind (egal ob wahr oder falsch) sind

$$5 > 3.$$

$$5 < 3.$$

5 ist eine natürliche Zahl.

Es ist  $7 + 5 = 13$ .

Primzahlen sind ungerade.

Die minimale Darstellung eines Geldbetrages durch die Eurozahlen ist eindeutig.

Wenn man diese Aussagen versteht, und insbesondere die in ihnen verwendeten Begriffe und Symbole kennt, so sieht man, dass es sich um Aussagen handelt, die entweder wahr oder falsch sind, und zwar unabhängig davon, ob der Leser weiß, ob sie wahr oder falsch sind. Ob ein sprachliches Gebilde eine Aussage ist hängt nicht vom Wissen, ob sie wahr oder falsch ist, oder vom Aufwand ab, mit dem man durch zusätzliches Nachforschen, durch Experimente oder durch logisch-mathematisches Überlegen entscheiden könnte, ob sie wahr oder falsch ist. Bei den folgenden Beispielen handelt es sich zwar um mathematische Objekte, aber nicht um Aussagen:

5

$5+11$

Die Menge der Primzahlen

$A \cap B$

Eine Summe von fünf Quadraten

$\int_a^b f(t)dt.$

Statt uns jetzt mit konkreten Aussagen auseinander zu setzen, nehmen wir im Folgenden den strukturellen Standpunkt ein, dass eine Aussage eine Aussagenvariable  $p$  ist, die einen der beiden *Wahrheitswerte* wahr oder falsch annehmen kann. Zunächst interessiert uns dann, wie sich diese Wahrheitsbelegungen bei einer Konstruktion von neuen Aussagen aus alten Aussagen verhalten.

### 3.2. Verknüpfungen von Aussagen.

Man kann aus verschiedenen Aussagen neue Aussagen bilden. Aus der Aussage

Ich fresse einen Besen

kann man die *negierte Aussage*

Ich fresse *nicht* einen Besen<sup>23</sup>

machen, und aus den beiden Aussagen

Marsmenschen sind grün

und

Ich fresse einen Besen

kann man beispielsweise die folgenden neuen Aussagen basteln.

Marsmenschen sind grün *und* ich fresse einen Besen

Marsmenschen sind grün *oder* ich fresse keinen Besen

*Wenn* Marsmenschen grün sind, *dann* fresse ich einen Besen

Wenn nicht gilt, dass Marsmenschen grün sind, dann fresse ich einen Besen

Wenn Marsmenschen grün sind, dann fresse ich keinen Besen

Wenn nicht gilt, dass Marsmenschen grün sind, dann fresse ich keinen Besen

Marsmenschen sind *genau dann* grün, *wenn* ich einen Besen fresse

Hierbei werden die einzelnen Aussagen für sich genommen nicht verändert (bis auf gewisse grammatische Anpassungen), sondern lediglich in einen logischen Zusammenhang zueinander gebracht. Eine solche logische Verknüpfung ist dadurch gekennzeichnet, dass sich ihr Wahrheitsgehalt allein aus den Wahrheitsgehalten der beteiligten Aussagen und der Bedeutung der *grammatischen Konjunktionen* (aussagenlogisch spricht man von *Junktoren*) ergibt und keine weitere Information dafür erforderlich ist. Die Aussage

Marsmenschen sind grün und ich fresse keinen Besen

ist beispielsweise genau dann wahr, wenn sowohl Marsmenschen grün sind und ich keinen Besen fresse. Das ist jedenfalls die Bedeutung der logischen „und“-Verknüpfung. Eine inhaltliche Beziehung zwischen den beiden Teilaussagen ist nicht nötig.

Betrachten wir zum Vergleich eine Aussage wie

Die grünen Marsmenschen fressen Besen

---

<sup>23</sup>Die sicherste Art, zur *Negation* zu kommen, ist eine Konstruktion wie „es ist nicht der Fall, dass ...“ zu verwenden. Dies ist insbesondere beim anderen Beispielsatz zu bedenken, die Aussage „Marsmenschen sind nicht grün“ kann man so verstehen, dass alle Marsmenschen nicht-grün sind, oder dass eben nicht alle Marsmenschen grün, es also Ausnahmen gibt. Siehe auch den Abschnitt über Quantoren weiter unten.

Hier entsteht eine völlig neue Aussage, die lediglich einzelne Vokabeln oder Prädikate der vorgegebenen Aussagen verwendet, ihr Wahrheitsgehalt lässt sich aber keineswegs aus den Wahrheitsgehalten der vorgegebenen Aussagen erschließen.

Eine logische Verknüpfung von Aussagen liegt vor, wenn sich der Wahrheitsgehalt der Gesamtaussage aus den Wahrheitsgehalten der Teilaussagen ergibt. Die beteiligten Verknüpfungen legen dabei fest, wie sich die Wahrheitswerte der Gesamtaussage bestimmen lassen.

### 3.3. Aussagenvariablen und Junktoren.

Um sich die Abhängigkeiten von zusammengesetzten Aussagen allein von den einzelnen Wahrheitsgehalten der beteiligten Teilaussagen und den Junktoren, nicht aber von den konkreten Aussagen und ihren Bedeutungen klarer zu machen, ist es sinnvoll, mit *Aussagenvariablen* zu arbeiten und die Junktoren durch Symbole zu repräsentieren. Für Aussagen schreiben wir jetzt

$$p, q, \dots,$$

und wir interessieren uns also nicht für den Gehalt von  $p$ , sondern lediglich für die möglichen Wahrheitswerte (oder *Belegungen*) von  $p$ , die wir mit  $w$  (wahr) oder  $f$  (falsch) bezeichnen (gelegentlich verwendet man auch die Wahrheitswerte 1 und 0). Bei der *Negation* werden einfach die Wahrheitswerte vertauscht, was man mit einer einfachen *Wahrheitstabelle* ausdrückt:

#### Negation

$p$	$\neg p$
w	f
f	w

Bei einer konkreten Aussage gibt es in der Regel mehrere sprachliche Möglichkeiten, die Negation zu formulieren. Um die Aussage „ich fresse einen Besen“ zu negieren, ist es egal, ob man sagt:

Ich fresse nicht einen Besen.

Ich fresse keinen Besen.

Es ist nicht der Fall, dass ich einen Besen fresse.

Es trifft nicht zu, dass ich einen Besen fresse.

Die Negation wirkt auf eine einzige Aussage, man spricht von einem *einstelligen Operator*. Kommen wir nun zu *mehrstelligen Operatoren*, die von mindestens zwei Aussagen abhängen. Bei der Verknüpfung von zwei Aussagen gibt es insgesamt vier mögliche Kombinationen der Wahrheitswerte, so dass jede logische Verknüpfung dadurch festgelegt ist, wie sie diesen vier Kombinationen einen Wahrheitswert zuordnet. Daher gibt es insgesamt 16 logische Verknüpfungen, die wichtigsten sind die folgenden vier.

Die *Konjunktion* ist die *Und-Verknüpfung*. Sie ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind; sie ist also falsch, sobald nur eine der beteiligten Aussagen falsch ist. Die *Wahrheitstabelle* der Konjunktion sieht so aus.

### Konjunktion

$p$	$q$	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die *Disjunktion* (oder *Alternation*) ist die einschließende *Oder-Verknüpfung*. Sie ist wahr sobald mindestens eine der Teilaussagen wahr ist, und insbesondere auch dann wahr, wenn beide Aussagen zugleich wahr sind. Sie ist nur in dem einzigen Fall falsch, dass beide Teilaussagen falsch sind. Offensichtlich sind bei einer Konjunktion und einer Disjunktion die beteiligten Teilaussagen gleichberechtigt.

### Disjunktion

$p$	$q$	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die *Implikation* ist die in der Mathematik wichtigste Verknüpfung. Mathematische Sätze haben fast immer die Gestalt einer (verschachtelten) Implikation. Der logische Gehalt einer Implikation ist, dass aus der Gültigkeit einer *Voraussetzung* die Gültigkeit einer *Konklusion* folgt.<sup>24</sup> Sie wird meistens durch „Wenn  $p$  wahr ist, dann ist auch  $q$  wahr“ ausgedrückt. Ihre Wahrheitsbedingung ist daher, dass wenn  $p$  mit wahr belegt ist, dann muss auch  $q$  mit wahr belegt sein. Dies ist erfüllt, wenn  $p$  falsch ist oder wenn  $q$  wahr ist.<sup>25</sup> Ihre Wahrheitstabelle ist daher

<sup>24</sup>Genauer gesagt haben mathematische Sätze fast immer die Gestalt  $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ .

<sup>25</sup>An die Wahrheitsbelegung einer Implikation für den Fall, wo der Vordersatz falsch ist, muss man sich etwas gewöhnen. Der Punkt ist, dass wenn man eine Implikation  $p \rightarrow q$  beweist, dass man dann  $p$  als wahr annimmt und davon ausgehend zeigen muss, dass auch  $q$  wahr ist. Der Fall, dass  $p$  falsch ist, kommt also in einem Implikationsbeweis gar nicht explizit vor. In diesem Fall gilt die Implikation, obwohl sie keine „Schlusskraft“ besitzt. Nehmen wir als Beispiel die mathematische Aussage, dass wenn eine natürliche Zahl  $n$  durch vier teilbar ist, dann ist sie gerade. Dies ist eine wahre Aussage für alle natürlichen Zahlen, sie gilt insbesondere auch für alle Zahlen, die *nicht* durch vier teilbar sind. Es gibt auch jeweils für alle drei Wahrheitsbelegungen, die eine Implikation wahr machen, Beispiele von natürlichen Zahlen, die genau diese Wahrheitsbelegung repräsentieren, nicht aber für die vierte.

### Implikation

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bei einer Implikation sind die beiden beteiligten Teilaussagen nicht gleichberechtigt, die Implikationen  $p \rightarrow q$  und  $q \rightarrow p$  sind verschiedene Aussagen. Eine Implikation hat also eine „Richtung“.<sup>26</sup> Im allgemeinen Gebrauch und auch in der Mathematik werden Implikationen zumeist dann verwendet, wenn der Vordersatz der „Grund“ für die Konklusion ist, wenn die Implikation also einen kausalen Zusammenhang ausdrückt. Diese Interpretation spielt aber im aussagenlogischen Kontext keine Rolle.

Wenn die beiden Implikationen  $p \rightarrow q$  und  $q \rightarrow p$  zugleich gelten, so wird das durch „genau dann ist  $p$  wahr, wenn  $q$  wahr ist“ ausgedrückt. Man spricht von einer *Äquivalenz* der beiden Aussagen, die Wahrheitstabelle ist

### Äquivalenz

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiele für eine mathematische Äquivalenzaussage sind:

Eine natürliche Zahl  $n$  ist genau dann gerade, wenn sie im Zehnersystem auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endet.

Eine Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn es eine Seite gibt, deren Quadrat gleich der Summe der beiden anderen Seitenquadrate ist.

Die Hinrichtung im zweiten Beispielsatz ist dabei der Satz des Pythagoras, die Rückrichtung gilt aber auch. In gewissen Kontexten werden Äquivalenz als Implikationen formuliert. Dies gilt beispielsweise für Belohnungen, Bestrafungen und auch in mathematische Definitionen. Wenn man sagt: „wenn du nicht durch 0 teilst, bekommst du ein Gummibärchen“, so meint man in aller Regel, dass man auch nur dann eines bekommt, aber nicht, wenn man durch 0 teilt. Mathematische Definitionen wie „eine Zahl heißt gerade, wenn sie ein Vielfaches der 2 ist“, sind als genau dann, wenn zu verstehen.

Unter Verwendung der Negation kann man jede logische Verknüpfung durch die angeführten Verknüpfungen ausdrücken, wobei man noch nicht mal alle

---

<sup>26</sup>Bei einer Implikation  $p \rightarrow q$  sagt man auch, dass  $p$  eine *hinreichende Bedingung* für  $q$  und dass  $q$  eine *notwendige Bedingung* für  $p$  ist. Siehe dazu auch die Wahrheitstabelle zur Kontraposition weiter unten.

braucht. Z.B. kann man die Konjunktion (und ebenso die Implikation und die Äquivalenz) auf die Disjunktion zurückführen, die Wahrheitstabelle<sup>27</sup>

### Konjunktion als Disjunktion

$p$	$q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

zeigt nämlich, dass die Wahrheitsfunktion von  $\neg(\neg p \vee \neg q)$  mit der Wahrheitsfunktion von  $p \wedge q$  übereinstimmt. Daher sind die beiden Ausdrücke logisch gleichwertig. Bei einem solchen nur leicht verschachtelten Ausdruck kann man die Wahrheitswerte noch einfach berechnen und damit die Wahrheitsgleichheit mit der Konjunktion feststellen. Bei komplizierteren (tiefer verschachtelten) Ausdrücken ist es sinnvoll, abhängig von den Belegungen der beteiligten Aussagenvariablen die Wahrheitswerte der Zwischenausdrücke zu berechnen. Im angegebenen Beispiel würde dies zur Tabelle

### Konjunktion als Disjunktion

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	f
f	f	w	w	w	f

führen. Natürlich kann man statt zwei auch beliebig viele Aussagenvariablen verwenden und daraus über die Verknüpfungen neue Aussagen konstruieren. Die Wahrheitsbelegung der zusammengesetzten Aussagen lassen sich dann ebenfalls in entsprechend größeren Wahrheitstabellen darstellen.

### 3.4. Tautologien.

Bei Einzelaussagen und zusammengesetzten Aussagen ist jeder Wahrheitswert erlaubt, und die Wahrheitswerte bei den verknüpften Aussagen ergeben sich aus den Einzelbelegungen über die Wahrheitsregeln, die die Junktoren auszeichnen. Abhängig von den Belegungen können somit alle Aussagen wahr oder falsch sein. Besonders interessant sind aber solche Aussagen, die unabhängig von den Einzelbelegungen stets wahr sind. Solche Aussagen nennt man *Tautologien* (oder *allgemeingültig*). Sie sind für die Mathematik vor allem deshalb wichtig, weil sie erlaubten Schlussweisen entsprechen, wie sie in Beweisen häufig vorkommen. Wenn man beispielsweise schon die beiden Aussagen  $p$  und  $p \rightarrow q$  bewiesen hat, wobei hier  $p$  und  $q$  für konkrete Aussagen

<sup>27</sup>Im Folgenden verwenden wir, um Klammern zu sparen, die Konvention, dass die Negation stärker bindet als alle mehrstelligen Junktoren, und dass die Konjunktion stärker bindet als die anderen zweistelligen Junktoren.

stehen, so kann man daraus auf die Gültigkeit von  $q$  schließen. Die zugrunde liegende aussagenlogische Tautologie ist

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q.$$

Wie gesagt, eine Tautologie ist durch den konstanten Wahrheitswert wahr gekennzeichnet. Der Nachweis, dass eine gegebene Aussage eine Tautologie ist, verläuft am einfachsten über eine Wahrheitstabelle.

### **Ableitungsregel (Modus Ponens)**

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

### **Doppelnegation**

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
w	f	w	w
f	w	f	w

### **Tertium non datur**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
w	f	w
f	w	w

Die Regel *Tertium non datur* geht auf Aristoteles zurück und besagt, dass eine Aussage (entweder) wahr oder falsch ist und es keine dritte Möglichkeit gibt. Die obige Regel drückt formal gesehen nur aus, dass mindestens ein Wahrheitswert gelten muss, die Regel davor sagt, dass  $p$  wahr zugleich  $\neg p$  wahr ausschließt, was man auch den *Satz vom Widerspruch* nennt (zusammenfassend spricht man auch vom *Bivalenzprinzip*). Die Gültigkeit dieser Regeln ist bei vielen umgangssprachlichen Aussagen fragwürdig, im Rahmen der Aussagenlogik und der Mathematik haben sie aber uneingeschränkt Gültigkeit, was wiederum damit zusammenhängt, dass in diesen Gebieten nur solche Aussagen erlaubt sind, denen ein eindeutiger Wahrheitswert zukommt. Als Beweisprinzip schlägt sich dieses logische Prinzip als *Beweis durch Fallunterscheidung* nieder, wobei die folgende Tautologie dieses Beweisprinzip noch deutlicher ausdrückt.

### **Fallunterscheidung**

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q))$	$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$
w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	w

Bei der Fallunterscheidung will man  $q$  beweisen, und man beweist es dann einerseits (Fall 1) unter der zusätzlichen Annahme  $p$  und andererseits (Fall 2) unter der zusätzlichen Annahme  $\neg p$ . Man muss dabei zweimal was machen,

der Vorteil ist aber, dass die zusätzlichen Annahmen zusätzliche Methoden und Techniken erlauben.

Die *Kontraposition* wird häufig in Beweisen verwendet, ohne dass dies immer explizit gemacht wird. In einem Beweis nimmt man einen pragmatischen Standpunkt ein, und manchmal ist es einfacher, von  $\neg q$  nach  $\neg p$  zu gelangen als von  $p$  nach  $q$ .

### Kontraposition

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Die *Widerspruchsregel* ist auch ein häufiges Argumentationsmuster. Man zeigt, dass aus einer Aussage  $p$  ein Widerspruch, oft von der Form  $q \wedge \neg q$ , folgt, und schließt daraus, dass  $p$  nicht gelten kann, also  $\neg p$  gelten muss.

### Widerspruchsregel

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

## 3. ARBEITSBLATT

### 3.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 3.1.** Folgende Implikationen stehen fest.



Heinz Ngolo

- (1) Wenn Mustafa Müller lustige Grimassen macht, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
- (2) Wenn er zu viele Gummibärchen isst, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
- (3) Wenn er einen Ball gegen den Bauch bekommt, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.

Im Moment muss sich Heinz Ngolo nicht den Bauch halten. Was kann man daraus schließen?

### 3.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 3.2.** Warum ist Mathematik schwierig, obwohl darin doch alles logisch ist?

**Aufgabe 3.3.** Die Implikation  $p \rightarrow q$  sei bereits bewiesen. Die Aussage  $p'$  hört sich ähnlich an wie die Aussage  $p$ . Kann man daraus die Implikation  $p' \rightarrow q$  beweisen?

**Aufgabe 3.4.** Paraphrasiere die folgenden Aussagen als Wenn-dann-Aussagen.

- (1) Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.
- (2) Was der Bauer nicht kennt frisst er nicht.
- (3) Sobald die Sonne scheint geht Lucy nach draußen.
- (4) Ab 32 Punkten bekommt man eine 1.
- (5) Mit dieser Einstellung sollten Sie nicht Lehrer werden.
- (6) Was uns nicht umbringt macht uns härter.
- (7) Früh übt sich, wer ein Meister werden will.
- (8) Wer  $A$  sagt muss auch  $B$  sagen.
- (9) Wer nicht kommt zur rechten Zeit, der muss sehn, was übrig bleibt.
- (10) Wer selber ohne Sünde ist werfe den ersten Stein.

**Aufgabe 3.5.** Erstelle die Kontrapositionen zu den in Aufgabe 3.4 formulierten Aussagen. Vermeide dabei Doppelnegationen.

**Aufgabe 3.6.** Negiere eine Implikationsaussage. Führe dies am Beispiel der in der Vorlesung zitierten Aussage des Bildungsministeriums durch.

**Aufgabe 3.7.** Die folgenden Implikationen stehen fest.

- (1) Genau dann freuen sich die Regenwürmer, wenn es regnet oder schneit.
- (2) Genau dann freuen sich die Kinder, wenn die Sonne scheint oder es schneit.

Welche Schlussfolgerung kann man in den folgenden Fällen ziehen.

- a) Die Kinder und die Regenwürmer freuen sich.
- b) Die Kinder freuen sich und die Regenwürmer freuen sich nicht.
- c) Die Kinder freuen sich nicht und die Regenwürmer freuen sich.

**Aufgabe 3.8.** Immer wenn es schneit, dann unternimmt Mustafa Müller (mindestens) eine der folgenden Tätigkeiten.

- (1) Er fährt Schlitten.
- (2) Er baut einen Schneemann.
- (3) Er macht mit Heinz, Gabi und Lucy eine Schneeballschlacht.
- (4) Er schippt für seine Oma den Schnee weg und trinkt mit ihr Tee.

Nun schneit es, und Mustafa trinkt keinen Tee, er fährt nicht Schlitten und er baut keinen Schneemann.

- a) Welche Tätigkeit führt er aus?
- b) Kann man eine Aussage darüber treffen, ob er Schnee schippt?
- c) Kann man eine Aussage darüber treffen, ob er für seine Oma Schnee schippt?



Mustafa Müller

**Aufgabe 3.9.\***

Folgende Aussagen sind bekannt.

- (1) Der frühe Vogel fängt den Wurm.
- (2) Doro wird nicht von Lilly gefangen.
- (3) Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
- (4) Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
- (5) Doro ist ein Wurm.
- (6) Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
- (7) Lilly schläft bis 5 Uhr und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

- (1) Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
- (2) Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
- (3) Fängt der späte Igel den Wurm?

**Aufgabe 3.10.\***

Beurteile die Snookerweisheit „Ein Snookerspiel kann man in der ersten Session nicht gewinnen, aber verlieren“ vom logischen Standpunkt aus.

**Aufgabe 3.11.\***

Im Pokal spielt Bayern München gegen den TSV Wildberg. Der Trainer vom TSV Wildberg, Herr Tor Acker, sagt „Wir haben in dem Spiel nichts zu verlieren“. Die Logiklehrerin von Wildberg, Frau Loki Schummele, sagt „Wenn die Wildberger in dem Spiel nichts zu verlieren haben, dann haben auch die Münchner in dem Spiel nichts zu gewinnen“. Der Trainer von Bayern München, Herr Roland Rollrasen, sagt „Wir haben in dem Spiel etwas zu gewinnen“.

- (1) Ist die Aussage von Frau Schummele logisch korrekt?
- (2) Es sei vorausgesetzt, dass die Aussage des Bayerntainers wahr ist. Welche Folgerung kann man dann für die Aussage von Herrn Acker ziehen?

**Aufgabe 3.12.** Die Lehrerin fragt Gabi Hochster „Stimmt das oder stimmt das nicht“? Darauf antwortet Gabi mit den Worten „Ja, das stimmt oder das stimmt nicht“. Wie beurteilen Sie die Antwort von Gabi? Gelten aussagenlogische Gesetze im Fragekontext?

**Aufgabe 3.13.** Die Klasse 6b hat an jedem Wochentag eine Stunde Mathematik. Die Lehrerin, Frau Maier-Sengupta, sagt am Freitag: „Nächste Woche werden wir eine Klassenarbeit schreiben, der genaue Tag wird aber eine Überraschung sein“. Daraufhin sagt Gabi Hochster: „Sie lügen!“ An welche Argumentation denkt Gabi?

**Aufgabe 3.14.** Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

- (1)  $\alpha \wedge \beta \longleftrightarrow \beta \wedge \alpha$ .
- (2)  $\alpha \vee \beta \longleftrightarrow \beta \vee \alpha$ .

**Aufgabe 3.15.** Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

- (1)  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \longleftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ .  
 (2)  $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \longleftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ .

**Aufgabe 3.16.** Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

- (1)  $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$ .  
 (2)  $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ .  
 (3)  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ .  
 (4)  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ .  
 (5)  $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$ .

**Aufgabe 3.17.** Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$\neg(\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$$

und

$$\neg(\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \vee \neg\gamma)$$

Tautologien sind.

**Aufgabe 3.18.\***

Zeige, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$(r \rightarrow (p \wedge \neg q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg r \vee q))$$

allgemeingültig ist

**Aufgabe 3.19.\***

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

$p$	$q$	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

**Aufgabe 3.20.** Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

$p$	$q$	?
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

### 3.3. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 3.21. (1 Punkt)

Es gilt: Wenn keine Ferien sind und kein Wochenende ist und er nicht krank ist, dann muss Heinz Ngolo in die Schule. Heute muss Heinz Ngolo nicht in die Schule. Was kann man daraus schließen?

#### Aufgabe 3.22. (4 Punkte)

Folgende Aussagen stehen fest.

- (1) In den Sommerferien fahren wir nach Italien.
- (2) In den Winterferien fahren wir nach Österreich.
- (3) Wenn wir in Österreich sind, besuchen wir auch die Oma.
- (4) Wenn wir nach Italien fahren, fahren wir durch die Schweiz oder durch Österreich.

Beantworte die folgenden Fragen.

- a) Wir fahren nach Italien, aber nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?
- b) Es sind Sommerferien und wir fahren nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?
- c) Kann man die Aussage „Wenn wir die Oma nicht besuchen, dann sind keine Winterferien“ aus den Voraussetzungen erschließen?
- d) Kann man die Aussage „In den Sommerferien und in den Winterferien besuchen wir die Oma“ aus den Voraussetzungen erschließen?

#### Aufgabe 3.23. (3 Punkte)

Bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$(((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee (\neg(r))) \leftrightarrow ((\neg(r)) \wedge (q)),$$

wenn  $p$  und  $r$  falsch sind und wenn  $q$  wahr ist.

**Aufgabe 3.24.** (2 Punkte)

Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

$$(1) (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma).$$

$$(2) (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$

**Aufgabe 3.25.** (3 Punkte)

Man beweise mittels Wahrheitstabellen die (verallgemeinerten) *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

und

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

Tautologien sind.

**Aufgabe 3.26.** (2 Punkte)

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

$p$	$q$	?
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

## 4. VORLESUNG - QUANTOREN UND MENGEN

## 4.1. Quantoren.

Betrachten wir nochmal die beiden Beispielaussagen

Marsmenschen sind grün

und

Ich fresse einen Besen,

und schauen uns die innere Struktur genauer an. In der ersten Aussage wird einer gewissen Art von Lebewesen eine Eigenschaft zugesprochen, so wie wenn man sagt, dass Geparden schnell sind oder dass Faultiere faul sind. Damit kann man meinen, dass Marsmenschen „im Normalfall“ oder „fast immer“ grün sind, oder aber im strengeren Sinn, dass wirklich alle Marsmenschen grün sind. In der Mathematik interessiert man sich für Aussagen, die ohne

Ausnahmen gelten (wobei man allerdings in einer mathematischen Aussage die Ausnahmen auch explizit machen kann), so dass wir die Aussage im strengen Sinn verstehen wollen. Es handelt sich um eine sogenannte *Allaussage*. In ihr kommen zwei *Prädikate* (Eigenschaften, Attribute) vor, nämlich einerseits, ein Marsmensch zu sein, andererseits, grün zu sein. Ein Prädikat  $P$  ist etwas, was einem Objekt (grammatisch spricht man von einem Subjekt), einem Gegenstand, einem Element zukommen oder nicht zukommen kann. Ein Prädikat ist für sich genommen keine Aussage; aus einem Prädikat kann man aber grundsätzlich auf zwei verschiedene Arten eine Aussage machen, indem man nämlich einerseits (durch *einsetzen*) für ein konkretes Objekt  $a$  die Aussage

$$P(a)$$

bildet, die bedeutet, dass das Objekt  $a$  die Eigenschaft  $P$  besitzt, was wahr sein kann oder eben auch nicht. Andererseits kann man daraus durch *Quantifizierung* eine Aussage gewinnen. So kann man die Aussage bilden, dass alle Objekte (typischerweise aus einer bestimmten Grundmenge) die Eigenschaft  $P$  haben, was wiederum wahr oder falsch sein kann. Das drückt man formallogisch durch

$$\forall xP(x)$$

aus. Das Symbol

$$\forall$$

ist eine abkürzende Schreibweise für „für alle“, und besitzt ansonsten keine tiefere Bedeutung. Es wird *Allquantor* genannt. Die obige Marsmenschenaussage kann man als

$$\forall x(M(x) \rightarrow G(x))$$

schreiben. Das bedeutet, dass für alle Objekte ohne weitere Einschränkung gilt: wenn es sich um einen Marsmenschen handelt (wenn also  $M$  zutrifft), dann ist er auch grün. Für jedes  $x$  steht in der großen Klammer eine Aussage in der Form einer Implikation, die eben besagt, dass wenn der Vordersatz wahr ist, dann auch der Nachsatz wahr sein muss.

Die zweite Beispielaussage kann bedeuten, dass ich genau einen Besen fresse oder aber mindestens einen Besen. Die Wortbedeutung des unbestimmten Artikels ist nicht eindeutig, in einer Aussage wie „eine Pflanze braucht Wasser“ bedeutet „eine“ sogar „alle“. In der Mathematik bedeutet es fast immer „mindestens einen“. Die Besenaussage kann man also paraphrasieren als

Es gibt einen Besen, den ich fresse.

Dies ist eine *Existenzaussage*. Eine formallogische Repräsentierung ist

$$\exists x(B(x) \wedge F(x)),$$

wobei  $B(x)$  bedeutet, dass das Objekt  $x$  ein Besen ist und wobei  $F(x)$  bedeutet, dass ich dieses  $x$  fresse. Man könnte genauso gut

$$\exists x(F(x) \wedge B(x))$$

schreiben. Das Zeichen

$$\exists$$

wird „es gibt“ oder „es existiert“ gesprochen und wird der *Existenzquantor* (oder *Existenzoperator*) genannt.

Eine Allaussage behauptet, dass ein gewisses Prädikat allen Objekten (aus einer gewissen Grundmenge) zukommt. Wie alle Aussagen kann dies wahr oder falsch sein. Eine Allaussage ist genau dann falsch, wenn es mindestens ein Objekt (aus der Grundmenge) gibt, dem das Prädikat nicht zukommt. Daher sind die beiden Quantoren, also der Allquantor und der Existenzquantor, über die Negation eng miteinander verknüpft und lassen sich gegenseitig ersetzen, und zwar gelten die Regeln

$$\neg(\forall xP(x)) \text{ ist gleichbedeutend mit } \exists x(\neg P(x)),$$

$$\neg(\exists xP(x)) \text{ ist gleichbedeutend mit } \forall x(\neg P(x)),$$

$$\forall xP(x) \text{ ist gleichbedeutend mit } \neg(\exists x(\neg P(x)))$$

und

$$\exists xP(x) \text{ ist gleichbedeutend mit } \neg(\forall x(\neg P(x))).$$

Neben einstelligen Prädikaten wie  $P(x)$  gibt es auch mehrstellige Prädikate der Form

$$P(x, y) \text{ oder } Q(x, y, z) \text{ etc. ,}$$

die eine Beziehung zwischen mehreren Objekten ausdrücken, wie z.B. „ist verwandt mit“, „ist größer als“, „sind Eltern von“ u.s.w. Entsprechend kann dann über die verschiedenen Variablen quantifiziert werden, d.h. man hat mit Ausdrücken der Form

$$\forall x(\exists yP(x, y)), \exists x(\forall yP(x, y)), \forall x(\exists y(\forall zQ(x, y, z))) \text{ usw.}$$

zu tun.

Die Variablenbezeichnung in einer quantifizierten Aussage ist grundsätzlich unwichtig, d.h. es ist egal, ob man  $\forall aP(a)$  oder  $\forall tP(t)$  schreibt. Man darf dabei aber nur Variablennamen (also Buchstaben) verwenden, die im gegenwärtigen Kontext nicht schon anderweitig verwendet sind.

Die Logik, die sich mit quantifizierten Aussagen auseinandersetzt, heißt *Prädikatenlogik* oder *Quantorenlogik*. Wir werden sie nicht systematisch entwickeln, da sie in der Mathematik als Mengentheorie auftritt. Statt  $P(x)$ , dass also ein Prädikat einem Objekt zukommt, schreiben wir  $x \in P$ , wobei dann  $P$  die Menge aller Objekte bezeichnet, die diese Eigenschaft haben. Mehrstellige Prädikate treten in der Mathematik als Relationen auf. Das nächste mal werden wir die Sprache der Mengen in ihren Grundzügen vorstellen.

## 4.2. Mengen.

Die Sprache der Mathematik wird in der Sprache der Mengen formuliert, die eng mit der Quantorenlogik verwandt ist.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes  $x$  zu einer Menge  $M$  wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M .$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten. Die wichtigste mathematische Menge ist im Moment für uns die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.



Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.



David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

**Definition 4.1.** Unter der *leeren Menge* versteht man diejenige Menge, die kein Element besitzt. Sie wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge  $N$  heißt *Teilmenge* einer Menge  $M$ , wenn jedes Element aus  $N$  auch zu  $M$  gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür  $N \subset M$ ). Beispielsweise ist die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen eine Teilmenge der Menge aller geraden Zahlen. Bei einer Teilmengenbeziehung sagt man auch, dass eine *Inklusion*  $N \subseteq M$  vorliegt. Im Nachweis, dass  $N \subseteq M$  ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element  $x \in N$  ebenfalls die Beziehung  $x \in M$  gilt.<sup>28</sup> Dabei darf man lediglich die Eigenschaft  $x \in N$  verwenden. Im Beispiel würde man so argumentieren:  $x$  ist eine durch 6 teilbare Zahl. Daher kann man

$$x = 6y$$

mit einer gewissen natürlichen Zahl  $y$  schreiben. Dies kann man als

$$6 = 2(3y)$$

schreiben, was eben bedeutet, dass  $x$  gerade ist.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

### 4.3. Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist wohl, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. In der Abgabegruppe  $H$  sind die Personen  $\{Z, F, Jo, Je, V, Z\}$ . Dies sind genau die Personen, die Sonntags im Schwimmbad morgens um 7 Uhr am Tisch unter der Ulme sitzen. Es handelt sich dann um zwei verschiedene Beschreibungen für die gleiche Menge.

Die wichtigste Beschreibung einer Menge ist die durch eine Eigenschaft. Es sei eine Grundmenge  $M$  gegeben (wie die Menge der natürlichen Zahlen, die Leute im Kurs) und ferner eine gewisse Eigenschaft  $E$  (Prädikat), die man auf alle Elemente der Grundmenge sinnvoll anwenden kann und die auf

---

<sup>28</sup>In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage  $\forall x(x \in N \rightarrow x \in M)$ .

manche Elemente zutrifft, auf manche nicht (wie gerade zu sein oder sich auf die Weihnachtsferien zu freuen). Zu der Eigenschaft  $E$  gehört innerhalb von  $M$  die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus  $M$ , die diese Eigenschaft, diese Bedingung, erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\begin{aligned}\{x \in M \mid E(x)\} &= \{x \in M \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} \\ &= \{x \in M \mid E \text{ trifft auf } x \text{ zu}\} .\end{aligned}$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage  $E(x)$  eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft  $E$  Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\} ,$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\} ,$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Quadratzahl}\} ,$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} .$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge  $K$  der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K \mid x \text{ kommt aus Osnabrück}\} ,$$

$$E = \{x \in K \mid x \text{ studiert im Nebenfach evangelische Theologie}\} ,$$

$$D = \{x \in K \mid x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\} .$$

Die Menge  $K$  ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x \mid x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} .$$

#### 4.4. Mengenoperationen.

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen entstehen.<sup>29</sup>

---

<sup>29</sup>Man beachte, dass sich die ähnlich geformten Symbole  $\cap$  und  $\wedge$  und  $\cup$  und  $\vee$  entsprechen.

**Definition 4.2.** Zu Mengen  $L$  und  $M$  heißt

$$L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}$$

der *Durchschnitt* (oder die *Schnittmenge*) der beiden Mengen.

**Definition 4.3.** Zu zwei Mengen  $L$  und  $M$  heißt

$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$

die *Vereinigung* der beiden Mengen.

**Definition 4.4.** Zu Mengen  $A, B$  nennt man

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

die *Differenzmenge* „ $A$  ohne  $B$ “.

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge  $T \subseteq G$ .

**Definition 4.5.** Zu einer Teilmenge  $T \subseteq G$  in einer Menge  $G$  heißt

$$G \setminus T = \{x \in G \mid x \notin T\}$$

das *Komplement* von  $T$  (in  $G$ ).

Dafür schreibt man auch  $\complement T$ . Es gilt

$$G = M \cup (M \setminus T)$$

und

$$M \cap (M \setminus T) = \emptyset.$$

Beispielsweise ist das Komplement der Menge der geraden Zahlen die Menge der ungeraden Zahlen. Die Eigenschaft, dass der Durchschnitt von zwei Mengen leer ist, bekommt einen eigenen Namen.

**Definition 4.6.** Zwei Mengen  $L$  und  $M$  heißen *disjunkt*, wenn ihr Durchschnitt  $L \cap M = \emptyset$  ist.

Wenn Teilmengen durch geeignete Prädikate definiert sind, so stehen die Mengenoperationen unmittelbar in Zusammenhang mit den logischen Operationen für die Prädikate. Wenn (in einer gewissen Grundmenge)

$$M = \{x \mid \alpha(x) \text{ gilt}\}$$

und

$$L = \{x \mid \beta(x) \text{ gilt}\}$$

vorliegt, so ist

$$M \cap L = \{x \mid \alpha(x) \text{ und } \beta(x) \text{ gilt}\},$$

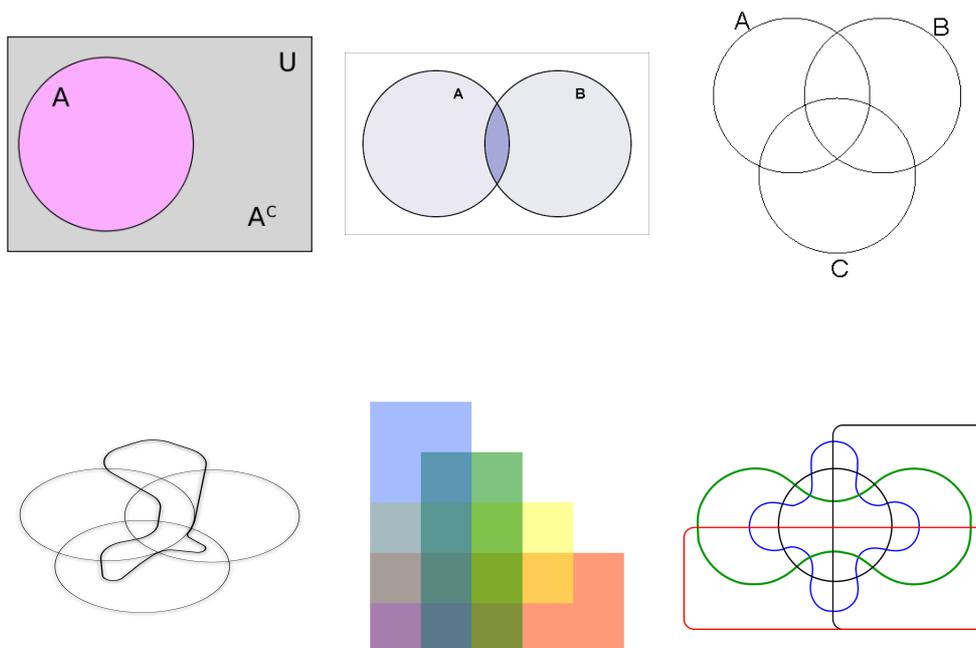
$$M \cup L = \{x \mid \alpha(x) \text{ oder } \beta(x) \text{ gilt}\},$$

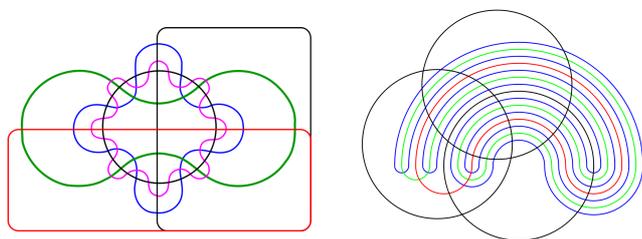
$$M \setminus L = \{x \mid \alpha(x) \text{ gilt aber } \beta(x) \text{ gilt nicht}\}.$$

#### 4.5. Mengendiagramme.

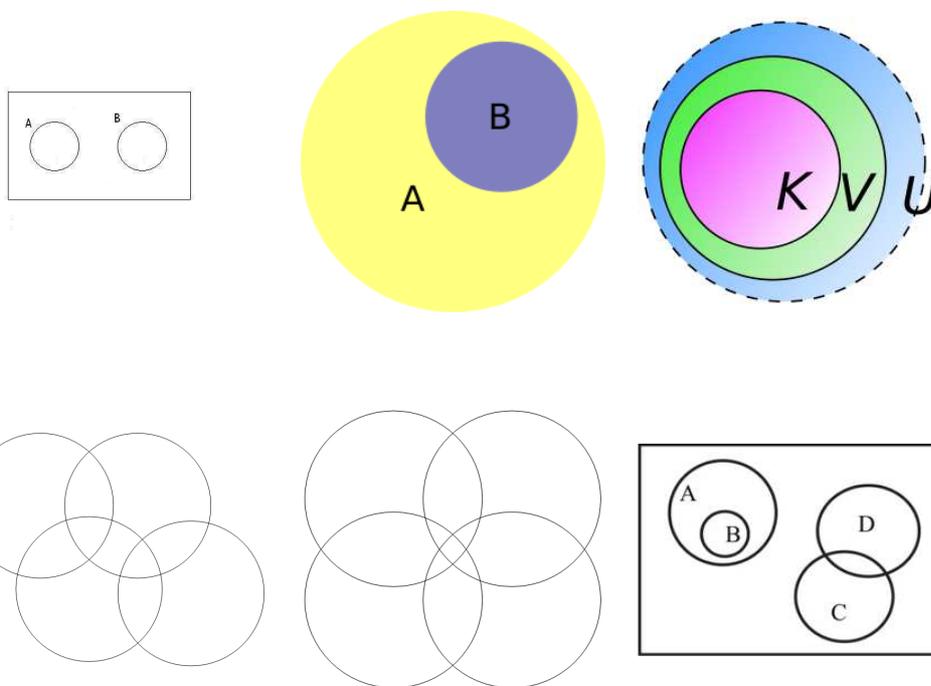
Eine Möglichkeit, Mengen oder vielmehr die zwischen verschiedenen Mengen möglichen oder existierenden Verhältnisse zueinander abzubilden, liefern *Mengendiagramme* (oder *Venn-Diagramme*). In ihnen werden Mengen durch gewisse Flächenstücke in der Ebene repräsentiert. Die Flächenstücke sollten eine möglichst einfache Form besitzen. Sie sind zumeist „zusammenhängend“ (d.h. je zwei Punkte des Stückes sind durch einen „stetigen Weg“ miteinander verbindbar). Die Flächenstücke können sich überlappen, und der Überlappungsbereich repräsentiert die Schnittmenge. Idealerweise sind die auftretenden Überlappungsbereiche selbst wieder zusammenhängend. Die verschiedenen Flächenstücke werden häufig in unterschiedlichen Farben oder Schraffuren gezeichnet, wobei dann die Überlappungsbereiche durch die zugehörigen Farbmischungen bzw. Mischschraffuren wiedergegeben werden.

Einige Beispiele für abstrakte Mengendiagramme



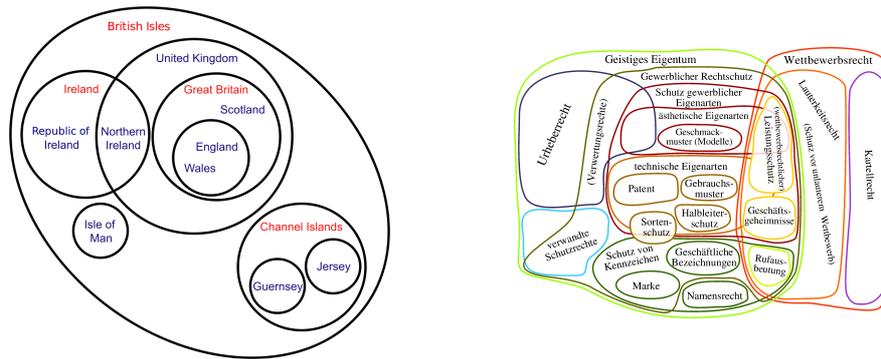
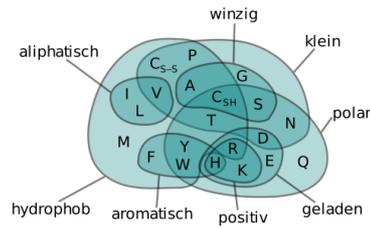


Diese Diagramme sind vollständig in dem Sinne, dass sie alle möglichen Schnitteigenschaften der beteiligten Mengen repräsentieren. In den folgenden Diagrammen wird nicht jede mögliche Schnitteigenschaft repräsentiert.



### Einige Beispiele für konkrete Mengen-Diagramme

In diesem Fall repräsentieren die beteiligten Mengen einen bestimmten Begriff, das Schnittverhalten hängt dann von inhaltlichen Überlegungen ab. Solche Diagramme spielen in der Mathematik keine große Rolle. Wenn man allerdings z. B. verschiedene algebraische Begriffe wie Gruppe, Ring, kommutativer Ring, Divisionsbereich, Körper in ihrer Hierarchie veranschaulichen möchte, so ist ein solches Diagramm durchaus sinnvoll.



#### 4. ARBEITSBLATT

##### 4.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 4.1.** Negiere die Aussage „Alle Kinder essen in der Pause ein Butterbrot oder einen Apfel“ durch eine Existenzaussage.

##### 4.2. Übungsaufgaben.

##### Aufgabe 4.2.\*

Wir betrachten den Satz „Lucy Sonnenschein tanzt auf allen Hochzeiten“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.



Lucy Sonnenschein

**Aufgabe 4.3.\***

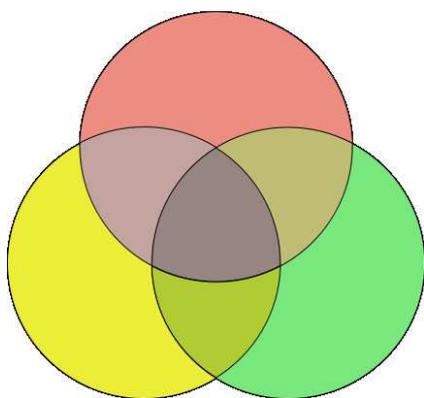
Wir betrachten den Satz „Diese Vorlesung versteht keine Sau“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

**Aufgabe 4.4.** Man formalisiere die folgenden Aussagen, indem man geeignete Prädikate erklärt. Man gebe die Negation der Aussagen (umgangssprachlich und formal) an.

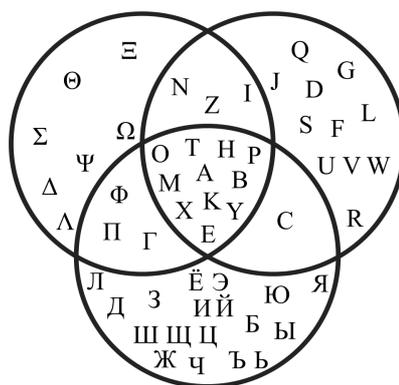
- (1) Alle Vögel sind schon da.
- (2) Alle Wege führen nach Rom.
- (3) Faulheit ist aller Laster Anfang.
- (4) Alle Menschen werden Brüder, wo dein sanfter Flügel weilt.

**Aufgabe 4.5.** Formuliere die folgenden einstelligen Prädikate innerhalb der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter Verwendung von aussagenlogischen Junktoren und Quantoren.

- (1)  $x$  ist ein Vielfaches von 10.
- (2)  $x$  ist größer als 10.
- (3)  $x$  ist kleiner als 10.
- (4)  $x$  ist eine Quadratzahl.
- (5)  $x$  ist keine Quadratzahl.
- (6)  $x$  ist eine Primzahl.
- (7)  $x$  ist keine Primzahl.
- (8)  $x$  ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.



Ein abstraktes und



ein konkretes Mengendiagramm.

**Aufgabe 4.6.** Es sei  $LA$  die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets,  $GA$  die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets

und  $RA$  die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

- (1)  $GA \setminus RA$ .
- (2)  $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$ .
- (3)  $RA \setminus (GA \cup RA)$ .
- (4)  $RA \setminus (GA \cup LA)$ .
- (5)  $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$ .

**Aufgabe 4.7.** In der Pause isst Mustafa Müller einen Apfel und einen Schokoriegel, Heinz Ngolo isst einen Apfel und ein Butterbrot, Lucy Sonnenschein isst einen Apfel, Gabi Hochster isst ein Butterbrot und einen Schokoriegel und Frau Doris Maier-Sengupta isst einen Apfel, ein Butterbrot und einen Schokoriegel.

Die Mengen der Apfel- Butterbrot und Schokoriegelesser seien mit  $A, B, S$  bezeichnet. Erstelle mengentheoretische Ausdrücke für die folgenden Beschreibungen und liste die Elemente der Mengen auf (die Grundmenge bestehe aus den fünf Personen).

- (1) Isst einen Apfel.
- (2) Isst keinen Apfel.
- (3) Isst ein Butterbrot oder einen Schokoriegel.
- (4) Isst einen Apfel aber keinen Schokoriegel.
- (5) Isst einen Apfel und einen Schokoriegel aber kein Butterbrot.
- (6) Isst ein Butterbrot, aber weder einen Apfel noch einen Schokoriegel.
- (7) Isst nichts.

**Aufgabe 4.8.** Skizziere ein Mengendiagramm zum Thema Stoff in der (Grund)-Schule, das die folgenden (oder ähnliche) Mengen und ihre Beziehungen abbildet.

- Was habe ich in der Schule gelernt.
- Was kam in meiner Schule dran.
- Was wird an manchen Schulen gelehrt.
- Was könnte an einer Schule gelehrt werden.
- Was steht in den Schulbüchern.
- An was kann ich mich erinnern.
- An was können sich andere erinnern.
- Was stand im Lehrplan.
- Was haben die Lehrer verstanden.

Welche Inklusionen gelten, wie sehen Durchschnitte, Vereinigungen, Restmengen aus?

**Aufgabe 4.9.** Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

**Aufgabe 4.10.\***

Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

**Aufgabe 4.11.** Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

- (1)  $A \cup \emptyset = A$ ,
- (2)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ,
- (3)  $A \cap B = B \cap A$ ,
- (4)  $A \cup B = B \cup A$ ,
- (5)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ,
- (6)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,
- (7)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,
- (8)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,
- (9)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .

**Aufgabe 4.12.** Man gebe für die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen quantorenlogische Beschreibungen.

- (1) Die Menge der geraden Zahlen,
- (2) Die Menge der Zahlen, die durch vier teilbar sind,
- (3) Die Menge der ungeraden Zahlen,
- (4) Die Menge der Quadratzahlen,
- (5) Die Menge der Primzahlen,
- (6) Die Menge der Zahlen, die als Summe von drei Quadratzahlen geschrieben werden können.

**Aufgabe 4.13.** Es seien  $M$  und  $N$  disjunkte Mengen und  $x \in M$ . Zeige, dass auch  $M \setminus \{x\}$  und  $N \cup \{x\}$  disjunkt sind und dass

$$M \cup N = (M \setminus \{x\}) \cup (N \cup \{x\})$$

gilt.

**Aufgabe 4.14.** Finde Parallelen zwischen Aussagen- und Quantorenlogik einerseits und Mengentheorie andererseits.

### 4.3. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 4.15. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden einstelligen Prädikate innerhalb der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter Verwendung von aussagenlogischen Junktoren und Quantoren.

- (1)  $x$  ist ein Vielfaches von 5.
- (2)  $x$  ist eine ungerade Zahl.
- (3)  $x$  ist eine Kubikzahl.
- (4)  $x$  ist ein Vielfaches von 5 und ein Vielfaches von 3.
- (5)  $x$  ist ein Vielfaches von 5 oder ein Vielfaches von 3.
- (6)  $x$  besitzt bei Division durch 5 den Rest 3.
- (7)  $x$  ist die Summe von zwei Quadratzahlen.
- (8)  $x$  ist die Summe von vier Quadratzahlen.

#### Aufgabe 4.16. (4 Punkte)

Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\}, N = \{a, c, e\}, P = \{b\}, R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

- (1)  $M \cap N$ ,
- (2)  $M \cap N \cap P \cap R$ ,
- (3)  $M \cup R$ ,
- (4)  $(N \cup P) \cap R$ ,
- (5)  $N \setminus R$ ,
- (6)  $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$ ,
- (7)  $((P \cup R) \cap N) \cap R$ ,
- (8)  $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$ .

#### Aufgabe 4.17. (4 Punkte)

Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $A \subseteq B$ ,
- (2)  $A \cap B = A$ ,
- (3)  $A \cup B = B$ ,
- (4)  $A \setminus B = \emptyset$ ,
- (5) Es gibt eine Menge  $C$  mit  $B = A \cup C$ ,
- (6) Es gibt eine Menge  $D$  mit  $A = B \cap D$ .

**Aufgabe 4.18.** (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen  $A, B, C$  Mengen.

- (1) Modus Barbara: Aus  $B \subseteq A$  und  $C \subseteq B$  folgt  $C \subseteq A$ .
- (2) Modus Celarent: Aus  $B \cap A = \emptyset$  und  $C \subseteq B$  folgt  $C \cap A = \emptyset$ .
- (3) Modus Darii: Aus  $B \subseteq A$  und  $C \cap B \neq \emptyset$  folgt  $C \cap A \neq \emptyset$ .
- (4) Modus Ferio: Aus  $B \cap A = \emptyset$  und  $C \cap B \neq \emptyset$  folgt  $C \not\subseteq A$ .
- (5) Modus Baroco: Aus  $B \subseteq A$  und  $B \not\subseteq C$  folgt  $A \not\subseteq C$ .

## 5. VORLESUNG - ZÄHLEN UND ZÄHLEN

Es gibt nur eine  
Grundrechenart, das Zählen

---

## 5.1. Zählen.

Unter Zählen verstehen wir die geordnete systematische, prinzipiell unendliche Abfolge von wohlbestimmten, wohlunterschiedenen (sprachlichen oder schriftlichen) Symbolen. Wir erwähnen einige Möglichkeiten von solchen Abfolgen.

(1)

$$|, ||, |||, ||||, \dots$$

Dies ist die Strichabfolge. Es wird einfach bei jedem Schritt ein zusätzlicher Strich hinzugefügt. Die Symbole sind die einzelnen Strichfolgen.

(2)

$$N0, NN0, NNN0, NNNN0, NNNNN0, \dots$$

Hier hat man den Nachfolger der 0, den Nachfolger des Nachfolgers der 0, den Nachfolger des Nachfolgers des Nachfolgers der 0, u.s.w.

(3) Die Lautfolge

eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn,  
elf, zwölf, dreizehn, vierzehn, ....

Dies ist zwar sehr vertraut und man weiß, wie es weiter geht, das sprachliche Bildungsgesetz ist aber keineswegs trivial, und bei sehr großen Zahlen kommt man doch ins Schwitzen. Was kommt beispielsweise nach

neunhundertneunundneunzig Trilliarden  
neunhundertneunundneunzig Trillionen  
neunhundertneunundneunzig Billiarden  
neunhundertneunundneunzig Billionen

neunhundertneunundneunzig Milliarden  
 neunhundertneunundneunzig Millionen  
 neunhundertneunundneunzig Tausend  
 neunhundertneunundneunzig?

Es gibt keine allgemein anerkannte sprachliche Festlegung für beliebig weites Zählen. Jede sprachliche Festlegung, die jede beliebig große natürliche Zahl ausdrücken möchte, muss früher oder später auf eine Vervielfachung von Wörtern zurückgreifen, wie das im Fall der Strichfolge von Anfang an geschieht. Die Wörter werden jedenfalls auch unendlich lang, siehe w:Zahlennamen.

(4)

eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn,  
 elf, zwölf, dreizehn, ..., neunundneunzig, zehnmalzehn,  
 zehnmalzehn und eins,

Hier weiß man, wie die Folge ins Unendliche weitergeht. Statt bei zehn kann man mit der systematischen Vervielfachung auch deutlich später anfangen.

(5)

eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn,  
 zehneins, zehnzwei, zehndrei, zehnvier, ...,  
 zwanzig, zwanzigundeins, zwanzigundzwei, ....

Diese Art zu zählen (bzw. ohne das „und“) wird von einigen Leuten vorgeschlagen, um die verkehrte Aussprache von Einer- und Zehnerstellen und damit Zahlendreher zu vermeiden. Siehe den Verein w:Zwanzigeins (an der Namensgebung und auch auf der Seite des Vereins fällt auf, dass das Verhältnis zu den Zahlen von 11 bis 19 unklar ist).

(6)

yksi, kaksi, kolme, neljä, viisi, kuusi, seitsemän,  
 kahdeksan, yhdeksän, kymmenen, yksitoista, kaksitoista,  
 kolmetoista, ..., kaksikymmentä, kaksikymmentäyksi, ....

Was steht dazwischen und wie geht das weiter?

(7)

*a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z,*  
*aa, bb, cc, ....*

Man kann das Alphabet natürlich auch auf andere Weisen zu einer unendlichen Folge fortsetzen.

(8)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ... .

Hier ist das Bildungsgesetz bekannt und ziemlich einfach. Wenn die letzte Ziffer nicht 9 ist, so wird sie um 1 erhöht, für die nachfolgende

Zahl muss man also in diesem nur die letzte Ziffer durch den Nachfolger ersetzen. Wenn die letzte Ziffer eine 9 ist, muss man sämtliche hinten aneinanderliegende 9en durch 0en ersetzen und die unmittelbar davor liegende Ziffer durch ihren Nachfolger ersetzen (wie ist das zu verstehen, wenn die Zahl ausschließlich aus 9en besteht?).

(9)

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, ...

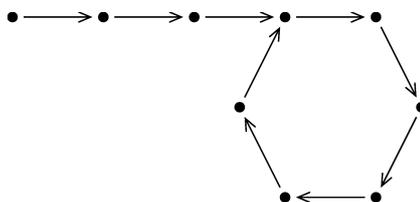
Entscheidend ist, dass jeweils festgelegt ist, welches Symbol/Objekt als Nächstes kommt. Dies wird in der Regel durch eine mehr oder weniger komplexe Bildungsvorschrift beschrieben, die sagt, wie man aus einem Symbol das Nachfolgersymbol erhält.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Der natürliche Zahlenstrahl, die Gerade hat im Moment noch keine eigenständige Bedeutung. In diesem Zählmodell bedeutet das Zählen, um eine Schrittlänge nach rechts zu gehen. Die Beschriftung mit den Dezimalzahlen gibt die Identifizierung mit einem anderen Zählmodell.

Wir halten die folgenden Eigenschaften eines sinnvollen Zählens fest.

- (1) Es gibt ein Startelement, mit dem man das Zählen anfängt.
- (2) Zu jeder Zahl gibt es eine eindeutig bestimmte Nachfolgerzahl.
- (3) Das Startelement ist selbst keine Nachfolger.
- (4) Jede Zahl, die nicht das Startelement ist, besitzt einen eindeutig bestimmten Vorgänger.
- (5) Durch Zählen erhält man ausgehend vom Startelement früher oder später alle Zahlen.



Welche Eigenschaft erfüllt dieses „Zählsystem“ nicht?

Damit schließen wir insbesondere aus, dass man im Kreis zählt, wie beispielsweise mit den Wochentagen Montag, Dienstag, ..., Sonntag, Montag. Da hat jeder Tag einen eindeutig bestimmten Vorgängertag und es gibt kein Startelement ohne Vorgänger. Die letzte Eigenschaft stellt sich, dass man keine unnötigen Zahlen mitschleppt, die für das Zählen nicht gebraucht werden. Eine solche Zählmenge nennen wir ein Modell der natürlichen Zahlen oder schlicht natürliche Zahlen. Unabhängig vom Modell bezeichnen wir zu  $n$  den

Nachfolger als  $n'$  (später auch mit  $n + 1$ , im Moment haben wir aber die Addition noch nicht eingeführt).

Wir treffen noch eine wichtige Vereinbarung über das Startelement. In den Beispielen oben hatten wir das Zählen mit einem 1-ähnlichen Symbol begonnen. Von den soeben fixierten Eigenschaften ist die Bezeichnung des Startelements unerheblich. Im Folgenden werden wir allerdings die Zahlen dazu verwenden, Anzahlen von endlichen Mengen auszudrücken, also zu zählen in einem weiteren Sinne. Da es auch die leere Menge gibt, werden wir daher das Startelement 0 nennen und den Nachfolger davon

$$0' = 1.$$

Für uns ist also 0 eine natürliche Zahl. Gründe dafür werden wir schon heute kennen lernen. Die natürlichen Zahlen werden mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet, die Menge der positiven natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}_+$ , da gehört die 0 nicht dazu.

Mit dem Abbildungsbegriff werden wir die bisherigen Beobachtungen in der übernächsten Vorlesung im Rahmen der Dedekind-Peano-Axiome präzisieren und insbesondere beweisen, dass je zwei Modelle der natürlichen Zahlen übereinstimmen.

## 5.2. Zählen ohne Zahlen.



Heinz Ngolo und Mustafa Müller im Sandkasten.

Bevor wir Mengen mit Hilfe der natürlichen Zahlen abzählen, betrachten wir kurz eine noch fundamentalere Idee, wie man Mengen auch ohne Zählkenntnisse untereinander vergleichen kann.

**Beispiel 5.1.** Die beiden Freunde Mustafa Müller und Heinz Ngolo sitzen im Sandkasten und wollen wissen, wer von ihnen mehr Buddelsachen dabei hat. Sie sind noch klein und können noch nicht zählen. Sie lösen das Problem, indem beide gleichzeitig je eine Sache aus ihrem Besitz aus dem Sandkasten hinauswerfen, und dies so lange wiederholen, bis ein Kind keine Sachen mehr im Sandkasten hat. Wenn das andere Kind noch Sachen übrig hat, so hat dieses insgesamt mehr Buddelsachen, andernfalls haben sie gleichviel.

### 5.3. Zählen von endlichen Mengen.

Die vielleicht wichtigste Funktion der natürlichen Zahlen ist es, zu einer gegebenen endlichen Menge  $M$  zu beschreiben, wie viele Elemente sich in ihr befinden, was ihre Anzahl ist. Man möchte beispielsweise wissen, wie viele Äpfel in einem Korb drin sind oder wie viele Schüler im Bus sind. Das übliche praktische Verfahren, die Anzahl einer endlichen Menge zu bestimmen, ist, die Elemente mit  $1, 2, 3, \dots, n$  durchzuzählen (die Elemente durchnummerieren), wobei jedes Element genau eine Nummer bekommt. Die letzte benötigte Zahl  $n$  ist dann die Anzahl der Menge. Um sich die Richtigkeit und Sinnhaftigkeit dieses Verfahrens klar zu machen, es ist hilfreich, mögliche Fehlerquellen, die auch praktisch häufig auftreten, zu erkennen.

- (1) Man beherrscht das Zählen der natürlichen Zahlen nicht. Dann zählt man die Äpfel nacheinander als

$5, 7, 1, 8, 3, 3, 4.$

- (2) Man beherrscht zwar das Zählen der natürlichen Zahlen, kommt aber im Zählvorgang durcheinander, etwa wenn die Schüler sich bewegen oder wenn man unterbrochen nicht. Dann zählt man

$1, 2, 3, 4, 5, \text{ wo war ich gerade? }, 5, 6, 7, \text{ wie bitte? }, 9, 10.$

- (3) Man zählt die Zahlen ohne Lücken und ohne Wiederholungen richtig ab, aber man übersieht Elemente.
- (4) Man zählt die Zahlen ohne Lücken und ohne Wiederholungen richtig ab, aber man zählt gewisse Elemente mehrfach.

Zu einer natürlichen Zahl  $n$  bezeichnen wir mit  $\{1, \dots, n\}$  diejenige Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus genau den Zahlen besteht, die man von 1 ausgehend durch sukzessives Nachfolgernehmen erhält, bis man bei  $n$  anlangt und dann aufhört. Die Elemente 1 und  $n$  gehören also insbesondere dazu. Diese Mengen sind für uns die Standardmengen mit genau  $n$  Elementen. Wir werden beliebige endliche Mengen dadurch abzählen, dass wir sie mit solchen Standardmengen in Beziehung setzen (die leere Menge betrachten wir auch als eine Standardmenge). Zu zwei natürlichen Zahlen  $k$  und  $n$ , wobei  $n$  im Zählprozess nach  $k$  kommt, bezeichnen wir mit  $\{k, \dots, n\}$  die Menge aller Zahlen, die man von  $k$  ausgehend durch sukzessives Zählen erreicht, bis man schließlich bei  $n$  anlangt und dann aufhört.

Wenn man richtig zählt, erhält man eine Zuordnung zwischen den beiden Mengen

$\{1, 2, \dots, n\}$  und der gegebenen Menge  $M$ ,

bei der jeder natürlichen Zahl zwischen 1 und  $n$  genau einem Element der Menge und umgekehrt entspricht. Intuitiv (oder nur im Sinne einer Gewohnheit) ist es klar, dass beim richtigen Zählen der Menge  $M$  stets die gleiche Zahl  $n$  als Anzahl herauskommt, dass also die Anzahl unabhängig von der Zählreihenfolge ist. Kann man das genauer begründen? Sowohl diese Frage

als auch die oben erwähnten Fehlerquellen können mit dem Abbildungsbegriff beantwortet bzw. analysiert werden.

**Definition 5.2.** Seien  $L$  und  $M$  Mengen. Eine *Abbildung*  $F$  von  $L$  nach  $M$  ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge  $L$  genau ein Element der Menge  $M$  zugeordnet wird. Das zu  $x \in L$  eindeutig bestimmte Element wird mit  $F(x)$  bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F: L \longrightarrow M, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung  $F: L \rightarrow M$  heißt  $L$  die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und  $M$  die *Wertemenge* (oder Wertevorrat oder Zielbereich) der Abbildung. Zu einem Element  $x \in L$  heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von  $F$  an der *Stelle*  $x$ . Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*. Zwei Abbildungen  $F: L_1 \rightarrow M_1$  und  $G: L_2 \rightarrow M_2$  sind gleich, wenn die Definitionsmengen und die Wertemengen übereinstimmen und wenn für alle  $x \in L_1 = L_2$  die Gleichheit  $F(x) = G(x)$  in  $M_1 = M_2$  gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge. Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt.

Der Abbildungsbegriff ist fundamental für die Mathematik, es gibt eine Vielzahl an verschiedenen Abbildungen und an Darstellungsmöglichkeiten von Abbildungen. Im jetzigen Kontext interessieren wir uns nur für Abbildungen zwischen endlichen Mengen, die stets durch eine vollständige Wertetabelle angegeben werden können. Für die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

und

$$M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

ist beispielsweise

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	$c$	$a$	$a$	$b$	$e$	$b$	$e$	$d$

eine vollständige Wertetabelle. Aus ihr kann man unmittelbar den Wert  $F(3)$  als  $a$  ablesen. Es handelt sich aber offenbar nicht um eine korrekte Abzählung dieser Menge, da  $a$  und  $e$  mehrfach im Bild auftauchen (mehrfach gezählt werden) und  $f$  überhaupt nicht im Bild auftaucht (übersehen wird).

Wenn die obigen Fehlerquellen (1) und (2) ausgeschlossen sind, so ist das (versuchsweise) Abzählen einer Menge  $M$  eine Abbildung

$$\varphi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow M, i \longmapsto \varphi(i).$$

Jeder natürlichen Zahl  $i$  wird also ein eindeutiges Element der Menge  $M$  zugeordnet. Die beiden Fehlerquellen (3) und (4) sind durch den Abbildungsbegriff *nicht* ausgeschlossen. Eine Abbildung  $F$  kann für verschiedene Definitionsstellen, also beispielsweise Zahlen  $i \neq j$  den gleichen Wert, also

$$F(i) = F(j)$$

haben und sie muss nicht jedes Element der Menge  $M$  erfassen. Es kann also Elemente  $m \in M$  mit der Eigenschaft geben, dass für jedes  $i$  aus dem Definitionsbereich stets

$$F(i) \neq m$$

gilt.

Diese beiden Fehlerquellen erfassen wir mit den folgenden Begriffen.

**Definition 5.3.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

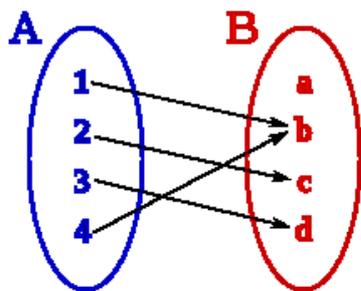
eine Abbildung. Dann heißt  $F$

- *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente  $x, x' \in L$  auch  $F(x)$  und  $F(x')$  verschieden sind.
- *surjektiv*, wenn es für jedes  $y \in M$  mindestens ein Element  $x \in L$  mit

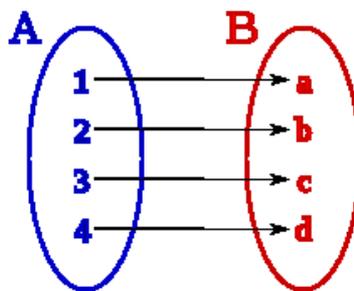
$$F(x) = y$$

gibt.

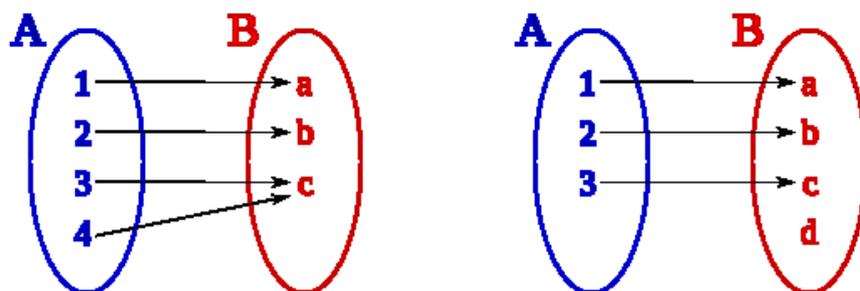
- *bijektiv*, wenn  $F$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.



Weder injektiv noch surjektiv.



Injektiv und surjektiv.



Nicht injektiv, aber surjektiv.

Injektiv, nicht surjektiv.

Diese Begriffe sind fundamental! Beispielsweise ist die Nachfolgerabbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x',$$

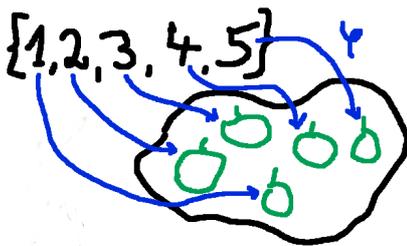
auf der Menge der natürlichen Zahlen wegen der oben angeführten Eigenschaft (4) injektiv, aber wegen der Eigenschaft (3) nicht surjektiv, da das Startelement nicht der Nachfolger einer Zahl ist.

Die Frage, ob eine Abbildung  $F$  diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung<sup>30</sup>

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen  $x$  und  $y$ ) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem  $y \in M$  mindestens eine Lösung  $x \in L$  für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem  $y \in M$  maximal eine Lösung  $x \in L$  für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem  $y \in M$  genau eine Lösung  $x \in L$  für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen  $x$  und  $x'$  aus der Voraussetzung  $F(x) = F(x')$  erschließt, dass  $x = x'$  ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus  $x \neq x'$  auf  $F(x) \neq F(x')$  zu schließen.



<sup>30</sup>Über Gleichungen und Variablen werden wir später ausführlicher sprechen.

**Definition 5.4.** Eine Menge  $M$  heißt *endlich* mit  $n$  Elementen, wenn es eine Bijektion

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow M$$

gibt.

Unser erstes Hauptanliegen ist es zu begründen, dass die natürliche Zahl  $n$  dabei eindeutig bestimmt ist. Wir werden nach einigen Vorbereitungen zeigen, dass wenn

$$\varphi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow M$$

und

$$\psi: \{1, \dots, k\} \longrightarrow M$$

bijektive Abbildungen sind, dass dann

$$n = k$$

ist. Diese Zahl heißt die *Anzahl* (oder die *Kardinalität*) der Menge. Sie wird mit  $\#(M)$  oder mit  $|M|$  bezeichnet. Die bijektive Abbildung

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow M$$

kann man eine *Nummerierung* der Menge  $M$  nennen. Eine Menge besitzt also  $n$  Elemente, wenn man sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$  durchnummerieren kann. Zwei endliche Mengen  $M$  und  $N$ , für die es eine Bijektion

$$M \longrightarrow N$$

gibt, besitzen die gleiche Anzahl. Dies beruht einfach darauf, dass diese Bijektion verknüpft mit der bijektiven Nummerierung wieder eine Bijektion ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, für die es also keine Bijektion mit  $\{1, \dots, n\}$  für irgendein  $n$  gibt, heißt *unendlich*.

**Bemerkung 5.5.** Unter *Modellierung* versteht man in der Mathematik den Vorgang, realweltliche Phänomene mathematisch zu erfassen, zu verstehen und zu beeinflussen. Das Zählen ist ein allgegenwärtiger Vorgang, mit dem die Anzahl von Mengen bestimmt werden, um deren Größenordnung einordnen zu können, um sicherzustellen, dass alle Schüler da sind, um den Preis der Gesamtmenge zu bestimmen, u.s.w. Dieser alltägliche Vorgang wird mit dem Begriff einer bijektiven Abbildung erfasst bzw. modelliert. Als Gewinn dieses Modellierungsvorgangs kann man nennen: Fehlerquellen erkennen, durch Rechnungen Zählvorgänge abkürzen, die prinzipielle Korrektheit der Zählidee begründen.

Mathematisch modelliert werden physikalische Prozesse, Wetterphänomene, Finanzaktionen, etc. Die Prozesse können dabei beliebig komplex sein und die adäquaten mathematischen Mittel sind dann in der Regel entsprechend komplex. In diesen komplexeren Situationen liegt ein wichtiger Gewinn darin, Aussagen über den Verlauf der Prozesse in der Zukunft mathematisch vorherzusagen.

Eine typische, in der Schule auftretende Form der Modellierung ist die *Textaufgabe*. Aus einem mehr oder weniger langen Text muss der mathematische Gehalt herausgelesen und für eine Frage die Antwort gefunden werden. Allerdings ist hier typischerweise klar, mit welchen mathematischen Methoden an die Aufgabe herangegangen werden soll.

## 5. ARBEITSBLATT

### 5.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 5.1.** Zähle im Zweiersystem bis 100000.

### 5.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 5.2.** Erstelle das „kleine Einsnachnull“.



**Aufgabe 5.3.** Warum macht der Kellner Striche auf den Bierdeckel, statt Zahlen drauf zu schreiben?

**Aufgabe 5.4.** Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, . . . .

- (1) Was ist überübermorgen von morgen?
- (2) Was ist morgen von morgen von morgen von übermorgen?
- (3) Was ist heute von überüberübermorgen?
- (4) Welche Tage sind ein morgen eines Tages der Zählliste?

**Aufgabe 5.5.** Der Alleinherrscher  $X$  herrscht mit großer Willkür und möchte im Alltag des Volkes präsent sein. Deshalb schafft er das übliche Zählen ab und ersetzt es durch die Namen seiner Söhne gemäß der Geburtsreihenfolge. Es soll also hinfort (nach der Null) mit

Peter , Heinz , Ulrich , Albrecht , Karl

gezählt werden, danach soll es mit Überpeter, Überheinz, ... , Überkarl, Überüberpeter, ..., Überüberkarl, Überüberüberpeter, ... weitergehen. Ist dies ein mathematisch sinnvolles Zählen? Benenne die Dezimalzahl 27 in diesem Sohnsystem. Welche Dezimalzahl verbirgt sich hinter Überüberüberüberüberüberüberalbrecht?

**Aufgabe 5.6.** Intelligente zählbegabte Lebewesen aus einer fernen Galaxie besuchen die Erde. Sie besitzen nur ein Auge, das immer nach links schaut. Sie lernen somit das menschliche Zählen anhand der linken Straßenseiten (bei wechselseitiger Nummerierung) kennen und berichten zuhause: „Die Menschen auf der Erde zählen

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23,

und so weiter. Es treten vorne Ziffern auf, die als Endziffer nicht erlaubt sind. Die Idee einer 0 scheinen sie nicht zu kennen“.

- (1) Kann man mit diesem Straßenseitensystem zählen?
- (2) Welche Hausnummer bekommt das  $n$ -te Haus auf der linken (ungeraden) Straßenseite, welche Hausnummer bekommt das  $n$ -te Haus auf der rechten (geraden) Straßenseite?
- (3) Welche Zahlen im Fünfersystem stimmen inhaltlich mit den Straßenseitenzahlen überein?
- (4) Was ist der Nachteil des Straßenseitensystems gegenüber dem Fünfersystem?
- (5) Wäre es für das Zählen ein Nachteil, wenn wir 1, 2, 3, 4, ..., 9, 11, 12, ..., 19, 21, ..., 99, 111, 112 zählen würden? Hat es andere Nachteile?

**Aufgabe 5.7.** Im Euromünzensystem wird so gezählt, dass die Koeffizienten (also 0, 1, 2) der minimalen Darstellung einer Zahl im Sinne von Satz 2.1 in absteigender Wertreihenfolge angegeben werden. Bestimme die zehn Nachfolger von

1020 .

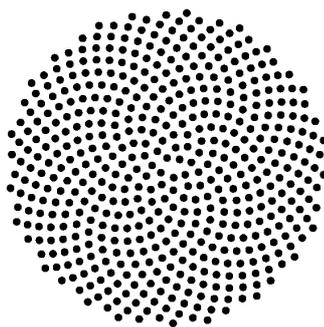
Die folgende Aufgabe sollte man nicht bearbeiten, sondern zum Anlass nehmen, sich über unser Ziffersystem zu freuen.

**Aufgabe 5.8.** Man definiere, welche endlichen Zeichenketten aus  $I, V, X, L, C, D, M$  im römischen Zahlensystem (mit oder ohne Subtraktionsregel) erlaubt sind und welche nicht. Man erstelle einen Algorithmus, der zu jeder erlaubten römischen Zahl den Nachfolger berechnet.

**Aufgabe 5.9.** Es sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  die Menge aller Telefonnummern in einer Stadt. Besitzt die Nachfolgerfunktion auf dieser Menge eine sinnvolle Interpretation?

**Aufgabe 5.10.** Bestimme die Menge  $\{1, \dots, 6\}$  in den in der Vorlesung gegebenen Zählbeispielen.

**Aufgabe 5.11.** Bestimme die Anzahl der Punkte im Bild unten.



**Aufgabe 5.12.** Bestimme die Anzahl der folgenden Mengen.

- (1)  $\{5, 17, 43, 26, 9, 65, 63, 38, 30, 85, 93, 54\}$ ,
- (2)  $\{6, 11, 46, 76, 7, 54, 6, 46, 39, 43, 85, 62, 46, 54, 12, 11\}$ ,
- (3)  $\{\text{||||}, \text{|||||}, \text{||||||}, \text{|||||||}, \text{|||||||}, \text{|||||||}, \text{|||}, \text{|}, \text{|||}, \text{||||}, \text{||}, \text{||||||}, \text{||||||}\}$ .

**Aufgabe 5.13.** Man beschreibe eine Bijektion zwischen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 5.14.** Beschreibe mit Quantoren die Eigenschaft einer Abbildung

$$F: L \longrightarrow M,$$

injektiv bzw. surjektiv zu sein.

**Aufgabe 5.15.** Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mit  $x_1 < x_2$  auch  $f(x_1) < f(x_2)$  gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion  $f$  injektiv ist.

**5.3. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 5.16.** (2 Punkte)

Im Euromünzensystem wird so gezählt, dass die Koeffizienten (also 0, 1, 2) der minimalen Darstellung einer Zahl im Sinne von Satz 2.1 in absteigender Wertreihenfolge angegeben werden. Bestimme die zehn Nachfolger von

20110.

**Aufgabe 5.17.** (5 (0.5+0.5+1+2+1) Punkte)

Ein Teil der Schüler und Schülerinnen der Klasse 4c sind auf einer Wattwanderung, und zwar

$$\{G, L, H, M, A, B, C, R, S, T\}.$$

Sie werden von Wattführer Heino und Frau Maier-Sengupta begleitet. Nach einer scharfen Wende um eine unübersichtliche Düne herum zählen die beiden Aufsichtspersonen die Gruppe durch. Heino zählt

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	$M$	$T$	$A$	$L$	$S$	$B$	$G$	$R$	$H$	$C$

und Maier-Sengupta zählt

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\psi(n)$	$L$	$A$	$B$	$R$	$T$	$C$	$M$	$G$	$H$	$S$

Es sind also alle Kinder da.

- (1) Welche Nummer gibt Heino demjenigen Kind, das von Maier-Sengupta die Nummer 8 bekommt?
- (2) Welche(s) Kind(er) bekommen von beiden die gleiche Nummer?
- (3) Welche(s) Kind(er) bekommen von Heino eine höhere Nummer als von Maier-Sengupta?
- (4) Gabi (G) denkt sich das folgende Spiel aus: Jedes Kind muss demjenigen Kind, dessen Heino-Nummer gleich seiner (des ersten Kindes) Maier-Sengupta-Nummer ist, eine Muschel schenken. Welche Schenkzykel entstehen dabei?

(5) Ist die durch

$$F(n) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \psi(n), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

gegebene Abbildung  $F$  eine Nummerierung der Schülermenge?

**Aufgabe 5.18.** (3 (2+1) Punkte)

Mustafa Müller und Heinz Ngolo waren beim Spiel Borussia Dortmund gegen Bayern München. Zum Glück hat Dortmund 5 zu 2 gewonnen, daher ist gute Stimmung im Fanbus auf der Heimreise. Die Torfolge war

$$0 : 1, 1 : 1, 2 : 1, 2 : 2, 3 : 2, \text{ Halbzeit}, 4 : 2, 5 : 2.$$

Die beiden überlegen sich die folgenden Fragen.

- (1) Wie viele mögliche Torreihenfolgen gibt es bei einem 5 : 2-Sieg?
- (2) Wie viele mögliche Torreihenfolgen gibt es bei einem 5 : 2-Sieg, wenn man noch die Halbzeit mitberücksichtigt?

**Aufgabe 5.19.** (2 Punkte)

Bestimme, wie viele echte Potenzen (also Zahlen der Form  $n^k$  mit  $k \geq 2$ ) es zwischen 0 und 100 gibt.

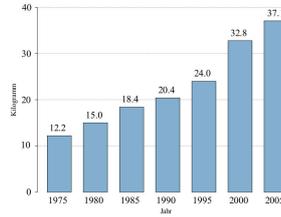
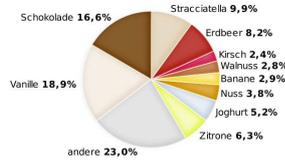
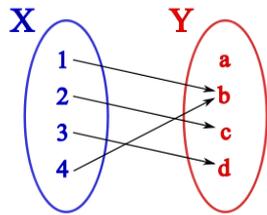
**Aufgabe 5.20.** (3 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Definiere die Nachfolgerabbildung, die zu jeder Zeitangabe die Zeitangabe der nächsten Sekunde berechnet.

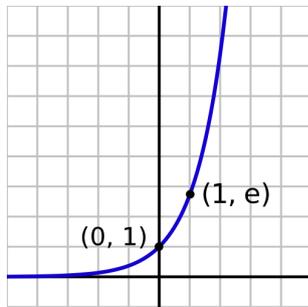
## 6. VORLESUNG - ABBILDUNGEN

### 6.1. Darstellungsmöglichkeiten für Abbildungen.

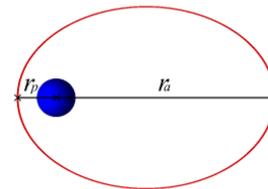
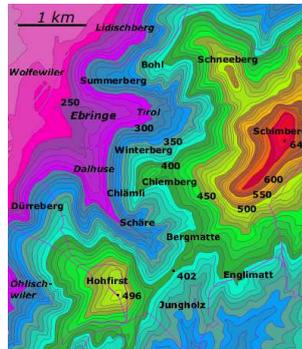
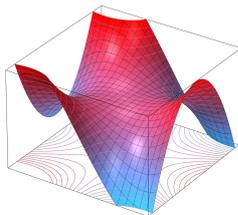
Wir modellieren das Abzählen einer Menge  $M$  mathematisch als eine bijektive Abbildung zwischen einer Menge der Form  $\{1, \dots, n\}$  und  $M$ . Wir wollen zeigen, dass dabei das  $n$  unabhängig von der gewählten Abbildung ist. Um dies klar begründen zu können, müssen wir uns etwas genauer mit Abbildungen beschäftigen. Abbildungen können auf recht unterschiedliche Arten dargestellt werden. Zu nennen sind (vollständige oder unvollständige) Wertetabellen, der Graph einer Abbildung, Säulen- und Kuchendiagramme, Pfeildiagramme, Höhenlinien, Animationen. Eine besondere Rolle spielen funktionale Vorschriften, mit denen häufig Abbildungen festgelegt werden, das sind Ausdrücke der Form  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\exp x$ ,  $\sin x$ .



$x$	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1



$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1



Wir wollen zu zwei gegebenen Nummerierungen einer Menge  $M$ , also zu zwei bijektiven Abbildungen  $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$  und  $\psi: \{1, \dots, k\} \rightarrow M$  zeigen, dass  $n = k$  ist. Da bei einer Bijektion sich die Elemente der beiden Mengen eindeutig entsprechen, führt dies zu einer eindeutigen Entsprechung zwischen  $\{1, \dots, n\}$  und  $\{1, \dots, k\}$ . Mit diesem Trick, dem die Hintereinanderschaltung von Abbildungen und die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung zugrunde liegt, kann man also unter Umgehung der Menge  $M$  direkt diese Teilmengen der natürlichen Zahlen untereinander vergleichen.

## 6.2. Die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

**Definition 6.1.** Es seien  $L$ ,  $M$  und  $N$  Mengen und

$$F: L \longrightarrow M, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G: M \longrightarrow N, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F: L \longrightarrow N, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen  $F$  und  $G$ .

Eine Hintereinanderschaltung kann man sich durch ein Diagramm der Form

$$L \xrightarrow{F} M \xrightarrow{G} N$$

gut veranschaulichen.

**Beispiel 6.2.** Die Wertetabelle

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	A	A	B	C	C	B	E	D	D	B

beschreibt, welche Person der Bearbeitungsgruppe  $\{A, B, C, D, E\}$  welche Aufgaben federführend macht und die Wertetabelle

$P$	A	B	C	D	E
$\psi(P)$	S	L	M	M	W

mit den möglichen Werten  $\{M, S, L, W, U\}$  beschreibt, wie viel Lust die Personen in dieser Woche haben ( $S$

hat Superlust,  $M$  hat Megalust,  $L$  hat Lust,  $W$  hat wenig Lust,  $U$  hat Unlust).

Die zusammengesetzte Abbildung  $\psi \circ \varphi$  beschreibt dann, mit wie viel Lust die verschiedenen Aufgaben bearbeitet werden, die zugehörige Wertetabelle ist

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\psi(\varphi(n))$	S	S	L	M	M	L	W	M	M	L

Wenn die Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so erhält man die zusammengesetzte Abbildung, in den man den einen funktionalen Ausdruck in den anderen funktionalen Ausdruck einsetzt. damit ist folgendes gemeint: Wenn

$$\varphi, \psi: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Funktionen sind, die durch  $\varphi(x) = x^2 + 5$  und  $\psi(y) = \sqrt{y}$  gegeben sind, so besitzt die zusammengesetzte Funktion  $\psi \circ \varphi$  (also in der Ausführung zuerst  $\varphi$ !) die Vorschrift

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \sqrt{x^2 + 5}.$$

In der anderen Reihenfolge ergibt sich

$$(\varphi \circ \psi)(y) = \varphi(\psi(y)) = \sqrt{y}^2 + 5 = y + 5.$$

Hier haben wir die beiden Funktionen mit unterschiedlichen Variablen geschrieben, was die Einsetzung dann erleichtert hat. Häufig muss man zuerst eine sinnvolle Umbenennung durchführen.

**Lemma 6.3.** *Es seien  $L, M, N$  und  $P$  Mengen und es seien*

$$F: L \longrightarrow M, x \longmapsto F(x),$$

$$G: M \longrightarrow N, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H: N \longrightarrow P, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

*Beweis.* Zwei Abbildungen  $\alpha, \beta: L \rightarrow P$  sind genau dann gleich, wenn für jedes  $x \in L$  die Gleichheit  $\alpha(x) = \beta(x)$  gilt. Sei also  $x \in L$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x). \end{aligned}$$

□

**Lemma 6.4.** *Es seien  $L, M$  und  $N$  Mengen und*

$$F: L \longrightarrow M, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G: M \longrightarrow N, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$G \circ F: L \longrightarrow N.$$

Dann gelten folgende Eigenschaften.

- (1) Wenn  $F$  und  $G$  injektiv sind, so ist auch  $G \circ F$  injektiv.
- (2) Wenn  $F$  und  $G$  surjektiv sind, so ist auch  $G \circ F$  surjektiv.
- (3) Wenn  $F$  und  $G$  bijektiv sind, so ist auch  $G \circ F$  bijektiv.

*Beweis.* (1) Seien  $x, x' \in L$  mit

$$G(F(x)) = G(F(x'))$$

gegeben. Aufgrund der Injektivität von  $G$  folgt

$$F(x) = F(x')$$

und aufgrund der Injektivität von  $F$  folgt

$$x = x',$$

was die Injektivität von  $G \circ F$  bedeutet.

(2) Sei  $z \in N$  gegeben. Aufgrund der Surjektivität von  $G$  gibt es ein  $y \in M$  mit

$$G(y) = z.$$

Aufgrund der Surjektivität von  $F$  gibt es ein  $x \in L$  mit

$$F(x) = y.$$

Insgesamt ist

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(y) = z,$$

es gibt also ein Urbild von  $z$  und somit ist die Gesamtabbildung surjektiv.

(3) Folgt aus (1) und (2).

□

### 6.3. Die Umkehrabbildung.

**Definition 6.5.** Es sei  $M$  eine Menge. Dann heißt die Abbildung

$$M \longrightarrow M, x \longmapsto x,$$

die also jedes Element  $x \in M$  auf sich selbst schickt, die *identische Abbildung* oder *Identität* auf  $M$ . Sie wird mit  $\text{Id}$  oder  $\text{Id}_M$  bezeichnet.

Die Identität ist natürlich bijektiv. Umgekehrt kann man zu einer bijektiven Abbildung eine Abbildung derart angeben, dass die Verknüpfung die Identität ergibt.

**Definition 6.6.** Es sei  $F: L \rightarrow M$  eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G: M \longrightarrow L,$$

die jedes Element  $y \in M$  auf das eindeutig bestimmte Element  $x \in L$  mit  $F(x) = y$  abbildet, die *Umkehrabbildung* zu  $F$ .

Die Umkehrabbildung zu  $F$  wird mit  $F^{-1}$  bezeichnet. Es gilt die charakteristische Eigenschaft, dass sowohl  $F \circ F^{-1}$  als auch  $F^{-1} \circ F$  die Identität (auf den jeweiligen Mengen) sind.

**Beispiel 6.7.** Die Nummerierung der Schüler durch Heino,

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	$M$	$T$	$A$	$L$	$S$	$B$	$G$	$R$	$H$	$C$

ist bijektiv und hat daher eine eindeutig bestimmte Umkehrabbildung. Die Wertetabelle dieser Umkehrabbildung ist

$P$	$A$	$B$	$C$	$G$	$H$	$L$	$M$	$R$	$S$	$T$
$\varphi^{-1}(P)$	3	6	10	7	9	4	1	8	5	2

Bei einem natürlichen Zählvorgang kann man sich darüber streiten, ob die Zahlen „eher“ den Personen oder die Personen eher den Zahlen zugeordnet wird.

Wir erwähnen noch die konstanten Abbildungen.

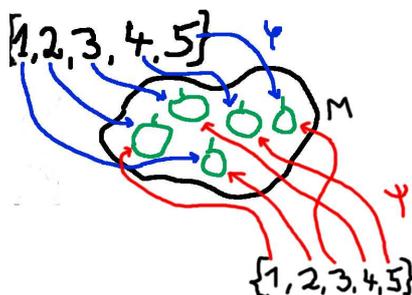
**Definition 6.8.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei  $c \in M$  ein Element. Dann heißt die Abbildung

$$L \longrightarrow M, x \longmapsto c,$$

die also jedes Element  $x \in L$  auf  $c$  abbildet, die *konstante Abbildung* zum Wert  $c$ .

#### 6.4. Die Wohldefiniertheit der Anzahl.

Wir kehren zu dem Problem zurück, warum die Anzahl einer endlichen Menge wohldefiniert ist, warum es also egal ist, in welcher Reihenfolge man zählt.



**Lemma 6.9.** Es sei  $k \neq 0$  eine natürliche Zahl mit dem Vorgänger  $\ell$ , es sei also  $k = \ell'$ . Es sei  $z \in \{1, \dots, k\}$  ein fixiertes Element. Dann gibt es eine bijektive Abbildung zwischen  $\{1, \dots, \ell\}$  und  $\{1, \dots, k\} \setminus \{z\}$ .

*Beweis.* Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi: \{1, \dots, \ell\} \longrightarrow \{1, \dots, k\} \setminus \{z\}$$

durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ in der Durchzählung von } 1 \text{ bis } k \text{ vor } z \text{ kommt,} \\ x', & \text{falls } x \text{ gleich } z \text{ ist oder in der Durchzählung nach } z \text{ kommt.} \end{cases}$$

Dies ist eine wohldefinierte Abbildung, da die Bilder echt unterhalb von  $z$  oder echt oberhalb von  $z$  liegen, niemals aber gleich  $z$  sind, und da maximal der Nachfolger von  $\ell$ , also  $k$  erreicht wird.

Die Abbildung ist injektiv: Wenn  $x$  und  $y$  beide unterhalb von  $z$  liegen, so werden beide Elemente auf sich selbst abgebildet. Wenn beide oberhalb von  $z$  liegen, so werden beide auf ihren Nachfolger abgebildet, und das Nachfolgernehmen ist injektiv (dies ist die Eigenschaft, dass der Vorgänger eindeutig bestimmt ist). Wenn  $x$  unterhalb von  $z$  und  $y$  oberhalb von  $z$  liegt, so ist erst recht  $y'$  oberhalb von  $z$  und somit von  $x$  verschieden.

Die Abbildung ist auch surjektiv. Die Zahlen echt unterhalb von  $z$  werden durch sich selbst erreicht und die Zahlen  $u$  echt oberhalb von  $z$  (und unterhalb von  $k$  einschließlich  $k$ ) kann man als

$$u = v'$$

mit  $v$  oberhalb von  $z$  (einschließlich  $z$ ) und echt unterhalb von  $k$ , also maximal gleich  $\ell$  schreiben. Insgesamt ist  $\varphi$  also eine Bijektion.  $\square$

**Satz 6.10.** *Wenn  $M$  eine Menge ist und wenn*

$$\varphi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow M$$

und

$$\psi: \{1, \dots, k\} \longrightarrow M$$

bijektive Abbildungen sind, so ist

$$n = k.$$

*Die Anzahl einer endlichen Menge ist also wohldefiniert.*

*Beweis.* Seien die bijektiven Abbildungen

$$\varphi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow M$$

und

$$\psi: \{1, \dots, k\} \longrightarrow M$$

gegeben. Da man bijektive Abbildungen umkehren kann und da die Hintereinanderschaltung von bijektiven Abbildungen nach Lemma 6.4 (3) wieder bijektiv ist, ist auch

$$\psi^{-1} \circ \varphi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$$

bijektiv. Wir müssen also nur die endlichen Standardmengen  $\{1, \dots, n\}$  untereinander vergleichen. Wir müssen also zeigen, dass wenn eine bijektive Abbildung

$$\vartheta: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$$

vorliegt, dass dann

$$n = k$$

ist. Wenn<sup>31</sup>

$$n = 0$$

ist, so ist die Menge links leer und somit muss auch die rechte Menge leer sein, also ist dann auch

$$k = 0.$$

Seien nun  $n, k$  nicht 0, so dass sie also jeweils einen Vorgänger haben. Es sei  $m$  der Vorgänger von  $n$  und  $\ell$  der Vorgänger von  $k$ . Wir setzen

$$z = \varphi(n) \in \{1, \dots, k\}.$$

Dann gibt es durch die Herausnahme von  $n$  bzw.  $z$  eine bijektive Abbildung

$$\{1, \dots, m\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{n\} \longrightarrow \{1, \dots, k\} \setminus \{z\}.$$

Nach Lemma 6.8 gibt es eine bijektive Abbildung zwischen  $\{1, \dots, \ell\}$  und  $\{1, \dots, k\} \setminus \{z\}$ . Somit gibt es dann auch insgesamt eine bijektive Abbildung zwischen  $\{1, \dots, m\}$  und  $\{1, \dots, \ell\}$ . Mit dieser Überlegung kann man die beiden Zahlen  $n$  und  $k$  durch ihre jeweiligen Vorgänger  $m$  und  $\ell$  ersetzen und damit um eins kleiner machen (die Existenz der bijektiven Abbildung bleibt erhalten). Diese Überlegung kann man so lange wiederholen, bis eine der reduzierten Zahlen gleich 0 ist. Dann muss aber nach der Eingangsüberlegung die andere reduzierte Zahl ebenfalls gleich 0 sein. Da die Nachfolgerabbildung injektiv ist, folgt daraus  $n = k$ .  $\square$

## 6.5. Zählen von Prozessen.

Mit natürlichen Zahlen kann man nicht nur endliche Mengen zählen, sondern auch Prozesse. Wenn ein Einzelprozess wohldefiniert ist, wie beispielsweise das Nachfolgernehmen in einem Modell der natürlichen Zahlen, oder das Umlegen eines Apfel von einem Haufen auf einen anderen Haufen, oder auf einer Leiter eine Sprosse nach oben steigen, so kann man mit den natürlichen Zahlen angeben, wie oft der Prozess durchgeführt wird oder werden soll. Dies eröffnet eine Vielzahl von Möglichkeiten, komplexere mathematische Konzepte dadurch festzulegen, dass gesagt wird, wie oft ein gewisser grundlegenderer Prozess durchgeführt werden soll. In diesem Sinne kann die Addition von zwei natürlichen Zahlen dadurch eingeführt werden, dass die

<sup>31</sup>Dies ist ein Induktionsbeweis, ein Prinzip, das wir später begründen werden.

eine Zahl angibt, wie oft von der anderen<sup>32</sup> Zahl ausgehend der Nachfolger genommen werden soll, die Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen kann dadurch eingeführt werden, dass die eine Zahl angibt, wie oft die andere Zahl zur 0 addiert werden soll (die Anzahl der Summanden ist durch die erste Zahl festgelegt), die Potenzierung von zwei natürlichen Zahlen kann dadurch eingeführt werden, dass die eine Zahl angibt, wie oft die andere Zahl mit sich selbst multipliziert werden soll (Anzahl der Faktoren). Wenn eine Strecke  $s$  und eine natürliche Zahl  $n$  gegeben ist, so kann man die Strecke  $n$ -fach Hintereinanderlegen. Dabei entsteht eine Strecke, die  $n$ -mal so lang wie die Ausgangsstrecke ist. Geometrisch kann man dies dadurch durchführen, dass man die Strecke zu einer Geraden verlängert und dann mit Hilfe eines Zirkels die Strecke  $(n - 1)$ -mal umschlägt.

## 6. ARBEITSBLATT

### 6.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 6.1.** Auf der linken Tafel ist eine gewisse Anzahl von Äpfeln angemalt. Diese Anzahl soll durch eine Menschenkette in eine Strichfolge auf die rechte Tafel übertragen werden, wobei nur eine Person die Äpfel sehen darf. Es darf nicht gesprochen werden und niemand darf sich von der Stelle bewegen. Ebensowenig darf auf Zählkenntnisse Bezug genommen werden.

### 6.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 6.2.** Man mache sich klar, in welcher Weise die in der Vorlesung angeführten Diagramme Abbildungen darstellen.

### Aufgabe 6.3.\*

Erstelle eine Wertetabelle, die für jede natürliche Zahl von 1 bis 10 ausgibt, mit wie vielen Eurozahlen die Zahl minimal darstellbar ist.

---

<sup>32</sup>Es ist bei diesen wichtigen Operationen nicht einheitlich festgelegt, welche der beiden beteiligten Zahlen die Anzahl der Prozesse angibt und welche angibt, dass mit ihr der Prozess durchgeführt werden soll. Ferner kommt beispielsweise bei  $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$  der Summand 3 fünfmal vor, in der ersten Darstellung kommt aber nur viermal das Pluszeichen vor, so dass hier Präzisierungen nötig sind. Auch Formulierungen wie „mit sich selbst addieren“ sind problematisch, es wird ja jeweils zu dem Teilergebnis hinzuaddiert.

**Aufgabe 6.4.** Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$\text{und } N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

und die Abbildungen  $\varphi: L \rightarrow M$  und  $\psi: M \rightarrow N$ , die durch die Wertetabellen

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	$c$	$e$	$f$	$d$	$e$	$a$	$b$	$a$

und

$y$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$\psi(y)$	$X$	$Y$	$R$	$R$	$T$	$W$	$U$

gegeben sind.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für  $\psi \circ \varphi$ .
- (2) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  injektiv?
- (3) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  surjektiv?

**Aufgabe 6.5.** Betrachte auf der Menge  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  die Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow M, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne  $\varphi^{1003}$ , also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von  $\varphi$  mit sich selbst.

**Aufgabe 6.6.** Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

**Aufgabe 6.7.\***

Es sei  $M$  eine endliche Menge und  $\varphi: M \rightarrow M$  eine Abbildung. Es sei  $\varphi^n$  die  $n$ -fache Hintereinanderschaltung von  $\varphi$  mit sich selbst. Zeige, dass es natürliche Zahlen  $m > n \geq 1$  gibt mit  $\varphi^n = \varphi^m$ .

**Aufgabe 6.8.** Welche Funktionsvorschriften kennen Sie aus der Schule?

**Aufgabe 6.9.** Welche bijektiven Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder zwischen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

**Aufgabe 6.10.** Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = 2x^2 - x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

**Aufgabe 6.11.\***

Seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  injektiv ist, so ist auch  $f$  injektiv.

**Aufgabe 6.12.** Zeige, dass die Menge  $\{1, \dots, n\}$  endlich mit  $n$  Elementen ist.

**Aufgabe 6.13.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei  $F: L \rightarrow M$  eine bijektive Abbildung. Zeige: Wenn  $L$  endlich mit  $n$  Elementen ist, so ist auch  $M$  endlich mit  $n$  Elementen.

**Aufgabe 6.14.** Es seien  $S$  und  $T$  endliche Teilmengen einer Menge  $M$ . Zeige, dass dann auch die Vereinigung  $S \cup T$  endlich ist.

**Aufgabe 6.15.** Mustafa Müller und Heinz Ngolo haben jeweils mit einer Strichliste  $||| \dots |||$  ihre Fußballbildchen gezählt. Sie wollen wissen, wer mehr Bildchen hat, die Listen sind aber ziemlich lang und beim Zählen kommen sie durcheinander. Mustafa macht den Vorschlag, in der Liste immer vier Striche durch einen Querstrich zusammenzufassen und dann diese Blöcke zu zählen. Heinz sagt, dass das nicht geht, da so Fünferblöcke entstehen und dadurch das Ergebnis verfälscht wird. Was sagt Gabi Hochster?

In der folgenden Aufgabe bezeichnet  $\varphi(S)$  die Menge  $\{\varphi(x) \mid x \in S\}$  und  $\varphi^{-1}(T)$  die Menge  $\{x \in L \mid \varphi(x) \in T\}$ . Bestimme diese Mengen für die Hei-nonummierung für die Menge  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $T = \{G, H, L, M\}$ .

**Aufgabe 6.16.** Es seien  $L$  und  $M$  zwei Mengen und  $\varphi: L \rightarrow M$  eine bi-jektive Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, dass für jede Teilmenge  $S \subseteq L$  eine Bijektion  $S \rightarrow \varphi(S)$  vorliegt, und dass ebenso für jede Teilmenge  $T \subseteq M$  eine Bijektion  $\varphi^{-1}(T) \rightarrow T$  vorliegt.

**Aufgabe 6.17.** Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass  $\varphi$  injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass  $\psi$  surjektiv, aber nicht injektiv ist.

### 6.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 6.18.** (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$\text{und } N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

und die Abbildungen  $\varphi: L \rightarrow M$  und  $\psi: M \rightarrow N$ , die durch die Werteta-bellen

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	$c$	$i$	$a$	$g$	$d$	$e$	$h$	$b$

und

$y$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$\psi(y)$	$X$	$Z$	$Y$	$S$	$Z$	$S$	$T$	$W$	$U$

gegeben sind.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für  $\psi \circ \varphi$ .
- (2) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  injektiv?
- (3) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  surjektiv?

**Aufgabe 6.19.** (3 (1+1+1) Punkte)

- (1) Kann eine konstante Abbildung bijektiv sein?
- (2) Ist die Hintereinanderschaltung einer konstanten Abbildung mit einer beliebigen Abbildung (also die konstante Abbildung zuerst) konstant?

- (3) Ist die Hintereinanderschaltung einer beliebigen Abbildung mit einer konstanten Abbildung (also die konstante Abbildung als zweites) konstant?

**Aufgabe 6.20.** (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ist  $f$  injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

**Aufgabe 6.21.** (2 Punkte)

Es seien  $\mathbb{R}$  die reellen Zahlen und  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  die nichtnegativen reellen Zahlen. Bestimme für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv und ob sie surjektiv sind.

(1)

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

(2)

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2.$$

(3)

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

(4)

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2.$$

**Aufgabe 6.22.** (3 Punkte)

Seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  surjektiv ist, so ist auch  $g$  surjektiv.

## 7. VORLESUNG - DEDEKIND-PEANO-AXIOME UND INDUKTION

Ich will jeden Spieler jeden  
Tag ein bisschen besser  
machen

---

Jürgen Klinsmann

In der vorletzten Vorlesung haben wir uns zuerst mit dem Zählen in dem Sinne beschäftigt, dass auf eine natürliche Zahl eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl, nämlich ihr Nachfolger, folgt. In dieser und den folgenden Vorlesungen werden wir sehen, dass diese Eigenschaft die natürlichen Zahlen auszeichnet und dass man alle anderen Eigenschaften der natürlichen Zahlen, wie beispielsweise die Rechengesetze, letztlich darauf zurückführen kann. Auf dieser Eigenschaft der natürlichen Zahlen beruht auch das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

## 7.1. Die Dedekind-Peano-Axiome.

In den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  kann man addieren, multiplizieren, potenzieren, teilweise abziehen, es gibt die Größergleich-Relation, die Teilbarkeit, usw. Man kann sich nun fragen, welche Abhängigkeiten zwischen diesen mathematischen Strukturen bestehen und ob man manche davon auf andere, grundlegendere Strukturen zurückführen kann. Dies führt zum axiomatischen Aufbau der natürlichen Zahlen. Dies ist lediglich eine weitere Präzisierung des Zählvorgangs in der Sprache der Mengen und Abbildungen.



Richard Dedekind (1831 -1916)



Giuseppe Peano (1858 -1932)

**Definition 7.1.** Eine Menge  $N$  mit einem ausgezeichneten Element  $0 \in N$  (die *Null*) und einer (Nachfolger)-Abbildung

$$': N \longrightarrow N, n \longmapsto n',$$

heißt *natürliche Zahlen* (oder *Dedekind-Peano-Modell* für die natürlichen Zahlen), wenn die folgenden *Dedekind-Peano-Axiome* erfüllt sind.

- (1) Das Element 0 ist kein Nachfolger (die Null liegt also nicht im Bild der Nachfolgerabbildung).
- (2) Jedes  $n \in N$  ist Nachfolger höchstens eines Elementes (d.h. die Nachfolgerabbildung ist injektiv).
- (3) Für jede Teilmenge  $T \subseteq N$  gilt: Wenn die beiden Eigenschaften
  - $0 \in T$ ,
  - mit jedem Element  $n \in T$  ist auch  $n' \in T$ ,
 gelten, so ist  $T = N$ .

Man mache sich klar, dass diese Bedingungen den Bedingungen der vorvorletzten Vorlesung entsprechen. Dabei ist  $N$  die jeweilige Menge,  $\prime$  bezeichnet die Nachfolgerabbildung und 0 das Startsymbol (dort hatten wir zumeist 1 als Startsymbol gewählt). Jedes Dedekind-Peano-Modell sieht ähnlich aus wie eine der dort aufgelisteten Möglichkeiten. Das heißt, dass die natürlichen Zahlen durch das natürliche Zählen bestimmt sind. Zählen heißt, von einem Startwert ausgehend, nach und nach einen Schritt (einen Strich machen, einen Stab dazulegen, einen Punkt dazumalen, oder ein komplexeres Bildungsgesetz) weiterzuzählen. Das „Weiter“-Zählen ist also fundamentaler als eine bestimmte Benennung von Zahlen. Eine natürliche Zahl repräsentiert, wie oft bis zu ihr gezählt werden musste.

Die erste Eigenschaft legt den Start fest. Die zweite Eigenschaft besagt, dass wenn zwei Zahlen verschieden sind, dann auch die beiden jeweiligen Nachfolger verschieden sind. Die dritte Eigenschaft, die man auch das *Induktionsprinzip für Mengen* nennt, besagt, dass wenn man bei 0 anfängt und keinen einzelnen Zählvorgang auslöst, dass man dann vollständig alle natürlichen Zahlen abzählt.

Es sei erwähnt, dass solche Überlegungen, die natürlichen Zahlen grundlegend zu begründen, manchmal eher verwirrend als hilfreich sein können. Statt des intuitiven Zählens arbeiten wir mit Mengen, Abbildungen, Injektivität. Bei den natürlichen Zahlen ist es erfahrungsgemäß nicht gefährlich, der Intuition zu vertrauen und mit einer naiven Vorstellung davon zu arbeiten (dies gilt für die reellen Zahlen nicht in dieser Deutlichkeit).

In einem Dedekind-Peano-Modell gibt es die untereinander verschiedenen Elemente

$$0, 0', 0'', 0''', \dots$$

Hier stehen also alle Elemente, die von 0 aus in endlich vielen Schritten (man denke an die Abzählung endlicher Prozesse) erreicht werden können (formalmengentheoretisch ist diese Definition problematisch, da sie Bezug auf eine endliche Ausführung nimmt). Das Induktionsaxiom sichert, dass dies bereits alle Elemente des Modells sind. Die angegebene Teilmenge enthält ja die 0 und mit jedem Element auch deren Nachfolger, also ist es die Gesamtmenge.

Ausgehend von den Peano-Axiomen kann man eine Addition auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren, wobei die Nachfolgerfunktion der Addition

mit  $1 = 0'$  entspricht. Die Definierbarkeit beruht selbst auf dem Induktionsprinzip. Ebenso kann man eine Multiplikation definieren und die üblichen Eigenschaften wie Kommutativität und Assoziativität nachweisen. Dies werden wir in den nächsten Vorlesungen ausführen.

## 7.2. Isomorphieprinzip.

Wir wollen zeigen, dass je zwei Modelle für die Dedekind-Peano-Axiome „isomorph“ sind, dass es also zwischen ihnen eine strukturerhaltende Bijektion gibt. Man stelle sich beispielsweise einerseits das Strichmodell, andererseits das Dezimalzahlmodell der natürlichen Zahlen vor, die beide mit ihren Nullen und ihrer Nachfolgerabbildung die Dedekind-Peano-Axiome erfüllen. Dann gibt es bereits, und zwar allein aufgrund der Tatsache der Dedekind-Peano-Axiome, eine eindeutige Entsprechung zwischen diesen beiden Mengen. Eine Strichfolge entspricht also eindeutig einer Zahl im Dezimalsystem.

	Strichsystem	Zehnersystem	Dreiersystem	Eurosystem
	0	0	0	0
		1	1	1
		2	2	10
		3	10	11
		4	11	20
		5	12	100
		6	20	101
		7	21	110
		8	22	111
		9	100	121
		10	101	1000

Die Entsprechung in der Tabelle entsteht dadurch, dass man in jeder Spalte unabhängig voneinander im jeweiligen System (gleichschnell) zählt.

**Satz 7.2.** *Es seien  $(N_1, 0_1, ')$  und  $(N_2, 0_2, \star)$  Modelle für die natürlichen Zahlen. Dann gibt es genau eine (bijektive) Abbildung*

$$\varphi: N_1 \longrightarrow N_2,$$

*die das Zählen (also die 0 und die Nachfolgerabbildung) respektiert.*

*Beweis.* Da die Abbildung  $\varphi$  insbesondere die Null respektieren soll, muss

$$\varphi(0_1) = 0_2$$

sein. Da die Abbildung die Nachfolgerabbildungen respektieren soll, muss

$$\varphi(0'_1) = \varphi(0_1)^\star = 0_2^\star$$

gelten. Aus dem gleichen Grund muss unter Verwendung des schon Bewiesenen

$$\varphi(0''_1) = \varphi((0'_1)') = (\varphi(0'_1))^\star = (0_2^\star)^\star = 0_2^{\star\star}.$$

Ebenso muss

$$\varphi(0_1''') = 0_2^{***},$$

$$\varphi(0_1''''') = 0_2^{****},$$

u.s.w gelten. Hier hat man keine Wahlmöglichkeiten, alles ist durch die Nachfolgereigenschaft bestimmt. Da jedes Element aus  $N_1$  von  $0_1$  aus durch die Nachfolgerabbildung  $\prime$  schließlich und genau einmal erreicht wird, ist dies eine wohldefinierte Abbildung von  $N_1$  nach  $N_2$ .

Zum Nachweis der Surjektivität betrachten wir die Menge

$$T = \{y \in N_2 \mid \text{Es gibt } x \in N_1 \text{ mit } y = \varphi(x)\}.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$T = N_2$$

ist. Dazu wenden wir das Induktionsaxiom für  $N_2$  an. Wegen

$$\varphi(0_1) = 0_2$$

gehört  $0_2 \in T$ . Wenn  $y \in T$  ist, so ist also

$$y = \varphi(x)$$

für ein  $x \in N_1$ . Wegen der Verträglichkeit mit der Nachfolgerabbildung ist

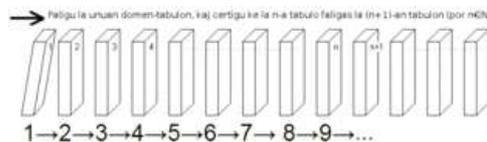
$$y^* = \varphi(x'),$$

d.h. auch  $y^* \in T$ . Daher ist  $T$  unter dem Nachfolger abgeschlossen und nach dem Induktionsaxiom ist also  $T = N_2$ . Zum Nachweis der Injektivität seien  $x, \tilde{x} \in N_1$  verschieden. und zwar sei  $\tilde{x}$  ein (direkter oder) höherer Nachfolger von  $x$ . Dann ist  $\varphi(\tilde{x})$  der entsprechende Nachfolger von  $\varphi(x)$  und insbesondere davon verschieden, da das Nachfolgernehmen in  $N_2$  injektiv ist.  $\square$

Es gibt also im Wesentlichen, d.h. wenn man von den Benennungen absieht, genau eine Menge von natürlichen Zahlen. Für das im Wesentlichen eindeutig bestimmte Modell der Dedekind-Peano-Axiome verwenden wir das Symbol  $\mathbb{N}$  und sprechen von den *natürlichen Zahlen*.

Es sei bemerkt, dass die Konstruktion der bijektiven Abbildung zwischen zwei Modellen im Beweis zu Satz 7.2 über den Nachfolger für praktische Zwecke nicht gut geeignet ist. Wenn man von einer natürlichen Zahl, die im Zehnersystem gegeben ist, die Darstellung im Dreiersystem ausrechnen möchte, so müsste man gemäß dieser Methode im Dreiersystem so lange zählen, wie es die im Zehnersystem gegebene Zahl vorgibt. Da gibt es deutlich effektivere Methoden, die wir später kennenlernen werden.

### 7.3. Das Induktionsprinzip für Aussagen.



Eine Visualisierung des Induktionsprinzips. Wenn die Steine nah beieinander stehen und der erste umgestoßen wird, so fallen alle Steine um.

Die folgende Aussage und ihr Beweis begründen das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion*.

**Satz 7.3.** Für jede natürliche Zahl  $n$  sei eine Aussage  $A(n)$  gegeben. Es gelte

- (1)  $A(0)$  ist wahr.
- (2) Für alle  $n$  gilt: wenn  $A(n)$  gilt, so ist auch  $A(n+1)$  wahr.

Dann gilt  $A(n)$  für alle  $n$ .

*Beweis.* Es sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass  $M = \mathbb{N}$  ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle  $n$  gilt. Nach der ersten Bedingung ist

$$0 \in M.$$

Nach der zweiten Voraussetzung gilt für  $M$ , dass aus  $n \in M$  stets  $n+1 \in M$  folgt. Damit erfüllt  $M$  beide Voraussetzungen im Induktionsprinzip für Mengen, so dass  $M = \mathbb{N}$  gilt.  $\square$

Der Nachweis von (der Gültigkeit von)  $A(0)$  heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von  $A(n)$  auf  $A(n+1)$  heißt der *Induktionsschluss* oder *Induktionsschritt*. Innerhalb des Induktionsschlusses nennt man die Gültigkeit von  $A(n)$  auch die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage  $A(n)$  erst für  $n \geq n_0$  für ein gewisses  $n_0$  (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage  $A(n_0)$  und den Induktionsschritt führt man für alle  $n \geq n_0$  durch.

Um dieses Beweisprinzip anhand von substantiellem Material demonstrieren zu können, greifen wir etwas vor und setzen die Addition, die Multiplikation und die Größergleichrelation von natürlichen Zahlen voraus. Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das *Summenzeichen*. Für gegebene (natürliche, reelle) Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  bedeutet

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Dabei hängen im Allgemeinen die  $a_k$  in einer formelhaften Weise von  $k$  ab. Entsprechend ist das *Produktzeichen* definiert, nämlich durch

$$\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

**Aufgabe 7.4.** Beweise durch Induktion die folgende Formel für  $n \geq 1$ .

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist  $n = 1$ , daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist  $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ , so dass die Formel für  $n = 1$  stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein  $n \geq 1$  gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für  $n + 1$  gilt. Dabei ist  $n$  beliebig. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left( \sum_{k=1}^n k \right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für  $n + 1$ , also ist die Formel bewiesen.

Aussagen, die durch Induktion bewiesen werden können, können manchmal auch auf andere Art bewiesen werden. Im vorstehenden Beispiel gibt es die elegantere und einsichtigere Lösung, die Zahlen einmal aufsteigend und einmal absteigend untereinander hinzuschreiben, also

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-2 \quad n-1 \quad n$$

$$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \dots \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Spaltenweise ergibt sich  $n + 1$ , und diese Summe kommt  $n$ -mal vor. Also ist

$$2 \left( \sum_{i=1}^n i \right) = n(n+1).$$

**Aufgabe 7.5.** Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für  $n = 0$  ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für  $n$  bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für  $n + 1$ . Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass  $6^{n+2} + 7^{2n+1}$  ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Aus dem Induktionsprinzip folgt die nächste wichtige Eigenschaft. Vom intuitiven Standpunkt her ist sie selbstverständlich, wir führen sie aber trotzdem auf das Induktionsprinzip zurück. Es geht in diesem Beweis weniger darum, sich über die Satzaussage zu vergewissern, sondern vielmehr Einblicke in mathematisches Argumentieren zu gewinnen. Es ist auch ein Beispiel dafür, wie man eine Aussage über Teilmengen zu einer Aussage über natürliche Zahlen macht, um das Induktionsprinzip anwenden zu können.

**Lemma 7.6.** *Jede nichtleere Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$  besitzt ein Minimum.*

*Beweis.* Wir betrachten die Aussage

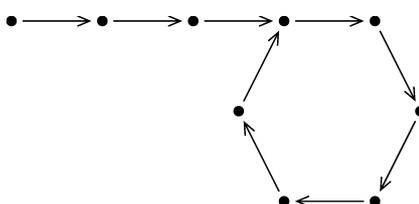
$$A(n) = \text{Alle Teilmengen von } \mathbb{N}, \text{ die } n \text{ enthalten, besitzen ein Minimum.}$$

Da jede nichtleere Teilmenge mindestens ein  $n \in \mathbb{N}$  besitzt, ist die Aussage des Satzes äquivalent zur Gültigkeit von  $A(n)$  für alle  $n$ . Diese Aussage können wir durch Induktion beweisen. Die Aussage  $A(0)$  besagt, dass jede Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$ , die die 0 enthält, auch ein Minimum enthält. Dies ist aber klar, da dann eben 0 das Minimum ist. Sei die Aussage  $A(k)$  nun für alle  $k \leq n$  schon bewiesen. Wir müssen  $A(n + 1)$  beweisen. Sei also  $M \subseteq \mathbb{N}$  eine Teilmenge, die  $n + 1$  enthält. Wenn  $M$  auch eine Zahl  $k < n + 1$  besitzt, so besitzt  $M$  nach der Induktionsvoraussetzung ein Minimum. Andernfalls besitzt  $M$  keine Zahl, die kleiner als  $n + 1$  ist. Dann ist aber  $n + 1$  das Minimum von  $M$ .  $\square$

## 7. ARBEITSBLATT

## 7.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 7.1.** Es sei  $N_1 = (\mathbb{N}, 0, \iota)$  und es sei  $N_2$  die rechts angegebene Menge mit dem Startsymbol oben links und der durch die Pfeile ausgedrückten Nachfolgerabbildung. An welcher Stelle bricht der Beweis von Satz 7.2 in dieser Situation zusammen.



## 7.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 7.2.** Man gebe Beispiele  $(M, 0, \iota)$  für Mengen mit einem ausgezeichneten Element  $0 \in M$  und einer Abbildung  $\iota: M \rightarrow M$  an, die je zwei der Dedekind-Peano-Axiome erfüllen, aber nicht das dritte.

**Aufgabe 7.3.** Sei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$$

ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgerabbildung?) erfüllt.

**Aufgabe 7.4.** Es sei  $N$  ein Modell für die natürlichen Zahlen und es sei  $W$  die Menge der Wochentage mit dem Montag als Starttag und dem Nachfolgetag als Nachfolgerabbildung.

- (1) Zeige, dass der Beweis zu Satz 7.2 eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi: N \longrightarrow W$$

festlegt, die 0 auf Montag abbildet und die Nachfolgerabbildung respektiert. Ist diese Abbildung surjektiv, ist sie injektiv? Wenn nicht, an welcher Stelle bricht der Beweis zusammen?

(2) Zeige, dass der Beweis zu Satz 7.2 keine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi: W \longrightarrow N$$

festlegt, die die Nachfolgerabbildung respektiert und den Montag auf 0 abbildet. An welcher Stelle bricht der Beweis zusammen?

**Aufgabe 7.5.** Für  $k \in \mathbb{N}_+$  sei

$$a_k = \frac{k-1}{k}.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^4 a_k.$$

**Aufgabe 7.6.** Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

(2)

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(3)

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**Aufgabe 7.7.\***

Zeige mittels vollständiger Induktion für  $n \geq 1$  die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Aufgabe 7.8.\***

Beweise durch Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}_+$  die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Aufgabe 7.9.** Die Städte  $S_1, \dots, S_n$  seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

**Aufgabe 7.10.** Analysiere den Beweis zu Satz 6.9 als Induktionsbeweis.

Die beiden folgenden Aufgaben sind intuitiv klar. Es geht darum, die Endlichkeit durch Angabe einer bijektiven Abbildung zwischen der Menge und einer Menge der Form  $\{1, \dots, k\}$  zu begründen. Für die folgende Aufgabe ist Lemma 6.8 hilfreich.

**Aufgabe 7.11.** Zeige durch Induktion nach  $n$ , dass jede Teilmenge  $T$  von  $\{1, \dots, n\}$  endlich ist.

**Aufgabe 7.12.** Es sei  $M$  eine endliche Menge und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass  $T$  ebenfalls endlich ist.

**Aufgabe 7.13.** Die Schüler und Schülerinnen der Klasse 4c machen auf der Insel Juist eine Wattwanderung mit Wattführer Heino. Heino sagt, dass die Sandklaffmuschel, die eingegraben im Sand lebt, besonders schwer zu finden ist und er deshalb an der Stelle immer einen Pfeil in den Sand zeichnet, um sie das nächste Mal wiederzufinden. Die aufmerksamen Schüler und Schülerinnen fallen da natürlich nicht drauf rein und sagen, dass das nicht sein kann, da ja dann immer die Flut kommt und den Pfeil wegwischt. Gabi Hochster hingegen kommt mit dem Einwand, wie er denn dann zum ersten Mal überhaupt die Muschel gefunden hat.



Bringe die Einwände der Klasse mit dem Begriff der vollständigen Induktion in Zusammenhang.

**Aufgabe 7.14.** In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei  $A(n)$  die Aussage, dass je  $n$  Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je  $n$  Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt  $n+1$  Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden  $n$  Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese  $n+1$  Pferde überhaupt die gleiche Farbe.“

**Aufgabe 7.15.** Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist?

**Aufgabe 7.16.** In der Planung für einen Laufwettbewerb wurden die folgenden Bahnen vergeben.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(k)$	$N$	$C$	$Z$	$G$	$R$	$D$	$M$	$S$

Leider wurden  $C$  und  $R$  des Dopings überführt und dürfen nicht teilnehmen. In dieser Situation möchte man auf die Außenbahnen 7 und 8 verzichten. Erstelle aus der Nummerierung  $F$  eine möglichst einfache neue Nummerierung (also eine bijektive Abbildung) für die neue Situation.

### 7.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 7.17.** (2 Punkte)

Für  $k = 1, \dots, 8$  sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^8 a_k.$$

**Aufgabe 7.18.** (2 Punkte)

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^5 a_k.$$

**Aufgabe 7.19.\*** (3 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

**Aufgabe 7.20.** (3 Punkte)

Sei  $x$  eine reelle Zahl,  $x \neq 1$ . Beweise für  $n \in \mathbb{N}$  durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

**Aufgabe 7.21.** (4 Punkte)

Eine  $n$ -Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch  $a - 1$  Längsrillen und  $b - 1$  Querrillen in  $n = a \cdot b$  ( $a, b \in \mathbb{N}_+$ ) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer  $n$ -Schokolade aus genau  $n - 1$  Teilungsschritten besteht.

## 8. VORLESUNG - ADDITION DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

Wir führen nun die Addition und die Multiplikation von natürlichen Zahlen ein. Dabei müssen wir uns kurz klar machen, um was für ein Objekt es sich überhaupt handelt. Bei der Addition (der Multiplikation) wird zwei<sup>33</sup> natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  eine neue Zahl, ihre Summe  $a+b$  (ihr Produkt  $a \cdot b$ ) zugeordnet. Weiter oben haben wir schon aus zwei Mengen ihre Vereinigung bzw. ihren Durchschnitt gebildet. Für diese Situationen gibt es das Konzept der Verknüpfung. Um dies angemessen formulieren zu können, benötigen wir die Produktmenge.

## 8.1. Produktmengen.

**Definition 8.1.** Es seien zwei Mengen  $L$  und  $M$  gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) \mid x \in L, y \in M\}$$

die *Produktmenge* der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt  $(x, y)$ . Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind. Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer.

**Beispiel 8.2.** Es sei  $V$  die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und  $N$  die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

die Menge aller Namen. Elemente davon sind in Paarschreibweise beispielsweise (Heinz, Müller), (Petra, Müller) und (Lucy, Sonnenschein). Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

---

<sup>33</sup>Es ist hier auch erlaubt, dass die beiden Zahlen gleich sind. Dann könnte man sich an dem Wort zwei stören, da ja dann nur eine Zahl vorliegt. In einem solchen Zusammenhang sind die Zahlangaben so zu verstehen, dass sie zählen, wie oft eine Zahl aufgerufen wird.

**Beispiel 8.3.** Bei zwei reellen Intervallen  $M = [a, b]$  und  $L = [c, d]$  ist die Produktmenge einfach das Rechteck

$$[a, b] \times [c, d].$$

Allerdings muss man bei einem Rechteck im Hinterkopf behalten, welche Seite das erste und welche Seite das zweite Intervall ist. Für  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  schreibt man häufig auch  $\mathbb{R}^2$ .

Man kann auch mehrfache Produktmengen bilden, wie etwa  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Für eine Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph diejenige Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ , die durch alle Paare der Form  $(x, f(x))$  gegeben sind. Diese Definition überträgt sich auf beliebige Abbildungen. Es existiert also stets ein Graph unabhängig von seiner zeichnerischen Realisierbarkeit.

**Definition 8.4.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) \mid x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graphen* der Abbildung  $F$ .

## 8.2. Verknüpfungen.

**Definition 8.5.** Eine *Verknüpfung*  $\circ$  auf einer Menge  $M$  ist eine Abbildung

$$\circ: M \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Statt Verknüpfung sagt man auch *Operation*. Das Verknüpfungszeichen  $\circ$  ist hier einigermaßen willkürlich gewählt, um vorschnelle Assoziationen zu vermeiden. In vielen konkreten Situationen steht hier  $+$  oder  $\cdot$ . Das „neue“ Element  $x \circ y$  heißt dann auch das *Ergebnis* der Operation. Da das Ergebnis wieder zur Ausgangsmenge  $M$  gehört, kann man es weiter verknüpfen mit weiteren Elementen. Dies erfordert im Allgemeinen Klammern, um zu wissen, in welcher Reihenfolge welche Elemente miteinander verknüpft werden sollen. Im Allgemeinen ist

$$a \circ (b \circ c) \neq (a \circ b) \circ c.$$

**Definition 8.6.** Eine Verknüpfung

$$\circ: M \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge  $M$  heißt *assoziativ*, wenn für alle  $x, y, z \in M$  die Gleichheit

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

gilt.

Man sagt auch, dass für die Verknüpfung das *Assoziativgesetz* oder die *Klammerregel* gilt.

**Definition 8.7.** Eine Verknüpfung

$$\circ: M \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge  $M$  heißt *kommutativ*, wenn für alle  $x, y \in M$  die Gleichheit

$$x \circ y = y \circ x$$

gilt.

Man sagt auch, dass für die Verknüpfung das *Kommutativgesetz* oder das *Vertauschungsgesetz* gilt. Die Addition und die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen sind beide assoziativ und kommutativ.

**Definition 8.8.** Es sei eine Menge  $M$  mit einer Verknüpfung

$$\circ: M \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

gegeben. Dann heißt ein Element  $e \in M$  *neutrales Element* der Verknüpfung, wenn für alle  $x \in M$  die Gleichheit

$$x \circ e = x = e \circ x$$

gilt.

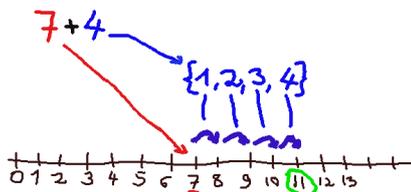
Bei der Addition auf den natürlichen Zahlen ist 0 das neutrale Element und bei der Multiplikation auf den natürlichen Zahlen ist 1 das neutrale Element. Deshalb ist es in der abstrakten Formulierung sinnvoll, eine unbelastete Bezeichnung zu wählen. Wenn die Verknüpfung kommutativ ist, so muss man die Eigenschaft des neutralen Elementes nur von einer Seite überprüfen.

### 8.3. Die Addition auf den natürlichen Zahlen.

Die Addition auf den natürlichen Zahlen ist eine vertraute Operation und es gibt viele Möglichkeiten, sie einzuführen. Je nach Kontext und Absicht sind unterschiedliche Ansätze besser geeignet. Zur rechnerischen Definition der Addition ist etwa das schriftliche Addieren im Dezimalsystem besonders effektiv, während zum Nachweis der Assoziativität die inhaltliche Interpretation als disjunkte Vereinigung von Mengen sinnvoll ist. Um ein klares Fundament zu haben, muss man sich bei einem systematischen Aufbau der Mathematik dafür entscheiden, was man als Definition nimmt, und dann beweisen, dass der gewählte Zugang auch andere Charakterisierungen erlaubt und somit mit anderen Zugängen übereinstimmt.

Wir wollen die Addition auf den natürlichen Zahlen definieren, und zwar allein unter Bezug auf das Nachfolgernehmen, das das Zählen charakterisiert. Das Nachfolgernehmen ist ein Prozess, den man iterieren kann. Sowohl der Startwert des Nachfolgernehmens als auch die Anzahl, wie oft ein Nachfolger

genommen werden soll, wird durch natürliche Zahlen beschrieben. Die  $k$ -fache Durchführung eines Prozesses bedeutet, dass er so oft durchgeführt wird, wie es die Menge  $\{1, \dots, k\}$  vorgibt.



**Definition 8.9.** Die *Summe*  $n + k$  zweier natürlicher Zahlen  $n$  und  $k$  ist diejenige natürliche Zahl, die man erhält, wenn man von  $n$  ausgehend  $k$ -fach den Nachfolger nimmt.

Die Operation heißt die *Addition* und die beteiligten nennt man die *Summanden*. Nach dieser Definition wird also ausgehend von  $n$  der Nachfolgerprozess  $k$ -fach durchgeführt. Bei  $k = 0$  ist dies als der nullte Nachfolger, also als  $n$  selbst, zu verstehen. Bei  $k = 1$  ist dies der erste Nachfolger,  $n + 1$  ist also die erste Zahl  $n'$  nach  $n$ . Die Summe  $n + k$  ist also  $n''\dots'$  mit  $k$  Nachfolgerstrichen. Wenn umgekehrt

$$n = 0$$

ist, so ist der  $k$ -te Nachfolger der 0 gleich  $k$ . Man beachte, dass hier die Addition in einer Weise definiert wird, in der die Kommutativität keineswegs offensichtlich ist, das wird sich aber gleich ergeben.

**Lemma 8.10.** Für die Addition der natürlichen Zahlen (mit der in Definition 8.9 festgelegten Addition) gelten die folgenden Aussagen.

(1)

$$n + 0 = n = 0 + n$$

für alle  $n$ , d.h. 0 ist das neutrale Element der Addition.

(2)

$$n + k' = (n + k)' = n' + k$$

für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  (Umlegungsregel).

(3) Die Addition ist kommutativ.

(4) Die Addition ist assoziativ.

(5) Aus einer Gleichung  $n + k = m + k$  folgt

$$n = m$$

(Abziehregel).

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Das kleine Einsundeins. Das Umlegungsprinzip schlägt sich in der Additionstabelle darin nieder, dass in den Linksunten nach Rechtsoben-Diagonalen konstante Werte stehen.

- Beweis.* (1) Die Gleichungen links und rechts sind unmittelbar klar, da der  $n$ -te Nachfolger der 0 gleich  $n$  ist.
- (2) Die Ausdrücke besagen prozesstheoretisch das gleiche: Links geht man von der Zahl  $n$  aus und nimmt einmal öfters als  $k$  den Nachfolger. In der Mitte bestimmt man  $k$ -fach den Nachfolger von  $n$  und nimmt von diesem Ergebnis den Nachfolger. Rechts nimmt man von  $n$  den Nachfolger und davon dann  $k$ -fach den Nachfolger.
- (3) Es ist

$$n + k = k + n$$

für alle  $k, n$  zu zeigen. Diese Gleichungen zeigen wir durch Induktion über  $k$  für alle  $n$ . Bei  $k = 0$  steht beidseitig  $n$  nach Teil (1). Sei die Gleichheit nun für ein  $k$  (und alle  $n$ ) schon bewiesen. Dann ist unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung und Teil (2)

$$n + k' = (n + k)' = (k + n)' = k' + n,$$

die Gleichung gilt also auch für  $k'$ .

- (4) Wir beweisen die Assoziativität, also die Gleichheit

$$(m + n) + k = m + (n + k),$$

durch Induktion über  $k$  (für alle  $m, n$  gleichzeitig). Mit der Regel aus (2) und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich direkt

$$(m + n) + k' = (m + n)' + k = (m + n') + k = m + (n' + k) = m + (n + k').$$

- (5) Die Abziehregel beweisen wir ebenfalls durch Induktion über  $k$ . Der Fall

$$k = 0$$

ist klar. Sei also die Aussage für  $k$  schon bewiesen und sei eine Gleichung der Form

$$m + k' = n + k'$$

gegeben. Dann ist nach der Umlegungsregel auch

$$m' + k = n' + k.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist somit

$$m' = n'.$$

Da die Nachfolgerabbildung injektiv ist, ergibt sich

$$m = n.$$

□

Für einige alternative Begründungen siehe die Aufgaben, insbesondere Aufgabe 8.11. Teil (2) kann man auch so verstehen, dass man eine Summe  $n + k$  dadurch berechnen kann, dass man sukzessive den ersten Summanden um eins erhöht (also den Nachfolger nimmt) und den zweiten um eins vermindert (also den Vorgänger nimmt), falls  $k \neq 0$  ist. Dies macht man so lange, bis der zweite Summand 0 ist. Statt Umlegungsregel sagt man auch *Umlegungsprinzip*. Die folgende Aussage besagt, dass durch das Umlegungsprinzip die Addition bereits festgelegt ist.

**Lemma 8.11.** *Auf den natürlichen Zahlen gibt es genau eine Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

mit

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Es seien zwei Verknüpfungen  $+$  und  $*$  auf  $\mathbb{N}$  gegeben, die beide diese charakteristischen Eigenschaften erfüllen. Es ist zu zeigen, dass dann diese beiden Verknüpfungen überhaupt übereinstimmen. Wir müssen also die Gleichheit

$$x + y = x * y$$

für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  beweisen. Dies machen wir durch Induktion über  $y$  (für beliebige  $x$ ). Bei

$$y = 0$$

ist wegen

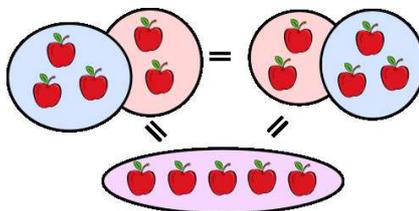
$$x + 0 = x = x * 0$$

die Aussage richtig. Sei die Aussage nun für ein bestimmtes  $y$  schon bewiesen. Dann ist mit der charakteristischen Eigenschaft und der Induktionsvoraussetzung

$$x + y' = (x + y)' = (x * y)' = x * y'.$$

□

## 8.4. Addition und disjunkte Vereinigung.



Das Vereinigungsprinzip und die Kommutativität der Addition

Die Standardinterpretation der und wichtigste Motivation für die Addition zweier natürlicher Zahlen ist, dass sie die Anzahl der Vereinigung von zwei disjunkten endlichen Mengen angibt. Wenn man zwei Körbe von Äpfeln hat und diese zusammenschüttet, so ist die Gesamtanzahl gerade die Summe der beiden Einzelanzahlen. Es ist möglich, die Addition von natürlichen Zahlen darüber zu definieren. Vorteile sind die unmittelbare Anschauung, Nachteile, dass man eine Zahl durch eine endliche Menge repräsentieren muss, und nicht klar ist, welche man nehmen soll und es nicht selbstverständlich ist, dass unterschiedliche gleichgroße disjunkte Mengen nach Vereinigung gleichgroß sind (was heißt das?). Der Vorteil bei unserer Definition ist, dass man die Addition auf einen elementareren Prozess, nämlich den Prozess des Zählens bzw. Nachfolgernehmens zurückführt. Dies erlaubt es, Gesetzmäßigkeiten zu beweisen, indem sie per Induktion auf elementare Schritte zurückgeführt werden. Beide Konzepte sind wichtig, und natürlich will man, unabhängig davon, wie man die Addition nun eingeführt hat, schnell wissen, dass die beiden Konzepte übereinstimmen. Dazu ist es hilfreich, im Vereinigungskonzept auch Einzelschritte zu erkennen. Dies ist wieder das Umlegungsprinzip: Die Vereinigung kann man sich so vorstellen, dass schrittweise ein Element (ein Apfel) der zweiten Menge in die erste Menge umgelegt wird, siehe auch Aufgabe 4.14. Bei einem solchen Einzelschritt erhöht sich die erste Anzahl um eins (Nachfolger) und die zweite Anzahl verringert sich um eins (Vorgänger). Das deckt sich mit Lemma 8.10 (2).

**Satz 8.12.** *Es seien  $M$  und  $N$  disjunkte endliche Mengen mit  $m$  bzw.  $n$  Elementen. Dann besitzt ihre Vereinigung  $M \cup N$  gerade  $m + n$  Elemente.*

*Beweis.* Die Voraussetzung besagt, dass es eine bijektive Abbildung

$$\psi: \{1, \dots, m\} \longrightarrow M$$

und eine bijektive Abbildung

$$\varphi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow N$$

gibt. Die Abbildung

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{m + 1, \dots, m + n\}, i \longmapsto m + i,$$

ist nach Aufgabe 8.22 bijektiv, sei  $\theta$  die Umkehrabbildung. Somit ist nach Lemma 6.4 (3)

$$\varphi \circ \theta: \{m+1, \dots, m+n\} \longrightarrow N$$

ebenfalls bijektiv. Wir definieren nun eine Abbildung

$$F: \{1, \dots, m+n\} \longrightarrow M \cup N$$

durch

$$F(k) = \begin{cases} \psi(k), & \text{falls } k \in \{1, \dots, m\}, \\ \varphi(\theta(k)), & \text{falls } k \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, da jedes Element aus  $M$  durch den ersten Fall und jedes Element aus  $N$  durch den zweiten Fall abgedeckt ist. Die Injektivität sieht man so. Wenn

$$k \neq \ell$$

gegeben sind, und das eine Element zu  $\{1, \dots, m\}$  und das andere zu  $\{m+1, \dots, m+n\}$  gehört, so ist  $F(k) \in M$  und  $F(\ell) \in N$  (oder umgekehrt) und sie sind verschieden wegen der Disjunktheit. Wenn sie aus der gleichen Teilmenge des Definitionsbereiches kommen, so ergibt sich die Verschiedenheit von  $F(k)$  und  $F(\ell)$  aus der Injektivität von  $\psi$  bzw.  $\varphi \circ \theta$ . Insgesamt erhalten wir also eine bijektive Abbildung

$$\{1, \dots, m+n\} \longrightarrow M \cup N,$$

so dass die Anzahl von  $M \cup N$  gleich  $m+n$  ist.  $\square$

Später werden wir beweisen, dass die Addition mit dem schriftlichen Addieren ausgerechnet werden kann, dass also der Algorithmus des schriftlichen Addierens korrekt ist.

## 8. ARBEITSBLATT

### 8.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 8.1.** Skizziere die Produktmenge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### 8.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 8.2.** Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

- (1) Ein Geradenstück  $I$ .
- (2) Eine Kreislinie  $K$ .
- (3) Eine Kreisscheibe  $D$ .
- (4) Eine Parabel  $P$ .

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?



Wie kann man den runden Strohballen (ohne die Katze) als eine Produktmenge beschreiben?

**Aufgabe 8.3.** Es seien  $A$  und  $B$  disjunkte Mengen und  $C$  eine weitere Menge. Zeige die Gleichheit

$$C \times (A \uplus B) = C \times A \uplus C \times B.$$

**Aufgabe 8.4.** Es seien  $A$  und  $B$  disjunkte Mengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \uplus B) \times (A \uplus B) = A \times A \uplus A \times B \uplus B \times A \uplus B \times B.$$

**Aufgabe 8.5.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\tau: L \times M \longrightarrow M \times L, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Produktmengen  $L \times M$  und  $M \times L$  festlegt.

**Aufgabe 8.6.** Es sei  $P$  eine Menge von Personen und  $V$  die Menge der Vornamen von diesen Personen und  $N$  die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von  $P$  nach  $V$ , nach  $N$  und nach  $V \times N$  und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

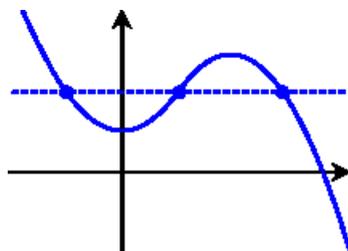
**Aufgabe 8.7.** Skizziere die folgenden Teilmengen im  $\mathbb{R}^2$ .

- (1)  $\{(x, y) \mid x + y = 3\}$ ,
- (2)  $\{(x, y) \mid x + y \leq 3\}$ ,
- (3)  $\{(x, y) \mid (x + y)^2 \geq 4\}$ ,

- (4)  $\{(x, y) \mid |x + 2| \geq 5 \text{ und } |y - 2| \leq 3\}$ ,  
 (5)  $\{(x, y) \mid |x| = 0 \text{ und } |y^4 - 2y^3 + 7y - 5| \geq -1\}$ ,  
 (6)  $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ und } 0 \leq y \leq x^3\}$ .

**Aufgabe 8.8.** Erstelle eine Wertetabelle und skizziere den Graphen für das Nachfolgernehmen in den natürlichen Zahlen.

**Aufgabe 8.9.** Wie sehen die Graphen der Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aus, die Sie in der Schule kennengelernt haben?



**Aufgabe 8.10.** Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob  $f$  injektiv bzw. surjektiv ist?

**Aufgabe 8.11.** Es sei  $M$  eine Menge mit einer Verknüpfung darauf, die wir als Produkt schreiben.

- (1) Wie viele sinnvollen Klammerungen gibt es für die Verknüpfung von vier Elementen?
- (2) Die Verknüpfung sei nun assoziativ. Zeige, dass das Produkt von vier Elementen nicht von irgendeiner Klammerung abhängt.

**Aufgabe 8.12.** Berechne im Strichsystem

$$||||| + |||||$$

allein unter Verwendung des Umlegungsprinzips.

**Aufgabe 8.13.** Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...  
 und wollen mit diesen Zahlen Addieren.

- (1) Welche Alltagssprachliche Formulierung besitzt die Addition in diesem Zählmodell?
- (2) Welche sprachlichen Formulierungen drücken aus, das heute das neutrale Element der Addition ist.
- (3) Was ist morgen plus morgen?
- (4) Was ist übermorgen plus übermorgen?
- (5) Was ist überübermorgen plus überüberübermorgen?

**Aufgabe 8.14.** Es seien  $k$  und  $n$  natürliche Zahlen. Zeige, dass die (Nachfolger-)Abbildung

$$\{k, \dots, n\} \longrightarrow \{k', \dots, n'\}, i \longmapsto i',$$

bijektiv ist.

**Aufgabe 8.15.** Bestimme in den jeweiligen Modellen der natürlichen Zahlen die Anzahl der folgenden Abschnitte von  $\mathbb{N}$ .

(1)  $\{\text{|||||||}, \dots, \text{|||||||}\}$ .

(2)  $\{1201, \dots, 21010\}$

(im Dreiersystem).

(3)  $\{\text{überübermorgen}, \dots, \text{überüberüberüberüberüberüberübermorgen}\}$ .

**Aufgabe 8.16.** Es seien  $S$  und  $T$  endliche Teilmengen einer Menge  $M$ . Zeige, dass dann auch die Vereinigung  $S \cup T$  endlich ist.

**Aufgabe 8.17.** Nach dem Mittagessen wollen Frau Maier-Sengupta und Herr Referendar Lutz mit den Kindern  $A, B, C, G, H, L, M, R, T$  eine Bootsfahrt machen, wozu jedes Kind eine Nummer zwischen 1 und 9 braucht. Frau Maier-Sengupta ist vor dem Mittagessen mit einem Teil der Kinder auf dem Spielplatz und verteilt dabei schon mal die Nummern

$n$	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	$A$	$G$	$R$	$H$	$L$	$B$

Beim Abräumdienst nach dem Mittagessen legt Herr Lutz (ohne Rücksprache) folgende Nummern fest

$n$	1	2	3	4	5
$\psi(n)$	$L$	$C$	$M$	$G$	$T$

Lucy (L) wollte zwar sagen, dass sie schon eine Nummer hat, doch das wurde von Gabi (G) verhindert. Am Boot entscheidet dann Frau Maier-Sengupta, dass die Spielplatzkinder ihre Spielplatznummer behalten und dass die übrigen Kinder die hinteren Nummern 7 – 9 in der von Herrn Lutz vergebenen Reihenfolge bekommen.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für die Bootsnummerierung.
- (2) Definiere die Bootsnummerierung als Abbildung  $\vartheta$  durch eine geeignete Fallunterscheidung.

**Aufgabe 8.18.** Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

### 8.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 8.19.** (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im  $\mathbb{R}^2$ .

- (1)  $\{(x, y) \mid |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$ ,
- (2)  $\{(x, y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$ ,
- (3)  $\{(x, y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$ ,
- (4)  $\{(x, y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Aufgabe 8.20.** (2 Punkte)

Es sei  $M$  eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung darauf, die wir als  $\star$  schreiben. Zeige, dass

$$(a \star b) \star (c \star (d \star e)) = a \star ((b \star (c \star d)) \star e)$$

für beliebige  $a, b, c, d, e \in M$  gilt.

**Aufgabe 8.21.** (2 Punkte)

Es sei  $M$  eine Menge mit einer Verknüpfung  $\ast$ . Zeige, dass es maximal ein neutrales Element für die Verknüpfung gibt.

**Aufgabe 8.22.** (3 Punkte)

Es seien  $k, n$  natürliche Zahlen. Zeige, dass die Abbildung

$$\{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1 + n, \dots, k + n\}, i \longmapsto i + n,$$

bijektiv ist.

Anleitung: Führe Induktion nach  $n$  unter Verwendung von Aufgabe 8.14.

**Aufgabe 8.23.** (3 Punkte)

Es seien  $M$  und  $N$  zwei endliche Teilmengen einer Menge  $G$ . Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

## 9. VORLESUNG - MULTIPLIKATION DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

In theory, 'theory' and  
'praxis' are the same, in  
praxis they aren't

---

## 9.1. Die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen.

Zur Definition der Multiplikation verwenden wir wieder das Prinzip, dass man mit natürlichen Zahlen zählen kann. Die Addition haben wir bereits zur Verfügung und insbesondere können wir eine natürliche Zahl mit sich selbst addieren. Wir können auch Summen der Form

$$b + b + b + \cdots + b + b$$

benutzen und können dabei, wegen der Assoziativität der Addition, auf Klammern verzichten. Die Anzahl der Summanden ist dabei eine wohldefinierte natürliche Zahl. Dies nehmen wir zur Grundlage für die Multiplikation.<sup>34</sup>

**Definition 9.1.** Das *Produkt*  $a \cdot b$  zweier natürlicher Zahlen ist definiert als die  $a$ -fache Summe der Zahl  $b$  mit sich selbst.

Wichtig ist hier, dass  $a$  die Anzahl der Summanden angibt, also wie oft  $b$  zu nehmen ist, und nicht die Anzahl der Additionen (die Anzahl des Pluszeichens), die dabei auszuführen sind. Diese Anzahl ist um eins kleiner. Es spricht aber auch einiges dafür, dass man von 0 ausgeht und dazu dann  $a$ -fach die Operation  $+b$  durchführt. Dann hat man

$$0 + b + b + \cdots + b + b$$

und  $a$ -fach den gleichen Prozess. Die beiden Zahlen  $a$  und  $b$  heißen *Faktoren*, das Ergebnis heißt das *Produkt*, die Verknüpfung heißt *Multiplikation*.

---

<sup>34</sup>Man beachte, dass hier die erste Zahl angibt, wie oft die zweite Zahl mit sich selbst zu addieren ist. Bei der Definition der Addition gibt gemäß unserer Definition die zweite Zahl an, wie oft von der ersten Zahl ausgehend der Nachfolger zu nehmen ist. Bei der Potenzierung gibt wiederum die zweite hochgestellte Zahl an, wie oft die erste untenstehende Zahl mit sich selbst zu multiplizieren ist. Es gibt hier also keine einheitliche Reihenfolge, welche Zahl die Anzahl der Prozesse festlegt. In der Multiplikation soll die erste Zahl die Prozesse zählen, weil man drei Kühe sagt und nicht Kühe drei.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Wenn man die Addition beherrscht, so ist es einfach, die Multiplikation auszuführen und eine Tabelle für kleine Zahlen aufzustellen. Die Multiplikationstabelle für zwei Zahlen zwischen 0 und 10, das sogenannte *kleine Einmaleins* lässt sich so erstellen (auch in anderen Systemen). Man kann dann grundsätzlich sämtliche Multiplikationen im Zehnersystem darauf zurückführen, was im schriftlichen Multiplizieren ausgenutzt wird. Um große Zahlen effektiv miteinander multiplizieren zu können, muss man das kleine Einmaleins auswendig kennen. Eigentlich sollte man die 10 aus dem kleinen Einmaleins herausnehmen, da die Zehnerreihe sich im Dezimalsystem auf kleinere Rechnungen zurückführen lässt.

Für die soeben eingeführte Multiplikation möchte man die vertrauten Eigenschaften wie beispielsweise die Kommutativität etablieren. Dies geschieht in folgendem Lemma.

**Lemma 9.2.** *Für die Multiplikation der natürlichen Zahlen (mit der in der Definition 9.1 festgelegten Multiplikation) gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es gilt*

$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$

*für alle  $n$ .*

(2) *Es gilt*

$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$

*für alle  $n$ , d.h.  $1 = 0'$  ist das neutrale Element für die Multiplikation.*

(3) *Es ist*

$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$

*und*

$$n \cdot k' = n \cdot k + n$$

*für alle  $n, k \in \mathbb{N}$ .*

(4) *Die Multiplikation ist kommutativ.*

- (5) Für beliebige
- $k, m, n \in \mathbb{N}$
- gilt

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

(Distributivgesetz).

- (6) Die Multiplikation ist assoziativ.

*Beweis.* (1) Die zweite Gleichung ist klar, da unabhängig davon, wie oft die 0 mit sich selbst addiert wird, stets 0 herauskommt. Die erste Gleichung kann man als eine Konvention oder auch als Teil der Definition ansehen: Eine Summe, in der überhaupt keine Zahl vorkommt (die leere Summe), ist als 0 zu interpretieren.

- (2) Die erste Gleichung ist klar, der Ausdruck  $1 \cdot n$  besagt einfach, dass die Zahl  $n$  einmal dasteht. Die zweite Gleichung bedeutet, dass die  $n$ -fache Addition der 1 mit sich selbst gleich  $n$  ist. Dies zeigen wir durch Induktion nach  $n$ , wobei der Induktionsanfang (für  $n = 0, 1$  klar ist). Sei die Aussage also schon für  $n$  bewiesen. Der Unterschied zwischen  $n \cdot 1$  und  $n' \cdot 1$  besteht darin, dass im zweiten Fall einmal mehr  $+1$  dasteht. Somit ist

$$n' \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 = n + 1 = n'.$$

- (3) Die linke Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Die rechte Gleichung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} n \cdot k' &= \underbrace{k' + \dots + k'}_{n\text{-mal}} \\ &= \underbrace{(k+1) + \dots + (k+1)}_{n\text{-mal}} \\ &= \underbrace{k + \dots + k}_{n\text{-mal}} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \\ &= n \cdot k + n. \end{aligned}$$

- (4) Die Kommutativität beweisen wir durch Induktion nach  $k$ , und zwar beweisen wir die Behauptung

$$n \cdot k = k \cdot n$$

für alle  $n$ . Der Fall  $k = 0$  ist klar, da dann beidseitig 0 steht. Sei die Gesamtaussage also für ein bestimmtes  $k$  und beliebiges  $n$  bereits bewiesen. Dann ist unter Verwendung von (3) und der Induktionsvoraussetzung

$$n \cdot k' = n \cdot k + n = k \cdot n + n = k' \cdot n.$$

- (5) Das Distributivgesetz

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$

beweisen wir durch Induktion nach  $k$  für beliebige  $m, n$ . Der Fall  $k = 0$  ist klar, da beidseitig 0 rauskommt. Unter Verwendung der

Induktionsvoraussetzung und Teil (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} k' \cdot (m + n) &= k \cdot (m + n) + m + n \\ &= k \cdot m + k \cdot n + m + n \\ &= k \cdot m + m + k \cdot n + n \\ &= k' \cdot m + k' \cdot n. \end{aligned}$$

- (6) Das Assoziativitätsgesetz beweisen wir durch Induktion nach dem ersten Faktor (wobei der Induktionsanfang wieder klar ist) unter Verwendung des Distributivgesetzes und Teil (3).

$$\begin{aligned} k' \cdot (m \cdot n) &= k \cdot (m \cdot n) + m \cdot n \\ &= (k \cdot m) \cdot n + m \cdot n \\ &= (k \cdot m + m) \cdot n \\ &= (k' \cdot m) \cdot n. \end{aligned}$$

□

Es gilt  $n \cdot 0 = 0$  und

$$n \cdot k' = n \cdot k + n.$$

Diese beiden Eigenschaften legen bereits die Multiplikationsverknüpfung eindeutig fest.

**Lemma 9.3.** *Auf den natürlichen Zahlen gibt es eine eindeutig bestimmte Verknüpfung*

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

die

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

erfüllt.

*Beweis.* Es seien  $\cdot$  und  $\star$  zwei Verknüpfungen auf  $\mathbb{N}$ , die beide diese Eigenschaften erfüllen. Wir müssen

$$x \cdot y = x \star y$$

für alle  $x, y \in \mathbb{N}$  zeigen. Wir führen Induktion nach  $y$ . Der Induktionsanfang ist klar, da wegen der ersten charakteristischen Eigenschaft

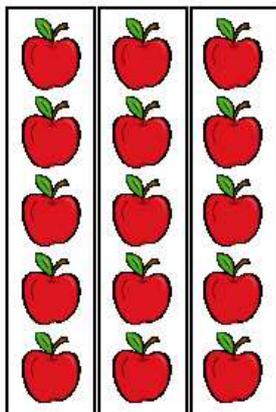
$$x \cdot 0 = 0 = x \star 0$$

ist. Sei die Aussage für ein gewisses  $y$  schon bewiesen. Dann ist unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung und der zweiten charakteristischen Eigenschaft

$$x \cdot y' = x \cdot y + x = x \star y + x = x \star y'.$$

□

## 9.2. Die Anzahl der Produktmenge.



**Satz 9.4.** *Es seien  $M$  und  $N$  endliche Mengen mit  $m$  bzw.  $n$  Elementen. Dann besitzt die Produktmenge  $M \times N$  genau  $m \cdot n$  Elemente.*

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $m$ , also die Anzahl von  $M$ . Wenn  $m = 0$  ist, so ist  $M$  leer und damit ist auch die Produktmenge leer, hat also ebenfalls 0 Elemente, was nach Lemma 9.2 (1) mit dem Produkt übereinstimmt. Dies sichert den Induktionsanfang. Wenn  $m = 1$  ist, so besteht  $M$  aus genau einem Element, sagen wir  $x$ , und alle Elemente der Produktmenge haben die Form  $(x, y)$  mit diesem einen  $x$  und einem beliebigen  $y \in N$ . Somit ist

$$N \longrightarrow M \times N, y \longmapsto (x, y),$$

eine bijektive Abbildung und  $M \times N$  hat genau so viele Elemente wie  $N$ , nämlich  $n$ . Dies stimmt nach Lemma 9.2 (2) mit dem Produkt  $1 \cdot n$  überein. Sei nun die Aussage für alle Mengen  $M$  mit  $m$  Elementen (und beliebige endliche Mengen  $N$ ) bewiesen und es liege eine  $(m + 1)$ -elementige Menge  $M$  vor. Es sei  $x \in M$  ein fixiertes Element und wir betrachten die disjunkte Zerlegung

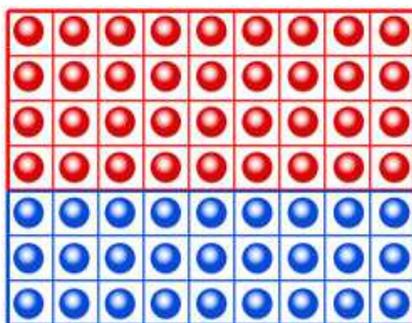
$$M = (M \setminus \{x\}) \cup \{x\}.$$

Die Menge  $M \setminus \{x\}$  besitzt dann  $m$  Elemente, so dass wir auf diese Menge die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Ferner ist

$$M \times N = (M \setminus \{x\}) \times N \cup (\{x\} \times N)$$

und diese Vereinigung ist disjunkt (die erste Komponente eines Paares ist entweder  $x$  oder nicht  $x$ ). Daher ist nach Satz 8.12 die Anzahl von  $M \times N$  gleich der Summe der Anzahlen der beiden Bestandteile, also nach der Induktionsvoraussetzung, dem einelementigen Spezialfall und Lemma 9.2 (3) gleich

$$m \cdot n + n = (m + 1) \cdot n.$$



Das Distributivgesetz anhand der Interpretation der Multiplikation als Anzahl einer Produktmenge.

Wir geben noch einen zweiten Beweis für die vorstehende Aussage.

Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\psi: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, mn\}, (i, j) \longmapsto (i-1)n + j,$$

bijektiv ist. Zum Beweis der Surjektivität sei  $z \in \{1, 2, \dots, mn\}$  vorgegeben. Dieses (ganzzahlige) Intervall kann man in die disjunkten Intervalle

$$\{1, \dots, n\} \cup \{n+1, \dots, 2n\} \cup \{2n+1, \dots, 3n\} \cup \dots \cup \{(m-1)n+1, \dots, mn\}$$

unterteilen. Das Element  $z$  gehört somit zu einem dieser Intervalle, d.h. es gibt ein  $i$  mit

$$z \in \{(i-1)n+1, \dots, in\}$$

mit  $i$  zwischen 1 und  $m$ . Dann ist

$$z = (i-1)n + j$$

mit einem  $j$  zwischen 1 und  $n$  und gehört somit zum Bild. Zum Beweis der Injektivität seien

$$(i, j), (k, \ell) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$$

gegeben, die auf das gleiche Element abbilden. Es gilt also

$$(i-1)n + j = (k-1)n + \ell.$$

Da  $j$  und  $\ell$  beide zu  $\{1, \dots, n\}$  gehören, sind die Summen jeweils maximal gleich  $in$  bzw.  $kn$ . Daher können die Zahlen nur dann gleich sein, wenn

$$i = k$$

und dann nach der Abziehregel auch

$$j = \ell$$

ist.

### 9.3. Potenzen.

**Definition 9.5.** Zu einer natürlichen Zahl  $a$  und einer natürlichen Zahl  $n$  nennt man die  $n$ -fache Multiplikation von  $a$  mit sich selbst

$$a \cdot a \cdots a \cdot a$$

( $n$  Faktoren) die  $n$ -te Potenz von  $a$ . Sie wird mit  $a^n$  bezeichnet.

Die Zahl  $a$  heißt in diesem Zusammenhang die *Basis* der Potenz und  $n$  der *Exponent*. Bei  $n = 0$  ist dies als

$$a^0 = 1$$

zu verstehen. Dies gilt auch für  $0$ , also  $0^0 = 1$ , wobei man hier häufig auf eine Festlegung verzichtet. Für positive Exponenten  $n$  ist jedenfalls

$$0^n = 0.$$

Wie gesagt, der Exponent bestimmt die Anzahl der Faktoren

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}},$$

die Anzahl der auszuführenden Multiplikationen ist um eins kleiner. Man kann aber auch von  $1$  ausgehen und die Potenz als

$$1 \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a$$

auffassen. Als Rechenregeln für das Potenzieren halten wir die folgenden Eigenschaften fest.

**Lemma 9.6.** Für das Potenzieren gelten die folgenden Eigenschaften, wobei  $a, b \in \mathbb{N}_+$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  seien.

(1)

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 9.12. □

**Definition 9.7.** Eine Zahl der Form  $n^2$  mit  $n \in \mathbb{N}$  heißt *Quadratzahl*.

#### 9.4. Die Ordnungsrelation.

Wir wollen auf den natürlichen Zahlen die Größer- bzw. genauer die Größer-gleich-Ordnung einführen.

**Definition 9.8.** Eine *Relation*  $R$  auf einer Menge  $M$  ist eine Teilmenge der Produktmenge  $M \times M$ , also  $R \subseteq M \times M$ .

**Definition 9.9.** Eine Relation  $\preccurlyeq$  auf einer Menge  $I$  heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist  $i \preccurlyeq i$  für alle  $i \in I$ .
- (2) Aus  $i \preccurlyeq j$  und  $j \preccurlyeq k$  folgt stets  $i \preccurlyeq k$ .
- (3) Aus  $i \preccurlyeq j$  und  $j \preccurlyeq i$  folgt  $i = j$ .

**Definition 9.10.** Eine Ordnungsrelation  $\preccurlyeq$  auf einer Menge  $I$  heißt *lineare Ordnung* (oder *totale Ordnung*), wenn zu je zwei Elementen  $x, y \in I$  die Beziehung  $x \preccurlyeq y$  oder  $y \preccurlyeq x$  gilt.

### 9. ARBEITSBLATT

#### 9.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 9.1.** Erstelle eine Liste der Quadratzahlen bis 400.

#### 9.2. Übungsaufgaben.

##### Aufgabe 9.2.\*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

##### Aufgabe 9.3.\*

Wie oft sagt man „bitte“, wenn man dreimal „bitte, bitte, bitte“ sagt.

##### Aufgabe 9.4. Berechne

$$||| \cdot ||||,$$

ohne auf andere Darstellungsformen der natürlichen Zahlen Bezug zu nehmen. Insbesondere soll das Ergebnis als Strichfolge vorliegen.

##### Aufgabe 9.5. Berechne

$$||| \cdot || \cdot ||,$$

ohne auf andere Darstellungsformen der natürlichen Zahlen Bezug zu nehmen. Insbesondere soll das Ergebnis als Strichfolge vorliegen.

**Aufgabe 9.6.** Berechne  $3 \cdot 4$  allein mit den in Lemma 9.3 und Lemma 8.11 fixierten Rechenregeln.

**Aufgabe 9.7.** In der Klasse gibt es vier Reihen mit je acht Sitzplätzen, die alle besetzt sind. Vorne stehen Frau Maier-Sengupta und Herr Lutz. Frau Maier Sengupta zählt die Kinder durch, wobei sie reihenweise von (zuerst) links nach rechts und (dann) von vorne nach hinten durchzählt. Herr Lutz zählt die Kinder von rechts hinten nach links vorne, wobei er zuerst die ganz rechts sitzenden Kinder durchzählt u.s.w.

- (1) Welche Nummer bekommt dasjenige Kind, das von Frau Maier-Sengupta die Nummer 23 bekommt, von Herrn Lutz?
- (2) Welche Nummer bekommt dasjenige Kind, das von Herrn Lutz die Nummer 18 bekommt, von Frau Maier-Sengupta?
- (3) Welche Nummer bekommt das Kind, das in der dritten Reihe von vorne auf dem sechsten Stuhl von links sitzt, von den beiden Lehrkräften?

**Aufgabe 9.8.** Erstelle das kleine Einmaleins im Zweiersystem.

**Aufgabe 9.9.** Erstelle das kleine Einmaleins im Dreiersystem.

**Aufgabe 9.10.** Erstelle das kleine Einmaleins im Vierersystem.

**Aufgabe 9.11.** Welche Ziffern treten im Dezimalsystem als Endziffern von Quadratzahlen auf?

**Aufgabe 9.12.** Erstelle das „kleine Einshocheins“. Kann man das allgemeine Potenzieren  $n^k$  darauf irgendwie zurückführen?

**Aufgabe 9.13.\***

Es sei  $a \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, wie man  $a^{10}$  mit vier Multiplikationen berechnen kann.

**Aufgabe 9.14.** Zeige, dass für das Potenzieren die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien  $a, b \in \mathbb{N}_+$  und  $m, n \in \mathbb{N}$ ).

- (1) 
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$
- (2) 
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

**Aufgabe 9.15.** Berechne

$$||| |||,$$

ohne auf andere Darstellungsformen der natürlichen Zahlen Bezug zu nehmen. Insbesondere soll das Ergebnis als Strichfolge vorliegen.

**Aufgabe 9.16.** In der Schule wird Potenzrechnung durchgenommen und es geht um die Frage, ob

$$a^b = b^a$$

ist. Als Gründe, dass dies gelten müsste, werden angeführt:

- (1) Es gilt ja auch  $a + b = b + a$  und  $a \cdot b = b \cdot a$ , warum sollte das jetzt plötzlich nicht mehr gelten.
- (2) Das wäre gut, wenn das gelten würde, dann könnte man die kleinere Zahl immer oben hinschreiben und es wäre einfacher auszurechnen.
- (3) Wenn man beispielsweise  $a = 2$  und  $b = 4$  nimmt, so ist

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 4 \cdot 4 = 4^2,$$

warum sollte das für andere Zahlen nicht auch gelten?

**Aufgabe 9.17.** Zeige, dass das Potenzieren auf den positiven natürlichen Zahlen, also die Zuordnung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (a, b) \longmapsto a^b,$$

weder kommutativ noch assoziativ ist. Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element?

**Aufgabe 9.18.\***

Ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+, (a, b) \longmapsto (a + b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

**Aufgabe 9.19.** Gabi Hochster überlegt sich: „Die Addition  $a + b$  bedeutet,  $b$ -mal den Nachfolger von  $a$  nehmen,  $a \cdot b$  bedeutet,  $b$ -mal  $a$  mit sich selbst zu addieren,  $a^b$  bedeutet,  $b$ -mal  $a$  mit sich selbst zu multiplizieren. Dies kann man doch eigentlich unendlich weitermachen, wobei man allerdings auf die Klammerungen achten muss. Also:  $a \heartsuit b$  bedeutet,  $b$ -mal  $a$  mit sich selbst zu potenzieren (Anzahl der Operanden, nicht der Operationen), wobei Rechtsklammerung gelte,  $a \clubsuit b$  bedeutet,  $b$ -mal  $a$  mit sich selbst die  $\heartsuit$ -Operation durchzuführen, u.s.w. Am besten nennen wir diese Verknüpfungen systematisch  $\heartsuit_1$ (Addition),  $\heartsuit_2, \dots$ “

- (1) Berechne  $3 \heartsuit 2, 4 \heartsuit 2, 5 \heartsuit 2, \dots$ .
- (2) Berechne  $2 \heartsuit 3, 2 \heartsuit 4, 2 \heartsuit 5, \dots$ .
- (3) Berechne  $10 \heartsuit 3$ .
- (4) Berechne  $3 \clubsuit 2$ .
- (5) Berechne  $2 \clubsuit 3$ .
- (6) Was ist  $2 \heartsuit_n 2$  für jedes  $n$ ?

### 9.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 9.20.** (2 Punkte)

Berechne  $5 \cdot 3$  allein mit den in Lemma 9.3 und Lemma 8.11 fixierten Rechenregeln.

**Aufgabe 9.21.** (2 Punkte)

Erstelle das kleine Einmaleins im Fünfersystem.

**Aufgabe 9.22.** (3 (1+1+1) Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 10\} \longrightarrow \{1, \dots, 100\}, (a, b) \longmapsto a \cdot b.$$

- (1) Ist  $\varphi$  injektiv?
- (2) Ist  $\varphi$  surjektiv?
- (3) Was ist das minimale  $k$  mit der Eigenschaft, dass unter der Abbildung

$$\psi: \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\} \longrightarrow \mathbb{N}_+, (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

alle Zahlen zwischen 1 und 100 im Bild liegen (also erreicht werden).

**Aufgabe 9.23.** (4 Punkte)

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m + 1) \prod_{i=1}^m (2i - 1)^2 = \prod_{k=1}^m (4k^2 - 1).$$

**Aufgabe 9.24.** (8 (1+1+2+2+2) Punkte)

Die modische Winterjacke „Nungiduluxe“ wird in den Größen  $XS, S, M, L, XL, XXL$  und in den Farben pink, türkis, lavendel, anthrazit, weinrot, ochsenblut, luisenblau und tschitscheringrün angeboten. Ferner gibt es die Ausführung mit Reißverschluss, mit einfachen Knöpfen und mit einer Doppelknopfreihe, sowie mit und ohne Kapuze.

- (1) Beschreibe die Menge der möglichen Nungiduluxe-Jacken als eine Produktmenge.
- (2) Wie viele Nungiduluxe-Jacken gibt es?
- (3) Der Grundpreis der Jacke beträgt 200 Euro, für die Größen  $XL$  und  $XXL$  wird ein Aufschlag von 10 Euro, für die Doppelknopfreihe wird ein Aufschlag von 8 Euro und für die Kapuze wird ein Aufschlag von 12 Euro verlangt. Wie viele Jacken gibt es, die mindestens 220 Euro kosten?
- (4) Lucy Sonnenschein möchte sich eine Nungiduluxe-Jacke kaufen. Sie hat Größe  $M$  und möchte maximal 215 Euro ausgeben. Anthrazit und weinrot kommt für sie nicht in Frage, und sie findet, dass Reißverschlüsse meistens klemmen. Da sie zufällig eine luisenblaue und eine tschitscheringrüne Mütze hat, wäre bei diesen Farbe die Kapuze unsinnig. Alle verbleibenden Möglichkeiten möchte sie gerne ausprobieren. Wie viele Jacken bestellt sie?
- (5) Die Bestellung von Lucy trifft auf folgende Schwierigkeiten: In der Größe  $M$  sind die Farben pink und lavendel in jeder Ausführung ausverkauft und ochsenblut gibt es nur noch mit Reißverschluss. Türkis gibt es nur gleichzeitig mit Doppelknopfreihe und Kapuze und luisenblau nur mit der einfachen Knopfreihe. Wie viele Jacken werden geliefert?



## 10. VORLESUNG - ORDNUNG AUF DEN NATÜRLICHEN ZAHLEN

## 10.1. Die Ordnung auf den natürlichen Zahlen.

**Definition 10.1.** Man sagt, dass eine natürliche Zahl  $n$  *größergleich* einer natürlichen Zahl  $k$  ist, geschrieben

$$n \geq k,$$

wenn man von  $k$  aus durch endlichfaches Nachfolgernehmen zu  $n$  gelangt.

$$\overline{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11} \rightarrow$$

Auf dem nach rechts verlaufenden Zahlenstrahl bedeutet  $n \geq k$ , dass sich  $n$  weiter rechts als  $k$  befindet. Diese Interpretation gilt für alle reellen Zahlen.

Statt  $n \geq k$  schreibt man auch  $k \leq n$  (gesprochen kleinergleich). Die Schreibweise  $n > k$  bedeutet  $n \geq k$  und  $n \neq k$ .

**Lemma 10.2.** Für natürliche Zahlen  $n, k$  gilt

$$n \geq k$$

genau dann, wenn es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$n = k + m.$$

*Beweis.* Die Zahl  $m$  gibt an, wie oft man von  $k$  aus den Nachfolger nehmen muss, um zu  $n$  zu gelangen.  $\square$

**Lemma 10.3.** Für die Größergleich-Relation in den natürlichen Zahlen gelten die folgenden Aussagen.

(1) Es ist

$$a \geq 0$$

für alle  $a \in \mathbb{N}$ .

(2) Es ist

$$a = 0$$

oder

$$a \geq 1.$$

(3) Bei

$$a \geq b$$

gilt

$$a = b$$

oder

$$a \geq b + 1.$$

*Beweis.* Wir verwenden die Charakterisierung aus Lemma 10.2.

- (1) Ist klar wegen  $a = 0 + a$ .
- (2) Wir zeigen die Aussage  $a = 0$  oder  $a \geq 1$  für alle  $a \in \mathbb{N}$  durch Induktion über  $a$ . Für  $a = 0$  ist die Aussage klar. Sei also angenommen, dass die Aussage für ein bestimmtes  $a$  gelte. Dann ist  $a = 0$  oder  $a \geq 1$ . Im ersten Fall ist dann  $1 + a = 1 + 0 = 1$  und insbesondere  $1 + a \geq 1$ . Im zweiten Fall ist  $a = b + 1$  mit einem  $b \in \mathbb{N}$  und damit  $a + 1 = (b + 1) + 1 = 1 + (b + 1)$ .
- (3) Wird ähnlich wie (2) bewiesen, siehe Aufgabe 10.4.

□

**Satz 10.4.** *Auf den natürlichen Zahlen ist durch die Größergleich-Relation  $\geq$  eine totale Ordnung definiert.*

*Beweis.* Wir verwenden die Charakterisierung mit der Addition. Wegen  $n = n + 0$  ist  $n \geq n$ . Wenn  $k \geq \ell$  und  $\ell \geq m$  ist, so bedeutet dies, dass es natürliche Zahlen  $a, b$  mit  $k = \ell + a$  und  $\ell = m + b$  gibt. Dann gilt insgesamt

$$k = \ell + a = (m + b) + a = m + (b + a)$$

und somit ist auch  $k \geq m$ . Aus  $k \geq \ell$  und  $\ell \geq k$  ergibt sich  $k = \ell + a$  und  $\ell = k + b$  und somit  $k = k + (a + b)$ . Dies ist nach der Abziehregel nur bei  $a + b = 0$  möglich, und dies ist wiederum, da 0 kein Nachfolger ist, nur bei  $a = b = 0$  möglich. Die Aussage  $a \geq b$  oder  $b \geq a$  beweisen wir durch Induktion über  $a$  (für jedes feste  $b$ ), wobei der Induktionsanfang wegen  $b \geq 0$  klar ist. Die Aussage gelte also für ein bestimmtes  $a$ . Wenn die erste Möglichkeit gilt, also  $a \geq b$ , so gilt wegen

$$a + 1 > a \geq b$$

erst recht  $a + 1 \geq b$ . Wenn die zweite Möglichkeit gilt, also  $a \leq b$ , so gibt es zwei Möglichkeiten. Bei  $a = b$  ist  $a + 1 \geq b$  und die Gesamtaussage gilt für  $a + 1$ . Andernfalls ist  $a < b$  und somit ist nach Lemma 10.3 (3)  $a + 1 \leq b$  und die Gesamtaussage gilt erneut. □

Wir begründen nun, dass die Ordnungsrelation mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist.

**Satz 10.5.** *Es seien  $a, b, c$  natürliche Zahlen. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist*

$$a \geq b$$

*genau dann, wenn*

$$a + c \geq b + c$$

*ist.*

- (2) *Aus*

$$a \geq b$$

*und*

$$c \geq d$$

- folgt*
- $$a + c \geq b + d.$$
- (3) *Aus*
- $$a \geq b$$
- folgt*
- $$ca \geq cb.$$
- (4) *Aus*
- $$a \geq b$$
- und*
- $$c \geq d$$
- folgt*
- $$ac \geq bd.$$
- (5) *Aus*
- $$c \geq 1$$
- und*
- $$ca \geq cb.$$
- folgt*
- $$a \geq b.$$

*Beweis.* (1) Wir beweisen die Aussage durch Induktion über  $c$ . Bei  $c = 0$  ist die Aussage klar. Für den Induktionsschritt müssen wir lediglich zeigen, dass die Aussage für  $c = 1$  gilt. Bei  $a = b$  ist die Aussage klar, da der Nachfolger wohldefiniert ist. Bei  $a > b$  ist nach Lemma 10.3 (3)  $a \geq b + 1$  und somit

$$a + 1 > a \geq b + 1.$$

Dies zeigt zugleich, dass aus  $a > b$  auch  $a + 1 > b + 1$  folgt. Da die Ordnung total ist, folgt somit auch aus  $a + 1 \geq b + 1$  die Beziehung  $a \geq b$ .

- (2) Zweifache Anwendung von Teil (1) liefert

$$a + c \geq b + c \geq b + d,$$

so dass die Transitivität den Schluss ergibt.

- (3) Wir führen Induktion nach  $c$ , die Fälle  $c = 0, 1$  sind klar. Sei die Aussage für  $c$  bewiesen. Dann ist mit dem Distributivgesetz, der Induktionsvoraussetzung und Teil (2)

$$(c + 1)a = ca + a \geq cb + b = (c + 1)b.$$

- (4) Aus den Voraussetzungen und Teil (3) ergibt sich

$$ac \geq bc \geq bd.$$

(5) Sei  $c \geq 1$  und  $a > b$ . Dann ist  $a \geq b + 1$  und somit ist nach Teil (3)

$$ac \geq (b + 1)c = bc + c \geq bc + 1,$$

also  $ac > bc$ .

□

Die folgende Eigenschaft heißt *Integritätseigenschaft*.

**Lemma 10.6.** *Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist nur dann gleich 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.*

*Beweis.* Wenn die beiden Faktoren  $a, b$  nicht 0 sind, so ist

$$a, b \geq 1$$

nach Lemma 10.3 (2) und somit ist

$$a \cdot b \geq 1$$

nach Satz 10.5 (4).

□

Die folgende Eigenschaft heißt *Kürzungsregel*.

**Lemma 10.7.** *Aus einer Gleichung  $n \cdot k = m \cdot k$  mit  $k, m, n \in \mathbb{N}$  und mit  $k \neq 0$  folgt  $n = m$ .*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 10.5 (5) und daraus, dass eine totale Ordnung vorliegt. □

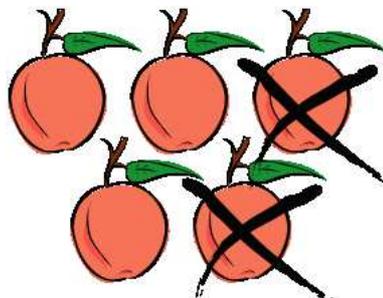
## 10.2. Maxima und Minima.

**Definition 10.8.** Zu einer endlichen nichtleeren Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{N}$  heißt  $a$  das *Maximum* von  $T$ , wenn  $a \in T$  ist und wenn  $a \geq x$  für alle  $x \in T$  gilt.

**Definition 10.9.** Zu einer nichtleeren Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{N}$  heißt  $b$  das *Minimum* von  $T$ , wenn  $b \in T$  ist und wenn  $b \leq x$  für alle  $x \in T$  gilt.

Die leere Menge besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum. Die Gesamtmenge  $\mathbb{N}$  besitzt das Minimum 0 und kein Maximum.

### 10.3. Die Differenz von natürlichen Zahlen.



Aus einer Menge mit  $a$  Elementen wird eine Teilmenge mit  $b$  Elementen ( $b \leq a$ ) herausgenommen. Zurück bleibt eine Menge mit  $a - b$  Elementen.

**Definition 10.10.** Für natürliche Zahlen

$$a \geq b$$

ist  $a - b$  diejenige natürliche Zahl  $c$  für die

$$a = b + c$$

gilt. Sie heißt die *Differenz* zwischen  $a$  und  $b$ .

Man mache sich hier die Logik dieser Definition klar: Die Voraussetzung

$$a \geq b$$

bedeutet nach Lemma 10.2 die Existenz einer natürlichen Zahl  $c$  mit

$$a = b + c.$$

Dieses  $c$  ist aufgrund der Abziehregel durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Die Differenz gibt an, wie oft man von  $b$  aus den Nachfolger nehmen muss, um zu  $a$  zu gelangen. Die charakteristische Eigenschaft ist die Gleichheit

$$b + (a - b) = a.$$

Dabei ist  $a - b$  die einzige Lösung für die Gleichung<sup>35</sup>

$$b + x = a.$$

Ferner ist  $a - a = 0$ . Für  $a < b$  ist der Ausdruck  $a - b$  innerhalb der natürlichen Zahlen nicht definiert. Da zu  $a, b \in \mathbb{N}$  stets

$$a \geq b$$

oder

$$b \geq a$$

gilt, ist einer der Ausdrücke  $a - b$  oder  $b - a$  eine wohldefinierte natürliche Zahl. Oft nennt man auch diese Zahl, die sich ergibt, wenn man die beiden Zahlen richtig geordnet hat, die Differenz der beiden Zahlen.

<sup>35</sup>Das Gleichungskonzept werden wir später genauer besprechen.

Für die Differenz können wir einfach eine mengentheoretische Interpretation angeben.

**Satz 10.11.** *Es sei  $M$  eine endliche Menge mit  $m$  Elementen und es sei*

$$T \subseteq M$$

*eine Teilmenge, die  $k$  Elemente besitze. Dann besitzt*

$$M \setminus T$$

*genau  $m - k$  Elemente.*

*Beweis.* Es ist

$$M = T \uplus (M \setminus T)$$

eine disjunkte Zerlegung. Daher gilt nach Satz 8.12

$$m = \#(M) = \#(T) + \#(M \setminus T) = k + \#(M \setminus T).$$

Somit erfüllt  $\#(M \setminus T)$  die charakteristische Eigenschaft der Differenz und ist daher gleich  $m - k$ .  $\square$

**Lemma 10.12.** (1) *Für natürliche Zahlen  $a, b, c$  mit*

$$a \geq b$$

*ist*

$$b + c + (a - b) = c + a.$$

*Insbesondere ist  $(b + c) - (a + c) = b - a$ .*

(2) *Für natürliche Zahlen  $a, b, c, d$  mit*

$$a \geq b$$

*und*

$$c \geq d$$

*ist*

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d).$$

*Insbesondere ist bei  $a \geq b$  stets  $(a + c) - (b + c) = a - b$  und  $(a + c) - b = (a - b) + c$ .*

(3) *Bei*

$$b + c \geq a \geq b$$

*ist  $c \geq a - b$  und es ist*

$$c - (a - b) = (c + b) - a.$$

*Beweis.* (1) Aus

$$b + (a - b) = a$$

ergibt sich direkt

$$b + c + (a - b) = c + a.$$

Der Zusatz ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Differenz.

(2) Wegen Satz 10.5 (2) ist

$$a + c \geq b + d,$$

so dass der Ausdruck rechts einen Sinn ergibt. Die Rechnung

$$(b + d) + (a - b) + (c - d) = d + a + (c - d) = a + c$$

unter Verwendung der ersten Teils zeigt, dass  $(a - b) + (c - d)$  die charakteristische Eigenschaft von  $(a + c) - (b + d)$  erfüllt, also wegen der Eindeutigkeit damit übereinstimmt.

(3) Nach Teil (2) folgt aus  $a \geq b$  und  $b + c \geq a$  die Beziehung

$$(a - b) + ((b + c) - a) = a + b + c - (a + b) = c.$$

Beidseitiges Abziehen von  $a - b$  ergibt

$$(b + c) - a = c - (a - b).$$

□

Die folgende Aussage ist das Distributivgesetz für die Differenz.

**Lemma 10.13.** *Es seien  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $a \geq b$ . Dann ist*

$$c(a - b) = ca - cb.$$

*Beweis.* Nach Satz 10.5 ist mit  $a \geq b$  auch  $ca \geq cb$ , so dass  $ca - cb$  wohldefiniert ist. Es ist

$$a = (a - b) + b$$

und daher ist

$$ca = c((a - b) + b) = c(a - b) + cb.$$

Also ist

$$c(a - b) = ca - cb.$$

□

## 10. ARBEITSBLATT

### 10.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 10.1.** Ordne die folgenden natürlichen Zahlen gemäß ihrer Größe.

$2^{10}$ ,  $10^3$ ,  $50 \cdot 20 + 13$ ,  $33^2$ ,  $3 \cdot 334$ ,  $9^3 + 7^3$ ,  $1005$ ,  $2 \cdot 5 \cdot 101$ ,  $31^2$ ,  $3^3 \cdot 37$ ,  $11 \cdot 10 \cdot 9$ .

## 10.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 10.2.** Erstelle das „kleine Einsgrößergleichens“.

**Aufgabe 10.3.** Für natürliche Zahlen gelte  $a \geq b$  und  $b > c$ . Zeige  $a > c$ .

**Aufgabe 10.4.** Es seien  $a, b$  natürliche Zahlen mit  $a \geq b$ . Zeige, dass  $a = b$  oder  $a \geq b + 1$  gilt.

**Aufgabe 10.5.** Es seien  $k, n$  natürliche Zahlen. Zeige, dass  $k \leq n$  genau dann gilt, wenn

$$\{1, \dots, k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

gilt.

**Aufgabe 10.6.\***

Zeige, dass für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

**Aufgabe 10.7.** Modelliere Aussagen wie „diese Person ist größer (schwerer, intelligenter) als jene Person“ mit Hilfe von Abbildungen und der Größergleich-Relation auf den natürlichen Zahlen. Besteht eine Ordnungsrelation auf der Personenmenge?

**Aufgabe 10.8.** Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 10.9.** Bestimme die minimale Potenzzahl echt oberhalb von 1000000 und die maximale Potenzzahl echt unterhalb von 1000000.

**Aufgabe 10.10.\***

Der Professor kommt gelegentlich mit verschiedenen Socken und/oder mit verschiedenen Schuhen in die Universität. Er legt folgende Definitionen fest.

- (1) Ein Tag heißt *sockenzerstreut*, wenn er verschiedene Socken anhat.
- (2) Ein Tag heißt *schuhzerstreut*, wenn er verschiedene Schuhe anhat.

- (3) Ein Tag heißt *zerstreut*, wenn er sockenzerstreut oder schuhzerstreut ist.
- (4) Ein Tag heißt *total zerstreut*, wenn er sowohl sockenzerstreut als auch schuhzerstreut ist.

a) Vom Jahr 2015 weiß man, dass 17 Tage sockenzerstreut und 11 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal zerstreut? Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal total zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

b) Vom Jahr 2013 weiß man, dass 270 Tage sockenzerstreut und 120 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

c) Erstelle eine Formel, die die Anzahl der sockenzerstreuten, der schuhzerstreuten, der zerstreuten und der total zerstreuten Tage in einem Jahr miteinander in Verbindung bringt.

**Aufgabe 10.11.** Sei  $T \subseteq \mathbb{N}$  eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass  $T$  genau dann endlich ist, wenn  $T$  ein Maximum besitzt.

**Aufgabe 10.12.** Es sei  $M$  eine endliche Menge mit  $m$  Elementen und es sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass  $T$  ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl  $k$  die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass  $T$  genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

**Aufgabe 10.13.** Es seien  $S$  und  $T$  endliche Mengen und es gebe eine injektive Abbildung  $\psi: S \rightarrow T$ . Zeige  $\#(S) \leq \#(T)$ .

**Aufgabe 10.14.** Es seien  $S$  und  $T$  endliche Mengen. Es gebe zwei injektive Abbildungen  $\psi: S \rightarrow T$  und  $\varphi: T \rightarrow S$ . Zeige, dass dann die beiden Mengen die gleiche Anzahl besitzen.

**Aufgabe 10.15.** Berechne die Differenz

$$||||| - ||||.$$

**Aufgabe 10.16.** Es seien  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $a \leq b \leq c$ . Zeige

$$c - b \leq c - a.$$

**Aufgabe 10.17.\***

Es seien  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $a \geq b$  und  $a - b \geq c$ . Zeige, dass dann  $a \geq b + c$  ist und dass

$$(a - b) - c = a - (b + c)$$

ist.

**Aufgabe 10.18.\***

Es seien  $a, b, c, d$  natürliche Zahlen mit

$$a + b = c + d.$$

Es sei  $a \geq c$ . Zeige, dass dann  $d \geq b$  ist und dass

$$a - c = d - b$$

gilt.

**Aufgabe 10.19.\***

Es seien  $a, b, c, d$  natürliche Zahlen mit  $a \geq b$  und  $c \geq d$ .

(1) Zeige

$$ac + bd \geq bc + ad.$$

(2) Zeige (in  $\mathbb{N}$ )

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac + bd - (bc + ad).$$

**Aufgabe 10.20.** Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, . . . .

Wir kennen zwar nur die Tage ab heute, wir kennen aber die Wörter

. . . vorvorvorgestern, vorgestern, vorgestern, vorgestern, gestern,

(wenn sie sich letztlich auf einen Tag ab heute beziehen).

(1) Bestimme gestern von morgen.

(2) Bestimme vorgestern von überüberübermorgen.

(3) Bestimme gestern von vorgestern von überüberüberübermorgen.

(4) Ist vorgestern von morgen in diesem System benennbar?

**Aufgabe 10.21.\***

Die offizielle Berechtigung für eine Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Der Professor sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

**Aufgabe 10.22.\***

Anfang März beträgt die Zeitdifferenz zwischen Deutschland und Paraguay 4 Stunden (in Paraguay wurde es 4 Stunden später hell). Am 27. März 2016 wurde in Deutschland die Uhr von der Winterzeit auf die Sommerzeit umgestellt, die Uhr wurde also um eine Stunde nachts von 2 auf 3 vorgestellt. In der gleichen Nacht wurde die Uhr in Paraguay umgestellt. Wie groß war die Zeitdifferenz nach der Umstellung?

**Aufgabe 10.23.** Bringe die folgenden Berechnungen mit Lemma 10.12 in Verbindung.

- (1) In der ersten Halbzeit schießt Borussia Dortmund 3 Tore mehr als Bayern München. In der zweiten Halbzeit schießt Borussia Dortmund 4 Tore mehr als Bayern München. Wie viele Tore schießt Borussia Dortmund insgesamt mehr als Bayern München?
- (2) Mustafa Müller hat 7 Fußballbildchen mehr als Heinz Ngolo. Beide bekommen 12 neue hinzu. Was ist jetzt die Differenz?
- (3) Gestern hatte Mustafa Müller mindestens so viele Fußballbildchen wie Heinz Ngolo. Heute hat Heinz Geburtstag und bekommt neue Bildchen dazu, so dass er nun mindestens so viele Bildchen wie Mustafa hat. Wie lautet die neue Differenz, wenn man die alte Differenz und die Anzahl der geschenkten Bildchen kennt?

**10.3. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 10.24.** (4 Punkte)

Zeige, dass es keine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

gibt, die die folgende Eigenschaft erfüllt: Es ist  $k \geq n$  genau dann, wenn  $\varphi(k) \leq \varphi(n)$ .

**Aufgabe 10.25.** (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine endliche Menge mit  $m$  Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge  $N$ . Zeige, dass dann auch  $N$  endlich ist, und dass für ihre Anzahl  $n$  die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Die folgende Aussage verwendet, dass sich jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  eindeutig als Produkt  $n = 2^k u$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $u \in \mathbb{N}$  ungerade schreiben lässt.

**Aufgabe 10.26.** (5 (2+2+1) Punkte)

Wir definieren auf  $\mathbb{N}_+$  eine neue Relation  $R$  durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}_+$  mit  $n = 2^k t$  und  $m = 2^\ell u$  mit  $t, u$  ungerade sei

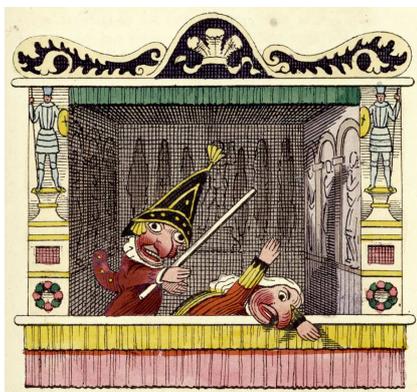
$$n R m \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in  $\mathbb{N}$  Bezug genommen).

- (1) Zeige, dass  $R$  eine totale Ordnung auf  $\mathbb{N}_+$  ergibt und beschreibe exemplarisch diese Ordnung.
- (2) Zeige, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}_+$  ein wohldefiniertes Element  $n^* \in \mathbb{N}_+$ ,  $n^* \neq n$ , derart gibt, dass  $n R n^*$  gilt und dass es zwischen  $n$  und  $n^*$  keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren).
- (3) Erfüllt die Menge  $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$  die Dedekind-Peano-Axiome?

**Aufgabe 10.27.** (2 Punkte)

Das Kasperletheater „Le Caspère“ verfügt über fünfzehn Stuhlreihen mit jeweils zwölf Sitzen. Für eine Vorstellung sind die Reihen 3, 4, 5 von der Klasse 1c schon besetzt. Ferner sind die erste und die letzte Reihe wegen Renovierung gesperrt. Die Sitze ganz links und ganz rechts will man wegen der eingeschränkten Sicht nicht anbieten. Wie viele Sitzplätze des Theaters kommen *nicht* in den freien Verkauf?



Bei dieser Szene ruft Mustafa: „Nicht die Oma schlagen!“

**Aufgabe 10.28.** (3 Punkte)

Es seien  $a, b$  natürliche Zahlen mit  $a \geq b$ . Zeige

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

## 11. VORLESUNG - KOMMUTATIVE HALBRINGE

Kultur ist Reichtum an  
Problemen.

---

Egon Friedell

11.1. **Axiomatik.**

Wir haben schon für die intuitiv bekannten natürlichen Zahlen ein Axiomensystem eingeführt, das speziell auf die natürlichen Zahlen zugeschnitten war und das sogar die Eigenschaft besitzt, dass es die natürlichen Zahlen in dem Sinne charakterisiert, dass je zwei Strukturen (je zwei Modelle), die dieses Axiomensystem erfüllen, zueinander in eine eindeutige Beziehung gebracht werden können, also im Wesentlichen gleich sind (siehe Satz 7.2).

In dieser Vorlesung werden wir eine andere Art von *Axiomensystem* kennenlernen, wie sie in der Mathematik typisch ist. Man fasst verschiedene strukturelle Eigenschaften, die in einem bestimmten Kontext immer wieder auftauchen, in einen neuen Begriff zusammen. Das Ziel ist dabei, weitere Eigenschaften aus einigen wenigen Grundeigenschaften logisch zu erschließen. Man argumentiert dann nicht auf der Ebene vertrauter Beispiele, wie der natürlichen Zahlen, sondern auf der Ebene der Eigenschaften. Der Gewinn ist dabei, dass man mathematische Schlüsse nur einmal auf der abstrakten Ebene der Eigenschaften durchführen muss und diese dann für alle Modelle gelten, die die jeweiligen Grundeigenschaften erfüllen, also unter den Begriff fallen. Zugleich erkennt man logische Abhängigkeiten und Hierarchien zwischen Eigenschaften, die häufig auch im Lernprozess versteckt vorliegen und auch eine gewisse Orientierung für die Didaktik geben, selbst wenn nicht axiomatisch argumentiert wird.

In diesem Sinne werden wir im Laufe der Vorlesung die Begriffe Halbringe, Ringe, Gruppen und Körper kennen lernen (auch der Ordnungsbegriff ist ein axiomatischer Begriff).

11.2. **Kommutative Halbringe.**

Wir fassen die bisher etablierten algebraischen Eigenschaften der natürlichen Zahlen in einem eigenen Begriff zusammen.

**Definition 11.1.** Ein *kommutativer Halbring*  $R$  ist eine Menge mit Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  (genannt *Addition* und *Multiplikation*) und mit zwei

ausgezeichneten Elementen 0 und 1 derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Die Addition ist eine kommutative, assoziative Verknüpfung, für die 0 das neutrale Element ist.
- (2) Die Multiplikation ist eine kommutative, assoziative Verknüpfung, für die 1 das neutrale Element ist.
- (3) Es gilt das *Distributivgesetz*, also

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

für alle  $a, b, c \in R$ .

**Korollar 11.2.** *Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  bilden einen kommutativen Halbring.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Lemma 8.10 und aus Lemma 9.2. □

Neben den natürlichen Zahlen gibt es viele weitere Halbringe, beispielsweise die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  oder die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Wenn man eine Eigenschaft aus den Gesetzen eines Halbringes erschließen kann, so gilt diese Eigenschaft in jedem Halbring. Sobald man also für eine Struktur gezeigt hat, dass ein Halbring vorliegt, so hat man damit auch automatisch gezeigt, dass diese neue Eigenschaft gilt. Dies ist letztlich ein sehr ökonomisches Vorgehen! Der Preis ist, dass man zusätzliche Begriffe einführen muss und dass man sehr abstrakt argumentieren muss.

Wir lassen das Produktzeichen  $\cdot$  häufig weg, wenn das nicht zu Missverständnissen führen kann und wir benutzen allgemein die *Klammerkonvention*, dass Punktrechnung stärker bindet als Strichrechnung, d.h. wir schreiben einfach  $ab + cd$  statt  $(ab) + (cd)$ . An weiteren Notationen verwenden wir für ein Halbringelement  $a \in R$  und eine positive natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_+$  die Schreibweisen  $na = a + \cdots + a$  ( $n$  Summanden) und  $a^n = a \cdots a$  ( $n$  Faktoren). Hier muss man also richtig die Anzahl der Summanden bzw. die Anzahl der Faktoren zählen. Statt  $n1 = n1_R$  schreiben wir einfach  $n$  (bzw. manchmal  $n_R$ ), d.h. jede natürliche Zahl findet sich in jedem Halbring wieder. Die Schreibweise  $na$  könnte man dann auch als das Produkt

$$(1 + 1 + \cdots + 1) \cdot a$$

(mit  $n$  Einsen) lesen, was aber aufgrund des Distributivgesetzes mit der  $n$ -fachen Summe von  $a$  mit sich selbst übereinstimmt. Für

$$n = 0$$

ist dies jedenfalls als  $0 \cdot a$  im Halbring zu lesen, was nicht ohne weiteres gleich 0 sein muss (aber in allen für uns wichtigen Beispielen gleich 0 ist). Weiter setzen wir

$$a^0 = 1.$$

Mit dieser Bezeichnung gilt beispielsweise

$$(m + n)a = ma + na$$

und

$$(m \cdot n)a = m \cdot (na)$$

für natürliche Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}_+$  (man mache sich klar, was hier jeweils die Multiplikation bezeichnet).

Wie bei den natürlichen Zahlen verwenden wir das Summenzeichen  $\sum$  und das Produktzeichen  $\prod$ . Für indizierte Elemente  $a_1, \dots, a_k$  aus  $R$  ist also

$$\sum_{i=1}^k a_i = a_1 + \dots + a_k$$

und

$$\prod_{i=1}^k a_i = a_1 \cdot \dots \cdot a_k.$$

Die beiden folgenden extremen Beispiele zeigen wie verschieden ein Halbring von dem Halbring der natürlichen Zahlen sein kann. Dennoch gelten alle aus den Halbringaxiomen ableitbaren Eigenschaften auch in diesen beiden Beispielen.

**Beispiel 11.3.** Die einelementige Menge  $R = \{0\}$  kann man zu einem kommutativen Halbring machen, indem man sowohl die Addition als auch die Multiplikation auf die einzig mögliche Weise erklärt, nämlich durch  $0 + 0 = 0$  und  $0 \cdot 0 = 0$ . In diesem Fall ist  $1 = 0$ , dies ist also ausdrücklich erlaubt. Die Rechengesetze in einem Halbring sind hier trivialerweise erfüllt, da bei jeder zu erfüllenden Gleichung links und rechts sowieso immer 0 herauskommt. Diesen Halbring nennt man den *Nullring*.

Nach dem Nullring ist der folgende Ring der zweitkleinste Halbring.

**Beispiel 11.4.** Wir suchen nach einer Halbringstruktur auf der Menge  $\{0, 1\}$ . Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon viel festgelegt. Nach Lemma 11.5 muss

$$0 \cdot 0 = 0$$

gelten. Ferner legen wir

$$1 + 1 = 0$$

fest. Die Verknüpfungstabellen (oder Operationstabeln) sehen somit wie folgt aus.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

und

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen kommutativen Halbring handelt.<sup>36</sup>

Eine „natürliche“ Interpretation dieses Halbringes gewinnt man, wenn man sich die geraden natürlichen Zahlen durch 0 und die ungeraden natürlichen Zahlen durch 1 repräsentiert denkt. Beispielsweise ist die Summe zweier ungerader Zahlen stets gerade, was der obigen Gleichung  $1 + 1 = 0$  entspricht. Wie oben erwähnt lassen sich in jedem kommutativen Halbring die natürlichen Zahlen eindeutig interpretieren, dabei können aber, wie in den beiden Beispielen, verschiedene Zahlen gleich werden. Im Beispiel wird jede gerade Zahl zu 0 und jede ungerade Zahl zu 1.

**Lemma 11.5.** *In einem kommutativen Halbring gilt*

$$0 \cdot 0 = 0.$$

*Beweis.* Dies ergibt sich aus

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0.$$

□

Das folgende Beispiel zeigt, dass in einem kommutativen Halbring im Allgemeinen nicht die Gleichung

$$0x = 0$$

für alle  $x$  gilt. Für die natürlichen Zahlen und in jedem kommutativen Ring gilt diese Eigenschaft. Es ist also keineswegs so, dass man jede Eigenschaft, die im derzeit hauptsächlich interessierenden Zahlenbereich (also derzeit die natürlichen Zahlen) aus dem Begriff eines kommutativen Halbringes ableiten kann.

**Beispiel 11.6.** Wir suchen nach einer Halbringstruktur auf der dreielementigen Menge  $\{0, 1, u\}$ . Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon viel festgelegt. Wir legen die Verknüpfungen durch die Verknüpfungstabellen

+	0	1	$u$
0	0	1	$u$
1	1	1	$u$
$u$	$u$	$u$	$u$

und

<sup>36</sup>Sogar um einen Körper, einen Begriff, den wir später einführen werden.

·	0	1	u
0	0	0	u
1	0	1	u
u	u	u	u

fest. Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen kommutativen Halbring handelt.

Die folgende Aussage heißt das *allgemeine Distributivgesetz*.

**Satz 11.7.** *Es sei  $R$  ein kommutativer Halbring und es seien  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  Elemente aus  $R$ . Dann gilt das allgemeine Distributivgesetz*

$$\left( \sum_{i=1}^r a_i \right) \left( \sum_{k=1}^s b_k \right) = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq s} a_i b_k.$$

*Beweis.* Wir machen eine Doppelinduktion nach  $r$  und nach  $s$ . D.h. wir beweisen die Aussage für jedes feste  $r$  durch Induktion nach  $s$  (innere Induktion) und erhöhen dann in einem eigenen Induktionsdurchgang  $r$  (äußere Induktion). Bei  $r = 0$  ist nichts zu zeigen, da dann die Summen links und rechts leer sind, also gleich 0. Sei also  $r = 1$ , so dass der linke Faktor einfach eine fixierte Zahl  $a = a_1$  ist. Wir wollen die Aussage in dieser Situation für beliebiges  $s$  zeigen. Bei  $s = 0, 1$  ist die Aussage klar. Sei die Aussage nun für ein

$$s \geq 2$$

schon bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} a \cdot (b_1 + \dots + b_s + b_{s+1}) &= a \cdot ((b_1 + \dots + b_s) + b_{s+1}) \\ &= a \cdot (b_1 + \dots + b_s) + ab_{s+1} \end{aligned}$$

nach dem Distributivgesetz und mit der Induktionsvoraussetzung folgt die Aussage. Sei die Aussage nun für ein festes  $r$  und jedes  $s$  bewiesen. Dann ist wieder mit dem Distributivgesetz und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{r+1} a_i \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^s b_k \right) &= \left( \left( \sum_{i=1}^r a_i \right) + a_{r+1} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^s b_k \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^r a_i \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^s b_k \right) + a_{r+1} \cdot \left( \sum_{k=1}^s b_k \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq s} a_i b_k + \sum_{k=1}^s a_{r+1} b_k \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r+1, 1 \leq k \leq s} a_i b_k. \end{aligned}$$

□

### 11.3. Die binomische Formel.

Die Gültigkeit der ersten binomischen Formel ist keine Besonderheit der natürlichen Zahlen, sondern folgt allein aus den im Begriff einer Halbgruppe zusammengefassten Eigenschaften.

**Korollar 11.8.** *In einem kommutativen Halbring  $R$  gilt die erste binomische Formel, also die Beziehung*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

*Beweis.* Unter mehrfacher Verwendung des Distributivgesetzes und der Kommutativgesetze ist

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2a \cdot b + b^2. \end{aligned}$$

□

Die zweite und die dritte binomische Formel lässt sich nicht in einem beliebigen Halbring formulieren, da in ihnen das Minuszeichen bzw. die Subtraktion vorkommt, die es in einem beliebigen kommutativen Halbring nicht gibt und die innerhalb der natürlichen Zahlen auch nur eingeschränkt ausführbar ist. Stattdessen werden wir uns den höheren Potenzen von Summen zuwenden. Die *erste binomische Formel* besagt wie eben formuliert

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Für die dritte Potenz einer Summe gilt

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

und für die vierte Potenz

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Worauf beruht dieser Zusammenhang und wo kommen diese Vorfaktoren her? Betrachten wir die dritte Potenz. Es ist (wieder in einem beliebigen kommutativen Halbring)

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Für die vierte Potenz siehe Aufgabe 11.20. In dieser Weise kann man jede Potenz einer Summe als Summe von Produkten ausdrücken, wobei die auftretenden Koeffizienten *Binomialkoeffizienten* heißen. Um diese einzuführen,

müssen wir uns mit elementarer Kombinatorik beschäftigen, was wir in der übernächsten Vorlesung tun werden.

#### 11.4. Die Potenzmenge.

Wir schließen mit einem Objekt ab, das ein eher ungewöhnliches Beispiel für einen kommutativen Halbring und auch ein Beispiel für eine geordnete, aber nicht total geordnete Menge ist, die Potenzmenge. Sie ist auch wichtig im Rahmen der elementaren Kombinatorik.

**Definition 11.9.** Zu einer Menge  $M$  nennt man die Menge aller Teilmengen von  $M$  die *Potenzmenge* von  $M$ . Sie wird mit

$$\mathfrak{P}(M)$$

bezeichnet.

Wenn  $M$  die Menge der Leute im Kurs sind, so kann man  $\mathfrak{P}(M)$  als die Menge aller Parties auffassen, die diese Leute feiern können, wenn man eine Party mit der Menge der anwesenden Leute identifiziert.

**Beispiel 11.10.** Sei  $M$  eine beliebige Menge und

$$R = \mathfrak{P}(M)$$

die Potenzmenge davon. Dann sind die Elemente aus  $R = \mathfrak{P}(M)$  - also die Teilmengen von  $M$  - durch die Inklusionsbeziehung  $\subseteq$  geordnet. Die Reflexivität bedeutet einfach, dass eine jede Menge in sich selbst enthalten ist und die Transitivität bedeutet, dass aus  $T_1 \subseteq T_2$  und  $T_2 \subseteq T_3$  die Inklusion  $T_1 \subseteq T_3$  folgt. Die Antisymmetrie ist dabei ein wichtiges Beweisprinzip für die Gleichheit von Mengen: Zwei Mengen  $T_1, T_2$  sind genau dann gleich, wenn  $T_1 \subseteq T_2$  und umgekehrt  $T_2 \subseteq T_1$  gilt.

**Lemma 11.11.** *Zu einer Menge  $M$  sei*

$$R = \mathfrak{P}(M)$$

*die Potenzmenge zu  $M$ . Dann ist  $R$  mit der Vereinigung  $\cup$  als Addition und der leeren Menge als 0 und mit dem Durchschnitt  $\cap$  als Multiplikation und der Gesamtmenge  $M$  als 1 ein kommutativer Halbring.*

*Beweis.* Die Eigenschaften sind allenfalls bis auf das Distributivgesetz klar. Letzteres besagt die Identität

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Wenn ein Element  $x$  links dazugehört, so gehört es zu  $A$  und es gehört zu  $B \cup C$ . Somit gehört es zu  $B$  oder zu  $C$  und damit auch zu  $A \cap B$  oder zu  $A \cap C$ , also jedenfalls zur rechten Seite. Wenn es rechts dazu gehört, sagen wir zu  $A \cap B$ , was wir wegen der Symmetrie der Situation annehmen können, so gehört es erst recht zu  $A \cap (B \cup C)$ .  $\square$

Im vorstehenden Beispiel kann man die Rollen der Addition und der Multiplikation vertauschen, da das Distributivgesetz auch in der Form

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

gilt.

## 11. ARBEITSBLATT

### 11.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 11.1.** Zeige, dass in Beispiel 11.4 das Distributivgesetz nicht gilt, wenn man die Rollen von Addition und Multiplikation vertauscht.

### 11.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 11.2.** Es seien  $a, b \in R$  Elemente in einem kommutativen Halbring  $R$ . Berechne

$$(a + b) \cdot (a + 2b) \cdot (a + 3b).$$

**Aufgabe 11.3.** Es seien  $a, b, c, d \in R$  Elemente in einem kommutativen Halbring  $R$ . Berechne

$$(ab + 2d) \cdot (a^2 + 4bc) \cdot (3bd + ac).$$

**Aufgabe 11.4.** Es seien  $a, b, c \in R$  Elemente in einem kommutativen Halbring  $R$ . Berechne

$$(a + b + c)^2.$$

**Aufgabe 11.5.** Berechne

$$(2 + 4 + 3) \cdot (4 + 5 + 1 + 2)$$

mit und ohne Distributivgesetz.

**Aufgabe 11.6.** Sei  $R$  ein kommutativer Halbring und  $f, a_i, b_j \in R$ . Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^n a_i f^i + \sum_{j=0}^m b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i f^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m b_j f^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}.$$

**Aufgabe 11.7.\***

Beweise die folgende Form des allgemeinen Distributivgesetzes für einen kommutativen Halbring  $R$  durch Induktion über  $k$ , wobei der Fall  $k = 2$  verwendet werden darf. (dabei sind  $n_1, \dots, n_k$  natürliche Zahlen und  $a_{j,i} \in R$ ).

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i_1=1}^{n_1} a_{1,i_1} \right) \cdot \left( \sum_{i_2=1}^{n_2} a_{2,i_2} \right) \cdots \left( \sum_{i_k=1}^{n_k} a_{k,i_k} \right) \\ = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \cdots \times \{1, \dots, n_k\}} a_{1,i_1} \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{k,i_k} \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.8.** Es sei  $R$  ein kommutativer Halbring. Zeige, dass

$$0 \cdot (1 + 1 + \cdots + 1) = 0$$

ist (mit einer beliebig langen Summe von Einsen).

**Aufgabe 11.9.** Da man die natürlichen Zahlen zum Zählen von endlichen Mengen nimmt, es aber auch unendliche Mengen gibt, denkt sich Gabi Hochster, dass man die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  um ein weiteres Symbol  $\infty$  (sprich unendlich) erweitern sollte. Diese neue Menge bezeichnet sie mit  $\mathbb{N}^\infty$ . Sie möchte die Ordnungsstruktur, die Addition und die Multiplikation der natürlichen Zahlen auf ihre neue Menge ausdehnen, und zwar so, dass möglichst viele vertraute Rechengesetze erhalten bleiben.

- (1) Wie legt Gabi die Ordnung fest?
- (2) Wie legt sie die Nachfolgerabbildung fest? Gelten die Peano-Axiome?
- (3) Wie legt sie die Addition fest? Sie möchte ja nur mit dem einzigen neuen Symbol  $\infty$  arbeiten.
- (4) Gilt mit dieser Addition die Abziehregel?
- (5) Zuerst denkt sie an die Festlegung

$$0 \cdot \infty = 1,$$

doch dann stellt sie fest, dass sich das mit dem Distributivgesetz beißt. Warum?

- (6) Gabi möchte nun, dass für die neue Menge die Eigenschaften aus Satz 8.12 und aus Satz 9.4 nach wie vor gelten. Wie legt sie die Verknüpfungen fest?
- (7) Handelt es sich bei  $\mathbb{N}^\infty$  mit den Festlegungen aus Teil (6) um einen kommutativen Halbring?
- (8) Gilt die Kürzungsregel?

**Aufgabe 11.10.\***

Es sei  $M$  eine  $k$ -elementige Menge. Wie viele Verknüpfungen gibt es auf  $M$ ?

Bei den folgenden Aufgaben zur Potenzmenge denke man an die Interpretation, wo  $G$  eine Grundschulklasse und  $M = \mathfrak{P}(G)$  die möglichen (in Hinblick auf die Gastauswahl) Geburtstagsfeiern sind.

**Aufgabe 11.11.** Mustafa Müller hat Geburtstag. Auf jeden Fall lädt er Heinz, Gabi und Lucy ein. Er überlegt sich, ob und wen er aus dem erweiterten Freundeskreis  $\{\text{Maria, Bayar, Peter, Fritz, Silvia}\}$  noch einladen soll.

- (1) Wie viele Möglichkeiten besitzt Mustafa?
- (2) Nach langem Überlegen erstellt Mustafa eine Wertetabelle

Name	Maria	Bayar	Peter	Fritz	Silvia
?	+	+	-	-	+

Wen lädt er ein?

- (3) Wie würde seine Wertetabelle aussehen, wenn er Bayar, Peter und Fritz einladen wollte?

**Aufgabe 11.12.** Es sei  $G$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen. Zeige, dass die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(G)$  genau  $2^n$  Elemente besitzt.

Zu Mengen  $L, M$  wird mit  $\text{Abb}(L, M)$  die Menge aller Abbildungen von  $L$  nach  $M$  bezeichnet.

**Aufgabe 11.13.** Sei  $G$  eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(G) \text{ und } \text{Abb}(G, \{0, 1\}).$$

**Aufgabe 11.14.** Sei  $G$  eine Menge und  $\mathfrak{P}(G)$  ihre Potenzmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(G) \longrightarrow \mathfrak{P}(G), T \longmapsto \mathfrak{C}T,$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Bei der folgenden Aufgabe denke man an  $A = \text{Mädchen der Klasse}$ ,  $B = \text{Jungs der Klasse}$ .

**Aufgabe 11.15.\***

Sei  $G$  eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$G = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(G)$  und der Produktmenge  $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ .

**Aufgabe 11.16.** Es sei  $G$  eine Menge und  $M = \mathfrak{P}(G)$  die zugehörige Potenzmenge. Betrachte die Vereinigung von Teilmengen von  $G$  als eine Verknüpfung auf  $M$ . Ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ, besitzt sie ein neutrales Element?

**Aufgabe 11.17.** Es sei  $G$  eine Menge und  $M = \mathfrak{P}(G)$  die zugehörige Potenzmenge. Betrachte den Durchschnitt von Teilmengen von  $G$  als eine Verknüpfung auf  $M$ . Ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ, besitzt sie ein neutrales Element?

**Aufgabe 11.18.** Es sei  $G$  eine Menge und  $M = \mathfrak{P}(G)$  die zugehörige Potenzmenge. Zeige, dass auf  $M$  durch die Beziehung

$$S \subseteq T$$

eine Ordnung gegeben ist. Zeige, dass es sich nicht um eine totale Ordnung handelt.

**Aufgabe 11.19.\***

Es sei  $M$  eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von  $M$  in die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  geben kann.

### 11.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 11.20.** (3 Punkte)

Ein Adventskranz hat vier Kerzen, wobei am ersten Advent genau eine Kerze, am zweiten Advent genau zwei Kerzen usw. brennen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Adventskranz „abzubrennen“? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Kerzen, die zuvor schon angezündet waren, wieder angezündet werden sollen, und wie viele, wenn stets so viele neue Kerzen wie möglich angezündet werden?



**Aufgabe 11.21.** (2 Punkte)

Es seien  $a, b, c \in R$  Elemente in einem kommutativen Halbring  $R$ . Berechne

$$(2ac + b^2) \cdot (a + 5bc) \cdot (2a + 3bc).$$

**Aufgabe 11.22.** (4 (2+2) Punkte)

Es seien  $a, b \in R$  Elemente in einem kommutativen Halbring  $R$ . Zeige die Formel für die vierte Potenz,

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

auf die beiden folgenden Arten.

(1) Berechne

$$(a + b) \cdot (a + b)^3.$$

(2) Berechne

$$(a + b)^2 \cdot (a + b)^2.$$

**Aufgabe 11.23.** (2 Punkte)

Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

**Aufgabe 11.24.** (2 Punkte)

Gilt für die Vereinigung von Mengen die „Abziehregel“, d.h. kann man aus  $A \cup C = B \cup C$  auf  $A = B$  schließen?

## 12. VORLESUNG - TEILBARKEIT UND PRIMZAHLEN

Man muss auch teilen können.

---

## 12.1. Teilbarkeitseigenschaften.

Wir besprechen nun die Eigenschaft, dass eine natürliche Zahl eine weitere natürliche Zahl teilt.

**Definition 12.1.** Man sagt, dass die natürliche Zahl  $a$  die natürliche Zahl  $b$  *teilt* (oder dass  $b$  von  $a$  *geteilt* wird, oder dass  $b$  ein *Vielfaches* von  $a$  ist), wenn es eine natürliche Zahl  $c$  derart gibt, dass  $b = c \cdot a$  ist. Man schreibt dafür auch  $a|b$ .

Beispielsweise sind 1, 2, 5, 10 Teiler von 10 und 1, 3, 9, 27, 81 die Teiler von 81. Eine Zerlegung

$$n = st$$

nennt man auch eine *Faktorzerlegung* von  $n$ . Wenn  $a$  ein Teiler von  $b$  ist und

$$a \neq 0,$$

so ist die Zahl  $c$  mit  $b = ac$  nach der Kürzungsregel eindeutig bestimmt. Man nennt diese Zahl den *Gegenteiler* oder *komplementären Teiler* und schreibt dafür  $\frac{b}{a}$ . Da wir im Moment die rationalen Zahlen noch nicht zur Verfügung haben, ist dies nur dann eine erlaubte Schreibweise, wenn die Teilerbeziehung vorliegt und  $a \neq 0$  ist (so wie die Schreibweise  $a - b$  bisher nur erlaubt ist, wenn  $b \leq a$  ist). Es ist also 0 ein Teiler der 0, der Ausdruck  $0/0$  ist aber nicht definiert.

**Lemma 12.2.** *Es sei  $n \neq 0$  eine natürliche Zahl und  $t$  ein Teiler von  $n$ . Dann ist  $t \leq n$ . Insbesondere besitzt  $n$  nur endlich viele Teiler.*

*Beweis.* Da der Teiler 0 ausgeschlossen ist, sind bei einer Faktorzerlegung  $n = tc$  beide Faktoren  $\geq 1$ . Wegen Satz 10.5 (3) ist daher

$$n = tc \geq t \cdot 1 = t.$$

Der Zusatz ist klar, da es unterhalb von  $n$  überhaupt nur endlich viele natürliche Zahlen gibt. □

Wenn man also alle Teiler einer natürlichen Zahl  $n$  finden möchte, so muss man einfach die Zahlen

$$a \leq n$$

der Reihe nach durchgehen und ihre Vielfachen

$$1a = a, 2a, 3a, \dots$$

durchgehen, bis die Zahl  $n$  auftaucht (in welchem Fall  $a$  ein Teiler ist) oder eine Zahl  $> n$  auftaucht (dann liegt kein Teiler vor). Übrigens muss man

nicht die Zahlen bis  $n$  durchprobieren, sondern lediglich bis zur ersten Zahl  $r$  mit  $r^2 \geq n$  (man muss also nur bis zur Größenordnung der Quadratwurzel aus  $n$  gehen). Dann muss man aber für jeden Teiler

$$t \leq r$$

auch den Gegenteiler mitanführen, siehe Aufgabe 12.7. Für 105 muss man maximal bis 11 gehen. Es ergeben sich die Zerlegungen

$$105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$$

und die Teiler sind somit 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.

Eine durch 2 teilbare Zahl, also ein Vielfaches von 2, heißt *gerade*, eine nicht durch 2 teilbare Zahl heißt *ungerade*. Für einige Zahlen gibt es einfache Tests, ob sie ein Teiler einer gewissen Zahl sind, die allerdings auf dem Dezimalsystem beruhen. Eine weitere wichtige Möglichkeit ist die Division mit Rest. Auch der dritte Teil des folgenden Lemmas hilft: Wenn  $a$  kein Teiler von  $n$  ist, so sind sämtliche Vielfache von  $a$  ebenfalls kein Teiler von  $n$ .

**Lemma 12.3.** *In  $\mathbb{N}$  gelten folgende Teilbarkeitsbeziehungen.*

- (1) *Für jede natürliche Zahl  $a$  gilt  $1 \mid a$  und  $a \mid a$ .*
- (2) *Für jede natürliche Zahl  $a$  gilt  $a \mid 0$ .*
- (3) *Gilt  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so gilt auch  $a \mid c$ .*
- (4) *Gilt  $a \mid b$  und  $c \mid d$ , so gilt auch  $ac \mid bd$ .*
- (5) *Gilt  $a \mid b$ , so gilt auch  $ac \mid bc$  für jede natürliche Zahl  $c$ .*
- (6) *Gilt  $a \mid b$  und  $a \mid c$ , so gilt auch  $a \mid (rb + sc)$  für beliebige natürliche Zahlen  $r, s$ .*

*Beweis.* (1) Ist klar wegen

$$a = a \cdot 1.$$

(2) Ist klar wegen

$$0 = a \cdot 0.$$

(3) Die beiden Voraussetzungen bedeuten die Existenz von  $s, t \in \mathbb{N}$  mit  $b = as$  und  $c = bt$ . Somit ist

$$c = bt = (as)t = a(st)$$

und  $a$  ist auch ein Teiler von  $c$ .

(4) Aus den Voraussetzungen  $b = as$  und  $d = tc$  ergibt sich direkt

$$bd = astc = acts,$$

also ist  $ac$  ein Teiler von  $bd$ .

(5) Aus der Voraussetzung  $b = as$  ergibt sich direkt

$$bc = acs,$$

also ist  $ac$  ein Teiler von  $bc$ .

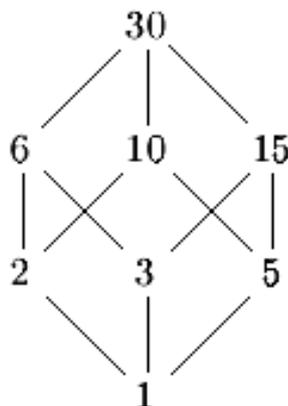
- (6) Aus den Voraussetzungen  $b = at$  und  $c = au$  ergibt sich direkt mit dem Distributivgesetz

$$rb + sc = rat + sau = a(rt + su),$$

also ist  $a$  ein Teiler von  $rb + sc$ .

□

**Beispiel 12.4.** Wir betrachten die positiven natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_+$  zusammen mit der Teilbarkeitsbeziehung. Dies ergibt eine Ordnung auf  $\mathbb{N}_+$ . Die Teilbarkeitsrelation ist in der Tat reflexiv, da stets  $n|n$  ist, wie  $m = 1$  zeigt. Die Transitivität wurde in Lemma 12.3 (3) gezeigt. Die Antisymmetrie folgt so: Aus  $n = ak$  und  $k = bn$  folgt  $n = (ab)n$ . Da wir uns auf positive natürliche Zahlen beschränken, folgt mit der Kürzungsregel  $ab = 1$  und daraus wegen  $a, b \leq ab$  auch  $a = b = 1$ . Also ist  $k = n$ . Einfache Beispiele wie 2 und 3 zeigen, dass hier keine totale Ordnung vorliegt, da weder 2 von 3 noch umgekehrt geteilt wird.



## 12.2. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches.

**Definition 12.5.** Seien  $a_1, \dots, a_k$  natürliche Zahlen. Dann heißt eine natürliche Zahl  $t$  *gemeinsamer Teiler* der  $a_1, \dots, a_k$ , wenn  $t$  jedes  $a_i$  teilt für  $i = 1, \dots, k$ .

Eine natürliche Zahl  $g$  heißt *größter gemeinsamer Teiler* der  $a_1, \dots, a_k$ , wenn  $g$  ein gemeinsamer Teiler ist und wenn  $g$  unter allen gemeinsamen Teilern der  $a_1, \dots, a_k$  der (bezüglich der Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen) Größte ist.

Beispielsweise haben die Zahlen 100, 75, 125 die gemeinsamen Teiler 1, 5, 25, und 25 ist der größte gemeinsame Teiler.

**Definition 12.6.** Zwei natürliche Zahlen heißen *teilerfremd*, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler  $\geq 2$  besitzen.

Beispielsweise sind 12 und 25 teilerfremd, 15 und 25 sind nicht teilerfremd, da 5 ein gemeinsamer Teiler ist. Die 1 ist zu jeder natürlichen Zahl (auch zu 0 und 1) teilerfremd.

**Definition 12.7.** Zu einer Menge von natürlichen Zahlen

$$a_1, \dots, a_n$$

heißt eine natürliche Zahl  $b$  ein *gemeinsames Vielfaches*, wenn  $b$  ein Vielfaches von jedem  $a_i$  ist, also von jedem  $a_i$  geteilt wird.

Die Zahl  $b$  heißt das *kleinste gemeinsame Vielfaches* der  $a_1, \dots, a_n$ , wenn  $b$  ein gemeinsames Vielfaches ist und unter allen gemeinsamen Vielfachen  $\neq 0$  der  $a_1, \dots, a_n$ , das Kleinste ist.

Die Existenz eines größten gemeinsamen Teilers ist wegen Lemma 12.2 klar. Die Existenz des kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist ebenfalls klar, da das Produkt der Zahlen ein gemeinsames Vielfaches ist. Wir werden später als eine Anwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung (Satz 20.8) sehen, dass jeder gemeinsame Teiler den größten gemeinsamen Teiler teilt und dass jedes gemeinsame Vielfache ein Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen ist.

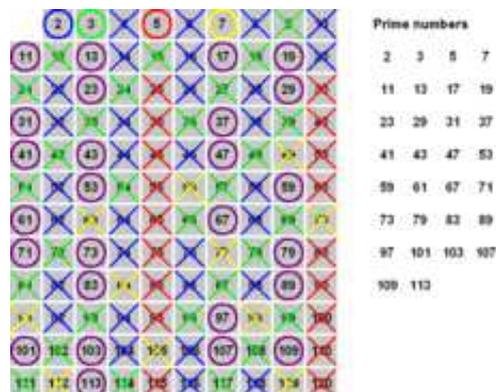
### 12.3. Primzahlen.

**Definition 12.8.** Eine natürliche Zahl  $n \geq 2$  heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und  $n$  sind.

Eine Primzahl ist also eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und  $n$ , und die müssen verschieden sein. 1 ist also keine Primzahl.

Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... Für eine Primzahl  $p$  und eine natürliche Zahl  $n$  gilt folgende Alternative: Entweder teilt  $p$  die Zahl  $n$ , oder aber  $p$  und  $n$  sind teilerfremd. Ein gemeinsamer Teiler muss ja ein Teiler von  $p$  sein, und da kommen nur 1 und  $p$  in Frage.

Ein wichtiger Satz ist der Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung. Eine einfache Version davon ist der folgende Satz.



Das *Sieb des Eratosthenes* liefert eine einfache Methode, eine Liste von Primzahlen unterhalb einer bestimmten Größe  $k$  zu erstellen. Man streicht einfach die echten Vielfachen der kleinen (kleiner als oder gleich  $\sqrt{k}$ ) schon etablierten Primzahlen durch, die verbleibenden Zahlen sind prim.

**Satz 12.9.** *Jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren.*

*D.h. es gibt eine Darstellung*

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$$

*mit Primzahlen  $p_i$ .*

*Beweis.* Wir beweisen die Existenz durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 2$  liegt eine Primzahl vor. Bei  $n \geq 3$  ist entweder  $n$  eine Primzahl, und diese bildet die Primfaktorzerlegung, oder aber  $n$  ist keine Primzahl. In diesem Fall gibt es eine nichttriviale Zerlegung  $n = ab$  mit kleineren Zahlen  $a, b < n$ . Für diese Zahlen gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Zerlegung in Primfaktoren, und diese setzen sich zu einer Primfaktorzerlegung für  $n$  zusammen.  $\square$

Für 105 beispielsweise findet man den Primfaktor 3 und kann daher  $105 = 3 \cdot 35$  schreiben. Für 35 hat man die Zerlegung  $35 = 5 \cdot 7$  und man erhält

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Wenn man mit dem Primfaktor 5 startet, so ergibt sich  $105 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$ , insgesamt kommen also die gleichen Primfaktoren vor. Gelegentlich betrachten wir die Gleichung  $1 = 1$  als die Primfaktorzerlegung der 1, hier tritt jeder Primfaktor mit dem Exponenten 0 auf, das leere Produkt ist 1. Später werden wir zeigen, dass die Primfaktorzerlegung bis auf die Reihenfolge eindeutig ist, was keineswegs selbstverständlich ist, einiger Vorbereitungen bedarf und am besten innerhalb der ganzen Zahlen bewiesen wird.

Der folgende Satz wird Euklid zugeschrieben.



Euklid (4. Jahrhundert v. C.)

**Satz 12.10.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

*Beweis.* Angenommen, die Menge aller Primzahlen sei endlich, sagen wir  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  sei eine vollständige Auflistung aller Primzahlen. Man betrachtet die natürliche Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_r + 1.$$

Da bei Division von  $N$  durch  $p_i$  immer der Rest 1 übrigbleibt (bzw. nach Aufgabe 12.6), ist diese Zahl durch keine der Primzahlen  $p_i$  teilbar. Andererseits besitzt  $N$  nach Satz 12.9 eine Primfaktorzerlegung. Insbesondere gibt es eine Primzahl  $p$ , die  $N$  teilt (dabei könnte  $N = p$  sein). Doch damit muss  $p$  gleich einem der  $p_i$  aus der Liste sein, und diese sind keine Teiler von  $N$ . Dies ist ein Widerspruch, da ein  $p_i$  nicht gleichzeitig ein Teiler und kein Teiler von  $N$  sein kann. Also muss die Annahme (nämlich die Endlichkeit der Primzahlmenge) falsch gewesen sein.  $\square$

#### 12.4. Primzahlprobleme.

In der Vorlesung Grundkurs Mathematik geht es um Sachverhalte, die allesamt seit mindestens 120 Jahren gut verstanden sind und zu einem großen Teil sogar bis in die griechische Antike zurückreichen. Wir unterbrechen die allgemeine Darstellung und gehen kurz auf die Frage ein, was Mathematiker in der Forschung machen. Das ist im Allgemeinen schwierig zu vermitteln, im zahlentheoretischen Kontext gibt es aber einige Beispiele, die sich leicht erläutern lassen.

Die treibende Kraft der Mathematik ist es, Probleme zu lösen. Schwierige Probleme gibt es in allen Bereichen der Mathematik, besonders prägnant sind sie in der Zahlentheorie, da es dort eine Vielzahl von elementar formulierten ungelösten Problemen gibt. Als Beispiel besprechen wir das Problem der Primzahlzwillinge, zu dem es kürzlich (2013) einen wichtigen Fortschritt gab.

**Definition 12.11.** Ein *Primzahlzwillings* ist ein Paar bestehend aus  $p$  und  $p + 2$ , wobei diese beiden Zahlen Primzahlen sind.

Die ersten Beispiele für Primzahlzwillinge sind

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), \dots$$

Übrigens ist  $3, 5, 7$  der einzige Primzahldrilling, siehe Aufgabe 12.28.

**Problem 12.12.** Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge?

Eine Lösung dieses Problems wäre ein mathematischer Satz, der entweder besagt, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, oder dass es nur endlich viele Primzahlzwillinge gibt. D.h. das eine oder das andere müsste bewiesen werden. Bei schwierigen Problemen erwartet man nicht, dass jemand plötzlich einen Beweis hinschreibt, sondern dass eine neue und weit verzweigte Theorie entwickelt wird, mit der man letztlich einen Beweis geben kann.

**Bemerkung 12.13.** Die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, besitzt verschiedene schwächere Varianten. Man kann sich zum Beispiel fragen, ob es unendlich oft vorkommt, dass es in einem Zehnerintervall zwei Primzahlen gibt, oder dass es in einem Hunderterintervall zwei Primzahlen gibt, und so weiter. Die ersten Primzahlen vermitteln dabei ein Bild, dass Primzahlen ziemlich häufig sind. Sie werden aber zunehmend seltener, so dass es für hohe Hunderterintervalle, sagen wir für die Zahlen von

$$1000000000000000 \text{ bis } 1000000000000100$$

ziemlich unwahrscheinlich ist, eine Primzahl zu enthalten, geschweige denn zwei Primzahlen. Bis vor kurzem war es nicht bekannt, ob es überhaupt eine Zahl  $m$  mit der Eigenschaft gibt, dass es unendlich viele Intervalle der Länge  $m$  gibt, die zwei Primzahlen enthalten ( $m = 2$  wäre die positive Lösung des Primzahlzwillingsproblems). Im Jahr 2013 bewies Zhang Yitang, dass man

$$m = 70000000$$

nehmen kann, dass es also unendlich viele Intervalle der Form

$$[k, k + 70000000]$$

gibt, in denen zwei Primzahlen liegen. Dieses Resultat ist ein Durchbruch in der Primzahlzwillingsforschung, da es erstmals zeigt, dass sich Primzahlen unendlich oft „ziemlich nahe“ kommen. Zwischenzeitlich wurde die Schranke von 70000000 auf 252 gesenkt, siehe <http://arxiv.org/pdf/1402.4849v2.pdf>.

## 12. ARBEITSBLATT

### 12.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 12.1.** Bestimme die Anzahl der Teiler der Zahlen

$$1, 2, 3, \dots, 20.$$

## 12.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 12.2.** Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen 25, 30, 36 sowie all ihrer positiven Teiler.

**Aufgabe 12.3.** Es sei  $M$  eine Menge von  $n$  Äpfeln und  $P$  eine Menge von  $t$  Personen. Begründe, dass man die Apfelmenge genau dann gerecht auf die Personen aufteilen kann, wenn  $t$  ein Teiler von  $n$  ist.

**Aufgabe 12.4.** Bringe die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl  $n$  durch eine natürliche Zahl  $t$  mit dem Begriff der Produktmenge in Zusammenhang.

**Aufgabe 12.5.** Es seien  $a, b, c$  natürliche Zahlen und es gelte, dass  $bc$  ein Vielfaches von  $ac$  sei. Ferner sei  $c \neq 0$ . Zeige, dass dann  $b$  ein Vielfaches von  $a$  ist.

**Aufgabe 12.6.** Es seien  $a \leq b$  natürliche Zahlen, die beide von  $c$  geteilt werden. Zeige, dass auch die Differenz  $b - a$  von  $c$  geteilt wird.

**Aufgabe 12.7.** Es sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $r$  sei die kleinste natürliche Zahl mit  $r^2 \geq n$ . Zeige, dass bei einer Faktorzerlegung  $n = ab$  stets  $a \leq r$  oder  $b \leq r$  gilt.

**Aufgabe 12.8.** Es seien  $a, b$  positive natürliche Zahlen. Stifte eine Bijektion zwischen der Menge aller Vielfachen von  $a$  und der Menge aller Vielfachen von  $b$ .

**Aufgabe 12.9.\***

Es seien drei verschiedene Zahlen  $a, b, c > 1$  gegeben. Wie viele Teiler besitzt das Produkt  $a \cdot b \cdot c$  minimal?

**Aufgabe 12.10.** Es sei

$$Z = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$$

die Menge aller Zweierpotenzen. Definiere eine Bijektion

$$\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow Z$$

derart, dass  $k \leq n$  genau dann gilt, wenn  $\varphi(k)$  die Zahl  $\varphi(n)$  teilt.

**Aufgabe 12.11.** Beschreibe Analogien zwischen der Größergleichbeziehung und der Teilerbeziehung auf den natürlichen Zahlen.

Die folgende Aufgabe beschreibt, wie sich in Lemma 12.3 unter den gegebenen Teilbarkeitsvoraussetzungen die Brüche verhalten.

**Aufgabe 12.12.** (1) Für jede natürliche Zahl  $a$  gilt  $\frac{a}{1} = a$  und bei  $a \neq 0$  gilt auch  $\frac{a}{a} = 1$ .

(2) Für jede natürliche Zahl  $a \neq 0$  gilt  $\frac{0}{a} = 0$ .

(3) Gilt  $a \mid b$  und  $b \mid c$ , so gilt auch  $a \mid c$  und es ist (bei  $a, b \neq 0$ )

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}.$$

(4) Gilt  $a \mid b$  und  $c \mid d$ , so gilt auch  $ac \mid bd$  und es ist (bei  $a, c \neq 0$ )

$$\frac{bd}{ac} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}.$$

(5) Gilt  $a \mid b$ , so gilt auch  $ac \mid bc$  für jede natürliche Zahl  $c$ , und es ist (bei  $a, c \neq 0$ )

$$\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$$

(6) Gilt  $a \mid b$  und  $a \mid c$ , so gilt auch  $a \mid (rb + sc)$  für beliebige natürliche Zahlen  $r, s$ , und es ist (bei  $a \neq 0$ )

$$\frac{rb + sc}{a} = r \frac{b}{a} + s \frac{c}{a}.$$

Die folgende Aufgabe sollte man in Analogie zu Lemma 10.12 sehen.

**Aufgabe 12.13.** Es seien  $a, b, c, d$  natürliche Zahlen. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es sei  $b$  ein Teiler von  $a$ . Dann ist

$$b \cdot c \cdot \frac{a}{b} = c \cdot a$$

für  $b \neq 0$ .

(2) Es sei  $b$  ein Teiler von  $a$  und  $d$  ein Teiler von  $c$  mit  $b, d \neq 0$ . Dann ist

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Insbesondere gelten, wenn  $b$  ein Teiler von  $a$  ist, die Beziehungen ( $b, c \neq 0$ )

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

und

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

- (3) Es sei  $b \neq 0$  ein Teiler von  $a \neq 0$  und  $a$  ein Teiler von  $bc$ . Dann ist  $\frac{a}{b}$  ein Teiler von  $c$  und es ist

$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{cb}{a}.$$

**Aufgabe 12.14.\***

Es gibt 24 Schokoriegel und 16 Äpfel. Auf wie viele Kinder kann man diese Sachen gerecht verteilen?

**Aufgabe 12.15.** Bestimme den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von 105 und 150.

**Aufgabe 12.16.** Es sei  $t$  ein Teiler von  $n$ . Was ist der größte gemeinsame Teiler von  $t$  und  $n$  und was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von  $t$  und  $n$ ?

**Aufgabe 12.17.** Berechne den Ausdruck

$$n^2 + n + 41$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Handelt es sich dabei um Primzahlen?

**Aufgabe 12.18.** Zeige, dass man jede natürliche Zahl  $n \geq 12$  als Summe

$$n = a + b$$

schreiben kann, wobei sowohl  $a$  als auch  $b$  zusammengesetzte Zahlen sind.

**Aufgabe 12.19.\***

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1728.

**Aufgabe 12.20.** Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1025.

**Aufgabe 12.21.\***

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl. Wann ist die Zahl  $n^2 - 1$  eine Primzahl?

**Aufgabe 12.22.** Finde die kleinste Zahl  $N$  der Form  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$ , die keine Primzahl ist, wobei  $p_1, p_2, \dots, p_r$  die ersten  $r$  Primzahlen sind.

**Aufgabe 12.23.** Finde einen Primfaktor der Zahl  $2^{25} + 1$ .

**Aufgabe 12.24.** Finde einen Primfaktor der folgenden drei Zahlen

$$2^{33} - 1, 2^{91} - 1, 2^{13} + 1.$$

**Aufgabe 12.25.\***

Man gebe zwei Primfaktoren von  $2^{35} - 1$  an.

### 12.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 12.26.** (3 Punkte)

Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen 12, 15, 16, 20 sowie all ihrer positiven Teiler.

**Aufgabe 12.27.** (2 Punkte)

Es sei  $n \neq 0$  eine natürliche Zahl mit zwei Faktorzerlegungen

$$n = ab = cd.$$

Es sei  $a \geq c$ . Zeige, dass dann  $b \leq d$  sein muss.

**Aufgabe 12.28.** (2 Punkte)

Es sei  $b \neq 0$  ein Teiler von  $a$  und  $d \neq 0$  ein Teiler von  $c$ . Zeige, dass  $bd$  ein Teiler von  $ad + cb$  ist und dass

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

gilt.

**Aufgabe 12.29.** (3 Punkte)

Man bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

**Aufgabe 12.30.** (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl  $2^{25} - 1$ .

**Aufgabe 12.31.** (4 Punkte)

Zeige, dass es außer 3, 5, 7 kein weiteres Zahlentripel der Form  $p, p + 2, p + 4$  gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.

## 13. VORLESUNG - ELEMENTARE KOMBINATORIK

## 13.1. Elementare Kombinatorik.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit elementarer Kombinatorik, dabei ist ein wichtiges Ziel, die Binomialkoeffizienten einzuführen, um die allgemeine binomische Formel formulieren und beweisen zu können. Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem systematischen Abzählen (Anzahl bestimmen) von endlichen Mengen. Zwei wichtige Prinzipien haben wir schon kennengelernt, nämlich das Additivitätsprinzip für disjunkte Mengen (Satz 8.12) und das Multiplikativitätsprinzip für Produktmengen (Satz 9.4). In der folgenden Aussage bezeichnen wir zu einer Abbildung

$$f: L \longrightarrow M$$

zu  $y \in M$  die Menge

$$f^{-1}(y) := \{x \in L \mid f(x) = y\}$$

als *Urbildmenge* zu  $y$ .

**Satz 13.1.** *Es seien  $L$  und  $M$  endliche Mengen und es sei*

$$f: L \longrightarrow M$$

*eine Abbildung. Dann gilt*

$$\#(L) = \sum_{y \in M} \#(f^{-1}(y)).$$

*Beweis.* Da jedes Element  $x \in L$  auf genau ein Element aus  $M$  abgebildet wird, liegt eine disjunkte Vereinigung

$$L = \bigsqcup_{y \in M} f^{-1}(y)$$

vor. Nach Satz 8.12 ist daher die Gesamtanzahl der Menge gleich der Summe der disjunkten Teilmengen.  $\square$

### 13.2. Die Fakultät.

Bei einem Tanzkurs mit  $n$  Damen und  $n$  Herren gilt heute beim Schneewalzer Damenwahl, wobei die Damen in der Reihenfolge ihrer Sitzordnung wählen dürfen. Die erste Dame hat  $n$  Wahlmöglichkeiten, die zweite  $n - 1$  Möglichkeiten, die dritte  $n - 2$  Möglichkeiten, u.s.w., die vorletzte Dame hat noch zwei Möglichkeiten und für die letzte Dame verbleibt eine Möglichkeit.



Dieses Tanzpaar hat sich schon gefunden. Für die verbliebenen Personen gibt es insgesamt noch  $(n - 1)!$  Möglichkeiten (Gemälde von Ernst Ludwig Kirchner).

**Definition 13.2.** Zu einer natürlichen Zahl  $n$  nennt man die Zahl

$$n! := n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

die *Fakultät* von  $n$  (sprich  $n$  Fakultät).

Man setzt  $0! = 1$ . Für kleine  $n$  erhält man die folgende Wertetabelle.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

**Lemma 13.3.** Auf einer endlichen Menge  $M$  mit  $n$  Elementen gibt es  $n!$  bijektive Abbildungen von  $M$  nach  $M$ .

*Beweis.* Wir zeigen etwas allgemeiner, dass es zwischen zwei endlichen Mengen  $M$  und  $N$ , die beide  $n$  Elemente besitzen,  $n!$  bijektive Abbildungen gibt. Dies zeigen wir durch Induktion nach  $n$ , wobei der Fall<sup>37</sup>  $n = 1$  klar ist. Die Aussage sei nun für  $n$  schon bewiesen und es liegen zwei  $(n + 1)$ -elementige

<sup>37</sup>Man kann auch bei  $n = 0$  beginnen, dann geht es um die Anzahl der Abbildungen von einer leeren Menge in eine leere Menge. Da gibt es in der Tat eine Abbildung, nämlich die leere Abbildung, was auch der Grund ist, warum man  $0! = 1$  setzt.

Mengen  $M$  und  $N$  vor. Es sei  $x \in M$  ein fixiertes Element. Dann gibt es für die Bilder  $\varphi(x)$  genau  $n + 1$  Möglichkeiten, nämlich die Anzahl der Menge  $N$ . Wenn dies festgelegt ist, so entsprechen die bijektiven Abbildungen von  $M$  nach  $N$  mit

$$\varphi(x) = y$$

den bijektiven Abbildungen von  $M \setminus \{x\}$  nach  $N \setminus \{y\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $n!$  solche bijektiven Abbildungen. Daher ist die Anzahl der bijektiven Abbildungen zwischen  $M$  und  $N$  gleich

$$(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$$

□

Gleichbedeutend damit ist, dass es  $n!$  Möglichkeiten gibt,  $n$  Objekte auf  $n$  Plätze zu verteilen bzw.  $n!$  Möglichkeiten, eine Menge von  $n$  Objekten abzuzählen.

**Beispiel 13.4.** Wir möchten eine vollständige Liste von allen bijektiven Abbildungen von der Menge  $\{1, 2, 3\}$  in die Menge  $\{a, b, c\}$  in der Form von Wertetabellen angeben. Wegen

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

gibt es sechs solche Abbildungen. Es gibt keine natürliche Reihenfolge dieser Abbildungen, dennoch kann man hier mehr oder weniger systematisch vorgehen. Beispielsweise kann man den Wert an der Stelle 1 zuerst festlegen und dann die möglichen Kombinationen für 2 und 3 durchgehen. Dies führt auf die folgenden Wertetabellen.

$x$	1	2	3
$\varphi_1(x)$	$a$	$b$	$c$

$x$	1	2	3
$\varphi_2(x)$	$a$	$c$	$b$

$x$	1	2	3
$\varphi_3(x)$	$b$	$a$	$c$

$x$	1	2	3
$\varphi_4(x)$	$b$	$c$	$a$

$x$	1	2	3
$\varphi_5(x)$	$c$	$a$	$b$

$x$	1	2	3
$\varphi_6(x)$	$c$	$b$	$a$

### 13.3. Die Binomialkoeffizienten.

**Definition 13.5.** Es seien  $k$  und  $n$  natürliche Zahlen mit  $k \leq n$ . Dann nennt man

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „ $n$  über  $k$ “.

Von der Definition her ist es nicht sofort klar, dass  $k!(n-k)!$  ein Teiler von  $n!$  ist und dass es sich somit bei den Binomialkoeffizienten um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

**Satz 13.6.** Die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen in einer  $n$ -elementigen Menge ist der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}.$$

*Insbesondere sind die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen.*

*Beweis.* Es sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und

$$T \subseteq M$$

eine  $k$ -elementige Teilmenge. Wir betrachten die Menge aller bijektiven Abbildungen

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow M,$$

die zusätzlich  $\{1, \dots, k\}$  auf  $T$  (und damit  $\{k+1, \dots, n\}$  auf  $M \setminus T$ ) abbilden. Nach Lemma 13.3 und nach Satz 9.4 gibt es  $k! \cdot (n-k)!$  solche Abbildungen. Insgesamt gibt es  $n!$  bijektive Abbildungen von  $\{1, \dots, n\}$  nach  $M$ . Daher ist

$$(\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } M) \cdot k! \cdot (n-k)! = n!.$$

Insbesondere ist  $k! \cdot (n-k)!$  ein Teiler von  $n!$  und es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ . □

**Bemerkung 13.7.** Für die Binomialkoeffizienten gilt die Regel

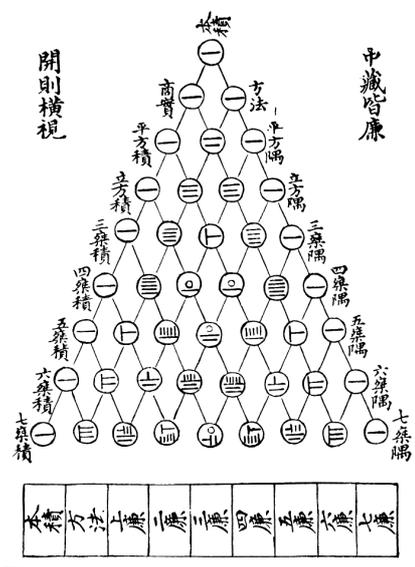
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

wie unmittelbar aus der Definition folgt. Dies kann man sich auch mit Hilfe von Satz 13.6 klar machen. Die Komplementabbildung

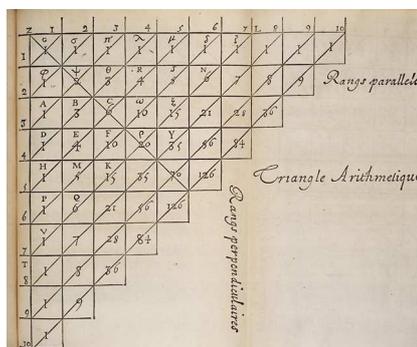
$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), T \longmapsto \mathfrak{C}T,$$



### 古法七乘方圖



in China heißt es *Yanghui-Dreieck* (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das *Pascalsche Dreieck* (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

**Lemma 13.10.** Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

*Beweis.* Es ist

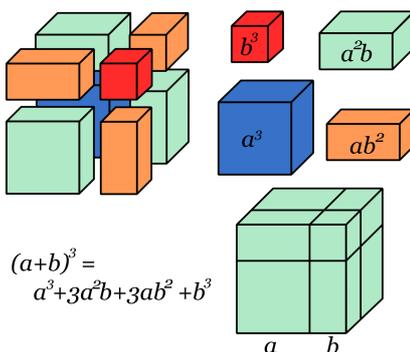
$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{(n-k)!k!}{(n+1-k) \cdot n!} + \frac{(n+1-k)!(k-1)!}{k \cdot n!} \\ &= \frac{(n-k)!k!}{(n+1-k)!k!} + \frac{(n+1-k)!(k-1)!}{(n+1-k)!k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1-k+k) \cdot n!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Wir geben noch einen zweiten Beweis für diese Aussage, der sich an der inhaltlichen Beschreibung als Teilmengenzahl orientiert.

Es sei  $M$  eine  $(n+1)$ -elementige Menge und  $x \in M$  ein fixiertes Element. Wir betrachten die Aussage in Satz 13.6 als eine Aussage über die  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ . Eine solche Teilmenge enthält entweder  $x$  oder aber nicht. Im ersten Fall entspricht dann eine solche Teilmenge einer  $(k-1)$ -elementigen Teilmenge von  $M \setminus \{x\}$ , das ergibt den Summanden  $\binom{n}{k-1}$ , im zweiten Fall einer  $k$ -elementigen Teilmenge von  $M \setminus \{x\}$ , das ergibt den Summanden  $\binom{n}{k}$ .



#### 13.4. Der binomische Lehrsatz.

Die folgende *allgemeine binomische Formel* oder *binomischer Lehrsatz* bringt die Addition, die Multiplikation und die Potenzierung in einem kommutativen Halbring und insbesondere für die natürlichen Zahlen miteinander in Beziehung.

**Satz 13.11.** *Es sei  $R$  ein kommutativer Halbring und  $a, b \in R$ . Ferner sei  $n$  eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Beweis.* Wir führen Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  steht einerseits  $(a+b)^0 = 1$  und andererseits  $a^0 b^0 = 1$ . Sei die Aussage bereits für  $n$  bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
&= a \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) + b \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Den vorstehenden Satz kann man sich auf folgendermaßen klar machen. Beim Ausmultiplizieren von

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)}_{n\text{-fach}}$$

muss jeder Summand (in jedem Faktor) mit jedem Summanden multipliziert werden. Für jedes Teilprodukt muss man sich bei jedem Faktor entscheiden, ob man den vorderen Summanden  $a$  oder den hinteren Summanden  $b$  nimmt. Die einzelnen Produkte haben die Form  $a^k b^{n-k}$ , wobei  $k$  die Anzahl der Faktoren ist, bei denen  $a$  gewählt wurde und  $n-k$  die Anzahl der Faktoren ist, bei denen  $b$  gewählt wurde. Wenn man  $k$  fixiert, so kann man sich fragen, auf wie viele Arten das Produkt  $a^k b^{n-k}$  zustande kommen kann. Eine solche Möglichkeit ist dadurch gegeben, dass man unter den  $n$  Faktoren bestimmt, an welchen von ihnen  $a$  gewählt wird. Die Anzahl der Möglichkeiten ist also die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ , also gleich  $\binom{n}{k}$ .

## 13. ARBEITSBLATT

## 13.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 13.1.** Auf einer Party begrüßen sich manche Gäste mit einem Handschlag, manche nicht. Jede Person merkt sich, wie oft sie im Laufe des Abends eine Hand geschüttelt hat. Zeige, dass die Summe über all diese Zahlen stets gerade ist.

## 13.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 13.2.** Es seien  $L$  und  $M$  endliche Mengen mit  $\ell$  bzw.  $m$  Elementen. Wie viele Abbildungen gibt es von  $L$  nach  $M$ ?

**Aufgabe 13.3.** Berechne

- (1)  $((((2!)!)!)!)!$ ,
- (2)  $(3!)!$ ,
- (3)  $(3!)^2$ ,
- (4)  $(3^2)!$ .

**Aufgabe 13.4.\***

In einem Hörsaal befindet sich ein Tafelgestell mit drei hintereinander liegenden, vertikal verschiebbaren Tafeln. Diese seien mit  $V$  (vordere Tafel),  $M$  (mittlere Tafel) und  $H$  (hintere Tafel) bezeichnet. Aufgrund der Höhe des Gestells sind nur (maximal) zwei Tafeln gleichzeitig einsehbar. Die Lehrperson schreibt in der Vorlesung jede Tafel genau einmal voll. In welcher Reihenfolge (alle Möglichkeiten!) muss sie die Tafeln einsetzen, wenn beim Beschreiben einer Tafel stets die zuletzt beschriebene Tafel sichtbar sein soll.

**Aufgabe 13.5.\***

Heinz-Peter schaut am Morgen in den Spiegel und entdeckt fünf Pickel auf seiner Stirn. Diese müssen alle ausgedrückt werden, wobei zwei Pickel so nah beieinander liegen, dass sie unmittelbar hintereinander behandelt werden müssen. Wie viele Reihenfolgen gibt es, die Pickel auszudrücken?

**Aufgabe 13.6.\***

Es findet das olympische 100-Meter-Finale mit acht Teilnehmern statt. Sie wissen, welche drei Teilnehmer eine Medaille gewinnen (aber nicht, wer welche Medaille). Wie viele Möglichkeiten für das Gesamtergebnis aller acht Teilnehmer verbleiben (keine Platzierung ist doppelt besetzt)?

**Aufgabe 13.7.** Die Folge  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sei rekursiv durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} ka_k \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Zeige, dass für  $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2}n!$$

gilt.

**Aufgabe 13.8.** Es soll ein Schaubild über ein Netzwerk angefertigt werden. In dem Netzwerk ist jeder Punkt (jede Person, jeder Gesichtspunkt) mit jedem anderen direkt verbunden (beispielsweise durch einen Pfeil mit zwei Spitzen). Wie viele Pfeile sind in Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte zu zeichnen?

**Aufgabe 13.9.\***

Vor einem Fußballspiel begrüßt jeder der elf Spieler einer Mannschaft jeden Spieler der anderen Mannschaft, jeder Spieler begrüßt die vier Unparteiischen und diese begrüßen sich alle untereinander. Wie viele Begrüßungen finden statt?

**Aufgabe 13.10.** Die Räuberbande „Robin Hood“ besteht aus fünf Personen. Sie legt für ihr Diebesgut eine Schatztruhe an, die sie mit verschiedenen Schlössern sichern möchte, wobei die (mehrfachen) Schlüssel an die Mitglieder verteilt werden sollen. Dabei soll erreicht werden, dass je zwei Bandenmitglieder allein nicht an den Schatz kommen, dass aber je drei Bandenmitglieder die Truhe aufschließen können. Wie viele Schlösser braucht man dafür und wie müssen die Schlüssel verteilt werden?

**Aufgabe 13.11.** Mustafa Müller wird 8 Jahre alt und darf deshalb zu seiner Geburtstagsfeier aus seiner Klasse, in der es insgesamt 25 Schüler und Schülerinnen gibt, 8 Leute einladen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

**Aufgabe 13.12.** Unter einer Geburtstagsfeier der Klasse 1c versteht man eine Party, wobei die Menge der Gäste eine Teilmenge der Klasse ist und wobei es ein Geburtstagskind aus der Klasse gibt, das auf der Party anwesend ist. Wie viele Geburtstagsparties gibt es, wenn die Klasse nur aus vier Kindern besteht?

**Aufgabe 13.13.** Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

**Aufgabe 13.14.** Zeige: Für  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq k$  gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}.$$



**Aufgabe 13.15.** Gabi Hochster, Heinz Ngolo und Mustafa Müller backen bei der Oma von Mustafa Plätzchen. Die Oma hat auf das Blech schon in vier Reihen der Länge sechs die Teigmasse platziert. Den Kindern kommen folgende Aufgaben zu: Gabi soll auf jedes Plätzchen eine Haselnuss platzieren, Heinz Puderzucker drauf streuen und Mustafa einen Zitronenspritzer drauf spritzen. Dabei kommt es auf die Reihenfolge dieser drei Zugaben an. Wie viele Möglichkeiten gibt es für ein einzelnes Plätzchen und wie viele für das Gesamtblech?

**Aufgabe 13.16.** Wie viele Teilquadrate (unterschiedlicher Seitenlänge) besitzt ein Schachbrett? Man finde möglichst viele Strategien, diese Anzahl zu bestimmen.

**Aufgabe 13.17.\***

Sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Vergleiche die Anzahl der injektiven Abbildungen von einer  $n$ -elementigen Menge in eine  $n+1$ -elementige Menge mit der Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer  $n+1$ -elementigen Menge in eine  $n$ -elementige Menge in den folgenden Fällen.

- a)  $n = 1$ ,
- b)  $n = 2$ ,

c)  $n = 3$ .

**Aufgabe 13.18.** Sei  $m \geq n$ . Wie viele injektive Abbildungen gibt es von  $\{1, \dots, n\}$  nach  $\{1, \dots, m\}$  und wie viele surjektive Abbildungen gibt es von  $\{1, \dots, m\}$  nach  $\{1, \dots, n\}$ ?

Für die folgende Aufgabe ist die allgemeine binomische Formel hilfreich.

**Aufgabe 13.19.\***

Beweise durch Induktion, dass für

$$n \geq 10$$

die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

### 13.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 13.20.** (3 Punkte)

Gabi Hochster, Heinz Ngolo, Lucy Sonnenschein und Mustafa Müller wollen untereinander Wichteln. Jede Person soll also genau von einer Person ein Geschenk bekommen, aber natürlich nicht von sich selbst. Wie viele Wichtelmöglichkeiten gibt es?

**Aufgabe 13.21.** (2 Punkte)

Zeige, dass für  $n \geq 4$  die Beziehung

$$2^n \leq n!$$

gilt.

**Aufgabe 13.22.** (2 Punkte)

Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$\binom{20}{10}.$$

**Aufgabe 13.23.** (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

**Aufgabe 13.24.** (3 Punkte)

Zeige, dass eine nichtleere endliche Menge  $M$  gleich viele Teilmengen mit gerader und mit ungerader Anzahl besitzt. Beweise diese Aussage unter Verwendung von Binomialkoeffizienten.

## 14. VORLESUNG - DIVISION MIT REST UND DEZIMALSYSTEM

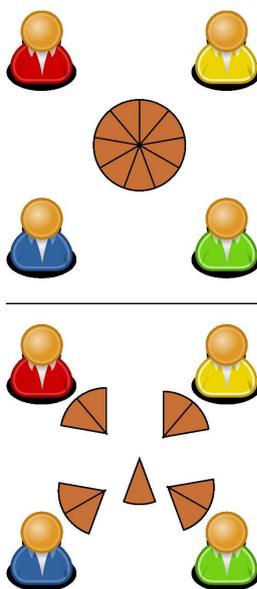
Kunst gibt nicht das  
Sichtbare wieder, sondern  
Kunst macht sichtbar

---

Paul Klee

## 14.1. Division mit Rest.

Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich als eine Ziffernfolge „im Zehnersystem“ ausdrücken. Dies beruht auf der (sukzessiven) Division mit Rest. Eine natürliche Zahl ist nicht durch jede natürliche Zahl teilbar, die Division mit Rest liefert eine Operation, die stets durchführbar ist.



**Satz 14.1.** Sei  $d$  eine fixierte positive natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $n$  eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl  $q$  und eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl<sup>38</sup>  $r$ ,  $0 \leq r \leq d - 1$ , mit

$$n = qd + r.$$

---

<sup>38</sup>Bei  $q$  denke man an Quotient und bei  $r$  an Rest.

*Beweis.* Zur Existenz. Dies wird durch Induktion über  $n$  bewiesen. Es sei  $d > 0$  fixiert. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt mit  $q = 0$  und  $r = n = 0$ . Für den Induktionsschluss sei die Aussage für  $n$  bewiesen, d.h. wir haben eine Darstellung  $n = dq + r$  mit  $r < d$  und müssen eine ebensolche Darstellung für  $n + 1$  finden. Wenn  $r < d - 1$  ist, so ist

$$n + 1 = dq + r + 1$$

und wegen  $r + 1 < d$  ist dies eine gesuchte Darstellung. Ist hingegen  $r = d - 1$ , so ist

$$n + 1 = dq + r + 1 = dq + d = d(q + 1) + 0,$$

und dies ist eine gesuchte Darstellung. Zur Eindeutigkeit. Sei  $qd + r = n = \tilde{q}d + \tilde{r}$ , wobei die Bedingungen jeweils erfüllt seien. Es sei ohne Einschränkung  $\tilde{r} \geq r$ . Dann gilt  $(q - \tilde{q})d = \tilde{r} - r$ . Diese Differenz ist nichtnegativ und kleiner als  $d$ , links steht aber ein Vielfaches von  $d$ , so dass die Differenz 0 sein muss und die beiden Darstellungen übereinstimmen.  $\square$

**Bemerkung 14.2.** Zu gegebenen natürlichen Zahlen  $n, d$  mit  $d \geq 1$  findet man die Division mit Rest, also die Darstellung  $n = qd + r$ , indem man der Reihe nach die Vielfachen von  $d$  betrachtet. Das größte Vielfache von  $d$  (gleich oder) unterhalb von  $n$  ist das gesuchte  $qd$ , insbesondere muss das nächste Vielfache  $(q+1)d > n$  sein. Der Rest ergibt sich dann als  $r = n - qd$ .

In der Schule verwendet man häufig eine Darstellung für die Division mit Rest wie

$$n \text{ durch } d \text{ ist } q \text{ Rest } r.$$

Dies ist in Hinblick auf die mathematische Weiterverarbeitung ungünstiger als die im Satz verwendete Gleichungsform.

## 14.2. Zifferndarstellung für natürliche Zahlen.

Mit der Division mit Rest können wir die Existenz und Eindeutigkeit der üblichen Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl beweisen. Hinter der Zifferndarstellung verbirgt sich eine Mischung aus Addition, Multiplikation und Potenzierung. Wir konzentrieren uns hauptsächlich auf die Ziffernentwicklung im *Dezimalsystem* (oder *Zehnersystem*).

**Satz 14.3.** *Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen  $k$  und  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_k$  mit  $0 \leq r_i \leq 9$  und mit  $r_k \neq 0$  (außer bei  $n = 0$ ) mit der Eigenschaft*

$$n = \sum_{i=0}^k r_i 10^i.$$

*Beweis.* Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  wählt man  $k = 0$  und  $r_0 = 0$ . Sei nun  $n \geq 1$  und die Aussage für kleinere Zahlen schon bewiesen. Nach Satz 14.1 mit  $d = 10$  gibt es eine Darstellung

$$n = q \cdot 10 + r_0$$

mit  $r_0$  zwischen 0 und 9. Es ist  $q < n$ , deshalb gilt nach Induktionsvoraussetzung die Aussage für  $q$ . D.h. man kann

$$q = \sum_{i=0}^{\ell} s_i 10^i$$

mit  $0 \leq s_i \leq 9$  (bei  $q = 0$  ist dies als leere Summe zu lesen) und mit  $s_\ell \neq 0$  schreiben. Daher ist

$$\begin{aligned} n &= q \cdot 10 + r_0 \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\ell} s_i 10^i \right) \cdot 10 + r_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} (s_i 10^{i+1}) + r_0 \\ &= \sum_{j=1}^{\ell+1} (s_{j-1} 10^j) + r_0 \end{aligned}$$

eine Darstellung der gesuchten Art. Dabei ist  $r_j = s_{j-1}$  für  $j \geq 1$  und  $k = \ell + 1$ . Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Eindeutigkeit bei der Division mit Rest, siehe Aufgabe 14.11.  $\square$

Eine natürliche Zahl wird im Zehnersystem einfach dadurch angegeben, dass die Ziffern nebeneinander hingeschrieben werden, wobei links die höchststellige Ziffer (die vorderste Ziffer) und rechts die niedrigststellige Ziffer, also die Einerziffer, steht. Die Zahl

$$4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

wird also einfach als

$$463075$$

geschrieben (in der gemischten Summen- und Produktdarstellung hätte man den Ausdruck  $0 \cdot 10^2$  auch weglassen können, nicht aber in der Dezimaldarstellung). Eine beliebige natürliche Zahl im Dezimalsystem mit  $k$  Ziffern gibt man als

$$a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

an, was die Zahl

$$a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

bedeutet. Man beachte, dass wegen der gewünschten Kongruenz  $a_i 10^i$  die Durchnummerierung der Ziffern bei 0 anfängt, und somit bei insgesamt  $k$  Ziffern die höchststellige Ziffer die Nummer  $k - 1$  besitzt. Wenn man von der  $i$ -ten Ziffer spricht, meint man die Ziffer, die sich auf  $10^i$  bezieht. Von daher spricht man besser von der Einerziffer (bezieht sich auf  $1 = 10^0$ ), der Zehnerziffer, der Hunderterziffer, der Tausenderziffer u.s.w. Gelegentlich ist

es sinnvoll, auch Ziffernentwicklungen zuzulassen, die vorne mit Nullen beginnen, beispielsweise wenn man bei der Addition zweier natürlicher Zahlen gleich viele Ziffern haben möchte.

**Bemerkung 14.4.** Aus dem Beweis zu Satz 14.1 kann man ablesen, wie man zu einer irgendwie gegebenen natürlichen Zahl  $n$  die Entwicklung im Zehnersystem erhält. Man dividiert die Zahl  $n$  durch 10 und der Rest gibt die Endziffer. Dann zieht man von  $n$  diesen Rest ab und weiß, dass diese Zahl ein Vielfaches von 10 ist. Man dividiert sie durch 10 und bestimmt erneut den Rest, der die Zehnerziffer gibt, u.s.w. Bei diesem Verfahren berechnet man also die Ziffern von hinten nach vorne.

Ein anderes Verfahren, bei dem man die Ziffern von vorne nach hinten berechnet, geht folgendermaßen: Man bestimmt die maximale Zehnerpotenz  $10^k$ , die in  $n$  hineinpasst, es muss also

$$10^k \leq n < 10^{k+1}$$

gelten. Dann findet man das maximale Vielfache von  $10^k$ , das in  $n$  hineinpasst, also die Zahl  $z$  mit

$$z \cdot 10^k \leq n < (z+1)10^k.$$

Diese Zahl muss zwischen 1 und 9 liegen. Der Wert

$$z = 0$$

kann nicht sein, da ansonsten  $n < 10^k$  im Widerspruch zur Wahl der Zehnerpotenz wäre, ein Wert  $z \geq 10$  kann nicht sein, da ansonsten

$$n \geq z10^k \geq 10^{k+1}$$

wäre, was wieder der Wahl der Zehnerpotenz widerspricht. Diese Ziffer  $z = c_k$  ist dann die Anfangsziffer der Dezimalentwicklung. Nun rechnet man

$$n - c_k 10^k$$

und weiß nach der Wahl von  $k$  und  $c_k$ , dass diese neue Zahl  $\tilde{n}$  echt kleiner als  $10^k$  ist. Man bestimmt das maximale Vielfache von  $10^{k-1}$  unterhalb von  $\tilde{n}$ , der Vorfaktor ergibt die Ziffer  $c_{k-1}$  und man zieht das Vielfache von  $\tilde{n}$  ab und wiederholt das Verfahren.

**Bemerkung 14.5.** Es sei eine natürliche Zahl in der Form

$$n = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0$$

gegeben, wobei die  $c_i$  beliebige natürliche Zahlen sind, also nicht kleiner als 10 sein müssen. Die zu  $n$  gehörige Dezimalentwicklung erhält man sukzessive durch folgende Vorgehensweise. Man führt für  $c_0$  die Division mit Rest durch 10 durch und erhält eine Darstellung

$$c_0 = 10 \cdot q_0 + a_0$$

mit einem Rest  $a_0$ ,  $0 \leq a_0 < 10$ . Damit ist

$$n = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0$$

$$\begin{aligned}
&= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + (10 \cdot q_0 + a_0) 10^0 \\
&= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + q_0 10 + a_0 10^0 \\
&= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + (c_1 + q_0) 10^1 + a_0 10^0.
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine neue Darstellung von  $n$ , bei der die Einerziffer kleiner als 10 ist. Als nächstes arbeitet man den neuen Vorfaktor (also  $c_1 + q_0$ ) zu  $10^1$  ab und bringt ihn auf die erlaubte Zifferngestalt, wobei der davor liegenden Vorfaktor wieder geändert wird. Dies führt letztlich zur Darstellung im Dezimalsystem.

**Bemerkung 14.6.** Für Rechnungen ist das Dezimalsystem sehr gut geeignet, wie die aus der Schule bekannten und im Laufe der Vorlesung zu entwickelnden Algorithmen zeigen werden, für theoretische Überlegungen und Beweise, auch über das Dezimalsystem selbst, ist die obige gemischte Summen- und Produktdarstellung besser geeignet, da darin die grundlegenden Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen sichtbar werden.

Eine zu Satz 14.1 entsprechende Aussage gilt für jede Basis  $g \geq 2$  statt  $g = 10$ . Bei  $g = 2$  spricht man vom *Dualsystem*, die einzigen Ziffern sind 0 und 1, bei  $g = 3$  vom *Dreiersystem* mit den Ziffern 0, 1, 2 u.s.w. Bei  $g = 16$  spricht man vom *Hexadezimalsystem* und verwendet die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Dass das Dezimalsystem nur eine unter vielen möglichen Darstellungen einer natürlichen Zahl ist, wird besonders deutlich, wenn man Darstellungen in verschiedenen Ziffernsystemen (oder *Stellenwertsystemen*) ineinander umrechnet.

**Beispiel 14.7.** Wir wollen die im Dezimalsystem gegebene Zahl 187 im Dreiersystem ausdrücken. Dazu müssen wir die größte Dreierpotenz finden, die unterhalb 187 liegt. Das ist

$$81 = 3^4$$

(da  $243 = 3^5$  zu groß ist). Für diese Potenz müssen wir schauen, wie oft sie in 187 hineingeht. Wegen

$$2 \cdot 81 = 162 < 187$$

sind das zweimal. Wir wissen daher, dass die Entwicklung der Zahl im Dreiersystem  $2 \cdot 3^4$  beinhaltet, die Ziffer 2 steht somit als Anfangsziffer fest. Die weitere Ziffernentwicklung hängt jetzt nur von der Differenz

$$187 - 162 = 25$$

ab. Diese Zahl ist kleiner als

$$27 = 3^3,$$

was bedeutet, dass die dritte Dreierpotenz „gar nicht“ und das heißt hier mit der Ziffer 0 vorkommt. Wir arbeiten dann mit 25 und mit der nächstkleineren Dreierpotenz weiter, also mit

$$9 = 3^2.$$

Diese hat wieder zweimal Platz in 25, die Differenz ist

$$25 - 18 = 7.$$

Die

$$3 = 3^1$$

passt wieder zweimal rein, übrig bleibt 1. Im Dreiersystem lautet also die Ziffernentwicklung

$$20221.$$

Diese Ziffernfolge kann man sukzessive notieren (Nullen nicht vergessen) oder aber in der Rechnung stets deutlich machen, auf welche Potenz sich der jeweilige Rechenschritt bezieht und dann zum Schluss daraus die Ziffernfolge ablesen.

## 14. ARBEITSBLATT

### 14.1. Die Pausenaufgabe.

#### Aufgabe 14.1.\*

Führe im Dezimalsystem die Addition

$$794385 + 503819$$

schriftlich durch.

### 14.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 14.2.** Begründe, dass der Nachfolger der Dezimalzahl  $999 \dots 999$  (mit  $k$  Neunen) gleich  $1000 \dots 000$  (mit  $k + 1$  Ziffern, also  $k$  Nullen) ist.

**Aufgabe 14.3.** Bestimme, welche der beiden Zahlen im Zehnersystem größer ist.

$$m = 52866396034807681104629504792853235$$

oder

$$n = 52876373480104695047954506002853673.$$

**Aufgabe 14.4.** Bestimme, welche der beiden Zahlen im Zehnersystem größer ist.

$$m = 528663960348076811044629504792853235$$

oder

$$n = 52876373480104695047954506002853673.$$

**Aufgabe 14.5.** Ein Pokalwettbewerb werde mit  $2^{n+1}$  Mannschaften im K.-o.-System ausgetragen. Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

durch eine inhaltliche Überlegung (Wie viele Spiele finden statt?).

**Aufgabe 14.6.** Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

mit Hilfe des Zweiersystems.

**Aufgabe 14.7.\***

Führe im Dreiersystem die Addition

$$201021 + 112002$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 14.8.** Führe im Sechzehnersystem die Addition

$$5C4A7 + D330E$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 14.9.** Führe die Addition

$$9 + 19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 + 89 + 99 + 109 + 119$$

schriftlich durch. Welche „Besonderheit“ tritt abei auf?

**Aufgabe 14.10.** Gabi Hochster sitzt in der Schule neben Heinz Ngolo. Sie üben schriftliches Addieren und rechnen  $725 + 638$ . Gabi ist fertig und Heinz hat gerade die hinterste Ziffer zusammengerechnet und den Übertrag notiert. Da kritzelt Gabi auf Heinzens Heft rum und radiert die Ziffern 5 und 8 weg. Gabi sagt: „Die brauchst du nicht mehr, konzentrier dich auf die anderen Ziffern, dann geht es schneller und wir können endlich weiter Schiffe versenken spielen“. Darauf sagt Heinz: „Lass mich in Ruhe, kleine Klugscheißerin, außerdem brauch ich die Ziffern doch, nämlich zur Probe“. Darauf Gabi: „Wer beim Rechnen eine Probe braucht, sollte zurück in den Kindergarten“.

Wir beurteilen Sie die Lage mathematisch und didaktisch?

**Aufgabe 14.11.** Ist für das schriftliche Addieren das Kommutativgesetz klar, ist es klar, dass 0 das neutrale Element ist, ist es klar, dass das Assoziativgesetz gilt?

**Aufgabe 14.12.** Es stehen verschiedene Zahlen an der Tafel. Der einzige erlaubte Rechenschritt ist, zwei beliebige Zahlen wegzuwischen und durch ihre Summe zu ersetzen. Nach hinreichend vielen Durchgängen steht nur noch eine Zahl da. Ist das Ergebnis unabhängig vom Ablauf? Man erläutere die Situation mit dem Begriff *Invarianzprinzip*.

**Aufgabe 14.13.** Gibt es für die folgenden Zahlensysteme ein für alle Zahlen korrektes Verfahren zum schriftlichen Addieren, welches wie das schriftliche Addieren im Zehnersystem nur auf der getrennten Addition von Ziffern gleicher Stelligkeit und dem Übertrag beruht? Welche Probleme treten auf?

- (1) Das Strichfolgensystem
- (2) Das Eurozahlensystem
- (3) Das römische Zahlensystem

#### 14.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 14.14.** (4 Punkte)

Sei  $0 \leq k \leq 2$ . Zeige: Eine positive natürliche Zahl ist genau dann  $< 10^k$ , wenn sie im Eurozahlensystem aus maximal  $3k$  Ziffern besteht.

**Aufgabe 14.15.** (2 Punkte)

Führe im Dreiersystem die Addition

$$221002 + 22121$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 14.16.** (3 Punkte)

Führe im Sechzehnersystem die Addition

$$A0BEE7 + 5C5DA3$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 14.17.** (3 Punkte)

Zeige mit dem allgemeinen Distributivgesetz die Beziehung

$$a^{n+1} - 1 = (a - 1) \left( \sum_{k=0}^n a^k \right)$$

für natürliche Zahlen  $a \in \mathbb{N}_+$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 14.18.** (1 Punkt)

Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

mit Hilfe von Aufgabe 15.17.

## 15. VORLESUNG - SCHRIFTLICHES ADDIEREN

In dieser Vorlesung besprechen wir, wie sich im Dezimalsystem der Nachfolger, die Größergleichrelation und die Addition darstellen.

## 15.1. Der Nachfolger und die Ordnung im Dezimalsystem.

**Bemerkung 15.1.** Der Nachfolger einer im Dezimalsystem gegebenen natürlichen Zahl

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_\ell 10^\ell$$

lässt sich einfach bestimmen und im Dezimalsystem ausrechnen. Der Nachfolger ist natürlich

$$(a_0 + 1) + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_\ell 10^\ell.$$

Wenn

$$a_0 \leq 8$$

ist, so ist

$$a_0 + 1 \leq 9$$

und die Dezimalentwicklung des Nachfolgers liegt unmittelbar vor. Wenn hingegen  $a_0 = 9$  ist, so geht es um die Zahl

$$\begin{aligned} n + 1 &= (9 + 1) + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_\ell 10^\ell \\ &= 10 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_\ell 10^\ell \\ &= (a_1 + 1) \cdot 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_\ell 10^\ell. \end{aligned}$$

Erneut gilt, dass bei

$$a_1 \leq 8$$

die Dezimalentwicklung vorliegt, bei  $a_1 = 9$  muss man wie zuvor weitermachen. Wenn die hintersten (niedrigstelligsten)  $s$  Ziffern  $a_0, \dots, a_{s-1}$  gleich 9 sind und

$$a_s \neq 9$$

(was den Fall einschließt, dass  $n$  genau  $s$  Ziffern hat, in welchem Fall  $a_s$  als 0 zu interpretieren ist), so erhält man den Nachfolger, indem man diese  $s$  Neunen durch Nullen ersetzt und  $a_s$  um 1 erhöht.

**Lemma 15.2.** *Sei  $k \in \mathbb{N}_+$ . Eine natürliche Zahl ist genau dann  $< 10^k$ , wenn sie im Zehnersystem aus maximal  $k$  Ziffern besteht.*

*Beweis.* Wenn die Zahl  $n$  im Zehnersystem aus mehr als  $k$  Ziffern besteht, so ist

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_\ell 10^\ell$$

mit

$$a_\ell \geq 1$$

und

$$\ell \geq k.$$

Nach Satz 10.5 ist dann

$$n \geq a_\ell 10^\ell \geq 10^\ell \geq 10^k.$$

Wenn die Zahl  $n$  aus maximal  $k$  Ziffern besteht, so kann man sie als

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_{k-1} 10^{k-1}$$

mit  $a_i < 10$  schreiben. Aus Satz 10.5 folgt direkt

$$n \leq 9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1}.$$

Wir zeigen durch Induktion über  $k$ , dass diese Zahl kleiner als  $10^k$  ist. Bei

$$k = 1$$

ist

$$9 < 10$$

(nach Definition ist 10 der Nachfolger von 9). Im Induktionsschritt von  $k$  nach  $k + 1$  folgt aus der Induktionsvoraussetzung wegen

$$\begin{aligned} 9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \cdots + 9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^k &< 10^k + 9 \cdot 10^k \\ &= 10 \cdot 10^k \\ &= 10^{k+1} \end{aligned}$$

die Behauptung. □

**Satz 15.3.** *Es seien*

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_{k-1} 10^{k-1}$$

und

$$n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \cdots + b_{\ell-1} 10^{\ell-1}$$

zwei natürliche Zahlen im Zehnersystem (also mit  $0 \leq a_i, b_i \leq 9$ ). Dann ist

$$m > n$$

genau dann, wenn

$$k > \ell$$

oder wenn  $k = \ell$  ist und wenn es ein  $s$ ,  $0 \leq s < k$ , derart gibt, dass

$$a_{k-1} = b_{k-1}, \dots, a_{s+1} = b_{s+1}, a_s > b_s$$

ist.

*Beweis.* Bei

$$k > \ell$$

ist nach Lemma 15.2

$$m \geq 10^\ell > n.$$

Sei also  $k = \ell$ . Es sei  $s$  die größte Stelle, an der die Ziffern verschieden sind, d.h. es sei

$$a_{k-1} = b_{k-1}, \dots, a_{s+1} = b_{s+1}, a_s \neq b_s.$$

Aufgrund der Verträglichkeit der Ordnungsbeziehung mit der Addition können wir

$$a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_{s+1} \cdot 10^{s+1}$$

beidseitig abziehen, d.h. wir können annehmen, dass  $k = \ell$  und  $a_{k-1} \neq b_{k-1}$  ist und wir müssen zeigen, dass

$$m > n$$

genau dann gilt, wenn

$$a_{k-1} > b_{k-1}$$

ist. Hierbei müssen wir wegen der Symmetrie der Situation nur die Rückrichtung zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} m &= a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &\geq a_{k-1} \cdot 10^{k-1} \\ &\geq (b_{k-1} + 1) \cdot 10^{k-1} \\ &= b_{k-1} \cdot 10^{k-1} + 10^{k-1} \\ &> b_{k-1} \cdot 10^{k-1} + b_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0 \\ &= n, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt wieder Lemma 15.2 verwendet haben.  $\square$

## 15.2. Schriftliches Addieren.

Da sich die Addition zweier natürlicher Zahlen aus den Dedekind-Peano-Axiomen ergibt, gibt es in jeder Beschreibung der natürlichen Zahlen genau eine Möglichkeit, zu addieren. Ob diese algorithmisch geschickt oder kompliziert ist, hängt wesentlich von der gewählten Beschreibung ab. Wenn man durch Strichfolgen gegebene Zahlen miteinander addiert, so hängt man einfach die beiden Strichfolgen aneinander. Dies ist auf den ersten Blick ein sehr einfacher Vorgang. Wenn man es aber ernsthaft schriftlich durchführen möchte, so sieht man, dass es extrem mühsam ist, da man jeden Strich der einen Strichfolge einzeln an die andere anhängen muss.

Das schriftliche Addieren zweier natürlicher Zahlen im Zehnersystem ist aus der Schule bekannt. Man schreibt die beiden Zahlen untereinander so, dass die

Einerpositionen übereinander stehen und addiert dann die beiden passenden Ziffern (im Sinne des kleinen Einundeins) von hinten nach vorne. Wenn das Ergebnis kleiner als 10 ist, schreibt man diese Zahl hin und rückt nach links. Wenn das Ergebnis größer oder gleich 10 ist, so schreibt man die Einerziffer dieser Summe an der Stelle hin und hat in der links liegenden Stelle einen zusätzlichen Übertrag von 1 mitzuberechnen. Dies ist insgesamt ein rekursives Verfahren, das wir kurz festhalten.

**Verfahren 15.4.** Das schriftliche Addieren  $m+n$  zweier natürlicher Zahlen, die im Dezimalsystem als

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k \text{ und } n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_k 10^k$$

gegeben sind (wobei auch vordere Nullen erlaubt sind), funktioniert folgendermaßen. Man berechnet die Dezimalziffern  $c_i$  des Ergebnisses und die Überträge  $d_{i+1}$  (mit dem Startwert  $d_0 = 0$ ) sukzessive durch

$$c_i = \begin{cases} a_i + b_i + d_i, & \text{falls } a_i + b_i + d_i < 10, \\ a_i + b_i + d_i - 10, & \text{falls } a_i + b_i + d_i \geq 10, \end{cases}$$

und

$$d_{i+1} = \begin{cases} 0, & \text{falls } a_i + b_i + d_i < 10, \\ 1, & \text{falls } a_i + b_i + d_i \geq 10. \end{cases}$$

Die Dezimaldarstellung der Summe  $m+n$  ist  $c_{k+1}c_k \dots c_2c_1c_0$  (wobei  $c_{k+1} = 0$  sein kann).

Warum ist dieser Algorithmus richtig, warum liefert er das korrekte Ergebnis? Die Gewöhnung an dieses Verfahren verleitet dazu, diese Frage nicht ernst zu nehmen bzw. nicht zu verstehen. Das eben beschriebene schriftliche Addieren ist nicht die Definition der Addition, sondern eine algorithmische Ausführung der Addition in einem bestimmten Beschreibungssystem (nämlich dem Dezimalsystem) für die natürlichen Zahlen.

Der Ausgangspunkt der Addition der natürlichen Zahlen liegt in der disjunkten Vereinigung von endlichen Mengen, wir haben die Addition über die Nachfolgerabbildung eingeführt und bereits in Satz 8.12 gezeigt, dass sie mit dem Vereinigungskonzept übereinstimmt. Warum stimmt auch das schriftliche Addieren damit überein? Konkret: Man hat zwei Mengen  $A$  und  $B$  an Äpfeln und bestimmt für beide Mengen ihre Anzahl im Zehnersystem: diese seien  $k$  und  $n$ . Dann schüttet man die Mengen zusammen, erhält die Menge  $C = A \cup B$  und bestimmt für diese Menge die Anzahl im Zehnersystem: diese sei  $m$ . Warum kommt, wenn man die Zahlen  $k$  und  $n$  im Zehnersystem schriftlich addiert, ausgerechnet  $m$  heraus?

Die zwei Zahlen seien als  $n = a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$  und  $k = b_s 10^s + b_{s-1} 10^{s-1} + \dots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0$  gegeben, wobei die Ziffern alle zwischen 0 und 9 seien. Es sei  $r \geq s$  und wir können sogar annehmen,

dass  $r = s$  ist, indem wir fehlende Ziffern in der zweiten Dezimalentwicklung durch Nullen auffüllen. Dann ist

$$\begin{aligned} & (a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) \\ & + (b_r 10^r + b_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0) \\ & = (a_r + b_r) 10^r + (a_{r-1} + b_{r-1}) 10^{r-1} + \cdots + \\ & \quad (a_2 + b_2) 10^2 + (a_1 + b_1) 10 + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

. Dies beruht auf dem Assoziativgesetz der Addition und dem Distributivgesetz. Achtung! Dieses Ergebnis ist nicht in der Dezimaldarstellung, da die vor den Zehnerpotenzen  $10^i$  stehenden Zahlen  $a_i + b_i$  nicht unbedingt kleiner als 10 sein müssen. Man kann an dieser Stelle Bemerkung 14.4 anwenden und zu den „größeren“ Ziffern nach oben schaufeln. Dies ist aber nicht das Verfahren des schriftlichen Addierens.

Der folgende Beweis verwendet ein *Invarianzprinzip*. Ein Algorithmus besteht typischerweise aus vielen Einzelschritten, wodurch man leicht die Übersicht verlieren kann. Beim Invarianzprinzip schaut man, was sich bei den Einzelschritten nicht ändert, sondern konstant (invariant) ist. Eine solche Invariante ändert sich im Algorithmus überhaupt nicht.

**Satz 15.5.** *Das schriftliche Addieren im Zehnersystem ist korrekt.*

*Beweis.* Die beiden Zahlen seien

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_k 10^k \text{ und } n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \cdots + b_k 10^k,$$

wobei wir eventuell auch vordere Nullen erlauben. Wir beweisen ein schrittweises Invarianzprinzip des schriftlichen Addierens, nämlich, dass nach dem  $i$ -ten Schritt<sup>39</sup> ( $i = -1, 0, 1, 2, \dots$ ), wenn die hinteren Ziffern  $c_i, c_{i-1}, \dots, c_0$  und die Übertragsziffern  $d_{i+1}$  schon berechnet sind, dass dann die jeweilige Summe

$$\begin{aligned} S_i = & (a_k 10^k + \cdots + a_{i+1} 10^{i+1}) + (b_k 10^k + \cdots + b_{i+1} 10^{i+1}) + d_{i+1} 10^{i+1} \\ & + (c_i 10^i + \cdots + c_1 10 + c_0) \end{aligned}$$

konstant ist (also nicht von  $i$  abhängt), und zwar gleich  $m + n$ <sup>40</sup>. Diese Summen beschreiben eine Momentaufnahme des Algorithmus zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei bedeutet der Schritt  $-1$ , dass noch keine Rechnung durchgeführt wurde. Am Anfang, bei  $i = -1$ , sind die beiden hinteren Summanden nicht vorhanden und vorne stehen  $m$  und  $n$  komplett, die Summe ist also  $m + n$ . Die Konstanz der Summen beweisen wir durch Induktion nach  $i$ , wobei wir den Fall

$$i = -1$$

<sup>39</sup>Diese Nummerierung ist hier sinnvoll,  $-1$  bezieht sich auf die Situation, wo noch gar nichts passiert ist, und  $0$  bezieht sich auf die Rechnung an der Einerziffer.

<sup>40</sup>Gemeint ist hier die „wahre Summe“ im Sinne der Definition, ein Einwand wie „hier wird was verwendet, worüber wir doch erst eine Aussage machen wollen“ greift ins Leere.

soeben behandelt haben. Sei nun die Konstanz

$$m + n = S_{-1} = S_0 = S_1 = \dots = S_i$$

bereits bewiesen, und wir verarbeiten die  $10^{i+1}$ -Stelle. Gemäß dem Algorithmus addiert man

$$a_{i+1} + b_{i+1} + d_{i+1}$$

und schreibt dies als

$$d_{i+2}10 + c_{i+1}$$

mit  $0 \leq c_{i+1} \leq 9$  Somit ist

$$\begin{aligned} a_{i+1}10^{i+1} + b_{i+1}10^{i+1} + d_{i+1}10^{i+1} &= (a_{i+1} + b_{i+1} + d_{i+1})10^{i+1} \\ &= (d_{i+2}10 + c_{i+1})10^{i+1} \\ &= d_{i+2}10^{i+2} + c_{i+1}10^{i+1}. \end{aligned}$$

Wenn man in der Summe  $S_i$  die linke Seite der vorstehenden Gleichung durch die rechte Seite ersetzt, so erhält man gerade  $S_{i+1}$ , was die Gleichheit zeigt. Wenn man  $i$  hinreichend groß nimmt, hat man  $m$  und  $n$  verbraucht und die Summe  $S_i$  besteht dann allein aus der durch die Ziffern  $c_i$  gebildeten Zahl. Dies stimmt also mit der Summe  $m + n$  überein.  $\square$

**Beispiel 15.6.** Wir wollen  $329 + 475$  berechnen und schreiben

$$329$$

$$\underline{475}$$

Nach dem ersten Rechenschritt haben wir

$$329$$

$$475$$

$$\underline{1}$$

$$4.$$

Der Punkt im Beweis zu Satz 15.5 ist, dass man die hintersten Ziffern der beiden Summanden vergessen kann, die volle Information ist in der Endziffer 4 und dem Übertrag 1 bewahrt, was sich dahingehend niederschlägt, dass

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 4$$

gleich der Ausgangssumme ist. Diese Eigenschaft weiß man unabhängig davon, dass diese Summe noch gar nicht explizit ausgerechnet wurde. Es spricht also einiges dafür, dass man im Additionsalgorithmus die abgearbeiteten oberen hinteren Ziffern wegstreicht (für das Überprüfen der Rechnung ist das aber keine gute Idee). Im nächsten Rechenschritt rechnet man

$$2 + 7 + 1 = 10$$

und man gelangt zu

$$329$$

$$475$$

$$\underline{1}$$

$$04.$$

Die Invarianz zeigt sich in der Summe

$$3 \cdot 100 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 4.$$

Im dritten Schritt rechnet man

$$3 + 4 + 1 = 8$$

und man gelangt zu

$$329$$

$$\underline{475}$$

$$804.$$

Die oberen Summanden kann man jetzt vollständig vergessen, das Endergebnis steht unten.

Die Korrektheit des schriftlichen Addierens überträgt sich auf die Addition mehrerer Summanden in der Dezimaldarstellung. Man summiert wieder ziffernweise und schreibt die letzte Ziffer der Summe an der entsprechenden Stelle hin, ebenso den Übertrag. Dieser kann jetzt allerdings (ab zwölf Summanden) sogar größergleich 100 sein, in diesem Fall muss man die Zehnerziffer wie zuvor um eins nach links schreiben und die Hunderterstelle um zwei nach links. Grundsätzlich kann man auch eine Summe mit beliebig vielen Summanden dadurch errechnen, dass man je zwei Summanden zusammenaddiert und somit die Anzahl der Summanden sukzessive verringert, doch ist das viel komplizierter.

## 15. ARBEITSBLATT

### 15.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 15.1.\***

Führe im Dezimalsystem die Addition

$$794385 + 503819$$

schriftlich durch.

**15.2. Übungsaufgaben.**

**Aufgabe 15.2.** Begründe, dass der Nachfolger der Dezimalzahl  $999 \dots 999$  (mit  $k$  Neunen) gleich  $1000 \dots 000$  (mit  $k + 1$  Ziffern, also  $k$  Nullen) ist.

**Aufgabe 15.3.** Bestimme, welche der beiden Zahlen im Zehnersystem größer ist.

$$m = 52866396034807681104629504792853235$$

oder

$$n = 52876373480104695047954506002853673.$$

**Aufgabe 15.4.** Bestimme, welche der beiden Zahlen im Zehnersystem größer ist.

$$m = 528663960348076811044629504792853235$$

oder

$$n = 52876373480104695047954506002853673.$$

**Aufgabe 15.5.** Ein Pokalwettbewerb werde mit  $2^{n+1}$  Mannschaften im K.-o.-System ausgetragen. Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

durch eine inhaltliche Überlegung (Wie viele Spiele finden statt?).

**Aufgabe 15.6.** Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

mit Hilfe des Zweiersystems.

**Aufgabe 15.7.\***

Führe im Dreiersystem die Addition

$$201021 + 112002$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 15.8.** Führe im Sechzehnersystem die Addition

$$5C4A7 + D330E$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 15.9.** Führe die Addition

$$9 + 19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 + 89 + 99 + 109 + 119$$

schriftlich durch. Welche „Besonderheit“ tritt abei auf?

**Aufgabe 15.10.** Gabi Hochster sitzt in der Schule neben Heinz Ngolo. Sie üben schriftliches Addieren und rechnen  $725 + 638$ . Gabi ist fertig und Heinz hat gerade die hinterste Ziffer zusammengerechnet und den Übertrag notiert. Da kritzelt Gabi auf Heinzens Heft rum und radiert die Ziffern 5 und 8 weg. Gabi sagt: „Die brauchst du nicht mehr, konzentrier dich auf die anderen Ziffern, dann geht es schneller und wir können endlich weiter Schiffe versenken spielen“. Darauf sagt Heinz: „Lass mich in Ruhe, kleine Klugscheißerin, außerdem brauch ich die Ziffern doch, nämlich zur Probe“. Darauf Gabi: „Wer beim Rechnen eine Probe braucht, sollte zurück in den Kindergarten“.

Wir beurteilen Sie die Lage mathematisch und didaktisch?

**Aufgabe 15.11.** Ist für das schriftliche Addieren das Kommutativgesetz klar, ist es klar, dass 0 das neutrale Element ist, ist es klar, dass das Assoziativgesetz gilt?

**Aufgabe 15.12.** Es stehen verschiedene Zahlen an der Tafel. Der einzige erlaubte Rechenschritt ist, zwei beliebige Zahlen wegzuwischen und durch ihre Summe zu ersetzen. Nach hinreichend vielen Durchgängen steht nur noch eine Zahl da. Ist das Ergebnis unabhängig vom Ablauf? Man erläutere die Situation mit dem Begriff *Invarianzprinzip*.

**Aufgabe 15.13.** Gibt es für die folgenden Zahlensysteme ein für alle Zahlen korrektes Verfahren zum schriftlichen Addieren, welches wie das schriftliche Addieren im Zehnersystem nur auf der getrennten Addition von Ziffern gleicher Stelligkeit und dem Übertrag beruht? Welche Probleme treten auf?

- (1) Das Strichfolgensystem
- (2) Das Eurozahlensystem
- (3) Das römische Zahlensystem

**15.3. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 15.14.** (4 Punkte)

Sei  $0 \leq k \leq 2$ . Zeige: Eine positive natürliche Zahl ist genau dann  $< 10^k$ , wenn sie im Eurozahlensystem aus maximal  $3k$  Ziffern besteht.

**Aufgabe 15.15.** (2 Punkte)

Führe im Dreiersystem die Addition

$$221002 + 22121$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 15.16.** (3 Punkte)

Führe im Sechzehnersystem die Addition

$$A0BEE7 + 5C5DA3$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 15.17.** (3 Punkte)

Zeige mit dem allgemeinen Distributivgesetz die Beziehung

$$a^{n+1} - 1 = (a - 1) \left( \sum_{k=0}^n a^k \right)$$

für natürliche Zahlen  $a \in \mathbb{N}_+$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 15.18.** (1 Punkt)

Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

mit Hilfe von Aufgabe 15.17.

## 16. VORLESUNG - SCHRIFTLICHES MULTIPLIZIEREN

## 16.1. Schriftliches Multiplizieren.

Die Grundidee für das schriftliche Multiplizieren liegt im allgemeinen Distributivgesetz. Für zwei natürliche Zahlen der Form

$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k$  und  $n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_\ell 10^\ell$  ist

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k) \cdot (b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_\ell 10^\ell) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq \ell} a_i b_j 10^i \cdot 10^j \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq \ell} a_i b_j 10^{i+j} \\ &= \sum_{s=0}^{k+\ell} \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{s-i} \right) 10^s. \end{aligned}$$

Hierbei ist im Allgemeinen der Vorfaktor  $\sum_{i=0}^k a_i b_{s-i}$  nicht kleiner als 10, aus diesem Ausdruck ist also nicht unmittelbar die Ziffernentwicklung des Produktes ablesbar. In einer solchen Situation ist Bemerkung 14.4 anwendbar. Dies ist aber nicht das Verfahren zum schriftlichen Multiplizieren.

**Verfahren 16.1.** Beim *schriftlichen Multiplizieren*  $m \cdot n$  zweier natürlicher Zahlen, die im Dezimalsystem als

$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k$  und  $n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_\ell 10^\ell$  gegeben sind, geht man folgendermaßen vor.

- (1) Man berechnet für jedes  $j = 0, 1, \dots, \ell$  einzeln die Dezimalziffern  $c_i$  des Teilproduktes  $m \cdot b_j$  und die Überträge  $d_{i+1}$  (mit dem Startwert  $d_0 = 0$ ) sukzessive über die Gleichungen

$$a_i b_j + d_i = d_{i+1} \cdot 10 + c_i$$

mit

$$0 \leq c_i \leq 9.$$

- (2) Die zu den  $j$  (bzw.  $b_j$ ) gehörenden Ziffernfolgen schreibt man untereinander, wobei jeweils  $c_0$  unterhalb von  $b_j$  steht.
- (3) Man summiert die verschiedenen verschobenen Teilprodukte im Sinne des schriftlichen Addierens.

Die Dezimaldarstellung des Produktes  $m \cdot n$  ist das Ergebnis dieser Addition.

Das Problem, dass bei der distributiven Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen im Dezimalsystem die Vorfaktoren zu groß sind, tritt schon dann auf, wenn die zweite Zahl  $n = b_0$  einstellig ist (sogar wenn beide Zahlen einstellig sind; dies wird durch das kleine Einmaleins erledigt). Diesen Fall betrachten wir zuerst.

**Lemma 16.2.** *Das schriftliche Multiplizieren mit einem einstelligen zweiten Faktor im Zehnersystem ist korrekt.*

*Beweis.* Die linke Faktor sei

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k$$

und der rechte Faktor sei  $b_0$ , wir haben also die schriftliche Multiplikation der Form

$$a_k \dots a_2 a_1 a_0 \cdot b_0$$

im Sinne von Verfahren 16.1 durchzuführen. Das Ergebnis ist die Zahl  $c_{k+1} c_k \dots c_2 c_1 c_0$ . Wir müssen zeigen, dass dies das wahre Produkt ist. Dies zeigen wir durch das folgende Invarianzprinzip des Multiplikationsalgorithmus, dass nämlich nach dem  $i$ -ten Schritt ( $i = -1, 0, 1, \dots$ ) der Ausdruck

$$P_i = (a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1}) \cdot b_0 + d_{i+1} 10^{i+1} + c_i 10^i + \dots + c_1 10 + c_0$$

konstant ist. Wegen

$$m \cdot b_0 = P_{-1}$$

und da für

$$i > k$$

das Produkt vollständig abgebaut ist, folgt daraus, dass die  $c_i$  die Ziffern des Produktes sind. Die Konstanz ergibt sich unter Verwendung von

$$a_i b_0 + d_i = 10 \cdot d_{i+1} + c_i$$

aus (das beschreibt den  $i$ -ten Rechenschritt)

$$\begin{aligned} P_{i-1} &= (a_k 10^k + \dots + a_i 10^i) \cdot b_0 + d_i 10^i + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= (a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1}) \cdot b_0 + a_i b_0 10^i + d_i 10^i + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= (a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1}) \cdot b_0 + (a_i b_0 + d_i) 10^i + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= (a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1}) \cdot b_0 + (d_{i+1} 10 + c_i) 10^i + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= (a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1}) \cdot b_0 + d_{i+1} 10^{i+1} + c_i 10^i + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= P_i. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 16.3.** Der Übertrag bei der Multiplikation mit einer einstelligen Zahl  $b$  wirkt sich im Allgemeinen auf jede Ziffer des Ergebnisses aus, d.h. Überträge setzen sich fort. Daher muss man die einzelnen Ziffern von hinten nach vorne mit  $b$  multiplizieren. Beispielsweise ist bei  $b = 3$  und  $m = 33333333$  bzw.  $n = 33333334$  einerseits

$$33333333 \cdot 3 = 99999999$$

und andererseits

$$33333334 \cdot 3 = 100000002.$$

Im Gegensatz zur Multiplikation mit der 3 ist die Multiplikation mit den beiden echten Teilern der 10, also mit 2 und 5, besonders einfach, da hier die Überträge nicht fortgesetzt werden können. Um die  $i$ -te Ziffer des Produktes einer Zahl  $z$  mit der 2 (oder der 5) auszurechnen, muss man nur die  $i$ -te und die  $(i - 1)$ -te Ziffer der Zahl kennen.

**Bemerkung 16.4.** Bei der Multiplikation mit  $b = 2$  und mit  $b = 5$  vereinfacht sich das in Verfahren 16.1 beschriebene Verfahren zur Multiplikation einer Zahl

$$m = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$$

mit einer einstelligen Zahl  $b$ . Gemäß diesem Verfahren sind die Berechnungen

$$a_i \cdot b + d_i = d_{i+1} \cdot 10 + c_i$$

mit

$$0 \leq c_i \leq 9$$

durchzuführen, wobei dadurch  $d_i$  rekursiv mit dem Startwert  $d_0 = 0$  festgelegt sind und wobei die  $c_i$  die Ziffern des Ergebnisses beschreiben. Wie behaupten, dass man in den beiden Fällen stattdessen nur

$$a_i \cdot b = d_{i+1} \cdot 10 + r_i$$

berechnen muss und die Ergebnisziiffern

$$c_i = d_i + r_i$$

erhält. Insbesondere hängt  $c_i$  nur von  $a_i$  und  $a_{i-1}$  ab.

Bei

$$b = 2$$

liegt das daran, dass die  $d_i$  gleich 0 oder 1 sind. Dies beweist man durch einfach durch Induktion unter Verwendung von

$$a_1 \cdot 2 + d_i \leq 18 + 1 = 19 < 20,$$

so dass der ganze Anteil  $d_{i+1}$  wieder maximal gleich 1 ist. Somit stimmen die ganzzahligen Anteile bei der Division mit Rest von  $a_i \cdot 2 + d_i$  bzw.  $a_i \cdot 2$  durch 10 überein. Die Beziehung  $c_i = r_i + d_i$  folgt direkt.

Bei

$$b = 5$$

liegt das daran, dass die  $d_i$  zwischen 0 und 4 (einschließlich) liegen. Dies beweist man durch einfach durch Induktion unter Verwendung von

$$a_1 \cdot 5 + d_i \leq 45 + 4 = 49 < 50,$$

so dass der ganze Anteil  $d_{i+1}$  wieder maximal gleich 4 ist. Somit stimmen die ganzzahligen Anteile bei der Division mit Rest von  $a_i \cdot 5 + d_i$  bzw.  $a_i \cdot 5$  durch 10 überein. Die Beziehung  $c_i = r_i + d_i$  folgt wieder direkt.

Als nächstes Hilfsmittel betrachten wir die extreme Situation, wo der rechte Faktor eine Zehnerpotenz ist. Das Dezimalsystem verhält sich bei einer solchen Multiplikation besonders einfach.

**Lemma 16.5.** *Die Dezimaldarstellung eines Produktes aus einer Dezimalzahl*

$$m = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

und einer Zehnerpotenz  $10^\ell$  erhält man, indem man an die Dezimalzahl  $\ell$  Nullen anhängt.

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} m \cdot 10^\ell &= (a_k 10^k + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) \cdot 10^\ell \\ &= a_k 10^{k+\ell} + \dots + a_2 10^{2+\ell} + a_1 10^{1+\ell} + a_0 10^\ell \\ &= a_k 10^{k+\ell} + \dots + a_2 10^{2+\ell} + a_1 10^{1+\ell} + a_0 10^\ell + 0 \cdot 10^{\ell-1} + \dots + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0, \end{aligned}$$

, woraus unmittelbar die Dezimaldarstellung des Produktes ablesbar ist.  $\square$

**Satz 16.6.** *Das schriftliche Multiplizieren im Zehnersystem ist korrekt.*

*Beweis.* Die beiden Zahlen seien

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k \text{ und } n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_\ell 10^\ell.$$

Beim schriftlichen Multiplizieren berechnet man unabhängig voneinander

$$a_k \dots a_2 a_1 a_0 \cdot b_j$$

für  $j = 0, 1, \dots, \ell$  und notiert das Ergebnis so, dass die Einerziffer unterhalb von  $b_j$  steht. So entstehen  $\ell + 1$  Zahlen, die versetzt übereinander stehen. Diese Zahlen werden nach hinten mit Nullen aufgefüllt (wobei man dies nur gedanklich machen muss). Die Summe dieser Zahlen im Sinne des schriftlichen Addierens ist das Endergebnis

$$\begin{aligned} m \cdot n &= m \cdot (b_\ell 10^\ell + b_{\ell-1} 10^{\ell-1} + \dots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0) \\ &= m \cdot b_\ell 10^\ell + m b_{\ell-1} \cdot 10^{\ell-1} + \dots + m \cdot b_2 10^2 + m \cdot b_1 10 + m \cdot b_0. \end{aligned}$$

Nach Lemma 16.2 werden die  $m \cdot b_j$  im schriftlichen Multiplizieren korrekt ausgerechnet. Dadurch, dass die Einzelergebnisse unterhalb von  $b_j$  stehen und nach hinten mit Nullen aufgefüllt werden, stehen im Algorithmus wegen Lemma 16.5 die Zahlen  $m \cdot b_j 10^j$  korrekt übereinander, so dass das schriftliche Addieren nach Satz 15.5 das korrekte Ergebnis liefert.  $\square$

## 16.2. Schriftliches Subtrahieren.

**Verfahren 16.7.** Beim schriftlichen Subtrahieren  $m - n$  zweier natürlicher Zahlen mit

$$m \geq n,$$

die im Dezimalsystem als

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k \text{ und } n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_k 10^k$$

gegeben sind, geht man folgendermaßen vor. Man berechnet die Dezimalziffern  $c_i$  des Ergebnisses und die Überträge  $d_{i+1}$  (mit dem Startwert  $d_0 = 0$ ) sukzessive durch

$$c_i = \begin{cases} a_i - (b_i + d_i), & \text{falls } a_i \geq b_i + d_i, \\ a_i + 10 - (b_i + d_i), & \text{falls } a_i < b_i + d_i, \end{cases}$$

und

$$d_{i+1} = \begin{cases} 0, & \text{falls } a_i \geq b_i + d_i, \\ 1, & \text{falls } a_i < b_i + d_i. \end{cases}$$

Die Dezimaldarstellung der Differenz  $m - n$  ist  $c_k \dots c_2 c_1 c_0$ .

**Satz 16.8.** *Das schriftliche Subtrahieren von natürlichen Zahlen ist korrekt.*

*Beweis.* Es sei

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k \text{ und } n = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_k 10^k$$

und

$$m \geq n.$$

Wir behaupten, dass für jedes  $i = -1, 0, 1, \dots$  der Ausdruck

$$S_i = a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1} - d_{i+1} 10^{i+1} + b_i 10^i + \dots + b_1 10 + b_0 + c_i 10^i + \dots + c_1 10 + c_0$$

konstant gleich  $m$  ist. Für

$$i = -1$$

fehlen die  $b$ -, die  $c$ - und die  $d$ -Ausdrücke, so dass dies richtig ist. Wir betrachten den Übergang von  $S_{i-1}$  nach  $S_i$ , was dem  $i$ -ten Rechenschritt entspricht.

Im Fall

$$a_i \geq b_i + d_i$$

ist

$$\begin{aligned} S_{i-1} &= a_k 10^k + \dots + a_i 10^i - d_i 10^i + b_{i-1} 10^{i-1} + \dots + b_1 10 + b_0 + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1} + (b_i + c_i) 10^i + b_{i-1} 10^{i-1} + \dots \\ &\quad + b_1 10 + b_0 + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1} - d_{i+1} 10^{i+1} + b_i 10^i + \dots + b_1 10 + b_0 + c_i 10^i + \dots + c_1 10 + c_0 = S_i \end{aligned}$$

und im Fall

$$a_i < b_i + d_i$$

ist

$$\begin{aligned} S_{i-1} &= a_k 10^k + \dots + a_i 10^i - d_i 10^i + b_{i-1} 10^{i-1} + \dots + b_1 10 + b_0 + c_{i-1} 10^{i-1} + \dots + c_1 10 + c_0 \\ &= a_k 10^k + \dots + a_{i+1} 10^{i+1} + (b_i + c_i + d_i - 10) 10^i - d_i 10^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b_{i-1}10^{i-1} + \dots + b_110 + b_0 + c_{i-1}10^{i-1} + \dots + c_110 + c_0 \\
= & a_k10^k + \dots + a_{i+1}10^{i+1} - 10 \cdot 10^i + b_i10^i + b_{i-1}10^{i-1} + \dots \\
& +b_110 + b_0 + c_i10^i + c_{i-1}10^{i-1} + \dots + c_110 + c_0 \\
= & a_k10^k + \dots + a_{i+1}10^{i+1} - d_{i+1} \cdot 10^{i+1} + b_i10^i + b_{i-1}10^{i-1} + \dots \\
& +b_110 + b_0 + c_i10^i + c_{i-1}10^{i-1} + \dots + c_110 + c_0 \\
= & S_i.
\end{aligned}$$

Für  $i$  hinreichend groß sind die  $a$ - und die  $d$ -Ausdrücke vollständig abgebaut und es bleiben die vollständigen  $b$ - und  $c$ -Ausdrücke übrig. Damit ist gezeigt, dass

$$m = b_k10^k + \dots + b_110 + b_0 + c_k10^k + \dots + c_110 + c_0 = n + c_k10^k + \dots + c_110 + c_0$$

ist und somit ist  $c_k10^k + \dots + c_110 + c_0$  gleich der Differenz  $m - n$ .  $\square$

## 16. ARBEITSBLATT

### 16.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 16.1.** Führe im Zehnersystem die Multiplikation

$$7863 \cdot 4107$$

schriftlich durch.

### 16.2. Übungsaufgaben.



Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

**Aufgabe 16.2.** Formuliere und beweise (bekannte) Teilbarkeitskriterien für Zahlen im Dezimalsystem für die Teiler  $k = 2, 3, 5, 9, 11$ .

**Aufgabe 16.3.** Betrachte im 15er System mit den Ziffern  $0, 1, \dots, 8, 9, A, B, C, D, E$  die Zahl

$$EA09B4CA.$$

Ist diese Zahl durch 7 teilbar?

**Aufgabe 16.4.** Es sei  $p \neq 2, 5$  eine Primzahl. Zeige, dass es eine natürliche Zahl der Form (im Dezimalsystem)

$$111 \dots 111$$

gibt, die ein Vielfaches von  $p$  ist.

**Aufgabe 16.5.** Führe im Vierersystem die Multiplikation

$$302 \cdot 201$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 16.6.\***

Zeige, dass im kleinen Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) zur Basis  $n \geq 2$  nur ein- und zweistellige Zahlen auftreten.

**Aufgabe 16.7.\***

- (1) Berechne  $3^2$  im Vierersystem,  $4^2$  im Fünfersystem und  $9^2$  im Zehnersystem.
- (2) Zeige, dass im kleinen Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) zur Basis  $n \geq 3$  rechts unten die Zahl mit den Ziffern  $n - 2$  und 1 steht.

**Aufgabe 16.8.** Zeige, dass beim schriftlichen Multiplizieren im Zehnersystem der Übertrag maximal gleich 8 ist.

**Aufgabe 16.9.** Jemand macht gegen den Beweis zu Lemma 16.5 den Einwand, dass dort eine Situation entsteht, wo sich die Koeffizienten  $a_i$  nicht auf  $10^i$ , sondern auf  $10^{i+\ell}$  beziehen, was verwirrend sei. Nehme dazu Stellung.

**Aufgabe 16.10.** Gabi Hochster hat sich im Mathematikunterricht (erste Klasse), der von Frau Doris Maier-Sengupta (mit den Fächern Deutsch und buddhistische Philosophie) unterrichtet wird, geweigert, bei der Überprüfung des Kleinen Einmaleins  $7 \cdot 10$  auszurechnen, mit der Begründung, dass das kleine Einmaleins dazu da sei, einstellige Zahlen miteinander zu multiplizieren, es für größere Zahlen einen anderen Algorithmus gebe und dass die Einbeziehung der Zehnerreihe in das kleine Einmaleins diesen Aspekt völlig verdunkle. Als Frau Maier-Sengupta diesen Einwand nicht verstand und auf die Aufgabe bestand, wurde Gabi zornig und sagte „Sie haben ja gar keine Ahnung von Mathematik, gehen Sie doch zu Ihrer buddhistischen Philosophie und schicken Sie eine echte Mathelehrerin hier her“. Daraufhin trug Frau Maier-Sengupta einen Vermerk über das beleidigende Verhalten von Gabi in das Klassenbuch ein. Da es der dritte Vermerk war, kommt es zu einem Elterngespräch, zu dem neben Frau Maier-Sengupta, den Eltern, Melissa und Melvin Hochster, der Schulleitung auch Sie als Fachleiter/In Mathematik teilnehmen sollen. Was ist Ihre Position?

**Aufgabe 16.11.** Führe im Zehnersystem die Subtraktion

$$710534 - 691228$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 16.12.** Führe im Zweiersystem die Subtraktion

$$11010 - 10111$$

schriftlich durch.

**Aufgabe 16.13.** Beweise die Korrektheit des schriftlichen Subtrahierens durch den Nachweis, dass beim schriftlichen Subtrahieren  $m - n$  und  $(m - 1) - (n - 1)$  das gleiche Ergebnis liefern.

**Aufgabe 16.14.** Gibt es ein Verfahren zum schriftlichen Potenzieren, das die Dezimalentwicklung von  $n^k$  berechnet, wenn die natürlichen Zahlen  $n, k$  in ihrer Dezimalentwicklung gegeben sind?

### 16.3. Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie.

**Aufgabe 16.15.** Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, \dots$$

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschul Kinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Eine der Aufgaben zum Abgeben verwendet den folgenden Begriff.

Es sei  $M$  eine Menge und

$$f: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element  $x \in M$  mit  $f(x) = x$  heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

#### 16.4. Aufgaben zum Abgeben.

##### **Aufgabe 16.16.** (3 Punkte)

Führe im Sechssystem die Multiplikation

$$453 \cdot 525$$

schriftlich durch.

##### **Aufgabe 16.17.** (2 Punkte)

Führe im Zweiersystem die Subtraktion

$$10011 - 1101$$

schriftlich durch.

##### **Aufgabe 16.18.** (4 Punkte)

Es sei  $x$  eine dreistellige natürliche Zahl im Zehnersystem und  $y$  die von hinten gelesene Zahl. Zeige, dass die positive Differenz  $x - y$  stets ein Vielfaches von 9 und von 11 ist.

##### **Aufgabe 16.19.** (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 16.15 entspricht.

- (1) Ist  $f$  wachsend?
- (2) Ist  $f$  surjektiv?
- (3) Ist  $f$  injektiv?
- (4) Besitzt  $f$  einen Fixpunkt?

## 17. VORLESUNG - TERME UND GLEICHUNGEN

If you don't know how to fix  
it, please stop breaking it

---

Severn Suzuki

### 17.1. Terme und Gleichungen.

Unter einem (arithmetischen) „Term“ versteht man einen „zahlähnlichen“ Ausdruck, der sich aus „Zahlen“ und „Variablen“ mit Hilfe der Verknüpfungssymbole  $+$  und  $\cdot$  (eventuell mit  $-$  und  $:$  oder daraus abgeleiteten Operationen wie Potenzen), mit weiteren Funktionssymbolen (wie die Fakultät, Wurzel) und mit Klammern „korrekt“ bilden lässt. Eine Variable ist typischerweise ein Buchstabe  $x, y, z, a, b, c$ , in den man eine echte Zahl (zumeist aus einem fixierten Zahlenbereich) oder auch einen anderen Term einsetzen kann.<sup>41</sup> Mit zahlenähnlich ist gemeint, dass wirklich eine Zahl entsteht, wenn man alle Variablen durch Zahlen ersetzt. Terme sind auch die Ausdrücke, die auf einer Seite einer Gleichung (oder Ungleichung) stehen können. Beispielsweise sind

$$3 \cdot (4 + 5), x, 2x + 7, \frac{3}{7}, 4x^3 - y, (a + b)^2, \\ a^2 + 2ab + b^2, 0 \cdot 1, n!, \binom{n}{k}, \pi, e^u, x^y, 5^x, \sqrt{x}, \sum_{i=1}^n a_i$$

Terme. Dagegen sind

$$3 \cdot (4 + 5)), 2x + 7 = 0, \sqrt{\quad}$$

keine Terme.

Wichtig ist, dass man Terme nur dann als gleich ansieht, wenn es sich um dieselbe Zeichenreihe handelt. Das „Ausrechnen“ oder „Vereinfachen“ von Termen verändert den Term, aber nicht die dadurch gegebene Zahl. Beispielsweise sind  $3 + 5$  und  $8$  oder  $(a + b)^2$  und  $a^2 + 2ab + b^2$  verschiedene Terme. Gleichheit zwischen diesen beiden letzten Ausdrücken gilt nur bei einer bestimmten Interpretation, wenn man  $a$  und  $b$  als natürliche Zahlen oder als Elemente eines kommutativen Halbringes interpretiert (erste binomische Formel).

Eine wichtige Funktion von Termen ist ihr Auftreten in Gleichungen. Gleichungen und Terme treten in der Mathematik in unterschiedlicher Bedeutung auf, die sich häufig vom Kontext her erkennen lassen.

#### 1) Identitäten von Elementen

Das sind Gleichungen der Form  $2 + 4 = 6$  oder  $3 \cdot 7 = 21$  oder  $4! = 24$ , die besagen, dass zwei irgendwie gegebene Elemente einer Menge gleich sind.  $2 + 4$  und  $6$  sind unterschiedliche Terme, haben aber denselben Zahlwert. In solchen Gleichungen kommen keine Variablen vor. Häufig werden solche Gleichungen verwendet, um etwas auszurechnen, also einen komplizierten Ausdruck in

<sup>41</sup> Laufvariablen kann man nicht durch andere Terme ersetzen, nur durch eine andere Laufvariable umbenennen. Eine Laufvariable kommt beispielsweise im Term  $\sum_{i=1}^n i$  vor, hier ist  $i$  eine Laufvariable und  $n$  eine echte Variable. Andererseits bezeichnet der Buchstabe  $\pi$  die Kreiszahl und ist keine Variable.

eine einfache Standardform zu bringen. Dazu gehören die Rechnungen in  $\mathbb{N}$ , etwa im Dezimalsystem.

## 2) Allgemeine Termidentitäten (Formeln, Rechengesetze)

Diese drücken eine allgemeine Gleichung zwischen Termen aus, in denen Variablen vorkommen, und die Gleichheit bedeutet, dass für jede sinnvolle Ersetzung der Variablen durch Zahlen (die gewisse Bedingungen erfüllen) Gleichheit gilt. Beispiele dazu sind

$$a(b + c) = ab + ac$$

oder

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oder

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sie drücken eine Gesetzmäßigkeit aus, die unter bestimmten Bedingungen gilt, beispielsweise wenn  $a, b$  Elemente eines kommutativen Halbringes sind oder wenn  $a, b$  Kathetenlängen und  $c$  die Hypotenusenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Charakteristisch für solche Gleichungen ist, dass in ihnen Variablen vorkommen und dass, wenn man für die Variablen simultan (also an jeder Stelle, wo die Variable steht) Elemente, die die Bedingung erfüllen, einsetzt, eine wahre Elementgleichung entsteht. Eine solche Identität repräsentiert also eine Vielzahl an einzelnen Elementgleichungen. Aus dem Distributivgesetz entsteht beispielsweise durch Einsetzen die spezielle Identität  $3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$ .

## 3) Definitionsgleichungen

Das sind Gleichungen, durch die eine abkürzende Schreibweise für einen komplexeren Ausdruck eingeführt wird. Beispiele sind

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, P = 4x^2 + 7x - 5.$$

Hierbei schreibt man häufig  $:=$  (gelesen: ist definitionsgemäß gleich) statt  $=$ , wobei der Doppelpunkt auf der Seite des einzuführenden Ausdrucks steht.

## 4) Gleichungen als Bedingung

Damit sind Gleichungen wie

$$x + 3 = 5, 4x = 9, 2x + 7 = 0, 5x^2 - 3x + 4 = 0, x = y, y = f(x), x^2 + y^2 = 1$$

gemeint. In diesen kommen (in aller Regel) Variablen vor, es wird aber nicht eine allgemeingültige Formel zum Ausdruck gebracht, sondern es wird eine Bedingung an die auftretenden Variablen formuliert. D.h. es werden die Elemente gesucht, die die Gleichungen erfüllen, die man also für die Variablen einsetzen kann, damit eine wahre Elementidentität entsteht. Gleichungen in diesem Sinne definieren die Aufgabenstellung, nach Lösungen zu suchen. Eine Lösung ist ein Element  $a$  aus der gegebenen Grundmenge  $M$  (bzw. ein Tupel

wie  $(a, b) \in M \times M$ , falls es mehrere Variablen gibt), das die Eigenschaft besitzt, dass wenn man  $x$  durch  $a$  ersetzt, eine wahre Elementidentität entsteht. Die Lösungsmenge besteht aus allen Lösungen, sie kann leer sein, aus einem Element oder aus vielen Elementen bestehen. Statt einer einzigen Gleichung kann auch ein (beispielsweise lineares) Gleichungssystem vorliegen.

Manche Gleichungen kann man in mehrfacher Weise auffassen. So kann man die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

als Gesetzmäßigkeit in einem rechtwinkligen Dreieck auffassen (bei richtiger Interpretation der einzelnen Variablen) oder als Aufgabenstellung, alle Tripel  $(a, b, c)$  zu bestimmen, die diese Gleichung erfüllen. Eine funktionale Gleichung  $y = f(x)$  kann man als eine abkürzende Schreibweise für den funktionalen Ausdruck  $f(x)$  ansehen oder als eine Bedingung für Punkte  $(x, y)$  in der Ebene betrachten (die erfüllenden Punktepaare bilden dann den Graphen der Funktion  $f$ ).

## 17.2. Gleichungen in einer Variablen.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit Gleichungen von dem zuletzt beschriebenen Typ, in dem nur eine Variable vorkommt, und die von einer einfachen Bauart sind.

Unter einer Gleichung in einer Variablen (oder Unbekannten oder Unbestimmten)  $x$  versteht man einen Ausdruck der Form

$$f(x) = g(x),$$

wobei sowohl  $f(x)$  als auch  $g(x)$  mathematische Ausdrücke (Terme) bezeichnen, in denen  $x$  in einer mehr oder weniger komplexen Form vorkommt (als Extremfall erlauben wir die Situation, wo  $f(x)$  nicht explizit von  $x$  abhängt). In einer solchen Situation besteht die Aufgabe darin, die Lösungen oder die Lösung für  $x$  zu finden, also diejenigen Zahlen (aus einem vorgegebenen Zahlbereich) zu finden, die die Gleichung erfüllen, die also die Eigenschaft besitzen, dass, wenn man links und rechts die Unbestimmte durch die Zahl ersetzt, in der Tat links und rechts das gleiche steht, oder aber festzustellen, dass die Gleichung keine Lösung hat. Typische Beispiele sind  $3 + x = 9$ ,  $4x = 7$ ,  $3x = 7x^2 - 5$ ,  $x! = 25$ . Wenn man von Gleichungen in einer Variablen (von einer bestimmten Bauart) allgemein spricht, so ist es oft sinnvoll, für die umgebenden Daten, die die Gleichung konstituieren, selbst wieder Buchstaben zu verwenden. Diese sind zwar auch variabel, sie sind aber keine Variablen (der Gleichung), sondern *Parameter*, die man sich als konkret fixiert denken sollte. Eine solche Gleichung heißt auch eine *Gleichungsform*, erst durch die wirkliche Fixierung der Parameter als Zahlen entsteht eine echte Gleichung. Beispielsweise ist eine additive Gleichung eine Gleichung der Form

$$x + a = b$$

und eine lineare Gleichung ist eine Gleichung der Form  $cx = d$ . Hier sind  $a, b$  (bzw.  $c, d$ ) Parameter, die die Gleichung festlegen, wofür dann die Lösung  $x$  gesucht wird.

Wir sagen, dass zwei Gleichungen (lösungs-)äquivalent sind, wenn sie sich auf die gleiche Variablenmenge beziehen und ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

**Bemerkung 17.1.** Wenn eine Gleichung der Form

$$x = c$$

vorliegt, wobei  $c$  ein Term ist, in dem die Variable  $x$  nicht vorkommt, so sagt man, dass  $x$  in der Gleichung *isoliert* (oder *aufgelöst*<sup>42</sup>) vorliegt. Hierbei kann  $c$  eventuell ein komplizierter Ausdruck sein, und so besteht die Aufgabe im Allgemeinen darin, den Ausdruck  $c$  zu vereinfachen. Wenn beispielsweise

$$x = 23 - 15 + 7 \cdot 11$$

vorliegt, so führt dies auf die vereinfachte und nicht weiter zu vereinfachende Gleichung

$$x = 85,$$

die man dann als Lösung betrachtet. Grundsätzlich versteht man unter der Lösung (im Sinne von die Lösung finden) einer Gleichung in einer Variablen die Isolierung der Variablen auf einer Seite und die Vereinfachung der anderen Seite.

**Bemerkung 17.2.** Eine Gleichung der Form

$$f(x) = g(x)$$

mit Ausdrücken  $f$  und  $g$ , in denen die Variable  $x$  vorkommt, ist lösungsäquivalent zur Gleichung

$$f(x) - g(x) = 0.$$

Für diese Umformung braucht man die negativen Zahlen. Grundsätzlich, und das heißt bei theoretischen Überlegungen, kann man sich auf Gleichungen der Form

$$h(x) = 0$$

mit einem Ausdruck  $h$  in der Variablen  $x$  beschränken. Allerdings muss diese Umstellung nicht unbedingt eine Vereinfachung sein.

**Bemerkung 17.3.** Wir arbeiten über den natürlichen Zahlen und betrachten die Gleichung

$$3 + x = 8$$

mit der Unbestimmten  $x$ . Gesucht ist also nach derjenigen Zahl, die zu 3 addiert die Zahl 8 ergibt. Diese Gleichung besitzt die einzige Lösung

$$x = 5.$$

---

<sup>42</sup>Dieser Sprachgebrauch ist nicht unproblematisch, da zur Lösung das Vereinfachen gehört. Allerdings ist dieser Vereinfachungsschritt häufig unproblematisch.

Dies sind zwei Aussagen! Einerseits wird behauptet, dass 5 eine Lösung ist und andererseits, dass es außer der 5 keine weitere Lösung gibt. Das Erste kann man einfach durch Einsetzen und Nachrechnen überprüfen, es ist ja in der Tat

$$3 + 5 = 8.$$

Dass es keine weitere Lösung gibt, ergibt sich einfach aus der Abziehregel. Wenn  $y$  eine weitere Lösung der Gleichung ist,<sup>43</sup> so liegt die Gleichungskette

$$3 + 5 = 8 = 3 + y$$

vor, die Abziehregel sichert dann

$$5 = y.$$

Dieses Argument kann man auch dann durchführen, wenn man die eine Lösung 5 noch gar nicht kennt: Aus der Gleichung<sup>44</sup>

$$3 + x = 8 = 3 + y$$

folgt eben

$$x = y.$$

Betrachten wir allgemein eine Gleichung (eine *additive Gleichung* oder *Differenzgleichung*) der Form

$$a + x = b$$

mit fixierten natürlichen Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$ . Zwar sind hier  $a, b$  ebenso wie  $x$  Buchstaben, die für natürliche Zahlen stehen, doch ist die Funktion jeweils eine andere. Die Zahlen  $a, b$  stellen jeweils fixierte natürliche Zahlen dar, die somit die Gleichung (als Parameter) festlegen, für die dann  $x$  die zu bestimmende Unbekannte ist. Wenn also  $a + x = b$  vorliegt, so denke man nicht an die Menge aller Dreiertupel  $(a, b, x) \in \mathbb{N}^3$  derart, dass die Gleichheit vorliegt (was ebenfalls eine sinnvolle mathematische Aufgabe ist), sondern an eine Gleichung in  $x$ , die durch die Zahlen  $a, b$  als Parameter bestimmt ist.

Das Lösungsverhalten über  $\mathbb{N}$  einer Gleichung der Form

$$a + x = b$$

hängt vom Größenverhältnis zwischen  $a$  und  $b$  ab. Bei  $a > b$  gibt es keine Lösung, da wegen

$$a + x \geq a > b$$

die linke Seite stets (für jedes  $x \in \mathbb{N}$ ) größer als die rechte Seite ist.

Bei  $a \leq b$  hingegen gibt es wie im zuerst genannten Beispiel genau eine Lösung. Die Voraussetzung

$$a \leq b$$

<sup>43</sup>Hier ist  $y$  also ein bestimmtes Element der Grundmenge, das die Gleichung erfüllt, keine neue Variable der Gleichung.

<sup>44</sup>Dies ist keine neue Gleichung mit zwei Variablen, sondern eine Elementgleichung in  $\mathbb{N}$ .

bedeutet ja, dass man von  $a$  aus durch sukzessives Nachfolgebilden zu  $b$  gelangt. Diese Definition ist nach Lemma 10.2 äquivalent dazu, dass es überhaupt ein  $x \in \mathbb{N}$  mit  $a + x = b$  gibt. Die eindeutige Lösung ist dann gerade diejenige Zahl, die angibt, wie oft man den Nachfolger von  $a$  nehmen muss, um zu  $b$  zu gelangen. Also ist die Differenz<sup>45</sup>

$$b - a$$

die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$a + x = b$$

bei  $a \leq b$ .

### 17.3. Umformungen.

Eine wichtige Methode, Gleichungen zu lösen, besteht darin, sie umzuformen, indem man in der Gleichung beidseitig die gleiche Rechenoperation durchführt.

**Satz 17.4.** *Es sei*

$$f(x) = g(x)$$

*eine Gleichung in der Variablen  $x$  über einem gegebenen Zahlenbereich  $M$ . Es sei*

$$\varphi: M \longrightarrow M$$

*eine Abbildung. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Wenn  $a \in M$  eine Lösung der Gleichung ist, so ist  $a$  auch eine Lösung der umgeformten Gleichung*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x)).$$

- (2) *Wenn  $\varphi$  injektiv ist, so ist  $a \in M$  genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn  $a$  eine Lösung der umgeformten Gleichung*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$$

*ist.*

*Beweis.* (1) Wenn

$$f(a) = g(a)$$

ist, so ist auch

$$\varphi(f(a)) = \varphi(g(a)),$$

da ja eine Abbildung wohldefiniert auf den Elementen ist, und nicht irgendwie von der Darstellung des Elementes abhängt.

- (2) Dies ist eine unmittelbare Anwendung der Injektivität von  $\varphi$ .

□

<sup>45</sup>Es ist typisch, dass Gleichungen zu neuen Begriffen führen.

Wichtige elementare Anwendungen dieses Prinzips sind, dass man zu einer Gleichung (über den natürlichen, ganzen, reellen Zahlen) beidseitig eine natürliche Zahl hinzuaddieren darf. Die Injektivität ergibt sich aus der Abziehregel. Bei einer injektiven Abbildung ergibt sich also eine lösungsäquivalente Gleichung, bei einer nicht injektiven Abbildung liefert die umgeformte Gleichung nur eine *notwendige Bedingung* für eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

**Beispiel 17.5.** Auf die Gleichung

$$x - 3 = 10$$

kann man beidseitig die Addition  $+3$  (die bijektiv ist) loslassen und erhält die umgeformte Gleichung

$$x - 3 + 3 = 10 + 3.$$

Vereinfachungen führen auf die Lösung

$$x = 13.$$

**Bemerkung 17.6.** Sei eine Gleichung der Form

$$f(x) = g(x)$$

gegeben. Wir betrachten Gleichungsumformungen, die nicht auf einer injektiven Abbildung beruhen. Als Extremfall betrachten wir die Multiplikation mit 0, die ja aufgrund der Annullationsregel alles auf 0 abbildet und somit hochgradig nicht injektiv ist. Die umgeformte Gleichung ist

$$0 \cdot f(x) = 0 \cdot g(x),$$

also einfach

$$0 = 0.$$

Diese Gleichung wird natürlich von jedem  $x$  erfüllt, zum Auffinden der Lösungen der Ursprungsgleichung liefert diese Umformung keinen sinnvollen Beitrag.

Betrachten wir das Quadrieren, d.h. wir gehen von der gegebenen Gleichung zu

$$(f(x))^2 = (g(x))^2$$

über. Über den natürlichen Zahlen ist das Quadrieren eine injektive Abbildung, aber nicht auf den ganzen Zahlen. Die Gleichung

$$x = 3$$

hat offenbar die einzige Lösung

$$x = 3,$$

dagegen hat die quadrierte Gleichung

$$x^2 = 9$$

die beiden Lösungen

$$x = 3, -3.$$

### 17.4. Ungleichungen.

Bei einer *Ungleichung* handelt es sich um einen Ausdruck der Form

$$f(x) \geq g(x),$$

wobei  $f$  und  $g$  Ausdrücke in der einen Variablen  $x$  sind. Statt Ungleichung ist eigentlich die Bezeichnung *Abschätzung* besser. Wie eine Gleichung bezieht sich eine solche Ungleichung auf eine Grundmenge  $M$ , typischerweise ein Zahlbereich mit einer Ordnung, in der die Ausdrücke  $f$  und  $g$  und das  $\geq$  sinnvoll interpretiert werden können. Unter einer Lösung der Ungleichung versteht man ein  $a \in M$ , das die Bedingung

$$f(a) \geq g(a)$$

erfüllt. Unter der *Lösungsmenge* zur Ungleichung versteht man die Menge aller Lösungen, also die Menge

$$\{a \in M \mid f(a) \geq g(a)\} .$$

## 17. ARBEITSBLATT

### 17.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 17.1.** Ersetze im Ausdruck

QZVWXYZXUXYSRWZ

simultan die Buchstaben  $Q$  durch  $F$ ,  $R$  durch  $A$ ,  $S$  durch  $J$ ,  $T$  durch  $N$ ,  $V$  durch  $O$ ,  $W$  durch  $H$ ,  $X$  durch  $E$ ,  $Y$  durch  $S$  und  $Z$  durch  $R$ . Handelt es sich um einen Term?

### 17.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 17.2.** Diskutiere, ob es sich bei

$$n!, \binom{n}{k}, \pi, e^u, x^y, 5^x, \sqrt{x}, \heartsuit$$

um Terme handelt.

**Aufgabe 17.3.** Expandiere den Term  $3a^2$ .

Bei Einsetzungsaufgaben sind grundsätzlich die entstehenden Terme zu vereinfachen.

**Aufgabe 17.4.** Ersetze im Term  $3x^2 + 2x + 4$  die Variable  $x$  durch den Term 5 und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

**Aufgabe 17.5.** Ersetze im Term  $4x^2 + 3x + 7$  die Variable  $x$  durch den Term  $y^3 + 2y + 5$  und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

**Aufgabe 17.6.\***

Ersetze im Term  $3x^2 + 5x + 6$  die Variable  $x$  durch den Term  $4y^2 + 2y + 3$  und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

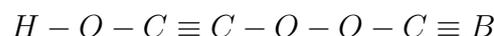
**Aufgabe 17.7.** Ersetze im Term

$$a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

simultan die Variablen

- (1)  $a_0$  durch 4,  $a_1$  durch 7,  $a_2$  durch 4,  $a_3$  durch 0,  $a_4$  durch 5,
- (2)  $a_0$  durch 7,  $a_1$  durch 11,  $a_2$  durch 10,  $a_3$  durch 0,  $a_4$  durch 13,
- (3)  $a_0$  durch  $b_1$ ,  $a_1$  durch  $b_3$ ,  $a_2$  durch  $b_7$ ,  $a_3$  durch  $b_1$ ,  $a_4$  durch  $b_3$ ,
- (4)  $a_0$  durch 10,  $a_1$  durch  $10^3$ ,  $a_2$  durch  $10^4$ ,  $a_3$  durch 100,  $a_4$  durch  $10^4$ .

**Aufgabe 17.8.** Ersetze im Molekül

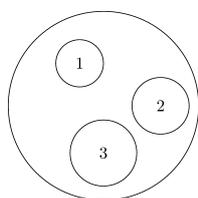


jedes Sauerstoffatom ( $O$ ) durch  $O - O$  und jedes Kohlenstoffatom ( $C$ ) durch ein Siliciumatom  $Si$ .

**Aufgabe 17.9.** Es sei  $T(x)$  ein Term in der einen Variablen  $x$ , der ansonsten aus natürlichen Zahlen und darauf definierten Funktionssymbolen gebildet sei. Man mache sich klar, dass die Einsetzung  $a \mapsto T(a)$  eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  definiert.

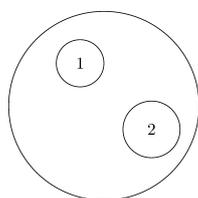
Die Kleine-Scheiben-Operade besteht aus Kreisen mit einem fixierten Radius, die kleinere überschneidungsfreie durchnummerierte Kreise beinhalten. Es seien  $K$  und  $L$  zwei solche Scheiben. Die Verknüpfung  $K *_i L$  (genannt die  $i$ -te *Einsetzung*), wobei  $i$  zwischen 1 und der Anzahl der inneren Kreise von  $K$  ist, erhält man, indem man den  $i$ -ten inneren Kreis von  $K$  durch den auf diese Größe geschrumpften Kreis  $L$  (ohne Drehung) ersetzt, dabei die Umrandung weglässt und die inneren Kreise neu nummeriert, und zwar so, dass die inneren Kreise von  $K$  bis zur Nummer  $i - 1$  ihre Nummer behalten, die in den  $i$ -ten Kreis von  $K$  platzierten Kreise die anschließenden Nummern gemäß ihrer Reihenfolge in  $L$  bekommen und die verbleibenden inneren Kreise die anschließenden Nummern gemäß ihrer Reihenfolge in  $K$  bekommen.

Alle folgenden Einsetzungsaufgaben für die kleinen Scheiben beziehen sich auf die skizzierten Objekte.



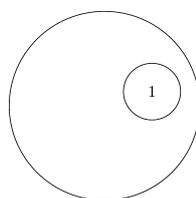
Die kleine Scheibe

A



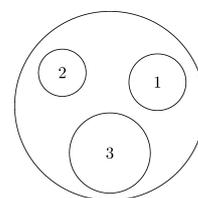
Die kleine Scheibe

B



Die kleine Scheibe

C



Die kleine Scheibe

D

**Aufgabe 17.10.** Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $A *_1 B$ ,
- (2)  $A *_2 B$ ,
- (3)  $A *_3 B$ .

**Aufgabe 17.11.** Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $A *_1 A$ ,
- (2)  $A *_2 A$ ,
- (3)  $A *_3 A$ .

**Aufgabe 17.12.** Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $B *_1 A$ ,
- (2)  $A *_2 D$ ,
- (3)  $D *_3 B$ ,
- (4)  $D *_1 B$ ,
- (5)  $D *_2 B$ ,
- (6)  $D *_1 D$ ,
- (7)  $C *_1 A$ ,
- (8)  $A *_1 C$ .

**Aufgabe 17.13.** Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $C *_1 C$ ,
- (2)  $(C *_1 C) *_1 C$ ,
- (3)  $((C *_1 C) *_1 C) *_1 C$ ,
- (4)  $C *_1 (C *_1 C)$ ,
- (5)  $(C *_1 C) *_1 (C *_1 C)$ .

**Aufgabe 17.14.** Besitzen die Einsetzungen  $*_i$  für die kleinen Scheiben ein neutrales Element?

**Aufgabe 17.15.** Setze in den folgenden Definitionsgleichungen den Doppelpunkt an die richtige Stelle.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, P = 4x^2 + 7x - 5$$

**Aufgabe 17.16.** Bestimme, von welcher Art (im Sinne der Vorlesung) die folgenden Gleichungen sind.

$$(1) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(2) \prod_{i=1}^n i = n!,$$

$$(3) 4 + 9 = 13,$$

$$(4)$$

$$\binom{4}{2} = 6,$$

$$(5) x^2 = 7.$$

**Aufgabe 17.17.** Zeige, dass für beliebige natürliche Zahlen  $x \geq 1$  und  $n$  die Gleichheit

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1)$$

gilt.

**Aufgabe 17.18.** Finde eine Lösung und eine Nichtlösung für die Gleichung

$$5x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 11x^2 + 7x + 7.$$

**Aufgabe 17.19.** Welche Umformungsregeln für Gleichungen kennen Sie? Handelt es sich um Äquivalenzumformungen?

**Aufgabe 17.20.** Bestimme sämtliche Lösungen aus  $\mathbb{N}$  für die folgenden Gleichungen.

$$(1) 2x + 3 = 5x,$$

$$(2) 2x = x^2,$$

$$(3) 9x = x^3.$$

**Aufgabe 17.21.** Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$n^3 - n^2 \leq 20$$

innerhalb der natürlichen Zahlen.

### 17.3. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 17.22. (4 Punkte)

Es sei

$$P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 4$$

und

$$Q(y) = y^2 + 3y + 7.$$

- (1) Ersetze im Term  $Q(y)$  die Variable  $y$  durch 6. Das Ergebnis sei  $a$ .
- (2) Ersetze im Term  $P(x)$  die Variable  $x$  durch  $a$ .
- (3) Ersetze im Term  $P(x)$  die Variable  $x$  durch den Term  $Q(y)$ . Das Ergebnis sei  $R(y)$ .
- (4) Ersetze im Term  $R(y)$  die Variable  $y$  durch 6.

#### Aufgabe 17.23. (4 Punkte)

Bestimme die Einsetzungen

- (1)  $B *_2 A$ ,
- (2)  $D *_3 D$ ,
- (3)  $(A *_3 B) *_4 C$ ,
- (4)  $(D *_2 B) *_2 B$ .

#### Aufgabe 17.24. (2 Punkte)

Es seien  $v \geq u \geq 0$  natürliche Zahlen. Zeige, dass

$$x = v^2 - u^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$$

die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

erfüllen.

#### Aufgabe 17.25. (3 Punkte)

Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme  $n = 3$  die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

## 18. VORLESUNG - DIE GANZEN ZAHLEN

Drei Schritte vor und zwei  
zurück, so kommt der Mensch  
voran

---

Petra Pascal

### 18.1. Die ganzen Zahlen.

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass die Gleichung

$$a + x = b$$

mit  $a, b \in \mathbb{N}$  formulierbar ist, aber es dort bei  $a > b$  keine Lösung gibt. Wir würden gerne von dieser Gleichung links und rechts  $a$  „abziehen“, um links

$$a + x - a = x$$

und rechts die Lösung  $b - a$  für  $x$  zu erhalten. Um dies durchführen zu können, müssen wir die natürlichen Zahlen zu einem größeren Zahlbereich erweitern, nämlich zur Menge der ganzen Zahlen. Solche Zahlbereichserweiterungen ziehen sich durch die gesamte Mathematik, egal ob in der Schule oder auf der Hochschule. Wir werden noch die Erweiterung von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen und von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen kennenlernen. Eine wichtige Motivation ist dabei, so wie hier, dass man Lösungen für gewisse Gleichungen finden möchte, für die es im Ausgangsbereich keine Lösung gibt, und dass man diese Lösungen auch rechnerisch auffinden und handhaben möchte. Zugleich möchte man mit den neuen Zahlen möglichst viel machen können, was man im Ausgangsbereich kann, also beispielsweise nach wie vor addieren und multiplizieren, wobei auch die gleichen Gesetzmäßigkeiten weiter gelten sollen.

Da wir von nun an mit verschiedenen Zahlbereichen arbeiten, wird es wichtig, zu betonen, in welchem Zahlbereich wir uns befinden. Die Gleichung

$$5 + x = 2$$

besitzt in  $\mathbb{N}$  keine Lösung. Diese Tatsache bleibt unabhängig davon bestehen, dass es in anderen Bereichen eine Lösung gibt.

Wir führen jetzt die Menge der ganzen Zahlen ein, auf denen wir dann bald die Verknüpfungen festlegen und die zugehörigen Rechengesetze nachweisen werden.

**Definition 18.1.** Die Menge der *ganzen Zahlen*  $\mathbb{Z}$  besteht aus der Menge aller positiven natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_+$ , der 0 und der Menge  $\{-n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ , deren Elemente die negativen ganzen Zahlen heißen.

Diese Definition hat den Vorteil, dass sie direkt ist und ohne mengentheoretische Überlegungen (Äquivalenzrelationen) auskommt. Jede ganze Zahl gehört unmittelbar zu genau einem der drei Typen (positiv, 0, negativ). Der Nachteil ist, dass die Verknüpfungen darauf, nämlich die Addition und die Multiplikation, die diese Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen fortsetzen sollen, nicht unmittelbar ersichtlich sind, sondern auf eine Weise festgelegt werden müssen, die zumindest auf den ersten Blick etwas willkürlich aussieht. Zugleich ist der Nachweis der Gesetzmäßigkeiten, wie beispielsweise das Assoziativgesetz, recht aufwändig, da man alle Kombinationen der möglichen Fälle untersuchen muss.

**Bemerkung 18.2.** Wie verhalten sich die ganzen Zahlen bezüglich der Zählvorstellung für die natürlichen Zahlen, die wir in der fünften Vorlesung kennengelernt haben? Die richtige Vorstellung ergibt sich, wenn man die Nachfolgerabbildung auf  $\mathbb{Z}$  fortsetzt, indem man für eine negative Zahl  $y = -a$  den Nachfolger als das Negative des Vorgängers von  $a$  definiert, also

$$y' = -(a - 1)$$

(bei  $a = 1$  ist dies als 0 zu lesen). Die natürlichen Zahlen werden somit auf der Zahlengeraden von 0 aus nach links mit  $-1, -2, \dots$  fortgesetzt. Der Nachfolgerschritt ist dann immer noch der eine Schritt nach rechts. Beispielsweise ergeben sich die Reihenfolgen

(1)

$$\dots, -|||, -||, -|, 0, |, ||, |||\dots$$

(2)

$$\dots, -NNN0, -NN0, -N0, 0, N0, NN0, NNN0, \dots$$

(3)

$$\dots, \text{minus drei, minus zwei, minus eins, null, eins, zwei, drei, } \dots$$

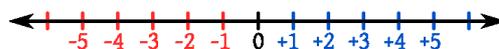
(4)

$$\dots, -c, -b, -a, 0, a, b, c, \dots$$

(5)

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Es entsteht hier eine Symmetrie am Nullpunkt, wobei die negative Zahl  $-a$  der positiven Zahl  $a$  gegenüber liegt. Diese Symmetrie gilt insbesondere auf der Zahlengeraden.



Wenn man die ganzen Zahlen dynamisch als (gleichlange) Schritte nach rechts bzw. nach links (oder nach vorne bzw. nach hinten oder nach oben bzw. nach unten) interpretiert, so sehen die negativen Zahl so „natürlich“ wie die positiven Zahlen aus.



Der Apfelkorb G



Der Apfelkorb H

Welche Objekte bzw. Strukturen kann man mit den ganzen Zahlen zählen? Es gibt keine Mengen mit negativ vielen Elementen! Dennoch gibt es viele Situationen, wo man mit ganzen Zahlen sinnvoll zählen kann. Sobald es einen Prozess zusammen mit einem zugehörigen gegenläufigen Prozess gibt, wie etwa einen Schritt nach rechts bzw. einen Schritt nach links zu machen, oder wenn man zwei sehr große Haufen (oder Körbe) an Äpfeln hat, und der Prozess ist, einen Apfel von dem einen Haufen zu dem anderen Haufen zu transportieren (mit dem umgekehrten Transport als dem gegenläufigen Prozess), so kann man die möglichen (hintereinander ausgeführten) Prozesse durch die ganzen Zahlen beschreiben: 7 (oder deutlicher +7) bedeutet 7 Äpfel von Haufen  $G$  nach Haufen  $H$ ,  $-3$  bedeutet drei Äpfel von Haufen  $H$  nach Haufen  $G$ . Hierbei muss man willkürlich festlegen, welche Prozessrichtung man als positiv ansehen möchte. Auch in der Hauswirtschaft werden die Einnahmen positiv und die Ausgaben negativ verbucht. Damit zusammenhängend werden negative Zahlen häufig als Schulden und positive Zahlen als Guthaben interpretiert.

**Definition 18.3.** Auf den ganzen Zahlen wird folgendermaßen eine Verknüpfung, genannt *Addition*, eingeführt (dabei bezeichnen  $a, b$  natürliche Zahlen). Es ist

$$\begin{aligned}
 a + b &:= a + b, \\
 a + (-b) &:= \begin{cases} a - b, & \text{falls } a \geq b, \\ -(b - a), & \text{falls } a < b, \end{cases} \\
 (-a) + b &:= \begin{cases} b - a, & \text{falls } b \geq a, \\ -(a - b), & \text{falls } b < a, \end{cases} \\
 (-a) + (-b) &:= -(a + b).
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 18.4.** Die in Bemerkung 18.2 besprochenen Interpretationen für ganze Zahlen passen sehr gut zur Addition der ganzen Zahlen. Die Addition einer Reihe von Ausgaben oder Einnahmen führt zur Gesamteinnahme bzw. Gesamtausgabe; wenn man hintereinander mehrfach nach vorne bzw. nach hinten geht, so beschreibt die Addition den Gesamtbewegungsvorgang;

wenn die einen Äpfel von  $G$  nach  $H$  und die anderen von  $H$  nach  $G$  schmeißen, so beschreibt die Addition den Gesamttransport. Hierzu muss man sich nur davon überzeugen, dass die über die Fallunterscheidung definierte Addition genau das macht, was im (Bewegungs-)Prozess geschieht. Wenn man beispielsweise zuerst  $a$  Äpfel von  $G$  nach  $H$  transportiert und dann  $b$  Äpfel ebenfalls von  $G$  nach  $H$ , so transportiert man insgesamt  $a + b$  Äpfel von  $G$  nach  $H$ . Wenn man hingegen zuerst  $a$  Äpfel von  $G$  nach  $H$  transportiert und dann  $b$  Äpfel in die andere Richtung, also von  $H$  nach  $G$  transportiert, so hängt der Gesamtprozess wesentlich davon ab, ob  $a$  oder ob  $b$  größer (oder gleich) ist. Bei  $a \geq b$  transportiert man insgesamt  $a - b$  Äpfel von  $G$  nach  $H$  (vergleiche Satz 10.11), andernfalls transportiert man  $b - a$  Äpfel von  $H$  nach  $G$ . Mit diesen Interpretationen werden auch die algebraischen Gesetze für die Addition ganzer Zahlen einsichtig.

Statt  $a + (-b)$  schreiben wir auch  $a - b$ . Es ist sinnvoll, diesen Ausdruck und speziell  $-b$  für beliebige ganze Zahlen zur Verfügung zu haben. Wir setzen daher

$$-x = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \in \mathbb{N}, \\ y, & \text{falls } x \text{ negativ ist mit } x = -y \text{ und } y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Insbesondere ist  $-(-z) = z$  für jede ganze Zahl  $z$ .

**Bemerkung 18.5.** Innerhalb der ganzen Zahlen besitzt die mit den natürlichen Zahlen  $a, b$  formulierte Gleichung

$$a + x = b$$

eine eindeutige Lösung, nämlich  $(-a) + b$ . Bei  $a \leq b$  ist das ja nach Definition die natürliche Differenz  $b - a$ , und bei  $a > b$  ist nach Definition

$$(-a) + b = -(a - b),$$

und wegen

$$a \geq a - b \geq 0$$

ist nach der Definition der Addition und Lemma 10.12 (3)

$$a + (-(a - b)) = a - (a - b) = (a + b) - a = b.$$

Diese eindeutige Lösbarkeit überträgt sich auf eine Gleichung der Form

$$a + x = b$$

mit  $a, b \in \mathbb{Z}$ , siehe Aufgabe 18.13. Diese Aussage folgt auch aus Lemma 19.8 in Verbindung mit Satz 19.3.

**Definition 18.6.** Auf den ganzen Zahlen wird folgendermaßen eine Verknüpfung, genannt *Multiplikation*, eingeführt (dabei bezeichnen  $a, b$  natürliche Zahlen). Es ist

$$a \cdot b := a \cdot b,$$

$$a \cdot (-b) := -(a \cdot b),$$

$$(-a) \cdot b := -(a \cdot b),$$

$$(-a) \cdot (-b) := a \cdot b.$$

**Bemerkung 18.7.** Wie schon bei den natürlichen Zahlen ist die Vorstellung für die Multiplikation von ganzen Zahlenschwieriger als für die Addition, da bei der Addition beide Summanden die gleiche Rolle spielen (zumindest in der wichtigsten Interpretationen), während dies bei der Multiplikation nicht der Fall ist. Man kann nicht drei Äpfel mal fünf Äpfel ausrechnen. Wie bei den natürlichen Zahlen beschreibt der eine Faktor die Vielfachheit, mit der ein Prozess durchgeführt, den der andere Faktor quantitativ misst. Man kann also dreimal jeweils fünf Äpfel von  $G$  nach  $H$  transportieren und transportiert dann insgesamt 15 Äpfel von  $G$  nach  $H$ . Das gleiche erreicht man, wenn man fünfmal drei Äpfel von  $G$  nach  $H$  transportiert. Ebenso kann man  $a$ -mal  $b$  Äpfel in die andere Richtung von  $H$  nach  $G$  transportieren, und transportiert damit insgesamt  $ab$  Äpfel von  $H$  nach  $G$ . Ganze Zahlen (der Apfeltransport samt Richtung) mit einer natürlichen Zahl zu multiplizieren besitzt also eine passende natürliche Interpretation. Schwieriger ist es, wenn beide Zahlen negativ sind. Die Definition sagt, dass dann das Produkt der zugehörigen positiven Zahlen herauskommt. Dies kann man sich so vorstellen: Es sei  $P$  ein reversibler Prozess, der gegenläufige Prozess sei mit  $-P$  bezeichnet. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $nP$  die  $n$ -fache Ausführung von  $P$ . Für negatives

$$n = -m$$

interpretiert man dann  $nP$  als die  $m$ -fache Ausführung des gegenläufigen Prozesses. Insbesondere ist

$$(-1)P = -P.$$

Multiplikation mit  $-1$  führt also auf den gegenläufigen Prozess, und von daher ist es einleuchtend, auch

$$(-1)(-P) = P$$

zu setzen, (der gegenläufige Prozess zum gegenläufigen Prozess ist der Prozess selbst).

Auch von den gewünschten algebraischen Gesetzmäßigkeiten her ist die Festlegung Minus mal Minus ist Plus sinnvoll. Es soll

$$0x = 0$$

gelten und es soll das Distributivgesetz gelten. Dann ist für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{Z}$

$$0 = 0x = (n - n)x = nx - nx.$$

Bei negativem  $x = -a$  ergibt sich daraus

$$n(-a) - n(-a) = 0.$$

Das Produkt  $(-n)(-a)$  muss also bei Addition mit  $n(-a)$  Null ergeben, dies ist aber gerade die charakteristische Eigenschaft von  $na$ . Also ist

$$(-n)(-a) = na.$$

**Lemma 18.8.** *Die ganzen Zahlen erfüllen die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Die Addition ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element. Zu jedem  $x \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $y \in \mathbb{Z}$  mit*

$$x + y = 0.$$

- (2) *Die Multiplikation ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit 1 als neutralem Element.*  
 (3) *Es gilt das Distributivgesetz.*

*Beweis.* (1) Die Kommutativität der Addition beweisen wir mit einer Fallunterscheidung, je nachdem, ob die Summanden nichtnegativ (natürliche Zahlen) oder negativ sind. Wenn beide Summanden aus  $\mathbb{N}$  sind, ergibt sich dies unmittelbar aus der Kommutativität der Addition in den natürlichen Zahlen. Wenn  $x = a$  aus  $\mathbb{N}$  ist und  $y = -b$  negativ ist, so muss man eine weitere Fallunterscheidung vornehmen. Bei  $a \geq b$  ist

$$x + y = a + (-b)$$

nach dem (der ersten Hälfte des) zweiten Teil der Definition, und ebenso ist

$$y + x = (-b) + a = a - b$$

nach dem (der ersten Hälfte des) dritten Teils der Definition. Bei  $a < b$  ist wiederum

$$x + y = a + (-b) = -(b - a) = (-b) + a = y + x$$

nach den Definitionen. Wenn beide Zahlen negativ sind ergibt sich die Kommutativität sofort aus dem vierten Teil der Definition.

Dass 0 das neutrale Element ist, folgt unmittelbar aus den ersten beiden Teilen der Definition der Addition. Die Assoziativität nachzuweisen ist aufwändiger, da dann drei Zahlen  $x, y, z$  ins Spiel kommen, für die es jeweils mehrere Fälle gibt. Wenn eine der beteiligten Zahlen aber 0 ist, so ist die Aussage wegen der bewiesenen neutralen Eigenschaft der 0 klar. Wir müssen also nur noch die acht Fälle (in denen selbst jeweils wiederum Fallunterscheidungen gemäß der Größenbeziehung der beteiligten Elemente nötig sind) durchgehen, je nachdem, ob  $x, y, z$  positiv oder negativ sind.

Wenn beispielsweise  $x = a, y = -b, z = -c$  mit positiven Zahlen  $a, b, c$ , ist, so ist

$$x + (y + z) = a + ((-b) + (-c)) = a - (b + c).$$

Wenn  $a \geq b + c$  ist, so ist dies  $a - (b + c)$  (in  $\mathbb{N}$ ), andernfalls ist dies  $-((b + c) - a)$ . Für die andere Klammerung ergibt sich

$$(x + y) + z = (a + (-b)) + (-c).$$

Bei  $a \geq b + c$  ist einerseits

$$a \geq b$$

und andererseits

$$a - b \geq c.$$

Somit ist die zweite Klammerung in diesem Fall nach Aufgabe 10.17 ebenfalls gleich

$$(a + (-b)) + (-c) = (a - b) - c = a - (b + c).$$

Bei  $a < b + c$  unterscheiden wir die Fälle  $a \geq b$  und  $a < b$ . Bei  $a \geq b$  ist  $c \geq a - b$  und daher ist unter Verwendung von Lemma 10.12 (3)

$$(a + (-b)) + (-c) = (a - b) - c = -(c - (a - b)) = -((c + b) - a).$$

Bei  $a < b$  ist erst recht  $a < b + c$  und somit ist nach Lemma 10.12 (2)

$$(a + (-b)) + (-c) = -(b - a) + (-c) = -((b - a) + c) = -((c + b) - a).$$

Für die anderen Fälle siehe Aufgabe 18.12.

Bei positivem  $x$  hat  $-x$  die Eigenschaft, dass die Summe

$$x + (-x) = 0$$

ist, bei negativem  $x$  mit  $x = -a$  mit  $a \in \mathbb{N}$  erfüllt  $a$  die Eigenschaft.

- (2) Die Kommutativität der Multiplikation und die Eigenschaft, dass 1 das neutrale Element ist, folgt unmittelbar aus der Definition 18.6. Zum Nachweis des Assoziativgesetzes stellt man zunächst fest, dass 0 herauskommt, sobald ein Faktor 0 ist. Die verbleibenden acht möglichen Fälle kann man einfach abhandeln, da das Vorzeichen des Produktes nur davon abhängt, wie viele Zahlen positiv und wie viele Zahlen negativ sind, siehe Aufgabe 18.17.
- (3) Zum Nachweis des Distributivgesetzes

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

können wir, indem wir bei negativem  $x$  mit  $-1$  multiplizieren, annehmen, dass  $x$  positiv ist (bei  $x = 0$  gilt die Gleichung sowieso). Wenn  $y, z$  beide aus  $\mathbb{N}$  sind oder beide negativ, so ergibt sich die Gleichung unmittelbar. Sei also  $y = a$  aus  $\mathbb{N}$  und  $z = -b$  negativ. Bei  $a \geq b$  ist nach Satz 10.5 auch

$$xa \geq xb.$$

In diesem Fall ist somit nach Lemma 10.13

$$x \cdot (y + z) = x \cdot (a + (-b)) = x \cdot (a - b) = x \cdot a - x \cdot b = x \cdot a + x \cdot (-b) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Bei  $a < b$  ist nach Satz 10.5 auch

$$xa < xb.$$

In diesem Fall ist somit nach dem soeben bewiesenen Fall

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot (a + (-b)) \\ &= x \cdot (-(b - a)) \\ &= -(x \cdot (b - a)) \\ &= -(x \cdot b - x \cdot a) \\ &= x \cdot a - x \cdot b \\ &= x \cdot a + x \cdot (-b) \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

□

Für die Assoziativität der Addition in  $\mathbb{Z}$  geben wir noch ein weiteres einleuchtenderes Argument, das sich an der inhaltlichen Beschreibung der Addition von ganzen Zahlen als einen gerichteten Transport von Objekten (zwischen zwei Haufen, also mit Rücktransport) orientiert. Diese Interpretation deckt sich mit den Festlegungen in Definition 18.3. In dieser Interpretation ist aber das Assoziativgesetz unmittelbar einleuchtend, da man die Hintereinanderausführung von drei Transportprozessen als einen Gesamtprozess auffassen kann, aber auch die beiden ersten Prozesse zusammenfassen oder die beiden letzten zusammenfassen kann.

## 18.2. Der Betrag.

**Definition 18.9.** Unter dem *Betrag*  $|n|$  einer ganzen Zahl  $n$  versteht man die Zahl selbst, falls diese positiv ist, oder aber die Zahl  $-n$ , falls  $n$  negativ (und  $-n$  positiv) ist.

Der Betrag ist also stets eine natürliche Zahl.

## 18. ARBEITSBLATT

### 18.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 18.1.** Lucy Sonnenschein befindet sich auf dem Zahlenstrahl in Position 2 und schaut in die positive Richtung. Sie bewegt sich drei Schritte nach vorne (das bezieht sich auf ihre momentane Ausrichtung), sodann sieben Schritte zurück, sie macht sodann eine Halbdrehung, dann geht sie vier Schritte nach vorne, macht wieder eine Halbdrehung, macht einen Salto rückwärts im Stand und geht zwei Schritte zurück. In welcher Position befindet sie sich zum Schluss?

## 18.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 18.2.** Welche Vorstellungen zu den ganzen Zahlen (einschließlich der Verknüpfungen) haben Sie?

**Aufgabe 18.3.** Es seien zwei Haufen  $H$  und  $G$  an (hinreichend vielen) Äpfeln gegeben. Es werden der Reihe nach 7 Äpfel von  $H$  nach  $G$ , 13 Äpfel von  $G$  nach  $H$ , dann 10 Äpfel von  $G$  nach  $H$  und schließlich 9 Äpfel von  $H$  nach  $G$  transportiert. Wie viele Äpfel werden insgesamt und in welche Richtung transportiert?

**Aufgabe 18.4.** Lucy Sonnenschein hat einen Stand auf dem Flohmarkt. Sie verkauft ein altes Kleid für 8 Euro, trinkt einen Kaffee für 2 Euro, verkauft eine alte Schallplatte für 5 Euro, hat Hunger und holt sich eine Schlachtplatte für 7 Euro, verschenkt einen Aschenbecher und kauft sich beim Nachbarstand eine coole Bluse für 3 Euro. Wie sieht ihr finanzielles Gesamtergebnis vom Flohmarkttag aus?

**Aufgabe 18.5.** Mustafa Müller und Heinz Ngolo tauschen Fußballbildchen aus. Mustafa gibt Heinz vier Bildchen und Heinz gibt Mustafa fünf Bildchen. Daheim merkt Mustafa, dass er jetzt eines doppelt hat und gibt es am Nachmittag zurück. Heinz hat vier neue Bildchen von seiner Oma bekommen, davon gibt er zwei an Mustafa weiter. Der revanchiert sich mit einem Bildchen. Wie viele Bildchen haben sie unter dem Strich ausgetauscht?

**Aufgabe 18.6.** Gabi Hochster und Heinz Ngolo tauschen Küsse aus. Gabi gibt Heinz drei Küsse, daraufhin gibt Heinz Gabi fünf Küsse, woraufhin Gabi einen Kuss zurückgibt. Wie viele Küsse haben sie unter dem Strich ausgetauscht?

**Aufgabe 18.7.** Wir betrachten die Tage

... vorvorvorgestern, vorgestern, vorgestern, gestern, heute,  
morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...

als Zahlen und addieren mit ihnen.

- (1) Bestimme vorgestern von morgen.
- (2) Bestimme vorvorvorgestern von übermorgen.
- (3) Bestimme vorvorvorvorgestern von vorvorvorgestern von überüberüberüberübermorgen.

- (4) Welchen Tag von überüberüberübermorgen muss ich nehmen, um heute zu erhalten?
- (5) Wie bestimmt man den negativen Tag zu einem gegebenen Tag?
- (6) Welchen Tag von überüberüberübermorgen muss ich nehmen, um vorgestern zu erhalten?
- (7) Wie selbstverständlich ist in diesem Modell das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz?

**Aufgabe 18.8.** Wie zählt man die Jahre in der Geschichte? Warum?

**Aufgabe 18.9.** Was hat die Temperaturskala mit den ganzen Zahlen zu tun?

**Aufgabe 18.10.** Soll man eine negative Zahl stets mit einem Minuszeichen als  $-x$  schreiben? Oder darf man eine negative Zahl auch mit  $x$  bezeichnen?

**Aufgabe 18.11.** Präzisiere an jeder Stelle der Definition der Addition auf  $\mathbb{Z}$ , ob  $+$  die Addition in  $\mathbb{N}$  oder in  $\mathbb{Z}$  bezeichnet und ob  $-$  die Differenz auf  $\mathbb{N}$  oder die Negation bezeichnet.

**Aufgabe 18.12.** Beweise die übrigen Fälle für die Assoziativität der Addition in  $\mathbb{Z}$  wie im Beweis zu Lemma 18.8.

**Aufgabe 18.13.** Zeige, dass zu gegebenen ganzen Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  die Gleichung

$$a + x = b$$

eine eindeutige Lösung, nämlich  $b - a$ , besitzt.

**Aufgabe 18.14.** Zeige, dass für jede ganze Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  die Additionsabbildung mit  $a$ , also

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv ist. Was ist die Umkehrabbildung?

**Aufgabe 18.15.** Betrachte die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

**Aufgabe 18.16.** Präzisiere an jeder Stelle der Definition der Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$ , ob  $\cdot$  die Multiplikation in  $\mathbb{N}$  oder in  $\mathbb{Z}$  bezeichnet.

**Aufgabe 18.17.** Beweise die Assoziativität der Multiplikation in  $\mathbb{Z}$ . Wie kann man die Anzahl der möglichen Fälle reduzieren?

**Aufgabe 18.18.** Heinz Ngolo multipliziert eine positive Zahl mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer positiven Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer positiven Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl. Ist das Ergebnis positiv oder negativ?

**Aufgabe 18.19.** Berechne

$$(-1)^{934050663653}.$$

**Aufgabe 18.20.\***

Zeige, dass für zwei von 0 verschiedene ganze Zahlen  $x, y$  auch das Produkt  $x \cdot y$  von 0 verschieden ist.

**Aufgabe 18.21.** Erstelle eine Verknüpfungstabelle für die Multiplikation der ganzen Zahlen, wobei aber nur die drei Symbole  $0, p, n$  (für positiv und negativ) vorkommen sollen. Ist eine solche Verknüpfungstabelle wohldefiniert und sinnvoll? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, besitzt sie ein neutrales Element?

Ist eine entsprechende Verknüpfungstabelle für die Addition sinnvoll?

**Aufgabe 18.22.** Was kommt heraus, wenn man  $-7$  „positiv nimmt“ oder von  $-7$  „das Positive nimmt“?

**Aufgabe 18.23.** Beweise die folgenden Eigenschaften für den Betrag ganzer Zahlen.

- (1)  $|x| \geq 0$ .
- (2)  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  ist.
- (3)  $|x| = |y|$  genau dann, wenn  $x = y$  oder  $x = -y$  ist.
- (4)  $|y - x| = |x - y|$ .
- (5)  $|xy| = |x| |y|$ .
- (6) Es ist  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

### 18.3. Aufgaben zum Abgeben.

#### **Aufgabe 18.24.** (2 Punkte)

Die Familie Müller hat im Monat Dezember folgende Einnahmen und Ausgaben (alles in Euro). Gehälter: 4847, Lebensmittelkosten: 1250, Kosten für das Silvesterfeuerwerk: 101, Schuldentilgung: 705, Zinsen: 280, Geschenke kaufen: 325, Lottogewinn: 253, Unterstützung an die Oma: 300, Taschengeld für die Kinder: 40, Spende an die Bahnhofsmission: 80, auf der Straße gefunden: 20, Heizungskosten: 531, Fortbildungsseminar: 345, Ausflug an die Nordsee: 470, Wasser- und Strom: 360, Opernbesuch: 108, Erlös durch den Verkauf der Fußballbildchen von Mustafa: 35.

Wie hoch sind die Gesamteinnahmen und wie hoch sind die Gesamtausgaben der Familie im Dezember? Wie sieht die Gesamtbilanz für den Monat Dezember aus?

#### **Aufgabe 18.25.** (3 Punkte)

Die Fahrradtournee „Rund um die Nordseedünen“ besteht aus sechs Etappen. Auch in diesem Jahr kommen nur drei Fahrer für den Sieg in Frage: Albert Albrecht, Bruno Rotato und Cico Ferrari. Bei der ersten Etappe fährt Albert einen Vorsprung von 13 Sekunden auf Bruno und von 16 Sekunden auf Cico heraus. Bei der zweiten Etappe landet Cico an erster Stelle mit einem Vorsprung von 19 Sekunden auf die zeitgleichen Albert und Bruno. Das dritte Rennen gewinnt Bruno, Cico kommt 8 Sekunden danach ins Ziel mit einem Vorsprung von 3 Sekunden auf Albrecht. Bei der vierten Etappe verliert Bruno 1 Sekunde auf Cico und 3 Sekunden auf Albrecht. Die fünfte Etappe gewinnen Albrecht und Cico zeitgleich mit einem Vorsprung von 4 Sekunden auf Bruno. Bei der letzten Etappe verliert Albrecht 11 Sekunden gegenüber Cico, dafür gewinnt er 7 Sekunden gegenüber Bruno.

Welche Gesamtzeitabstände bestehen am Ende der Tournee zwischen den drei Fahrern?

#### **Aufgabe 18.26.** (4 Punkte)

Ein Apotheker hat eine zweischalige Waage zur Verfügung und die folgenden Gewichte: Zwei 1-Gramm-Gewichte, ein 5-Gramm-Gewicht, zwei 10-Gramm-Gewichte, ein 50-Gramm-Gewicht, zwei 100-Gramm-Gewichte, ein 500-Gramm-Gewicht, u.s.w. Zeige, dass er mit diesen Gewichten jede Menge (in vollen Gramm) abwiegen kann.

**Aufgabe 18.27.** (2 Punkte)

Zeige, dass die Multiplikation mit  $-1$  auf den ganzen Zahlen, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, g \longmapsto -g,$$

bijektiv ist.

**Aufgabe 18.28.** (4 Punkte)

Unter welchen Bedingungen gilt für ganze Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Gleichheit

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = \sum_{i=1}^n |a_i|?$$

## 19. VORLESUNG - KOMMUTATIVE RINGE

19.1. **Kommutative Ringe.**

Wir erfassen die in der letzten Vorlesung etablierten algebraischen Eigenschaften der ganzen Zahlen mit einem neuen Begriff.

**Definition 19.1.** Eine Menge  $R$  heißt ein *Ring*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt *Addition* und *Multiplikation*)

$$+ : R \times R \longrightarrow R \text{ und } \cdot : R \times R \longrightarrow R$$

und (nicht notwendigerweise verschiedene) Elemente  $0, 1 \in R$  gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

- (1) Axiome der Addition
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle  $a, b, c \in R$  gilt:  $(a+b)+c = a+(b+c)$ .
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle  $a, b \in R$  gilt  $a+b = b+a$ .
  - (c)  $0$  ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle  $a \in R$  ist  $a+0 = a$ .
  - (d) Existenz des Negativen: Zu jedem  $a \in R$  gibt es ein Element  $b \in R$  mit  $a+b = 0$ .
- (2) Axiome der Multiplikation
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle  $a, b, c \in R$  gilt:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
  - (b)  $1$  ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle  $a \in R$  ist  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ .
- (3) Distributivgesetz: Für alle  $a, b, c \in R$  gilt  $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  und  $(b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ .

**Definition 19.2.** Ein Ring  $R$  heißt *kommutativ*, wenn die Multiplikation kommutativ ist.

Ein kommutativer Ring ist insbesondere ein kommutativer Halbring, alle für Halbringe geltenden Eigenschaften wie beispielsweise die allgemeine binomische Formel gelten insbesondere auch für kommutative Ringe. Der wesentliche Unterschied liegt in der zusätzlichen Bedingung (1d), der Existenz des Negativen. Dieses Negative ist eindeutig bestimmt: Wenn nämlich sowohl  $b$  als auch  $c$  die Eigenschaft haben, dass ihre Addition zu  $a$  den Wert 0 ergibt, so erhält man direkt

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c.$$

Für das zu jedem  $a \in R$  eindeutig bestimmte Negative schreiben wir  $-a$ . Wegen

$$a + (-a) = 0$$

ist  $a$  auch das Negative zu  $-a$ , also  $-(-a) = a$ . Bei  $R = \mathbb{Z}$  stimmt diese Definition mit der in der letzten Vorlesung gemachten Definition überein, wie der Beweis der Existenz des Negativen in Lemma 18.8 zeigt.

Mit diesem neuen Begriff können wir festhalten.

**Satz 19.3.** *Die ganzen Zahlen  $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$  bilden einen kommutativen Ring.*

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Lemma 18.8. □

In einem kommutativen Ring  $R$  und Elemente  $a, b \in R$  verwendet man

$$a - b = a + (-b)$$

als abkürzende Schreibweise. Man spricht von der *Subtraktion* bzw. der *Differenz*. Die Subtraktion  $a - b$  ist also die Addition von  $a$  mit dem Negativen (also  $-b$ ) von  $b$ . Bei natürlichen Zahlen  $a, b$  mit  $b \leq a$  stimmt die innerhalb der natürlichen Zahlen genommenen Differenz (siehe die zehnte Vorlesung) mit der hier in  $\mathbb{Z}$  über das Negative genommenen Differenz überein. Dies beruht darauf, dass es sich jeweils um eine Lösung der Gleichung

$$b + x = a$$

handelt und diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt.

**Lemma 19.4.** *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $a, b, c$  Elemente aus  $R$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

(1)

$$0a = 0$$

(Annulationsregel),

(2)

$$a(-b) = -(ab) = (-a)b,$$

(3)

$$(-a)(-b) = ab$$

(Vorzeichenregel),

(4)

$$a(b - c) = ab - ac.$$

*Beweis.* (1) Es ist  $a0 = a(0+0) = a0+a0$ . Durch beidseitiges Abziehen (also Addition mit  $-a0$ ) von  $a0$  ergibt sich die Behauptung.

(2)

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$

nach Teil (1). Daher ist  $(-a)b$  das (eindeutig bestimmte) Negative von  $ab$ .

(3) Nach (2) ist  $(-a)(-b) = (-(-a))b$  und wegen  $-(-a) = a$  folgt die Behauptung.

(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.

□

Wie in jedem kommutativen Halbring kann man in jedem kommutativen Ring  $R$  Ausdrücke der Form  $nx$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in R$  sinnvoll interpretieren, und zwar ist  $nx$  die  $n$ -fache Summe von  $x$  mit sich selbst. Auch die Potenzschreibweise  $x^n$  wird wieder verwendet. Darüber hinaus kann man auch für negative Zahlen  $-n$  den Ausdruck  $(-n)x$  interpretieren, nämlich als

$$(-n)x = n(-x) = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n\text{-mal}}.$$

Insbesondere ist

$$-n = (-n) \cdot 1 = n \cdot (-1) = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n\text{-mal}}$$

in jedem kommutativen Ring sinnvoll interpretierbar. Dabei gelten naheliegende Rechengesetze, siehe Aufgabe 20.10.

## 19.2. Gruppen.

Wir schauen uns kurz die Addition in einem kommutativen Ring genauer an. Hier begegnen wir einer Struktur, die später bei Körpern wieder auftaucht. Mit dieser Struktur kann man viele strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen der Addition (in  $\mathbb{Z}$ ) und der Multiplikation (beispielsweise in  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  oder in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) erfassen.

**Definition 19.5.** Eine Menge  $G$  mit einem ausgezeichneten Element  $e \in G$  und mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G, (g, h) \longmapsto g \circ h,$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle  $f, g, h \in G$  gilt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

(2) Das Element  $e$  ist ein *neutrales Element*, d.h. für alle  $g \in G$  gilt

$$g \circ e = g = e \circ g.$$

(3) Zu jedem  $g \in G$  gibt es ein *inverses Element*, d.h. es gibt ein  $h \in G$  mit

$$h \circ g = g \circ h = e.$$

**Definition 19.6.** Eine Gruppe  $(G, e, \circ)$  heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), wenn die Verknüpfung kommutativ ist, wenn also  $x \circ y = y \circ x$  für alle  $x, y \in G$  gilt.

**Lemma 19.7.** *Es sei  $(G, e, \circ)$  eine Gruppe. Dann ist zu jedem  $x \in G$  das Element  $y \in G$  mit*

$$x \circ y = y \circ x = e$$

*eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Sei

$$x \circ y = y \circ x = e$$

und

$$x \circ z = z \circ x = e.$$

Dann ist

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z.$$

□

Ein kommutativer Ring  $R$  ist bezüglich der Addition insbesondere eine kommutative Gruppe. Insbesondere bilden die ganzen Zahlen  $(\mathbb{Z}, 0, +)$  eine kommutative Gruppe, das inverse Element zu  $x$  ist das negative Element  $-x$ . Allgemein gilt in Gruppen die eindeutige Lösbarkeit von mit der Verknüpfung formulierten Gleichungen.

**Lemma 19.8.** *Sei  $(G, e, \circ)$  eine Gruppe. Dann besitzen zu je zwei Gruppenelementen  $a, b \in G$  die beiden Gleichungen*

$$a \circ x = b \text{ und } y \circ a = b$$

*eindeutige Lösungen  $x, y \in G$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die linke Gleichung. Aus beidseitiger Multiplikation mit  $a^{-1}$  (bzw. mit  $a$ ) von links folgt, dass nur

$$x = a^{-1} \circ b$$

als Lösung in Frage kommt. Wenn man dies einsetzt, so sieht man, dass es sich in der Tat um eine Lösung handelt. □

### 19.3. Die Ordnung auf den ganzen Zahlen.

Wir erweitern die Größergleichrelation auf den natürlichen Zahlen zu einer Ordnung auf den ganzen Zahlen.

**Definition 19.9.** Auf den ganzen Zahlen definieren wir folgendermaßen die *Größergleichrelation*  $\geq$ . Wir sagen

$$a \geq b,$$

wenn es eine natürliche Zahl  $n$  mit

$$a = b + n$$

gibt.

Damit gilt bei der Interpretation am Zahlenstrahl wieder, dass

$$a \geq b$$

bedeutet, dass  $a$  rechts von  $b$  liegt.

**Bemerkung 19.10.** (1) Wenn  $a, b \in \mathbb{N}$  ist, so ist

$$a \geq b$$

einfach die Ordnung auf  $\mathbb{N}$ , wie unmittelbar aus Lemma 10.2 folgt.

(2) Wenn  $a \in \mathbb{N}$  ist und  $b$  negativ, so ist

$$a \geq b,$$

da ja dann

$$a = b + (a - b)$$

mit  $a - b \in \mathbb{N}$  ist, da ja sowohl  $a$  als auch  $-b$  natürliche Zahlen sind.

(3) Wenn  $a$  und  $b$  beide negativ sind, so ist

$$a \geq b$$

genau dann, wenn (innerhalb der natürlichen Zahlen)

$$-b \geq -a$$

gilt. Die Beziehung  $a = b + n$  mit einer natürlichen Zahl  $n$  ist ja zu  $-a = -b - n$  äquivalent, was man als  $-b = -a + n$  schreiben kann.

**Lemma 19.11.** Die Größergleichrelation  $\geq$  auf den ganzen Zahlen erfüllt die folgenden Eigenschaften.

- (1) Es liegt eine totale Ordnung vor.
- (2) Aus  $a \geq b$  folgt  $a + c \geq b + c$  für beliebige  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,
- (3) Aus  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  folgt  $ab \geq 0$  für beliebige  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* (1) Aufgabe

- (2) Die Beziehung  $a \geq b$  bedeutet, dass es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $a = b + n$  gibt. Durch beidseitige Addition von  $c$  ergibt sich  $a + c = b + c + n$ , was  $a + c \geq b + c$  bedeutet.

- (3) Die Voraussetzung bedeutet, dass  $a, b \in \mathbb{N}$  sind. Somit ist auch  $ab \in \mathbb{N}$ , also  $ab \geq 0$ .

□

Damit bilden die ganzen Zahlen  $(\mathbb{Z}, \geq)$  einen angeordneten Ring im Sinne der folgenden Definition.

**Definition 19.12.** Ein kommutativer Ring heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „ $\geq$ “ auf  $R$  gibt, die die beiden Eigenschaften

- (1) Aus  $a \geq b$  folgt  $a + c \geq b + c$  für beliebige  $a, b, c \in R$ ,
- (2) Aus  $a, b \geq 0$  folgt  $ab \geq 0$ ,

erfüllt.

Neben den ganzen Zahlen werden wir später zwei weitere angeordnete Ringe kennenlernen, nämlich den Körper der rationalen Zahlen und den Körper der reellen Zahlen. Für all diese Ringe bzw. Körper gelten die folgenden Eigenschaften. Man überlege sich für den Fall der ganzen Zahlen, ob und inwiefern sich die Beweise der folgenden Aussage vereinfachen.

**Lemma 19.13.** *In einem angeordneten Ring gelten die folgenden Eigenschaften.*

- (1)  $1 \geq 0$ .
- (2) Es ist  $a \geq 0$  genau dann, wenn  $-a \geq 0$  ist.
- (3) Es ist  $a \geq b$  genau dann, wenn  $a - b \geq 0$  ist.
- (4) Es ist  $a \geq b$  genau dann, wenn  $-a \leq -b$  ist.
- (5) Aus  $a \geq b$  und  $c \geq d$  folgt  $a + c \geq b + d$ .
- (6) Aus  $a \geq b$  und  $c \geq 0$  folgt  $ac \geq bc$ .
- (7) Aus  $a \geq b$  und  $c \leq 0$  folgt  $ac \leq bc$ .
- (8) Aus  $a \geq b \geq 0$  und  $c \geq d \geq 0$  folgt  $ac \geq bd$ .
- (9) Aus  $a \geq 0$  und  $b \leq 0$  folgt  $ab \leq 0$ .
- (10) Aus  $a \leq 0$  und  $b \leq 0$  folgt  $ab \geq 0$ .

*Beweis.* (1) Nehmen wir an, dass  $1 \geq 0$  nicht gilt. Da eine totale Ordnung vorliegt, muss

$$1 < 0$$

gelten, Dies müssen wir zum Widerspruch führen. Nehmen wir  $1 < 0$  an. Aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition kann man beidseitig  $-1$  addieren und erhält

$$0 < -1.$$

Aufgrund der Verträglichkeit mit der Multiplikation mit positiven Elementen kann man diese Abschätzung quadrieren und erhält

$$0 \leq (-1)(-1) = 1,$$

also ist zugleich  $1 \geq 0$ , ein Widerspruch.

- (2) Folgt unmittelbar aus der Verträglichkeit mit der Addition.
- (3) Folgt unmittelbar aus der Verträglichkeit mit der Addition.
- (4) Folgt unmittelbar aus der Verträglichkeit mit der Addition.
- (5) Zweimalige Anwendung der Verträglichkeit mit der Addition liefert

$$a + c \geq a + d \geq b + d.$$

- (6) Aus  $a \geq b$  folgt durch Subtraktion mit  $b$  aufgrund der Verträglichkeit mit der Addition die Abschätzung  $a - b \geq b - b = 0$ . Aus der Verträglichkeit mit der Multiplikation ergibt sich

$$ca - cb = c(a - b) \geq 0.$$

Addition mit  $cb$  ergibt  $ca \geq cb$ .

- (7) Siehe Aufgabe 19.15.
- (8) Nach (2) ist  $-b \geq 0$ , also

$$a(-b) \geq 0,$$

was wiederum  $ab \leq 0$  bedeutet.

- (9) Zweimalige Anwendung von (6) liefert

$$ac \geq bc \geq bd.$$

- (10) Folgt aus (2) und aus  $(-a)(-b) = ab$ .

□

Die Eigenschaft (2) kann man so verstehen, dass das Negative eines positiven Elementes negativ ist. Allerdings tritt dabei negativ in zwei verschiedenen Bedeutungen auf!

#### 19.4. Die Teilbarkeitsbeziehung für ganze Zahlen.

Wir wollen die Teilbarkeitsbeziehung von  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Z}$  erweitern.

**Definition 19.14.** Man sagt, dass die ganze Zahl  $a$  die ganze Zahl  $b$  *teilt* (oder dass  $b$  von  $a$  *geteilt* wird, oder dass  $b$  ein *Vielfaches* von  $a$  ist), wenn es eine ganze Zahl  $c$  derart gibt, dass  $b = c \cdot a$  ist. Man schreibt dafür auch  $a|b$ .

Für natürliche Zahlen  $a, b$  gilt  $a|b$  in  $\mathbb{N}$  genau dann, wenn  $a|b$  in  $\mathbb{Z}$  gilt. Die folgende Aussage ist eine direkte Verallgemeinerung von Lemma 12.3, sie beruht ausschließlich auf Eigenschaften eines kommutativen Ringes.

**Lemma 19.15.** *In  $\mathbb{Z}$  gelten folgende Teilbarkeitsbeziehungen.*

- (1) Für jede ganze Zahl  $a$  gilt  $1|a$  und  $a|a$ .
- (2) Für jede ganze Zahl  $a$  gilt  $a|0$ .
- (3) Gilt  $a|b$  und  $b|c$ , so gilt auch  $a|c$ .
- (4) Gilt  $a|b$  und  $c|d$ , so gilt auch  $ac|bd$ .
- (5) Gilt  $a|b$ , so gilt auch  $ac|bc$  für jede ganze Zahl  $c$ .
- (6) Gilt  $a|b$  und  $a|c$ , so gilt auch  $a|(rb + sc)$  für beliebige ganze Zahlen  $r, s$ .

*Beweis.* Siehe Aufgabe 19.15. □

### 19.5. Die Zifferndarstellung für ganze Zahlen.

Die Zifferndarstellung von natürlichen Zahlen überträgt sich direkt auf ganze Zahlen, wobei die Zifferndarstellung einer negativen Zahl

$$n = -k$$

einfach die Zifferndarstellung von  $k$  (also der im Betrag genommenen Zahl) mit einem Minuszeichen davor ist. Für die schriftliche Durchführung des Addierens, des Multiplizierens und des Subtrahierens geht man abhängig davon vor, ob die beteiligten Zahlen beide positiv, beide negativ oder ob eine positiv, eine negativ ist. Wenn beide positiv sind werden die Verfahren für natürliche Zahlen direkt angewendet. Die Korrektheit der folgenden Regeln beruht auf Lemma 19.4 und der Korrektheit der schriftlichen Operationen innerhalb der natürlichen Zahlen.

Zur Addition

- (1) Wenn beide Zahlen negativ sind, so nimmt man den Betrag der beiden Zahlen, addiert diese und nimmt davon das Negative.
- (2) Wenn eine Zahl positiv ist und eine negativ ist, so zieht man von der betragsmäßig größeren Zahl die betragsmäßig kleinere Zahl ab. Wenn die positive Zahl betragsmäßig größer ist, so hat man die Lösung, wenn die negative Zahl betragsmäßig größer ist, so muss man das Errechnete negieren.

Zur Multiplikation

- (1) Wenn beide Zahlen negativ sind, so multipliziert man einfach die Beträge der beiden Zahlen miteinander.
- (2) Wenn eine Zahl positiv ist und eine negativ ist, so multipliziert man ebenfalls die Beträge miteinander und nimmt dieses Ergebnis negativ.

Die Subtraktion fasst man als Addition mit eventuell negativen Zahlen auf.

Wenn eine ganze Zahl in der Form

$$n = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0$$

gegeben ist, wobei die  $c_i$  beliebige ganze Zahlen sind, so kann man nicht unmittelbar die zugehörige Dezimalentwicklung ablesen, da dies wesentlich davon abhängt, ob die Zahl positiv oder negativ ist.

## 19. ARBEITSBLATT

### 19.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 19.1.** Formuliere die zweite binomische Formel für einen kommutativen Ring  $R$  und führe sie auf die erste binomische Formel zurück.

## 19.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 19.2.** Formuliere und beweise die dritte binomische Formel für einen kommutativen Ring  $R$ .

**Aufgabe 19.3.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und seien  $x, y$  und  $z$  Elemente in  $R$ . Berechne

$$(2x^3 - xy^2z - 4x^2y^2)(-2x^3 - z - xyz) - x^2(4 - 3y - 5xy^5z) .$$

**Aufgabe 19.4.** Zeige, dass  $\mathbb{Z}^2$  mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation ein kommutativer Ring ist. Gilt in diesem Ring die Eigenschaft, dass aus  $xy = 0$  folgt, dass  $x$  oder  $y$  gleich 0 ist?

**Aufgabe 19.5.** Lucy Sonnenschein befindet sich in Position  $(-2, 3) \in \mathbb{Z}^2$ , wobei sich im Folgenden die erste Komponente auf links/rechts und die zweite Komponente auf vorne/hinten bezieht. Sie geht vier Schritte nach rechts, dann zwei Schritte nach hinten, dann einen Schritt nach links, einen (etwas größeren) Diagonalschritt nach links hinten und schließlich zwei Schritte nach vorne. In welcher Position befindet sie sich zum Schluss? Durch welche möglichst einfache Bewegung kann sie die Gesamtbewegung rückgängig machen?

**Aufgabe 19.6.** Sei  $M$  eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  mit dem Durchschnitt  $\cap$  als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition ein kommutativer Ring ist.

**Aufgabe 19.7.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Multiplikation mit  $-1$ , also die Abbildung

$$R \longrightarrow R, g \longmapsto -g,$$

bijektiv ist.

**Aufgabe 19.8.** Diskutiere, welche Bedeutungen die Begriffe *positiv* und *negativ* in einem kommutativen Ring besitzen. Wie sieht es in  $\mathbb{Z}$  aus? Welche Bedeutung ist relativ, welche absolut?

**Aufgabe 19.9.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und es seien  $k, m, n$  ganze Zahlen und  $x, y \in R$ . Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Zu  $n \in \mathbb{N}$  ist  $nx$  (also die  $n$ -fache Summe von  $x$  mit sich selbst) gleich  $(1 + \dots + 1) \cdot x$ , wobei links die  $n$ -fache Summe der  $1 \in R$  mit sich selbst steht.
- (2) Zu  $n \in \mathbb{N}$  ist  $-n$  (also die  $n$ -fache Summe des Negativen von 1 mit sich selbst) gleich dem Negativen (in  $R$ ) von  $n = 1 + \dots + 1$ .
- (3) Es ist

$$(m + k)x = mx + kx.$$

- (4) Es ist

$$k(x + y) = kx + ky.$$

- (5) Es ist

$$(km)x = k(mx).$$

### Aufgabe 19.10.\*

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring. Zu jedem  $f \in R$  sei

$$\mu_f: R \longrightarrow R, g \longmapsto fg,$$

die Multiplikation mit  $f$ . Zeige, dass  $\mu_f$  genau dann bijektiv ist, wenn es surjektiv ist.

Man zeige durch ein Beispiel, dass in dieser Situation aus der Injektivität nicht die Bijektivität folgt.

### Aufgabe 19.11.\*

Sei  $G$  eine Gruppe. Zeige, dass

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

für alle  $x \in G$  ist.

**Aufgabe 19.12.** Es sei  $M$  eine Menge und es sei  $B$  die Menge aller bijektiven Abbildungen von  $M$  nach  $M$ . Zeige, dass  $B$  mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist. Was ist das neutrale Element, was ist das inverse Element zu  $f \in B$ ?

**Aufgabe 19.13.** Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $g \in G$  ein Element und sei

$$\varphi: G \longrightarrow G, x \longmapsto x \circ g,$$

die Verknüpfung mit  $g$ . Zeige, dass  $\varphi$  bijektiv ist. In welcher Beziehung steht diese Aussage zu Lemma 19.8?

**Aufgabe 19.14.\***

Person  $A$  wird 80 Jahre alt und Person  $B$  wird 70 Jahre alt. Vergleiche die Gesamtlebenswachzeit und die Gesamtlebensschlafzeit der beiden Personen bei folgendem Schlafverhalten.

- (1)  $A$  schläft jede Nacht 7 Stunden und  $B$  schläft jede Nacht 8 Stunden.
- (2)  $A$  schläft jede Nacht 8 Stunden und  $B$  schläft jede Nacht 7 Stunden.

**Aufgabe 19.15.** Es sei  $R$  ein angeordneter Ring. Zeige, dass für jedes  $x \in R$  die Beziehung  $x^2 = xx \geq 0$  gilt.

**Aufgabe 19.16.** Zeige, dass in einem angeordneten Ring aus  $a \geq b$  und  $c \leq 0$  die Beziehung  $ac \leq bc$  folgt.

**Aufgabe 19.17.** Es sei  $R$  ein angeordneter Ring und  $x > y$ . Zeige, dass dann  $-x < -y$  ist.

**Aufgabe 19.18.** Es sei  $R$  ein angeordneter Ring und  $x, y \geq 0$ . Zeige, dass  $x \geq y$  genau dann gilt, wenn  $x^2 \geq y^2$  gilt.

**Aufgabe 19.19.** Bestimme das Maximum und das Minimum der folgenden ganzen Zahlen.

- a) 4, -7, -6, 8, 5,
- b) -3, -2, -1, 0,
- c)  $-4+3$ ,  $2-3$ ,  $4-5$ ,  $6-7$ ,  $-4+6$ . Wie lautet die Antwort, wenn man jeweils die Beträge dieser Zahlen betrachtet?

**Aufgabe 19.20.** Welche Teilerbeziehung besteht zwischen 0 und einer beliebigen ganzen Zahl  $n$  und welche Teilerbeziehung besteht zwischen 1 und einer beliebigen ganzen Zahl  $n$ ?

**Aufgabe 19.21.** Beweise die Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen, die in Lemma 19.15 aufgelistet sind.

**Aufgabe 19.22.** Zeige, dass für je zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  aus

$$a|b \text{ und } b|a$$

die Beziehung  $a = \pm b$  folgt.

**Aufgabe 19.23.\***

Zeige, dass für jede ungerade Zahl  $n$  die Zahl  $25n^2 - 17$  ein Vielfaches von 8 ist.

**Aufgabe 19.24.** Rechne im Dezimalsystem

$$5382 - 6981 .$$

**Aufgabe 19.25.** Rechne im Dezimalsystem

$$-75009 + 9817 .$$

**Aufgabe 19.26.** Bestimme die Darstellung der ganzen Zahl

$$n = 5 \cdot 10^3 - 70 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

im Zehnersystem.

**Aufgabe 19.27.** Bestimme die Darstellung der ganzen Zahl

$$n = 11 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 - 2561 \cdot 10^0$$

im Zehnersystem.

**Aufgabe 19.28.** Es liegen zwei ganze Zahlen  $m$  und  $n$  im Dezimalsystem vor. Lässt sich die letzte Ziffer der Summe  $m+n$  allein aus den beiden letzten Ziffern der beiden Zahlen bestimmen?

**19.3. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 19.29.** (3 Punkte)

Sei  $R$  ein Ring und seien  $x, y$  und  $z$  Elemente in  $R$ . Berechne das Produkt

$$(x^2 - 3yzy - 2zy^2 + 4xy^2) (2xy^3x - z^2xyx) (1 - 3zyxz^2y) .$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

**Aufgabe 19.30.** (3 Punkte)

Zeige, dass für ganze Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  genau dann das „umgekehrte Distributivgesetz“

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

gilt, wenn

$$a = 0$$

oder

$$a + b + c = 1$$

ist.

**Aufgabe 19.31.** (3 Punkte)

Bestimme das Maximum und das Minimum der folgenden ganzen Zahlen.

a)  $-6, 4, -5, 3, 5,$

b)  $-7, -5, -6, -4,$

c)  $-6 + 2, 2 - 8, 5 - 5, 3 - 7, 5 - 9.$  Wie lautet die Antwort, wenn man jeweils die Beträge dieser Zahlen betrachtet?

**Aufgabe 19.32.** (2 Punkte)

Rechne im Dezimalsystem

$$-4901 - 5328.$$

**Aufgabe 19.33.** (2 Punkte)

Bestimme die Darstellung der ganzen Zahl

$$n = -3 \cdot 10^3 + 31 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 - 37 \cdot 10^0$$

im Zehnersystem.

**Aufgabe 19.34.** (6 Punkte)

Zeige, dass es für jede ganze Zahl  $z$  eine eindeutige Darstellung

$$z = \sum_{i=0}^n c_i 10^i$$

mit

$$-4 \leq c_i \leq 5$$

für alle  $i$  gibt.

## 20. VORLESUNG - EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Wir kehren zur Thematik der Primzahlen und der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl zurück. Bisher kennen wir nur die Existenz einer Primfaktorzerlegung (siehe Satz 12.9), aber noch nicht die Eindeutigkeit. Obwohl wir diese Fragestellung für natürliche Zahlen formuliert haben, ergibt sich im Kontext der ganzen Zahlen ein neuer Zusammenhang, der für diese Thematik hilfreich ist.

## 20.1. Teilerfremdheit und das Lemma von Bezout.

**Aufgabe 20.1.\***

Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über einen 7- und einen 10-Liter-Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, insgesamt genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Kann sie diesen Auftrag erfüllen?



Die Aufgabe ist lösbar: Man macht dreimal den 7-Liter-Eimer in der Nordsee voll und transportiert dies in die Ostsee. Danach (oder gleichzeitig) macht man zweimal den 10-Liter-Eimer in der Ostsee voll und transportiert dies in die Nordsee. Unterm Strich hat man dann

$$3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1$$

Liter transportiert (eine andere Möglichkeit ist  $5 \cdot 10 - 7 \cdot 7 = 1$ ). Die dieser Überlegung zugrunde liegende Aussage heißt *Lemma von Bezout*.

**Satz 20.2.** *Es seien  $a, b \in \mathbb{N}$  zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Dann gibt es ganze Zahlen  $r, s \in \mathbb{Z}$  mit  $ra + sb = 1$ .*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch Induktion über das Maximum von  $a$  und  $b$ , wobei wir ohne Einschränkung  $a \leq b$  wählen können. Wenn das

Maximum 0 ist, so sind beide Zahlen 0 und somit nicht teilerfremd. Wenn das Maximum 1 ist, so ist  $b = 1$  und somit ist  $r = 0$  und  $s = 1$  eine Darstellung der 1. Seien nun  $a \leq b$  teilerfremd,  $b \geq 2$  und die Aussage sei für alle Zahlenpaare, deren Maxima kleiner als  $b$  sind, schon bewiesen. Dann ist  $a < b$ , da bei  $a = b$  die beiden Zahlen nicht teilerfremd sind. Ebenso können wir  $a = 0$  ausschließen. Wir betrachten das Zahlenpaar  $(a, b - a)$  und wollen darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Das Maximum dieses neuen Paares ist jedenfalls kleiner als  $b$ . Allerdings müssen wir, damit die Induktionsvoraussetzung wirklich eingesetzt werden kann, wissen, dass auch  $a$  und  $b - a$  teilerfremd sind. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, dass  $a$  und  $b - a$  nicht teilerfremd sind. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $t \geq 2$ , die sowohl  $a$  als auch  $b - a$  teilt. Dies bedeutet wiederum, dass es natürliche Zahlen  $m, n$  mit  $a = mt$  und  $b - a = nt$  gibt. Doch dann ist

$$b = (b - a) + a = nt + mt = (n + m)t$$

ebenfalls ein Vielfaches von  $t$ , im Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $a$  und  $b$ . Die Induktionsvoraussetzung ist also auf  $a$  und  $b - a$  anwendbar und somit gibt es ganze Zahlen  $r, s$  mit

$$ra + s(b - a) = 1.$$

Dann ist aber auch

$$(r - s)a + sb = ra + s(b - a) = 1$$

und wir haben eine Darstellung der 1 mit  $a$  und  $b$  gefunden.  $\square$

Die Division mit Rest, die wir bisher nur für natürliche Zahlen formuliert haben, überträgt sich unmittelbar auf ganze Zahlen (der Divisor bleibt eine natürliche Zahl).

**Satz 20.3.** *Sei  $d$  eine fixierte positive natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder ganzen Zahl  $n$  eine eindeutig bestimmte ganze Zahl  $q$  und eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl  $r$ ,  $0 \leq r \leq d - 1$ , mit*

$$n = qd + r.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 20.4.  $\square$

**Definition 20.4.** Sei  $(G, e, \circ)$  eine Gruppe. Eine Teilmenge  $H \subseteq G$  heißt *Untergruppe* von  $G$  wenn folgendes gilt.

- (1)  $e \in H$ .
- (2) Mit  $g, h \in H$  ist auch  $g \circ h \in H$ .
- (3) Mit  $g \in H$  ist auch  $g^{-1} \in H$ .

In einer Untergruppe kann man also die Verknüpfung der Gruppe ausführen, man kann das Inverse nehmen und das neutrale Element gehört dazu. In additiver Schreibweise, die für uns im Mittelpunkt steht, bedeuten die Bedingungen einfach

- (1)  $0 \in H$ .
- (2) Mit  $g, h \in H$  ist auch  $g + h \in H$ .
- (3) Mit  $g \in H$  ist auch das Negative  $-g \in H$ .

Beispielsweise bilden alle Vielfachen der 5 innerhalb der ganzen Zahlen eine Untergruppe, die wir mit  $\mathbb{Z}5$  bezeichnen. Es ist ja

$$0 = 0 \cdot 5,$$

wenn  $g = 5 \cdot a$  und  $h = 5 \cdot b$  sind, so ist

$$h + g = 5 \cdot (a + b)$$

nach dem Distributivgesetz und mit  $g = 5 \cdot a$  ist  $-g = 5 \cdot (-a)$ . Wie im eingangs gegebenen Beispiel kann man sich eine Menge  $a_1, \dots, a_k$  von ganzen Zahlen (Eimergrößen) vorgeben und sich fragen, welche Zahlen man daraus mit Hilfe von ganzzahligen Koeffizienten bilden kann (welche Wassermengen man transportieren kann). Es geht also um die Menge aller Zahlen der Form

$$n_1 a_1 + \dots + n_k a_k \text{ mit } n_j \in \mathbb{Z}.$$

Diese Gesamtmenge bildet eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}$ , man spricht von der von den  $a_1, \dots, a_k$  erzeugten Untergruppe von  $\mathbb{Z}$ . Statt Eimern kann man sich eine Menge von ganzzahligen Pfeilen vorstellen.

**Satz 20.5.** Die Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  sind genau die Teilmengen der Form

$$\mathbb{Z}d = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen Zahl  $d$ .

*Beweis.* Eine Teilmenge der Form  $\mathbb{Z}d$  ist aufgrund der Distributivgesetze eine Untergruppe. Sei umgekehrt  $H \subseteq \mathbb{Z}$  eine Untergruppe. Bei  $H = 0$  kann man  $d = 0$  nehmen, so dass wir voraussetzen dürfen, dass  $H$  neben 0 noch mindestens ein weiteres Element  $x$  enthält. Wenn  $x$  negativ ist, so muss die Untergruppe  $H$  auch das Negative davon, also  $-x$  enthalten, welches positiv ist. D.h.  $H$  enthält auch positive Zahlen. Sei nun  $d$  die kleinste positive Zahl aus  $H$ . Wir behaupten  $H = \mathbb{Z}d$ . Dabei ist die Inklusion  $\mathbb{Z}d \subseteq H$  klar, da mit  $d$  alle (positiven und negativen) Vielfachen von  $d$  dazugehören müssen. Für die umgekehrte Inklusion sei  $h \in H$  beliebig. Nach der Division mit Rest gilt

$$h = qd + r \text{ mit } 0 \leq r < d.$$

Wegen  $h \in H$  und  $qd \in H$  ist auch  $r = h - qd \in H$ . Nach der Wahl von  $d$  muss wegen  $r < d$  gelten:  $r = 0$ . Dies bedeutet  $h = qd$  und damit  $h \in \mathbb{Z}d$ , also  $H \subseteq \mathbb{Z}d$ .  $\square$

**Lemma 20.6.** Seien  $a_1, \dots, a_k$  ganze Zahlen und  $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$  die davon erzeugte Untergruppe. Eine ganze Zahl  $t$  ist ein gemeinsamer Teiler der  $a_1, \dots, a_k$  genau dann, wenn  $H \subseteq \mathbb{Z}t$  ist, und  $t$  ist ein größter gemeinsamer Teiler genau dann, wenn  $H = \mathbb{Z}t$  ist.

*Beweis.* Aus  $H = (a_1, \dots, a_k) \subseteq (t)$  folgt sofort  $a_i\mathbb{Z} \subseteq t\mathbb{Z}$  für jedes  $i = 1, \dots, k$ , was gerade bedeutet, dass  $t$  diese Zahlen teilt, also ein gemeinsamer Teiler ist. Sei umgekehrt  $t$  ein gemeinsamer Teiler. Dann ist  $a_i \in t\mathbb{Z}$  und da  $H = (a_1, \dots, a_k)$  die kleinste Untergruppe ist, die alle  $a_i$  enthält, muss  $H \subseteq t\mathbb{Z}$  gelten.

Aufgrund von Satz 20.4 wissen wir, dass es eine ganze Zahl  $g$  gibt mit  $H = \mathbb{Z}g$ . Für einen anderen gemeinsamen Teiler  $t$  der  $a_i$  gilt  $\mathbb{Z}g = H \subseteq \mathbb{Z}t$ , so dass  $g$  von allen anderen gemeinsamen Teilern geteilt wird, also ein größter gemeinsamer Teiler ist.  $\square$

## 20.2. Der Euklidische Algorithmus.

Es seien  $a, b$  ganze Zahlen,  $b \neq 0$ . Dann kann man die Division mit Rest durchführen und erhält  $a = qb + r$  mit  $0 \leq r < b$ . Danach kann man (bei  $r \neq 0$ ) die Division mit Rest von  $b$  durch  $r$  durchführen, d.h.  $b$  nimmt die Rolle von  $a$  und  $r$  die Rolle von  $b$  ein und erhält einen neuen Rest. Dies kann man fortsetzen, und da dabei die Reste immer kleiner werden bricht das Verfahren irgendwann ab.



Euklid (4. Jahrhundert v. C.)

**Definition 20.7.** Seien zwei ganze Zahlen  $a, b$  (mit  $b \neq 0$ ) gegeben. Dann nennt man die durch die Anfangsbedingungen  $r_0 = a$  und  $r_1 = b$  und die mittels der Division mit Rest

$$r_i = q_i r_{i+1} + r_{i+2}$$

rekursiv bestimmte Folge  $r_i$  die *Folge der euklidischen Reste*.

**Satz 20.8.** Seien zwei ganze Zahlen  $r_0 = a$  und  $r_1 = b \neq 0$  gegeben. Dann besitzt die Folge  $r_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , der euklidischen Reste folgende Eigenschaften.

- (1) Es ist  $r_{i+2} = 0$  oder  $r_{i+2} < r_{i+1}$ .

- (2) Es gibt ein (minimales)  $k \geq 2$  mit  $r_k = 0$ .  
 (3) Es ist  $\text{ggT}(r_{i+1}, r_i) = \text{ggT}(r_i, r_{i-1})$ .  
 (4) Sei  $k \geq 2$  der erste Index derart, dass  $r_k = 0$  ist. Dann ist

$$\text{ggT}(a, b) = r_{k-1}.$$

*Beweis.* (1) Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Division mit Rest.

- (2) Solange  $r_i \neq 0$  ist, wird die Folge der natürlichen Zahlen  $r_i$  immer kleiner, so dass irgendwann der Fall  $r_i = 0$  eintreten muss.  
 (3) Wenn  $t$  ein gemeinsamer Teiler von  $r_{i+1}$  und von  $r_{i+2}$  ist, so zeigt die Beziehung

$$r_i = q_i r_{i+1} + r_{i+2},$$

dass  $t$  auch ein Teiler von  $r_i$  und damit ein gemeinsamer Teiler von  $r_{i+1}$  und von  $r_i$  ist. Die Umkehrung folgt genauso.

- (4) Dies folgt aus (3) mit der Gleichungskette

$$\begin{aligned} \text{ggT}(a, b) &= \text{ggT}(b, r_2) \\ &= \text{ggT}(r_2, r_3) \\ &= \dots \\ &= \text{ggT}(r_{k-2}, r_{k-1}) = \text{ggT}(r_{k-1}, r_k) = \text{ggT}(r_{k-1}, 0) = r_{k-1}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 20.9.** Aufgabe:

Bestimme in  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 71894 und 45327.

Lösung:

Der Euklidische Algorithmus liefert:

$$71894 = 1 \cdot 45327 + 26567$$

$$45327 = 1 \cdot 26567 + 18760$$

$$26567 = 1 \cdot 18760 + 7807$$

$$18760 = 2 \cdot 7807 + 3146$$

$$7807 = 2 \cdot 3146 + 1515$$

$$3146 = 2 \cdot 1515 + 116$$

$$1515 = 13 \cdot 116 + 7$$

$$116 = 16 \cdot 7 + 4$$

$$7 = 1 \cdot 4 + 3$$

$$4 = 1 \cdot 3 + 1.$$

Die Zahlen 71894 und 45327 sind also teilerfremd.

Bei kleinen Zahlen sieht man häufig relativ schnell direkt, was ihr größter gemeinsamer Teiler ist, da man die Primfaktorzerlegung kennt bzw. mögliche gemeinsame Teiler schnell übersehen kann. Bei zwei größeren Zahlen müssten aber viel zu viele Probedivisionen durchgeführt werden! Der euklidische Algorithmus ist also zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ein sehr effektives Verfahren!

Wenn man mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler  $d$  von zwei Zahlen  $a$  und  $b$  gefunden hat, so kann man aus diesen Rechnungen häufig direkt ablesen, wie die Quotienten  $\frac{a}{d}$  und  $\frac{b}{d}$  aussehen.

Es seien zwei Strecken  $s$  und  $t$  gegeben. Man sagt, dass  $t$  ein (ganzzahliges) Vielfaches von  $s$  ist, wenn es eine natürliche Zahl  $n$  mit der Eigenschaft gibt, dass sich die Strecke  $t$  ergibt, wenn man die Strecke  $s$   $n$ -fach gerade hintereinanderlegt (die Strecke wird also  $n$ -mal genommen). Für zwei Strecken  $s$  und  $t$  gibt es das folgende Konzept, das ihre ganzzahlige Vergleichbarkeit ausdrückt. Man beachte, dass dieses Konzept unabhängig von in Zahlen ausgedrückten Messungen ist.

**Definition 20.10.** Zwei Strecken  $s$  und  $t$  heißen *kommensurabel*, wenn es eine Strecke  $g$  mit der Eigenschaft gibt, dass beide Strecken ganzzahlige Vielfache von  $g$  sind.

Auch der euklidische Algorithmus hat in diesem Kontext eine sinnvolle Interpretation. Die Strecke  $t$  sei mindestens so lang wie  $s$ . Dann ist

$$t = ns + r$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  und einer Reststrecke  $r$ , die kürzer als  $s$  ist und eventuell 0 ist. Die Gleichung ist dabei als eine Gleichung von hintereinander hingelegten Strecken zu verstehen. Wie in Satz 20.8 ergibt sich, dass mit  $s$  und  $t$  auch  $s$  und  $r$  kommensurabel sind. Wenn man dieses Verfahren rekursiv fortsetzt, so tritt im Falle der Kommensurabilität irgendwann die Situation auf, wo die kleine Strecke in die größere Strecke voll aufgeht. Somit hat man dann auch die größte gemeinsame Teilerstrecke gefunden.

### 20.3. Darstellung des größten gemeinsamen Teilers.

Mit dem euklidischen Algorithmus kann man auch durch Zurückrechnen eine Darstellung des größten gemeinsamen Teilers als Linearkombination der beiden vorgegebenen Zahlen erhalten. Dazu seien

$$r_i = q_i r_{i+1} + r_{i+2}$$

die Gleichungen im euklidischen Algorithmus und  $r_{k-1} = \text{ggT}(r_0, r_1)$ . Aus der letzten Gleichung

$$r_{k-3} = q_{k-3} r_{k-2} + r_{k-1}$$

erhält man die Darstellung

$$r_{k-1} = r_{k-3} - q_{k-3} r_{k-2}$$

von  $r_{k-1}$  als Linearkombination mit  $r_{k-3}$  und  $r_{k-2}$ . Mit der vorhergehenden Zeile

$$r_{k-4} = q_{k-4} r_{k-3} + r_{k-2}$$

bzw.

$$r_{k-2} = r_{k-4} - q_{k-4} r_{k-3}$$

kann man in dieser Darstellung  $r_{k-2}$  ersetzen und erhält eine Darstellung von  $r_{k-1}$  als Linearkombination von  $r_{k-3}$  und  $r_{k-4}$ . So fortfahrend erhält man schließlich eine Darstellung von

$$r_{k-1} = \text{ggT}(r_0, r_1)$$

als Linearkombination von  $r_0$  und  $r_1$ .

**Beispiel 20.11.** Wir wollen für 52 und 30 eine Darstellung des größten gemeinsamen Teilers finden. Wir führen dazu den euklidischen Algorithmus durch.

$$52 = 1 \cdot 30 + 22$$

$$30 = 1 \cdot 22 + 8$$

$$22 = 2 \cdot 8 + 6$$

$$8 = 1 \cdot 6 + 2$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0.$$

D.h. 2 ist der größte gemeinsame Teiler von 52 und 30. Rückwärts gelesen erhält man daraus die Darstellung

$$\begin{aligned} 2 &= 8 - 6 \\ &= 8 - (22 - 2 \cdot 8) \\ &= 3 \cdot 8 - 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \cdot (30 - 22) - 22 \\
&= 3 \cdot 30 - 4 \cdot 22 \\
&= 3 \cdot 30 - 4 \cdot (52 - 30) \\
&= 7 \cdot 30 - 4 \cdot 52.
\end{aligned}$$

## 20. ARBEITSBLATT

### 20.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 20.1.** Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 5 und der andere ein Fassungsvermögen von 7 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

### 20.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 20.2.** Interpretiere das Lemma von Bezout als eine Lösungsaussage über eine Gleichung.

#### **Aufgabe 20.3.\***

Finde eine Darstellung der 1 für das Zahlenpaar 11 und 13.

**Aufgabe 20.4.** Man gebe eine Darstellung des ggT von 5 und 7 an. Wie viele solche Darstellungen gibt es?

**Aufgabe 20.5.** Finde eine Darstellung der 1 für die folgenden Zahlenpaare: 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

**Aufgabe 20.6.** Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über 77-, 91- und 143-Liter Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Wie kann sie den Auftrag erfüllen?

**Aufgabe 20.7.** Zeige, dass es zu ganzen Zahlen  $d, n$  mit  $d > 0$  eindeutig bestimmte ganze Zahlen  $q, r$  mit  $0 \leq r < d$  und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

**Aufgabe 20.8.** Es seien  $n, d$  positive Zahlen und es sei

$$n = qd + r$$

mit  $q \in \mathbb{N}$  und  $r$  zwischen 0 und  $d - 1$ . Wie erhält man daraus die Division mit Rest von  $-n$  durch  $d$ ?

**Aufgabe 20.9.\***

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen  $d, n$  mit  $d > 0$  eindeutig bestimmte ganze Zahlen  $k, s$  mit

$$n = kd + s$$

und mit

$$-\frac{d}{2} < s \leq \frac{d}{2}$$

gibt.

**Aufgabe 20.10.** Zeige, dass für zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  die folgenden Beziehungen äquivalent sind.

- (1)  $a$  teilt  $b$  (also  $a|b$ ).
- (2)  $b \in \mathbb{Z}a$ .
- (3)  $\mathbb{Z}b \subseteq \mathbb{Z}a$ .

**Aufgabe 20.11.** Auf den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

**Aufgabe 20.12.** Bestimme in  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 5439 und 3871.

**Aufgabe 20.13.** Bestimme in  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 2956 und 2444.

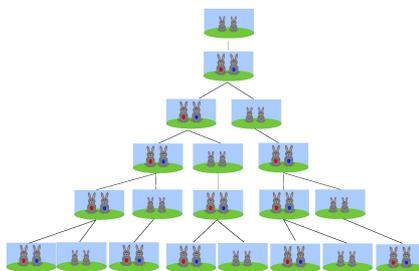
**Aufgabe 20.14.\***

Bestimme in  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1085 und 806 und schreibe die beiden Zahlen als Vielfache des größten gemeinsamen Teilers.

**Aufgabe 20.15.** Es seien  $a$  und  $b$  teilerfremde natürliche Zahlen. Es stehen beliebig viele Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, deren Fassungsvermögen  $a$  bzw.  $b$  ist. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

**Aufgabe 20.16.\***

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von  $a$  und der andere ein Fassungsvermögen von  $b$  Litern, wobei  $a$  und  $b$  teilerfremd seien. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

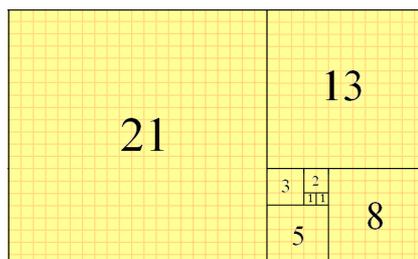


**Aufgabe 20.17.** Kaninchen werden bekanntlich immer zur Monatsmitte geboren, die Tragzeit beträgt einen Monat und die Geschlechtsreife erreichen sie im Alter von zwei Monaten. Jeder Wurf besteht aus genau einem Paar, und alle leben ewig.

Wir starten im Monat 1 mit einem Paar, das einen Monat alt ist. Sei  $f_n$  die Anzahl der Kaninchenpaare im  $n$ -ten Monat, also  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 1$ . Beweise durch Induktion die Rekursionsformel

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Diese Zahlfolge nennt man die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Wie viele der  $f_n$  Paare sind im  $n$ -ten Monat reproduktionsfähig?



Die Fibonacci-Zahlen sind somit  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

**Aufgabe 20.18.** Wende auf zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf?

**Aufgabe 20.19.\***

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen  $f_n$ . Sie besagt (für  $n \geq 2$ )

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

**Aufgabe 20.20.\***

Sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass das Produkt von  $n$  aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von  $n!$  geteilt wird.

### 20.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 20.21.** (2 Punkte)

Bestimme in  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 823 und 629.

**Aufgabe 20.22.** (2 Punkte)

Bestimme in  $\mathbb{Z}$  mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1983 und 1528.

**Aufgabe 20.23.** (4 Punkte)

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 4199, 2431 und 3553, sowie eine Darstellung desselben als eine Linearkombination der gegebenen Zahlen.

**Aufgabe 20.24.** (5 Punkte)

Es seien  $a, b$  teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass jede natürliche Zahl

$$n \geq ab$$

eine Darstellung

$$n = xa + yb$$

mit  $x, y \in \mathbb{N}$  besitzt.

**Aufgabe 20.25.** Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen  $-123, 55$  und  $-49$ . Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

**Aufgabe 20.26.** (6 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zähler Schritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

## 21. VORLESUNG - PRIMFAKTORZERLEGUNG

Ein guter Schüler lernt auch  
bei einem schlechten Lehrer ...

---

### 21.1. Kleinstes gemeinsames Vielfaches und größter gemeinsamer Teiler.

Zu einer ganzen Zahl  $a$  besteht  $\mathbb{Z}a$  aus allen Vielfachen von  $a$ . Zu zwei Zahlen  $a, b$  besteht somit der Durchschnitt  $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b$  aus allen Zahlen, die sowohl von  $a$  als auch von  $b$  Vielfache sind, also aus allen gemeinsamen Vielfachen von  $a$  und  $b$ . In der Tat gilt die folgende Aussage.

**Lemma 21.1.** *Es seien  $a_1, \dots, a_k$  ganze Zahlen. Dann ist*

$$\mathbb{Z}a_1 \cap \mathbb{Z}a_2 \cap \dots \cap \mathbb{Z}a_k = \mathbb{Z}u,$$

wobei  $u$  das kleinste gemeinsame Vielfache der  $a_1, \dots, a_k$  ist.

*Beweis.* Nach Aufgabe 21.23 ist der Durchschnitt der Untergruppen  $\mathbb{Z}a_i$  wieder eine Untergruppe von  $\mathbb{Z}$ . Nach Satz 20.4 gibt es ein eindeutig bestimmtes  $c \geq 0$  mit

$$\mathbb{Z}a_1 \cap \dots \cap \mathbb{Z}a_k = \mathbb{Z}c.$$

Wegen

$$\mathbb{Z}c \subseteq \mathbb{Z}a_i$$

für alle  $i$  ist  $c$  ein Vielfaches von jedem  $a_i$ , also ein gemeinsames Vielfaches der  $a_1, \dots, a_k$ . Für jedes gemeinsame Vielfache  $v$  dieser Elemente gilt

$$\mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{Z}a_1 \cap \dots \cap \mathbb{Z}a_k.$$

Die Zahl  $c$  besitzt also die Eigenschaft, dass jedes gemeinsame Vielfache der Elemente ein Vielfaches von  $c$  ist. Daher ist  $c$  das kleinste gemeinsame Vielfache.  $\square$

Für ganze Zahlen setzen wir den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache stets positiv an, um Eindeutigkeit zu erzielen. Grundsätzlich hat jeweils das Negative dazu die gleichen Eigenschaften.

**Lemma 21.2.** *Für natürliche Zahlen  $a, b, g$  gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Für teilerfremde  $a, b$  ist  $\text{kgV}(a, b) = ab$ .*
- (2) *Es gibt  $c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $a = c \cdot \text{ggT}(a, b)$  und  $b = d \cdot \text{ggT}(a, b)$ , wobei  $c, d$  teilerfremd sind.*
- (3) *Es ist  $\text{kgV}(ga, gb) = g \cdot \text{kgV}(a, b)$ .*
- (4) *Es ist  $\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = ab$ .*

*Beweis.* (1) Zunächst ist natürlich das Produkt  $ab$  ein gemeinsames Vielfaches von  $a$  und  $b$ . Sei also  $f$  irgendein gemeinsames Vielfaches, also  $f = ua$  und  $f = vb$ . Nach Satz 20.1 gibt es im teilerfremden Fall Zahlen  $r, s \in \mathbb{Z}$  mit  $ra + sb = 1$ . Daher ist

$$f = f \cdot 1 = f(ra + sb) = fra + fsb = vbra + uasb = (vr + us)ab$$

ein Vielfaches von  $ab$ .

- (2) Die Existenz von  $c$  und  $d$  ist klar. Hätten  $c$  und  $d$  einen gemeinsamen Teiler  $e \neq 1, -1$ , so ergäbe sich sofort der Widerspruch, dass  $e \cdot \text{ggT}(a, b)$  ein größerer gemeinsamer Teiler wäre.
- (3) Die rechte Seite ist offenbar ein gemeinsames Vielfaches von  $ga$  und  $gb$ . Sei  $n$  ein Vielfaches der linken Seite, also ein gemeinsames Vielfaches von  $ga$  und  $gb$ . Dann kann man schreiben  $n = uga$  und  $n = vgb$ . Damit ist  $uga = vgb$  und somit ist  $k := ua = vb$  (bei  $n \neq 0$   $n = 0$  ist erst recht ein Vielfaches der rechten Seite) ein gemeinsames Vielfaches von  $a$  und  $b$ . Also ist  $n = gk$  ein Vielfaches der rechten Seite.
- (4) Wir schreiben unter Verwendung der ersten Teile

$$\begin{aligned} \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) &= \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(c \cdot (\text{ggT}(a, b)), d \cdot (\text{ggT}(a, b))) \\ &= \text{ggT}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(c, d) \\ &= \text{ggT}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) \cdot cd \\ &= c \cdot \text{ggT}(a, b) \cdot d \cdot \text{ggT}(a, b) \\ &= ab. \end{aligned}$$

$\square$

Der Teil (4) der vorstehenden Aussage erlaubt es, das kleinste gemeinsame Vielfache zu zwei Zahlen algorithmisch dadurch zu bestimmen, dass man ihren größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des euklidischen Algorithmus bestimmt und das Produkt durch diesen teilt.

## 21.2. Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie.

Wir möchten nun zur Primfaktorzerlegung, deren Existenz wir bereits in Satz 12.9 gezeigt haben, beweisen, dass sie eindeutig ist. Natürlich kann man

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

schreiben, mit eindeutig ist also eindeutig bis auf die Reihenfolge gemeint. Um dies zu zeigen brauchen wir zunächst das sogenannte *Lemma von Euklid*, das eine wichtige Eigenschaft einer Primzahl beschreibt.

**Satz 21.3.** *Es sei  $p$  eine Primzahl und  $p$  teile ein Produkt  $ab$  von natürlichen Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$ . Dann teilt  $p$  einen der Faktoren.*

*Beweis.* Wir setzen voraus, dass  $a$  kein Vielfaches von  $p$  ist (andernfalls sind wir fertig). Dann müssen wir zeigen, dass  $b$  ein Vielfaches von  $p$  ist. Unter der gegebenen Voraussetzung sind  $a$  und  $p$  teilerfremd. Nach dem Lemma von Bezout gibt es ganze Zahlen  $r, s$  mit

$$ra + sp = 1$$

Da  $ab$  ein Vielfaches von  $p$  ist, gibt es ein  $t$  mit

$$ab = tp.$$

Daher ist

$$b = b \cdot 1 = b(ra + sp) = abr + bsp = tpr + bsp = p(tr + bs).$$

Also ist  $b$  ein Vielfaches von  $p$ . □

Aus dem Lemma von Euklid folgt sofort die etwas stärkere Aussage: Wenn eine Primzahl  $p$  ein beliebiges Produkt  $a_1 a_2 \cdots a_n$  teilt, dann teilt  $p$  mindestens einen Faktor. Man wendet das Lemma einfach auf  $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) \cdot a_n$  an (formal ist das eine Induktion über die Anzahl der Faktoren). Dies wird im Beweis des folgenden *Hauptsatzes der elementaren Zahlentheorie* verwendet.

**Satz 21.4.** *Jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , besitzt eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren.*

*D.h. es gibt eine Darstellung*

$$n = p_1 \cdots p_r$$

*mit Primzahlen  $p_i$ , und dabei sind die Primfaktoren bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Die Existenz der Primfaktorzerlegung wurde bereits in Satz 12.9 gezeigt. Die Eindeutigkeit wird durch Induktion über  $n$  gezeigt. Für  $n = 2$  liegt eine Primzahl vor. Sei nun  $n \geq 3$  und seien zwei Zerlegungen in Primfaktoren gegeben, sagen wir

$$n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s.$$

Wir müssen zeigen, dass nach Umordnung die Primfaktorzerlegungen übereinstimmen. Die Gleichheit bedeutet insbesondere, dass die Primzahl  $p_1$  das Produkt rechts teilt. Nach Satz 20.7 muss dann  $p_1$  einen der Faktoren rechts teilen. Nach Umordnung können wir annehmen, dass  $q_1$  von  $p_1$  geteilt wird. Da  $q_1$  selbst eine Primzahl ist, folgt, dass  $p_1 = q_1$  sein muss. Daraus ergibt sich durch Kürzen, dass

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$$

ist. Nennen wir diese Zahl  $n'$ . Da  $n' < n$  ist, können wir die Induktionsvoraussetzung auf  $n'$  anwenden und erhalten, dass links und rechts die gleichen Primzahlen stehen.  $\square$

In der *kanonischen Primfaktorzerlegung* schreibt man die beteiligten Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge mit ihrem jeweiligen Exponenten, also beispielsweise

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Damit ist insbesondere zu jeder ganzen Zahl  $n \neq 0$  und jeder Primzahl  $p$  eindeutig bestimmt, ob  $p$  in der Primfaktorzerlegung überhaupt vorkommt und wenn ja mit welchem Exponenten.

**Definition 21.5.** Zu einer ganzen Zahl  $n \neq 0$  und einer Primzahl  $p$  nennt man den Exponenten, mit dem  $p$  in der Primfaktorzerlegung von  $n$  vorkommt, den  *$p$ -Exponenten* von  $n$ . Er wird mit  $\nu_p(n)$  bezeichnet.

Statt Exponent spricht man auch von der *Vielfachheit* oder der *Ordnung* von  $p$  in  $n$ . Wenn  $p$  in der Primfaktorzerlegung nicht vorkommt, so ist

$$\nu_p(n) = 0.$$

Die Primfaktorzerlegung einer Zahl  $n \neq 0$  kann man damit abstrakt und kompakt als

$$n = \pm \prod_p p^{\nu_p(n)}$$

schreiben. Da in jeder Primfaktorzerlegung nur endlich viele Primzahlen wirklich vorkommen, ist dies ein endliches Produkt.

Zu  $n = 14000$  ist die Primfaktorzerlegung gleich

$$14000 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$$

und somit gilt

$$\nu_2(14000) = 4,$$

$$\nu_5(14000) = 3,$$

$$\nu_7(14000) = 1$$

und

$$\nu_p(14000) = 0$$

für alle weiteren Primzahlen  $p$ .

**Lemma 21.6.** *Es sei  $p$  eine Primzahl und*

$$\nu_p: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto \nu_p(n),$$

*der zugehörige  $p$ -Exponent. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Zahl  $p^{\nu_p(n)}$  ist die größte Potenz von  $p$ , die  $n$  teilt.*  
 (2) *Es ist*

$$\nu_p(m \cdot n) = \nu_p(m) + \nu_p(n).$$

- (3) *Es ist*

$$\nu_p(m + n) = \min(\nu_p(m), \nu_p(n))$$

*(es sei  $m + n \neq 0$  vorausgesetzt).*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 21.14. □

**Korollar 21.7.** *Es seien  $n$  und  $k$  positive natürliche Zahlen. Dann wird  $n$  von  $k$  genau dann geteilt, wenn für jede Primzahl  $p$  die Beziehung*

$$\nu_p(n) \geq \nu_p(k)$$

*gilt.*

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Aus der Beziehung  $n = kt$  folgt in Verbindung mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung, dass die Primfaktoren von  $k$  mit mindestens ihrer Vielfachheit auch in  $n$  vorkommen müssen. (2)  $\Rightarrow$  (1). Wenn die Exponentenbedingung erfüllt ist, so ist  $t = \prod_p p^{\nu_p(n) - \nu_p(k)}$  eine natürliche Zahl mit  $n = kt$ . □

Aus diesem Kriterium ergibt sich, dass man zu einer gegebenen Zahl, deren Primfaktorzerlegung vorliegt, einfach alle Teiler angeben kann. Bei

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

sind die (positiven) Teiler genau die Zahlen

$$p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k} \text{ mit } 0 \leq s_1 \leq r_1, 0 \leq s_2 \leq r_2, \dots, 0 \leq s_k \leq r_k.$$

Davon gibt es  $(r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1)$  Stück.

**Korollar 21.8.** *Es seien  $n$  und  $m$  positive natürliche Zahlen mit den Primfaktorzerlegungen  $n = \prod_p p^{\nu_p(n)}$  und  $m = \prod_p p^{\nu_p(m)}$ . Dann ist*

$$\text{kgV}(n, m) = \prod_p p^{\max(\nu_p(n), \nu_p(m))}$$

*und*

$$\text{ggT}(n, m) = \prod_p p^{\min(\nu_p(n), \nu_p(m))}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Korollar 20.7. □

Für die beiden Zahlen  $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$  und  $m = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$  ist beispielsweise der größte gemeinsame Teiler gleich  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$  und das kleinste gemeinsame Vielfache gleich  $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ .

## 21. ARBEITSBLATT

### 21.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 21.1.** Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 589 und 837.

### 21.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 21.2.** Es seien  $a, b, c$  ganze Zahlen. Zeige für den größten gemeinsamen Teiler die Gleichung

$$\text{GgT}(a, b, c) = \text{GgT}(\text{GgT}(a, b), c).$$

### Aufgabe 21.3.\*

Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 116901 und 138689.



Gurru springt 8 Meter

**Aufgabe 21.4.** Das Riesenkänguru Gurru und das Zwergkänguru Gurinu leben entlang des australischen Highways, ihr Schlafplatz liegt am Beginn des Highways (0 Meter). Gurru legt bei jedem Sprung 8 Meter zurück, Gurinu nur 6 Meter. Charakterisiere die Streckenmeter, an denen sie sich begegnen können.

**Aufgabe 21.5.** Es sei  $n$  eine natürliche Zahl. Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von  $n$  und  $n + 1$ .

**Aufgabe 21.6.\***

Es seien  $a, m, n$  natürliche Zahlen mit

$$a \geq 1.$$

- (1) Bestimme  $\text{ggT}(a^m, a^n)$ .
- (2) Bestimme  $\text{kgV}(a^m, a^n)$ .

**Aufgabe 21.7.\***

Die beiden Flöhe Carlo und Fredo sitzen im Nullpunkt eines beidseitig unendlich langen Zentimeterbandes. Carlo kann Sprünge der Weite 255 und 561 (in Zentimeter) machen, Fredo kann Sprünge der Weite 357 und 595 machen. Auf welchen Zentimeterpositionen können sich die beiden Flöhe begegnen?

**Aufgabe 21.8.\***

Es sei  $n \geq 2$ . Woran erkennt man am Kleinen Einmaleins im  $n$ -System (ohne die Nuller- und die Zehnerreihe), ob  $n$  eine Primzahl ist.

**Aufgabe 21.9.** Es sei  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Sobald  $k$  ein Produkt  $ab$  teilt, teilt  $k$  bereits einen Faktor. Zeige, dass  $k$  eine Primzahl ist.

**Aufgabe 21.10.** Es sei  $p$  eine Primzahl. Zeige durch Induktion nach  $n$ , dass wenn  $p$  ein Produkt von  $n$  Zahlen teilt, dass  $p$  dann schon eine der Zahlen teilt.

**Aufgabe 21.11.** Es seien  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen, deren Produkt  $ab$  von einer natürlichen Zahl  $n$  geteilt werde. Die Zahlen  $n$  und  $a$  seien teilerfremd. Zeige, dass  $b$  von  $n$  geteilt wird.

**Aufgabe 21.12.** Seien  $r$  und  $s$  teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung  $(x, y)$  der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt  $(x, y) = v(s, -r)$  hat, mit einer eindeutig bestimmten Zahl  $v$ .

**Aufgabe 21.13.\***

Es sei  $n$  eine ganze Zahl, von der die folgenden Eigenschaften bekannt sind:

- (1)  $n$  ist negativ.
- (2)  $n$  ist ein Vielfaches von 8, aber nicht von  $-16$ .

- (3)  $n$  ist kein Vielfaches von 36.
- (4)  $n$  ist ein Vielfaches von 150, aber nicht von 125.
- (5) In der Primfaktorzerlegung von  $n$  gibt es keine Primzahl, die größer als 5 ist.

Was ist  $n$ ?

**Aufgabe 21.14.\***

Bestimme den Exponenten zu 2 von 203264.

**Aufgabe 21.15.** Es sei  $p$  eine Primzahl und

$$\nu_p: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto \nu_p(n),$$

der zugehörige  $p$ -Exponent. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Die Zahl  $p^{\nu_p(n)}$  ist die größte Potenz von  $p$ , die  $n$  teilt.
- (2) Es ist

$$\nu_p(m \cdot n) = \nu_p(m) + \nu_p(n).$$

- (3) Es ist

$$\nu_p(m + n) = \min(\nu_p(m), \nu_p(n))$$

(es sei  $m + n \neq 0$  vorausgesetzt).

**Aufgabe 21.16.\***

Zu einer positiven natürlichen Zahl  $n$  sei  $a_n$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n$ .

- (1) Bestimme  $a_n$  für  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .
- (2) Was ist die kleinste Zahl  $n$  mit

$$a_n = a_{n+1}?$$

- (3) Was ist die kleinste Zahl  $n$  mit

$$a_n = a_{n+1} = a_{n+2}?$$

**Aufgabe 21.17.** Zu einer natürlichen Zahl  $n$  bezeichne  $T(n)$  die Anzahl der positiven Teiler von  $n$ . Zeige die folgenden Aussagen über  $T(n)$ .

- a) Sei  $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$ . Dann ist

$$T(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1).$$

- b) Für teilerfremde Zahlen  $n$  und  $m$  gilt  $T(nm) = T(n)T(m)$ .

- c) Bestimme die Anzahl der Teiler von  $20!$ .

**Aufgabe 21.18.** Finde unter den Zahlen  $\leq 100$  diejenigen Zahlen mit der maximalen Anzahl an Teilern. Wie groß ist diese Anzahl?

**Aufgabe 21.19.\***

Finde unter den Zahlen  $\leq 1000$  diejenige Zahl mit der maximalen Anzahl an Teilern.

**Aufgabe 21.20.\***

a) Berechne den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen  $2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$  und  $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{11} \cdot 7$ .

b) Berechne den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen  $2 \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot 7$  und  $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ .

**Aufgabe 21.21.** Es seien  $a, b \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass

$$a^b = b^a$$

genau dann gilt, wenn

$$a = b$$

ist oder wenn  $a = 2$  und  $b = 4$  ist (oder umgekehrt).

**Aufgabe 21.22.** Es sei  $M \subseteq \mathbb{N}_+$  diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also  $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$ . Zeige, dass man 441 innerhalb von  $M$  auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in  $M$  nicht weiter zerlegbar sind.

**Aufgabe 21.23.\***

Beweise das folgende *Untergruppenkriterium*. Eine nichtleere Teilmenge  $H \subseteq G$  einer Gruppe  $G$  ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

$$\text{für alle } g, h \in H \text{ ist } gh^{-1} \in H.$$

**Aufgabe 21.24.** Es sei  $G$  eine Gruppe und es seien  $H_1$  und  $H_2$  Untergruppen von  $G$ . Zeige, dass der Durchschnitt

$$H_1 \cap H_2$$

ebenfalls eine Untergruppe von  $G$  ist.

### 21.3. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 21.25. (3 Punkte)

Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 3277 und 10057.

#### Aufgabe 21.26. (3 Punkte)

Sei  $p$  eine Primzahl. Zeige, dass  $p$  den Binomialkoeffizienten  $\binom{p}{k}$  für alle  $k = 1, \dots, p-1$  teilt.

#### Aufgabe 21.27. (3 Punkte)

Seien  $a$ ,  $b$  und  $r$  positive natürliche Zahlen. Zeige, dass die Teilbarkeit  $a^r | b^r$  die Teilbarkeit  $a | b$  impliziert.

#### Aufgabe 21.28. (6 Punkte)

Finde unter den Zahlen  $\leq 1000000$  diejenige Zahl mit der maximalen Anzahl an Teilern.

## 22. VORLESUNG - PROPORTIONALITÄT UND DREISATZ

... und ein guter Lehrer kann  
auch einem schlechten Schüler  
was beibringen

---

### 22.1. Proportionalität.

Häufig hängen zwei variable Größen - häufig mit  $x$  und  $y$  bezeichnet - in einer Weise voneinander ab, dass sich die zweite Größe aus der ersten errechnet, indem man mit einer bestimmten Konstanten multiplizieren muss. Zwischen den beiden Größen herrscht ein bestimmtes *Verhältnis*. Wir besprechen einige typische Beispiele.

**Beispiel 22.1.** Der monatlich zu zahlende Strompreis hängt unmittelbar vom Verbrauch ab. Es gibt einen Grundpreis für die Kilowattstunde, sagen wir 20 Cent, und dieser Grundpreis wird mit dem Verbrauch (sagen wir im Monat) multipliziert und ergibt dann den Gesamtstrompreis. Wenn man 1000 Kilowattstunden verbraucht hat, so muss man

$$1000 \cdot 20 \text{ Cent} = 20000 \text{ Cent} = 200 \text{ Euro}$$

zahlen, wenn man nur die Hälfte, also 500 Kilowattstunden verbraucht hat, so muss man auch nur die Hälfte zahlen, gemäß

$$500 \cdot 20 \text{ Cent} = 10000 \text{ Cent} = 100 \text{ Euro.}$$

**Beispiel 22.2.** Ein Fahrradfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 Stundenkilometer durch die Gegend. Nach Definition von Stundenkilometer legt er also in der Stunde 15 Kilometer zurück. In zwei Stunden legt er somit

$$2 \cdot 15 = 30$$

Kilometer zurück, in drei Stunden 45 Kilometer, in vier Stunden 60 Kilometer. Man kann natürlich auch überlegen, wie viele Kilometer er in kleineren Zeitabschnitten zurücklegt. Beispielsweise legt er in einer halben Stunde 7,5 Kilometer<sup>46</sup> zurück, in 20 Minuten 5 Kilometer und so weiter.

In den Beispielen gibt es eine einfache Formel, die aus der ersten Größe (Stromverbrauch, gefahrene Zeit) die zweite Größe (Stromkosten, gefahrene Strecke) ausrechnet. Die Formel lautet

$$y = 20x$$

bzw.

$$y = 15x.$$

Dabei ist im Moment nicht wichtig, welche Zahlen für  $x$  und  $y$  erlaubt sind, jedenfalls kann man natürliche Zahlen einsetzen (bald auch rationale Zahlen). Wichtig ist aber, dass man auf den beiden Seiten der Formeln stets mit den gleichen Einheiten rechnen muss. In der ersten Gleichung muss der Stromverbrauch  $x$  in Kilowattstunden eingegeben werden und man erhält den Gesamtpreis  $y$  in Cent (wenn man mit Euro arbeiten möchte, muss man die 20 durch 0,2 ersetzen), in der zweiten Gleichung muss die Zeitdauer  $x$  in Stunden und die Strecke  $y$  in Kilometern angegeben werden. Wenn eine Zeitangabe nicht in Stunden angegeben ist, so muss man diese zuerst in Stunden umrechnen, bevor man die Formel benutzen darf. Dies liefert uns weitere wichtige Beispiele für einen solchen Zusammenhang.

**Beispiel 22.3.** Ein Tag besteht bekanntlich aus 24 Stunden, eine Stunde aus 60 Minuten, eine Minute aus 60 Sekunden. Manchmal möchte man, beispielsweise, um verschiedene Angaben besser miteinander vergleichen zu können, eine Angabe in einer Einheit in eine andere Einheit umrechnen. Für die Umrechnung einer Zeitangabe in Stunden in eine Zeitangabe in Minuten muss man einfach die Stundenanzahl mit 60 multiplizieren. Es liegt also die Beziehung

$$y = 60x$$

vor, wobei  $x$  die Zeit in Stunden und  $y$  die gleiche Zeit in Minuten angibt. Diesen Sachverhalt kann auch durch eine Wertetabelle sichtbar machen.

Stunden	1	2	3	4	5
Minuten	60	120	180	240	300

<sup>46</sup>In dieser Darstellung ist das bereits eine rationale Zahl, was wir ja erst einführen wollen. In Metern gerechnet steht hier einfach 7500.

Die Beziehung zwischen der Zeit in Tagen und in Stunden wird durch die Formel

$$y = 24x$$

ausgedrückt, wobei jetzt  $x$  die Anzahl der Tage und  $y$  die Anzahl der Stunden ist.

Tage	1	2	3	4	5
Stunden	24	48	72	96	120

Wenn man die beiden Umrechnungen als unabhängig voneinander betrachtet, so ist es unproblematisch, hier wieder mit den Variablen  $x$  und  $y$  zu arbeiten, es handelt sich dann um einen neuen Kontext. Wenn man allerdings gleichzeitig mit Tagen, Stunden und Minuten arbeiten möchte, so ist es sehr gefährlich, mit  $x$  einmal die Stunden und einmal die Tage und mit  $y$  einmal die Minuten und einmal die Stunden zu bezeichnen, und die Stunden einmal mit  $x$  und einmal mit  $y$  zu bezeichnen. Um dies zu vermeiden, schreibt man die zweite Formel mit neuen Variablen beispielsweise als

$$v = 24z.$$

Häufig sind auch suggestive Variablensymbole hilfreich. Wenn man  $t$  für Tage,  $s$  für Stunden und  $m$  für Minuten nimmt, so schreiben sich die Umrechnungsformeln als

$$s = 60m$$

und

$$t = 24s.$$

Solche Bezeichnungsphilosophien sollte man aber auch nicht überstrapazieren, wenn man noch Sekunden mitberücksichtigen möchte, ist das  $s$  wegen Stunden schon besetzt.

**Beispiel 22.4.** Häufig unterscheiden sich physikalische Einheiten um eine Zehnerpotenz. So gibt es Meter, Zentimeter, Millimeter, Kilometer oder Tonne, Kilogramm, Gramm, Milligramm (Zentner). In diesem Fall ist die Umrechnungsformel besonders einfach, beispielsweise gilt

$$y = 100x,$$

wobei  $x$  die Strecke in Meter und  $y$  die Strecke in Zentimeter ist. Bei der rechnerischen Durchführung muss man dann nur eine gewisse Anzahl an Nullen anhängen oder weglassen.

Eine sinnvolle *Probe* für eine solche Umrechnungsformel erhält man, wenn man für  $x$  den Wert 1 einsetzt.

**Beispiel 22.5.** Proportionale Zusammenhänge treten häufig bei geometrischen Figuren auf. Beispielsweise besteht zwischen dem Radius eines Kreises und seinem Umfang der proportionale Zusammenhang

$$U = 2\pi r,$$

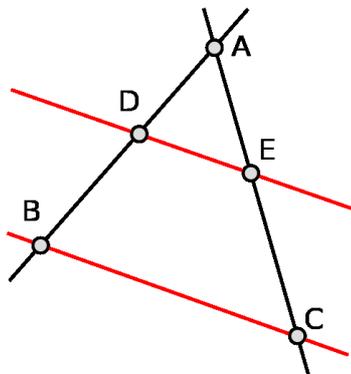
zwischen dem Umfang eines Quadrats und seiner Seitenlänge gilt

$$U = 4s,$$

zwischen der Höhe und der Grundseite in einem gleichseitigen Dreieck besteht die Beziehung

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s.$$

**Aufgabe 22.6.** Ein wichtiger geometrischer Ursprung für konstante Verhältnisse liefern die Strahlensätze bzw. ähnliche Dreiecke. Man hat zwei durch einen Punkt  $A$  gehende Geraden und zwei parallele Geraden gegeben, die nicht durch den Punkt verlaufen. Dann bestehen zwischen entsprechenden Seitenlängen in den entstehenden Dreiecken konstante Verhältnisse. Im Bild verhält sich beispielsweise die Strecke  $\overline{BC}$  zur Strecke  $\overline{BA}$  wie die Strecke  $\overline{DE}$  zur Strecke  $\overline{DA}$ . Wenn man als variable Größe  $x$  den Abstand von  $B$  zu  $A$  und als Größe  $y$  die Streckenlänge der durch  $B$  verlaufenden Dreiecksseite, die zur Strecke  $\overline{DE}$  parallel ist, denkt, so liegt zwischen diesen Größen ein konstantes Verhältnis vor.



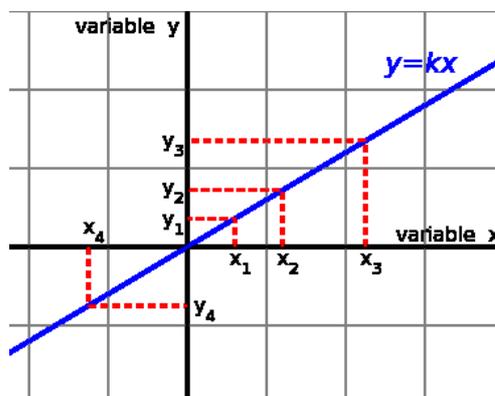
**Beispiel 22.7.** In der Musik entsprechen die Töne den Schwingungen bzw. Frequenzen. In einer Tonleiter bestehen zwischen den verschiedenen Tönen gewisse erlaubte, wohlklingende Verhältnisse. Die Bezeichnungen dafür orientieren sich an der Reihenfolge in einer Tonleiter. Eine Oktave entspricht dem Frequenzverhältnis  $2 : 1$  (das ist der „gleiche“, aber höhere Ton), eine Quinte entspricht beispielsweise dem Frequenzverhältnis  $3 : 2$ . Als Beispiel geben wir die Verhältnisse in  $C$ -Dur, das Verhältnis bezieht sich immer auf den Grundton  $C$ . Die Verhältnisse und die relativen Namen wie Große Sekunde sind in jeder Dur-Tonart gleich, die Buchstabenbezeichnungen und die anzuschlagenden Tasten ändern sich.

	Verhältnis	Verhältnisname	Ton in C-Dur
	1	Prime	<i>C</i>
	9/8	Große Sekunde	<i>D</i>
	5/4	Große Terz	<i>E</i>
	4/3	Quarte	<i>F</i>
	3/2	Quinte	<i>G</i>
	5/3	Große Sexte	<i>A</i>
	7/4	Große Septime	<i>H</i>
	2/1	Oktave	<i>C</i>

**Definition 22.8.** Wenn zwischen zwei Größen  $x$  und  $y$  (die in  $\mathbb{N}$ , in  $\mathbb{Z}$ , in  $\mathbb{Q}$ , in  $\mathbb{R}$  oder einem beliebigen kommutativen Ring variieren), ein Zusammenhang der Form

$$y = cx$$

mit einer festen Zahl  $c$  besteht, so spricht man von einem *proportionalen Zusammenhang* zwischen den beiden Größen und man sagt, dass  $y$  *proportional* zu  $x$  ist. Die Zahl  $c$ , die den Umrechnungsfaktor zwischen den beiden Größen darstellt, heißt *Proportionalitätskonstante*.



Statt proportional spricht man auch von einem *linearen Zusammenhang* oder man sagt, dass zwischen den Größen ein konstantes *Verhältnis* besteht. Da man bei einem proportionalen Zusammenhang zu jedem  $x$  den Wert

$$y = cx$$

berechnen kann, liegt insbesondere eine Abbildung vor, die einem  $x$ -Wert den  $y$ -Wert zuordnet. Man spricht von einer *linearen Abbildung* oder einer *linearen Funktion* und schreibt auch

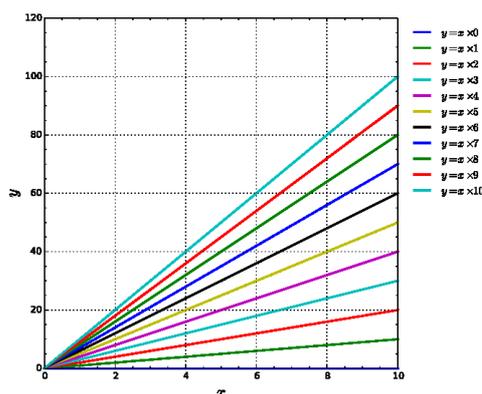
$$y = \varphi(x) = cx.$$

Wenn man den Graphen eines proportionalen Zusammenhanges zwischen zwei Größen zeichnet, so ergibt sich eine Gerade durch den Nullpunkt. Die

Proportionalitätskonstante schlägt sich in der Steigung der Geraden nieder. Der Proportionalitätsfaktor  $c = 0$  und auch negative Proportionalitätsfaktoren sind erlaubt. Bei

$$c = 1$$

sind die Rechnungen besonders einfach, wie wenn ein Huhn (pro Tag) ein Ei legt.



Wir fassen die einfachen Eigenschaften eines proportionalen Zusammenhangs in dem folgenden Lemma zusammen.

**Lemma 22.9.** *Es sei ein proportionaler Zusammenhang*

$$y = cx$$

*zwischen den beiden Größen  $x$  und  $y$  gegeben. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist*

$$\varphi(0) = 0.$$

(2) *Es ist*

$$\varphi(1) = c.$$

(3) *Wenn man die Größe  $x$  um einen bestimmten Wert  $x_0$  erhöht, so erhöht sich die Größe  $y$  um einen bestimmten Wert  $y_0$ , der unabhängig von  $x$  ist.*

(4) *Wenn man die Größe  $x$  um einen bestimmten Faktor vervielfacht (verdoppelt, verdreifacht, verzehnfacht), so vervielfacht (verdoppelt, verdreifacht, verzehnfacht) sich die Größe  $y$  um den gleichen Faktor.*

*Beweis.* (1) Ist klar nach Lemma 9.2 (1) für den Grundbereich  $\mathbb{N}$  bzw. nach Lemma 19.4 (1) für einen beliebigen kommutativen Ring.

(2) Ist klar wegen

$$c \cdot 1 = c.$$

(3) Nach dem Distributivgesetz ist

$$c(x + x_0) = cx + cx_0.$$

Die Differenz zwischen dem Ausgangswert und dem erhöhten Wert ist somit

$$c(x + x_0) - cx = cx + cx_0 - cx = cx_0,$$

und dies ist unabhängig von  $x$ .

(4) Die Vervielfachung werde durch den Faktor  $a$  ausgedrückt. Dann ist der Wert an der Stelle  $ax$  gleich

$$\varphi(ax) = c(ax) = acx = a\varphi(x),$$

wie aus dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz der Multiplikation folgt. □

Da der Proportionalitätsfaktor die gesamte Proportionalität bestimmt, lässt sich nach (2) die gesamte Proportionalität aus dem Wert an der Stelle der Einheit 1 ablesen. (3) bedeutet beispielsweise, dass wenn Heinz Ngolo und Mustafa Müller jeweils die gleiche Menge mehr Strom verbrauchen wie im Vormonat (weil sie sich den gleichen Rasenmäher gekauft haben und gleich oft Rasen mähen und ansonsten alles beim Alten bleibt), dass dann ihre jeweilige Stromrechnung um den gleichen Betrag steigt, unabhängig davon, wie viel sie im Vormonat gezahlt haben.

**Bemerkung 22.10.** Häufig besteht zwischen Größen ein proportionaler Zusammenhang, der nicht durch eine Konstante des Zahlbereiches gegeben ist, sondern dadurch, dass der Wert an einer bestimmten Stelle festgelegt ist, wie wenn der Preis für drei Äpfel als zwei Euro angegeben wird und nur die ganzen Zahlen zur Verfügung stehen. Ein solches Zahlenpaar legt dann einen (unvollständigen) proportionalen Zusammenhang nur für Vielfache dieser Zahlenpaare (und für Paare, die sich durch Division durch einen gemeinsamen Teiler ergeben) fest. Die Eigenschaften aus Lemma 22.8 (3,4) gelten auch in dieser Situation entsprechend.

## 22.2. Dreisatz.

Unter *Dreisatz* versteht man Aufgaben, bei denen es sich um Größen handelt, zwischen denen eine Proportionalität vorliegt, wobei man aber oft den Proportionalitätsfaktor noch gar nicht kennt. Es gibt im Wesentlichen die folgenden Aufgabentypen und Mischformen davon.

(1) Der Zusammenhang

$$y = cx$$

ist vorgegeben, d.h. die Zahl  $c$  ist bekannt und es geht darum, zu einem oder mehreren  $x$  den zugehörigen Wert von  $y$  zu bestimmen.

- (2) Der Zusammenhang

$$y = cx$$

ist vorgegeben, d.h. die Zahl  $c$  ist bekannt und es geht darum, zu einem (oder mehreren) Funktionswert  $y$  den Ausgangswert für  $x$  zu bestimmen.

- (3) Es ist zwar klar, dass zwischen
- $x$
- und
- $y$
- ein proportionaler Zusammenhang besteht, es ist aber nicht klar, wie der Proportionalitätsfaktor aussieht. Typischerweise ist ein bestimmtes
- $x_0$
- mit dem zugehörigen Wert
- $y_0$
- gegeben und es wird das
- $c$
- gesucht, das den linearen Zusammenhang beschreibt, also das
- $c$
- mit

$$y_0 = cx_0.$$

- (4) Es ist zwar klar, dass zwischen
- $x$
- und
- $y$
- ein proportionaler Zusammenhang besteht, es ist aber nicht klar, wie der Proportionalitätsfaktor aussieht. Es ist ein bestimmtes
- $x_0$
- mit dem zugehörigen Wert
- $y_0$
- gegeben und es wird der Wert zu einem weiteren
- $x_1$
- gesucht (oder der Ausgangswert zu einem weiteren
- $y_1$
- ).

Die Formulierung in (4) ist eine Mischung aus (3) mit (1) bzw. mit (2). Allerdings kann man oft auch (4) direkt lösen, ohne den Proportionalitätsfaktor  $c$  auszurechnen. Die Bezeichnung Dreisatz<sup>47</sup> rührt von der Situation in (4) her, wo die Beziehung

$$\frac{y_0}{x_0} = c = \frac{y_1}{x_1}$$

betrachtet wird (unabhängig davon, ob man das  $c$  mit anführt) und wo die drei Zahlen  $x_0, y_0, x_1$  (bzw.  $x_0, y_0, y_1$ ) vorgegeben sind und man die vierte Zahl  $y_1$  (bzw.  $x_1$ ) bestimmen soll. Wir betrachten einige typische Beispiele.

**Beispiel 22.11.** Aufgabe: Mustafa Müller fährt mit seinem Fahrrad zu seiner Oma, die sechs Kilometer entfernt lebt, er braucht dazu eine halbe Stunde. Wie viele Minuten braucht er zu seinem Freund Heinz Ngolo, der einen Kilometer von ihm entfernt wohnt.

Das ist Typ (4) vom Dreisatz mit der zusätzlichen Schwierigkeit, dass die Zeitangaben sich auf unterschiedliche Einheiten, nämlich Stunden und Minuten beziehen. Man kann beispielsweise seine Fahrgeschwindigkeit ausrechnen, es ergibt sich, da er in einer halben Stunde sechs Kilometer zurücklegt, dass er in einer Stunde zwölf Kilometer zurücklegt. Er fährt also zwölf Stundenkilometer, der Proportionalitätsfaktor (nach dem nicht gefragt wurde) ist also 12. Wir fragen uns nun nach der Zeit, die er benötigt, um einen Kilometer zurückzulegen. Da er für 12 Kilometer 60 Minuten braucht, benötigt er für einen Kilometer den zwölften Anteil einer Stunde, also  $60/12 = 5$  Minuten.

**Bemerkung 22.12.** Zwischen zwei Größen können unterschiedliche Proportionalitäten bestehen, beispielsweise kostet die Übernachtung 60 Euro pro Urlaubstag, das Frühstück 8 Euro pro Urlaubstag und der Strandkorb

<sup>47</sup>Zur Grundbedeutung von Dreisatz gibt es verschiedene Interpretationen.

5 Euro pro Tag. In diesem Fall ist es sinnvoll, die einzelnen Proportionalitätskonstanten miteinander zu addieren, um eine Gesamtproportionalität zu erhalten, die die Gesamtkosten pro Tag wiedergibt. Wenn sich die beiden Proportionalitäten nicht auf die gleiche Grundeinheit wie hier ein Tag beziehen, so muss man zuerst einen gemeinsamen Bezugspunkt finden, um die beiden Proportionalitäten addieren zu können.

**Bemerkung 22.13.** Wenn drei Größen  $x, y, z$  gegeben sind und zwischen den beiden ersten eine Proportionalität und zwischen den beiden letzten Größen eine Proportionalität besteht, so besteht auch eine Proportionalität zwischen der ersten und der letzten Größe. Die neue Proportionalitätskonstante ist dabei das Produkt der beiden Proportionalitätskonstanten. Wenn nämlich  $z = cy$  und  $y = dx$  vorliegt, so ist

$$z = cy = c(dx) = (cd)x.$$

Eine solche Situation liegt zwischen Tagen, Stunden, Minuten vor. Oder wenn man pro Tag 10 Schokoriegel isst und ein Schokoriegel 60 Cent kostet, so sind die Schokoriegelkosten pro Tag gleich 6 Euro.

Wir betrachten eine Gleichung der Form

$$b = az$$

mit fixierten ganzen Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  und der unbekanntem Zahl  $z$ . Diese Gleichung besitzt innerhalb der ganzen Zahlen genau dann eine Lösung, wenn  $a$  ein Teiler von  $b$  ist. Dies ist eine unmittelbare Umformulierung der Teilerbeziehung. Wenn dies der Fall ist, und  $a \neq 0$  ist, so ist die eindeutig bestimmte Lösung  $z$  gleich dem ganzzahligen Quotienten  $b/a$ . Eine solche Gleichung ist aber, wie die obigen Beispiele zeigen, auch sinnvoll, wenn  $a$  kein Teiler von  $b$  ist. Beispielsweise kann man Äpfel verkaufen und dabei drei Äpfel zum Preis von zwei Euro anbieten. Dann ist klar, dass sechs Äpfel vier Euro kosten u.s.w. Es liegt auch hier eine Proportionalität vor, es lässt sich aber kein Proportionalitätsfaktor innerhalb der natürlichen Zahlen angeben. Der Preis für einen Apfel ist keine natürliche Zahl, aber das *Verhältnis* zwischen Preis zu Apfelanzahl ist konstant. So wie die Lösbarkeit der allgemeinen Differenzgleichung

$$b = a + z$$

Ausgangspunkt und Motivation zur Einführung der ganzen Zahlen war, ist die Lösbarkeit der allgemeinen Proportionalitätsgleichung

$$b = az$$

(mit  $a \neq 0$ ) Ausgangspunkt und Motivation zur Einführung der rationalen Zahlen. Wir möchten also sinnvolle Zahlen  $b/a$  mit der charakteristischen Eigenschaft haben, dass sie mit  $a$  multipliziert die Zahl  $b$  ergeben. Da  $a$  ganzzahlig ist, sagen wir aus  $\mathbb{N}_+$ , kann man diese Multiplikation auf die  $a$ -fache Addition von  $b/a$  mit sich selbst zurückführen. Wir suchen also eine Strecke, die, wenn man sie  $a$ -mal hintereinander hinlegt, die Strecke  $b$  ergibt.

**Bemerkung 22.14.** Häufig liegt auch zwischen zwei Größen ein Zusammenhang der Form

$$y = cx + d$$

vor, beispielsweise, wenn eine vom Verbrauch unabhängige Grundgebühr  $d$  zu zahlen ist. Man spricht dann von einer *affin-linearen* Abbildung.

## 22. ARBEITSBLATT

### 22.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 22.1.** Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

- (1) Eine Amöbe.
- (2) Eine Ameise.
- (3) Eine Meise.
- (4) Eine Flunder.
- (5) Eine Boa constrictor.
- (6) Ein Meerschweinchen.
- (7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
- (8) Ein sehr guter Limbotänzer.

### 22.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 22.2.** Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

- (1) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
- (2) Masse ist Volumen mal Dichte.
- (3) Energie ist Masse mal Brennwert.
- (4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
- (5) Energie ist Kraft mal Weg.
- (6) Energie ist Leistung mal Zeit.
- (7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
- (8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

**Aufgabe 22.3.** Eine Unze Gold kostet 1100 €.

- a) Wie viel kosten sieben Unzen Gold?
- b) Wie viel Gold bekommt man für 10000 €?

**Aufgabe 22.4.** Von einer Brotsorte kostet ein Laib mit 750 Gramm 3 €.

- a) Wie viel kostet ein Laib mit 1000 Gramm?
- b) Wie viel Brot bekommt man für 10 €?

**Aufgabe 22.5.** Lucy Sonnenschein fährt mit ihrem Fahrrad 10 Meter pro Sekunde.

- a) Wie viele Kilometer fährt sie pro Stunde?
- b) Wie lange braucht sie für 100 Kilometer?

**Aufgabe 22.6.** Ein Huhn legt pro Tag ein Ei.

- (1) Wie viele Eier legt ein Huhn in einer Woche?
- (2) Wie viele Eier legen 12 Hühner an einem Tag?
- (3) Wie viele Eier legen 8 Hühner in 7 Tagen? Ist dies eine Dreisatzaufgabe?

**Aufgabe 22.7.** In einem Mikroliter menschlichen Blutes befinden sich ca. 5000000 Erythrozyten. Wie viele Erythrozyten befinden sich in einem Kubikkilometer Blut?

**Aufgabe 22.8.** Fünf Spaziergänger laufen eine Strecke in 35 Minuten ab. Am nächsten Tag laufen 7 Spaziergänger die gleiche Strecke in gleichem Tempo. Wie lange brauchen sie?

**Aufgabe 22.9.\***

Ein Zug ist 500 Meter lang (ohne Lokomotive) und bewegt sich mit 180 Stundenkilometer. Lucy Sonnenschein hat ihr Fahrrad mit in den Zug genommen und fährt mit einer Geschwindigkeit von 20 Metern pro Sekunde von ganz hinten nach ganz vorne.

- (1) Wie viele Sekunden benötigt Lucy für die gesamte Zuglänge?
- (2) Welche Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) hat Lucy bezogen auf die Umgebung?
- (3) Welche Entfernung (in Meter) legt der Zug während der Fahrradfahrt zurück?
- (4) Berechne auf zwei verschiedene Arten, welche Entfernung Lucy während ihrer Fahrradfahrt bezogen auf die Umgebung zurücklegt.

**Aufgabe 22.10.** Erfahrungsgemäß essen bei einem Kindergeburtstag sieben Kinder je zwei Kuchen. Skizziere den Kuchenanteil, den ein Kind isst. Wie viele Kuchen braucht man mindestens für zwanzig Kinder, wie viel Kuchen bleibt übrig? Wie viele Kinder kann man mit sieben Kuchen höchstens versorgen, wie viel Kuchen bleibt übrig?

**Aufgabe 22.11.** Für welche  $c \in \mathbb{Z}$  ist die lineare Abbildung

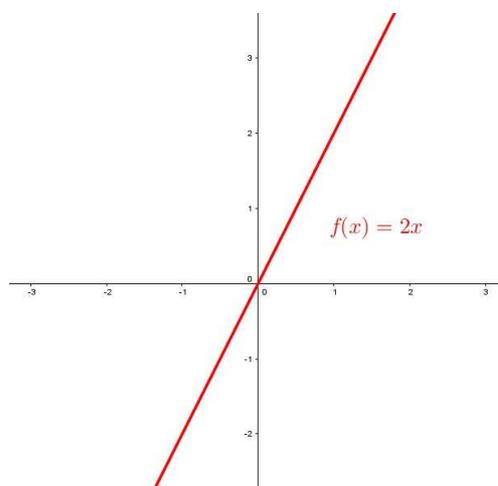
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto cx,$$

injektiv bzw. surjektiv?

**Aufgabe 22.12.** Ein Birnenverkäufer verkauft 1221 Birnen für 1067 Euro. Beschreibe dieses Angebot durch die kleinstmöglichen ganzen Zahlen.

**Aufgabe 22.13.\***

Ein Apfelverkäufer verkauft 2893 Äpfel für 3127 Euro. Ein zweiter Apfelverkäufer verkauft 3417 Äpfel für 3693 Euro. Welches Angebot ist günstiger?



**Aufgabe 22.14.** Es sei ein proportionaler Zusammenhang

$$y = cx$$

durch einen Graphen, also eine Gerade durch den Nullpunkt, gegeben. Wie löst man geometrisch die Dreisatzaufgabe zu einem gegebenen  $x$ , wie zu einem gegebenen  $y$ ?

**Aufgabe 22.15.** Ein proportionaler Zusammenhang sei dadurch gegeben, dass an der Stelle  $x_0$  der Wert  $y_0$  herauskommen soll. Wie erstellt man daraus den Graphen des gesuchten Zusammenhangs?

**Aufgabe 22.16.** Es sei ein proportionaler Zusammenhang dadurch gegeben, dass

$$\varphi(a) = b$$

mit ganzen Zahlen  $a, b$  ist. Dieser Zusammenhang wird in der Ebene durch den Graphen, nämlich eine Gerade durch den Nullpunkt, visualisiert, die an der Stelle  $a$  den Wert  $b$  besitzt. Wie bestimmt man das ganzzahlige Paar  $(a', b')$  auf dem Graphen, für das  $a'$  positiv und minimal ist? Wie lautet die Antwort für  $a = 45$  und  $b = 108$ ?



**Aufgabe 22.17.** Zerlege geometrisch die angegebene Strecke in fünf gleichlange Teile.

### 22.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 22.18.** (3 (1+1+1) Punkte)

Eine zu asphaltierende Straße ist sieben Meter breit. Die Asphaltierung eines Quadratmeters kostet 5000 Euro.

- (1) Erstelle eine Formel, die die Asphaltierungskosten für die Straße pro Meter angibt.
- (2) Bestimme die Kosten für die Asphaltierung von 100 Metern der Straße.
- (3) Der Stadtrat bewilligt eine Million Euro für die Straße. Wie viele volle Meter der Straße kann man damit asphaltieren?

**Aufgabe 22.19.** (2 Punkte)

Frau Maier-Sengupta plant eine Schullandheimsfahrt für ihre Klasse. Es ist noch nicht klar, wie viele Kinder genau mitdürfen. Als Fahrtkosten für ein Kind fallen 50 Euro an, für die Unterbringung 80 Euro pro Kind und für die Verpflegung 120 Euro pro Kind. Der Elternbeirat unterstützt jedes Kind mit 30 Euro, aus Landesmitteln stehen weitere 20 Euro pro Kind zur Verfügung. Wie hoch sind die Kosten für den Aufenthalt pro Kind? Wie hoch sind die Gesamtkosten, wenn 20 Kinder mitkommen, wie hoch, wenn 25 Kinder mitkommen?

**Aufgabe 22.20.** (5 (1+1+1+2) Punkte)

Ein Zug ist 600 Meter lang (ohne Lokomotive) und bewegt sich mit 240 Stundenkilometer. Lucy Sonnenschein hat ihr Fahrrad mit in den Zug genommen und fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 Metern pro Sekunde von ganz hinten nach ganz vorne.

- (1) Wie viele Sekunden benötigt Lucy für die gesamte Zuglänge?
- (2) Welche Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) hat Lucy bezogen auf die Umgebung?
- (3) Welche Entfernung (in Meter) legt der Zug während der Fahrradfahrt zurück?
- (4) Berechne auf zwei verschiedene Arten, welche Entfernung Lucy während ihrer Fahrradfahrt bezogen auf die Umgebung zurücklegt.

**Aufgabe 22.21.** (3 Punkte)

Ein Apfelverkäufer verkauft 2483 Äpfel für 2249 Euro. Beschreibe dieses Angebot durch die kleinstmöglichen ganzen Zahlen.

**Aufgabe 22.22.** (2 Punkte)

Zerlege geometrisch die angegebene Strecke in sieben gleichlange Teile.

## 23. VORLESUNG - KONVERGENZ VON MATRIXPOTENZEN

Aus großer Macht folgt große  
Verantwortung

---

Ben Parker

## 23.1. Die rationalen Zahlen.

Eine Gleichung der Form

$$bx = a$$

mit fixierten ganzen Zahlen  $a, b$  besitzt innerhalb der ganzen Zahlen im Allgemeinen keine Lösung für  $x$ . Bei  $b = 0$  und  $a \neq 0$  gibt es auch keine Lösung innerhalb einer sinnvollen Zahlbereichserweiterung. Bei  $b \neq 0$  gibt es hingegen innerhalb der rationalen Zahlen eine eindeutige Lösung, nämlich

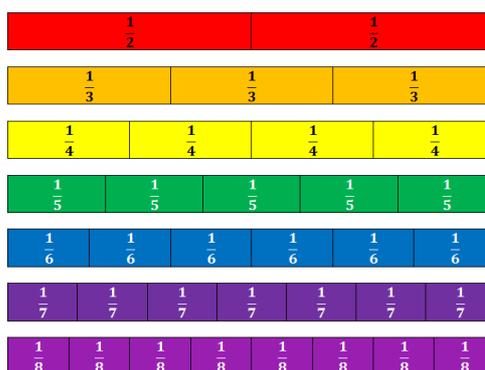
$$x = \frac{a}{b}.$$

Wir führen nun die rationalen Zahlen, ausgehend von  $\mathbb{Z}$  ein, und zwar zunächst als Menge von Brüchen. Anschließend definieren wir eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge und weisen, ebenfalls unter Bezug auf die ganzen Zahlen, die Gültigkeit der wichtigsten Rechengesetze nach.

Als eine Motivation für die folgende Gleichsetzung von unterschiedlichen Brüchen betrachten wir nochmal die Proportionalität. Zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  definieren einen proportionalen Zusammenhang  $\varphi$ , der an der Stelle  $a$  den Wert  $b$  besitzt. Er besitzt dann an der Stelle  $na$  den Wert  $nb$ . Dieser Zusammenhang besteht unabhängig davon, ob er durch eine ganzzahlige Konstante  $c$  in der Form  $\varphi(x) = cx$  beschrieben werden kann. Ein proportionaler Zusammenhang ist durch ein einziges von  $(0,0)$  verschiedenes Zahlenpaar eindeutig festgelegt. Daher bestimmen zwei ganzzahlige Paare  $(a, b)$  und  $(a', b')$  genau dann den gleichen Zusammenhang, wenn sie an der Stelle  $aa'$ , wo man die Werte unmittelbar vergleichen kann, den gleichen Wert besitzen. Die Werte sind an dieser Stelle  $ba'$  bzw.  $b'a$ , so dass genau im Fall

$$a'b = ab'$$

die beiden proportionalen Zusammenhänge als gleich zu betrachten sind. Dies ist eine Grundlage für die in der folgenden Definition auftretenden *Überkreuzregel*.



**Definition 23.1.** Unter einer *rationalen Zahl* versteht man einen Ausdruck der Form

$$\frac{a}{b},$$

wobei  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $b \neq 0$  sind, und wobei zwei Ausdrücke  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  genau dann als gleich betrachtet werden, wenn  $ad = bc$  (in  $\mathbb{Z}$ ) gilt. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit  $\mathbb{Q}$  bezeichnet.

Einen Ausdruck  $\frac{a}{b}$  nennt man Bruch, wobei  $a$  der *Zähler* und  $b$  der *Nenner* des Bruches heißt. Eine rationale Zahl wird durch verschiedene Brüche beschrieben und kann mit unterschiedlichen Zählern und Nennern dargestellt werden, beispielsweise ist

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Man sagt auch, dass diese beiden Brüche gleichwertig sind. Für die rationale Zahl  $\frac{a}{1}$  schreibt man einfach  $a$ . In diesem Sinne sind ganze Zahlen insbesondere auch rationale Zahlen. Insbesondere gibt es die Null  $0 = \frac{0}{1}$  und die  $1 = \frac{1}{1}$ . Es gelten die folgenden Identitäten (dabei seien  $c, d \neq 0$ , ansonsten seien alle  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  beliebig).

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{-1} = -1, \\ (2) \quad & \frac{0}{c} = 0, \\ (3) \quad & \frac{c}{c} = 1, \\ (4) \quad & \frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}. \end{aligned}$$

Die Begründung für die Richtigkeit dieser Regeln liegt in der Überkreuzregel. Die letzte Regel heißt *Erweiterungsregel* (wenn man sie von links nach rechts liest) bzw. *Kürzungsregel* (wenn man sie von rechts nach links liest). Der Wert eines Bruches (also die rationale Zahl, die durch den Bruch festgelegt ist) ändert sich also nicht, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner mit der gleichen, von 0 verschiedenen ganzen Zahl multipliziert. Wegen

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

kann man jede rationale Zahl mit einem positiven Nenner schreiben. Zwei Brüche mit einem gemeinsamen Nenner, also von der Form  $\frac{a}{r}$  und  $\frac{c}{r}$ , heißen *gleichnamig*. Zwei beliebige Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  kann man gleichnamig machen, indem man sie durch Erweiterung auf einen *Hauptnenner* bringt. Eine Möglichkeit ist, die beiden Nenner miteinander zu multiplizieren und zu den gleichwertigen Brüchen  $\frac{ad}{bd}$  und  $\frac{cb}{bd}$  überzugehen. Statt mit  $bd$  kann man mit jedem gemeinsamen Vielfachen der Nenner arbeiten.

**Definition 23.2.** Ein Bruch  $a/b$  heißt *gekürzt*, wenn  $a$  und  $b$  teilerfremd sind.

Zu jeder rationalen Zahl gibt es eine gekürzte Darstellung. Wenn man den Nenner positiv wählt, ist diese Darstellung sogar eindeutig. Man erhält sie, indem man in einer beliebigen Darstellung durch den größten gemeinsamen Teiler des Zählers und des Nenners dividiert.

**Definition 23.3.** Eine rationale Zahl der Form  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , heißt *Stammbruch*.

### 23.2. Rechenoperationen auf den rationalen Zahlen.

Eine über  $\mathbb{Z}$  formulierte Gleichung der Form

$$bx = a$$

mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  soll bei  $b \neq 0$  eine eindeutige Lösung besitzen, nämlich  $\frac{a}{b}$ . Um dies formulieren zu können, müssen wir natürlich erstmal eine Multiplikation und eine Addition auf den rationalen Zahlen definieren. Bei gleichnamigen Nenner addiert man einfach die Zähler, auf diesen Fall kann die allgemeine Definition zurückgeführt werden. Mit diesem Übergang, endlich viele rationale Zahlen mit einem gemeinsamen Nenner zu schreiben, kann man häufig Rechnungen und auch theoretische Überlegungen vereinfachen.

**Definition 23.4.** Die *Addition* der rationalen Zahlen  $x = \frac{a}{b}$  und  $y = \frac{c}{d}$  ist durch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

definiert.

Man addiert also zwei rationale Zahlen, indem man die Nenner gleichnamig macht. Diese Operation ist wohldefiniert! Was soll das bedeuten? Es gibt hier das folgende Problem, das gerne übersehen wird. Die beiden rationalen Zahlen  $x$  und  $y$ , die miteinander addiert werden sollen, besitzen unterschiedliche Darstellungen als Brüche, beispielsweise ist

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

und

$$y = \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

In der Definition der Addition kann man mit einer beliebigen Bruchdarstellung arbeiten. Dann ergibt sich einerseits, wenn man jeweils die erste Darstellung nimmt, die Summe

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

und andererseits, wenn man jeweils die zweite Darstellung nimmt, die Summe

$$\frac{a'd' + b'c'}{b'd'}.$$

Es ist nicht unmittelbar klar, dass hier die gleiche rationale Zahl steht. Wegen  $ab' = a'b$  und  $cd' = c'd$  ist aber nach Erweitern mit  $b'd'$  und Kürzen durch  $bd$

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{adb'd' + bcb'd'}{bdb'd'} = \frac{a'dbd' + bc'b'd}{bdb'd'} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'},$$

so dass das Ergebnis als rationale Zahl wohldefiniert ist. Nach der Definition nimmt man für den Nenner das Produkt der beiden Nenner. Man kann aber

genauso gut ein beliebiges gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner und die entsprechende Erweiterung nehmen. Bei gleichem Nenner ist insbesondere

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \frac{a+b}{r}.$$

**Definition 23.5.** Die *Multiplikation* von rationalen Zahlen  $x = \frac{a}{b}$  und  $y = \frac{c}{d}$  ist durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

definiert.

Auch hier muss man die Wohldefiniertheit der Verknüpfung nachweisen, siehe Aufgabe 23.9.

**Bemerkung 23.6.** Die Addition von rationalen Zahlen kann man über die Proportionalitäten begründen. Es sei ein proportionaler Zusammenhang  $\varphi$  durch

$$\varphi(a) = b$$

und ein weiterer (gleichskaliger) proportionaler Zusammenhang durch

$$\psi(a') = b'$$

gegeben. Beispielsweise seien (vergleiche Bemerkung 22.10) die Übernachtungskosten dadurch beschrieben, dass 7 Tage (und Nächte) 320 Euro kosten und die Verpflegungskosten dadurch beschrieben, dass 10 Tage 258 Euro kosten. Wie kann man die beiden Zusammenhänge sinnvoll addieren, also wie viel kostet Übernachtung und Verpflegung zusammen in einem bestimmten Zeitabschnitt? Die beiden Einzelangaben kann man nur dann sinnvoll miteinander verarbeiten, wenn sie sich auf die gleiche Taganzahl beziehen. Dies kann man erreichen, indem man zum Produkt der beiden Tageanzahlen übergeht. Die Übernachtungskosten sind für 70 Tage gleich  $320 \cdot 10 = 3200$  und die Verpflegungskosten sind für 70 Tage gleich  $258 \cdot 7 = 1806$ , die Gesamtkosten für 70 Tage sind also 5006 Euro.

Für eine entsprechende Interpretation der Multiplikation von rationalen Zahlen muss man die Hintereinanderschaltung von proportionalen Zusammenhängen wie in Bemerkung 22.11 betrachten.

Die Addition und die Multiplikation von rationalen Zahlen erfüllen weitere wichtige algebraische Eigenschaften. Letztlich werden diese auf die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten von  $\mathbb{Z}$  zurückgeführt.

**Satz 23.7.** *Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erfüllen die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Die Addition ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element. Zu jedem  $x \in \mathbb{Q}$  gibt es ein  $y \in \mathbb{Q}$  mit*

$$x + y = 0.$$

- (2) Die Multiplikation ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit 1 als neutralem Element. Zu jedem  $z \in \mathbb{Q}$ ,  $z \neq 0$ , gibt es ein  $w \in \mathbb{Q}$  mit

$$z \cdot w = 1.$$

- (3) Es gilt das Distributivgesetz.

*Beweis.* (1) Die Kommutativität der Addition folgt unmittelbar aus der Definition und der Kommutativität der ganzzahligen Addition und der ganzzahligen Multiplikation. Zum Nachweis der Assoziativität können wir annehmen, dass alle drei beteiligten rationalen Zahlen den gleichen Nenner haben. Sei also

$$x = \frac{a}{r}, y = \frac{b}{r}, z = \frac{c}{r}.$$

Dann ist

$$(x + y) + z = \left( \frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) + \frac{c}{r} = \frac{a+b}{r} + \frac{c}{r} = \frac{a+b+c}{r} = x + (y + z).$$

Ferner ist

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{0}{b} + \frac{a}{b} = \frac{0+a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Zu  $x = \frac{a}{b}$  betrachtet man  $y = \frac{-a}{b}$ . Dann ist

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a-a}{b} = \frac{0}{b} = 0.$$

- (2) Die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation ergeben sich unmittelbar aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften der ganzzahligen Verknüpfungen. Die  $1 = \frac{1}{1}$  hat die Eigenschaft

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b},$$

es ist also das neutrale Element der Multiplikation. Zu einer rationalen Zahl  $z \neq 0$  ist  $z = \frac{a}{b}$  mit  $a, b \neq 0$  (also sowohl der Zähler als auch der Nenner sind von 0 verschieden) ist auch der umgedrehte Bruch

$$z = \frac{b}{a}$$

eine rationale Zahl, und es gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

- (3) Zum Nachweis des Distributivgesetzes sei

$$x = \frac{a}{r}, y = \frac{b}{r}, z = \frac{c}{r}.$$

Damit ist unter Verwendung des Distributivgesetzes der ganzen Zahlen

$$\begin{aligned}
 x \cdot (y + z) &= \frac{a}{r} \cdot \left( \frac{b}{r} + \frac{c}{r} \right) \\
 &= \frac{a}{r} \cdot \frac{b+c}{r} \\
 &= \frac{a(b+c)}{r^2} \\
 &= \frac{ab+ac}{r^2} \\
 &= \frac{ab}{r^2} + \frac{ac}{r^2} \\
 &= \frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \frac{a}{r} \cdot \frac{c}{r} \\
 &= x \cdot y + x \cdot z.
 \end{aligned}$$

□

Man nennt  $\frac{-a}{b}$  die *negative rationale Zahl* zu  $\frac{a}{b}$  und man nennt bei  $a, b \neq 0$  die Zahl  $\frac{b}{a}$  die *inverse rationale Zahl* zu  $\frac{a}{b}$ .

### 23.3. Körper.

Wir erfassen die algebraischen Eigenschaften, die für die rationalen Zahlen gelten, mit einem eigenen Begriff.

**Definition 23.8.** Eine Menge  $K$  heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \quad \text{und} \quad \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente  $0, 1 \in K$  gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

- (1) Axiome der Addition
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle  $a, b, c \in K$  gilt:  $(a+b)+c = a+(b+c)$ .
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle  $a, b \in K$  gilt  $a+b = b+a$ .
  - (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle  $a \in K$  ist  $a+0 = a$ .
  - (d) Existenz des Negativen: Zu jedem  $a \in K$  gibt es ein Element  $b \in K$  mit  $a+b = 0$ .
- (2) Axiome der Multiplikation
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle  $a, b, c \in K$  gilt:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle  $a, b \in K$  gilt  $a \cdot b = b \cdot a$ .
  - (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle  $a \in K$  ist  $a \cdot 1 = a$ .
  - (d) Existenz des Inversen: Zu jedem  $a \in K$  mit  $a \neq 0$  gibt es ein Element  $c \in K$  mit  $a \cdot c = 1$ .
- (3) Distributivgesetz: Für alle  $a, b, c \in K$  gilt  $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ .

Da wir den Ringbegriff schon haben, kann man auch die folgende kürzere Definition geben.

**Definition 23.9.** Ein kommutativer Ring  $R$  heißt *Körper*, wenn  $R \neq 0$  ist und wenn jedes von 0 verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt.

Ein Körper ist also insbesondere ein kommutativer Ring. Jede Eigenschaft, die in einem kommutativen Ring gilt, gilt auch in einem Körper (aber nicht umgekehrt).

Die beiden wichtigsten Körper für uns sind der Körper der rationalen Zahlen und der Körper der reellen Zahlen, der Körper mit zwei Elementen wurde in Beispiel 11.4 besprochen. Zu einem Element  $x \in K$  bezeichnet man, wie in jedem kommutativen Ring, dasjenige Element, das mit  $x$  addiert die 0 ergibt, als das Negative von  $x$ , geschrieben  $-x$ . Zu einem Element  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ , bezeichnet man dasjenige Element, das mit  $x$  multipliziert die 1 ergibt, als das Inverse von  $x$ , geschrieben  $x^{-1}$ .

**Bemerkung 23.10.** In einem Körper  $K$  wird für beliebige Elemente  $x, y \in K$  mit  $y \neq 0$ , die *Bruchschreibweise*

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$$

verwendet. Es handelt sich also um eine Abkürzung für das Produkt von  $x$  mit dem inversen Element von  $y$ . Die Zahl  $\frac{x}{y}$  ist das eindeutig bestimmte Element, das mit  $y$  multipliziert das Element  $x$  ergibt. Diese Schreibweise passt mit der Bruchschreibweise für rationale Zahlen zusammen, da ja

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{ab}{b} = a$$

ist.

Die Berechnung von

$$\frac{x}{y} = x : y$$

nennt man *Division*, wobei  $x$  der *Dividend* und  $y$  der *Divisor* der Division heißt, das Ergebnis heißt *Quotient*.

**Bemerkung 23.11.** In einem Körper  $K$  ist wie in jedem kommutativen Ring die additive Struktur  $(K, 0, +)$  eine kommutative Gruppe. Insbesondere besitzt in jedem Körper eine Gleichung der Form

$$a + x = b$$

mit  $a, b \in K$  eine eindeutige Lösung, nämlich

$$b - a = b + (-a),$$

wie sich direkt aus Lemma 19.8 ergibt. Darüberhinaus ist zu jedem Körper  $K$  die multiplikative Struktur, wenn man die 0 herausnimmt, also  $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$

eine kommutative Gruppe. Dies bedeutet wiederum, dass eine Gleichung der Form

$$c \cdot x = d$$

mit  $c, d \neq 0$  eine eindeutige Lösung in  $K$  besitzt, nämlich

$$dc^{-1} = \frac{d}{c}.$$

Die folgende Eigenschaft heißt die *Nichtnullteilereigenschaft* eines Körpers. Sie gilt auch für  $\mathbb{Z}$ , im Allgemeinen aber nicht für jeden kommutativen Ring, siehe Aufgabe 19.4.

**Lemma 23.12.** *Es sei  $K$  ein Körper. Aus  $a \cdot b = 0$  folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 23.25. □

In einem Körper  $K$  kann man die Potenzschreibweise erweitern. Zu  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ , und einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  versteht man, wie in jedem kommutativen Ring, unter  $x^n$  das  $n$ -fache Produkt von  $x$  mit sich selbst ( $n$  Faktoren). Für negatives  $n \in \mathbb{Z}_-$  schreibt man  $n = -k$  mit  $k \in \mathbb{N}_+$  und setzt

$$x^n := (x^{-1})^k = (x^{-1})^{-n} = (x^{-n})^{-1}.$$

Für diese Potenzen gelten die folgenden *Potenzgesetze*, die die Potenzgesetze für positive Exponenten, die in jedem kommutativen Ring gelten, wesentlich erweitern.

**Lemma 23.13.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $a, b \neq 0$  Elemente aus  $K$ . Dann gelten die folgenden Potenzgesetze für  $m, n \in \mathbb{Z}$ .*

(1) *Es ist*

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

(2) *Es ist  $a^{-n} = (a^{-1})^n$  das inverse Element zu  $a^n$ .*

(3)

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(4)

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(5)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

*Beweis.* (1) folgt aus Aufgabe 19.11, da  $K \setminus \{0\}$  eine Gruppe ist. (2). Bei  $n \in \mathbb{N}$  ist die linke Gleichheit eine Definition und die Behauptung folgt aus

$$(a^{-1})^n \cdot a^n = (a^{-1}a)^n = 1.$$

Daraus folgt auch die Aussage für negatives  $n$ . Für (3), (4), (5) siehe Aufgabe 23.32. □



Auch bei der Nummerierung von Häusern ergeben sich mit rationalen Zahlen neue Möglichkeiten.

Rationale Zahlen

## 23. ARBEITSBLATT

### 23.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 23.1.** Löse in  $\mathbb{Q}$  die Gleichung

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x.$$

### 23.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 23.2.** Artikuliere die beiden folgenden Brüche mit „tel“

- (1)  $\frac{500}{19}$   
 (2)  $\frac{509}{10}$ .

**Aufgabe 23.3.** Sind die beiden rationalen Zahlen

$$\frac{25746}{32987} \text{ und } \frac{47556}{60931}$$

gleich oder verschieden?

**Aufgabe 23.4.** Finde die gekürzte Darstellung für den Bruch

$$\frac{1517}{1591}.$$

**Aufgabe 23.5.** Finde die gekürzte Darstellung (ausgerechnet) für den Bruch

$$\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 151}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 151^2}.$$

**Aufgabe 23.6.** Bestimme die Darstellung der Zahlen

$$\frac{41}{125}, -\frac{91}{350}, \frac{69}{222},$$

mit dem kleinstmöglichen Hauptnenner.

**Aufgabe 23.7.\***

Im Bruch

$$\frac{\text{|||||}}{\text{|||||}}$$

sind Zähler und Nenner im Strichsystem angegeben. Man gebe die entsprechende gekürzte Darstellung an.

**Aufgabe 23.8.** Rechne den im Fünfersystem gegebenen Bruch

$$\frac{214}{303}$$

in das Zehnersystem um.

**Aufgabe 23.9.** Rechne den Bruch

$$\frac{219}{95}$$

in das Dreiersystem um.

**Aufgabe 23.10.\***

Berechne im Vierersystem

$$\frac{321}{203} + \frac{131}{301}$$

(das Ergebnis muss nicht gekürzt sein).

**Aufgabe 23.11.** Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, n \longmapsto \frac{n}{1},$$

injektiv ist.

**Aufgabe 23.12.** Addiere die ersten fünf Stammbrüche.

**Aufgabe 23.13.** Zeige, dass die Multiplikation von rationalen Zahlen wohldefiniert ist.

**Aufgabe 23.14.** Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

**Aufgabe 23.15.** Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

**Aufgabe 23.16.** Berechne

$$3^2 \cdot 5^{-1} \cdot 7^{-2} + 2^{-4} \cdot 5^{-2} \cdot 7.$$

**Aufgabe 23.17.** Berechne

$$\frac{\frac{-7}{11}}{\frac{13}{-9}}.$$

**Aufgabe 23.18.** Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

**Aufgabe 23.19.** Löse in  $\mathbb{Q}$  die Gleichung

$$\frac{7}{11} + x = \frac{5}{9}.$$

**Aufgabe 23.20.** Löse in  $\mathbb{Q}$  die Gleichung

$$\frac{3}{5}x - \frac{2}{7} = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x.$$

**Aufgabe 23.21.\***

Zwei Personen,  $A$  und  $B$ , liegen unter einer Palme,  $A$  besitzt 2 Fladenbrote und  $B$  besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person  $C$  kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt  $C$  an  $A$  und an  $B$ ?

**Aufgabe 23.22.\***

Es soll Holz unterschiedlicher Länge (ohne Abfall) in Stücke zerlegt werden, die zwischen 30 und 40 cm lang sein sollen (jeweils einschließlich). Für welche Holzlängen ist dies möglich?

**Aufgabe 23.23.\***

Zwei Schwimmer,  $A$  und  $B$ , schwimmen auf einer 50-Meter-Bahn einen Kilometer lang. Schwimmer  $A$  schwimmt  $3m/s$  (das ist besser als der Weltrekord) und Schwimmer  $B$  schwimmt  $2m/s$ .

- (1) Erstelle in einem Diagramm für beide Schwimmer den Graphen der jeweiligen Abbildung, die für die Zeit zwischen 0 und 100 Sekunden angibt, wie weit der Schwimmer von der Startlinie zu diesem Zeitpunkt (wirklich, also unter Berücksichtigung der Wenden) entfernt ist.
- (2) Wie weit von der Startlinie entfernt befindet sich Schwimmer  $A$  (und Schwimmer  $B$ ) nach 30 Sekunden?
- (3) Nach wie vielen Sekunden begegnen sich die beiden Schwimmer zum ersten Mal?
- (4) Wie oft begegnen sich die beiden Schwimmer (Start mitzählen)?
- (5) Wie oft überrundet Schwimmer  $A$  den Schwimmer  $B$ ?

**Aufgabe 23.24.** Eine Gitarrensaite schwingt beim Ton  $c$  ca. 131 mal pro Sekunde hin und her (also 131 Hertz). Wie oft schwingt die Große Septime dazu pro Sekunde? Wie oft schwingt die Quarte zu  $c$  pro Minute?

**Aufgabe 23.25.** Der Preis für eine Maß Bier auf der Münchner Wiesen steht zum Vorjahrespreis im Verhältnis  $14 : 13$ . In welchem Verhältnis steht der heutige Preis zum Preis von vor zehn Jahren?

**Aufgabe 23.26.** Zeige, dass es ganze Zahlen  $a, b$  derart gibt, dass

$$\frac{1}{100} = a\frac{1}{4} + b\frac{1}{25}$$

gilt. Finde solche Zahlen.

**Aufgabe 23.27.** Finde ganze Zahlen  $a, b$  derart, dass

$$\frac{1}{15} = a\frac{1}{3} + b\frac{1}{5}$$

gilt.

**Aufgabe 23.28.\***

Es seien  $a, b$  positive natürliche Zahlen. Die Summe der Stammbrüche ist dann

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}.$$

- (1) Zeige, dass bei  $a, b$  teilerfremd diese Darstellung gekürzt ist.
- (2) Zeige, dass im Allgemeinen diese Darstellung nicht gekürzt sein muss.

**Aufgabe 23.29.\***

Beweise die *Nichtnullteilereigenschaft* für einen Körper  $K$ .

**Aufgabe 23.30.** Zeige direkt, dass für rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  das Produkt nur dann 0 sein kann, wenn eine der Zahlen 0 ist.

**Aufgabe 23.31.** Es sei  $K$  ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ein Körperelement  $n_K$  zuordnen kann, so dass  $0_K$  das Nullelement in  $K$  und  $1_K$  das Einselement in  $K$  ist und so dass

$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

**Aufgabe 23.32.\***

Es sei  $K$  ein Körper und seien  $a, b \neq 0$  Elemente aus  $K$ . Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus  $\mathbb{N}$  sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von  $u^k$  gleich  $(u^{-1})^k$  ist, verwenden.

$$(1) \quad a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

$$(2) \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$(3) \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

**Aufgabe 23.33.\***

Zeige, dass jede rationale Zahl  $z \neq 0$  eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = \pm \prod_p p^{\nu_p(z)}$$

besitzt, wobei das (endliche) Produkt sich über Primzahlen erstreckt und die Exponenten  $\nu_p(z) \in \mathbb{Z}$  sind.

**23.3. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 23.34.** (3 Punkte)

Finde die gekürzte Darstellung von

$$\frac{8586305}{7190755}.$$

**Aufgabe 23.35.** (2 Punkte)

Eine lineare Funktion

$$\varphi: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

hat an der Stelle  $\frac{11}{13}$  den Wert  $\frac{7}{17}$ . Welchen Wert hat sie an der Stelle  $\frac{3}{19}$ ?

**Aufgabe 23.36.** (5 Punkte)

Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

**Aufgabe 23.37.** (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei  $a, c \in \mathbb{N}_+$  (und  $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit  $a, b, c, d, b+d \neq 0$ , wo diese Regel gilt.

**Aufgabe 23.38.** (3 Punkte)

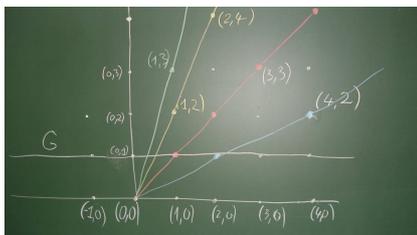
Es seien  $p$  und  $q$  verschiedene Primzahlen. Zeige, dass es ganze Zahlen  $a, b$  derart gibt, dass

$$\frac{1}{pq} = a\frac{1}{p} + b\frac{1}{q}$$

gilt.

## 24. VORLESUNG - ORDNUNG AUF DEN RATIONALEN ZAHLEN

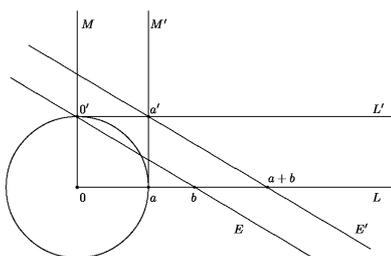
## 24.1. Die Platzierung der rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl.



Man kann die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden platzieren (die ganzen Zahlen seien dort schon platziert). Die rationale Zahl  $\frac{a}{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{N}_+$  findet man so: Man unterteilt die Strecke von 0 nach  $a$  in  $b$  gleichlange Teilstrecken. Die Zahl  $\frac{a}{b}$  ist dann die rechte Grenze des (von links) ersten Teilintervalls. Insbesondere ist  $\frac{1}{b}$  die Länge des Intervalls, dass  $b$ -fach nebeneinander gelegt die Einheitsstrecke von 0 bis 1 (oder das Einheitsintervall) ergibt. Unter Bezugnahme auf elementargeometrische Eigenschaften der Ebene kann man diese Unterteilung folgendermaßen durchführen: Man betrachtet den linearen Graphen zu dem proportionalen Zusammenhang, der an der Stelle  $a$  den Wert  $b$  besitzt. Die Gerade, die senkrecht auf der  $y$ -Achse steht und durch den Punkt  $(0, 1)$  geht, trifft den Graphen in einem Punkt  $(s, 1)$ , wobei  $s$  die Länge der Verbindungsstrecke von  $(0, 1)$  zu  $(s, 1)$  ist. Aufgrund des Strahlensatzes, angewendet auf die Strahlen  $y$ -Achse und linearer Graph und die durch  $y = 1$  und  $y = b$  gegebenen parallelen Geraden, gilt die Verhältnissgleichheit

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{1}.$$

Die Streckenlänge  $s$  kann man dann parallel auf die  $x$ -Achse verschieben, das Ergebnis ist der gesuchte Platz für  $\frac{a}{b}$ . Umgekehrt formuliert: Da das  $b$ -fache der Strecke von 0 nach 1 die Länge  $b$  besitzt, ist das  $b$ -fache der Strecke  $s$  gleich der Länge  $a$ .



Die geometrische Ausführung der vektoriellen Addition auf dem Zahlenstrahl. Man muss einen Zirkel einsetzen und parallele Geraden konstruieren können. Die 1 spielt keine Rolle.

Die Addition und die Multiplikation lassen sich auf dem Zahlenstrahl geometrisch deuten bzw. durchführen. Die Addition von zwei Punkten  $P$  und  $Q$  ist die vektorielle Addition der Pfeile  $\overrightarrow{OP}$  und  $\overrightarrow{OQ}$ , wobei der Startpunkt des einen Vektors parallel an den Endpunkt des anderen Vektors angelegt wird. Für die geometrische Deutung der Multiplikation muss man den Strahlensatz heranziehen, man muss die 1 fixiert haben und man muss Zirkel und Lineal zur Verfügung haben. Die zu multiplizierenden Punkte  $a$  und  $b$  seien auf der Zahlengerade gegeben, die wir als  $x$ -Achse in einem Koordinatensystem auffassen. Auf der  $y$ -Achse markieren wir den Punkt  $a'$ , der zum Nullpunkt den Abstand  $a$  und somit die Koordinaten  $(0, a)$  besitzt. Wir zeichnen die Gerade durch die beiden Punkte  $(0, a)$  und  $(1, 0)$ . Zu dieser Geraden zeichnen wir die parallele Gerade durch den Punkt  $(0, b)$ . Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der  $y$ -Achse sei  $(0, z)$ . Mit dem Strahlensatz gilt dann die Beziehung  $\frac{z}{a} = \frac{b}{1}$ , also ist

$$z = ab.$$

Die Abtragung von  $z$  von der  $y$ -Achse auf die  $x$ -Achse ist also das Produkt.

Als Punkte auf der Zahlengeraden lassen sich rationale Zahlen ihrer Größe nach vergleichen. In der geometrischen Vorstellung bedeutet  $x \geq y$  für beliebige Punkte  $x$  und  $y$  aus der rechten Hälfte des Zahlenstrahls, dass die Strecke  $[0, x]$  in der Strecke  $[0, y]$  enthalten ist, bzw., dass  $y$  rechts von  $x$  liegt. Für eine rationale Zahl wissen wir, dass ein ganzzahliges (geometrisches) Vielfaches davon, also die  $n$ -fache Hintereinanderlegung der Strecke, eine ganze Zahl ergibt. Für zwei rationale Zahlen  $x$  und  $y$  gibt es daher eine natürliche Zahl  $n$  mit der Eigenschaft, dass sowohl  $nx$  als auch  $ny$  ganzzahlig sind. Damit können wir den Vergleich von rationalen Zahlen auf den Vergleich von ganzen Zahlen zurückführen. Wenn  $x = \frac{a}{b}$  und  $y = \frac{c}{d}$  mit  $a, c \in \mathbb{Z}$  und  $b, d \in \mathbb{N}_+$  ist, so kann man  $n = bd$  nehmen und erhält die Beziehung

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

genau dann, wenn in  $\mathbb{Z}$  die Beziehung

$$ad \geq bc$$

gilt. Hier begegnen wir wieder dem *Überkreuzungsprinzip*.

## 24.2. Die Ordnung auf den rationalen Zahlen.

Wir definieren eine Anordnung auf den rationalen Zahlen.

**Definition 24.1.** Auf den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  wird die *Größergleichrelation*  $\geq$  durch  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$  (bei positiven Nennern  $b, d \in \mathbb{N}_+$ ), falls  $ad \geq cb$  in  $\mathbb{Z}$  gilt, definiert.

Wir müssen zuerst zeigen, dass diese Definition sinnvoll ist, also unabhängig von den gewählten Darstellungen der rationalen Zahlen als Brüche. Seien also

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

und

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$$

mit positiven Nennern. Dann ist

$$ab' = a'b$$

und

$$cd' = c'd.$$

Aus

$$ad \geq bc$$

ergibt sich dann gemäß Lemma 19.13 (6) durch Multiplikation mit der positiven ganzen Zahl  $b'd'$

$$adb'd' \geq bcb'd'.$$

Dies schreiben wir als

$$a'dbd' \geq bc'b'd,$$

woraus sich durch Kürzen mit der positiven ganzen Zahl  $db$  die Abschätzung

$$a'd' \geq b'c'$$

ergibt, die

$$\frac{a'}{b'} \geq \frac{c'}{d'}$$

bedeutet. Wegen der Symmetrie der Situation gilt auch die Umkehrung. Die Beziehung  $\geq$  ist also unabhängig von dem gewählten Bruchrepräsentanten. Die zugrunde liegende Idee ist, die beiden zu vergleichenden Brüche auf einen gemeinsamen positiven Nenner zu bringen und dann die Zähler zu vergleichen. Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = ad \cdot \frac{1}{bd}$$

und

$$\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd} = cb \cdot \frac{1}{bd}.$$

Es liegt also einerseits das  $ad$ -Vielfache und andererseits das  $cb$ -Vielfache des gleichen Stammbruches  $\frac{1}{bd}$ . Es leuchtet ein, dass die Größerbeziehung nur von dem ganzzahligen Vorfaktor abhängt. Daraus und aus der Tatsache, dass man auch drei rationale Zahlen auf einen gemeinsamen Nenner bringen kann, folgt auch direkt, dass es sich um eine totale Ordnung handelt, siehe Aufgabe 24.28.

**Beispiel 24.2.** Wir wollen die rationalen Zahlen

$$\frac{11}{7}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, 2$$

miteinander vergleichen. Man kann alle diese Zahlen auf den gemeinsamen Nenner 70 bringen, wodurch man die Darstellungen

$$\frac{110}{70}, \frac{105}{70}, \frac{112}{70}, \frac{140}{70}$$

erhält, aus denen man an den Zählern unmittelbar die Größenverhältnisse ablesen kann. Man kann auch die Brüche paarweise gemäß der Definition vergleichen, wegen

$$2 \cdot 11 = 22 \geq 21 = 3 \cdot 7$$

ist beispielsweise

$$\frac{11}{7} \geq \frac{3}{2}.$$

Um die Ordnungseigenschaften der rationalen Zahlen leichter erfassen zu können, empfiehlt es sich, den folgenden Begriff einzuführen.

**Definition 24.3.** Ein Körper  $K$  heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „ $\geq$ “ auf  $K$  gibt, die die beiden Eigenschaften

- (1) Aus  $x \geq y$  folgt  $x + z \geq y + z$  (für beliebige  $x, y, z \in K$ ),
- (2) Aus  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  folgt  $xy \geq 0$  (für beliebige  $x, y \in K$ ),

erfüllt.

Ein angeordneter Körper ist einfach ein angeordneter Ring, der zugleich ein Körper ist. Die beiden Eigenschaften heißen wieder die *Verträglichkeit mit der Addition* und die *Verträglichkeit mit der Multiplikation*. Es wird sich später herausstellen, dass auch die reellen Zahlen einen angeordneten Körper bilden. Elemente  $x \in K$  mit  $x > 0$  heißen *positiv* und mit  $x < 0$  heißen *negativ*.

**Satz 24.4.** Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  bilden mit der in der Definition 24.1 festgelegten Ordnung einen angeordneten Körper.

*Beweis.* Dass eine totale Ordnung vorliegt wird in Aufgabe 24.28 gezeigt. Es sei  $x = \frac{a}{b}$ ,  $y = \frac{c}{d}$  und  $z = \frac{e}{f}$  mit positiven Nennern  $b, d, f$ . Durch Übergang zu einem gemeinsamen Hauptnenner können wir direkt  $b = d = f$  annehmen. Sei

$$x \geq y,$$

also

$$a \geq c.$$

Dann ist nach Lemma 19.11 (2) auch

$$a + e \geq c + e$$

und somit ist

$$x + z = \frac{a}{b} + \frac{e}{b} = \frac{a+e}{b} \geq \frac{c+e}{b} = \frac{c}{b} + \frac{e}{b} = y + z.$$

Wenn die beiden Brüche  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  beide  $\geq 0$  sind, so sind alle Zähler und Nenner aus  $\mathbb{N}$  und dies überträgt sich auf  $\frac{ac}{bd}$ , also ist auch dies  $\geq 0$ .  $\square$

Da ein angeordneter Körper insbesondere ein angeordneter Ring ist, gelten die Eigenschaften aus Lemma 19.13 unmittelbar auch für  $\mathbb{Q}$  und für  $\mathbb{R}$ . Die dort angegebenen Regeln gelten bei einem angeordneten Körper auch dann, wenn man mit  $>$  statt mit  $\geq$  arbeitet. Wesentlich neue Aspekte bei einem angeordneten Körper treten in Bezug auf inverse Elemente auf.

**Lemma 24.5.** *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

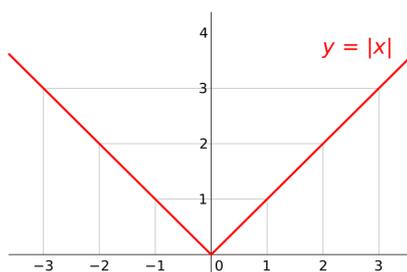
- (1) Aus  $x > 0$  folgt auch  $x^{-1} > 0$ .
- (2) Aus  $x < 0$  folgt auch  $x^{-1} < 0$ .
- (3) Für  $x > 0$  ist  $x \geq 1$  genau dann, wenn  $x^{-1} \leq 1$  ist.
- (4) Aus  $x \geq y > 0$  folgt  $x^{-1} \leq y^{-1}$ .
- (5) Für positive Elemente ist  $x \geq y$  äquivalent zu  $\frac{x}{y} \geq 1$ .

*Beweis.* Siehe Aufgabe 24.16, Aufgabe 24.17, Aufgabe 24.18, Aufgabe 24.19 und Aufgabe 24.20.  $\square$

### 24.3. Der Betrag.

**Definition 24.6.** In einem angeordneten Körper  $K$  ist der *Betrag* eines Elementes  $x \in K$  folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$



Der Betrag ist also nie negativ (da aus  $x < 0$  die Beziehung  $-x > 0$  folgt, vergleiche Lemma 24.5 (6)) und hat nur bei  $x = 0$  den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto |x|,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

**Lemma 24.7.** *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann erfüllt die Betragsfunktion*

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto |x|,$$

*folgende Eigenschaften (dabei seien  $x, y$  beliebige Elemente in  $K$ ).*

- (1)  $|x| \geq 0$ .
- (2)  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  ist.
- (3)  $|x| = |y|$  genau dann, wenn  $x = y$  oder  $x = -y$  ist.
- (4)  $|y - x| = |x - y|$ .
- (5)  $|xy| = |x| |y|$ .
- (6) Für  $x \neq 0$  ist  $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ .
- (7) Es ist  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecksungleichung für den Betrag).

*Beweis.* Siehe Aufgabe 24.25. □

Die Zahl  $|x - y|$  nennt man auch den *Abstand* der beiden Zahlen  $x$  und  $y$  und die Länge der Strecke (oder des *Intervalls*) von  $x$  nach  $y$  bzw. von  $y$  nach  $x$ . Bei  $x < y$  wird die Strecke von  $x$  nach  $y$  in  $n$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ ) gleichlange Streckenabschnitte eingeteilt, wenn man die Zwischenpunkte

$$x + i \frac{y - x}{n}, i = 0, 1, \dots, n$$

betrachtet (bei  $i = 0$  bzw.  $i = n$  ergeben sich Randpunkte).

#### 24.4. Das arithmetische Mittel.

**Definition 24.8.** Zu  $n$  Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  in einem angeordneten Körper  $K$  nennt man

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

das *arithmetische Mittel* der Zahlen.

#### 24.5. Die Bernoullische Ungleichung.

Die folgende Aussage heißt Bernoullische Ungleichung.

**Lemma 24.9.** *Sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes  $x \in K$  mit  $x \geq -1$  die Abschätzung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Bei  $n = 0$  steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für  $n$  bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n (1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x,
\end{aligned}$$

da Quadrate (und positive Vielfache davon) in einem angeordneten Körper nichtnegativ sind.  $\square$

## 24. ARBEITSBLATT

### 24.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 24.1.** Ordne die folgenden rationalen Zahlen gemäß ihrer Größe.

$$2, \left(\frac{5}{3}\right)^2, 4, 5 - \frac{11}{12}, 3 + \frac{11}{10}, \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{3}, \frac{21}{12} + \frac{19}{9}, \frac{407}{100}, 3, \frac{15}{4}.$$

### 24.2. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 24.2.\*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen  $p$  und  $q$  größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

**Aufgabe 24.3.** Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{7}{8}$  liegen.

**Aufgabe 24.4.** Warum braucht man in der Definition 24.1 die Bedingung, dass beide Nenner positiv sind?

Das folgende Konzept reicht historisch weiter zurück als das der rationalen Zahlen.

Zwei Strecken  $s$  und  $t$  heißen *kommensurabel*, wenn es eine Strecke  $g$  mit der Eigenschaft gibt, dass beide Strecken ganzzahlige Vielfache von  $g$  sind.

**Aufgabe 24.5.** Zeige, dass zwei Strecken  $a$  und  $b$  genau dann kommensurabel sind, wenn es eine Strecke  $v$  mit der Eigenschaft gibt, dass  $v$  von beiden Strecken ein ganzzahliges Vielfaches ist.

**Aufgabe 24.6.** Es sei  $a \neq 0$  eine rationale Zahl auf dem Zahlenstrahl. Zeige, dass  $a$  zu einem weiteren Punkt  $b \neq 0$  genau dann kommensurabel ist, wenn  $b$  ebenfalls rational ist.

**Aufgabe 24.7.\***

Unterteile die Strecke von  $\frac{2}{7}$  nach  $\frac{3}{4}$  rechnerisch in drei gleichlange Strecken.

**Aufgabe 24.8.\***

Es stehen zwei Gläser auf einem Tisch, wobei das eine mit Rotwein und das andere mit Weißwein gefüllt ist, und zwar gleichermaßen. Nun wird ein kleineres leeres Glas (ein Fingerhut oder ein Schnapsglas) in das Rotweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Weißweinglas überführt und dort gleichmäßig vermischt (insbesondere gibt es Platz für diese Hinzugabe). Danach wird das kleinere Glas in das Weißweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Rotweinglas überführt. Befindet sich zum Schluss im Rotweinglas mehr Rotwein als im Weißweinglas Weißwein?

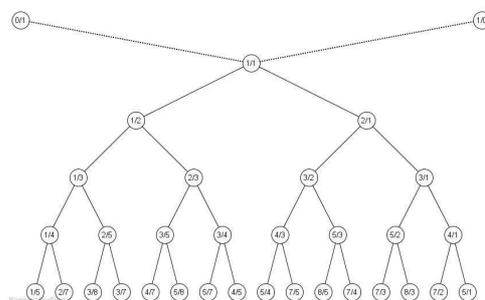
**Aufgabe 24.9.\***

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

**Aufgabe 24.10.\***

Zwei Fahrradfahrer,  $A$  und  $B$ , fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer  $A$  macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer  $B$  braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?



Im Stern-Brocot-Baum ergeben sich die gekürzten positiven Brüche, indem man zwei je in der  $x$ -Richtung benachbarte Brüche „falsch“ addiert, nämlich  $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  rechnet, und in die nächste Zeile dazwischen platziert. An der Links-Rechtsausrichtung kann man die Größenverhältnisse ablesen.

**Aufgabe 24.11.** Gabi Hochster hat die Addition und die Multiplikation der rationalen Zahlen verstanden und möchte jetzt die Operation verstehen, bei der man

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$$

setzt. Sie beschränkt sich auf positive  $a, b, c, d$ . Überprüfe ihre Behauptungen:

(1) Bei

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$

gilt

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

Dies kann man algebraisch und geometrisch beweisen.

- (2) Die Verknüpfung ist für rationale Zahlen nicht wohldefiniert.
- (3) Wenn man für rationale Zahlen stets ihre teilerfremde Darstellung nimmt, so ist die Verknüpfung wohldefiniert.
- (4) Die Verknüpfung ist kommutativ.
- (5) Die Verknüpfung ist nicht assoziativ.

**Aufgabe 24.12.\***

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $x > 0$ . Zeige, dass auch das inverse Element  $x^{-1}$  positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

**Aufgabe 24.13.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $x < 0$ . Zeige, dass auch das inverse Element  $x^{-1}$  negativ ist.

**Aufgabe 24.14.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $x \geq 1$ . Zeige, dass für das inverse Element  $x^{-1} \leq 1$  gilt.

**Aufgabe 24.15.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $x > y > 0$ . Zeige, dass für die inversen Elemente  $x^{-1} < y^{-1}$  gilt.

**Aufgabe 24.16.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und seien  $x, y$  positive Elemente. Zeige, dass  $x \geq y$  zu  $\frac{x}{y} \geq 1$  äquivalent ist.

**Aufgabe 24.17.\***

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $b \in K, b > 1$ . Zeige, dass es dann Elemente  $c, d > 1$  mit  $b = cd$  gibt.

**Aufgabe 24.18.\***

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Zeige, dass für  $x \geq 3$  die Beziehung

$$x^2 + (x + 1)^2 \geq (x + 2)^2$$

gilt.

**Aufgabe 24.19.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Zeige, dass die in Aufgabe 23.31 eingeführte Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto n_K,$$

injektiv ist.

**Aufgabe 24.20.** Zeige die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

für  $n \in \mathbb{N}_+$ .

**Aufgabe 24.21.\***

Bestimme die ganzzahligen Lösungen  $x \neq 0$  der Ungleichung

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{-7}{4}} > -1.$$

**Aufgabe 24.22.** Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto |x|,$$

in einem angeordneten Körper (dabei seien  $x, y$  beliebige Elemente in  $K$ ).

- (1)  $|x| \geq 0$ .
- (2)  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  ist.
- (3)  $|x| = |y|$  genau dann, wenn  $x = y$  oder  $x = -y$  ist.
- (4)  $|y - x| = |x - y|$ .
- (5)  $|xy| = |x| |y|$ .
- (6) Für  $x \neq 0$  ist  $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ .
- (7) Es ist  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

**Aufgabe 24.23.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Zeige, dass für  $x, y \in K$  die Identität

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

gilt.

**Aufgabe 24.24.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \longmapsto \min(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

**Aufgabe 24.25.** Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper  $K$ , die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a)  $|4x - 3| < |2x - 3|$ .

b)  $\left| \frac{x-2}{3x-1} \right| \leq 1$ .

**Aufgabe 24.26.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes  $x > 0$  die Ungleichung  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  erfüllt ist. Für welche  $x$  gilt Gleichheit?

**Aufgabe 24.27.** Zeige die Abschätzung

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

für  $n \in \mathbb{N}_+$ .

### 24.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 24.28.** (3 Punkte)

Zeige, dass die Größergleichrelation auf den rationalen Zahlen eine totale Ordnung ist.

**Aufgabe 24.29.** (2 Punkte)

Zeige die Abschätzung

$$\binom{d+n}{n} \geq \left(\frac{d}{n}\right)^n.$$

**Aufgabe 24.30.** (4 (1+3) Punkte)

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 23.31 konstruierte Zuordnung  $\mathbb{Z} \rightarrow K$ .

a) Zeige, dass diese Zuordnung injektiv ist.

b) Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung  $\mathbb{Q} \subseteq K$  fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in  $\mathbb{Q}$  mit den Verknüpfungen in  $K$  übereinstimmen und die Ordnung auf  $\mathbb{Q}$  mit der Ordnung auf  $K$  übereinstimmt.

**Aufgabe 24.31.** (3 Punkte)

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und seien  $x_1, \dots, x_n \in K$  Elemente. Zeige, dass dann

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

gilt.

**Aufgabe 24.32.** (3 Punkte)

Ergänze den Stern-Brocot-Baum um eine weitere Zeile.

## 25. VORLESUNG - ARCHIMEDISCH ANGEORDNETE KÖRPER

## 25.1. Das Archimedes-Axiom für die rationalen Zahlen.



Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

**Lemma 25.1.** *Zu jeder rationalen Zahl  $q$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit*

$$q \leq n.$$

*Beweis.* Sei

$$q = \frac{a}{b}$$

mit positivem  $b$ . Wenn  $a$  negativ ist, kann man jede natürliche Zahl nehmen. Wenn  $a$  nicht negativ ist, so ist

$$a \leq ba$$

und damit

$$q \leq a$$

gemäß der Definition der Ordnung auf den rationalen Zahlen.  $\square$

Vor der folgenden Definition erinnern wir daran, dass jeder angeordnete Körper (und jeder angeordnete Ring  $\neq 0$ ) die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  enthält.

**Definition 25.2.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann heißt  $K$  *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem  $x \in K$  eine natürliche Zahl  $n$  mit

$$n \geq x$$

gibt.

Gemäß Lemma 25.1 sind die rationalen Zahlen archimedisch angeordnet. Die reellen Zahlen bilden ebenfalls, wie wir später sehen werden, einen archimedisch angeordneten Körper. Grundsätzlich ist jeder angeordnete Körper, für den der Zahlenstrahl ein sinnvolles Modell ist, archimedisch angeordnet, da es ja jenseits eines jeden Punktes noch größere natürliche Zahlen gibt. Es gibt allerdings auch angeordnete Körper, die nicht archimedisch angeordnet sind.



Die folgende wichtige Aussage sollte man so lesen: Egal wie groß  $y$  ist und egal wie klein ein positives  $x$  ist, man kann stets mit hinreichend vielen  $x$  die Zahl  $y$  übertreffen. Egal wie klein eine Strecke ist, wenn man sie hinreichend oft hintereinander legt, übertrifft man damit jede gegebene Strecke. Mit Sandkörnern beliebig kleiner Größe kann man eine beliebig große Sanddüne aufbauen.

**Lemma 25.3.** Sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es zu  $x, y \in K$  mit  $x > 0$  stets ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $nx > y$ .

*Beweis.* Wir betrachten  $y/x$ . Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein  $n$  mit  $n \geq y/x$ . Da  $x$  positiv ist, gilt nach Lemma 24.5 (2) auch  $nx \geq y$ .  $\square$

**Lemma 25.4.** Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei  $x > 0$ . Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} \leq x$ .

*Beweis.* Es ist  $x^{-1}$  eine nach Aufgabe 24.16 positive Zahl und daher gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq x^{-1} > 0$ . Dies ist nach Aufgabe 24.19 äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} \leq (x^{-1})^{-1} = x.$$

$\square$

Bei den beiden folgenden Aussagen denke man bei  $B$  an eine sehr große und bei  $\epsilon$  an eine sehr kleine Zahl.

**Lemma 25.5.** *Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper und  $x > 1$ . Dann gibt es zu jedem  $B \in K$  eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit*

$$x^n \geq B.$$

*Beweis.* Wir schreiben  $x = 1 + u$  mit  $u > 0$ . Aufgrund von Lemma 25.3 gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $nu \geq B - 1$ . Damit gilt unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzung

$$x^n = (1 + u)^n \geq 1 + nu \geq 1 + B - 1 = B.$$

□

**Korollar 25.6.** *Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper und  $x \in K$  mit  $0 < x < 1$ . Dann gibt es zu jedem positiven  $\epsilon \in K$  eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit*

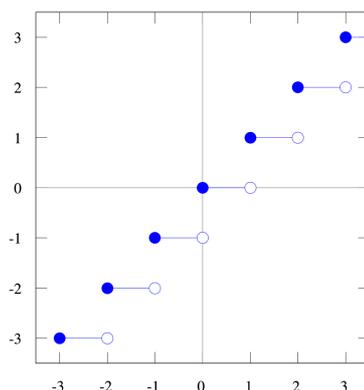
$$x^n \leq \epsilon.$$

*Beweis.* Sei  $y := x^{-1}$  und  $B := \epsilon^{-1}$ . Nach Lemma 25.5 gibt es ein  $n$  mit

$$y^n \geq B.$$

Durch Übergang zu den inversen Elementen erhält man gemäß Lemma 24.5 (4) die Behauptung. □

## 25.2. Gemischte Brüche.



**Definition 25.7.** Zu einer rationalen Zahl  $x$  ist die *Gaußklammer*  $[x]$  durch

$$[x] = n, \text{ falls } x \in [n, n + 1[ \text{ und } n \in \mathbb{Z},$$

definiert.

Diese ganze Zahl  $n$  existiert, da wir uns in einem archimedisch angeordneten Körper befinden. Ein damit verwandtes Konzept ist die *Rundung*. Die Rundung einer rationalen (oder reellen) Zahl  $x$  ist durch  $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$  definiert. Sie gibt an, welche Ganze Zahl der Zahl am nächsten ist, wobei man die  $\frac{1}{2}$ -Werte abrundet.

**Definition 25.8.** Unter einem *gemischten Bruch* versteht man einen Ausdruck der Form

$$n\frac{a}{b}$$

mit einer natürlichen Zahl  $n$  und einer rationalen Zahl  $\frac{a}{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{N}_+$  und  $a < b$ . Der Wert eines gemischten Bruches ist

$$n + \frac{a}{b}.$$

Die natürliche Zahl  $n$  heißt der *ganzzahlige Anteil* und  $\frac{a}{b}$  heißt der *Bruchanteil*. Ein gemischter Bruch ist eine besondere Darstellung für eine rationale Zahl, sind ist vor allem bei Zeit- und bei Längenangaben gebräuchlich, wie wenn man sagt, dass die Oper dreieinviertel Stunden gedauert hat. Vorteile sind, dass durch den ganzzahligen Anteil die Größenordnung der Zahl unmittelbar ersichtlich ist und dass sich diese Darstellung ergibt, wenn man bei einem gegebenen Bruch die Division mit Rest von Zähler durch Nenner durchführt. Ein Nachteil ist die Verwechslungsgefahr von  $7\frac{1}{4}$  mit dem Produkt  $7 \cdot \frac{1}{4}$ . In einem Kontext, in dem man mit gemischten Brüchen arbeitet, muss man auf die Konvention, dass man das Produktzeichen weglassen darf, verzichten. Was gemischte Brüche für negative Zahlen sind ist auch heikel.

Jede positive rationale Zahl besitzt eine Darstellung als gemischter Bruch, die bis auf das Kürzen des Bruchanteils eindeutig bestimmt ist. Zu einem Bruch  $\frac{c}{b}$  erhält man die Darstellung als gemischter Bruch, indem man die Division mit Rest

$$c = nb + a$$

mit  $0 \leq a < b$  durchführt und die Umformung

$$\frac{c}{b} = \frac{nb + a}{b} = n + \frac{a}{b} = n\frac{a}{b}$$

vornimmt. Insbesondere ist  $n = \lfloor \frac{c}{b} \rfloor$ . Bei der Weiterverarbeitung eines gemischten Bruches  $n\frac{a}{b}$  arbeitet man mit  $n + \frac{a}{b}$ . Dies kann man in einen ungemischten Bruch zurückrechnen, was aber nicht immer von Vorteil ist. Wenn man beispielsweise die beiden gemischten Brüche  $n + \frac{a}{b}$  und  $m + \frac{c}{d}$  miteinander addieren möchte, und das Ergebnis als gemischten Bruch haben möchte, so kann man von  $(n + m) + (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$  ausgehen und muss für die Summe der Brüche hinten nur überprüfen, ob diese 1 übertrifft oder nicht und gegebenenfalls 1 zum ganzen Anteil dazuschlagen.

### 25.3. Monotone Abbildungen.

Abbildungen eines angeordneten Körpers in sich kann man dahingehend untersuchen, ob sie die Ordnung beibehalten oder verändern.

**Definition 25.9.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $T \subseteq K$  eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f: T \longrightarrow K$$

heißt *wachsend*, wenn für je zwei Elemente  $x, x' \in T$  mit  $x \leq x'$  auch  $f(x) \leq f(x')$  gilt.

**Definition 25.10.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $T \subseteq K$  eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f: T \longrightarrow K$$

heißt *streng wachsend*, wenn für je zwei Elemente  $x, x' \in T$  mit  $x < x'$  auch  $f(x) < f(x')$  gilt.

**Definition 25.11.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $T \subseteq K$  eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f: T \longrightarrow K$$

heißt *fallend*, wenn für je zwei Elemente  $x, x' \in T$  mit  $x \leq x'$  die Abschätzung  $f(x) \geq f(x')$  gilt.

**Definition 25.12.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $T \subseteq K$  eine Teilmenge. Eine Abbildung

$$f: T \longrightarrow K$$

heißt *streng fallend*, wenn für je zwei Elemente  $x, x' \in T$  mit  $x < x'$  die Abschätzung  $f(x) > f(x')$  gilt.

Als gemeinsame Bezeichnung spricht man von (streng) monotonen Funktionen.

**Lemma 25.13.** *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper,  $T \subseteq K$  eine Teilmenge und*

$$f: T \longrightarrow K$$

*eine streng wachsende (oder streng fallende) Funktion. Dann ist  $f$  injektiv.*

*Beweis.* Seien  $x, y \in T$  verschieden. Da wir in einem angeordneten Körper sind, ist  $x > y$  oder  $y > x$ , wobei wir ohne Einschränkung den ersten Fall annehmen können. Bei strenger Monotonie folgt daraus

$$f(x) > f(y)$$

und insbesondere sind  $f(x)$  und  $f(y)$  verschieden, also ist die Abbildung injektiv.  $\square$

**Definition 25.14.** Es sei  $K$  ein Körper. Eine Funktion der Form

$$f: K \longrightarrow K, x \longmapsto cx,$$

mit einem festen  $c \in K$  heißt *lineare Funktion*.

Lineare Funktionen drücken eine Proportionalität aus.

**Lemma 25.15.** *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper,  $c \in K$  und*

$$f: K \longrightarrow K, x \longmapsto cx,$$

*die zugehörige lineare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Bei  $c > 0$  ist  $f$  streng wachsend.*
- (2) *Bei  $c = 0$  ist  $f$  konstant und damit (nicht streng) wachsend und fallend.*
- (3) *Bei  $c < 0$  ist  $f$  streng fallend.*

*Beweis.* Die Aussagen folgen aus Lemma 24.5, wenn man dort  $\geq$  durch  $>$  ersetzt. Wir führen dies für (1) aus. Sei

$$c > 0$$

und  $x > y$ . Dann ist

$$x - y > 0$$

und damit

$$c(x - y) > 0,$$

also

$$cx > cy.$$

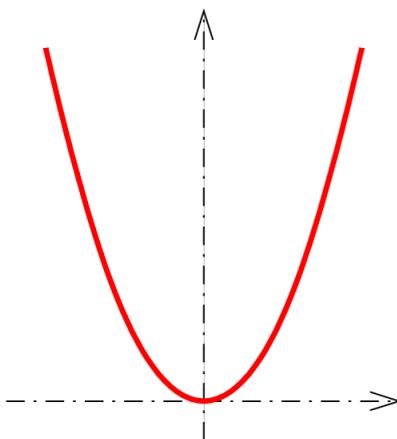
□

Insbesondere ist die Negation

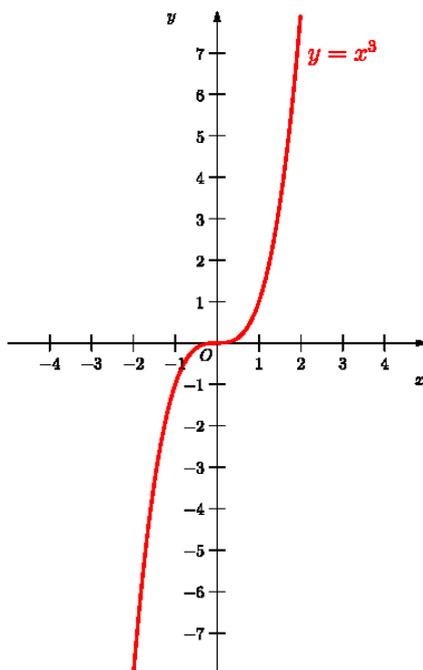
$$K \longrightarrow K, x \longmapsto -x,$$

streng fallend.

Die Funktionen, deren Monotonieverhalten in der folgenden Aussage besprochen wird, heißen *Potenzfunktionen*.



Die zweite Potenz ist im Positiven streng wachsend und im Negativen streng fallend.



Die dritte Potenz ist auf ganz  $\mathbb{Q}$  bzw.  $\mathbb{R}$  streng wachsend.

**Lemma 25.16.** *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $n \in \mathbb{N}_+$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Abbildung*

$$K_{\geq 0} \longrightarrow K, x \longmapsto x^n,$$

*ist streng wachsend.*

(2) *Die Abbildung*

$$K_{\leq 0} \longrightarrow K, x \longmapsto x^n,$$

*ist bei  $n$  ungerade streng wachsend.*

(3) *Die Abbildung*

$$K_{\leq 0} \longrightarrow K, x \longmapsto x^n,$$

*ist bei  $n$  gerade streng fallend.*

*Beweis.* Der erste Teil folgt unmittelbar durch  $n$ -fache Anwendung der Definition, die beiden weiteren Teile ergeben sich daraus durch Berücksichtigung der Negation und Lemma 25.15 (3).  $\square$

## 25. ARBEITSBLATT

### 25.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 25.1.** Ein Bakterium möchte entlang des Äquators die Erde umrunden. Es ist ziemlich klein und schafft am Tag genau 2 Millimeter. Wie viele Tage braucht es für eine Erdumrundung?

## 25.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 25.2.** Zeige, dass es in einem archimedisch angeordneten Körper zu jedem Element  $x \in K$  eine ganze Zahl  $m$  mit  $m \leq x$  gibt.

**Aufgabe 25.3.** Wie oft muss man eine Strecke der Länge  $\frac{7}{4293}$  Meter mindestens hintereinander legen, um einen Kilometer zu erhalten?

**Aufgabe 25.4.** Sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es für jedes  $s \in K$  eine ganze Zahl  $q$  und ein  $t \in K$  mit  $0 \leq t < 1$  und mit

$$s = q + t.$$

**Aufgabe 25.5.** Sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n + 1[ = \{x \in K \mid x \geq n \text{ und } x < n + 1\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

eine disjunkte Überdeckung von  $K$  bilden.

**Aufgabe 25.6.** Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest. Zeige, dass

$$q = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

ist.

**Aufgabe 25.7.** Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor \frac{513}{21} \right\rfloor.$$

**Aufgabe 25.8.** Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor -\frac{734}{29} \right\rfloor.$$

**Aufgabe 25.9.\***

Es sei  $z$  eine rationale Zahl. Zeige, dass  $z$  genau dann ganzzahlig ist, wenn

$$\lfloor -z \rfloor = -\lfloor z \rfloor$$

gilt.

**Aufgabe 25.10.\***

Es seien  $x, y$  rationale Zahlen. Zeige, dass

$$x - [x] = y - [y]$$

genau dann gilt, wenn es ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $y = x + n$  gibt.

**Aufgabe 25.11.** Runde die folgenden Brüche auf ganze Zahlen.

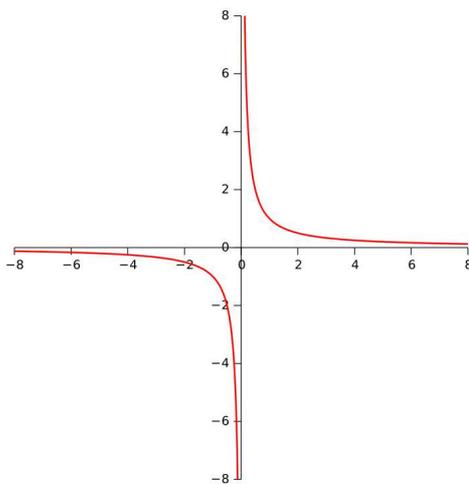
- (1)  $\frac{317}{15}$ ,
- (2)  $\frac{982}{323}$ ,
- (3)  $-\frac{477}{26}$ .

**Aufgabe 25.12.** Führe die folgenden Rechnungen durch, wobei die Angaben als gemischte Brüche zu lesen sind. Auch die Ergebnisse sollen als gemischte Brüche angegeben werden.

- (1)  $7\frac{4}{9} + 2\frac{6}{7}$ ,
- (2)  $8\frac{2}{7} + 4\frac{10}{13}$ ,
- (3)  $5\frac{8}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$ .

**Aufgabe 25.13.** Wir betrachten positive rationale Zahlen als gemischte Brüche.

- a) Zeige, dass bei der Addition von zwei gemischten Brüchen der Bruchterm der Summe nur von den Bruchtermen der Summanden abhängt.
- b) Wie sieht dies mit dem ganzen Teil aus?



**Aufgabe 25.14.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \setminus \{0\} \longrightarrow K, x \longmapsto x^{-1}.$$

**Aufgabe 25.15.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \setminus \{0\} \longrightarrow K, x \longmapsto -x^{-1}.$$

**Aufgabe 25.16.** Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto -\frac{7}{4}x^{-3}.$$

**Aufgabe 25.17.** Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto x^3 - x,$$

weder wachsend noch fallend ist.

**Aufgabe 25.18.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto |x|.$$

**Aufgabe 25.19.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Gaußklammer

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto \lfloor x \rfloor.$$

**Aufgabe 25.20.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es sei

$$f: K \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $f$  genau dann konstant ist, wenn  $f$  gleichzeitig wachsend und fallend ist.

**Aufgabe 25.21.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es sei

$$f: K \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $f$  genau dann wachsend ist, wenn die Funktion

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto -f(x),$$

fallend ist, und dass dies äquivalent dazu ist, dass die Funktion

$$K \longrightarrow K, x \longmapsto f(-x),$$

fallend ist.

**Aufgabe 25.22.\***

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es sei

$$f: K \longrightarrow K$$

eine bijektive Abbildung mit der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Zeige die folgenden Aussagen.

- (1)  $f$  ist genau dann streng wachsend, wenn  $f^{-1}$  streng wachsend ist.
- (2)  $f$  ist genau dann streng fallend, wenn  $f^{-1}$  streng fallend ist.

**Aufgabe 25.23.** Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$\varphi: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

deren Werte zwischen 0 und 1 liegen.

**Aufgabe 25.24.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es seien  $x < y$  Elemente in  $K$ . Zeige, dass für das arithmetische Mittel  $\frac{x+y}{2}$  die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

### 25.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 25.25.** (2 Punkte)

Eine kleines Sandkorn hat ein Gewicht von  $\frac{13}{2757}$  Gramm. Wie viele Sandkörner muss man nehmen, um eine Sanddüne aufzubauen, die 5906 und eine halbe Tonne wiegt?

**Aufgabe 25.26.** (3 Punkte)

Zeige, dass für jede rationale Zahl  $x$  die Abschätzungen

$$0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$$

gelten.

**Aufgabe 25.27.** (1 Punkt)

Lucy Sonnenschein verbringt einen Urlaubsnachmittag in einem Seebad. Sie hält sich einviertel Stunden am Strand auf, dann eine halbe Stunde in der Eisdiele, dann eineinhalb Stunden im Park, sodann wieder zweidreiviertel Stunden am Strand und schließlich 40 Minuten im Café. Wie lange war ihr Nachmittag?

**Aufgabe 25.28.** (3 Punkte)

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto -\frac{3}{11}x^{-4}.$$

**Aufgabe 25.29.** (4 Punkte)

Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es seien Abbildungen

$$f_1, \dots, f_n: K \longrightarrow K$$

gegeben, die jeweils entweder streng wachsend oder streng fallend sind. Es sei  $k$  die Anzahl der streng fallenden Abbildungen darunter. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$  genau dann streng fallend ist, wenn  $k$  ungerade ist.

**Aufgabe 25.30.** (3 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten  $n = 3$  gilt.

## 26. VORLESUNG - DEZIMALBRÜCHE

## 26.1. Dezimalbrüche.

Zu jeder rationalen Zahl  $x$  kann man die Potenzen  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , betrachten. Bei ganzzahligem  $x \geq 2$  sind die  $x^n$  (beliebig) groß für positives  $n$  und (beliebig) klein für negatives  $n$ . Solche Potenzen stellen ein wichtiges Vergleichsmaß für die Größenordnung von Zahlen dar. Da wir im Dezimalsystem arbeiten, sind insbesondere die Zehnerpotenzen  $10^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , wichtig. Für  $n \geq 0$  treten die Zehnerpotenzen insbesondere bei der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen auf. Die Zehnerpotenzen zu negativem  $n$  spielen auch eine wichtige Rolle bei der Erfassung und Beschreibung von beliebigen rationalen Zahlen.

**Definition 26.1.** Eine rationale Zahl, die man mit einer Zehnerpotenz als Nenner schreiben kann, heißt *Dezimalbruch*.

Dezimalbrüche sind beispielsweise sämtliche ganzen Zahlen (man kann  $1 = 10^0$  als Nenner nehmen), ferner Zahlen wie

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{53}{100}, -\frac{271}{1000}, \frac{3}{1000000}, \dots$$

Nach unserer Definition liegt ein Dezimalbruch vor, wenn man die dadurch gegebene rationale Zahl mit einer Zehnerpotenz als Nenner schreiben kann. Das heißt nicht, dass die Zahl in dieser Form vorliegen muss. Beispielsweise sind auch die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{20}, -\frac{7014}{500}$$

Dezimalbrüche, da man sie nach einer Erweiterung mit einer Zehnerpotenz als Nenner schreiben kann. Dies gilt für alle Brüche mit der Eigenschaft, dass in der Primfaktorzerlegung des Nenners nur Potenzen von 2 und von 5 vorkommen. Wenn der Bruch gekürzt ist, so sind genau die Brüche der Form  $\frac{a}{2^i 5^j}$  die Dezimalbrüche, siehe Aufgabe 26.11.



Die Linealversion des Zahlenstrahles markiert neben den ganzen Zahlen die ganzzahligen Vielfachen des Dezimalbruches  $\frac{1}{10}$ . Wenn man den Meter als Einheit nimmt, zeigt es die ganzzahligen Vielfachen von  $\frac{1}{1000}$ .

Einen Dezimalbruch  $\frac{a}{10^m}$  (mit  $m \geq 0$ ) kann man auch in der Form  $a10^{-m}$  schreiben. Dies ergibt wohl die kompakteste Charakterisierung eines Dezimalbruches, eine rationale Zahl der Form

$$a \cdot 10^k \text{ mit } a, k \in \mathbb{Z}.$$

Aus dieser Darstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass man Dezimalbrüche miteinander addieren und multiplizieren kann und dabei wieder einen Dezimalbruch erhält.

**Lemma 26.2.** *Die Summe und das Produkt von zwei Dezimalbrüchen ist wieder ein Dezimalbruch. Das Negative eines Dezimalbruches ist ein Dezimalbruch. Die Menge der Dezimalbrüche bilden einen Ring<sup>48</sup> innerhalb der rationalen Zahlen.*

*Beweis.* Die Brüche seien

$$x = a \cdot 10^k$$

und

$$y = b \cdot 10^\ell$$

mit  $a, b \in \mathbb{Z}$  und mit  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ . Wegen der Symmetrie können wir  $k \geq \ell$  annehmen. Dann ist

$$a \cdot 10^k + b \cdot 10^\ell = a \cdot 10^{k-\ell} \cdot 10^\ell + b \cdot 10^\ell = (a \cdot 10^{k-\ell} + b) \cdot 10^\ell$$

wieder von der gleichen Bauart, also ein Dezimalbruch. Für das Produkt ist

$$a \cdot 10^k \cdot b \cdot 10^\ell = a \cdot b \cdot 10^{k+\ell}.$$

Die anderen Behauptungen sind ebenfalls klar. □

Die Menge der Dezimalbrüche bilden keinen Körper, da zwar sämtliche ganzen Zahlen Dezimalbrüche sind, ihre inversen Elemente aber im Allgemeinen nicht. Beispielsweise sind  $3^{-1}$  und  $7^{-1}$  keine Dezimalbrüche. Für zwei Dezimalbrüche ist es einfach, einen Hauptnenner zu finden, da die Nenner im

<sup>48</sup>Man spricht von einem Unterring.

gekürzten Fall grundsätzlich von der Form  $2^i 5^j$  sind. Insofern spielt sich bei Rechnungen mit Dezimalbrüchen alles Wesentliche im Zähler ab.

**Beispiel 26.3.** Es ist

$$-7 + \frac{3}{100} + \frac{9}{5} - \frac{99}{1000} = \frac{-7000}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{1800}{1000} - \frac{99}{1000} = \frac{-5269}{1000}$$

und

$$\frac{27}{100} \cdot \frac{11}{1000} = \frac{297}{100000}.$$

## 26.2. Dezimaldarstellung für Dezimalbrüche.

Wenn man für einen Dezimalbruch, sagen wir

$$\frac{2318}{1000},$$

für den Zähler die Dezimalentwicklung einsetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{2318}{1000} &= \frac{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0}{10^3} \\ &= \frac{2 \cdot 10^3}{10^3} + \frac{3 \cdot 10^2}{10^3} + \frac{1 \cdot 10^1}{10^3} + \frac{8 \cdot 10^0}{10^3} \\ &= 2 + 3 \cdot 10^{-1} + 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

In diesem Sinne kann man jeden Dezimalbruch auf die Form

$$\pm \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

mit Ziffern  $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$  und ganzen Zahlen

$$k \leq \ell,$$

wobei der untere Summationsindex  $k$  bei einem echten Dezimalbruch (also keiner ganzen Zahl) negativ ist. Von dieser Beobachtung her ist es naheliegend, die Dezimaldarstellung auf Dezimalbrüche auszudehnen. Dadurch erhält man abbrechende<sup>49</sup> „Kommazahlen“.

**Definition 26.4.** Es sei ein Dezimalbruch

$$\frac{a}{10^k}$$

mit  $a = \pm b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ , und  $k \in \mathbb{N}$  gegeben, und es sei

$$b = \sum_{i=0}^n b_i 10^i = b_n \cdots b_1 b_0$$

die Dezimaldarstellung von  $b$ . Dann nennt man

$$\pm b_n \cdots b_k, b_{k-1} \cdots b_1 b_0$$

die *Darstellung des Dezimalbruches im Dezimalsystem*.

<sup>49</sup>Bei unendlichen Kommazahlen handelt es sich um ein viel komplizierteres Konzept, das wir erst richtig im zweiten Semester verstehen werden.

Diese Darstellung verwendet also direkt die Zifferndarstellung von  $b$ , wobei allein ein Komma eingeführt wird, und zwar so, dass hinter dem Komma genau  $k$  Ziffern stehen, nämlich die hinteren  $k$  Ziffern  $b_{k-1}, \dots, b_0$  von  $b$ . Dabei darf man hintere Nullen weglassen. Wenn  $b$  weniger als  $k$  Stellen besitzt, muss man dies vorne durch hinreichend viele Nullen auffüllen. Wegen Satz 14.1 ist diese Darstellung eindeutig.

Für  $a = b = 1$  ergibt sich die folgende Tabelle.

Potenz	Bruch	Kommazahl
$10^0$	$\frac{1}{1}$	1
$10^{-1}$	$\frac{1}{10}$	0,1
$10^{-2}$	$\frac{1}{100}$	0,01
$10^{-3}$	$\frac{1}{1000}$	0,001
$10^{-4}$	$\frac{1}{10000}$	0,0001
$10^{-5}$	$\frac{1}{100000}$	0,00001

Die Potenz  $10^{-n}$  ist also der Bruch, wo im Nenner  $n$  Ziffern stehen, nämlich eine 1 und  $n - 1$  Nullen, und das ist zugleich die Kommazahlen, bei der nach dem Komma  $n$  Ziffern stehen, nämlich  $n - 1$  Nullen und eine 1. Für Umrechnungen ist auch folgende Beobachtung hilfreich: Wenn man eine Kommazahl mit 10 multipliziert, so verschiebt sich das Komma um eine Stelle nach rechts, wenn man sie mit  $10^{-1}$  multipliziert, verschiebt sich das Komma um eine Stelle nach links. Die Stelle zu  $10^{-k}$  nennt man auch die  $k$ -te Nachkommastelle.

Das Rechnen mit Kommazahlen ist einfach, allerdings ist das richtige Setzen des Kommas eine Fehlerquelle.

**Beispiel 26.5.** Dezimalbrüche im Dezimalsystem addiert man wie ganze Zahlen im Zehnersystem, d.h. man addiert von hinten nach vorne mit Übertrag, wobei die beiden Kommata deckungsgleich sein müssen. Beispielsweise ist

$$53,273$$

$$\underline{25,648}$$

$$78,921.$$

Dieses Verfahren ist korrekt, da im Wesentlichen die Zähler bezogen auf einen gemeinsamen Nenner addiert werden.

**Beispiel 26.6.** Dezimalbrüche im Dezimalsystem multipliziert man wie ganze Zahlen im Zehnersystem, d.h. man multipliziert die eine Zahl nacheinander mit allen Ziffern der anderen Zahl. Abschließend muss man das Komma richtig setzen. Dazu zählt man die Stellen hinter den Kommata der beiden Zahlen zusammen und setzt an der entsprechenden Stelle im Produkt von

hinten gezählt das Komma. Dabei muss man, wenn hinten die Zahlen mit 2 bzw. 5 enden, die sich ergebende 0 mitzählen (bei ganzen Zahlen darf man die ja auch nicht weglassen), auch wenn sie letztendlich weggelassen werden darf. Dieses Verfahren ist korrekt, da ihm die Gleichung

$$a \cdot 10^k \cdot b \cdot 10^\ell = a \cdot b \cdot 10^{k+\ell}$$

zugrunde liegt. Bei nicht zu großen und nicht zu kleinen Zahlen kann man auch durch eine Überschlagsrechnung entscheiden, wo das Komma hingehört.

**Bemerkung 26.7.** Der Größenvergleich zwischen zwei Dezimalbrüchen im Dezimalsystem ist einfach (wir beschränken uns auf positive Zahlen). Man schreibt die beiden Zahlen übereinander, wobei die beiden Kommata übereinander stehen müssen. Dann vergleicht man wie bei den ganzen Zahlen von links nach rechts.

### 26.3. Approximation durch Dezimalzahlen.

Eine wichtige Motivation zur Einführung der rationalen Zahlen war, beliebige Längen, die beispielsweise bei der gleichmäßigen Unterteilung einer gegebenen Strecke auftreten, möglichst gut messen zu können. Dies können wir erst dann präzise formulieren, wenn wir die reellen Zahlen zur Verfügung haben. Die folgende Aussage zeigt, dass man rationale Zahlen selbst schon beliebig gut mit Dezimalbrüchen *approximieren* (annähern) kann. Wenn es also nur darum geht, beliebige Längen approximativ zu beschreiben, so sind die Dezimalbrüche genauso gut wie die deutlich größere Menge aller rationalen Zahlen.

**Lemma 26.8.** *Zu jeder rationalen Zahl  $q$  und jedem  $k \in \mathbb{N}_+$  gibt es ein  $a \in \mathbb{Z}$  derart, dass*

$$\frac{a}{10^k} \leq q < \frac{a+1}{10^k}$$

*gilt. D.h., dass man jede rationale Zahl beliebig gut (nämlich mit einem Fehler, der maximal gleich  $\frac{1}{10^k}$  ist) durch Dezimalbrüche approximieren kann.*

*Beweis.* Es sei

$$a := \lfloor q10^k \rfloor.$$

Dann ist

$$a \leq q10^k < a + 1.$$

Division durch  $10^k$  ergibt die Behauptung. Der Zusatz ergibt sich daraus, dass man nach Korollar 25.6 jede beliebige positive Fehlergenauigkeit  $\epsilon$  durch eine geeignete negative Zehnerpotenz unterbieten kann.  $\square$

In diesem Satz gibt das  $k$  über die Potenz  $10^{-k}$  vor, wie groß der Fehler sein darf. Man sagt dann auch, dass die Approximation bis zur  $k$ -ten Nachkommaziffer genau ist.

Es sei  $q = \frac{z}{n}$ . Wenn man beispielsweise einen Taschenrechner mit acht Nachkommastellen hat, so ergibt sich zu  $k = 8$  die Zahl  $a$  als Ergebnis, wenn man  $z : n$  eingibt und das Komma in der Darstellung ignoriert.

**Beispiel 26.9.** Wir wenden Lemma 26.8 auf  $q = \frac{3}{7}$  mit  $k = 9$  an. Eine Rechnung des Taschenrechners mit menschlichen Korrekturen liefert

$$0,428571428 < \frac{3}{7} < 0,428571429.$$

Die beiden Dezimalbrüche links und rechts sind also eine Approximation des wahren Bruches  $\frac{3}{7}$  mit einem Fehler, der kleiner als  $\frac{1}{10^9}$  ist.

Die Rechnung im vorangehenden Beispiel beruht auf dem Divisionsalgorithmus, den wir noch nicht besprochen haben. Der Satz besagt, dass es eine solche eindeutig bestimmte Zahl geben muss. Dass die angeführten Abschätzungen gelten, kann man einfach überprüfen, indem man die beiden Dezimalzahlen mit 7 multipliziert.

Mit der Approximation von rationalen Zahlen durch Dezimalzahlen geht die Dezimalrundung einher. Bei der Rundung auf eine ganze Zahl schaut man einfach nach der ganzzahligen Approximation und nimmt von der unteren und der oberen Approximation diejenige, die näher ist (wobei man bei gleichem Abstand abrundet). Bei der Dezimalrundung zur Stellenanzahl  $k$  (bzw. zur Genauigkeit  $10^{-k}$ ) führt man dies für die Nenner  $a$  bzw.  $a + 1$  in der Approximation durch. Die Zahl 47,2940574 ist beispielsweise auf zwei Nachkommastellen gerundet gleich 47,29. Häufig finden sich auch Rundungsangaben von der Form  $7,3 \cdot 10^k$ .

#### 26.4. Halbierung und Division durch 5.

Einen im Dezimalsystem gegebenen Dezimalbruch kann man einfach durch 10 teilen, indem man einfach das Komma um eine Stelle nach links verschiebt. Die Zahl 10, die die Grundlage des Dezimalsystems ist, hat die beiden Teiler 2 und 5. Durch diese beiden Zahlen kann man ebenfalls teilen und erhält wieder einen Dezimalbruch (was für andere Primzahlen nicht stimmt), wobei diese Divisionen algorithmisch besonders einfach durchzuführen sind. Eine Besonderheit liegt darin, dass die Ziffern des Ergebnisses nur von der entsprechenden und von der um eins höherstelligen Ziffer des Dividenden abhängen. Man braucht keinen Übertrag und kann an jeder beliebigen Stelle anfangen.

**Verfahren 26.10.** Es sei

$$z = \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

ein Dezimalbruch, für den die Halbierung (also die Division durch 2) durchgeführt werden soll. Dazu führt man für jede Ziffer  $a_i$  für

$$i \geq k - 1$$

die Division mit Rest durch 2 durch, d.h. man berechnet

$$a_i = 2b_i + r_i.$$

Aus diesen Zahlen berechnet man

$$c_i = b_i + 5r_{i+1}.$$

Dies sind die Ziffern der Halbierung von  $z$ , also

$$\frac{z}{2} = \sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i.$$

Da die Ziffern  $a_i$  zwischen 0 und 9 liegen, sind die  $b_i$  zwischen 0 und 4 und die  $r_i$  sind 0 oder 1. Ohne die Division mit Rest kann man diesen Algorithmus auch mit der folgenden Fallunterscheidung darstellen. Es ist

$$c_i = \begin{cases} \frac{a_i}{2}, & \text{falls } a_i \text{ und } a_{i+1} \text{ gerade,} \\ \frac{a_i}{2} + 5, & \text{falls } a_i \text{ gerade und } a_{i+1} \text{ ungerade,} \\ \frac{a_i-1}{2}, & \text{falls } a_i \text{ ungerade und } a_{i+1} \text{ gerade,} \\ \frac{a_i-1}{2} + 5, & \text{falls } a_i \text{ und } a_{i+1} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Beispiel 26.11.** Wir wollen den Dezimalbruch  $509,273$  mit dem Verfahren halbieren. Wir fangen hinten an, auch wenn wir an jeder Stelle anfangen könnten, und zwar an der Stelle mit dem Index  $-4$  (die Zehntausendstel-Stelle). Es ist  $a_{-4} = 0$ , und weil  $a_{-3} = 3$  ungerade ist, ist

$$c_{-4} = 5.$$

Aus  $a_{-3} = 3$  ergibt sich  $b_{-3} = \frac{3-1}{2} = 1$  und da  $a_{-2} = 7$  ungerade ist, ist

$$c_{-3} = 6.$$

Aus  $a_{-2} = 7$  ergibt sich  $b_{-2} = \frac{7-1}{2} = 3$  und da  $a_{-1} = 2$  gerade ist, ist

$$c_{-2} = b_{-2} = 3.$$

So fährt man weiter und erhält schließlich

$$254,6365.$$

**Lemma 26.12.** *Der Algorithmus zur Berechnung der Halbierung eines Dezimalbruches ist korrekt.*

*Beweis.* Es sei

$$z = \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

gegeben und es sei  $a_i = 2b_i + r_i$  mit  $b_i \in \mathbb{N}$  und  $r_i$  gleich 0 oder 1 und

$$c_i = b_i + 5r_{i+1}.$$

Da  $a_i \leq 9$  ist, ist diese Zahl eine erlaubte Ziffer. Zum Nachweis der Korrektheit müssen wir einfach das Ergebnis  $\sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i$  mit 2 multiplizieren und zeigen, dass man so  $z$  zurückerhält. Es ist

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \left( \sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i \right) &= \sum_{i=k-1}^{\ell} 2 \cdot c_i 10^i \\
 &= \sum_{i=k-1}^{\ell} 2 \cdot (b_i + 5r_{i+1}) 10^i \\
 &= \sum_{i=k-1}^{\ell} (2b_i + 10r_{i+1}) 10^i \\
 &= \sum_{i=k-1}^{\ell} 2b_i 10^i + \sum_{i=k-1}^{\ell} 10r_{i+1} 10^i \\
 &= \sum_{i=k-1}^{\ell} (a_i - r_i) 10^i + \sum_{i=k-1}^{\ell} r_{i+1} 10^{i+1} \\
 &= \sum_{i=k-1}^{\ell} a_i 10^i - \sum_{i=k-1}^{\ell} r_i 10^i + \sum_{i=k-1}^{\ell} r_{i+1} 10^{i+1} \\
 &= z - \sum_{i=k-1}^{\ell} r_i 10^i + \sum_{j=k}^{\ell+1} r_j 10^j \\
 &= z,
 \end{aligned}$$

wobei sich die beiden Summanden rechts wegheben, da  $r_{k-1}$  und  $r_{\ell+1}$  gleich 0 sind.  $\square$

Auch für die Division durch 5 gibt es einen entsprechenden Algorithmus.

**Verfahren 26.13.** Es sei

$$z = \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

ein Dezimalbruch, für den der fünfte Anteil (also die Division durch 5) berechnet werden soll. Dazu führt man für jede Ziffer  $a_i$  für

$$i \geq k - 1$$

die Division mit Rest durch 5 durch, d.h. man berechnet

$$a_i = 5b_i + r_i.$$

Aus diesen Zahlen berechnet man

$$c_i = b_i + 2r_{i+1}.$$

Dies sind die Ziffern der Fünftelung von  $z$ , also

$$\frac{z}{5} = \sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i.$$



- (1) Bestimme die Stammbrüche, die zugleich Dezimalbrüche und größer als  $\frac{1}{100}$  sind, und liste sie in absteigender Reihenfolge auf.
- (2) Wie viele rationale Zahlen, die sowohl Stammbrüche als auch Dezimalbrüche sind, gibt es zwischen  $\frac{1}{1000}$  und 1 (einschließlich).

**Aufgabe 26.8.** Berechne

$$(3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-3}) .$$

**Aufgabe 26.9.** Berechne

$$6,9 \cdot 10^{-4} \cdot 7,3 \cdot 10^{-9} .$$

**Aufgabe 26.10.** Berechne

$$4,3 \cdot 10^{-6} + 6,4 \cdot 10^{-5} .$$

**Aufgabe 26.11.\***

Zeige, dass eine rationale Zahl genau dann ein Dezimalbruch ist, wenn in der gekürzten Bruchdarstellung der Nenner die Form  $2^i \cdot 5^j$  mit  $i, j \in \mathbb{N}$  besitzt.

**Aufgabe 26.12.** Eine rationale Zahl  $z \neq 0$  sei in der Form

$$\pm \prod_{p \text{ Primzahl}} p^{\nu_p(z)}$$

gegeben. Woran erkennt man, ob es sich um einen Dezimalbruch handelt oder nicht?

**Aufgabe 26.13.** Berechne im 7-er System

$$0,026 \cdot 3,605 .$$

**Aufgabe 26.14.** Berechne im 5-er System

$$0,0230241 \cdot 32,1102 + 4,301 \cdot 2,133 .$$

**Aufgabe 26.15.\***

Es seien  $a \neq b$  Basen zu einem Stellenwertsystem ( $a$ -er System und  $b$ -er System). Es sei  $z$  eine rationale Zahl, die im Stellenwertsystem zur Basis  $a$  eine abbrechende Darstellung als Kommazahl besitzt. Gilt dies dann auch im Stellenwertsystem zur Basis  $b$ ?

Eine Teilmenge  $S \subseteq R$  eines kommutativen Ringes  $R$  heißt *Unterring*, wenn  $0, 1, -1 \in S$  ist und wenn  $S$  unter der Addition und der Multiplikation abgeschlossen ist.

**Aufgabe 26.16.** Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$  eine fixierte positive natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von  $n$  als Nenner schreiben kann, einen Unterring von  $\mathbb{Q}$  bildet.

**Aufgabe 26.17.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{P}$  eine Teilmenge der Primzahlen. Zeige, dass die Menge

$$R_T = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \text{ lässt sich mit einem Nenner schreiben,} \\ \text{in dem nur Primzahlen aus } T \text{ vorkommen} \}$$

ein Unterring von  $\mathbb{Q}$  ist. Was ergibt sich bei  $T = \emptyset$ ,  $T = \{3\}$ ,  $T = \{2, 5\}$ ,  $T = \mathbb{P}$ ?

**Aufgabe 26.18.** Approximiere die rationale Zahl  $\frac{7}{3}$  durch einen Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal  $10^{-4}$ .

**Aufgabe 26.19.** Approximiere die rationale Zahl  $\frac{1}{6}$  durch einen Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal  $10^{-2}$ .

**Aufgabe 26.20.\***

Zeige, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}_+$  der Dezimalbruch

$$\sum_{i=1}^k 3 \cdot 10^{-i}$$

die rationale Zahl  $\frac{1}{3}$  mit einem Fehler von maximal  $10^{-k}$  approximiert (von unten).

**Aufgabe 26.21.** Runde die folgenden Zahlen auf zwei Stellen nach dem Komma.

$$7,874802, \frac{4}{9}, \frac{3}{13}, 4 \cdot 5^{-1} \cdot 6^{-1}.$$

**Aufgabe 26.22.\***

Bei der Onlinepartnervermittlung „e-Tarzan meets e-Jane“ verliebt sich alle elf Minuten ein Single. Wie lange (in gerundeten Jahren) dauert es, bis sich alle erwachsenen Menschen in Deutschland (ca. 65000000) verliebt haben, wenn ihnen allein dieser Weg zur Verfügung steht.

**Aufgabe 26.23.** Halbiere den Dezimalbruch 297,0752209.

**Aufgabe 26.24.\***

Bestimme vom achten Teil des Dezimalbruches

$$760982393473,90354771045729$$

die dritte Nachkommaziffer.

**Aufgabe 26.25.** Berechne den fünften Anteil des Dezimalbruches

$$7601,4550738.$$

**Aufgabe 26.26.\***

Zeige, dass der Algorithmus zur Berechnung des fünften Anteils eines Dezimalbruches korrekt ist.

**Aufgabe 26.27.** Die Schüler sollen die 1 im Dezimalsystem zehnmal hintereinander halbieren. Heinz Ngolo wundert sich über Gabi Hochster, die anfängt, die Potenzen der 5, also  $5^1, 5^2, 5^3, \dots$  auszurechnen. Er sagt: „Hast du wieder nicht aufgepasst“? Sie sagt: „Doch, das ist doch das gleiche“. Wer hat recht?

**Aufgabe 26.28.** Zeige, dass das arithmetische Mittel von zwei Dezimalbrüchen  $a_1$  und  $a_2$  wieder ein Dezimalbruch ist. Gilt dies auch für das arithmetische Mittel von drei Dezimalbrüchen?

### 26.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 26.29.** (2 Punkte)

In den Klassenarbeiten hat Mustafa Müller eine 3 plus ( $= 2, 7$ ), eine 1 minus ( $= 1, 3$ ), eine 3 und eine 2 plus geschrieben. Berechne seinen Notendurchschnitt als Bruch, und runde das Ergebnis.

**Aufgabe 26.30.** (2 Punkte)

Berechne  $401,0013507 \cdot 0,002056$ .

**Aufgabe 26.31.** (2 Punkte)

Approximiere die rationale Zahl  $\frac{1}{7}$  durch einen Dezimalbruch mit einem Fehler von maximal  $10^{-6}$ .

**Aufgabe 26.32.** (2 Punkte)

Halbiere den Dezimalbruch 30437,09134508902.

**Aufgabe 26.33.** (3 Punkte)

Bestimme vom achten Teil des Dezimalbruches

$$876059301193674,2903347310459901$$

die fünfte Nachkommaziffer.

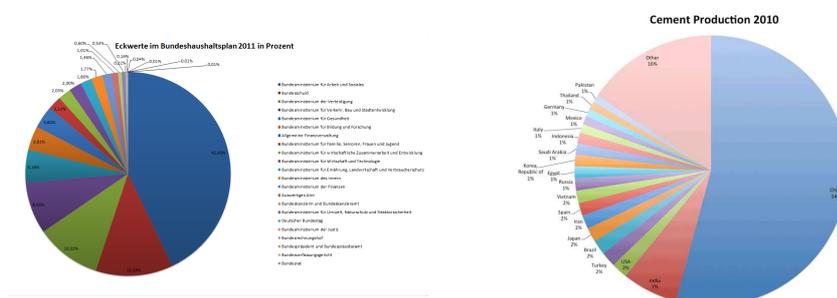
## 27. VORLESUNG - PROZENTRECHNUNG UND WACHSTUM

## 27.1. Prozentrechnung.

**Definition 27.1.** Ein *Prozent* ist  $\frac{1}{100}$ .

**Definition 27.2.** Ein *Promille* ist  $\frac{1}{1000}$ .

Dafür gibt es spezielle Zeichen, % und ‰. Von der Definition her ist die Prozentrechnung ein Spezialfall des Rechnens mit rationalen Zahlen, und zwar von Dezimalbrüchen. Eine rationale Zahl zwischen 0 und 1 gibt den Anteil von einer gegebenen Grundgröße an. Diese Anteilsgröße wird in vielen alltäglichen Kontexten am besten durch einen Dezimalbruch angegeben, da dieser eine unmittelbare Größenvorstellung mitliefert, da Dezimalzahlen untereinander einfach vergleichbar sind, wie in Bemerkung 26.6 erwähnt wurde. Bei der Größenordnung will man es häufig gar nicht so genau wissen, sondern nur eine ungefähre Größenvorstellung haben. Deshalb werden viele Größenanteile in Hunderstel oder seltener in Tausendstel angegeben, wofür sich die Bezeichnungen Prozent und Promille eingebürgert haben. Die *Prozentrechnung* beschäftigt sich mit dem Rechnen von Größenangaben, die in Prozent gemacht werden. Prozentrechnung ist einfach, wenn man erkennt, dass es sich um Rechnungen mit rationalen Zahlen handelt. Dennoch gibt es einige, für die Prozentrechnung typische Formulierungen, bei denen man sich die zugrunde liegende mathematische Bedeutung erst klar machen muss. Im Prozentkontext werden die Angaben grundsätzlich nur mit einer gewissen Fehlergenauigkeit gemacht.



Der Bundeshaushalt von 2011

Wenn eine endliche Grundmenge  $G$  und eine Teilmenge  $T \subseteq G$  gegeben ist, so versteht man unter dem *Anteil* von  $T$  in  $G$  einfach den Quotienten der Anzahlen, also den Bruch

$$\frac{\#(T)}{\#(G)}.$$

Diese Zahl liegt zwischen 0 und 1. Wenn man daraus eine Prozentangabe machen will, so macht man die Umformung

$$\frac{\#(T)}{\#(G)} = \frac{\#(T) \cdot 100}{\#(G) \cdot 100} = \frac{\#(T) \cdot 100}{\#(G)} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\#(T) \cdot 100}{\#(G)} \cdot \%.$$

Durch die Multiplikation mit dem Faktor kommt der Anteil, der ja eigentlich zwischen 0 und 1 liegt, in einen Zahlenbereich zwischen 0 und 100, der für die meisten Menschen vertrauter ist (in einer solchen Situation ist die Prozentangabe unterhalb von 100, in vielen anderen Kontexten ist aber auch ein größerer Anteil sinnvoll). Überhaupt werden Prozentangaben nur in einer Größenordnung verwendet, in der sie suggestiv sind, wo also die Multiplikation mit 100 dem Vorstellungsvermögen entgegenkommt. Ob man sagt, dass der Anteil von Gold an der Gesamtmasse des Universums gleich  $2 \cdot 10^{-23}$  ist oder  $2 \cdot 10^{-21}\%$  beträgt, macht keinen Unterschied.

**Bemerkung 27.3.** Wenn eine Grundmenge gegeben sind und davon Anteile durch Prozente beschrieben werden, und die Anteil disjunkt zueinander sind, so muss man die Prozentangaben addieren, um den Gesamtanteil zu erhalten. Wenn beispielsweise die Inhaltsstoffe eines Getränkes in Prozent angegeben werden, sagen wir 80% Wasser, 10% Orangensaft, 5% Himbersaft und 2% Heidelbeersaft und 3% Cola, so liegt der Fruchtsaftanteil wegen

$$10 + 5 + 2 = 17$$

bei 17 Prozent. Die Gesamtsumme der Prozentwerte sollte sich auf 100% addieren; da man bei Prozentangaben aber häufig gerundete Werte nimmt, muss das nicht immer stimmen.

**Bemerkung 27.4.** Häufig ändert sich, auch in einem bestimmten Kontext, die Bezugsmenge bei verschiedenen Prozentangaben. Wenn beispielsweise die Lebenshaltungskosten prozentual nach Essen, Wohnung, Körperpflege,

Vergnügen aufgelistet wird, so werden die Vergnügungskosten eventuell weiter prozentual unterteilt, nach Kino, Theater, Kneipe, Spielhölle, und diese Angaben beziehen sich dann häufig auf die Gesamtvergnügungskosten. Den prozentualen Anteil an den Gesamtlebenshaltungskosten vom Kino muss man dann ausrechnen, indem man die relativen Prozentangaben in Anteile umrechnet, multipliziert und daraus wieder einen Prozentwert macht. Wenn die Vergnügungskosten 8% der Lebenshaltungskosten ausmachen und Kinobesuche 30% an den Vergnügungskosten, so muss man

$$0,08 \cdot 0,3 = 0,024$$

ausrechnen und erhält, dass die Kinobesuche 2,4% der Lebenshaltungskosten ausmachen.

**Bemerkung 27.5.** Wenn man zwei Mengen (Vermögen, Einwohnerzahl, ...)  $A$  und  $B$  der Größe nach vergleicht, so kann man das durch einen Anteil und als Prozent ausdrücken. Man muss dann deutlich machen, welche Menge man als Grundmenge betrachten möchte. Wenn man  $A$  als Grundmenge nimmt, so ist

$$\#(B) = \frac{\#(B)}{\#(A)} \cdot \#(A)$$

und  $\frac{\#(B)}{\#(A)}$  (bzw.  $\frac{100 \cdot \#(B)}{\#(A)} \cdot \%$  in Prozent) beschreibt die Größe von  $B$  in Bezug auf  $A$ . Beispielsweise kann das Vermögen einer Person 30% des Vermögens einer anderen Person betragen. Wenn man die Verhältnisgröße umgekehrt wissen möchte, also die Größe von  $B$  in Bezug auf  $A$ , so muss man den inversen Bruch  $\frac{\#(A)}{\#(B)}$  berechnen. Um aus der ersten Prozentangabe die neue Prozentangabe zu erhalten, muss man invertieren und mit 10000 multiplizieren (!), also

$$\frac{1}{30} \cdot 10000 = \frac{10000}{30} = \frac{1000}{3} = 333,33$$

Prozent. Die zweite Person hat also 333,33 Prozent des Vermögens der ersten Person.

Wenn Angaben üblicherweise in Prozenten gemacht werden, wie beispielsweise das Ergebnis von Wahlen, so drückt man die Änderung zwischen zwei Wahlen durch *Prozentpunkte* aus, also nicht prozentual! Wenn die Partei von vier Jahren 35% erzielt hat und bei den neuen Wahlen 32% erzielt, so spricht man von einem Verlust von 3 Prozentpunkten.

## 27.2. Wachstum.

Viele Wachstumsprozesse in Natur und Gesellschaft sind von der Form, dass sich die Größe nach einem bestimmten Zeitraum (beispielsweise nach einem Jahr) zur Ausgangsgröße proportional mit einem bestimmten konstanten Proportionalitätsfaktor verhält. Beispiele hierfür sind das Wachstum einer Population oder die Inflation. Bei konstanten Bedingungen hängt das Wachstum einer Population mit einem festen Faktor, genannt *Wachstumsfaktor*,

von der Größe der Population ab. Wenn sich beispielsweise eine gewisse Population, sagen wir Mäuse, auf katzenfreien, kornreichen Feldern, in einem Jahr verdoppelt, so werden in einem Jahr aus 100 Mäusen 200 Mäuse, aus 1000 Mäusen 2000 Mäuse u.s.w. Das Verhältnis der Population nach einem Jahr zur Population vor einem Jahr ist also konstant gleich 2. Wenn die Bedingungen über einem längeren Zeitraum konstant sind, so ändert sich dieser Faktor nicht, und man muss von Jahr zu Jahr mit diesem Faktor multiplizieren. Nach  $n$  Jahren gibt es dann  $2^n x$  Mäuse, wenn  $x$  die Größe der jetzigen Mauspopulation bezeichnet.

Jahre	0	1	2	3	4	5	6
Mäuse	100	200	400	800	1600	3200	6400

Der Wachstumsfaktor 2 ist recht groß. Häufiger sind Wachstumsfaktoren wie 1,01, 1,02, 1,05 und ähnliches. Bei einem Preisentwicklungsfaktor von 1,05 erhält man beispielsweise (gerundete Werte)

Jahre	0	1	2	3	4	5	6
Bierpreis auf der Wiesn	10	10,50	11,03	11,58	12,16	12,76	13,40

Ein Wachstum wird häufig nicht mit dem Wachstumsfaktor beschrieben, sondern mit dem proportionalen Zuwachs, dem *Zuwachsfaktor*. Es wird also der proportionale Anteil in Bezug auf die Vorgängergröße angegeben, der hinzukommt. Bei einem Wachstumsfaktor von 2 ist der Zuwachsfaktor gleich 1 (die Größe der Population kommt in einem Jahr neu hinzu), in den weiteren genannten Beispielen ist der Zuwachsfaktor gleich 0,01, 0,02, 0,05. Dieser Zuwachsfaktor wird zumeist in Prozent angegeben, man spricht von einem jährlichen Wachstum von 100%, von 1%, 2%, 5%. Eine Prozentangabe bei Wachstumsprozessen von  $a\%$  bedeutet also einen Zuwachsfaktor von  $\frac{a}{100}$  und einen Wachstumsfaktor von  $\frac{100+a}{100}$ . Wenn man einen Wachstumsprozess, der mit einer Prozentangabe beschrieben wird, über mehrere Jahre verstehen will, muss man also den Wachstumsfaktor ausrechnen und diesen potenzieren (mit der Anzahl der Jahre im Exponenten). Es ist falsch, die Prozentwerte mit der Anzahl der Jahre zu multiplizieren und dies als Gesamtzuwachs zu nehmen. Im Wiesnbeispiel führt die falsche Rechnung zu folgendem Ergebnis

Jahre	0	1	2	3	4	5	6
Bierpreis auf der Wiesn (falsch gerechnet)	10	10,50	11	11,50	12	12,50	13

Die Abweichung wird zunehmend größer, für kleine Zeiträume ist die einfachere falsche Rechnung als Überschlagsrechnung akzeptabel. Aufgrund der allgemeinen binomischen Formel ist

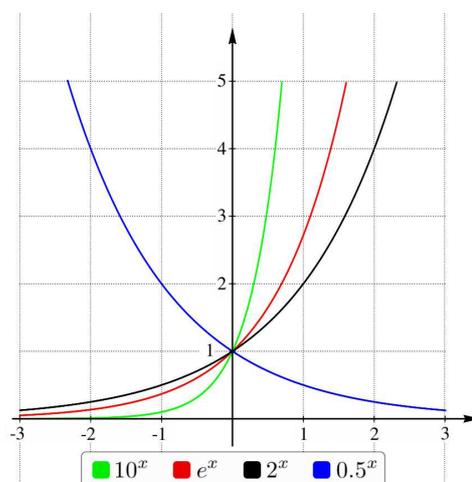
$$(1+a)^n = 1 + na + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \dots + a^n,$$

und  $1 + na$  ist das Ergebnis bei der falschen Rechnung. Wenn  $a$  wie häufig klein, etwa  $\leq 0,05$  ist, so sind die höheren Potenzen  $a^2, a^3$  besonders klein,

und das wird auch durch die Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{i}$  (bei nicht allzu großem  $n$ ) nicht sehr groß gemacht. Der Fehler wird aber, egal wie klein der Prozentsatz ist, bei hinreichend großem  $n$  beliebig groß.

### 27.3. Exponentialfunktionen auf $\mathbb{Z}$ .

Wir studieren das Wachstumsverhalten bei konstanten Bedingungen genauer mit dem Begriff der (ganzzahligen) Exponentialfunktion.



Die Exponentialfunktionen werden wir später auf ganz  $\mathbb{Q}$  bzw.  $\mathbb{R}$  ausdehnen, definiert haben wir sie bisher nur für ganzzahlige Stellen.

**Definition 27.6.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $b \in K_+$  ein positives Element. Dann nennt man die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto b^n,$$

die (ganzzahlige) *Exponentialfunktion* zur Basis  $b$ .

Die Basis  $b$  ist dabei der Wachstumsfaktor. Später werden wir Exponentialfunktionen  $b^x$  für beliebige reelle Zahlen  $x$  erklären, bis jetzt aber haben wir Ausdrücke wie  $7^{1/2}$  oder  $(\frac{1}{5}^\pi)$  noch nicht zur Verfügung. In den Skizzen werden wir aber diese Fortsetzung gelegentlich schon benutzen.

**Lemma 27.7.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $b \in K_+$  ein positives Element. Dann besitzt die (ganzzahlige) Exponentialfunktion

$$\varphi_b: \mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto b^n,$$

zur Basis  $b$  die folgenden Eigenschaften.

(1) Es ist

$$\varphi_b(n) = b^n > 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) Es ist

$$\varphi_b(0) = b^0 = 1.$$

(3) Es ist

$$\varphi_b(1) = b^1 = b.$$

(4) Es ist

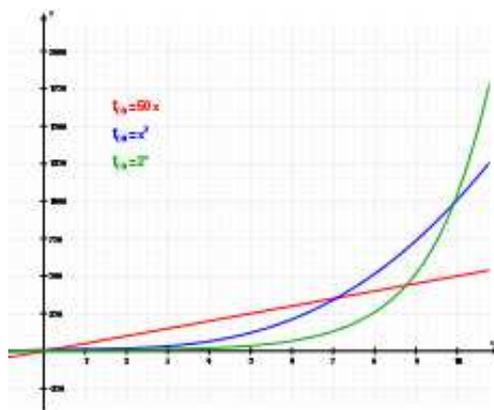
$$\varphi_b(m+n) = b^{m+n} = b^m \cdot b^n = \varphi_b(m) \cdot \varphi_b(n)$$

für  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

(5) Für  $m \in \mathbb{Z}$  ist

$$\varphi_b(-m) = b^{-m} = (b^m)^{-1} = (\varphi_b(m))^{-1}.$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt für  $n \geq 1$  aus der Verträglichkeit der Ordnung mit der Multiplikation und für  $n$  negativ aus Lemma 24.5 (1), die anderen Eigenschaften folgen aus den Potenzgesetzen.  $\square$



Die Exponentialfunktion zur Basis 2 im Vergleich zu einer linearen Funktion und zur dritten Potenz. Auf der  $x$ - und der  $y$ -Achse wurden unterschiedliche Maßstäbe gewählt.

**Lemma 27.8.** *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $b \in K_+$  ein positives Element. Dann besitzt die (ganzzahlige) Exponentialfunktion*

$$\varphi_b: \mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto b^n,$$

zur Basis  $b$  die folgenden Eigenschaften.

- (1) Bei  $b > 1$  ist die Exponentialfunktion streng wachsend.
- (2) Bei  $b < 1$  ist die Exponentialfunktion streng fallend.

*Beweis.* (1) Sei  $b > 1$  und  $m > n$ . Wir müssen zeigen, dass

$$\varphi_b(m) = b^m > b^n = \varphi_b(n)$$

ist. Nach Lemma 27.7 (4) ist

$$b^m = b^{m-n} \cdot b^n$$

mit  $m - n > 0$ . Wegen Lemma 19.13 (8) ist

$$b^{m-n} > 1$$

und daher ist auch

$$b^m = b^{m-n} \cdot b^n > 1 \cdot b^n = b^n.$$

(2) Dies folgt aus Teil (1), wenn man die Identität

$$b^n = (b^{-1})^{-n}$$

verwendet.

□

**Lemma 27.9.** *Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper und  $b \in K_+$  ein positives Element  $\neq 1$  und*

$$\varphi_b: \mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto b^n,$$

*die zugehörige (ganzzahlige) Exponentialfunktion zur Basis  $b$ . Es seien  $M \in K$  und  $\epsilon \in K$ ,  $\epsilon > 0$ , vorgegebene Zahlen. Dann gibt es eine ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  mit*

$$\varphi_b(n) \geq M$$

*und eine ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  mit*

$$\varphi_b(m) \leq \epsilon.$$

*Beweis.* Für  $b > 1$  und  $M$  ist dies eine Umformulierung von Lemma 25.5, für  $b < 1$  und  $\epsilon$  ist dies eine Umformulierung von Korollar 25.6. Die anderen Fälle können darauf zurückgeführt werden, indem man negative Exponenten betrachtet. □

Häufig findet man die Vorstellung, dass exponentielles Wachstum etwas wie „explosives Wachstum“ ist. Das ist so nicht richtig. Wenn der Wachstumsfaktor zwischen 0 und 1 liegt, so ist die Exponentialfunktion sogar fallend und wenn der Faktor knapp oberhalb von 1, so ist das Wachstum langsam. Allerdings zeigt der folgende Satz, dass sich exponentielles Wachstum gegenüber jedem Wachstum, das durch eine Potenzfunktion beschrieben wird, letztlich durchsetzt. Man beachte auch, dass eine Exponentialfunktion als auch eine Potenzfunktion durch den gleichen funktionalen Ausdruck, nämlich als Potenz  $g^e$ , beschrieben wird. Der Unterschied besteht darin, ob die Grundzahl  $g$  oder der Exponent  $e$  als variabel betrachtet wird.

**Beispiel 27.10.** Wir vergleichen die Werte der Identität und der Quadratfunktion mit der Exponentialfunktion zur Basis

$$b = \frac{3}{2}.$$

Es ergibt sich die folgende Wertetabelle

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$(\frac{3}{2})^n$	1	1,5	2,25	3,37	5,06	7,59	11,39	17,08	25,63	38,44	57,66

Im Vergleich mit der konstanten Funktion ist die Exponentialfunktion schon durchgängig größer, im Vergleich mit der Quadratfunktion bleibt die Exponentialfunktion im angegebenen Bereich zurück. Man sieht aber, dass sie „ziemlich schnell“ aufholt.

**Satz 27.11.** *Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper und  $b > 1$  mit der zugehörigen Exponentialfunktion*

$$\varphi_b: \mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto b^n,$$

zur Basis  $b$ . Es sei  $k$  eine natürliche Zahl. Dann gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$\varphi_b(n) = b^n > n^k$$

gilt.

*Beweis.* Wir zeigen die Existenz des  $m$  durch Induktion über  $k$  für jedes  $b > 0$ . Für  $k = 0$  ist die Aussage klar. Sei  $k = 1$ . Wir schreiben  $b = 1 + u$  mit  $u > 0$  und betrachten (für  $n \geq 2$ ) die auf dem binomischen Lehrsatz in Verbindung mit  $u > 0$  beruhende Abschätzung

$$\begin{aligned} b^n &= (1 + u)^n \\ &\geq 1 + nu + \binom{n}{2} u^2 \\ &= 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2} u^2 \\ &= 1 + nu + n \frac{(n-1)}{2} u^2 \geq n \frac{(n-1)u^2}{2}. \end{aligned}$$

Da  $\frac{u^2}{2}$  positiv ist, gibt es nach Lemma 25.3 eine natürliche Zahl  $m$  mit

$$m \frac{u^2}{2} \geq 1.$$

Für  $n > m$  ist dann

$$b^n \geq n \frac{(n-1)u^2}{2} \geq n,$$

wie gewünscht. Sei nun die Aussage für  $k \geq 1$  und alle  $b > 1$  schon bewiesen, und wir müssen sie für  $k + 1$  beweisen. Wir schreiben  $b = cd$  mit Zahlen

$$c, d > 1,$$

die es nach Aufgabe 24.17 gibt. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gibt es eine natürliche Zahl  $m$  derart, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$c^n \geq n^k$$

gilt. Ebenso gibt es eine natürliche Zahl  $m'$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $n \geq m'$  die Abschätzung

$$d^n \geq n$$

gilt. Damit gilt für alle

$$n \geq \max(m, m')$$

die Abschätzung

$$b^n = (cd)^n = c^d d^n \geq n^k n = n^{k+1}.$$

□

## 27. ARBEITSBLATT

### 27.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 27.1.** Bestimme den prozentualen Damen- und Herrenanteil in der Vorlesung Grundkurs Mathematik am 7. Februar 2017.

### 27.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 27.2.** Ein Kuchen wurde in zwölf gleich große Stücke unterteilt, von denen bereits 7 gegessen wurden. Wie viel Prozent des Kuchens sind noch da?

**Aufgabe 27.3.** (1) Wie viel Prozent sind 1000?

(2) Wie viel sind 1000%?

(3) Berechne

$$\frac{7\%}{4\%_{00}} - \frac{5\%_{00}}{11\%}$$

**Aufgabe 27.4.** Drücke die Stammbrüche bis  $\frac{1}{20}$  in gerundeten Promille aus.

**Aufgabe 27.5.** Bei einer Befragung nach der Lieblingseissorte stellt sich heraus, dass jeweils ein Drittel der Befragten für Erdbeereis, für Himbeereis und für Zitroneneis plädiert. In Prozent sind es also jeweils 33. Wo ist das Prozent  $100\% - 3 \cdot 33\% = 1\%$  geblieben?

**Aufgabe 27.6.** Lucy Sonnenschein gibt 20% ihres Taschengeldes für Süßigkeiten aus, davon wiederum 40% für Eis. Wie viel Prozent ihres Taschengeldes gibt sie für Eis aus?



**Aufgabe 27.7.** Die engagierte Software-Entwicklerin Betti van Deyk verbucht folgende Lohnsteigerungen in ihren ersten drei Berufsjahren: +10% nach einem Jahr, +8% nach dem zweiten Jahr, +15% nach dem dritten Jahr. Wie verhält sich prozentual ihr Gehalt nach drei Jahren zu ihrem Anfangsgehalt?

**Aufgabe 27.8.** Zwei Händler spekulieren mit dem gleichen Kapitaleinsatz an der Börse. Händler *A* macht in der ersten Woche ein Prozent Gewinn und in der zweiten Woche ein Prozent Verlust, dagegen macht Händler *B* in der ersten Woche ein Prozent Verlust und in der zweiten Woche ein Prozent Gewinn. Wie sieht ihre Geschäftsbilanz in den zwei Wochen aus, und wer steht nach zwei Wochen besser da?

**Aufgabe 27.9.** Bauer Ernst erntet 100 Kilogramm Wassermelonen, die zu 99 Prozent aus Wasser bestehen. Er lässt sie eine Woche lang in der Sonne liegen, wodurch sie etwas austrocknen und sich ihr Wasseranteil auf 98 Prozent reduziert, die festen Bestandteile ändern sich nicht. Wie viel wiegen die Melonen jetzt?

**Aufgabe 27.10.\***

Karl trinkt eine Flasche Bier (0,5 Liter) mit einem Alkoholgehalt von 5 Prozent. 10 Prozent des getrunkenen Alkohols werden von seinem Blut aufgenommen, wobei er fünf Liter Blut hat (diese Gesamtmenge wird durch die Aufnahme nicht verändert). Wie viel Promille hat Karl, wenn er zuvor nüchtern war?

**Aufgabe 27.11.\***

In einer Äpfelpackung befinden sich stets sechs Äpfel, die zusammen ein Kilo wiegen sollen, wobei eine Toleranz zwischen 995 und 1005 Gramm erlaubt ist. Der kleinste Apfel in der Packung muss mindestens 90 Prozent des Gewichts des größten Apfels der Packung haben.

- (1) Wie schwer (in gerundeten Gramm) kann ein Apfel in einer Packung maximal sein?
- (2) Wie leicht (in gerundeten Gramm) kann ein Apfel in einer Packung minimal sein?
- (3) Um wie viel Prozent ist der größtmögliche Apfel schwerer als der kleinstmögliche Apfel?

**Aufgabe 27.12.** Auf eine Ware ist beim Verkauf eine Mehrwertsteuer von 19% vom Grundpreis zu entrichten, die im Verkaufspreis Niederschlag findet. Wie viel Prozent vom Verkaufspreis ist das?

**Aufgabe 27.13.** Bei einer Wahl ist der Anteil der Nichtwähler gleich 20% und der Anteil der ungültigen Stimmen (bezogen auf alle abgegebenen Stimmen) gleich 2%. Die Partei „Soziale Alternative für Rentner“ enthält 5% der gültigen Stimmen. Wie viel Prozent der Bevölkerung haben diese Partei gewählt?

**Aufgabe 27.14.** Bei einer Wahl werden 51076953 Stimmen abgegeben. Die Partei *A* bekommt 19584022 Stimmen, die Partei *B* bekommt 17354313 Stimmen, die Partei *C* bekommt 6274560 Stimmen, die Partei *D* bekommt 4103045 Stimmen. Alle anderen Parteien bekommen weniger als 1000000 Stimmen.

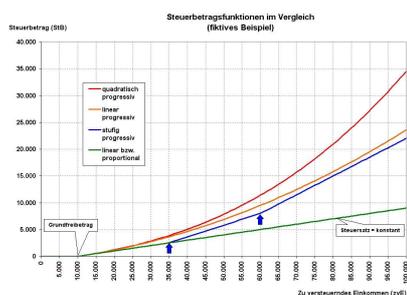
- (1) Wie viel Prozent erhalten jeweils die Parteien?
- (2) Wie viel Prozent erhalten jeweils die Parteien von den gültigen Stimmen?
- (3) Es gilt die 5%-Hürde. Wie viel Prozent der Sitze im Parlament bekommen die Parteien?
- (4) Es gibt 510 Sitze. Wie verteilen sich diese auf die Parteien?

**Aufgabe 27.15.** Eine Partei verliert bei einer Wahl gegenüber den letzten Wahlen 3 Prozentpunkte. Damals hatte sie einen Stimmenanteil von 15%. Wie viel hat sie prozentual verloren?

**Aufgabe 27.16.** Der Lohnabschluss bei Tarifverhandlungen sieht vor: Jeder Arbeitnehmer bekommt einen jährlichen pauschalen Zuschlag von 600 Euro und einen prozentualen Zuwachs von 2,3%. Berechne die prozentualen Zuwächse für die folgenden Lohngruppen (Monatliches Gehalt vor dem Tarifabschluss).

Lohngruppe	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
Gehalt	1950	2300	2768	3010

**Aufgabe 27.17.** Die Software-Entwicklerin Betti van Deyk verdient 70000 Euro pro Jahr. Wie viel Steuer müsste sie prozentual gemäß der abgebildeten Steuermodelle zahlen? Wie viel Steuer müsste sie je nach Modell für den 70000. verdienten Euro zahlen, wie viel für den 30000. verdienten Euro?



**Aufgabe 27.18.** Eine Sendung erzielt mit durchschnittlich 2200000 Zuschauern einen Marktanteil von 18%. Welchen Marktanteil erzielt eine gleichzeitig laufende Sendung mit 1500000 Zuschauern?

**Aufgabe 27.19.** Wir betrachten die Quotienten  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$  für  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $m \in \mathbb{N}$  derart gibt, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leq 1 + \epsilon$$

gilt.

**Aufgabe 27.20.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $b \in K_+$  mit der zugehörigen Exponentialfunktion

$$\varphi = \varphi_b: \mathbb{Z} \longrightarrow K, n \longmapsto b^n,$$

und es sei  $\psi$  die Exponentialfunktion zur Basis  $b^{-1}$ . Zeige, dass die beiden Funktionsgraphen zu  $\varphi$  und zu  $\psi$  symmetrisch zur  $y$ -Achse sind.

**Aufgabe 27.21.** Eine Population wachse pro Jahr um 0,1 Prozent. Man gebe unter Verwendung von Lemma 25.5 (bzw. der Bernoulli-Ungleichung) eine Jahreszahl  $n$  mit der Eigenschaft an, dass sich die Population in diesem Zeitraum mindestens verdoppelt. Gibt es bessere Methoden, ein solches  $n$  zu finden?

**Aufgabe 27.22.** Bestimme ein  $m \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$(1,1)^n \geq n$$

gilt.

**Aufgabe 27.23.** Bestimme ein  $m \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

### 27.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 27.24.** (2 Punkte)

Jetzt ist es 17 Uhr 25. Wie viel Prozent des Tages stehen noch bevor?

**Aufgabe 27.25.** (2 Punkte)

Eine Partei gewinnt bei einer Wahl gegenüber den letzten Wahlen 5 Prozentpunkte dazu. Jetzt hat sie einen Stimmenanteil von 25%. Wie viel hat sie prozentual zugelegt?

**Aufgabe 27.26.** (4 Punkte)

Bestimme ein  $m \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$(1,05)^n \geq n$$

gilt.

**Aufgabe 27.27.** (5 Punkte)

Bestimme ein  $m \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $n \geq m$  die Abschätzung

$$(1,1)^n \geq n^2$$

gilt.

## 28. VORLESUNG - DER DIVISIONSALGORITHMUS

Nicht allein in  
Rechnungssachen Soll der  
Mensch sich Mühe machen;  
Sondern auch der Weisheit  
Lehren Muß man mit  
Vergnügen hören.

---

Wilhelm Busch, Max und  
Moritz

## 28.1. Folgen.

**Definition 28.1.** Es sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M, n \longmapsto x_n,$$

nennt man auch eine *Folge* in  $M$ . Eine Folge wird häufig in der Form

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

geschrieben.

Die Elemente  $x_n$  heißen dabei die *Glieder der Folge*.

## 28.2. Der Divisionsalgorithmus.

Wir besprechen nun das Verfahren des „schriftlichen Dividierens“, den Divisionsalgorithmus.

**Verfahren 28.2.** Es seien  $a, b$  natürliche Zahlen mit  $b$  positiv. Beim *Divisionsalgorithmus*  $a : b$  führt man sukzessive die (unendlich vielen) Divisionen mit Rest

$$a = z_0 \cdot b + r_0,$$

$$10 \cdot r_0 = z_{-1} \cdot b + r_{-1},$$

$$10 \cdot r_{-1} = z_{-2} \cdot b + r_{-2},$$

$$10 \cdot r_{-2} = z_{-3} \cdot b + r_{-3}, \dots$$

aus, d.h. man berechnet rekursiv aus  $r_{-i}$  mittels

$$10 \cdot r_{-i} = z_{-i-1} \cdot b + r_{-i-1}$$

die  $z_{-i-1}$  und die  $r_{-i-1}$ . Die Folge  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , heißt die *Ziffernfolge* und die Folge  $r_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , heißt die *Restefolge* des Divisionsalgorithmus.

Dieses Verfahren ist aus der Schule bekannt. Als Ergebnis wird die „unendliche Kommazahl“

$$z, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \dots$$

notiert, wobei die ganze Zahl  $z$  selbst in ihrer Dezimalentwicklung genommen wird. Unklar ist dabei, welchen genauen Sinn ein solcher Ausdruck besitzt.

Dies lässt sich im Rahmen der Konvergenz von Folgen befriedigend präzisieren. Die Indizierung ist hier so gewählt, dass sich die Ziffer  $z_{-i}$  (für  $i \geq 1$ ) auf  $10^{-i}$  bezieht.

**Lemma 28.3.** *Es seien  $a, b$  natürliche Zahlen mit  $b$  positiv und es seien  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und  $r_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , die im Divisionsalgorithmus berechneten Folgen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Die  $r_{-i}$  liegen zwischen 0 und  $b - 1$ .*
- (2) *Die  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}_+$ , liegen zwischen 0 und 9.*
- (3) *Wenn für ein  $k$  der Rest  $r_{-k} = 0$  ist, so sind für alle  $i > k$  auch  $z_{-i} = 0$ . und  $r_{-i} = 0$ .*
- (4) *Es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  und ein  $\ell \in \mathbb{N}_+$  mit  $\ell < b$  derart, dass für die Ziffern mit  $i > k$  die Beziehung*

$$z_{-i-\ell} = z_{-i}$$

*gilt.*

- (5) *Wenn man statt  $a : b$  den Divisionsalgorithmus  $ma : mb$  mit  $m \in \mathbb{N}_+$  ausführt, so ändert sich die Ziffernfolge nicht (wohl aber die Restefolge). Die Ziffernfolge ist also für die rationale Zahl  $\frac{a}{b}$  wohldefiniert.*
- (6) *Bei einem Dezimalbruch*

$$\frac{a}{b} = \frac{\sum_{j=0}^t c_j 10^j}{10^s}$$

*ist*

$$z_0 = \sum_{j \geq s} c_j 10^{j-s}$$

*(was bei  $t < s$  als 0 zu lesen ist) und*

$$z_{-i} = c_{-i+s}$$

*(was für  $-i < -s$  als  $z_{-i} = 0$  zu lesen ist).*

- (7) *Der Bruch  $\frac{a}{b}$  ist genau dann ein Dezimalbruch, wenn ein Rest  $r_{-i}$  gleich 0 ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Ziffernfolge  $z_{-i}$  ab einem  $k$  konstant gleich 0 ist.*

*Beweis.* (1) Ist eine Eigenschaft der Division mit Rest.

- (2) Wegen

$$r_{-i} \leq b - 1$$

ist

$$10 \cdot r_{-i} \leq 10 \cdot (b - 1).$$

Bei der Division von  $10 \cdot r_{-i}$  durch  $b$  ist somit der ganzzahlige Anteil echt kleiner als 10.

- (3) Dies folgt unmittelbar aus dem rekursiven Aufbau des Divisionsalgorithmus.

- (4) Im Fall, dass für ein  $k$  der Rest  $r_{-k} = 0$  ist, ergibt sich dies unmittelbar aus (3), wobei man  $\ell = 1$  wählen kann. Nehmen wir also an, dass alle  $r_{-i}$  von 0 verschieden sind. Da die Reste

$$r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}$$

allesamt zwischen 1 und  $b - 1$  liegen, muss es in ihnen irgendwann eine Wiederholung geben, sagen wir, dass

$$r_{-k-\ell} = r_{-k}$$

gilt. Da  $z_{-i-1}$  und  $r_{-i-1}$  allein von  $r_{-i}$  abhängt, wiederholt sich dann die Restfolge und die Ziffernfolge

$$r_{-k}, r_{k-1}, \dots, r_{-k-\ell+1} \text{ bzw. } z_{-k}, z_{k-1}, \dots, z_{-k-\ell+1}$$

unendlich oft periodisch.

- (5) Aus der Division mit Rest

$$10 \cdot r_{-i} = z_{-i-1} \cdot b + r_{-i-1}$$

ergibt sich direkt die entsprechende Division mit Rest

$$10 \cdot (m \cdot r_{-i}) = z_{-i-1} \cdot (m \cdot b) + (m \cdot r_{-i-1}),$$

woraus die Behauptung folgt.

- (6) Der Divisionsalgorithmus ist in diesem Fall

$$\sum_{j=0}^t c_j 10^j = \left( \sum_{j=s}^t c_j 10^{j-s} \right) 10^s + \sum_{j=0}^{s-1} c_j 10^j,$$

$$10 \cdot \left( \sum_{j=0}^{s-1} c_j 10^j \right) = c_{s-1} 10^s + 10 \cdot \left( \sum_{j=0}^{s-2} c_j 10^j \right),$$

$$10^2 \cdot \left( \sum_{j=0}^{s-2} c_j 10^j \right) = c_{s-2} 10^s + 10^2 \cdot \left( \sum_{j=0}^{s-3} c_j 10^j \right),$$

u.s.w., woraus die Aussagen ablesbar sind.

- (7) Wenn ein Dezimalbruch vorliegt, so können wir wegen (5) annehmen, dass

$$b = 10^s$$

eine Zehnerpotenz ist. Dann folgt die Aussage mit der abbrechenden Ziffernfolge aus (6).

Wenn ein  $r_{-k} = 0$ , so sind nach (3) alle folgenden Ziffern gleich 0. Wenn umgekehrt  $z_{-i} = 0$  für alle  $i \geq k$  gilt, so wird die Rekursionsbedingung für  $i \geq k$  zu

$$10 \cdot r_{-i} = r_{-i-1},$$

und dies führt bei  $r_k \neq 0$  zu einem Widerspruch, da nach Lemma 25.5 die Zehnerpotenzen schließlich die Zahl  $b$  überschreiten. Wenn ein  $r_{-k} = 0$  ist, so folgt rekursiv, dass die vorhergehenden Reste

$$r_{-k+1}, r_{-k+2}, \dots, r_{-1}, r_0$$

Dezimalbrüche sind. Somit ist auch  $\frac{a}{b}$  ein Dezimalbruch. □

Wir haben insbesondere bewiesen, dass beim Divisionsalgorithmus irgendwann eine Periodizität auftritt und gezeigt, wie diese zu finden ist. Das kleinste positive  $\ell$ , das die Eigenschaft aus (4) erfüllt, heißt die *Periodenlänge* der Division. Die Eigenschaft (6) bedeutet, dass die Ziffernfolge, die sich aus dem allgemeinen Divisionsalgorithmus im Falle der Division durch eine Zehnerpotenz ergibt, mit der endlichen Kommazahl aus Definition 26.4 übereinstimmt. Das Ergebnis des Divisionsalgorithmus wird als

$$z_0, z_{-1}z_{-2} \dots z_{-k} \overline{z_{-k-1} \dots z_{-k-\ell}}$$

notiert, wobei die überstrichenen Zahlen die Periode darstellen.

**Bemerkung 28.4.** Über die Periodenlänge kann man einige präzise Aussagen machen, die wir im Moment noch nicht beweisen können. Es seien  $a$  und  $b$  teilerfremd und  $b$  sei auch teilerfremd zu 10. Dann hängt die Periodenlänge  $\ell$  der Division  $a : b$  allein davon ab, welche minimale Zehnerpotenz  $10^k$  mit  $k \geq 1$  bei Division durch  $b$  den Rest 1 besitzt. Für den Fall  $a = 1$  siehe Aufgabe 28.9. Der minimale Exponent ist die Periodenlänge. Wenn  $b = p$  eine Primzahl ist, so ist diese Periodenlänge ein Teiler von  $p - 1$ . Wenn die Periodenlänge genau  $p - 1$  ist, so gilt dies bei sämtlichen Divisionen  $a : p$  mit  $a$  teilerfremd zu  $p$ , und die Reihenfolge der Ziffern ist eine zyklische Vertauschung der Reihenfolge der Ziffern zu  $1 : p$ . Siehe als Beispiel hierzu Aufgabe 28.3.

### 28.3. Dezimalbruchfolgen.

Die Ziffern  $z_{-i}$ , die sich beim Divisionsalgorithmus  $a : b$  ergeben, sind in ihrer genauen Bedeutung nicht einfach zu verstehen. Im Spezialfall, dass ein Dezimalbruch vorliegt, erhalten wir eine abbrechende Entwicklung  $z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \dots z_{-n}$ , wobei wir diese Ziffern direkt aus der Dezimalentwicklung des Zählers ablesen können. Wenn kein Dezimalbruch vorliegt, so erhalten wir eine unendliche Ziffernfolge  $z_{-i}$ . Zunächst muss man sich klar machen, dass jeder an einer bestimmten Ziffer abbrechende Ausschnitt daraus, also

$$z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \dots z_{-n}$$

nicht die Zahl  $\frac{a}{b}$  ist, obwohl es sich in einem zu präzisierenden Sinn um eine Approximation davon handelt. Eine Formulierung wie

$$z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \dots z_{-n} \dots$$

hingegen ist ziemlich aussagelos. Eine Formulierung wie

$$z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \dots z_{-k} \overline{z_{-k-1} \dots z_{-k-\ell}}$$

kodiert zwar die volle Information aus dem Divisionsalgorithmus, das Problem ist aber, ob und inwiefern dies eine Zahl ist.

**Definition 28.5.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Eine Folge der Form

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

mit  $a_n \in \mathbb{Z}$  und

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

heißt *Dezimalbruchfolge*.

Achtung! Eine Dezimalbruchfolge ist nicht das gleiche wie eine Folge von Dezimalbrüchen. Die Folge, die abwechselnd die Werte 0 und 1 besitzt, besteht auch nur aus Dezimalbrüchen. Hier ist wichtig, das bei einer Dezimalbruchfolge bei jedem Folgenglied sich die „Genauigkeit“ um ein  $\frac{1}{10}$  erhöht, das folgende Glied  $x_{n+1}$  liegt in einem Intervall der Länge  $\frac{1}{10^n}$ , das vom Vorgänger  $x_n$  festgelegt ist.

Wir werden zeigen, dass es für jedes Element  $x$  in einem archimedisch angeordneten Körper eine zugehörige Dezimalbruchfolge gibt, und dass diese im Fall einer rationalen Zahl  $\frac{a}{b}$  aus dem Divisionsalgorithmus ablesbar ist.

**Verfahren 28.6.** Es sei  $x \in K$  ein Element in einem archimedisch angeordneten Körper  $K$ . Dann nennt man die über  $n \in \mathbb{N}$  durch

$$x = u_n \cdot 10^{-n} + v_n$$

mit  $u_n \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq v_n < 10^{-n}$  gegebene Folge

$$x_n = u_n \cdot 10^{-n}$$

die *Dezimalbruchfolge* zu  $x$ .

Die definierende Gleichung in diesem Verfahren kann man auch als von der Gleichung

$$10^n x = u_n + v_n \cdot 10^n$$

herstammend interpretieren. Es ist also einfach

$$u_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor$$

und

$$x_n = u_n 10^{-n} = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n},$$

was zugleich zeigt, dass diese Folge existiert und eine Dezimalbruchfolge im Sinne der obigen Definition ist. Die Glieder  $x_n$  dieser Folge approximieren die gegebene Zahl  $x$  optimal unter allen Dezimalbrüchen mit dem vorgegebenen Nenner  $10^n$ , wie die folgende Aussage zeigt.

**Satz 28.7.** *Es sei  $x \in K$  ein Element in einem archimedisch angeordneten Körper  $K$  und es sei  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die zugehörige Dezimalbruchfolge. Dann ist*

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n},$$

*d.h. der  $n$ -te Dezimalbruch der Folge approximiert die Zahl  $x$  bis auf einen Fehler von maximal  $\frac{1}{10^n}$ . Es liegt eine Dezimalbruchfolge im Sinne von Definition 28.5 vor.*

*Beweis.* In der Definition der Dezimalbruchfolge wird

$$x = u_n \cdot 10^{-n} + v_n$$

mit  $u_n \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq v_n < 10^{-n}$  berechnet. Daher ist einerseits

$$x_n = u_n \cdot 10^{-n} \leq x$$

und andererseits

$$x = u_n \cdot 10^{-n} + v_n = x_n + v_n < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Die Eigenschaft

$$x_n \leq x_{n+1}$$

ergibt sich auch unmittelbar.  $\square$

**Lemma 28.8.** *Es seien  $a, b$  natürliche Zahlen mit  $b$  positiv und es seien  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und  $r_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , die im Divisionsalgorithmus berechneten Folgen. Dann ist*

$$x_n = \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i}$$

*die Dezimalbruchfolge zu  $\frac{a}{b}$ . Insbesondere ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} \leq \frac{a}{b} < \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} + 10^{-n}.$$

*Beweis.* Aus den definierenden Gleichungen des Divisionsalgorithmus ergibt sich sukzessive

$$\begin{aligned} a &= z_0 b + r_0 \\ &= z_0 b + \frac{10 \cdot r_0}{10} \\ &= z_0 b + \frac{z_{-1} \cdot b + r_{-1}}{10} \\ &= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + r_{-1} 10^{-1} \\ &= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + 10 \cdot r_{-1} 10^{-2} \\ &= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + (z_{-2} b + r_{-2}) 10^{-2} \\ &= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + z_{-2} b 10^{-2} + r_{-2} 10^{-2} \end{aligned}$$

und insgesamt

$$a = b \left( \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} \right) + r_{-n} 10^{-n}.$$

Division durch  $b$  ergibt

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} + \frac{r_{-n}}{b} 10^{-n} = \left( \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{n-i} \right) 10^{-n} + \frac{r_{-n}}{b} 10^{-n}.$$

Dies stimmt mit den Festlegungen aus dem Verfahren überein, in dem die Dezimalbruchfolge zu  $\frac{a}{b}$  definiert wurde.  $\square$

#### 28.4. Konvergente Folgen.

Die oben beschriebene Eigenschaft, dass eine rationale Zahl durch die zugehörige (im Divisionsalgorithmus berechneten) Dezimalbruchfolge beliebig genau approximiert wird, wird durch folgenden Begriff präzisiert, der im zweiten Semester eine tragende Rolle spielen wird.

**Definition 28.9.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei  $x \in K$ . Man sagt, dass die Folge gegen  $x$  *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem  $\epsilon \in K$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt  $x$  der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert.), andernfalls, dass sie *divergiert*.

**Korollar 28.10.** Es sei  $x \in K$  ein Element in einem archimedisch angeordneten Körper  $K$ . Dann konvergiert die zugehörige Dezimalbruchfolge  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegen  $x$ .

*Beweis.* Nach Satz 28.7 ist

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Wenn ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben ist, so gibt es nach Korollar 25.6 ein  $m$  mit

$$\frac{1}{10^m} \leq \epsilon.$$

Für alle  $n \geq m$  ist dann

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^m} \leq \epsilon.$$

$\square$

**Korollar 28.11.** *Zu einer rationalen Zahl  $x = \frac{a}{b}$  konvergiert die Dezimalbruchfolge, die man aus dem Divisionsalgorithmus erhält, gegen  $x$ .*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Korollar 28.10 in Verbindung mit Lemma 28.8. □

## 28. ARBEITSBLATT

### 28.1. Die Pausenaufgabe.

**Aufgabe 28.1.** Finde einen Bruch  $\frac{a}{p}$  mit einer Primzahl  $p$  derart, dass bei der schriftlichen Division eine Periodenlänge  $\ell$  mit  $2 \leq \ell < p - 1$  auftritt.

### 28.2. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 28.2.** Führe den Divisionsalgorithmus zu  $1 : p$  für jede Primzahl  $p < 20$  durch. Was kann man an den Periodenlängen beobachten?

**Aufgabe 28.3.** Führe die schriftlichen Divisionen

$$1 : 7, 2 : 7, 3 : 7, 4 : 7, 5 : 7, 6 : 7$$

durch. Was fällt bei der Ziffernentwicklung auf? Wie kann man das erklären?

**Aufgabe 28.4.** Führe den Divisionsalgorithmus zu  $5 : 7$  und zu  $15 : 21$  durch. Notiere die Restfolge und die Ziffernfolge. Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede treten auf?

**Aufgabe 28.5.** Finde eine Primzahl  $p$  derart, dass sich beim Divisionsalgorithmus zu  $1 : p$  eine von 0 verschiedene Ziffer wiederholt, dies aber nicht Teil der Periodizität ist.

**Aufgabe 28.6.** Berechne  $1$  durch  $37$  mit dem Divisionsalgorithmus.

**Aufgabe 28.7.\***

Berechne  $1$  durch  $41$  mit dem Divisionsalgorithmus.

**Aufgabe 28.8.** Berechne  $1$  durch  $101$  mit dem Divisionsalgorithmus.

**Aufgabe 28.9.\***

Es sei  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen mit  $b$  positiv. Zeige durch Induktion nach  $i$ , dass man die Restfolglieder  $r_{-i}$  im Divisionsalgorithmus direkt durch die Division mit Rest

$$10^i a = xb + r_{-i}$$

erhalten kann.

**Aufgabe 28.10.** Es sei  $b$  eine zu 10 teilerfremde positive Zahl. Zeige, dass die Periodenlänge  $\ell$  beim Divisionsalgorithmus zu  $1 : b$  gleich der kleinsten positiven Zahl  $k$  ist, für die  $10^k$  bei der Division durch  $b$  den Rest 1 besitzt.

**Aufgabe 28.11.\***

Frau Maier-Sengupta ist für ein halbes Jahr in Elternzeit. Ihr Sohn Siddhartha kam mit einem Gewicht von drei Kilogramm auf die Welt und wurde in den sechs Monaten ausschließlich von Muttermilch ernährt. Nach den sechs Monaten wiegt er zehn Kilogramm. Jeden Tag hat das Kind 150 Milliliter Milch getrunken. Wie viel Milch hat Siddhartha in den sechs Monaten getrunken und wie viel Prozent davon ging in die Gewichtszunahme? (Rechne mit Monat = 30 Tage und setze das Milchgewicht gleich dem Gewicht von Wasser an).

**Aufgabe 28.12.** Die natürlichen Zahlen  $a, b$  seien teilerfremd und  $b$  sei teilerfremd zu 10. Zeige, dass dann sämtliche Reste  $r_{-i}$  im Divisionsalgorithmus zu  $a : b$  teilerfremd zu  $b$  sind.

**Aufgabe 28.13.** Berechne mit dem Divisionsalgorithmus zu  $2 : 13$  die Ziffernfolge, die Restefolge und die Dezimalbruchfolge.

**Aufgabe 28.14.** Führe die schriftliche Division

$$53,4 : 0,07$$

durch.

**Aufgabe 28.15.** Führe im 3-er System den Divisionsalgorithmus  $121 : 102$  aus.

**Aufgabe 28.16.** Führe im 5-er System den Divisionsalgorithmus  $1 : 3$  aus.

**Aufgabe 28.17.** Führe im 7-er System den Divisionsalgorithmus  $6563203 : 1000$  aus.

**Aufgabe 28.18.** Welche Bedeutung würden sie dem Ausdruck

$$0,101001000100001\dots$$

(die Punkte bedeuten, dass die Ziffern in der erkennbaren Regelmäßigkeit unendlich weiter fortgesetzt werden) zuordnen. Gibt es dafür eine Interpretation als rationale Zahl, als reelle Zahl, als Folge?

**Aufgabe 28.19.** Wo tritt in der Mathematik (und in anderen Gebieten) Periodizität auf? Sind die Periodizitäten dabei „diskret“ oder „kontinuierlich“?

**Aufgabe 28.20.** Es seien die  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , die im Divisionsalgorithmus zu  $a : b$  berechneten Ziffern. Ist

$$\sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} = \left( \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{n-i} \right) 10^{-n}$$

stets die beste Approximation von  $\frac{a}{b}$  unter allen ganzzahligen Vielfachen von  $10^{-n}$ ?

**Aufgabe 28.21.** Es seien  $a, b$  natürliche Zahlen mit  $b$  positiv und es seien  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und  $r_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , die im Divisionsalgorithmus berechneten Folgen. Zeige durch Induktion nach  $n$ , dass

$$a = b \left( \sum_{i=0}^n z_{-i} 10^{-i} \right) + r_{-n} 10^{-n}$$

gilt.

**Aufgabe 28.22.** Zeige, dass die Folge der Stammbrüche  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , gegen 0 (in  $\mathbb{Q}$ ) konvergiert.

**Aufgabe 28.23.** Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper und  $x \in K$  mit  $|x| < 1$ . Zeige, dass die Folge

$$x_n := x^n$$

gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 28.24.** Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 28.25.** Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $K$  mit Grenzwert  $x$ . Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen  $|x|$ .

**Aufgabe 28.26.** Es sei  $z_{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , die Ziffernfolge, die sich beim Divisionsalgorithmus  $a : b$  ergibt. Wann ist diese konvergent?

**Aufgabe 28.27.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem archimedisch angeordneten Körper. Zeige, dass die Folge genau dann gegen  $x$  konvergiert, wenn es für jedes  $k \in \mathbb{N}_+$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart gibt, dass für alle  $n \geq n_0$  die Abschätzung  $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$  gilt.

**Aufgabe 28.28.\***

Negiere die Aussage, dass eine Folge  $x_n$  in einem angeordneten Körper gegen  $x$  konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

### 28.3. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 28.29.** (3 Punkte)

Berechne 1 durch 271 mit dem Divisionsalgorithmus.

**Aufgabe 28.30.** (3 Punkte)

Führe die schriftliche Division

$$162,017 : 0,23$$

durch.

**Aufgabe 28.31.** (3 Punkte)

Führe im 3-er System den Divisionsalgorithmus  $2012 : 112$  aus.

**Aufgabe 28.32.** (5 Punkte)

Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 28.33.** (3 Punkte)

Zeige, dass die Folge  $(-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , in einem angeordneten Körper nicht konvergiert.

## ANHANG A: BIDLIZENZEN

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also <http://commons.wikimedia.org>), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:>

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/User:>

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = A plus b au carre.svg , Autor = Benutzer Alkarex auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0	15
Quelle = A plus b au carre.svg , Autor = Benutzer Alkarex auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0	18
Quelle = SquNumbers.svg , Autor = Benutzer Yoni Toker auf CC-by-sa 4.0, Lizenz =	19
Quelle = Euro coins and banknotes.jpg , Autor = Benutzer Avij auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	23

Quelle = GabiHochster2.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	31
Quelle = HeinzNgolo1.png , Autor = Bocardodarapti, Lizenz = CC-by-sa 4.0	42
Quelle = MustafaMueller3.png , Autor = Bocardodarapti, Lizenz = CC-by-sa 4.0	44
Quelle = Georg Cantor 1894.jpg , Autor = Benutzer Geometry guy auf en wikipedia, Lizenz = PD	51
Quelle = David Hilbert 1886.jpg , Autor = Unbekannt (1886), Lizenz = PD	51
Quelle = Absolute complement.svg , Autor = Benutzer BMF81 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	55
Quelle = Set intersection.png , Autor = Benutzer Marcelo Reis auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	55
Quelle = Diagrama1.gif , Autor = Benutzer Dante auf Commons, Lizenz = PD	55
Quelle = 4sets.png , Autor = Benutzer Stumps auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	55
Quelle = Venn Diagram ABCD.svg , Autor = Benutzer Johannes Rössel auf Commons, Lizenz = PD	55
Quelle = Edwards-Venn-five.svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	55
Quelle = Edwards-Venn-six.svg , Autor = Benutzer Interiot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	56
Quelle = Venn6.svg , Autor = Benutzer Kopophex auf en Wikipedia, Lizenz = PD	56
Quelle = Disyunción de clases2.JPG , Autor = Benutzer Monimino auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	56
Quelle = Subset.svg , Autor = Benutzer Petr K auf Commons, Lizenz = PD	56
Quelle = Venn diagram of three sets.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	56
Quelle = CirclesN4xa.GIF , Autor = Benutzer Thisisbossi auf Commons, Lizenz = PD	56

Quelle = CirclesN4a.GIF , Autor = Benutzer Thisisbossi auf Commons, Lizenz = PD	56
Quelle = Standardsemantik klein.png , Autor = Benutzer Dhanyavaada auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	56
Quelle = Amino Acids Venn Diagram (de).svg , Autor = Benutzer Hoffmeier auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	57
Quelle = British Isles Venn Diagram en.svg , Autor = Benutzer Sony-youth auf Commons, Lizenz = PD	57
Quelle = Geistiges Eigentum und Wettbewerbsrecht.png , Autor = Benutzer 3247 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	57
Quelle = LucySonnenschein2.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	58
Quelle = Venn diagram coloured.svg , Autor = Benutzer Ring0 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	58
Quelle = Venn diagram gr la ru.svg , Autor = Benutzer Watchduck auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	58
Quelle = Natural numbers.svg , Autor = Benutzer Junaidpv auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	64
Quelle = NachfolgermitSchleife.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	64
Quelle = Mustafa Heinz Sandkasten.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	65
Quelle = Aplicación.svg , Autor = Benutzer HiTe commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	68
Quelle = Aplicación inyectiva sobreyectiva.svg , Autor = Benutzer HiTe commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	68
Quelle = Aplicación no inyectiva sobreyectiva.svg , Autor = Benutzer HiTe commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	69
Quelle = Aplicación inyectiva no sobreyectiva.svg , Autor = Benutzer HiTe commonswiki auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	69
Quelle = Appelbijektion1.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	70
Quelle = Deckel-koeln.png , Autor = Benutzer Obersachse auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	71

Quelle = SunflowerModel.svg , Autor = Benutzer Doron auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	73
Quelle = Aplicación 2.svg , Autor = Benutzer HiTe auf Commons, Lizenz = PD	76
Quelle = Beliebteste Eissorten in Deutschland.svg , Autor = Benutzer Doofi auf Commons, Lizenz = PD	76
Quelle = Tiefkühlkonsum.svg , Autor = Benutzer SInner1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	76
Quelle = Exp.svg , Autor = Peter John Acklam, Lizenz = CC-by-sa 3.0	76
Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png , Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD	76
Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png , Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	76
Quelle = Elliptic orbit.gif , Autor = Benutzer Brandir auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5	76
Quelle = VerschiedeneNummerierungen.png , Autor = Bocardodarapti, Lizenz = CC-by-sa 4.0	80
Quelle = Dedekind.jpg , Autor = Benutzer Yerpo auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	88
Quelle = Giuseppe Peano.jpg , Autor = Benutzer Kalki auf Commons, Lizenz = PD?	88
Quelle = Domen-indukto.gif , Autor = Joachim Mohr, Lizenz = CC-by-sa 3.0	92
Quelle = NachfolgermitSchleife.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	95
Quelle = Sandklaffmuschel in Hand.JPG , Autor = Benutzer DanielD commonswiki auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	98
Quelle = Additionnachfolger6.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	103
Quelle = Addition Table.svg , Autor = Benutzer Indolences auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	104
Quelle = Commutative Addition.svg , Autor = Benutzer Weston.pace commonswiki auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	106
Quelle = Black cat sitting on a round straw bale.jpg , Autor = Benutzer Flickr upload bot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0	108

Quelle = Non-injective function.svg , Autor = Benutzer Fulvio314 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 1.0	109
Quelle = Tpitagoras.gif , Autor = webmaster del sitio (= Benutzer Liraca auf Commons), Lizenz = gemeinfrei	113
Quelle = Aples.svg , Autor = Benutzer Zaur Ahmetov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	116
Quelle = Three-by-Four-Distributivity.jpg , Autor = Benutzer Jean-Luc W auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	117
Quelle = Burnus. Ägare: Sofia - Livrustkammaren - 74868.tif , Autor = Benutzer LSHuploadBot auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	123
Quelle = Natural numbers.svg , Autor = Benutzer Junaidpv auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	124
Quelle = Subtraction01.svg , Autor = Benutzer Nashev auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	128
Quelle = Kasperletheater.jpg , Autor = Benutzer AndreasPraefcke auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	136
Quelle = Advent Bowl Rusch.jpg , Autor = Benutzer Rush Austria auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	147
Quelle = Verband_Teiler30.png , Autor = Benutzer SirJective auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	150
Quelle = New Animation Sieve of Eratosthenes.gif , Autor = Benutzer M.qrius auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	152
Quelle = Euklid-von-Alexandria 1.jpg , Autor = Benutzer Luestling auf Commons, Lizenz = PD	153
Quelle = E L Kirchner Variete.jpg , Autor = Ernst Ludwig Kirchner, Lizenz = gemeinfrei	160
Quelle = Pascal triangle.svg , Autor = Benutzer Kazukiokumura auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	164
Quelle = Yanghui triangle.gif , Autor = Benutzer Noe auf Commons, Lizenz = PD	164
Quelle = TrianguloPascal.jpg , Autor = Pascal (= Benutzer Drini auf Commons), Lizenz = PD	164
Quelle = Binomio al cubo.svg , Autor = Drini, Lizenz = PD	165
Quelle = Weihnachtsplätzchen 2008 Mandelherz (Alter Fritz) 07.JPG , Autor = Benutzer Alter Fritz auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	169

	347
Quelle = Pie division.svg , Autor = Benutzer Dcoetzee auf Commons, Lizenz = PD	171
Quelle = Diciembre.jpg , Autor = Benutzer Lumentzaspi auf Commons, Lizenz = PD	194
Quelle = Littlediscoperade1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	207
Quelle = Littlediscoperade2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	207
Quelle = Littlediscoperade3.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	207
Quelle = Littlediscoperade4.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	207
Quelle = Integers-line.svg , Autor = Benutzer kismalac auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	211
Quelle = SongkhaRekha.png , Autor = Benutzer TareqMahbub auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	211
Quelle = Apples_in_a_basket.jpg , Autor = Benutzer Spirtu auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	212
Quelle = Apples in a basket.jpg , Autor = Benutzer Oxfordian Kissuth auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	212
Quelle = Kielcanal.PNG , Autor = Benutzer Grunners auf Commons, Lizenz = PD	235
Quelle = Zille vorichte.png , Autor = Heinrich Zille (= Benutzer Hendrike auf Commons), Lizenz = gemeinfrei	235
Quelle = Euklid-von-Alexandria 1.jpg , Autor = Benutzer Luestling auf Commons, Lizenz = PD	238
Quelle = FibonacciRabbit.svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	244
Quelle = 34*21-FibonacciBlocks.png , Autor = Benutzer ??? auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	245
Quelle = Flying-kangaroo.jpg , Autor = Benutzer PanBK auf en Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	251
Quelle = Thales theorem.svg , Autor = Benutzer Helder, Dake (png version) auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	258

Quelle = Proportional variables.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = Public domain	259
Quelle = Multiplication chart.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 1.0	260
Quelle = Exemplo de função linear.jpg , Autor = Benutzer Vinícius Weite Thomé auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	266
Quelle = Strich.png , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = C-by-sa 4.0	267
Quelle = FractionStrips.PNG , Autor = Benutzer Zapotz auf Commons, Lizenz = PD	269
Quelle = Half-integer house.jpg , Autor = Stuart Chalmers, Lizenz = CC-by-sa 2.0	277
Quelle = Konstruktionen 007.jpg , Autor = Benutzer Darapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	283
Quelle = Constructrulercompassadd.pdf , Autor = Benutzer Darapti auf Commons, Lizenz =	284
Quelle = Absolute value.svg , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	287
Quelle = Sternbrocot.jpg , Autor = Benutzer WydD auf fr. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa-3.0	291
Quelle = Archimedes (Idealportrait).jpg , Autor = Benutzer Ixitixel auf Commons, Lizenz = PD	294
Quelle = Zandlineaal-schuin.jpg , Autor = Benutzer Tom Meijer auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	295
Quelle = Dune 7 in the Namib Desert.jpeg , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	295
Quelle = Floor function.svg , Autor = Benutzer Omegatron auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	296
Quelle = Kegs-n-ausg-p.png , Autor = Benutzer Ag2gaeh auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	300
Quelle = Function x3.svg , Autor = Benutzer LennyWikidata auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	300
Quelle = Rectangular hyperbola.svg , Autor = Benutzer Qef auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	302

- Quelle = Zahlenstrahl 2.gif , Autor = Benutzer Daniel Wolf2 auf de  
Wikipedia, Lizenz = gemeinfrei 306
- Quelle = Bundeshaushaltsplan 2011.png , Autor = Benutzer 5ven4wiki  
auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 318
- Quelle = Cement Production 2010.png , Autor = Benutzer Propubs auf  
Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 318
- Quelle = Exp-4-plot.png , Autor = Benutzer Svyo auf Commons, Lizenz  
= CC-by-sa 4.0 321
- Quelle = Exponential.svg , Autor = Benutzer Mc Sush auf Commons,  
Lizenz = gemeinfrei 322
- Quelle = LucySonnenscheinEis4.png , Autor = Benutzer Bocardodarapti  
auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 326
- Quelle = Steuerprogression\_Steuerbetragsfunktionen.jpg , Autor =  
Benutzer Udo.Brechtel auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 328