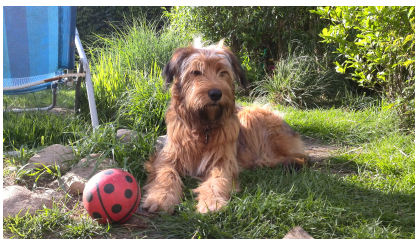


## Lineare Algebra

### Vorlesung 14



Auch mit dem Ball spielt sie gern.

### Linearformen

BEISPIEL 14.1. In einem Laden stehen  $n$  verschiedene Produkte zum Verkauf an. Ein Einkauf wird durch ein  $n$ -Tupel (Einkaufstupel) beschrieben, wobei der  $i$ -te Eintrag angibt, wie viel vom  $i$ -ten Produkt gekauft wird (bezogen auf eine jeweilige Einheit). Die Menge der Einkäufe (einschließlich der Rückgaben) bilden einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum. Eine Preisliste für die Produkte wird ebenfalls durch ein  $n$ -Tupel (Preistupel) beschrieben, wobei jetzt der  $i$ -te Eintrag angibt, wie viel das  $i$ -te Produkt kostet (bezogen auf die gleiche Einheit). Die Menge der Preistupel bildet ebenfalls einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum (man denke an Preisvergleich, Preissteigerung, Mehrwertsteuer, etc.). Es ist aber offenbar unsinnig, ein Einkaufstupel und ein Preistupel als Elemente im gleichen Vektorraum zu betrachten und miteinander zu addieren. Im Gegenteil, die richtige Verarbeitung eines Einkaufstupels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und eines Preistupels  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  ist es, den Gesamtpreis  $\sum_{i=1}^n p_i x_i$  zu bestimmen, der zu  $\mathbb{R}$  gehört. Einkaufstupel und Preistupel sind *dual* zueinander, der Preistupelvektorraum ist dual zum Einkaufstupelvektorraum.

DEFINITION 14.2. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt eine *Linearform* auf  $V$ .

BEISPIEL 14.3. Eine Linearform auf dem  $K^n$  ist von der Form

$$K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

zu einem Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$ . Besonders einfache Linearformen sind die Projektionen

$$p_j: K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_j.$$

Die Nullabbildung nach  $K$  ist ebenfalls eine Linearform, die man auch die *Nullform* nennt.

Wir haben schon eine Vielzahl von Linearformen kennengelernt, beispielsweise die Preisfunktion bei einem Einkauf verschiedener Produkte oder der Vitamingehalt von Obstsalaten aus verschiedenen Obstsorten. Bezüglich einer Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  und einer Basis  $w$  von  $K$  (dabei ist  $w$  einfach ein von 0 verschiedenes Element aus  $K$ ) besteht die beschreibende Matrix zu einer Linearform einfach aus einer Zeile mit  $n$  Einträgen.

BEISPIEL 14.4. Eine Reihe von prominenten Beispielen von Linearformen auf unendlichdimensionalen Vektorräumen finden sich in der Analysis. Zu einem reellen Intervall  $[a, b]$  sind die Menge der Funktionen  $\text{Abb}([a, b], \mathbb{R})$  bzw. die Menge der stetigen Funktionen  $C([a, b], \mathbb{R})$  bzw. die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  reelle (ineinander enthaltene) Vektorräume. Zu einem Punkt  $P \in [a, b]$  ist jeweils die Auswertung  $f \mapsto f(P)$  eine Linearform (wegen der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation auf diesen Räumen). Ebenso ist die Auswertung der Ableitung

$$C^1([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f'(P),$$

eine Linearform. Für  $C([a, b], \mathbb{R})$  ist ferner das Integral, also die Abbildung

$$C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_a^b f(t) dt,$$

eine Linearform. Dies beruht auf der Linearität des Integrals.

BEMERKUNG 14.5. Es sei  $K$  ein Körper und seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$ . Zu einer Linearform

$$f: V \longrightarrow K$$

und einem Vektor  $w \in W$  ist die Abbildung

$$fw: V \longrightarrow W, v \longmapsto f(v)w,$$

linear. Es handelt sich einfach um die Hintereinanderschaltung

$$V \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\iota_w} W,$$

wobei  $\iota_w$  die Abbildung  $s \rightarrow sw$  bezeichnet.

Der Kern der Nullform ist der gesamte Raum, ansonsten besitzt der Kern einer jeden Linearform  $f \in \text{Hom}_K(V, K)$  mit  $f \neq 0$  die Dimension  $\dim_K(V) - 1$ . Dies folgt aus der Dimensionsformel. Abgesehen von der Nullform ist eine Linearform stets surjektiv.

LEMMA 14.6. *Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und es sei  $U \subseteq V$  ein  $n - 1$ -dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es eine Linearform  $f: V \rightarrow K$  mit  $U = \text{kern } f$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 14.5. □

LEMMA 14.7. *Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und es sei  $v \in V$  ein von 0 verschiedener Vektor. Dann gibt es eine Linearform  $f: V \rightarrow K$  mit  $f(v) \neq 0$ .*

*Beweis.* Der eindimensionale  $K$ -Untervektorraum  $Kv \subseteq V$  besitzt ein direktes Komplement, also

$$V = Kv \oplus U$$

mit einem Untervektorraum  $U \subseteq V$ . Die Projektion auf  $Kv$  zu dieser Zerlegung bildet  $v$  auf 1 ab.

□

LEMMA 14.8. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, und seien  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Zu jedem  $k$  gebe es eine Linearform*

$$\varphi_k: V \longrightarrow K$$

mit

$$\varphi_k(v_k) \neq 0 \text{ und } \varphi_k(v_i) = 0 \text{ für } i \neq k.$$

Dann sind die  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 14.7. □

## Der Dualraum

DEFINITION 14.9. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K)$$

der *Dualraum* zu  $V$ .

Die Addition und die Skalarmultiplikation sind wie allgemein im Fall von Homomorphismenräumen definiert, also  $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$  und  $(sf)(v) := s \cdot f(v)$ . Bei endlichdimensionalem  $V$  ist nach Korollar 13.12 die Dimension des Dualraumes  $V^*$  gleich der Dimension von  $V$ .

DEFINITION 14.10. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$ . Dann nennt man die Linearformen

$$v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*,$$

die durch<sup>1</sup>

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

festgelegt sind, die *Dualbasis* zur gegebenen Basis.

Wegen Satz 10.10 ist durch die Vorschrift in der Tat jeweils eine Linearform festgelegt. Die Linearform  $v_i^*$  ordnet einem beliebigen Vektor  $v \in V$  die  $i$ -te Koordinate von  $v$  bezüglich der gegebenen Basis zu. Zu  $v = \sum_{j=1}^n s_j v_j$  ist ja

$$v_i^*(v) = v_i^*\left(\sum_{j=1}^n s_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n s_j v_i^*(v_j) = s_i.$$

Es ist wichtig zu betonen, dass  $v_i^*$  nicht nur von dem Vektor  $v_i$ , sondern von der gesamten Basis abhängt. Es gibt keinen „dualen Vektor“ zu einem Vektor. Dies sieht beispielsweise anders aus, wenn auf  $V$  ein Skalarprodukt gegeben ist.

BEISPIEL 14.11. Zur Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  im  $K^n$  besteht die Dualbasis aus den Projektionen auf eine Komponente, also gleich  $e_i^* = p_i$  mit

$$p_i: K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i.$$

Sie heißt die *Standarddualbasis*.

LEMMA 14.12. *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$ . Dann bildet die Dualbasis*

$$v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$$

*eine Basis des Dualraums.*

*Beweis.* Es sei

$$\sum_{j=1}^n a_j v_j^* = 0$$

mit  $a_j \in K$ . Wenn wir diese Linearform auf  $v_i$  anwenden, so ergibt sich direkt

$$a_i = 0.$$

Die  $v_1^*, \dots, v_n^*$  sind also linear unabhängig. Nach Korollar 13.12 besitzt der Dualraum die Dimension  $n$ , daher muss bereits eine Basis vorliegen.

□

LEMMA 14.13. *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$  und der Dualbasis*

$$v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*.$$

<sup>1</sup>Das so definierte Symbol heißt Kronecker-Delta.

Dann gilt für jeden Vektor  $v \in V$  die Gleichheit

$$v = \sum_{i=1}^n v_i^*(v)v_i.$$

D.h. die Linearformen  $v_i^*$  ergeben die Skalare (Koordinaten) eines Vektors bezüglich einer Basis.

*Beweis.* Der Vektor  $v$  hat eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^n s_j v_j$$

mit  $s_j \in K$ . Die rechte Seite der behaupteten Gleichheit ist somit

$$\sum_{i=1}^n v_i^*(v)v_i = \sum_{i=1}^n v_i^*\left(\sum_{j=1}^n s_j v_j\right)v_i = \sum_{i=1}^n s_i v_i = v.$$

□

LEMMA 14.14. *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  mit der Dualbasis  $v_1^*, \dots, v_n^*$ . Es sei  $w_1, \dots, w_n$  eine weitere Basis mit der Dualbasis  $w_1^*, \dots, w_n^*$  und mit*

$$w_r = \sum_{k=1}^n a_{kr} v_k.$$

Dann ist

$$w_j^* = \sum_{i=1}^n b_{ij} v_i^*,$$

wobei  $(b_{ij})_{ij} = (A^{-1})^{\text{tr}}$  die Transponierte der inversen Matrix von  $A = (a_{kr})_{kr}$  ist.

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} v_i^*\right)(w_r) &= \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} v_i^*\right)\left(\sum_{k=1}^n a_{kr} v_k\right) \\ &= \sum_{1 \leq i, k \leq n} b_{ij} a_{kr} v_i^*(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ij} a_{ir}. \end{aligned}$$

Hier steht das „Produkt“ aus der  $j$ -ten Spalte von  $B$  und der  $r$ -ten Spalte von  $A$ , also das Produkt aus der  $j$ -ten Zeile von  $B^{\text{tr}} = A^{-1}$  und der  $r$ -ten Spalte von  $A$ . Bei  $r = j$  ist dies 1 und bei  $r \neq j$  ist dies 0. Daher stimmt die angegebene Linearform mit  $w_j^*$  überein.

□

Mit Basiswechselmatrizen kann man dies auch als

$$M_{\mathfrak{v}^*}^{\mathfrak{w}^*} = ((M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}})^{-1})^{\text{tr}} = (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}})^{\text{tr}}$$

ausdrücken.

BEISPIEL 14.15. Wir betrachten den  $\mathbb{R}^2$  mit der Standardbasis  $e_1, e_2$ , seiner Dualbasis  $e_1^*, e_2^*$  und die Basis bestehend aus  $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Wir wollen die Dualbasis  $u_1^*$  und  $u_2^*$  als Linearkombinationen der Standarddualbasis ausdrücken, also in

$$u_1^* = ae_1^* + be_2^*$$

(bzw. in  $u_2^* = ce_1^* + de_2^*$ ) die Koeffizienten  $a$  und  $b$  (bzw.  $c$  und  $d$ ) bestimmen. Dabei ist  $a = u_1^*(e_1)$  und  $b = u_1^*(e_2)$ . Um dies berechnen zu können, müssen wir  $e_1$  und  $e_2$  als Linearkombination der  $u_1$  und  $u_2$  ausdrücken. Dies ist

$$e_1 = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$e_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$a = u_1^*(e_1) = u_1^*\left(\frac{3}{7}u_1 - \frac{1}{7}u_2\right) = \frac{3}{7}$$

und entsprechend

$$b = u_1^*(e_2) = u_1^*\left(\frac{1}{7}u_1 + \frac{2}{7}u_2\right) = \frac{1}{7}$$

und somit ist

$$u_1^* = \frac{3}{7}e_1^* + \frac{1}{7}e_2^*.$$

Mit den gleichen Rechnungen ergibt sich

$$u_2^* = -\frac{1}{7}e_1^* + \frac{2}{7}e_2^*.$$

Die Übergangsmatrix von  $u^*$  zu  $e^*$  ist daher

$$M_{\mathfrak{e}^*}^{\mathfrak{u}^*} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix davon ist

$$(M_{\mathfrak{e}^*}^{\mathfrak{u}^*})^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = (M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{u}})^{-1}.$$

Die umgekehrte Aufgabe, die Standarddualbasis durch  $u_1^*$  und  $u_2^*$  auszudrücken, ist einfacher zu lösen, da man dies aus der Darstellung der  $u_i$  bezüglich der Standardbasis direkt ablesen kann. Es ist

$$e_1^* = 2u_1^* + u_2^*$$

und

$$e_2^* = -u_1^* + 3u_2^*,$$

wie man überprüft, wenn man beidseitig an  $u_1, u_2$  auswertet.

### Die Spur

DEFINITION 14.16. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $M = (a_{ij})_{ij}$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $K$ . Dann heißt

$$\text{Spur}(M) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

die *Spur* von  $M$ .

DEFINITION 14.17. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix  $M$  beschrieben werde. Dann nennt man  $\text{Spur}(M)$  die *Spur* von  $\varphi$ , geschrieben  $\text{Spur}(\varphi)$ .

Nach Aufgabe 14.15 ist dies unabhängig von der gewählten Basis. Die Spur ist eine Linearform auf dem Vektorraum der quadratischen Matrizen bzw. auf dem Vektorraum der Endomorphismen.



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Waeller36.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons,  
Lizenz = CC-by-sa 4.0 1
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9