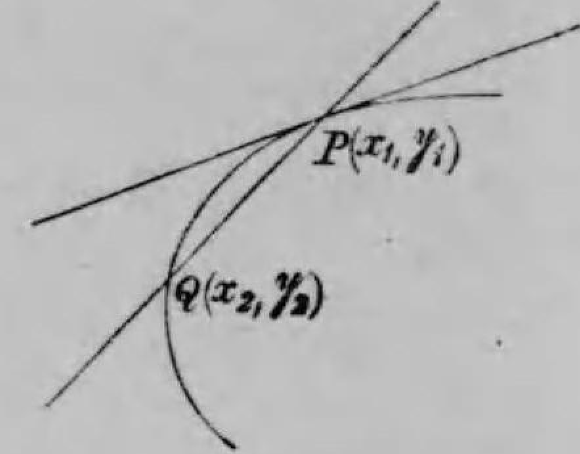
一ノ漸近線ヲ有ス.

47. 切線及ビ法線.

與ヘラレタル曲線上ノ一點ヲ $P(x_1, y_1)$ トス.

今Pノ他ニコノ曲線上ニ一點 $Q(x_2, y_2)$ ヲ取リ,PトQトヲ結ビ付クル直線ヲ作リ,次ニPヲ固定シQヲ曲線ニ沿ヒテPニ限リナク近ヅカシムルトキ,直線 PQ ガ或ル一定ノ直線ニ限リナク近ヅクトキハ,ソノ一定直線ヲ名ケテPニ於ケル此曲線ノ**切線**ト云ヒ,Pヲソノ **切點** ト云フ.

第六十五圖



今與ヘラレタル曲線ガ橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ナリトシテ,ソノ上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メントス. 先ヅ他ノ一點 $Q(x_2, y_2)$ ヲ取リ,直線 PQ ノ方程式ヲ作ルトキハ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

ニシテ,コヽニP及ビQハ共ニ曲線上ニアルヲ以テ

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

ナル關係アリ. 因テ邊々相減ズルトキハ

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0,$$

故ニ

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}.$$

之ヲ(2)ニ入レテ分母ヲ拂フトキハ

$$b^2(x_1+x_2)(x-x_1)+a^2(y_1+y_2)(y-y_1)=0$$

トナル. コヽニ於テQガPニ限リナク近ヅケル場合,即チ x_2, y_2 ガソレゾレ x_1, y_1 ニ限リナク近ヅケル場合ヲ考フルニ,此方程式ハ結局

$$2b^2x_1(x-x_1)+2a^2y_1(y-y_1)=0$$

ニ限リナク近ヅクベシ. 之ヲ書キ直サバ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2},$$

然ルニ此右邊ハ1ニ等シ. 故ニ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad (3)$$

是レ即チ求ムル切線ノ方程式ナリ.

同様ニシテ,双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ハ橢圓ノ場合ニナシタル計算ニ於テ b^2 ノ符號ヲ變ズルコトニヨリ

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (4)$$

ナルコトヲ知リ得ベシ．楕圓又ハ双曲線ニ於テ一ノ直徑ノ兩端ニ於ケル切線ハ常ニ平行ナルコトハ上ノ公式ヨリ容易ニ知ルコトヲ得．然レドモソノ直徑ガ主軸ト一致セザル限リ,切線ハソノ直徑ニ垂直ナラズ．

總ジテ楕圓ニ關シテ得タル公式ニ於テ,ソノ中ノb^2ヲスベテ$-b^2$ニ變ズルトキハ,之ニ相應スル双曲線ニ關シテノ公式ヲ得ルモノナリ．上ノ(3),(4)ノ如キソノ一例ナリ．故ニ以下カクノ如キ場合ニハ專ラ楕圓ニツイテノミ詳論スベシ．

曲線上ノ一點ヲ過リ,ソノ點ニ於ケル切線ニ垂直ナル直線ヲ,ソノ點ニ於ケル **法線** ト云ヒ,ソノ點ヲ法線ノ足ト云フ．

(1)ナル楕圓上ノ一點$P(x_1, y_1)$ニツイテ考フレバ,ソノ點ニ於ケル切線ノ式ハ(3)ナルヲ以テ,同點ニ於ケル法線ノ式ハ

$$\frac{x_1(y-y_1)}{a^2}=\frac{y_1(x-x_1)}{b^2}$$

即チ一般ニ

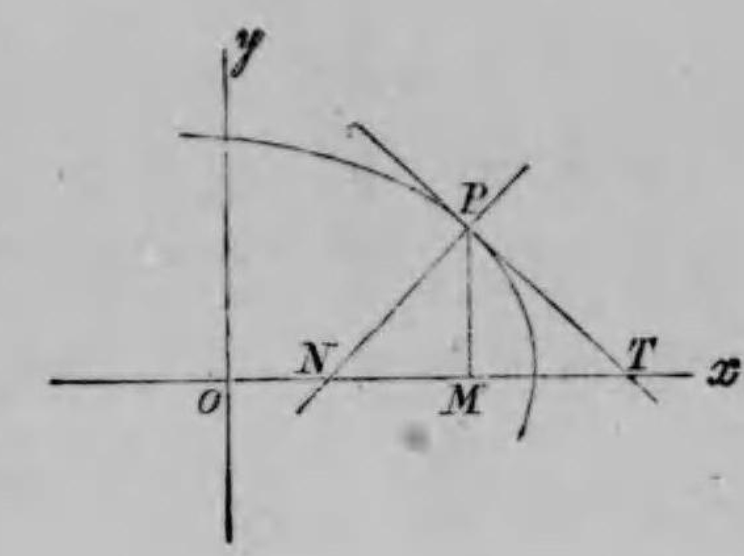
$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2 \qquad (5)$$

ナリ．同様ニ双曲線ノ場合ニハ

$$\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}={}^2+b^2 \qquad (6)$$

ヲ得ベシ．

第六十六圖



曲線上ノ一點$P(x_1, y_1)$ニ於ケル切線及ビ法線ガx軸ト交ハル點ヲ夫々T及ビNトシ,又PヨリX軸ニ下セル垂線ノ足ヲMトスルトキ,線分$\overline{MT}$及ビ$\overline{MN}$ヲ夫々P點ノ **切線影** 及ビ **法線影** ト云フ．ソノ長サハ次ノ如シ．

$$\overline{MT}=|OT-OM|=\left|\frac{a^2-x_1^2}{x_1}\right|,$$

$$\overline{MN}=|OM-ON|=|(1-e^2)x_1|.$$

48. 二次方程式ニ關スル補助定理.

是ヨリ二次曲線ノ諸性質ヲ研究セントスルニ當リ,ココニソノ準備トシテ,一般ニ二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

ノ根ニツイテ少シク考フル處アラントス．此方程式ニ於テaガ零ナラザルトキハ,既ニ代數學ニテ知レル如ク,ソノ根ハ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ナリ．モシaトbガ何レモ零ナラズシテ,cノミガ限リナク零ニ近ヅクトキハ,上ノ二根ノ中一ツハ限リナク零

ニ近ヅキ,他ノ一ハ零ニアラザル一定ノ値 $-\dfrac{b}{a}$ ニ限リナク近ヅクベシ. モシ又 a ノミガ零ニアラズシテ,b ト c トガ各限リナク零ニ近ヅクトキハ,二根ハ共ニ限リナク零ニ近ヅクベシ.

今 $x=\dfrac{1}{y}$ ト置キテ,(1) ヲ y ニ關スル方程式ニ書キ直ストキハ

$$cy^2+by+a=0$$

トナル. コヽニ於テ上記ノ結果ヲ適用スルニ,a ノミガ零ニ近ヅクトキハ,y ノ一ツノ値ガ零ニ近ヅキ,又 a ト b トガ各零ニ近ヅクトキハ,y ノ二ツノ値ガ共ニ零ニ近ヅクコトヲ知ル. 之ヲ x ニ戻シテ考フルトキハ,前者ノ場合ニハ x ノ一ノ値ガ無限大トナリ,後者ノ場合ニハ x ノ二ツノ値ガ共ニ無限大トナルヲ知ルベシ.

元來 (1) ヲ二次方程式ナリト稱スル以上ハ $a\neq 0$ ト考フルガ普通ナレドモ,上述ノ考ヨリシテ二次方程式トイフ意味ヲヤヽ擴張シ $a=0$ ナルモノヲモ許容スルコトヽシ,ソノ場合ニハ更ニ b ガ零ナルカ否カニヨリテ,二根又ハ一根ガ無限大トナルト稱スルコトニ規約スベシ.

因テ (1) ニ於テ係數ノ中一ツ若シクハ二ツガ零トナレル場合ノ根ヲ表示セバ,下ノ如キ結果ヲ得.

(1)	$a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,$	一根ハ ∞,他ノ一根ハ	$-\dfrac{c}{b}$,
(2)	$a\neq 0;\ b=0,\ c\neq 0,$	〃 $\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$,	〃 $-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$,
(3)	$a\neq 0,\ b\neq 0,\ c=0,$	〃 0,	〃 $-\dfrac{b}{a}$,
(4)	$a=0,\ b=0,\ c\neq 0,$	〃 ∞,	〃 ∞,
(5)	$a=0,\ b\neq 0,\ c=0,$	〃 0,	〃 ∞,
(6)	$a\neq 0,\ b=0,\ c=0,$	〃 0,	〃 0.

49. 一點ヨリ橢圓又ハ双曲線マデノ距離.

一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過リ,x 軸ト α ナル角ヲナス直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=l \qquad (1)$$

トシ,此直線ガ與ヘラレタル橢圓又ハ双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

ト交ハル實又ハ虚ナル交點ヲ Q, R トス. P ヨリ此直線上 x 軸ト α ナル角ヲナス方向ヲ正トシテ計レル PQ, PR ノ長サヲ求ムルコトハ,(1) ヨリ x 及ビ y ヲ出シ,之ヲ (2) ニ入レテ得ル l ニ關シテノ二次方程式

$$\frac{(l\cos\alpha+x_1)^2}{a^2}\pm\frac{(l\sin\alpha+y_1)^2}{b^2}=1$$

ヲ解クコトニ歸ス. 此ヲ整理スルトキハ

$$Al^2+2Bl+C=0 \qquad (3)$$

ニシテ,コヽニ

$$A=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}\pm\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

$$B=\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y_1\sin\alpha}{b^2}$$

$$C=\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}-1$$

ナリ.

楕圓ノ場合ニ於テハAハ決シテ零ナルコトナシ. 故ニlハ無限大ナルコトナシ. 之ニ反シテ双曲線ノ場合ニハ$A=0$ナルコトアリ. 即チ

$$\tan\alpha=\pm\frac{b}{a}$$

ニシテ,直線(1)ガ漸近線ニ平行ナルトキニlノ一ツノ値ハ無限大トナルベシ. 故ニ漸近線ニ平行ナル直線ハ双曲線ト無究遠ニ於テ交ハルト云フコトヲ得. lノ他ノ一ツノ値ハ$-\frac{C}{2B}$ニシテ此ハ一般ニハ無限大ナラザレドモ,モシ更ニ

$$B=\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}-\frac{y_1\sin\alpha}{b^2}=0$$

即チ

$$\frac{x_1}{a}=\pm\frac{y_1}{b} \tag{4}$$

ナルトキハ, $B=0$, $C\neq0$ ナルヲ以テ, lハ二根トモニ無限大トナル. 然ルニ(4)ハ畢竟Pガ漸近線上ニアルコトヲ

示スモノニシテ,即チ此場合ハ直線(1)ガ全然漸近線ノ一ツト相合スル場合ナリ. 故ニ漸近線ハ双曲線ト無究遠ニアル二點ニテ相交ハルモノナリト云フコトヲ得. モシ一直線上双方ノ無究遠ニアル二點ハ實ハ同一ノ點ナリト考ヘ,且切線ノ定義ヲ擴張シテ,切點ガ無究遠ニアル場合ヲモ包含セシメバ,漸近線ハ無究遠ニ於テ双曲線ニ切スル直線ナリト云フコトヲ得.

次ニBノミガ零トナル場合ヲ考フルニ,コノトキハ(3)ノ二根ハ絶對値ガ相等シク,符號ノミ相反スルモノトナル. 即チPガ弦QRノ中點ニアル場合ニ當ル. 依テ

$$B=\frac{x_1\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y_1\sin\alpha}{b^2}=0 \tag{5}$$

ニ於テx_1, y_1ヲ流通座標ト見做スナラバ,コレ即チx軸トαナル角ヲナス弦ノ中點ノ軌跡ヲ表ハスベシ. モシ又(x_1, y_1)ヲ已知數トシテ(5)ヨリαヲ求ムルトキハ,コレ即チ與ヘラレタル一點(x_1, y_1)ヲ中點トシテ有スベキ弦ノ方向ヲ與フルモノナリ.

最後ニCガ零ナル場合ヲ考フルニ,此時ハ點Pハ與ヘラレタル曲線上ニアルコトヽナル. サレバlノ一ツノ値ガ零ナルハ當然ナリ. モシ更ニ直線(1)ノ方向ガ丁度$B=0$, 即チ(5)ノ如クナルトキハlノ値ハ二ツトモ零トナリ,(1)ハP點ニ於ケル切線トナルベシ. 依テ(1)ト(5)ヨリαヲ消去シテ

$$\frac{x_1(x-x_1)}{a^2}\pm\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}=0$$

ヲ得,之ヲ變形スルトキハ

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

即チ切線ノ方程式ヲ得.

50. 直線ガ切線トナル條件.

與ヘラレタル直線

$$y=mx+\beta \tag{1}$$

ガ與ヘラレタル楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

ニ切スルタメノ條件ヲ求メンニハ,圓ノ場合ニ就テ論ジタルト同ジク,(1)ヲ(2)ノ中ニ代入シテxニ關スル二次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+\beta)^2}{b^2}=1,$$

即チ

$$(m^2a^2+b^2)x^2+2a^2\beta mx+a^2(\beta^2-b^2)=0$$

ガ等根ヲ有スルタメノ條件ヲ求ムベシ. 依テ

$$a^4\beta^2m^2=a^2(\beta^2-b^2)(m^2a^2+b^2),$$

之ヲ簡單ニスルトキハ

$$\beta^2=m^2a^2+b^2 \tag{3}$$

ヲ得. 之ヨリβヲ出シテ(1)ニ入ルルトキハ

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2} \tag{4}$$

トナル. コレモ亦一ノ切線ノ公式ナリ. 右邊ニ複號ヲ有スルハ,x軸ト同一ノ角ヲナス切線ガ二本アルコトヲ示ス.

與ヘラレタル曲線ガ双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ナルトキハ,(3),(4)ノ代リニ夫々

$$\beta^2=m^2a^2-b^2, \tag{3'}$$

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2} \tag{4'}$$

ヲ得. (4′)ニ於テ $m=\pm\frac{b}{a}$ トスルトキハ,此式ハ$y=\pm\frac{b}{a}x$トナリ,即チ漸近線トナル. モシmノ絶對値ガ$\frac{b}{a}$ヨリ小ナラバ(4′)ハ虚直線ヲ表ハス. 故ニ双曲線ニ於テハ任意ノ方向ヲ指定スルトキハ,ソノ方向ヲ有スル切線ハ必ズシモ實在セズ.

51. 一點ヨリ引ケル切線.

與ヘラレタル一點P(x_1, y_1)ヨリ楕圓又ハ双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求メントス. 先ヅ*ノ切線ノ方程式ヲ

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2\pm b^2}$$

ナル形ニ取ルナラバ,此ハ $P(x_1, y_1)$ ヲ過ラザル可ラザルニヨリ,

$$y_1=mx_1\pm\sqrt{m^2a^2\pm b^2}$$

ナル關係ガ成立セザル可ラズ. 之ヲ變形シテ

$$(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2\mp b^2)=0 \qquad (2)$$

トナル. 此ヲ m ニツイテ解キ,ソノ二根ヲ各

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ニ代入スレバ求ムル切線ノ式ヲ得.

方程式(2)ノ判別式ハ

$$D=4x_1^2y_1^2-4(x_1^2-a^2)(y_1^2\mp b^2)$$

$$=\pm 4a^2b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)$$

ナリ. 故ニ橢圓ニ於テハ

$$D_1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0$$

ナル時ニ限リ,又双曲線ニ於テハ

$$D_2=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0$$

ナル時ニ限リ,何レモ點Pヨリ實ニシテ相異レル二ツノ切線ヲ引キ得ベク,コノ時點Pハ曲線ノ **外ニアリ** ト云フ. 之ニ反シテ $D_1<0$ 又ハ $D_2>0$ ナルトキハ,實ナル切線ヲ引クヲ得ズ,コノトキPハ曲線ノ **内ニアリ** トイフ.

$D_1=0$ 又ハ $D_2=0$ ナル時ハ丁度Pガ曲線上ニアリ,コノトキハ二本ノ切線ハ實ニシテ相合ス.

Pヨリ引ケル二ツノ切線ガ相互ニ垂直ニナルタメニハ,(2)ノ二根ノ積ガ -1 ニ等シカラザル可ラズ. 即チ

$$\frac{y_1^2\mp b^2}{x_1^2-a^2}=-1$$

ナラザル可ラズ. 故ニ一點ヨリ(1)ナル曲線ニ實ナル切線ヲ引キ相互ニ垂直ナラシムル時ハ,ソノ點ノ軌跡ハ

$$\frac{y^2\mp b^2}{x^2-a^2}=-1$$

即チ

$$x^2+y^2=a^2\pm b^2$$

ナリ. 故ニ此軌跡ハ一般ニ一ノ圓ニシテ,之ヲ **準圓** トイフ. 橢圓ニ於テハ準圓ハ常ニ實在スレドモ,双曲線ニ於テハ $a>b$ ナル時ニ限リ實圓ニシテ, $a=b$ ノトキハ點圓トナリ, $a<b$ ナルトキハ虛圓トナル.

52. 極及ビ極線.

一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ,曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ニ引ケル二ツノ實又ハ虛ナル切線ノ切點ヲ Q, R トシ,ソノ一ツナルQノ座標ヲ (x_2, y_2) トスルトキハ,Qニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_2x}{a^2}\pm\frac{y_2y}{b^2}=1$$

ナルベシ. 而シテ此切線ハ $P(x_1, y_1)$ ヲ過ルニヨリ

$$\frac{x_2x_1}{a^2}\pm\frac{y_2y_1}{b^2}=1 \tag{2}$$

ナル關係ガ成立セザル可ラズ. 同樣ニRノ座標ヲ (x_3, y_3) トスルナラバ,

$$\frac{x_3x_1}{a^2}\pm\frac{y_3y_1}{b^2}=1 \tag{3}$$

ナル關係モ成立スベシ.

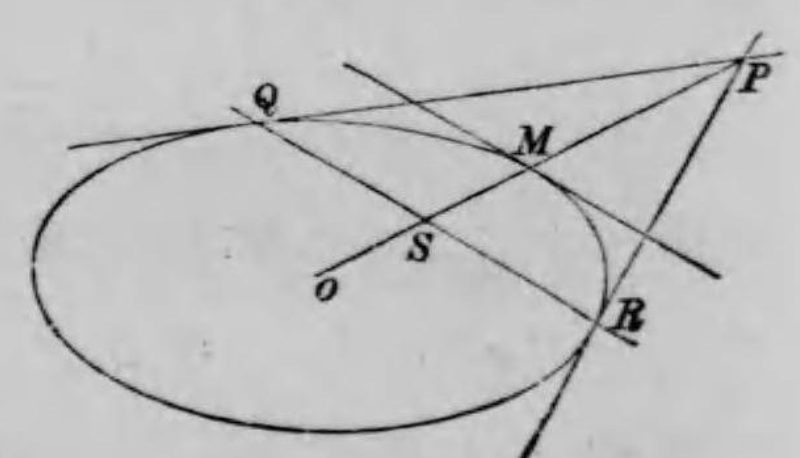
サテ(2),(3)ハ點Q, Rガ共ニ一ツノ直線

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1 \tag{4}$$

ノ上ニアルコトヲ示ス,故ニ(4)ハ直線QRヲ表ハスモノナラザル可ラズ. 此理ハ切點Q, Rノ虛實ニ關ハラズ眞ナリ. 直線(4)ヲP點ノ(1)ニ關シテノ **極線** ト云ヒ,Pヲ此直線ノ **極** ト云フ. Pガ曲線上ノ點ナルトキハ,ソノ極線ハ切線トナル.

極及ビ極線ニ關シテハ圓ノ場合ニ述ベタルト全ク同樣ノ諸性質(第34節)ガ成立ス. 繁ヲ厭ヒテコヽニ再ビ叙セズ. 唯極ト極線トノ相互ノ位置ニツイテ一言スベシ.

第六十七圖



Pト中心Oトヲ結ビ付ケ,直線POト曲線トノ交點ヲM,極線QRトノ交點ヲSトス. 然ルトキハ,POノ方程式ハ

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}$$

ナルヲ以テ,之ト(1)又ハ(4)トヲ組合ハシテ解クトキハM, Sノ座標ヲ得. 即チ

$$M\left(\pm\frac{x_1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}}},\ \pm\frac{y_1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}}}\right),$$

$$S\left(\frac{x_1}{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}},\quad \frac{y_1}{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}}\right)$$

ナリ. 依テMニ於ケル切線ヲ考フレバ,

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=\pm\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}}$$

ニシテ,即チPノ極線ニ平行ナルヲ知ル. 又

$$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$

$$OM=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}}},$$

$$OS=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}}$$

ナルヲ以テ,明カニ

$$OP.\,OS=OM^2$$

ナル關係アリ. コレ即チ圓ノ場合ニ於テ第33節ニ述ベタル性質ニ相當スルモノナリ.

53. 共軛直徑.

與ヘラレタル曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ニ於テ,x軸ト一定ノ角αヲナス弦ノ中點ノ軌跡ハ,曲線ノ中心ヲ通リ

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y\sin\alpha}{b^2}=0 \qquad (2)$$

ナル直線トナルコトハ第49節ニ於テ證明シタリ. 此事ハ或ハマタ獨立ニ次ノ如クニモ證明セラル.

今 $m=\tan\alpha$ トセバ,x軸トαナル角ヲナス一ツノ直線ノ方程式ハ

$$y=mx+\beta \qquad (3)$$

トナル. (3)ト(1)トノ二ツノ交點ノ橫線ハ

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{(mx+\beta)^2}{b^2}=1$$

即チ $$(m^2a^2\pm b^2)x^2+2ma^2\beta x+a^2(\beta^2\mp b^2)=0$$

ノ二根ナリ. 故ニ(3)ニヨリテ作ラルヽ弦ノ中點ヲ$C(x_0, y_0)$トスルトキハ,x_0ハ此方程式ノ二根ノ和ノ半分ナルベキニヨリ

$$x_0=-\frac{ma^2\beta}{m^2a^2\pm b^2},$$

又之ヲ(3)ニ入レテ

$$y_0=\pm\frac{b^2\beta}{m^2a^2\pm b^2}$$

ヲ得. 此二式ノ間ニβヲ消去スルトキハ,一定ノ方向ヲ有スル弦ノ中點ノ軌跡ヲ得ベシ. 即チ各邊相除シテ,同時ニ x_0, y_0 ヲ流通座標トナシ, x, y ト書キ直ストキハ

$$\frac{y}{x}=\mp\frac{b^2}{ma^2} \qquad (4)$$

トナル. (4)ハ(2)ト同一ノ直線ヲ表ハス.

之ニ因リテ,曲線(1)ニ於テ,二ツノ直徑

$$y=mx \quad 及ビ \quad y=m'x$$

アルトキ,ソノ方向係數ノ間ニ

$$m'=\mp\frac{b^2}{ma^2}$$

即チ

$$mm'=\mp\frac{b^2}{a^2} \qquad (5)$$

ナル關係アルトキハ,前者ニ平行ナルスベテノ弦ハ皆後者ニヨリテ二等分セラルヽコトヽナルベシ. 然ルニ(5)ハmトm'トヲ交換スルモナホ成立スルニヨリ,結局斯クノ如キ關係ヲ有スル二ツノ直徑ニ於テハ,ソノ一方ニ平行ナル弦ハ常ニ他ノ一ツニテ二等分セラルヽコトヽナル. カクノ如キ二ツノ直徑ヲ相互ニ**共軛ナル直徑**ト稱ス.

楕圓ニ於テハ(5)ノ右邊ニ負號ヲ取ルベキニヨリ,mトm'トハ相異ナル符號ヲ有ス,從テ共軛直徑ノ一ハx軸ト鋭角ヲナシ,他ノ一ハ鈍角ヲナス. 此二ツノ直徑ハ一般ニハ相互ニ垂直ナラズ. ソノ垂直ナルハ共軛直徑ガ丁度主軸ト一致セル場合,又ハ楕圓ガ圓ナル特別ノ場合ニ限ル. 又共軛直徑ハ必シモ主軸ニツイテ對稱ナル位置ニアラズ. ソノ對稱ナルハ

$$m=-m'=\frac{b}{a}$$

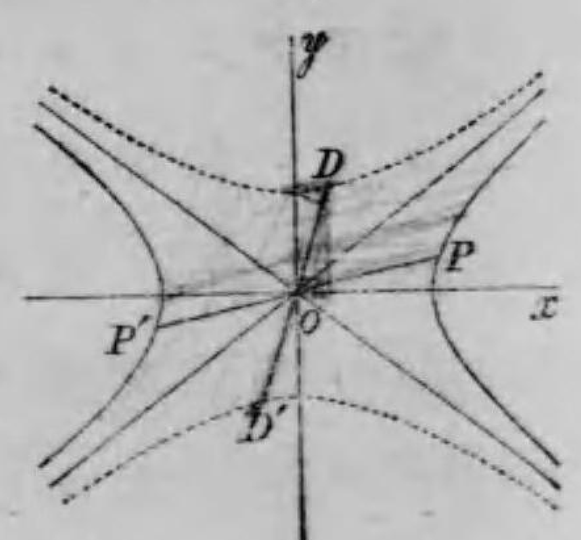
ナル時,即チ二ツノ直徑ガ各長軸ト短軸トノ端ヲ結ブ弦ニ平行ナル場合ニ限ル.

双曲線ニ於テハmトm'トハ同ジ符號ヲ有スルヲ以テ,共軛直徑ハ共ニx軸ト鋭角ヲナスカ,又ハ共ニ鈍角ヲナス. 而シテ

$$m\gtrless\frac{b}{a}\quad ナルニ從テ\quad m'\lessgtr\frac{b}{a}$$

ナルヲ以テ,一ツノ漸近線ノ兩側ニ一本ヅヽアリ. 故ニ一ツハ曲線ト交ハレドモ,他ノ一ハ交ハラズ. 然レドモ便宜上ソノ曲線ト交ハラザル直徑ニツイテモ,ソレガ元ノ双曲線ト共軛ナル双曲線ニ交ハル點ヲ指シテソノ直徑ノ端ト呼ブコトニ規約ス. 第六十八圖ニ於テP, P'ハ一ノ直徑,D, D'ハ之ニ

第六十八圖



共軛ナル直徑ノ兩端ナリ. mガ$\frac{b}{a}$ニ近ヅクニ從テm'モ亦$\frac{b}{a}$ニ近ヅクベシ. 故ニOPガ漸近線ニ近ヅクトキハ,ODモ亦反對ノ側ヨリ之ニ近ヅク. ソノ極限ニ於テ兩直徑ハツイニ共ニ同一ノ漸近線ニ合スベシ. 故ニ**漸近線ハソレ自身ニ共軛ナリ**ト見做スベキモノナリ.

共軛直徑ハ楕圓ニ於テモ双曲線ニ於テモ,一般ニハ相互ニ垂直ナラズト雖,トニカク共ニ曲線ノ中心ヲ過リ,且ソノ一方ニ平行ナル弦ガ悉ク他ノ一方ニテ二等分セラルヽ性質アルヲ以テ,ソノ一組ヲ取リテ之ヲ座標軸ニ用フレバ,曲線ノ方程式ハ矢張

$$\frac{x^2}{a_1^2}\pm\frac{y^2}{b_1^2}=1 \tag{6}$$

ナル形ヲ有セザル可ラズ. コヽニa_1及ビb_1ハ各直徑ノ半分ノ長サニシテ,此新ラシキ座標軸ニツイテ,通常ノa及ビbト同樣ノ意味ヲ有スルモノナリ.

何トナレバ原點ハ矢張リ中心ナルヲ以テ方程式ハ兎ニ角

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2-c'=0$$

トナル,而シテ二直線ニ分解セラレザルヲ以テc'ハ零ニアラズ. xニ或ル値ヲ與フレバyノ二根ハ絶對値等シク符號反セザル可カラズ,故ニ$h'=0$. 因リテ

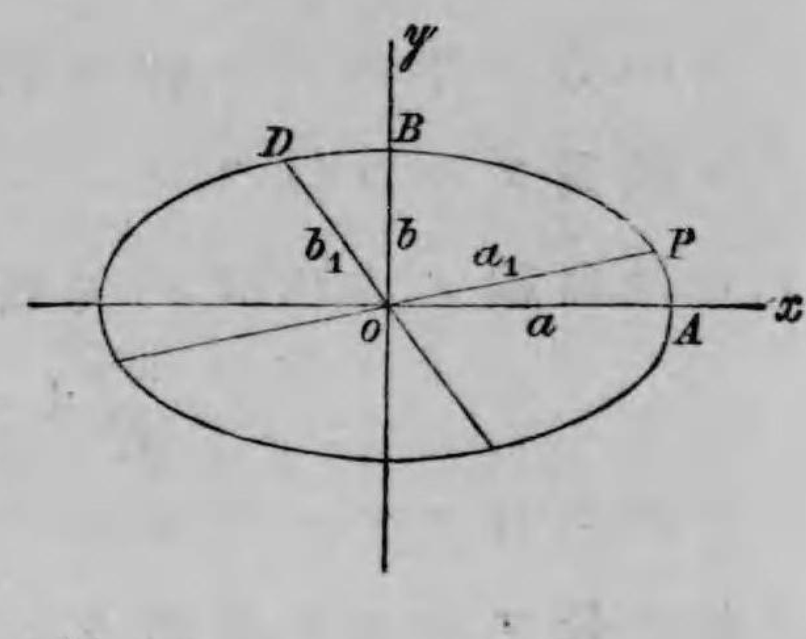
$$\frac{x^2}{\frac{c'}{a'}}+\frac{y^2}{\frac{c'}{b'}}=1$$

トナル. 楕圓ニテハ共軛ナル直徑ハ各曲線ト二點ニ於テ會ス,故ニ $\dfrac{c'}{a'}$, $\dfrac{c'}{b'}$ ハ共ニ正ナリ,双曲線ニアリテハ一ツハ交ハリテ他ハ交ハラズ故ニ交ハル方ヲ x 軸トスルトキハ $\dfrac{c'}{a'}>0$, $\dfrac{c'}{b'}<0$ ナリ. 故ニ遂ニ

$$\frac{x^2}{a_1^2}\pm\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

ノ形トナル.

第六十九圖



主軸ヲ座標軸トシテ得タル種々ノ公式等ノ中,座標軸ガ直交ナル特別ノ事情ヲ利用セザリシモノニ對シテハ,一双ノ共軛直徑ヲ軸トセル場合ニモ同樣ノ形式ノモノガ成立スベシ. タトヘバ曲線(6)ノ上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_1x}{a_1^2}\pm\frac{y_1y}{b_1^2}=1$$

ナリ. 又任意ノ一點 (x_1, y_1) ノ(6)ニ關スル極線モ之ト同ジ式ヲ有ス. 然レドモ曲線(6)上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル法線ノ方程式ハ一般ニ

$$\frac{a_1^2x}{x_1}\mp\frac{b_1^2y}{y_1}=a_1^2\mp b_1^2$$

ナリト云フヲ得ズ. 何トナレバ之ヲ出スタメニハ二直

線ガ相互ニ垂直ナルタメノ條件ヲ用ヒザル可ラズ,而シテ此條件ハ直交軸ナル場合ト斜交軸ノ場合ト同一ナラザレバナリ.

共軛直徑ヲ座標軸ニスルト否トニ關ハラズ,一ノ直徑ニヨリテ二等分セラルヽ弦ヲ稱シテソノ直徑ノ **縦線** ト云フコトアリ.

【例】1. 楕圓又ハ双曲線ニ於テ,一ノ直徑ノ端ニ於ケル切線ハ之ニ共軛ナル直徑ニ平行ナルコトヲ示セ.

與ヘラレタル直徑ヲ x 軸トシ,之ニ共軛ナル直徑ヲ y 軸トス. 曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a_1^2}\pm\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

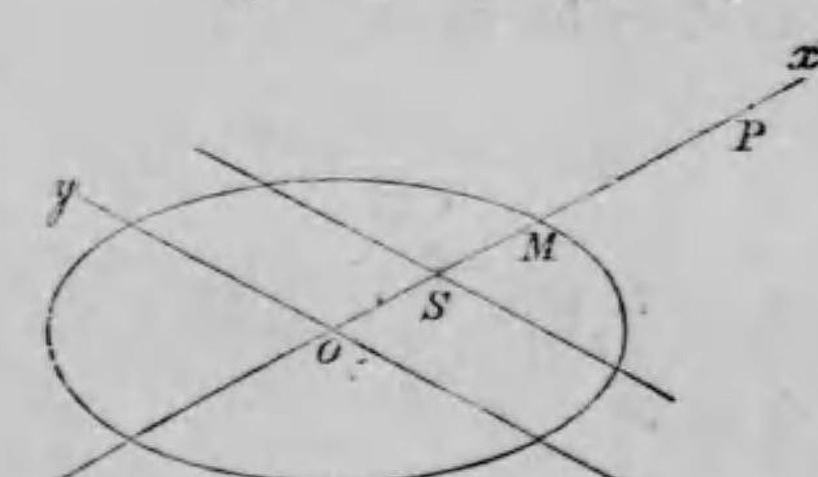
トナリ,與ヘラレタル直徑ノ端ハ $(\pm a_1, 0)$ ナリ. 故ニソノ端ニ於ケル切線ハ

$$\frac{\pm a_1x}{a_1^2}=1 \quad 即チ \quad x=\pm a_1$$

ニシテ y 軸ニ平行ナリ.

【例】2. 共軛直徑ヲ座標軸ニ取ルコトヲ利用シテ第52節ノ結果ヲ求メヨ.

第七十圖



P ヲ與ヘラレタル一點トス. P ト曲線ノ中心 O トヲ結ブ直線ヲ x 軸トシ,之ニ共軛ナル直徑ヲ y 軸トス. 然ルトキハ曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a_1^2}\pm\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

ノ形ニシテ,P ノ座標ハ $(x_1, 0)$ トスルヲ得ベシ. コヽニ $x_1=\mathrm{OP}$ ナリ. 從テ P ノ極線ノ方程式ハ

$$\frac{x_1 x}{a_1^2}=1$$

トナル. 今x軸ガ曲線及ビ極線ト交ハル點ヲ夫々M及ビSトスルナラバ,

$$OM=a_1, \qquad OS=\frac{a_1^2}{x_1}$$

ナルコト明カナリ. 故ニ一點Pノ極線ハOPニ共軛ナル直徑ニ平行.即チ例.1.ニヨリMニ於ケル切線ニ平行ニシテ,且 OP.OS=OM^2 ナル如キ位置ニアリ.

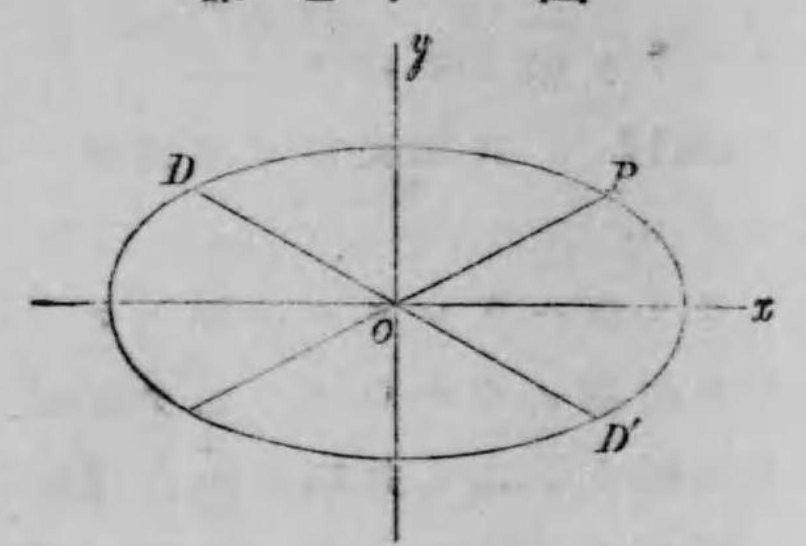
54. 共軛直徑ニ關スル定理.

(I) P(x_1, y_1)ヲ橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ノ上ノ一點トシ, OPニ共軛ナル直徑ノ一端Dノ座標(x_2, y_2)ヲ求メントス.

第七十一圖



直徑OPノ方程式ハ

$$y=\frac{y_1}{x_1}x$$

ニシテ,之ニ共軛ナルODノ方程式ハ53節(5)ニヨリ

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x \qquad (2)$$

ナリ. (1)ト(2)トノ交點ヲ求メバDヲ得ベシ. 依テ(2)ヲ書キ直シテ

$$\frac{ay}{bx}=-\frac{bx_1}{ay_1}$$

トナシ,此兩邊ヲ自乘シ且兩邊ニ1ヲ加ヘテ

$$\frac{a^2y^2+b^2x^2}{b^2x^2}=\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{a^2y_1^2} \qquad (3)$$

ヲ得. 然ルニ(1)ヨリ

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

ヲ得ベク,又(x_1, y_1)ハ此橢圓上ニアルヲ以テ

$$a^2y_1^2+b^2x_1^2=a^2b^2$$

ナリ. 故ニ結局(3)ハ

$$b^2x^2=a^2y_1^2$$

トナル. 之ヲ解キテ

$$x=\pm\frac{a}{b}y_1,$$

從テ又(2)ヨリ

$$y=\mp\frac{b}{a}x_1$$

ヲ得. 故ニ

$$\begin{cases} x_2=-\dfrac{a}{b}y_1 \\ y_2=\dfrac{b}{a}x_1 \end{cases} \quad 又ハ \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{a}{b}y_1 \\ y_2=-\dfrac{b}{a}x_1 \end{cases}$$

ナリ. 一組ハD, 他ノ一組ハD'ニ相當ス.

モシP(x_1, y_1)ヲ双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

上ノ一點トシテ同様ノ問題ヲ解カンニハ, OPニ共軛ナル直徑ガ(4)ノ共軛双曲線

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

ト交ハル點ヲ D(x_2, y_2) トスベシ. 然ルトキハ OP ノ方程式ハ前ノ如ク

$$y=\frac{y_1}{x_1}x$$

ニシテ, OD ノ方程式ハ

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x$$

ナリ. 之ヲ書キ直シテ

$$\frac{ay}{bx}=\frac{bx_1}{ay_1}$$

トナシ,兩邊ヲ自乘シテ各邊ヨリ 1 ヲ減ズレバ

$$\frac{a^2y^2-b^2x^2}{b^2x^2}=\frac{b^2x_1^2-a^2y_1^2}{a^2y_1^2} \qquad (6)$$

ヲ得. 然ルニ(5)ヨリ

$$a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2,$$

又 (x_1, y_1) ハ(4)ノ上ニアルヲ以テ

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$$

ナルガ故ニ,(6)ヨリ

$$b^2x^2=a^2y_1^2$$

ヲ得. 之ヨリ

$$x=\pm\frac{a}{b}y_1,$$

從テ

$$y=\pm\frac{b}{a}x_1$$

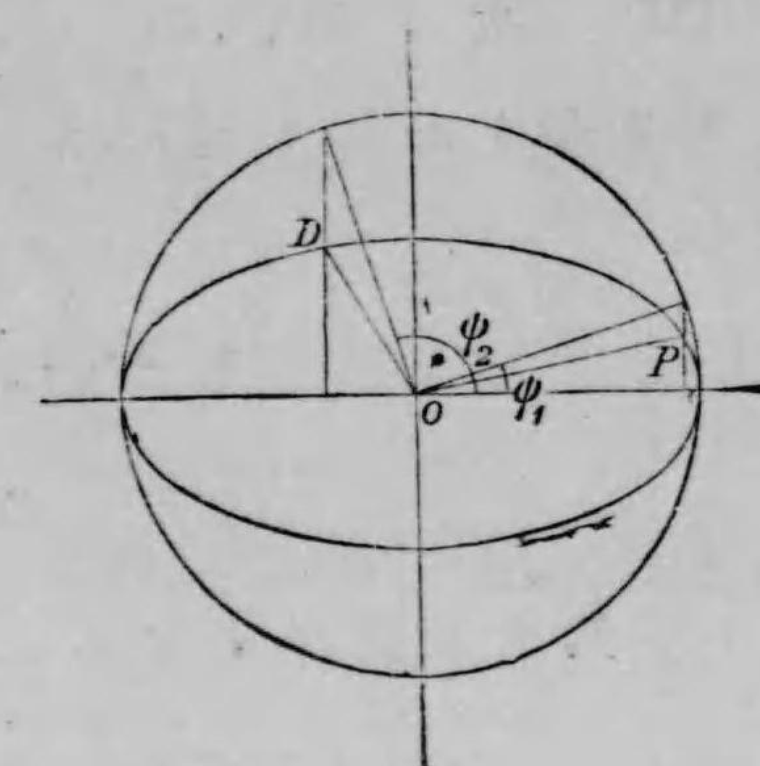
ヲ得. 故ニ

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{a}{b}y_1 \\ y_2=\dfrac{b}{a}x_1 \end{cases} \quad 又ハ \quad \begin{cases} x_2=-\dfrac{a}{b}y_1 \\ y_2=-\dfrac{b}{a}x_1 \end{cases}$$

ナリ.

(II) 楕圓ニ於テ上ニ述べタル P, D ノ心差角ヲ夫々 ϕ_1, ϕ_2 トスルナラバ,

第七十二圖



$$x_2=-\frac{a}{b}y_1$$

ナル關係ヨリシテ

$$a\cos\phi_2=-\frac{a}{b}b\sin\phi_1$$

即チ $\cos\phi_2=-\sin\phi_1$

ヲ得. 同樣ニ又

$$\sin\phi_2=\cos\phi_1$$

ナリ. 依テ

$$\phi_2=\phi_1+90^\circ$$

ナル關係アルコトヲ知ル.

双曲線ニ於テ ϕ_1, ϕ_2 ヲ夫々 P, D ノ(4),(5)ニ關シテ心ノ差角トセバ,

$$\begin{cases} x_1 = a\sec\phi_1 \\ y_1 = b\tan\phi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a\tan\phi_2 \\ y_2 = b\sec\phi_2 \end{cases}$$

ナルヲ以テ,

$$\tan\phi_2 = \tan\phi_1$$

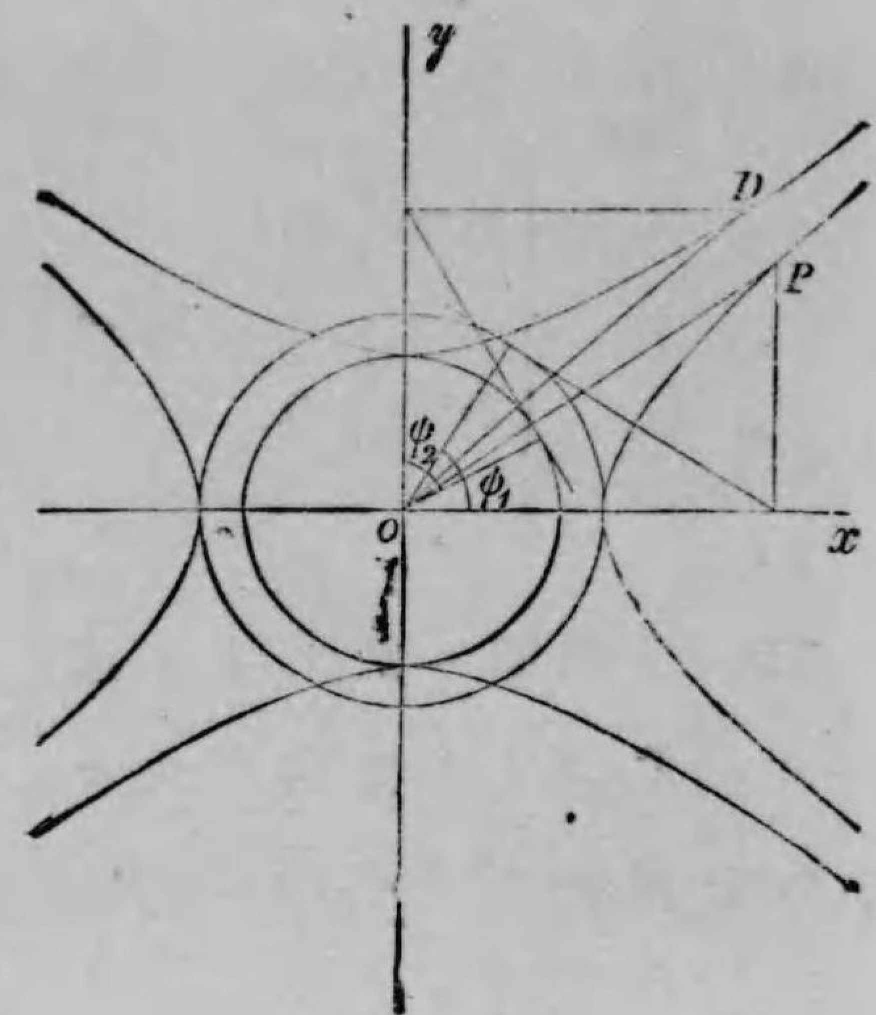
$$\sec\phi_2 = \sec\phi_1$$

ヲ得. 依テ

$$\phi_2 = \phi_1$$

ナルヲ知ル.

第七十三圖



(III) 次ニ OP, OD ノ長サヲ夫々 a_1, b_1 トスルトキハ,

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$b_1^2 = \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2$$

ナリ. 然ルニ楕圓ノ場合ニハ

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$$

ナルヲ以テ,

$$a_1^2 = x_1^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) = b^2 + e^2 x_1^2$$

$$b_1^2 = (a^2 - x_1^2) + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 = a^2 - e^2 x_1^2$$

トナル. 故ニ相加フレバ

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

ナル關係ヲ得.

双曲線ノ場合ニハ

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$$

ナルヲ以テ,

$$a_1^2 = x_1^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) = e^2 x_1^2 - b^2$$

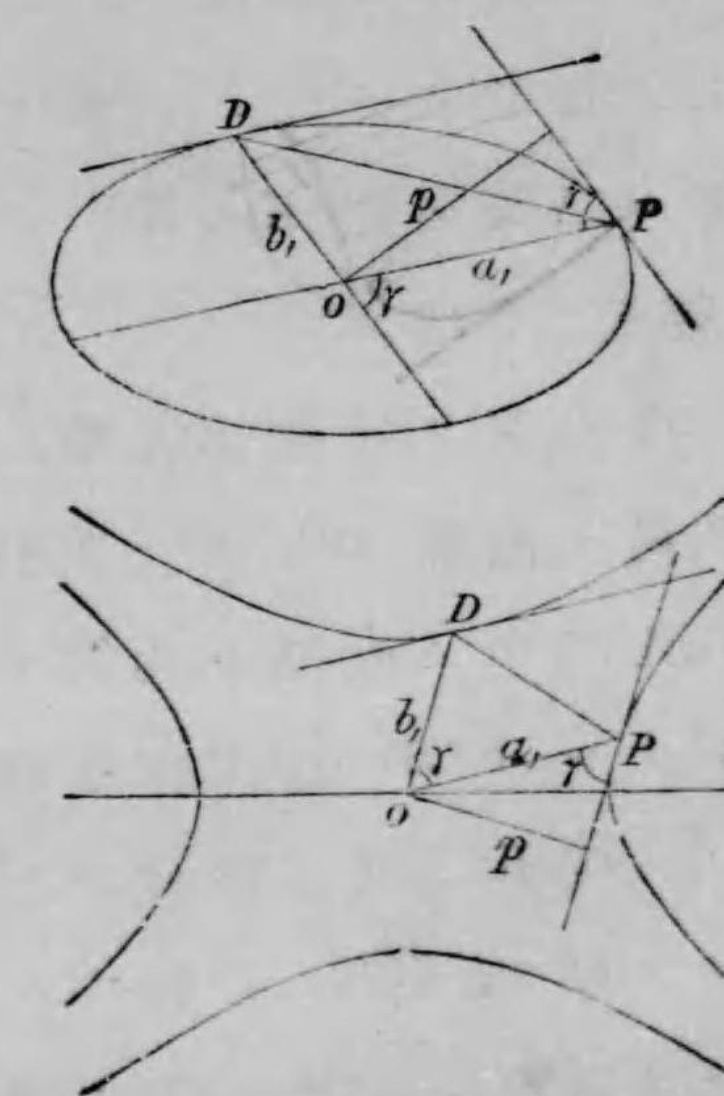
$$b_1^2 = (x_1^2 - a^2) + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 = e^2 x_1^2 - a^2$$

ナリ. 故ニ相減ジテ

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$$

トナル.

第七十四圖



(IV) Pニ於ケル切線ヲ作ラバソノ方程式ハ

$$\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

ナルヲ以テ,中心ヨリ之ニ下セル垂線ノ長サヲ p トスルトキハ,

$$p = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4}}}$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{\dfrac{b^2 x_1^2}{a^2} + \dfrac{a^2 y_1^2}{b^2}}}$$

$$=\frac{ab}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}}$$

ナリ. 故ニ

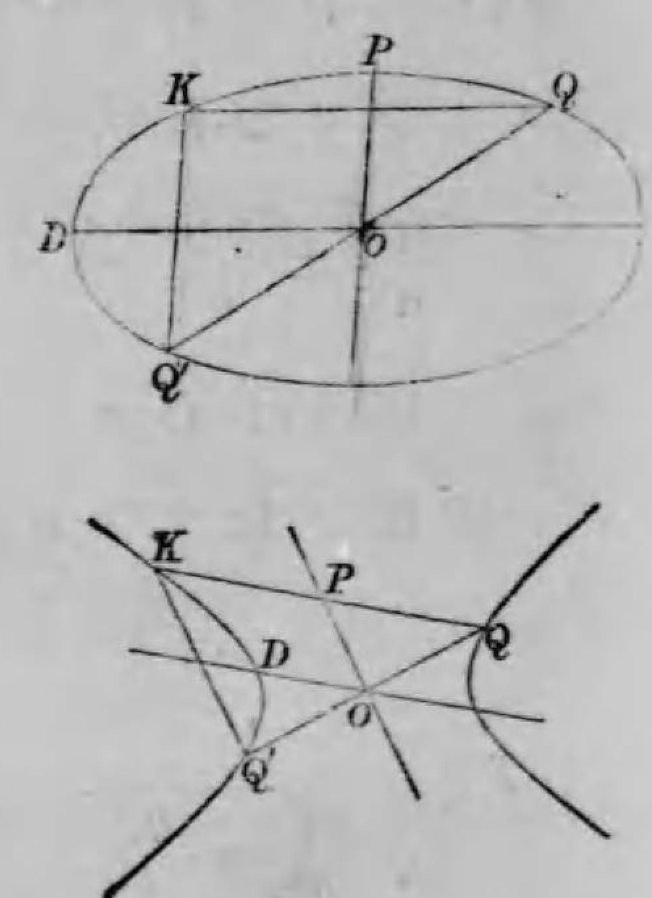
$$p=\frac{ab}{b_1}$$

トナル. 今 OP ト OD ノナス角ノ一ツヲγトスルナラバ

$$\sin\gamma=\frac{p}{a_1}=\frac{ab}{a_1b_1}$$

即チ $a_1b_1\sin\gamma$ ハ常ニ一定ニシテ ab ニ等シ. 故ニ OP, OD ヲ相隣レル二邊トスル平行四邊形ノ面積ハ一定ナリ.或ハ三角形 OPD ノ面積ハ一定ナリト云フヲ得ベシ.

第七十五圖



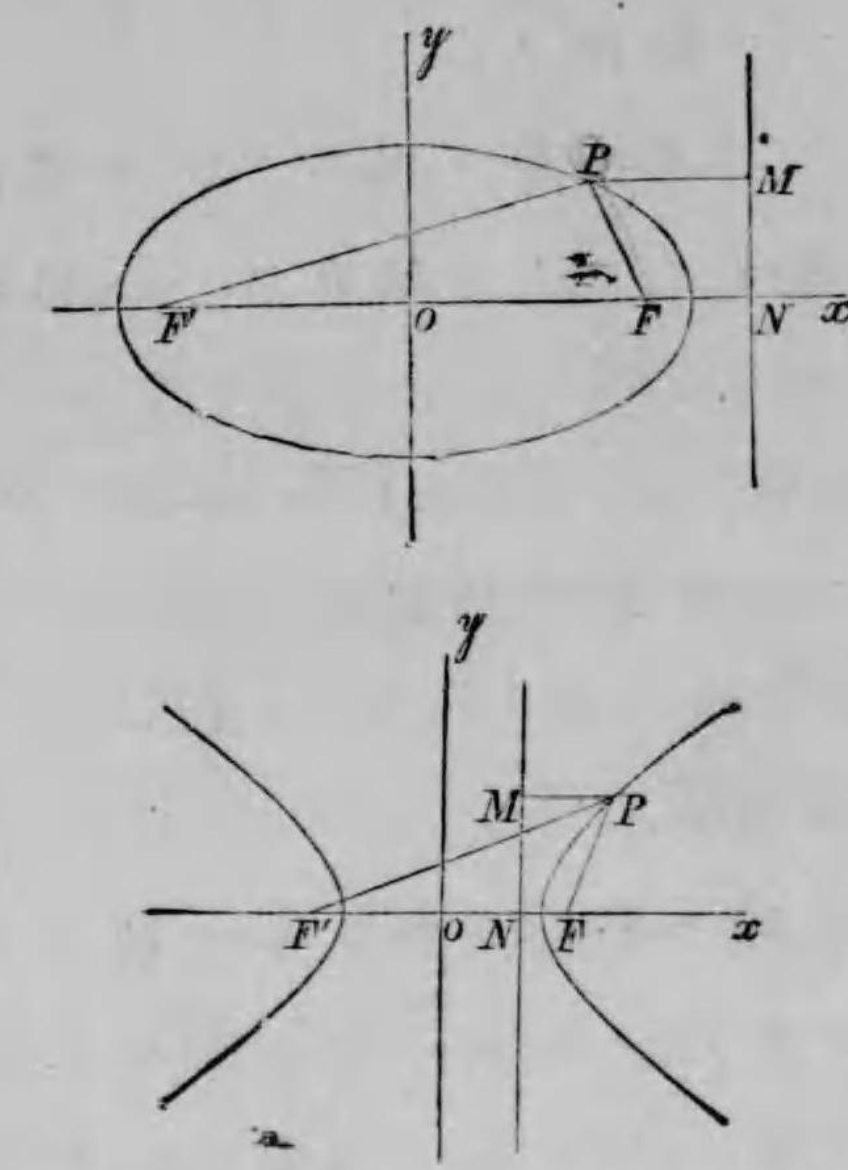
(V) 楕圓又ハ双曲線ニ於テ, 一ツノ直徑ノ兩端 Q, Q' ヲ曲線上ノ任意ノ一點 K ニ結ビ付ケテ得ル二ツノ弦 KQ, KQ' ヲ相互ニ**補弦**ト稱ス.

今一双ノ補弦 KQ, KQ' ノ中點ヲ過ル直徑 OP, OD ヲ引クトキハ,此二ツノ直徑ハ共軛ナリ. 何トナレバ OD ハ OP ニ平行ナル一ツノ弦 KQ' ヲ二等分スル直徑ナルヲ以テ, KQ' ニ平行ナルスベテノ弦ノ中點ノ軌跡タルベキ直徑ハ即チ OD ト同ジモノナラザル可ラズ.

55. 焦點ニ關スル定理.

楕圓及ビ双曲線ガ各二ツヅヽノ焦點及ビ準線ヲ有スルコトハ前章ニ述ベタルガ如シ. 焦點ノ座標ハ $(\pm ae, 0)$ ニシテ,準線ノ方程式ハ $x=\pm\frac{a}{e}$ ナリ.

第七十六圖



(I) 楕圓又ハ双曲線ニ於テ, F$(ae, 0)$ ヲ一ノ焦點トシ, MN ヲ之ニ相應スル準線

$$=\frac{a}{e}$$

トス. 然ルトキハ曲線上ノ正ナル横線ヲ有スル一點 P(x_1, y_1) ヨリ準線ニ至ル距離ハ明カニ

$$\pm\left(\frac{a}{e}-x_1\right)$$

ニシテコヽニ楕圓ニ於テハ正號ヲ取リ,双曲線ニ於テハ負號ヲ取ルベキナリ. 從テ P ヨリ F ニ至ル距離ハ,第44節ニヨリ,之ヲ e 倍セルモノニシテ,

$$\overline{PF}=\pm(a-ex_1)$$

ナラザル可ラズ. 同様ニシテ,他ノ焦點 F'$(-ae, 0)$ ヲ取ラ

バ,橢圓ニ於テモ双曲線ニ於テモ

$$\overline{\mathrm{PF'}}=a+ex_1$$

トナル. 依テ,橢圓ニ於テハ

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a,$$

双曲線ニ於テハ

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$$

ナル關係ヲ得.

Pノ横線ガ正ナラザル場合ト雖,橢圓ニツイテハ上ノ通リノコトガ成立ス. 双曲線ニ於テハx_1ガ負ナルトキハ,

$$\overline{\mathrm{PF}}=a-ex_1 \qquad \overline{\mathrm{PF'}}=-(a+ex_1)$$

ナルヲ以テ,結局

$$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2a$$

トナル.

即チ橢圓ニ於テハ曲線上ノ一點ヨリ二ツノ焦點ニ至ル距離ノ和ガ一定ニシテ,双曲線ニ於テハソノ差ガ一定ナリ. モシ點ガ曲線上ニアラザルトキハ此等ノ關係ナキコト明カナルヲ以テ, **二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ和又ハ差ガ一定ナル如キ點ノ軌跡ハ其二點ヲ焦點トスル橢圓又ハ双曲線ナリ**, ト云フコトヲ得ベシ.

PF, PF′ 等ノ各ノ長サガ上ニ述ベタル如キ値ヲ有スルコトハ各種ノ問題ニ屢引用セラルヽ重要ナル結果ナレ

バ,次ニ更ニ第44節ニヨラザル證明ヲ擧ゲン.

$$\overline{\mathrm{PF}}^2=(x_1-ae)^2+y_1^2$$
$$=x_1^2-2aex_1+a^2e^2+y_1^2,$$

然ルニ (x_1, y_1) ハ曲線上ノ點ナルヲ以テ

$$y_1^2=\pm\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)$$
$$=(1-e^2)(a^2-x_1^2)$$
$$=a^2-x_1^2-e^2a^2+e^2x_1^2,$$

故ニ $$\overline{\mathrm{PF}}^2=a^2-2aex_1+e^2x_1^2$$
$$=(a-ex_1)^2$$

從テ $$\overline{\mathrm{PF}}=\pm(a-ex_1),$$

而シテ橢圓ニ於テハ $ex_1<a$ ナルヲ以テ正號ヲ取リ,双曲線ニ於テハ, $x_1>0$ ナルトキハ $ex_1>a$ ナルヲ以テ負號ヲ取リ, $x_1<0$ ナルトキハ $-ex_1>0$ トナルヲ以テ勿論正號ヲ取ルベシ.

$\overline{\mathrm{PF'}}$ モ同様ニ求ムルコトヲ得. 線分 PF, PF′ 等ヲ **焦點半徑** ト呼ブコトアリ. (焦点距離)

(II) 上ニ得タル結果ニヨリ,

$$\overline{\mathrm{PF}}.\overline{\mathrm{PF'}}=\pm(a^2-e^2x_1^2)$$

ナル關係ヲ得. 然ルニ前節(III)ノ計算ニヨレバ此右邊ハ OP ニ共軛ナル半徑 OD ノ長サノ自乘 b_1^2 ニ等シ. 故ニ

$$\overline{\mathrm{PF}}.\overline{\mathrm{PF'}}=b_1^2.$$

(III) 曲線上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線

$$\frac{x_1x}{a^2} \pm \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

ニ,一ツノ焦點 $F(ae, 0)$ ヨリ下セル垂線ヲ FT トシ,今ソノ長サヲ切線ニ對シテ中心ノアル側ヨリ下セルモノヲ正トシテアラハサバ

$$FT = \frac{1 - \frac{aex_1}{a^2}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = \frac{1 - \frac{ex_1}{a}}{\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{b^2x_1^2}{a^2} + \frac{a^2y_1^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{b(a - ex_1)}{b_1}. \qquad (211頁\ IV)$$

ナリ. 同樣ニ $F'(-ae, 0)$ ヨリ下セル垂線 F'T' ヲ求ムルトキハ

$$F'T' = \frac{b(a + ex_1)}{b_1}$$

トナル. 故ニ相乘ジテ,

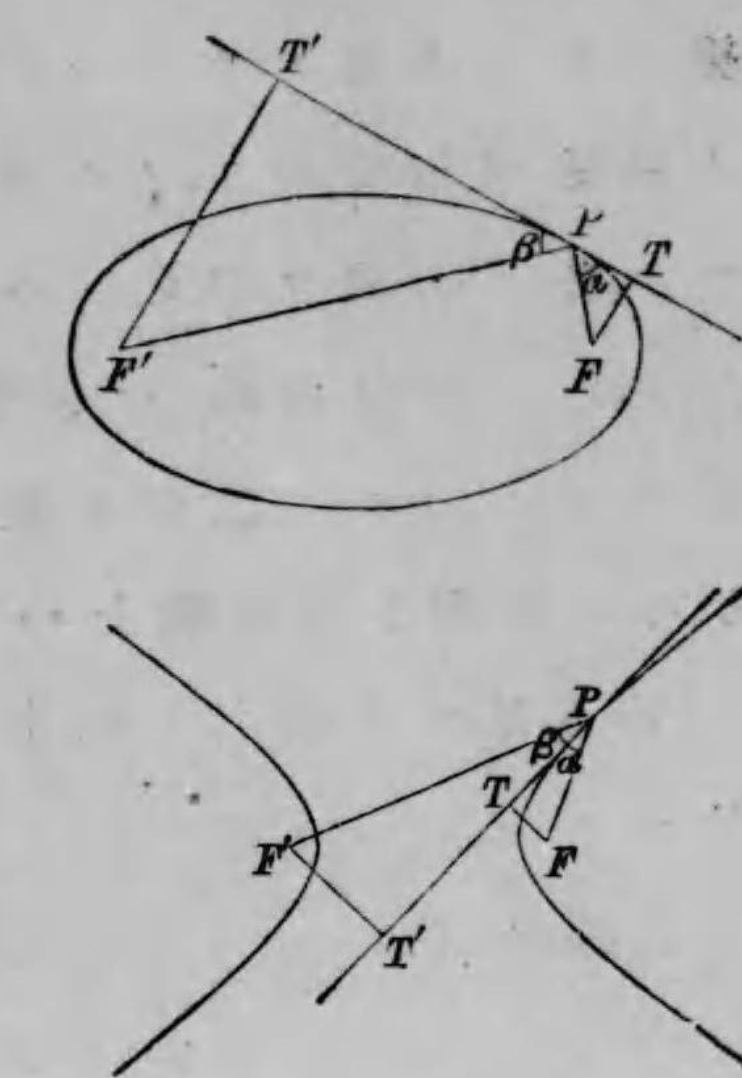
$$FT.\,F'T' = \frac{b^2}{b_1^2}(a^2 - e^2x_1^2)$$

$$= \pm b^2$$

トナル. 楕圓ニ於テハ正號,双曲線ニ於テハ負號ニ相當ス. 蓋シ後者ニ於テハ F ト F' トガ切線ノ反對ノ側ニアルヲ以テ, FT ト F'T' トハ相反セル符號ヲ有スルナリ.

何レニシテモトニカク,曲線上ノ一點ニ於ケル切線ニ,

第七十七圖



二ツノ焦點ヨリ下セル垂線ノ積ハ一定ニシテ短軸又ハ共軛軸ノ半分ノ自乘ニ等シ.

(IV) モシ FT, F'T' ノ長サノ絶對値ヲ考フレバ

$$\overline{FT} = \frac{b}{b_1}|a - ex_1| = \frac{b}{b_1}\overline{PF}$$

$$\overline{F'T'} = \frac{b}{b_1}|a + ex_1| = \frac{b}{b_1}\overline{PF'}$$

ナリ. 依テ今 PF, PF' ガ切線トナス鋭角ヲ夫々 α, β トスルトキハ

$$\sin\alpha = \frac{\overline{FT}}{\overline{PF}} = \frac{b}{b_1}$$

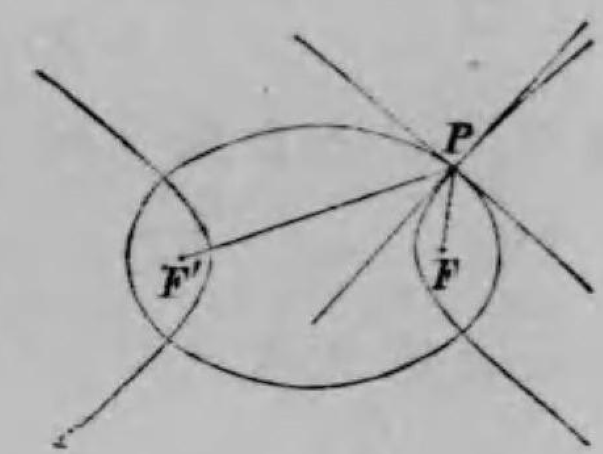
$$\sin\beta = \frac{\overline{F'T'}}{\overline{PF'}} = \frac{b}{b_1},$$

故ニ $\alpha=\beta$ ナラザル可ラズ. 即チ **曲線上ノ一點ニ引ケル焦點半徑ハソノ點ニ於ケル切線ト相等シキ角ヲナスモノナリ. 從テ又同ジ點ニ於ケル法線トモ相等シキ角ヲナスベシ.**

サレバモシ二ツノ焦點 F, F' ヲ共有スル楕圓ト双曲線トノ交點ヲ P トセバ,P ニ於ケル楕圓ノ切線ハ角 FPF' ノ補角ヲ二等分スベク,又 P ニ於ケル双曲線ノ切線ハ角

FPF′ヲ二等分スベシ. 故ニ兩切線ハ互ニ垂直ナリ. 一般ニ二ツノ曲線ガ相交ハリ,ソノ交點ニ於ケル各ノ切線ガ相互ニ垂直ナルトキハ,二ツノ曲線ハ **直交ス** ト稱スルニヨリ, **二ツノ焦點ヲ共有スル橢圓ト双曲線トハ常ニ直交ス** ト云フヲ得ベシ.

第七十八圖



(V) Pヲ曲線上ノ任意ノ點トシテ,Pニ於ケル切線ニFヨリ下セル垂線ノ足Tノ軌跡ヲ求メントス.

切線ノ式ヲ

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2\pm b^2}$$

トス, F(ae, 0)ヨリ之ニ下セル垂線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{1}{m}(x-ae)$$

ナリ. 此兩式ヲ各書キ直シテ

$$(y-mx)^2=m^2a^2\pm b^2$$

$$(my+x)^2=a^2e^2=a^2\mp b^2$$

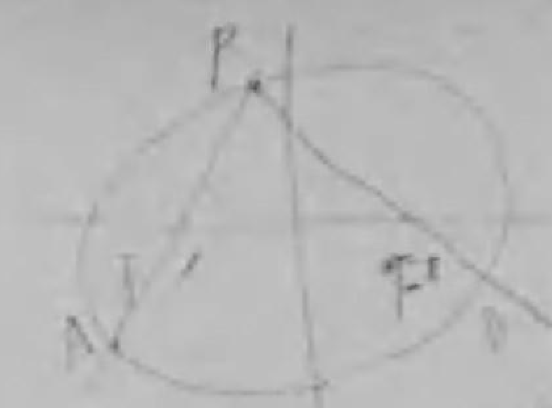
ヲ得. 之ヲ相加ヘテ $(1+m^2)$ ニテ約スルトキハ

$$x^2+y^2=a^2$$

ヲ得. コレ即チ求ムル軌跡ノ方程式ニシテ,補助圓ヲアラハス.

他ノ焦點F′(−ae, 0)ヲ取ルモ同ジ結果ヲ得.

(VI) 焦點F(ae, 0)ノ極線ハ

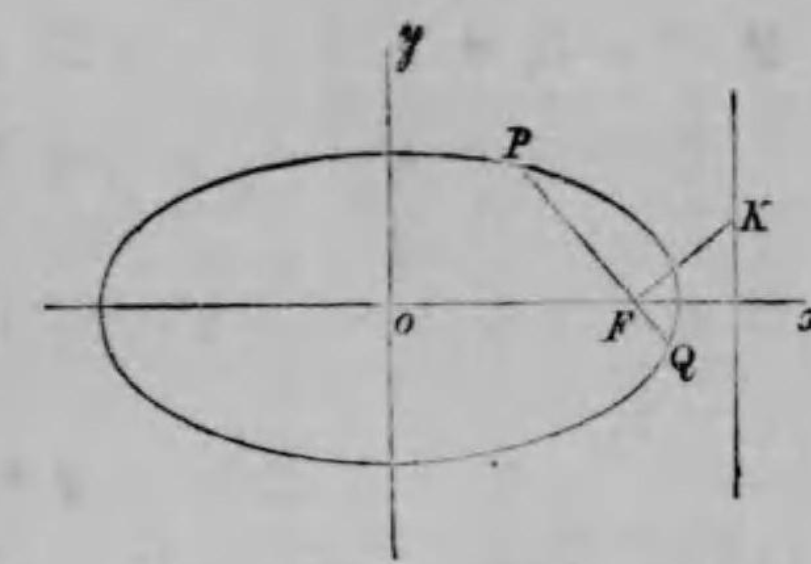


$$\frac{aex}{a^2}=1$$

即チ $x=\dfrac{a}{e}$ (1)

ニシテ,即チFニ相應スル準線ナリ. 同様ニF′(−ae, 0)ノ極線ハ準線 $x=-\dfrac{a}{e}$ トナル.

第七十九圖



今焦點ヲ過ル任意ノ弦ヲPQトシ,其極ヲKトセバ,極及ビ極線ノ相反性ニヨリ,Kハ必ズ準線ノ上ニアリ,之ヲ $\left(\dfrac{a}{e}, y_1\right)$ トス. 然ルトキハPQノ方程式ハ

$$\frac{x}{ae}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad (2)$$

ニシテ,又直線KFノ方程式ハ

$$\frac{y}{x-ae}=\frac{y_1}{\frac{a}{e}-ae}$$

即チ

$$\frac{y}{x-ae}=\pm\frac{aey_1}{b^2} \qquad (3)$$

トナル. (2)ト(3)トハ相互ニ垂直ナリ. 即チ,焦點ヲ過ル任意ノ弦PQノ極ヲKトセバ,PQトKFトハ常ニ垂直ナリ. 換言スレバ, **焦點ニ於テ相交ハル共軛ナル二直線(第34節ノ定義ニヨル)ハ常ニ垂直ナリ.**

(VII) 橢圓又ハ双曲線ニ於テ,一ノ焦點ヲ過リ長軸又ハ交軸ニ垂直ナル弦ヲ **通徑** ト稱ス. ソノ曲線ノ方程

式ニ於テ, $x=\pm ae$ ト置キ之ニ對スル y ヲ求ムルトキハ, 通徑ノ長サノ半分ヲ得ベシ. 即チ

$$e^2\pm\frac{y^2}{b^2}=1,$$

故ニ

$$y^2=\pm b^2(1-e^2)=\frac{b^4}{a^2},$$

$$y=\pm\frac{b^2}{a}$$

ナリ. 通徑ノ半分ノ長サヲ通常 l ナル文字ニテ表ハス. 然ルトキハ

$$l=\frac{b^2}{a}$$

又ハ

$$l=\pm a(1-e^2)$$

ニシテ,楕圓ニ於テハ正號,双曲線ニ於テハ負號ヲ取ルベシ.

56. 同焦點有心二次曲線.

ϕ_1, ϕ_2 ヲ二ツノ有心二次曲線トシ,此二ツノ曲線ガ二ツノ焦點ヲ共有スルトキハ,兩者ハ **同焦點有心二次曲線** ナリト稱ス.

ϕ_1, ϕ_2 ガ同焦點ナラバ從テ同一ノ主軸ヲ有スベシ. 今ソノ共有スル二ツノ焦點ヲ通ズル主軸ヲ x 軸ニ取リ,他ノ主軸ヲ y 軸ニ取ラバ, ϕ_1, ϕ_2 ノ方程式ハ夫々

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0 \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{a'}+\frac{y^2}{b'}-1=0 \qquad (2)$$

ニヨリテ表ハサルベシ. (1)又ハ(2)ガ楕圓ナルトキハ,長軸ガ x 軸ト合スルニヨリ $a>b$, $a'>b'$ ト考フベシ, モシ又双曲線ナラバ交軸ガ x 軸ト合スルニヨリ a, a' ガ正ニシテ, b, b' ガ負ナリ. 故ニ矢張 $a>b$, $a'>b'$ トシテ可ナリ.

(1)ガ楕圓又ハ双曲線ノ何レヲ表ハスモノトスルモ,ソノ焦點ノ座標ハ $(\pm\sqrt{a-b},\ 0)$ ニシテ,同樣ニ(2)ノ焦點ノ座標ハ $(\pm\sqrt{a'-b'},\ 0)$ ナリ. 故ニ同焦點ナラバ

$$a-b=a'-b'$$

ナル關係アルベシ. 依テ

$$a-a'=b-b'=k$$

ト置カバ,一般ニ(1)ト同焦點ナル有心二次曲線ノ方程式ハ常ニ

$$\frac{x^2}{a-k}+\frac{y^2}{b-k}-1=0, \qquad a>b, \qquad (3)$$

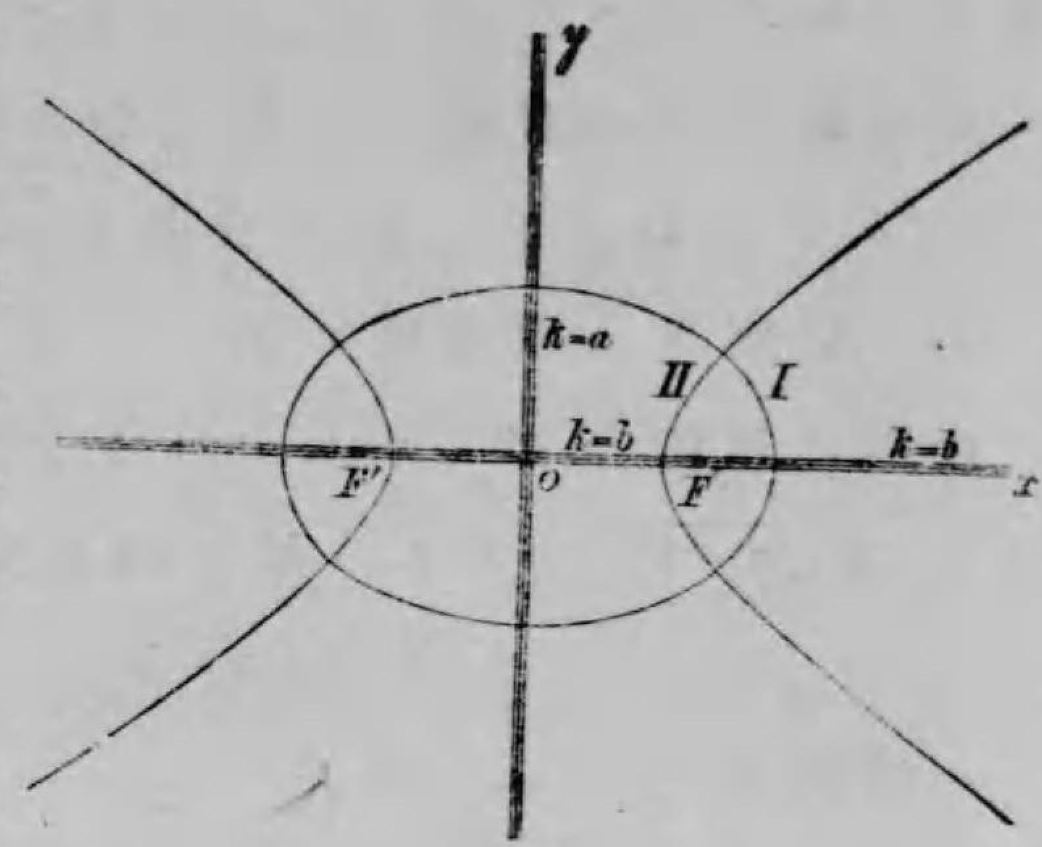
ナル式ニヨリテ表ハサルヽコトヲ知ルベシ,コヽニ k ハ任意ノ常數トス.

k ニ種々ノ値ヲ與フルトキハ(3)ハ(1)ト同焦點ナル楕圓又ハ双曲線トナル. 其變化ヲ説明スレバ次ノ如シ.

I. $a>b>k$. 此場合ニハ(3)ハ楕圓ヲ表ハス. k ガ $-\infty$ ヨリ漸次ニ增大シテ b ニ近ヅクニ從ヒ,(3)ハ長軸短軸共ニ非常ニ大ナル楕圓ヨリ漸次ニ縮少シテ(1)ノ二ツ

ノ焦點F, F′ヲ結ビ付クル線分ニ近ヅキ限リナク扁平トナル.

第八十圖



II. $a>k>b$. 此場合ニハ(3)ハ双曲線ヲ表ハス. 而シテkガbヨリaニ向テ變化スルニ從ヒ,双曲線ハ漸次ニ心差率ヲ增シ,始メハF, F′ニ近ク頂點ヲ有シテx軸ニ沿ヒテ扁平ナリシモノガ,次第ニ頂點ヲ中心ノ方ニ近ヅケ來リy軸ニ沿ヒテ縱ニ延ビントスル傾向ヲ有ス.

III. $k>a>b$. 此場合ニハ(3)ハ虛ナル橢圓トナル.

kガ丁度a又ハbニ等シキ時ハ(3)ハ曲線ヲ表ハスト云フヲ得ザレドモ,以上ノ硏究ニヨリテ見レバ,之ヲ次ノ如ク規約スルコトノ至當ナルヲ知ルベシ. 即チ,kガbヨリ小ナル數ヨリ次第ニbニ近ヅキタル極限トシテハ,(3)ハ橢圓ノ特別ナル場合トシテ線分FF′ヲ二重ニ取リタルモノヲ表ハスト規約ス,式ニテ示セバ

$$y^2=0, \quad -\sqrt{a-b}\leqq x\leqq\sqrt{a-b}$$

ヲアラハスモノトス. 又kガbヨリ大ナル數ヨリbニ

近ヅキタル極限トシテハ,(3)ハ双曲線ノ特別ナル場合トシテx軸ノ中ヨリFトF′ノ間ダケ除キタル殘リノ部分ヲ二重ニ取リタルモノヲ表ハスト規約ス,即チ

$$y^2=0, \quad x\leqq-\sqrt{a-b} \quad 又ハ \quad x\geqq\sqrt{a-b}$$

ナリ. 又kガaニ等シキトキハ,(3)ハ双曲線ノ特別ナル場合トシテy軸ヲ二重ニ取リタルモノヲアラハスモノトス. 即チ

$$x^2=0$$

ナリト規約ス.

以上述ベタル所ニヨリ,(3)ヲ變形セル

$$(b-k)x^2+(a-k)y^2-(a-k)(b-k)=0, \quad a>b \tag{4}$$

ハ常ニ(1)ト同焦點ナル曲線ヲアラハスコトヽナルベシ.

今(1)ヲ與ヘラレタル曲線トシ,一點P(x_1, y_1)ヲ過リ(1)ト同焦點ナル橢圓又ハ双曲線ヲ求メンニハ,kノ値ヲ

$$(b-k)x_1^2+(a-k)y_1^2-(a-k)(b-k)=0 \tag{5}$$

ナル樣ニ決定セザル可ラズ. (5)ハkニ關シテ二次方程式ナレバ,kノ值ハ二ツアルベシ. 而シテx_1, y_1ガ何レモ零ニアラザルトキハ,此二根ハ共ニ實ニシテ,一ハbヨリ小ニシテ,一ハaトbトノ間ニアルモノナリ. 何トナレバ(5)ノ左邊ノ式ニ於テ,kニ順次,$-\infty$, b, aナル值ヲ入レテ見ルニ,此式ノ値ハ夫々負,正,負トナル,故ニ方程式(5)ノ根ハ$-\infty$トbノ間ニ一ツ,bトaノ間ニ一ツアルベキ

ナリ.

故ニ主軸上ニアラザル與ヘラレタル一點ヲ過リ,與ヘラレタル楕圓又ハ双曲線ト同焦點ナル有心二次曲線ハ二ツアリ,一ハ楕圓ニシテ,一ハ双曲線ナリ.*

一點Pヲ過ル二ツノ同焦點有心二次曲線ガ直交スルモノナルコトハ前節(IV)ノ中ニ證明セルガ,此事ハ更ニ又次ノ如クニモ證明セラル.

$P(x_1, y_1)$ヲ通ズル二ツノ同焦點有心二次曲線ヲ(1)及ビ(3)トス. 然ルトキハ,Pハ兩曲線ノ上ニアルヲ以テ,

$$\frac{x_1^2}{a}+\frac{y_1^2}{b}-1=0$$

$$\frac{x_1^2}{a-k}+\frac{y_1^2}{b-k}-1=0$$

ナルベシ. 邊々相減ジ,kニテ約スルトキハ

$$\frac{x_1^2}{a(a-k)}+\frac{y_1^2}{b(b-k)}=0$$

ヲ得. コレ即チPニ於ケル(1)及ビ(3)ノ切線

$$\frac{x_1x}{a}+\frac{y_1y}{b}-1=0$$

及ビ

$$\frac{x_1x}{a-k}+\frac{y_1y}{b-k}-1=0$$

ガ相互ニ垂直ナルタメノ條件ニ他ナラズ.

*x_1, y_1ノ中零ナルモノアル場合ハ中川解析幾何484頁§142ヲ見ヨ.

57. 漸近線ヲ座標軸トセル双曲線ノ方程式.

主軸ニ關シ,双曲線ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

ナリトセバ,ソノ漸近線X'X, Y'Yガx軸トナス角ハ夫々$-\theta$及ビθニシテ,θハ$0°$ト$90°$トノ間ニアリ,且ソノ大サハ

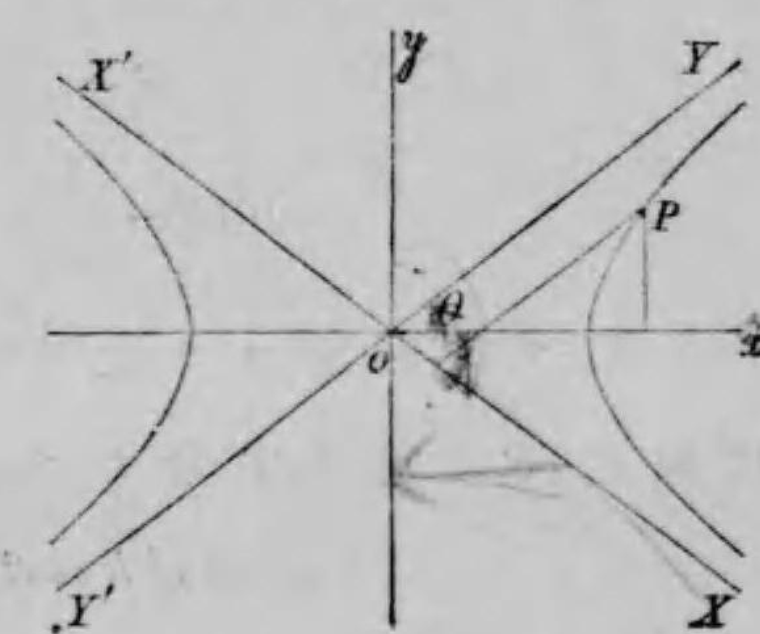
$$tan\theta=\frac{b}{a} \tag{2}$$

ニヨリテ定マル.

今x軸ト$-\theta$ノ角ヲナス漸近線ヲ新ラシキX軸ニ取リ,θノ角ヲナス漸近線ヲ新ラシキY軸ニ取ラバ,舊軸ヨリ新軸ニ移ル變換式ハ第15節ニヨリ

$$x=Xsin(90°+\theta)+Ysin(90°+\theta)$$
$$=(X+Y)cos\theta$$
$$y=Xsin(-\theta)+Ysin\theta$$
$$=(Y-X)sin\theta$$

第八十一圖



ナリ. 然ルニ(2)ニヨリ

$$sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ナルヲ以テ,上ノ變換式ハ

$$x=\frac{(Y+X)a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{(Y-X)b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{3}$$

トナル. 之ヲ(1)ニ入ルルトキハ,

$$XY=\frac{a^2+b^2}{4} \tag{4}$$

ヲ得. コレ即チ新軸ニ關スル双曲線ノ方程式ナリ.

(1)ト共軛ナル双曲線ハ

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-1=0$$

ナルヲ以テ,之ニ(3)ヲ代入スルトキハ

$$XY=-\frac{a^2+b^2}{4}$$

ヲ得ベシ.

サレバ一般ニ或ル座標軸ニ關シテ,

$$xy=k, \qquad k \gtrless 0 \tag{5}$$

ナル方程式ノアラハス曲線ハ常ニ双曲線ニシテ,兩軸ハソノ漸近線ナリ. 而シテ $xy=k$ ト $xy=-k$ トガアラハス双曲線ハ相互ニ共軛ナリ. 此 k ノ値ヨリ, a ト b トヲ求メンニハ, $k>0$ ナラバ

$$tan\theta=\frac{b}{a}, \quad k=\frac{a^2+b^2}{4}$$

ナル二ツノ關係ヨリ之ヲ得ベシ,但シ θ ハ漸近線即チ座標軸ノ間ノ角ノ半分ナリ. 之ヲ解クトキハ

$$a=2\sqrt{k}\cos\theta, \quad b=2\sqrt{k}\sin\theta.$$

モシ $k<0$ ナラバ,交軸ノ半分ハ $2\sqrt{-k}\sin\theta$ ニシテ,共軛軸ノ半分ハ $2\sqrt{-k}\cos\theta$ ナルベシ.

二ツノ漸近線ヲ座標軸トスルトキ,双曲線ノ方程式ガ(5)ノ形トナル事ハマタ次ノ如クニモ考ヘラル.

一般ノ二次式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \tag{6}$$

ニ於テ, $x=0$ ト置キテ

$$by^2+2fy+c=0$$

ヲ得. 之ヲ解カバ(6)ノアラハス曲線ガ y 軸ヲ切ル點ノ縱線ヲ得ベシ. 故ニモシ y 軸ガ漸近線ナラバ,此方程式ノ二根ハ共ニ無限大ナラザル可ラズ. 故ニ

$$b=0, \quad f=0$$

ナリ. 同樣ニ x 軸ガ漸近線ナラバ,

$$a=0, \quad g=0$$

トナル. 故ニ兩漸近線ヲ軸トセルトキノ双曲線ノ方程式ハ

$$2hxy+c=0$$

即チ(5)ノ形ヲ有セザル可ラズ.

【例】1. 一ノ直線ガ双曲線ヲ截ル點ヲ R, R′, ソノ漸近線ヲ截ル點ヲ Q, Q′ トスルトキハ,

$$\overline{RQ}=\overline{R'Q'}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

漸近線ヲ座標軸ニ取ラバ,双曲線ハ

$$xy=k \tag{1}$$

ニテ表ハサル. 又直線ヲ

$$y=mx+b \qquad (2)$$

トスルナラバ,(1)ト(2)トノ交點ノ横線 OM, OM′ ノ大サハ

$$x(mx+b)=k$$

即チ

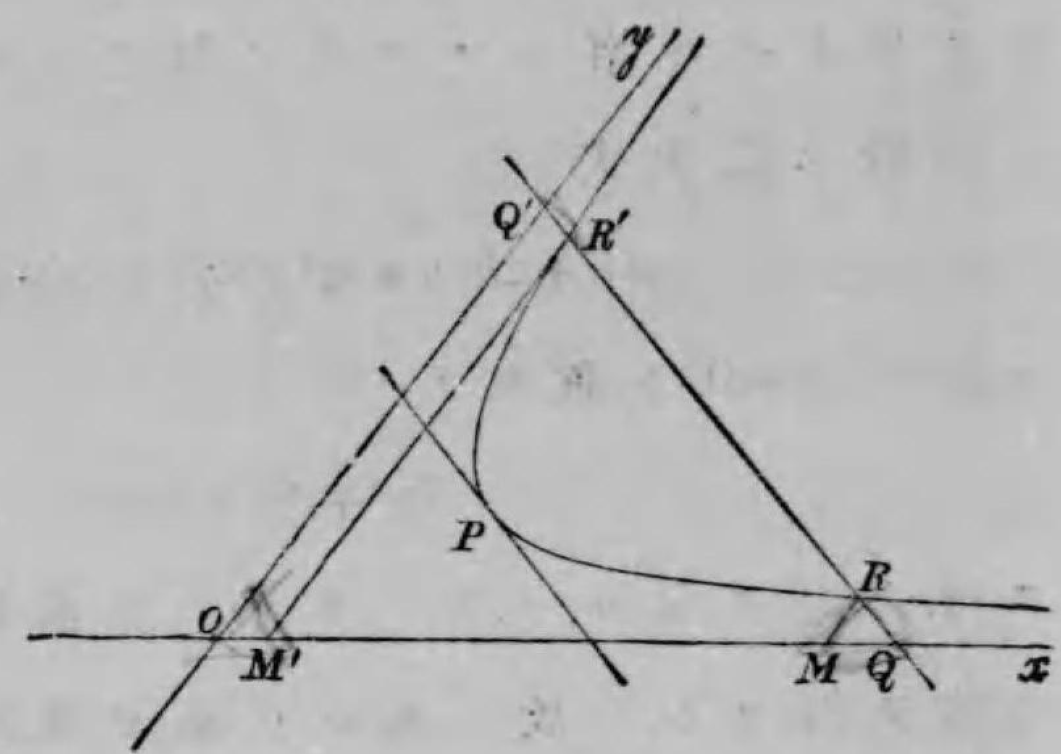
$$mx^2+bx-k=0$$

ノ二根ナリ. 故ニ

$$\mathrm{OM}+\mathrm{OM'}=-\frac{b}{m}.$$

然ルニ(2)ニ於テ, $y=0$ ト置クトキハ

第八十二圖



$$x=\mathrm{OQ}=-\frac{b}{m}$$

ヲ得. 故ニ

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OM}+\mathrm{OM'},$$

從テ

$$\mathrm{OM'}=\mathrm{MQ}$$

ナリ. 故ニ $\overline{\mathrm{RQ}}$ ト $\overline{\mathrm{R'Q'}}$ トハ相等シ.

今特別ノ場合トシテ, R ト R′ トガ相合シ,直線ガ切線トナリタル位置ヲ考フレバ,次ノ定理ヲ得ベシ.

双曲線上ノ一點 P ニ於テ切線ヲ引クトキハ,P ハソノ切線ノ漸近線ノ間ニ挾マレタル部分ノ中點ナリ.

【例】2. 双曲線 $xy=k$ ノ上ニ二點 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ ヲ取リ,

$$(x-x_1)(y-y_2)=xy-k$$

ナル方程式ヲ考フルニ,コヽニ xy ノ項ハ兩邊ニテ消去セラルヽガ故ニ一ノ直線ヲアラハスベク,而シテ x 及ビ y ニソレゾレ x_1, y_1 又ハ x_2, y_2 ヲ入ルレバ何レモ此式ヲ滿足スルガ故ニ此式ハ即チ直線 PQ ノ方程式ナラザル可ラズ. コヽニ於テ $y_2=y_1$ ト置キ之ヲ簡單ニスルトキハ

$$x_1y+xy_1=2k$$

トナル. コレ即チ P ニ於ケル切線ノ方程式ナリ.

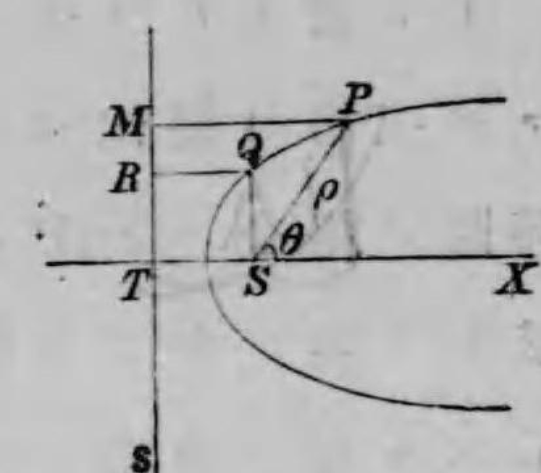
此結果ハマタ第27節或ハ第47節ノ方法ニ倣ヒテモ誘導スルコトヲ得ベシ.

58. 極方程式.

橢圓及ビ双曲線ノ中心ヲ極トスルトキノ極方程式ハ本章ノ始メニ於テ之ヲ作リタルガ,コヽニハ更ニ焦點ヲ極トスルトキノ極方程式ヲ求メントス.

便宜ノタメニ,二ツノ焦點ノ中,通常ノ軸ニ關シテソノ橫線ノ正ナルモノヲ右ノ焦點ト名ヅケ,橫線ノ負ナルモノヲ左ノ焦點ト名ヅクベシ. 而シテ今 S ヲ橢圓ノ場合ニハ左ノ焦點トシ,双曲線ノ場合ニハ右ノ焦點トシ, s ヲ之ニ相應スル準線トス.

第八十三圖



S ヨリ s ニ垂線 ST ヲ引キ,直線 TS ヲ原線トシ,曲線上ノ一點 P ノ座標ヲ (ρ, θ) トス. サテ P ヨリ s ニ下セル垂線ヲ PM トスルトキハ

$$\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PM}}=e$$

ナルヲ以テ,

$$\rho=e(\overline{\mathrm{TS}}+\rho\cos\theta)$$

即チ

$$\rho=\frac{e.\overline{\mathrm{TS}}}{1-e\cos\theta}$$

ナリ. S ヨリ TS ニ垂線ヲ立テ,曲線ト交ハル點ヲ Q トシ,Q ヨリ s ニ垂線 QR ヲ下サバ,上ノ式ヨリ

$$QS=e.\overline{QR}=e.\overline{TS}$$

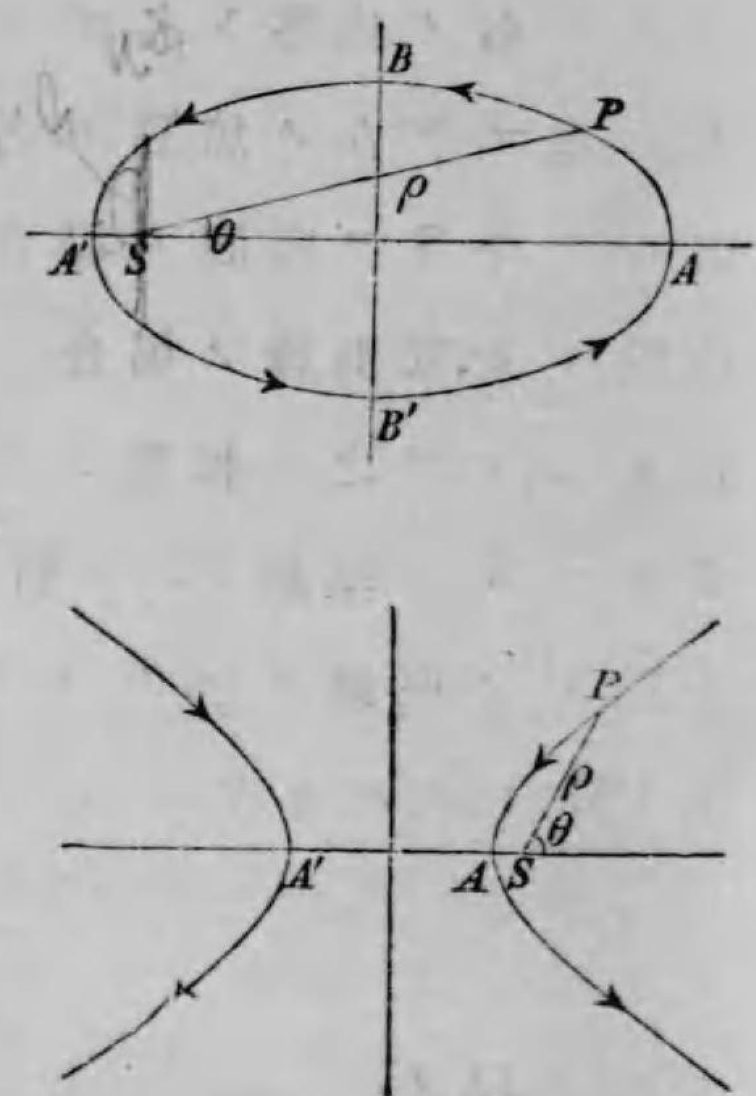
ナリ. 故ニ $e.\overline{TS}$ ハ第55節 VII) ニ述ベタル通徑ノ半分ニシテ, l ナル文字ニテ表ハサルヽモノナリ. 故ニ

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta} \qquad (1)$$

ヲ得. 之ヲ求ムル極方程式トス.

(1) ニ於テ θ ヲ 0° ヨリ 360° マデ次第ニ變化セシムレバ,楕圓ノ場合ニハ,P ハ A ヨリ發シテ圖ニ矢ノ方向ヲ以テ示スガ如ク曲線ヲ一周シテ A ニ戻ルベク,双曲線ニ於テハ, A′ ヨリ發シテ矢ノ方向ニ從ヒ左下ノ無究遠ニ去リ,更ニ右上ノ無究遠ニアラハレテ右ノ半分ノ部分ヲ畫キテ右下ノ無究遠ニ去リ,最後ニ左上ノ無究遠ヨリアラハレテ A′ ニ至リ,コヽニ一周ヲ終ル.

第八十四圖



モシ楕圓ニ於テ右ノ焦點ヲ S トシ, ST ヲ原線ノ正ノ方向トシテ上ノ如ク考フレバ,極方程式トシテ

$$\rho=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

ヲ得ベク,双曲線ニ於テ左ノ焦點ヲ S トスルトキハ

$$\rho=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

ヲ得ベシ.

問　題

1. 一定ノ長サヲ有スル線分 AB ノ兩端ガ,直角ニ相交レル二ツノ直線ノ上ニ夫々アルトキ, AB ヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點ノ軌跡如何.

2. 二定點ヲ通ル數多ノ圓ニ引キタル互ニ平行ナル切線ノ切點ノ軌跡如何.

3. 楕圓ノ長軸ノ兩端ヲ A, A′ トシ,楕圓上ニアル任意ノ一點ヲ P トス. A 及ビ A′ ヲ通ジ夫々 AP 及ビ A′P ニ垂直ナル直線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

4. 一定圓ニ於テ,一定直線ニ平行ナル弦ヲ PQ トス. PQ 上ニ一點 T ヲ取リ, $\overline{PT}^2+\overline{QT}^2$ ヲ一定量ナラシムルトキ,T ノ軌跡如何.

5. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ大サ及ビ位置ガ與ヘラレ,且

$$\angle B=2\angle C$$

ナルトキ,頂點 A ノ軌跡如何.

コノ曲線ヲ用ヒテ一定角ヲ三等分スル方法如何.

6. PQ ハ楕圓ノ長軸 AA′ ニ垂直ナル弦トス. PA ト QA′ トノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

7. 直線 $y=mx+n$ ガ曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ法線ナルタメノ條件ヲ求メ,依テ x 軸ト與ヘラレタル角ヲナス法線ノ方程式ヲ作レ.

8. AB ハ楕圓ノ一ノ直徑ナリ. 楕圓上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ,A 及ビ B ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ C 及ビ D トス, AC.BD ハ P ノ位置ニ關ハラズ一定ナルコトヲ證明セヨ.

9. 一双ノ共軛直徑ヲ座標軸ニ取リタルトキ二ツノ直徑ガ共軛ナル爲メノ條件如何.

又前問 8 ニ於テ中心ヲ O トセバ, OC ト OD トハ共軛ナルコトヲ證明セヨ.

10. 楕圓ニ於テ相互ニ垂直ナル二ツノ半徑ヲ OP, OQ トスルトキハ,

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$$

ハ一定ナルコトヲ示セ.

11. 楕圓ニ於テ一定點ヲ通ズル弦ノ中點ノ軌跡ハ,之ト同ジ心差率ヲ有スル他ノ楕圓ナルコトヲ證明セヨ.

12. 楕圓上ノ二點 P, Q ノ心差角ヲ夫々 θ_1, θ_2 トセバ, 直線 PQ ハ心差角ガ $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ ナル點ニ於ケル切線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

13.* 楕圓ヲソノ短軸ニヨリテ半分ニ分ツトキ,ソノ一ツニ內切スル圓ノ半徑ヲ求ム.

14. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線ニ中心ヨリ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム.

15. 楕圓上ノ一點 P ヲ足トスル法線ガ長軸ト交ハル點ヲ Q トス. PQ ノ中點ノ軌跡ハ一ノ楕圓ニシテ,モシ e 及ビ e_1 ガ此等ノ楕圓ノ心差率ナルトキハ

$$1-e^2=(1+e^2)^2(1-e_1^2)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

16. 楕圓上ノ一點 P ニ於ケル切線ニ中心ヨリ下セル垂線ノ長サト,P ヲ足トスル法線ノ主軸ノ間ニ挾マレタル部分ノ長サトノ積ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

17. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ短軸ヲ直徑トスル圓 O ニ,楕圓上ノ一點ヨリ切線ヲ引キ,ソノ二ツノ切點ヲ結ビ付クル直線ガ兩軸ト交ハル點ヲ P 及ビ Q トスルトキハ,

$$\frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

18. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$ 上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線

ガ他ノ楕圓 $\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$ ト交ハル點ヲPQ及ビQトス.PトQトニ於テ後ノ楕圓ニ引キタル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

19. AA′ ヲ楕圓ノ長軸トス.楕圓上ノ任意ノ一點Pニ於ケル切線ガ AA′ ト交ル點ヲT,T ヲ通シ AA′ ニ垂直ナル直線ト,PA, PA′ トノ交點ヲ夫々M, Nトス,MT=TN ナルコトヲ證明セヨ.

20. 直線 $y=mx+n$ ガ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト交ル點ヲP,Qトスルトキハ

$$\overline{PQ}=\frac{2ab\sqrt{(1+m^2)(a^2m^2+b^2-n^2)}}{a^2m^2+b^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

21. 楕圓ノ長軸ノ一端ヲAトシ,Aニ於ケル切線ガ一双ノ共軛ナル直徑ト交ル點ヲC及ビDトセバ,$4\overline{CA}.\overline{AD}$ ハ短軸ノ自乘ニ等シキコトヲ證明セヨ.

22. 楕圓又ハ双曲線ニ於テ,通徑ノ一端ニ於ケル切線ノ方程式ヲ作リ,依テ長軸又ハ交軸ノ長サガ一定ナル一群ノ楕圓又ハ双曲線ニ於テハ,コレラノ通徑ノ端ニ於ケル切線ハ必ズ或ル定點ヲ過ルコトヲ示セ.

23. PQハOヲ中心トスル楕圓ノ弦ナリ.OPトOQトガ共軛ナルトキ,PQノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

24.* 楕圓上ノ一點Pヨリ,長軸ト等シキ角ヲ作ル二ツノ弦PQ, PQ′ ヲ引カバ,直線 QQ′ ハ短軸ニ對シテPト對稱ナル點ニ於ケル切線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

25. 楕圓ノ焦點ノ一ツヲ通リ任意ノ切線ニ垂直ニ引ケル直線ト,中心及ビ切點ヲ結ブ直線トノ交點ノ軌跡如何.

26. 一點 (x_1, y_1) ヨリ曲線 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ切線ヲ引キ,ソノ二ツノ切點ト中心トヲ結ビ付タルトキハ,ソノ二ツノ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}\right)^2$$

ナルコトヲ示セ.

27. 一點PヨリOヲ中心トスル楕圓ニ切線ヲ引キ,ソノ切點ヲQ, Rトス.OQ及ビORガ常ニ互ニ垂直ナル如キP點ノ軌跡如何.

28. 一點ノ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ關スル極線ガ常ニソノ楕圓ノ法線ナルトキ,ソノ點ノ軌跡ハ

$$\frac{a^6}{x^2}+\frac{b^6}{y^2}=(a^2-b^2)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

29. 一ノ楕圓ニ於テ共軛直徑ノ間ノ角ガ60° ナルトキニ,兩直徑ノ長サガ丁度相等シトイフ.コノ楕圓ノ心差率如何.

30. 與ヘラレタル直線上ノ任意ノ一點Pヨリ,二ツノ

楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

ニ夫々切線 PR, PR_1, PQ, PQ_1, ヲ引クトキ,切點ヲ結ビ付クル直線 RR_1 及ビ QQ_1 ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

31. 双曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ交軸ト交ハル點ヲ S トシ,P ト中心トヲ通ズル直線ガ頂點 A ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ T トス. ST ハ PA ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

32. 双曲線ノ中心ヲ O トシ,P 及ビ Q ヲ曲線上ノ二點トシ,P ト Q トニ於ケル切線ガ OQ, OP ト交ハル點ヲ夫々 P_1, Q_1 トス. 三角形 OPP_1 ト OQQ_1 ハ相等シキ面積ヲ有スルコトヲ證明セヨ.

33. 双曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ二ツノ頂點ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ S, T トス. ST ヲ直徑トスル圓ハ兩焦點ヲ通ズルコトヲ證明セヨ.

34. ϕ_1, ϕ_2 ハ共軛ナル二ツノ双曲線ナリ. 一對ノ共軛ナル直徑ガ ϕ_1 及ビ ϕ_2 ト交ハル點ヲ P, Q トセバ, P, Q ニ於テ夫々 ϕ_1, ϕ_2 ニ引ケル切線ハ漸近線ノ上ニ於テ交ハルコトヲ證明セヨ.

35. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線ト二ツノ漸近線トガ作ル三角形ノ面積ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

36. 双曲線上ノ二點 P, Q ニ於ケル切線 P_1PP_2 及ビ Q_1QQ_2 ト二ツノ漸近線トノ交點ヲ P_1, P_2, Q_1, Q_2 トス. 直線 P_1Q_2 ハ P_2Q_1 ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

37. C ニ於テ相交ハル二ツノ定直線 CP_1P_2 及ビ CQ_1Q_2 ト,或ル一ツノ圓トノ交點ヲ P_1, P_2, Q_1, Q_2 トス. 弦 P_1P_2 及ビ Q_1Q_2 ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキトキ,此圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

38. 楕圓ノ一双ノ共軛ナル直徑ヲ漸近線トスル,相互ニ共軛ナル双曲線ヲ ϕ_1, ϕ_2 トス. モシ ϕ_1 ガ此楕圓ニ切スルトキハ, ϕ_2 モ亦コレニ切スルコトヲ證明セヨ.

39. 等邊双曲線上ノ任意ノ一點 P ニ於ケル切線ニ,中心 O ヨリ下セル垂線ノ足ヲ T トシ,コノ垂線ガ曲線ト交ハル點ヲ S トス. OT.OS ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

40. 双曲線上ノ一點ニ於ケル法線ガ交軸及ビ共軛軸ト交ハル點ヲ P 及ビ Q トス. P, Q ニ於テ夫々ソノ軸ニ垂直ニ引ケル直線ノ交點ノ軌跡如何.

41. 楕圓ノ軸ノ上ニアル一定點ヲ通ル任意ノ直線ヲ g トス. g ニ共軛ニシテ且ツ垂直ナル直線ガ g ト交ハル點ノ軌跡如何.

42. 等邊双曲線上ノ一點 P ニ於ケル法線ガ兩軸ト交ハル點ヲ K, L トス, KL ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

43. 等邊双曲線上ニアル一點 P ヲ足トスル法線ガ再ビ曲線ト交ル點ヲ Q トシ,曲線ノ中心ヲ O トスルトキハ

$$3.\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

44. 等邊双曲線上ノ一點 P ヲ通リ相互ニ垂直ナル直線ガ更ニ曲線ト交ハル點ヲ Q, R トス. QR ハ P ニ於ケル法線ニ平行ナルコトヲ證明セヨ.

45. 楕圓ノ一ノ焦點ヲ F トシ,曲線上ノ任意ノ一點ヲ P トセバ, PF ヲ直徑トシテ畫キタル圓ハ楕圓ノ補助圓ニ切スルコトヲ證明セヨ.

46. 楕圓ノ共軛ナル二ツノ直徑ト一ツノ準線トニヨリテ作ラレタル三角形ノ垂心ハ定點ナルコトヲ證明セヨ.

47. 一定點 P ヲ通リ互ニ垂直ナル任意ノ二直線ガ一定ノ楕圓又ハ双曲線ニ關シ常ニ共軛ナルトキハ,P ハ焦點ノ一ツナルコトヲ證明セヨ. (55節 VI ノ逆ナリ).

48. 楕圓ノ一ノ焦點ヲ過ギル弦ヲ PQ, コレニ平行ナル直徑ヲ CD トシ,長軸ヲ AA′ トスルトキハ,

$PQ:CD=CD:AA'$ ナルコトヲ證明セヨ.

49. 楕圓ノ一ノ焦點ヲ通ジ,相互ニ垂直ナル二ツノ弦ノ長サヲ p_1, p_2 トスルトキハ, $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}$ ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

50. P, Q ハ楕圓ノ上ニアル二點ニシテ,直線 PQ ト,焦點 F ニ對スル準線トノ交點ヲ R トス. 直線 FR ハ三角形 PQF ノ F ニ於ケル外角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ.

51. 楕圓ノ一ノ焦點 F ヲ通ズル弦ヲ PP_1 トシ,此弦ノ上ニ一點 Q ヲトリ, $FQ^2=PF.FP_1$ ナラシメバ,Q ノ軌跡ハ與ヘラレタル楕圓ト同ジ心差率ヲ有スル楕圓ナルコトヲ證明セヨ.

52. 任意ノ一點 P ト楕圓ノ一ノ焦點 F トヲ結ビ, PF ヲ直徑トシテ畫キタル圓ガ楕圓ノ補助圓ト交ハル點ヲ Q, R トスルトキハ, PQ, PR ハ楕圓ノ切線ナルコトヲ證明セヨ.

53. 双曲線上ノ一點ニ於ケル切線,法線及ビ共軛軸ニヨリテ作ラレタル三角形ノ外接圓ハ焦點ヲ通ズルコトヲ證明セヨ.

54. 双曲線上ノ一點 P ニ於ケル切線ガ二ツノ漸近線ト交ハル點ヲ P, Q トシ,焦點ノ一ヲ F トスレバ,角 PFQ ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

55. ϕ_1, ϕ_2 ハ同焦點楕圓ナリ. モシ θ_1, θ_2 ヲ心差角トスル ϕ_1 上ノ二點ヲ P_1, P_2 トシ,又 ϕ_2 上ノ二點ヲ Q_1, Q_2 トスルトキハ,

$$P_1Q_2=P_2Q_1$$

ナルコトヲ證明セヨ.

56. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト同焦點ナルスベテノ二次曲線ニ對シ,一ノ與ヘラレタル直線 $lx+my=1$ ノ極ノ軌跡如何.

57. 數多ノ同焦點楕圓ノ平行ナル切線ノ切點ハ一ノ双曲線ノ上ニアルコトヲ證明セヨ.

58. φ_1, φ_2 ハ同焦點楕圓ナリ, φ_1, φ_2 ノ切線ガ互ニ垂直ナルトキソノ交點ノ軌跡如何.

59. 數多ノ同焦點楕圓ノ各ノ上ニ,與ヘラレタル一定ノ心差角ヲ有スル點ヲ作ラバ,コレラノ點ハ又楕圓ト同焦點ナル一ノ双曲線上ニアルコトヲ證明セヨ.

60. 一ノ楕圓ノ圖アリ. 定規ト兩脚規ノミヲ用ヒテ,ソノ中心ヲ見出セ.

61. 双曲線ニツイテ前問題ヲ考究セヨ.

第八章

拋物線

59. 拋物線ノ形狀.

直交軸ニ關シ,拋物線ノ方程式ノ標準形ヲ

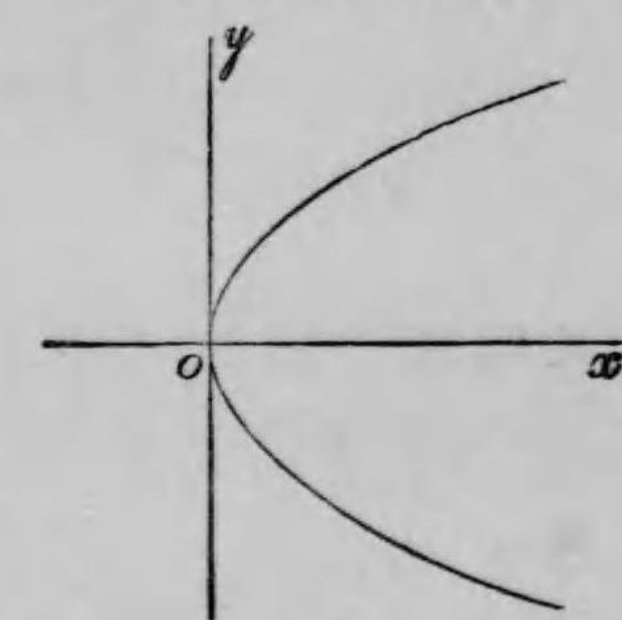
$$y^2=4dx \qquad (1)$$

トス. コヽニ $4d$ ヲ**主通徑**ト稱ス. 以下特ニ斷リナキトキハ d ハ常ニ正ト定ム. 然ルトキハ(1)ニヨリテ

$$y=\pm2\sqrt{dx}$$

ナルヲ以テ,x ノ正ノ値ニ對シテハ,y ハ實ニシテ絶對値ガ相等シク符號ノミ相反スル二ツノ値ヲ取ル. 故ニ曲線ハ x 軸ニツイテ對稱ニシテ,又 x ガ增スニ從ヒ y モ亦從テ增ス. 即チ第八十五圖ニ示スガ如キ形狀ヲ有スベシ. モシ d ガ負ナラバ,前ニ考ヘタル曲線ヲ y 軸ニツイテ對稱ノ位置ニ移シタルモノトナル.

第八十五圖



拋物線ニ於テハ心差角ト稱スベキモノ無ケレドモ,モシ一ノ媒

介變數ニヨリテx及ビyヲ表ハサント欲セバ

$$x=\frac{u^2}{4d},\qquad y=u$$

又ハ
$$x=dt^2,\qquad y=2dt$$

或ハ
$$x=\frac{d}{m^2},\qquad y=\frac{2d}{m}$$

等ト置クコトヲ得. mノ幾何學的意味ハ第62節ニ之ヲ說クベシ.

次ニ拋物線ト楕圓トノ關係ヲ考ヘントス.

一ノ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

ヲ取リ,座標軸ノ平行移動ニヨリ原點ヲソノ一ツノ頂點A$(-a, 0)$ニ移サバ,方程式ハ

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

即チ

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}\left(2ax-x^2\right)=\frac{b^2}{a}\left(2x-\frac{x^2}{a}\right) \qquad (3)$$

トナル.

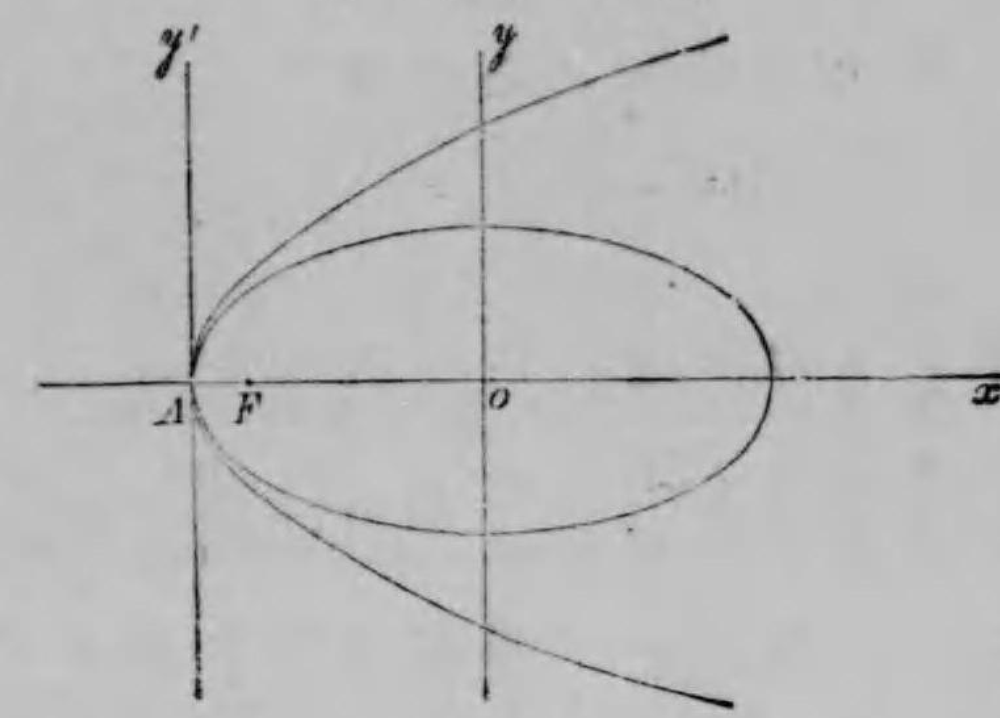
此楕圓ノ焦點ノ中,Aニ近キ方ヲFトシ,

$$\mathrm{AF}=d$$

ト置カバ,

$$d=a-\sqrt{a^2-b^2},$$

第八十六圖



故ニ

$$b^2=2ad-d^2 \qquad (4)$$

ナリ. 之ヲ(3)ニ入レテ

$$y'^2=\left(2d-\frac{d^2}{a}\right)\left(2x-\frac{x^2}{a}\right)$$

トナル. コヽニ於テdヲ一定トナシ,aヲ漸次ニ限リナク增大スルトキハ,xガ無限大ニナラザル限リ,

$$y'^2=2d.2x=4dx$$

ナル關係ニ近ヅクベシ. コレ即チ(1)ノ式ナリ. 此變化ハ之ヲ圖ニツイテ考フレバ,dヲ一定トスルコトハFヲ固定シ置クコトニシテ,aヲ無限ニ增大スルコトハ即チ楕圓ノ中心Oヲx軸上無究遠ニ追ヒ遣ルコトナリ. 換言スレバ,楕圓ノ一頂點ト,之ニ近キ焦點トヲ固定セシメテ,ソノ楕圓ヲ限リナク橫ニ引キ延バサバ,ソノ頂點ノ附近(xガ無限大ナラザル假定ニ當ル)ニ於ケル楕圓ノ形狀ハ次第ニ拋物線ニ近ヅクベシ.

是ニ由テ見ルニ,拋物線ハ楕圓ノ特別ナル場合ニシテ,一ノ焦點ノミガ殘存シ,他ノ一焦點ハ無究遠ニアルモノト考ヘラル. 殘存セル焦點ハ即チ拋物線ノ焦點ナリ.

(第44節)

(2)ナル楕圓ノ心差率ヲ e トセバ

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$$

ナルヲ以テ,之ニ(4)ヲ入ルレバ

$$e^2=1-\frac{2d}{a}+\frac{d^2}{a^2}$$

ナリ. 故ニ a ヲ無限大ナラシメタルトキハ $e=1$ トナル. 故ニマタ拋物線ハ心差率ガ1トナレル楕圓ノ特別ナル場合ナリトモ考ヘラル.

楕圓ノ代リニ双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ヲ取リ,原點ヲ一ツノ頂點 $(a, 0)$ ニ移シ,コノ頂點ト之ニ近キ方ノ焦點ヲソノ位置ニ止メ置キテ a ヲ無限大ナラシメ,上ト同樣ノ推論ニヨリ矢張極限トシテ拋物線ヲ得.

或ハ又拋物線ハ心差率ガ1トナレル双曲線ノ特別ナル場合ナリトモ云フコトヲ得ベシ.

拋物線ニ關スル種々ノ性質ヲ考フルニ際シ,之ヲ楕圓又ハ双曲線ノ特別ナルモノナリト見做スコトニヨリテ理解ヲ容易ナラシメ得ルコト多シ.

60. 一點ヨリ拋物線マデノ距離.

一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過リ, x 軸ト α ナル角ヲナス直線ノ方程

式ヲ

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=l \qquad (1)$$

トシ,此直線ガ拋物線

$$y^2=4dx \qquad (2)$$

ト交ル點ヲ Q, R トス. P ヨリ計レル線分 PQ, PR ノ長サヲ求メンニハ,(1)ヨリ x, y ヲ出シテ(2)ニ入レ, l ニ關スル二次方程式

$$(l\sin\alpha+y_1)^2=4d(l\cos\alpha+x_1)$$

ヲ作リ,之ヲ解クベシ. 此方程式ハ之ヲ整理スルトキハ

$$Al^2+2Bl+C=0 \qquad (3)$$

ニシテ,コヽニ

$$A=\sin^2\alpha$$

$$B=y_1\sin\alpha-2d\cos\alpha$$

$$C=y_1^2-4dx_1$$

$y^2=8ax$
$y^2=4ax$
$y^2=8ax.$

ナリ.

點 P ガ拋物線上ニアラバ, $C=0$ ニシテ, l ノ一ツノ値ハ零トナル. モシ更ニ直線(1)ノ方向ガ

$$B=y_1\sin\alpha-2d\cos\alpha=0 \qquad (4)$$

ナル如キ角 α ニ相當スルトキハ, l ノ二ツノ値ハ共ニ零トナリ,(1)ハ即チ P 點ニ於ケル切線トナルベシ. (1)ト(4)ヨリ α ヲ消去シテ

$$y_1(y-y_1)=2d(x-x_1)$$

ヲ得. 之ヲ變形スルトキハ

$$y_1y=2d(x-x_1)+y_1^2,$$

然ルニ

$$y_1^2=4dx_1$$

ナルヲ以テ,

$$y_1y=2d(x+x_1) \tag{5}$$

トナル. コレ即チ拋物線上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式ナリ.

Bノミガ零ナルトキハ,(3)ヨリ得ルlノ二ツノ値ハ絶對値ガ相等シク符號ハ反對ナルベシ. コレPガ弦QRノ中點ナルコトヲ示ス. 故ニx軸トαナル角ヲナス總ベテノ弦ノ中點ノ軌跡ハ

$$y\sin\alpha=2d\cos\alpha \tag{6}$$

ニシテ,x軸ニ平行ナル直線ナリ.

A=0トナル場合ハ,直線(1)ガx軸ニ平行ナル時ニシテ,コノトキハlノ一ノ値ハ無限大トナル. モシlノ二ツノ値ヲ共ニ無限大ニスルコトヲ得バ,(1)ハ拋物線ノ漸近線ト稱スベキモノニナル筈ナレドモ,然ルトキハ更ニ

$$B=y_1\sin\alpha-2d\cos\alpha=0$$

即チ

$$y_1=\frac{2d\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ナルコトヲ要スルニヨリ,之ト

$$A=\sin^2\alpha=0$$

ト併セ考フルニ,直線(1)ハx軸ニ平行ニシテ且ソノx軸トノ距離y_1ハ無限大ナラザル可ラズ. 即チ無窮遠ニ於ケル直線トナル. 故ニ拋物線ハ有限ノ距離ニ於テハ漸近線ヲ有セズ.

61. 切線及ビ法線.

拋物線

$$y^2=4dx \tag{1}$$

ノ上ノ一點$P(x_1, y_1)$ニ於ケル切線ノ方程式ハ前節(5)ニ得タレドモ,此式ハ又次ノ如クニモ求ムルコトヲ得ベシ.

先ヅPノ他ニ曲線上ニ他ノ一點$Q(x_2, y_2)$ヲ取リ,直線PQノ方程式ヲ作ルトキハ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{2}$$

ナリ. 然ルニP, Qハ何レモ拋物線(1)ノ上ノ點ナルヲ以テ

$$y_1^2=4dx_1, \quad y_2^2=4dx_2$$

ナル關係アリ. 故ニ

$$y_2^2-y_1^2=4d(x_2-x_1),$$

即チ

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4d}{y_2+y_1}$$

ナリ. 之ヲ(2)ニ入レテ,分母ヲ拂フトキハ

$$(y_2+y_1)(y-y_1)=4d(x-x_1)$$

トナル．コヽニ於テQガ曲線上Pニ限リナク接近セル極限ヲ考フルトキハ，

$$2y_1(y-y_1)=4d(x-x_1),$$

即チ

$$y_1y=2d(x-x_1)+y_1^2,$$

故ニ

$$y_1y=2d(x+x_1) \qquad (3)$$

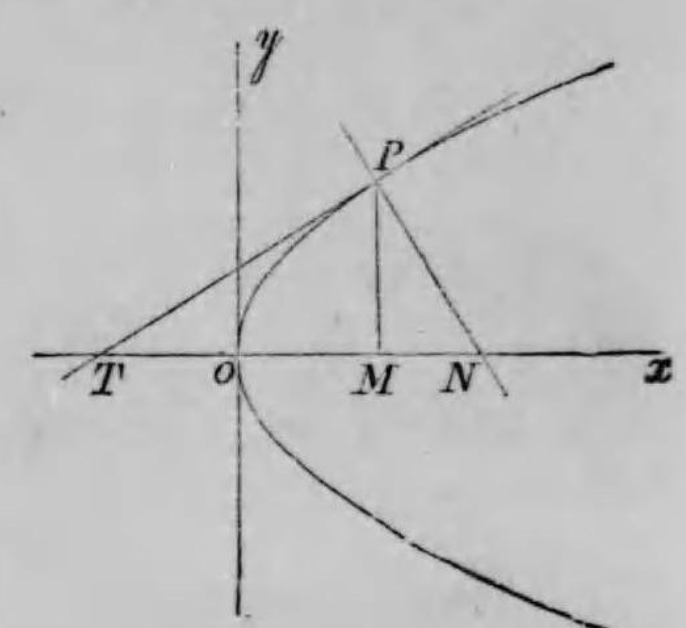
ヲ得．コレ即チPニ於ケル切線ノ方程式ナリ．

同ジ點Pニ於ケル法線ノ方程式ハ(3)ヨリ直チニ

$$2d(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0 \qquad (4)$$

ナルコトヲ知ルベシ．

第八十七圖



$P(x_1, y_1)$ニ於ケル切線及ビ法線ガx軸ト交ル點ヲ夫々T及ビNトシ,又Pヨリx軸ニ下セル垂線ノ足ヲMトス, OT及ビONノ長サハ夫々(3)及ビ(4)ニ於テ$y=0$ト置キテ求メラル．

即チ

$$OT=-x_1$$

$$ON=x_1+2d$$

ナリ．故ニPノ切線影TM及ビ法線影MNハ夫々

$$TM=2x_1, \qquad MN=2d$$

ナリ．故ニTM及ビPTハ各y軸ニヨリテ二等分セラル，又MNハPノ位置ニ關ハラズ一定ナリ．此等ノ性質ヨリ曲線上ノ一點ニ於ケル切線及ビ法線ヲ作圖スルコト容易ナリ．

62. 直線ガ拋物線ニ切スル條件．

與ヘラレタル直線

$$y=mx+b \qquad (1)$$

ガ拋物線

$$y^2=4dx \qquad (2)$$

ニ切スルタメノ條件ハ,(1)ト(2)トノ交點ガ一ツニ合スルコト,即チ(1)ト(2)ノ間ニyヲ消去シテ得ルxノ二次方程式

$$m^2x^2+2(mb-2d)x+b^2=0 \qquad (3)$$

ガ等根ヲ有スルコトナリ．故ニ求ムル條件ハ

$$(mb-2d)^2=m^2b^2$$

即チ

$$b=\frac{d}{m} \qquad (4)$$

ナリ．之ヲ(1)ニ入レテ

$$y=mx+\frac{d}{m} \qquad (5)$$

ヲ得．コレマタ切線ノ一ノ公式ナリ．

此切線ノ切點ノ座標ヲ求メンニハ,先ヅ(4)ナル條件ヲ(3)ニ入レテ之ヲ解カバxヲ得ベク,ソノ値ヲ(5)ニ入ルルトキハyヲ得ベシ. 即チ

$$x=\frac{d}{m^2},\qquad y=\frac{2d}{m}$$

ナリ. 第59節ニ述ベタル媒介變數mハ此ニ云フ處ノmナリ. 又同處ニ述ベタルtハ$\frac{1}{m}$ニ當ル.

切線(5)ヲシテ與ヘラレタル一點$P(x_1, y_1)$ヲ過ラシメンニハ,mノ値ヲ

$$y_1=mx_1+\frac{d}{m}$$

即チ

$$x_1m^2-y_1m+d=0 \qquad (6)$$

ナル方程式ヨリ定ムベシ. 此方程式ノ根ヲ(5)ニ入レ,又ハ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ニ入ルルトキハ,與ヘラレタル點PヨリE抛物線(2)ニ引ケル切線ノ方程式ヲ得. 扨(6)ノ根ハ$y_1^2-4dx_1$ガ正ナルカ,或ハ零ナルカ,或ハ負ナルカニ從テ,實ニシテ相異ル二根或ハ實ナル等根,或ハ虚根トナル. 第一ノ場合ニ於テハ點Pハ抛物線ノ外ニアリト云ヒ,第三ノ場合ニハ内ニアリト云フ. 第二ノ場合ハ即チ點Pガ抛物線上ニアル時ナリ.

抛物線ニ於テハ一點ヨリ引ケル二ツノ切線ガ相互ニ垂直ナル如キ點ノ軌跡ハ,(6)ヨリ直チニ知ラルヽ如ク,

$$x=-d$$

ニシテ,即チ準線ナリ.

63. 直徑.

抛物線

$$y^2=4dx \qquad (1)$$

ニ於テ,x軸トαナル角ヲナス平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ハ

$$y=2d\cot\alpha \qquad (2)$$

ナルコトハ第60節ニ之ヲ證明セリ. 即チ楕圓又ハ双曲線ノ場合ニ於テハ一ノ直徑トナリシ軌跡ガ,抛物線ノ場合ニ於テハx軸ニ平行ナル一ノ直線トナル. 此事ハ抛物線ヲ楕圓又ハ双曲線ノ中心ガ無究遠ニ去レル特別ノ場合ナリト見做サバ容易ニソノ當然ノ結果ナルコトヲ理會シ得ベシ. 此故ニ抛物線ニ於テハ主軸ニ平行ナル直線ヲスベテ皆**直徑**ト稱ス. 今考ヘタル軌跡(2)ハ即チ一ノ直徑ナリ.

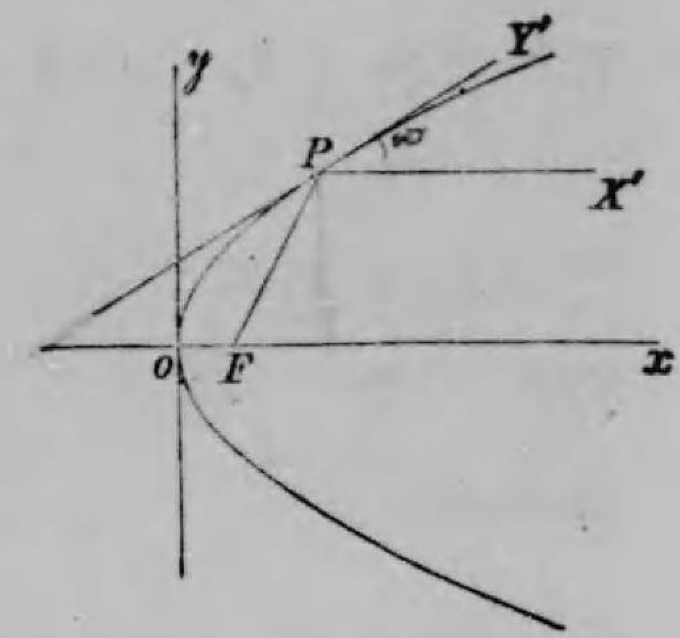
今$P(x_1, y_1)$ヲ抛物線上ノ一點トシ,PX'ヲ直徑,PY'ヲ切線トシ,コレラヲ夫々x軸及ビy軸ニ取リタルトキノ抛物線ノ方程式ヲ求ムベシ.

切線PY'ノ方程式ハ

$$y_1y=2d(x+x_1)$$

ナルニヨリ, $\angle X'PY'=\omega$ トスルトキハ

$$\tan\omega=\frac{2d}{y_1} \qquad (3)$$



第八十八圖

ナリ. 今元ノ座標軸 ox, oy ヨリ先ヅ平行移動ニヨリテ原點ヲPニ移シ,次ニ y 軸ヲ回轉シテ PY' ニ一致セシムルコトヽスルナラバ,ソノ變形式ハ

$$x=X+Y\cos\omega+x_1,$$

$$y=Y\sin\omega+y_1$$

ナリ. 之ヲ(1)ニ入ルルトキハ

$$(Y\sin\omega+y_1)^2=4d(X+Y\cos\omega+x_1)$$

故ニ

$$Y^2\sin^2\omega+2Yy_1\sin\omega+y_1^2=4dX+4dY\cos\omega+4dx_1$$

トナル. 然ルニPハ拋物線上ノ點ナルヲ以テ

$$y_1^2=4dx_1,$$

又(3)ニヨリ

$$y_1\sin\omega=2d\cos\omega$$

ナル關係アリ. 故ニ結局求ムル方程式ハ

$$Y^2\sin^2\omega=4dX$$

トナル. 故ニ此新ラシキ軸ニ關スル方程式モ亦(1)ト同ジク

$$y^2=4d_1x \qquad (4)$$

ナル形ヲ有スルモノニシテ,コヽニ

$$d_1=\frac{d}{\sin^2\omega} \qquad (5)$$

ナリ. 然ルニ(3)ニヨリ

$$\frac{1}{\sin^2\omega}=1+\frac{y_1^2}{4d^2}=1+\frac{x_1}{d}$$

ナルヲ以テ,(5)ハマタ

$$d_1=d+x_1 \qquad (6)$$

トスルコトヲ得. サテ拋物線ノ焦點ヲ $F(d, 0)$ トセバ,

$$\overline{PF}^2=(x_1-d)^2+y_1^2=(x_1+d)^2$$

ニシテ, d_1 ハ即チ $\overline{PF}$ ノ長サニ等シキモノナリ. $4d_1$ ヲ稱シテ單ニ通徑ト云フ.

座標軸ノ間ノ角ニ關係ナキ種々ノ公式等,例ヘバ切線ノ公式ノ如キハ,スベテ此新ラシキ軸ニ關シテモ同樣ノ形ニテ表ハサル.

64. 極及ビ極線.

一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ拋物線

$$y^2=4dx \qquad (1)$$

ニ引ケル切線ノ切點ヲ求ムルニハ,既ニ圓又ハ楕圓及ビ双曲線ニツイテ述ベタル同樣ノ論法ニヨリ,(1)ト

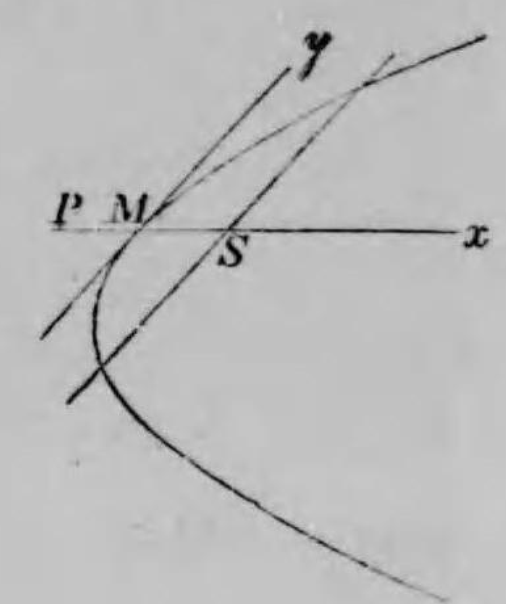
$$y_1y=2d(x+x_1) \qquad (2)$$

トヲ聯立方程式トシテ解ケバ可ナリ. 即チ(2)ハソノ二

ツノ實又ハ虚ナル切點ヲ結ビ付クル直線ノ方程式ニシテ,之ヲ點PノＰ拋物線(1)ニ關スル **極線** ト云ヒ,Pヲ(2)ノ **極** ト云フ.

今Pヲ過ル直徑ヲ引キ,之ガ拋物線ト交ル點ヲMトシ,Pノ極線ト交ル點ヲSトス. 此直徑ヲx軸ニトリ,Mニ於ケル切線ヲy軸トスルトキ,Pノ座標ヲ$(x_2, 0)$トシ,拋物線ノ方程式ヲ

第八十九圖



$$y^2=4d_1x$$

トス. 極線ノ公式ハ此軸ニ關シテモ前ニ述ベタルト同様ノ形ヲ有スベキニヨリ,Pノ極線ハ

$$0=2d_1(x+x_2)$$

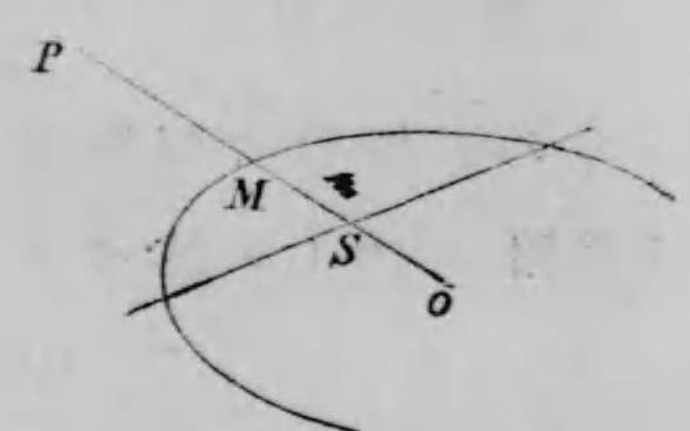
即チ
$$x=-x_2$$

ナリ. 故ニPノ極線ハMニ於ケル切線ニ平行ニシテ,且

$$\overline{PM}=\overline{MS}$$

ナル位置ニアルコトヲ知ル. 此事ハ楕圓及ビ双曲線ニツイテ第52節ニ述ベタル處ニ相應スルモノニシテ,次ノ如クニモ考ヘラル.

第 九 十 圖



Oヲ楕圓ノ中心トシ,P, M, Sノ意味ヲ前ノ如シトセバ,

$$PO.SO=MO^2$$

ナル關係アリ. 故ニ

$$\frac{MO}{PO}=\frac{SO}{MO},$$

從テ
$$\frac{MO}{PM}=\frac{SO}{MS}=\frac{MO}{MS}-1,$$

故ニ
$$\frac{1}{PM}=\frac{1}{MS}-\frac{1}{MO}$$

トナル. コヽニ於テOヲ無究遠ニ逐ヒ遣リ,曲線ヲ拋物線トスルナラバ, $\frac{1}{MO}=0$ トナルヲ以テ,

$$PM=MS$$

ヲ得ベシ.

極及ビ極線ニ關スル諸性質ハ既ニ圓等ニツイテ論ジタルトコロノ如クナルヲ以テコヽニ繰リ返サズ.

65. 焦點ニ關スル定理.

拋物線

$$y^2=4dx \qquad (1)$$

ハ有限ナル距離ニ於テハ唯一ツノ焦點$F(d, 0)$ヲ有シ,之ニ相應スル準線ハ

$$x=-d \qquad (2)$$

ナリ.

(I) 今(1)ノ上ニ一點$P(x_1, y_1)$ヲ取ラバ,

$$\overline{PF}^2=(x_1-d)^2+y_1^2 \qquad (253頁)$$

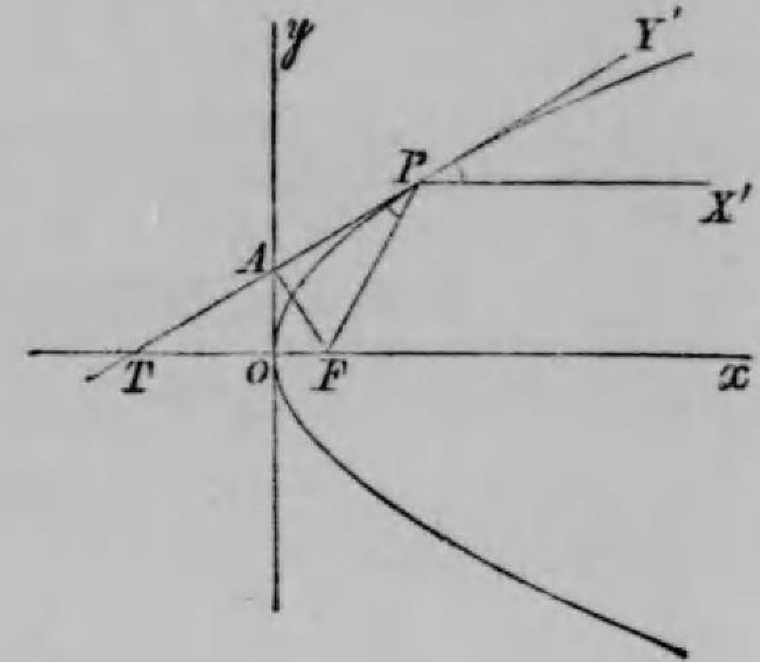
$$=(x_1+d)^2$$

ニシテ,

$$\overline{\mathrm{PF}}=x_1+d$$

ナリ. 然ルニ一方ニ於テ,Pニ於ケル切線ガx軸ト交ハル點ヲTトスルトキハ,切線ノ方程式

第九十一圖



$$y_1y=2d(x+x_1)$$

ヨリシテ,

$$\mathrm{OT}=-x_1,$$

ヲ得. 故ニ

$$\overline{\mathrm{TF}}=x_1+d$$

ナリ. 即チ PF ト TF トハ其長サ相等シ.

従テ,P ヲ過ル直徑ヲ PX′ トシ,P ニ於ケル切線ヲ TPY′ トスルトキハ,

$$\angle\mathrm{FPT}=\angle\mathrm{FTP}=\angle\mathrm{X'PY'}$$

トナル, 即チ

拋物線上ノ一點ト焦點トヲ結ブ直線ト,同ジ點ヨリ引ケル直徑トハ,ソノ點ニ於ケル切線ト相等シキ角ヲナス. 從テ又法線トモ相等シキ角ヲナス.

此事ハ楕圓又ハ双曲線ニ於ケル場合ノ第55節 (IV) ノ性質ニ當ル.

(II) 次ニFヨリ一ノ切線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ムベシ.

切線ノ方程式ヲ

$$y=mx+\frac{d}{m} \tag{3}$$

トスルナラバ, F(d, 0)ヨリ之ニ下セル垂線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{1}{m}(x-d) \tag{4}$$

ナリ. (3) ト (4) トヲ邊々相減ジテ,

$$mx+\frac{1}{m}x=0$$

即チ

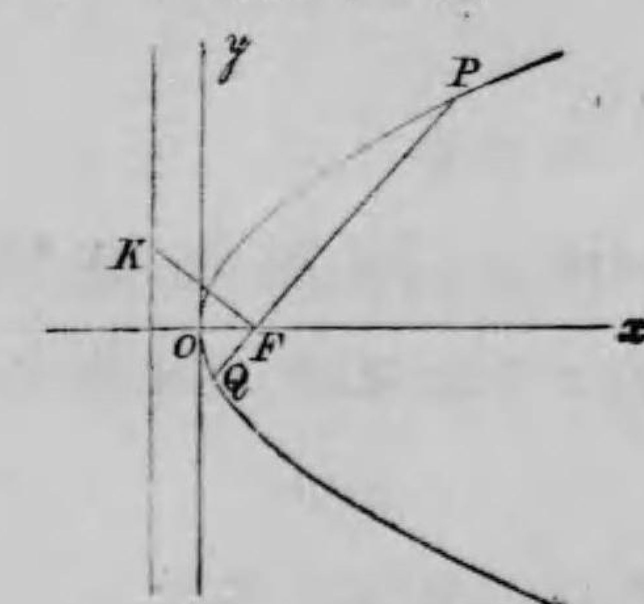
$$x=0$$

ヲ得. コレ求ムル軌跡ナリ. 此ハ楕圓又ハ双曲線ニ於ケル補助圓ノ特別ナルモノト見做サル.(第55節V)

(III) 焦點 F ノ極線ガ準線トナルコトハ容易ニ證明セラル. 依テ準線上ニ一點 K ヲ取リソノ極線ヲ作ラバ焦點ヲ過ル一ノ直線トナルベシ,之ヲ PQ トス.

K ノ座標ヲ $(-d, y_1)$ トスルトキハ, 直線 PQ ノ方程式ハ

第九十二圖



$$y_1y=2d(x-d)$$

ナリ. 又KトFトヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$\frac{y}{x-d}=\frac{y_1}{-2d}$$

ナリ. 故ニ PQ ト KF トハ明カニ垂直ナリ.

即チ **焦點ニ於テ交ハル二ツノ共軛ナル直線ハ互ニ垂直ナリ.**

(IV) $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線

$$y_1y=2d(x+x_1)$$

ニFヨリ下セル垂線ノ長サハ,

$$\frac{2d(d+x_1)}{\sqrt{y_1^2+4d^2}}$$

ニシテ,之ヲ簡單ニスルトキハ

$$\frac{2d(d+x_1)}{\sqrt{4d(x_1+d)}}=\sqrt{d(d+x_1)}=\sqrt{d.\overline{FP}}$$

ナリ. (253頁)

(V) 焦點ヲ過リ主軸ニ垂直ナル弦ヲ **通徑** ト稱ス. ソノ半分ノ長サヲ l トスルトキハ

$$l^2=4d.d=4d^2$$

ニシテ, 從テ $l=2d$ ヲ得. 故ニ通徑ノ全長ハ丁度 $4d$ ニ等シ. 第59節ニ於テ $4d$ ヲ主通徑ト名付ケタルハ之ニ起因ス.

66. 同焦點抛物線.

一ノ抛物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4dx \qquad (1)$$

トス. 今平行移動ニヨリテ原點ヲ(1)ノ焦點 $(d, 0)$ ニ移サ

バ,(1)ハ變ジテ

$$Y^2=4d(X+d)$$

トナル. コレ即チ焦點ヲ原點トシ,主軸ヲ x 軸トセル抛物線ノ方程式ナリ. 故ニ(1)ト同ジ焦點及ビ主軸ヲ有スルスベテノ抛物線ノ方程式ハ此新ラシキ座標軸ニ關シテ常ニ

$$Y^2=4k(X+k) \qquad (2)$$

ナル形ヲ有スベシ,コヽニ k ハ任意ノ常數ナリ. 再ビ平行移動ニヨリ,元ノ原點ニ戻サバ,(2)ハ

$$y^2=4k(x+k-d) \qquad (3)$$

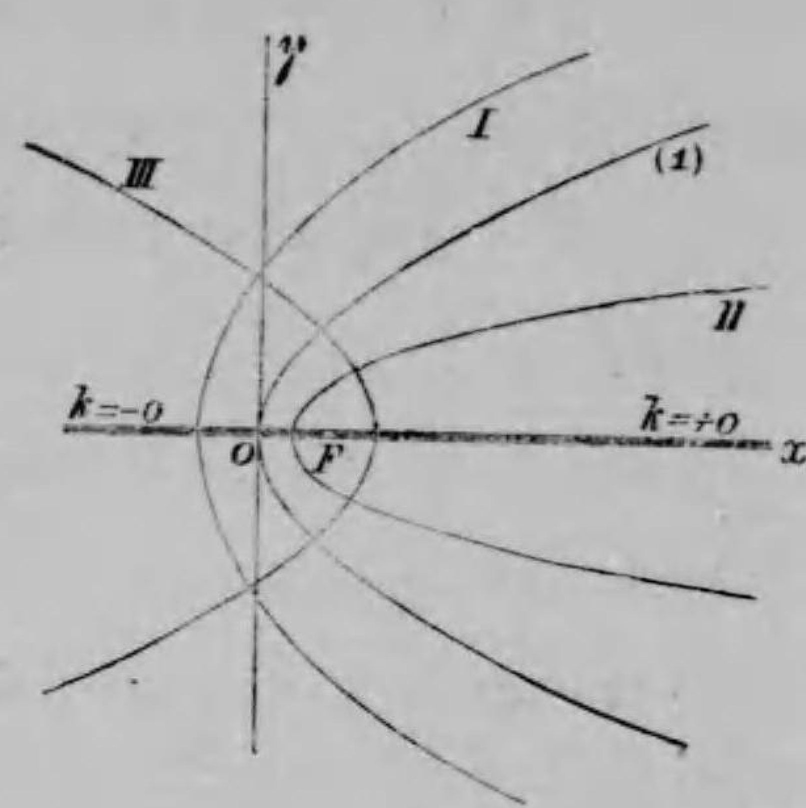
トナル. (3)ハ(1)ト同ジ焦點及ビ主軸ヲ有スル抛物線ノ一般ノ式ニシテ,斯クノ如キ抛物線ヲ稱シテ **同焦點抛物線** ト云フ.

(3)ニ於ケル k ノ値ヲ種々ニ變化セシメテ,ソノ抛物線ノ變遷ヲ吟味セントスルニ當リ,便宜上主通徑ガ正ナル抛物線ヲ右向キノ抛物線ト云ヒ,負ナルモノヲ左向キノ抛物線ト云フコトニ定ムベシ.

I. $k>d>0$. 此場合ニハ(3)ハ右向キニシテ,ソノ頂點ハ(1)ノ頂點即チ原點ヨリモ左ニアリ. k ガ d ニ近ヅクニ隨ヒ(3)ハ(1)ニ近ヅキ,又之ニ反シテ k ガ d ヨリ漸次限リナク大トナレバ,(3)ノ頂點ハ限リナク左方ニ去リ,曲線ハ次第ニ(1)ヨリ遠ザカル.

II. $d>k>0$. 此場合ニモ(3)ハ右向キニシテ,ソノ頂點ハ(1)ノ頂點Oト焦點Fトノ間ニアリ. kガ零ニ近ヅクニ從ヒ(3)ノ頂點ハ次第ニFニ近ヅキ,曲線ハ次第ニ主軸ニ沿ヒテ扁平トナル.

第九十三圖



III. $k<0$. 此場合ニハ(3)ハ左向キノ拋物線ニシテ,頂點ハFノ右ニアリ. kガ絶對値ヲ增スニ從ヒ(3)ハ漸次右ニ進ムベク,之ニ反シテkガ零ニ近ヅクニ從ヒ,(3)ノ頂點ハFニ近ヅキ,曲線ハ次第ニ主軸ニ沿ヒテ扁平トナル.

$k=0$ナルトキハ,(3)ハ$y^2=0$トナリ主軸ヲアラハス. 依テコノ場合ニハ上記ノ研究ノ結果ヨリ推シテ,kガ正ニシテ終ニ0トナリタルモノトスルナラバ,Fヨリ右ニアル主軸ノ部分ヲ二重ニアラハスモノトシ,之ニ反シテkガ負ニシテツイニ0トナリタルモノトセバ,Fヨリ左ニアル主軸ノ部分ヲ二重ニアラハスモノト考フベシ. 前者ハ右向キノ拋物線ノ特別ナル場合トシ,後者ハ左向キノモノノ特別ナル場合トス.

與ヘラレタル一點ヲ過リ,與ヘラレタル拋物線ト同焦點ナル拋物線ヲ求メンニハ,先ヅ與ヘラレタル拋物線ノ焦點及ビ主軸ヲソレゾレ原點及ビx軸トシ,ソノ方程式ヲ

$$y^2=4d(x+d) \qquad (4)$$

トシ,與ヘラレタル點ヲ$P(x_1, y_1)$トス.

(4)ト同焦點ナル拋物線ノ一般ノ方程式ハ

$$y^2=4k(x+k)$$

ナルヲ以テ,之ガPヲ通ズルトキハ

$$y_1^2=4k(x_1+k) \qquad (5)$$

ナル關係アリ. (5)ハkニ關スル二次方程式ニシテソノ判別式ハ

$$16x_1^2+16y_1^2$$

ナルヲ以テ,ソノ二根ハ常ニ實ニシテ,x_1及ビy_1ガ同時ニ零ナラザル限リ相異ナル.

今$y_1 \neq 0$トセバ,(5)ノ二根ハ一ハ正ニシテ一ハ負ナリ. 故ニPガ(4)ノ主軸上ニアラザルトキハ,Pヲ通ジテ(4)ト同焦點ナル拋物線ハ常ニ二ツアリ. 一ハ右向キニシテ,一ハ左向キナリ.*

扨今一點$P(x_1, y_1)$ヲ通ズル二ツノ同焦點拋物線ノ方程式ヲ一般ニ

$$y^2=4d(x+d)$$
$$y^2=4k(x+k)$$

トスルトキハ,共ニPヲ過ルニヨリ,

* $y_1=0$ノ場合ハ中川解析幾何487頁ヲ見ヨ.

$$y_1^2=4d(x_1+d)$$

$$y_1^2=4k(x_1+k)$$

ナル關係アリ, コノ二式ノ間ニ x_1 ヲ消去シテ

$$y_1^2+4dk=0 \qquad (6)$$

ヲ得. 然ルニ今 P ニ於テ兩方ノ抛物線ニ切線ヲ引カバ, ソノ方程式ハ

$$y_1y=2d(x+x_1+2d)$$

$$y_1y=2k(x+x_1+2k)$$

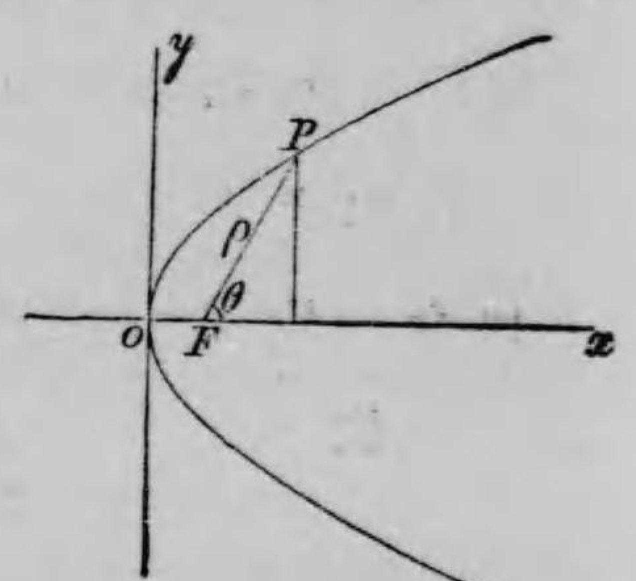
ナルヲ以テ,(6)ハ此二ツノ切線ガ互ニ垂直ナルコトヲ示スモノナリ. 故ニ

ニツノ同焦點抛物線ガ相交ハルトキハ必ズ直交ス.

67. 極方程式.

抛物線

第九十四圖



$$y^2=4dx$$

ノ焦點 F$(d, 0)$ ヲ極トシ, Fx ヲ原線トセルトキノ極座標ニ於ケル方程式ヲ求メントス.

曲線上ノ一點ヲ P(x_1, y_1) トセヨ, 第63節ニヨリ

$$\rho=\overline{\mathrm{PF}}=x_1+d$$

$$=(\rho\cos\theta+d)+d,$$

故ニ

$$\rho=\frac{2d}{1-\cos\theta}$$

ナリ. コヽニ $2d$ ハ通徑ノ半分ニ等シク, l ヲ以テ表ハサルヽモノナルヲ以テ(258頁 V),求ムル極方程式ハ

$$\rho=\frac{l}{1-\cos\theta} \qquad (1)$$

トナル.

モシ FO ノ方向ヲ原線ノ正ノ向キトスルトキハ,方程式ハ

$$\rho=\frac{l}{1+\cos\theta} \qquad (2)$$

トナルベシ.

第58節ト併セテ考フルニ, 楕圓ニ於テハ左ノ焦點ヲ, 双曲線ニ於テハ右ノ焦點ヲ極トスルコトニ定ムルナラバ,三種ノ固有ノ二次曲線ノ極方程式ハ常ニ

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta} \qquad (3)$$

ナル形ニ表ハシ得ベシ. コヽニ l 及ビ e ハ各曲線ニ於テ特有ノ値ヲ取ルモノトス.

【例】 二次曲線ノ上ノ一點 P(ρ_1, θ_1) ニ於ケル切線ノ極方程式ヲ求ム.

曲線ノ式ヲ(3)ノ如シトス. ソノ上ニ P ノ他ニ一點 Q(ρ_2, θ_2) ヲ取リ, 先ヅ直線 PQ ノ方程式ヲ作ラバ

$$\rho\{\rho_1\sin(\theta-\theta_1)+\rho_2\sin(\theta_2-\theta)\}+\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)=0$$

トナル.(第四章,問題18.) コヽニ於テ

$$\rho_1=\frac{l}{1-e\cos\theta_1},\qquad \rho_2=\frac{l}{1-e\cos\theta_2}$$

ヲ入レテ簡約スレバ,

$$\frac{l}{\rho}=\frac{\cos\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}-e\cos\theta$$

ヲ得. 依テQヲPニ近ヅケタル極限トシテ, Pニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{l}{\rho}=\cos(\theta-\theta_1)-e\cos\theta$$

トナル.

問　　題

1. 抛物線 $y^2=4dx$ ノ上ニアル二點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ニ於ケル切線ノ交點ノ座標ハ

$$\left(\frac{y_1y_2}{4d},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ナルコトヲ示セ.

2. 抛物線上ノ一點PノX縱線ヲ PM トス. PM ノ中點ヲ通ジ,主軸ニ平行ナル直線ガ曲線ト交ル點ヲQトシ,又直線 MQ ガ頂點Aニ於ケル切線ト交ル點ヲTトセバ, $AT=\frac{2}{3}PM$ ナルコトヲ證明セヨ.

3. 抛物線 $y^2=4dx$ ノ焦點ニ一ツノ頂點ヲ有シ,他ノ二ツノ頂點ハ曲線上ニアル正三角形ノ一邊ノ長サヲ求ム.

4. 抛物線ニ於テ一定點ヲ通ズル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

5. 共通ノ主軸ヲ有スル二ツノ抛物線アリ. 一方ノ曲線ノ頂點ヲソノ主軸ニ沿ヒテ適當ニ滑ラシメバ,二ツノ曲線ハ相重リ合フコトヲ得ルモノトス. 然ルトキハソノ一方ニ引ケル切線ト他ノ曲線トノ二ツノ交點ハ切點ヨリ等距離ニアルコトヲ證明セヨ.

6. 抛物線ニ於テ常ニ一定ノ距離ヲ有スル二ツノ直徑ガ曲線ト交ル點ヲP及ビQトス. P,Q ニ於ケル切線ノ交點ハ又一ノ抛物線上ニアルコトヲ證明セヨ.

7. 抛物線 $y^2=4dx$ ノ上ニアル三點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ヲ結ビ付ケテ得ル三角形ノ面積ハ

$$\left|\frac{1}{8d}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right|$$

ナルコトヲ示セ.

8. 抛物線ノ三ツノ切線ヨリ成ル三角形ノ面積ハ,ソノ三ツノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ノ半分ナルコトヲ證明セヨ.

9. 三角形 ABC ノ頂點Aガ底邊 BC ニ平行ナル一直線上ニ動クトキ,此三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求ム.

10. 相等シキ縱線ヲ有スル二點 P, Q ヨリ曲線 $y^2=4dx$ ニ引ケル切線ノ方向係數ガ夫々 m_1, m_2 及ビ n_1, n_2 ナルトキハ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

11. 一點ヨリ拋物線ニ引ケル二ツノ切線ノ間ノ角ガ一定ナル如キ點ノ軌跡ヲ求ム.

12. 拋物線上ニアル任意ノ二點 P, Q ノ中點ヲ通ル直徑ト,焦點ヨリ直線 PQ ニ下セル垂線トノ交點ノ軌跡如何.

13. AB, CD ハ圓ノ垂直ナル二ツノ直徑ナリ. A ヲ通ズル弦 AF ガ CD ト交ハル點ヲ E トシ, E ヲ通ジテ AB ニ平行ナル直線ト FB トノ交點ヲ P トス. P ノ軌跡ヲ求ム.

14. 拋物線ニ內接セル直角三角形ノ直角頂ガ常ニ曲線ノ頂點ニアルトキ,ソノ斜邊ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

15. PQ ハ拋物線ノ一ノ弦ニシテ, PT ハ P ニ於ケル切線トス. 主軸ニ平行ナル一ノ直線ガ弧 PQ ト交ハル點ヲ E トシ, PT ト交ハル點ヲ T トシ, PQ ト交ル點ヲ F トスルトキハ,

$$TE:EF=PF:FQ$$

ナルコトヲ證明セヨ.

16. 一點 P ヨリ拋物線ニ引ケル二ツノ切線ト,ソノ切點ヲ結ビ付クル弦トガ作ル三角形ノ面積ガ一定ナルトキ, P ノ軌跡ヲ求ム.

17. 拋物線ノ圖アリ. 定規ト兩脚規トヲ用ヒテ,ソノ

主軸ヲ見出ス法如何.

18. 拋物線 $y^2=4dx$ アリ. 一ツノ直線 $y=mx+b$ ガソノ法線ナルタメノ條件如何.

19. 拋物線ノ焦點ヨリ任意ノ法線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム.

20. 拋物線ニ於テ相互ニ垂直ナル法線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

21. 拋物線上ノ一點ニ於ケル切線ガ通徑ト準線トニ交ハル二ツノ點ハ焦點ヨリ等距離ニアルコトヲ證明セヨ.

22. 拋物線ノ焦點ヲ通ズル弦ヲ PQ トシ,曲線ノ頂點ヲ O トセバ,三角形 OPQ ノ面積ハ PQ ノ長サノ平方根ニ比例スルコトヲ證明セヨ.

23. 拋物線ノ三ツノ切線ガ作ル三角形ノ垂心ハ準線ノ上ニアルコトヲ證明セヨ.

24.* 前問ニ於ケル三角形ノ外接圓ハ焦點ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

25. 拋物線ニ關シ一點 P ノ極線ニ P ヨリ垂線ヲ下シ,ソノ足ヲ T トシ,又此垂線ガ主軸ト交ル點ヲ S トセバ, T ト S トハ焦點ヨリ等距離ニアルコトヲ證明セヨ.

26. 前問ニ於テ P ノ極線ガ主軸上ノ一定點 R ヲ通ルトキハ, S ハ定點ニシテ T ノ軌跡ハ RS ヲ直徑トスル圓

トナルコトヲ證明セヨ.

27. 抛物線ノ準線ト主軸トノ交點Pヲ通ジ任意ノ直線ヲ引キ,曲線ト交ル點ヲQ, Rトシ,又焦點Fヲ通ジテコレニ平行ナル直線ガ曲線ト交ル點ヲ Q_1, R_1 トセバ,

$$PQ.PR=FQ_1.R_1F$$

ナルコトヲ證明セヨ.

28. 抛物線上ノ一點ト焦點トヲ直徑ノ兩端トスル圓ハソノ抛物線ノ頂點ニ於ケル切線ニ切スルコトヲ證明セヨ.

29. 抛物線ノ焦點ヲ通ズル任意ノ弦ノ兩端ヲ P_1, P_2 トシ,コノ二點ヲ足トスル法線ガ主軸ト交ル點ヲ Q_1, Q_2 トスルトキハ,

$$\frac{1}{P_1Q_1^2}+\frac{1}{P_2Q_2^2}$$

ハ一定ナルコトヲ證明セヨ.

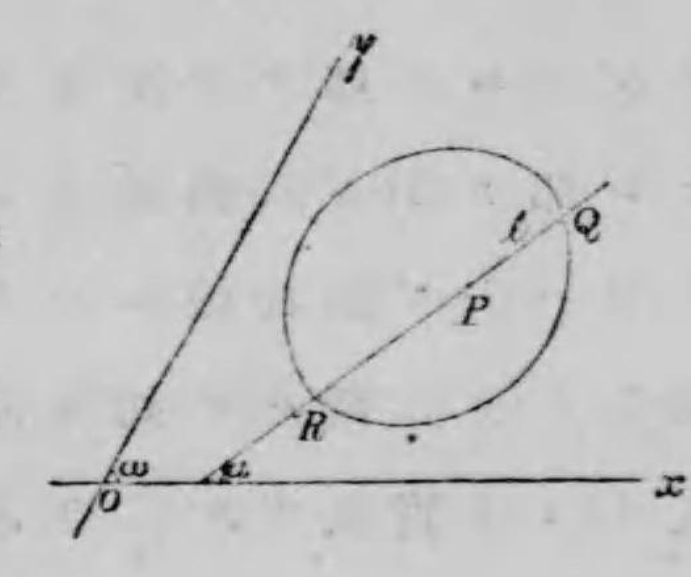
第九章

二次曲線一般論

68. 二次曲線ノ分類.

三種ノ固有ナル二次曲線ノ各ニ就テノ性質ヲ知ラント欲セバ,前二章ニ於ケルガ如ク曲線ノ方程式ヲ始メヨリ標準ノ形ニ取リテ之ヲ研究スレバ足レリ. 然レドモ又或ル場合ニハ曲線ノ方程式ヲ一般ノ形ニ取ル方ガ却ッテ便利ナルコトモアルヲ以テ,本章ニハ軸ヲ必ズシモ直交軸ト限ラズシテ一般ノ二次方程式ヨリ曲線ノ性質ヲ論ゼントス.

第九十五圖



一ノ二次曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad (1)$$

トシ,一點 $P(x_1, y_1)$ ヲ過リ x 軸ト α ナル角ヲナス直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_1}{t}=\frac{y-y_1}{s}=l \quad (2)$$

トス. コヽニ

$$t=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega},\quad s=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$$

ニシテ,l ハ P ヨリ此直線上任意ノ一點 (x,y) マデノ距離ヲ示ス.(40頁參照)

直線(2)ガ二次曲線(1)ト交ル點ヲ Q, R トシ, PQ, PR ノ長サヲ求メンニハ,(2)ヨリ

$$x=tl+x_1,\qquad y=sl+y_1$$

ヲ出シ,之ヲ(1)ニ入レテ l ニ關スル二次方程式ヲ作リ之ヲ解ク可キナリ. 此二次方程式ハ

$$Al^2+2Bl+C=0 \qquad (3)$$

ナル形ニシテ,コヽニ

$$\begin{aligned} A&=at^2+2hts+bs^2,\\ B&=(ax_1+hy_1+g)t+(hx_1+by_1+f)s,\\ C&=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c \end{aligned}$$

ナリ.

モシ直線(2)ノ方向ガ丁度

$$A=at^2+2hts+bs^2=0 \qquad (4)$$

ナラシムル如クナルトキハ,l ノ一ノ値ハ無限大トナル. コレ即チ(1)ガ双曲線ニシテ(2)ガソノ漸近線ニ平行ナルカ,又ハ(1)ガ拋物線ニシテ(2)ガソノ主軸ニ平行ナルカノ場合ナリ. 斯クノ如キ直線(1)ガ實在スルカ否カハ,方程式(4)ヨリ實數ナル $\frac{t}{s}$ ヲ求メ得ルカ否カニヨリテ定マル. 即チソノ判別式 h^2-ab ガ正ナラバカクノ如キ二ツノ相異ナレル方向ガ實在シ,零ナラバソノ二ツノ方向ハ相合

シテ唯一ツノ方向ガ實在シ,負ナラバ全ク實在セズ. 故ニ斜交軸ニ於テモ三種ノ二次曲線ノ判定ハ矢張 h^2-ab ノ符號ニヨルコトヲ知ル.

次ニハ直線(2)ノ方向 α ガ一定セリトシ,從テ t, s モ一定ナリトシ,x_1 及ビ y_1 ノ値ガ丁度 B=0 ナラシムル如キモノナリトセバ,l ノ二ツノ値ハ絶對値ガ相等シク符號ハ相反ス. 故ニ P ハ弦 QR ノ中點トナル. 依テ一般ニ x 軸ト α ナル角ヲナス弦ノ中點ノ軌跡即チ直徑ハ

$$(ax+hy+g)t+(hx+by+f)s=0$$

ナル直線ナリ. 然ルニ此直線ハ α ノ如何ニ關ハラズ常ニ二ツノ定直線

$$ax+hy+g=0,\qquad hx+by+f=0$$

ノ交點ヲ過ル. 故ニ此二直線ノ交點ハ即チ二次曲線(1)ノ中心ナルベシ. 即チ中心ヲ見出ス式ハ斜交軸ニ於テモ直交軸ニ於テモ同樣ニシテ, $ab-h^2$ ガ零ナラザル限リ,有限ノ距離ニ於テ一ノ確定セル中心ヲ得.

以上述ベタルトコロニヨリ,一般ノ軸ニ關スル一ノ二次方程式(1)ニ於テ,ソノ判別式 Δ ガ零ナラザルトキ即チ二ツノ直線トナラズシテ固有ノ二次曲線ヲアラハストキ(第23節),楕圓,双曲線,拋物線ノ何レヲ表ハスカハ次ノ如クニ判定シ得ベシ.

$$\Delta \neq 0,\begin{cases} ab-h^2>0, & 楕圓 \\ ab-h^2<0, & 双曲線 \\ ab-h^2=0, & 拋物線. \end{cases}$$

此中第一ノ場合ニ於テ楕圓ガ實ナルカ虚ナルカ($\Delta \neq 0$トスレバ點楕圓ナルコトナシ)ヲ決定セント欲セバ,先ヅ軸ノ平行移動ニヨリ原點ヲ(1)ノ中心ニ移スベシ. 然ルトキハ(1)ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+\frac{\Delta}{ab-h^2}=0 \qquad (5)$$

トナルベシ. 此證明ハ第40節ニ於ケルト同ジ. 扨モシ(5)ガ實ナル楕圓ナラバ,中心ヲ通ズル任意ノ直線ハ常ニ曲線ト實ナル二點ニ於テ會スベク,モシ虚ナル楕圓ナラバ虚ナル二點ニテ會スベシ. 特別ノ場合トシテ,(5)ニ於テ $x=0$ ト置カバ

$$by^2+\frac{\Delta}{ab-h^2}=0$$

ヲ得. 而シテ $ab-h^2>0$ ナルヲ以テ b ハ零ナルコトナシ. 故ニ楕圓ガ實ナルカ虚ナルカハ, $b\Delta<0$ ナルカ $b\Delta>0$ ナルカニヨリテ定マル. 同様ニ又 $y=0$ ト置キテ考フレバ $a\Delta<0$ ナルカ $a\Delta>0$ ナルカニヨリテ定マルトモ云フヲ得.

之ニヨリテ見レバ,軸ガ直交スルト否トニ關セズ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2=4dx$$

等ハ夫々實在セル楕圓,双曲線,拋物線等ヲ表ハスコト明カナリ.

與ヘラレタル曲線(1)ガ双曲線ナルトキ,ソノ漸近線ノ方向ハ方程式(4)ニヨリテ定マルヲ以テ,原點ヲ過リ之ニ平行ナル二ツノ直線ノ方程式ヲ作ランニハ,(4)ト

$$\frac{x}{t}=\frac{y}{s}$$

トノ間ニ t 及ビ s ヲ消去スレバ可ナリ. 即チ

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

ヲ得. 故ニ(1)ニ於ケル二次ノ項丈ヲ零ニ等シト置カバ,原點ヲ過リ漸近線ニ平行ナル直線ヲアラハス方程式トナルコトヲ知ル. モシ中心ノ座標ヲ (x_0, y_0) トセバ漸近線ノ方程式ハ

$$a(x-x_0)^2+2h(x-x_0)(y-y_0)+b(y-y_0)^2=0$$

トナル. 此左邊ヲ變形シ第40節(8)ヲ利用スルトキハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c-\frac{\Delta}{ab-h^2}=0 \qquad (6)$$

トナル. 楕圓ニ於テハ此式ハ勿論實在セル直線ヲアラハサヾレドモ,ナホ之ヲ稱シテ楕圓ノ **虚ナル漸近線** ト云フコトアリ.

サレバ有心二次曲線ノ實又ハ虚ナル漸近線ノ式ハ常ニ(6)ニシテ,ソノ二直線ノ間ノ角ヲ ϕ トセバ,第23節ニヨリ

$$\tan\phi=\frac{2\sqrt{h^2-ab}\,\sin\omega}{a+b-2h\cos\omega} \qquad (7)$$

ナリ.

69. 切　線.

前節ノ方程式(3)ニ於テ,P ガ曲線上ニアルトキハ,C=0 ナリ. 依テ l ノ一ツノ値ハ零ナリ. モシ更ニ直線ノ方向ヲ B=0, 即チ

$$\frac{s}{t}=-\frac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f} \qquad (1)$$

ナル様ニ取ラバ,更ニ他ノ一ノ l ノ値モ零トナリ,直線ハ P ニ於ケル切線トナル. (1)ト前節ノ(2)ヨリ s, t ヲ消去スルトキハ,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}$$

即チ

$$(ax_1+hy_1+g)(x-x_1)+(hx_1+by_1+f)(y-y_1)=0$$

トナル. コレ即チ曲線上ノ一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ式ナリ. 之ヲ更ニ書キ直ストキハ

$$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y$$
$$-(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+gx_1+fy_1)=0$$

トナル. 然ルニ (x_1, y_1) ハ曲線上ノ點ナルヲ以テ

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+gx_1+fy_1=-gx_1-fy_1-c$$

ナリ. 依テ上式ハ

$$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+(gx_1+fy_1+c)=0 \qquad (2)$$

トナル. 或ハマタ

$$ax_1x+h(y_1x+x_1y)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \qquad (3)$$

トモ書クコトヲ得ベシ.

切線ノ公式ハマタ次ノ如クニシテモ求メラル. 先ヅ曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

トシ,ソノ上ニ二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ取リ,直線 PQ ノ方程式ヲ作ラバ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$

ナリ. 然ルニ P, Q ハ何レモ曲線上ニアルヲ以テ,

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$
$$ax_2^2+2hx_2y_2+by_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$$

ナル關係アリ. 邊々相減ズルトキハ

$$a(x_2^2-x_1^2)+2h(x_2y_2-x_1y_1)+b(y_2^2-y_1^2)$$
$$+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0$$

即チ

$$a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+2h\{x_2(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_1)\}$$
$$+b(y_2+y_1)(y_2-y_1)+2g(x_2-x_1)+2f(y_2-y_1)=0,$$

故ニ

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{a(x_2+x_1)+2hy_1+2g}{2hx_2+b(y_2+y_1)+2f}$$

ヲ得. 之ヲ(4)ニ代入シ,分母ヲ拂ヘバ

$$\{a(x_2+x_1)+2hy_1+2g\}(x-x_1)$$
$$+\{2hx_2+b(y_2+y_1)+2f\}(y-y_1)=0$$

トナル. コヽニ於テQガ曲線上限リナクPニ接近セル場合ヲ考ヘ, x_2, y_2 ノ代リニ夫々 x_1, y_1 ト置キテ

$$(ax_1+hy_1+g)(x-x_1)+(hx_1+by_1+f)(y-y_1)=0$$

ヲ得. コレ即チPニ於ケル切線ノ方程式ニシテ,前ノ如ク取扱ヘバ再ビ(2)又ハ(3)ヲ得ベシ.

モシ直交軸ナラバ之ヨリ容易ニ法線ノ式ヲ求メ得ベシ.

又點 $P(x_1, y_1)$ ガ曲線上ニアラザルトキハ,(2),(3)ノアラハス直線ハ即チPノ極線ニシテ,之ニ關スル理論ハスベテ前數章ニ述ベタルトコロノ如シ.

70. 一點ヨリ二次曲線マデノ距離.

一點 $P(x_1, y_1)$ ヨリ x 軸ト α ナル角ヲナス直線ヲ引キ,二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

ト交ル點ヲQ,Rトス. PQ,PRノ長サヲ求ムベキ方程式ハ第68節(3)ニ述ベタル如ク

$$\mathrm{A}l^2+2\mathrm{B}l+\mathrm{C}=0 \qquad (2)$$

ニシテ,コヽニ

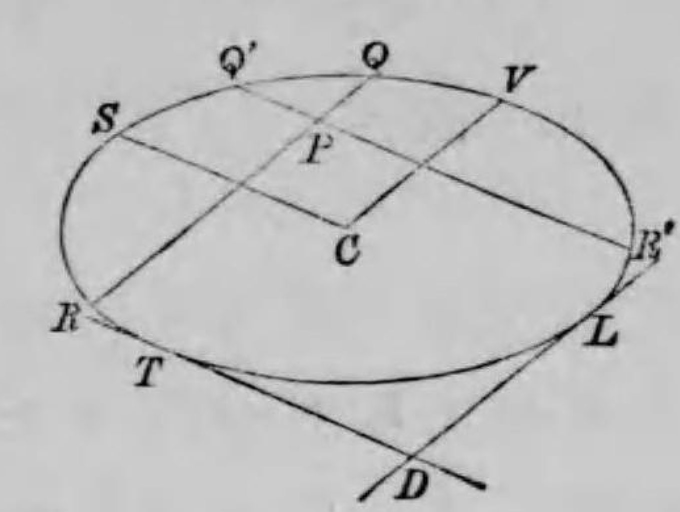
$$\mathrm{A}=at^2+2hts+bs^2,$$

$$\mathrm{B}=(ax_1+hy_1+g)t+(hx_1+by_1+f)s,$$
$$\mathrm{C}=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c,$$
$$t=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}, \quad s=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$$

ナリ. 故ニ

$$\mathrm{PQ.PR}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$$
$$=\frac{ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c}{at^2+2hts+bs^2}$$

第九十六圖



ナリ. 今同ジ點Pヲ過リ更ニ x 軸ト α' ナル角ヲナス直線ヲ引キ,之ガ曲線ト交ハル點ヲQ', R'トスルナラバ,PQ'. PR'ナル積ノ値ハ上ノ式ト同ジ形ニシテ, α ヲ α' ニ代ヘタルモノナルベシ. 從テ上ノ式ノ分母ニ於テハ t, s ノ代リニソレゾレ

$$t'=\frac{\sin(\omega-\alpha')}{\sin\omega}, \quad s'=\frac{\sin\alpha'}{\sin\omega}$$

ガ入ル可シト雖,分子ハ變ラズ. 故ニ

$$\frac{\mathrm{PQ.PR}}{\mathrm{PQ'.PR'}}=\frac{at'^2+2ht's'+bs'^2}{at^2+2hts+bs^2}$$

ナル關係ヲ得. 即チ左邊ノ如キ比ノ値ハ弦QR, Q'R'ノ方向ニノミ關スルモノニシテ,P點ノ位置ニハ無關係ナ

リ. 故ニ今特別ノ場合トシテ,P ガ曲線ノ中心 C ニ來レリトシ, CV, CS ヲ夫々 PQ, PQ' ニ平行ナル半徑ナリトスルトキハ,

$$\frac{PQ.PR}{PQ'.PR'}=\frac{CV^2}{CS^2}.$$

又他ノ特別ノ場合トシテ,P ヲ曲線ノ外ノ一點 D トシ, PQ, PQ' ニ夫々平行ナル切線 DL, DT ノ交點ナリトスルトキハ

$$\frac{PQ.PR}{PQ'.PR'}=\frac{DL^2}{DT^2}$$

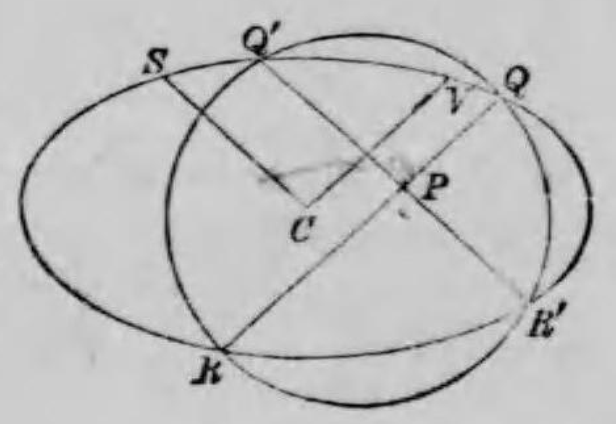
ナリ. 故ニ

$$\frac{DL}{DT}=\frac{CV}{CS}$$

トナル. 即チ一點ヨリ二次曲線ニ引ケル二ツノ切線ノ切點マデノ間ノ長サノ比ハ夫々之ニ平行ナル半徑ノ比ニ等シ.

今一ツノ圓ガ二次曲線ト四ツノ點 Q, Q', R, R' ニ於テ相交ルトキ,弦 QR, Q'R' ノ交點ヲ P トスルトキハ

第九十七圖



$$PQ.PR=PQ'.PR'$$

ナリ. 故ニコレラノ弦ニ平行ナル二次曲線ノ半徑ヲ CV, CS トセバ

$$CV=CS$$

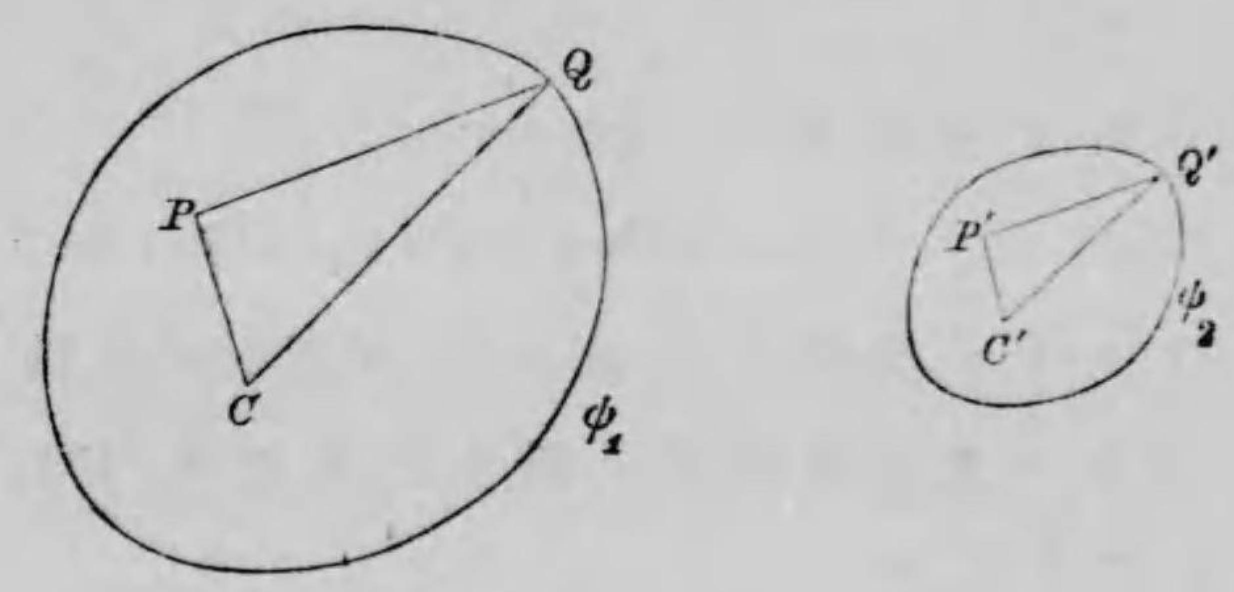
ナルベシ. 故ニ CV ト CS トハ曲線ノ主軸ト相等シキ角ヲナス. 從テ又 QR, Q'R' モ主軸ト相等シキ角ヲナスベシ. 此性質ハ弦 QQ' ト RR' 又ハ QR' ト Q'R ニツイテモ同様ナリ. 即チ二次曲線ガ一ノ圓ト交ルトキハ,ソノ三對ノ共通弦ハ各一對ヅヽ曲線ノ主軸ト相等シキ角ヲナスモノナリ.

71. 相似二次曲線.

一點ト二次曲線上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ヲ **動徑** ト云フ. 今二ツノ固有ノ二次曲線 ϕ_1, ϕ_2 アルトキ,或ル一定點ヨリ任意ノ方向ニ引ケル ϕ_1 ノ動徑ト,他ノ一定點ヨリ之ニ平行ニ引ケル ϕ_2 ノ動徑トノ比ガ常ニ一定ナルトキハ,二ツノ曲線ハ **相似ニシテ相似ノ位置ニアリ** ト云ヒ,二ツノ定點ヲ **相似ノ中心** ト云フ.

今 P ト P' トヲ一双ノ相似ノ中心トシ, PQ, P'Q' ヲ平行ナル動徑トシ

第九十八圖



$$PQ=k.P'Q'$$

トス. コヽニ k ハ一ノ常數ナリ. 然ルトキハ P ヨリ任

意ノ方向ニ任意ノ長サノ線分 PC ヲ作リ,之ニ平行ニ且ツ同ジ方向ニ P′ ヨリ P′C′ ヲ引キ,且ソノ長サヲ

$$PC=k.P'C'$$

ナラシムルトキハ,C ト C′ トハ又 ϕ_1, ϕ_2 ニ對シテ一双ノ相似ノ中心トナルベシ. 何トナレバ,コレヲ夫々兩曲線上ノ相對應スル點 Q, Q′ ニ結ビ付クレバ,三角形 PCQ ト P′C′Q′ ハ明カニ相似三角形ナルヲ以テ, CQ, C′Q′ ハ平行ニシテ且

$$CQ=k.C'Q'$$

ナラザル可ラズ. 故ニ二ツノ曲線ガ相似ニシテ相似ノ位置ニアルトキハ,相似ノ中心ハ無數ニ多クアリ.

モシ一方ノ相似ノ中心ガソノ曲線ノ中心ナラバ,他ノ一方モ亦之ニ相應スル曲線ノ中心ナルベシ. 而シテ兩曲線ノ主軸ノ方向ハソレゾレ平行ス. コレラハ何レモ動徑ノ比ガ一定ナルコトヨリ直チニ推知セラルヽトコロナリ.

ϕ_1 ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

トシ,P ノ座標ヲ (x_1, y_1) トシ,又 PQ ガ x 軸トナス角ヲ α トスルトキハ,第68節ニ於ケルガ如ク, PQ ノ長サ l ヲ定ムル方程式ハ

$$Al^2+2Bl+C=0 \qquad (2)$$

ニシテ,コヽニ

$$A=at^2+2hts+bs^2,$$
$$B=(ax_1+hy_1+g)t+(hx_1+by_1+f)s,$$
$$C=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c,$$
$$t=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}, \quad s=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$$

ナリ. 同様ニ ϕ_2 ノ方程式ヲ

$$a_1x^2+2h_1xy+b_1y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \qquad (3)$$

トシ, P′ ノ座標ヲ (x_2, y_2) トセバ, P′Q′ ノ長サ l_1 ヲ定ムル方程式ハ

$$A_1l_1^2+2B_1l_1+C_1=0 \qquad (4)$$

ニシテ,コヽニ A_1, B_1, C_1 ハ A, B, C ニ於ケル x_1, y_1 ノ代リニ夫々 x_2, y_2 ヲ入レ,(1) ノ係數ノ代リニ夫々之ニ相應スル(3)ノ係數ヲ入レタルモノナリ.

然ルニ ϕ_1, ϕ_2 ガ相似ニシテ相似ノ位置ニアルトキハ, α ノ如何ニ關ハラズ

$$l=kl_1$$

ナルヲ以テ,(2) ト (4) トヨリ

$$\frac{k^2A}{A_1}=\frac{kB}{B_1}=\frac{C}{C_1} \qquad (5)$$

ナル關係ヲ得. 又逆ニ此關係アラバ必ズ $l=kl_1$ ニシテ, ϕ_1, ϕ_2 ハ相似ニシテ相似ノ位置ニアリ.

(5) ノ第三邊ハ α ヲ含マザル式ナリ. 故ニ之ト相等シ

キ第一邊

$$k^2\frac{A}{A_1}=k^2\frac{at^2+2hts+bs^2}{a_1t^2+2h_1ts+b_1s^2}$$

モ亦 α ニ無關係ナラザル可ラズ．依テ

$$\frac{a}{a_1}=\frac{h}{h_1}=\frac{b}{b_1} \qquad (6)$$

ヲ得．コレ即チ固有ノ二次曲線 ϕ_1, ϕ_2 ガ相似ニシテ相似ノ位置ニアルタメノ必要ナル條件ナリ．

(5)ノ第二邊ニツイテ同様ニ考フレバ

$$\frac{ax_1+hy_1+g}{a_1x_2+h_1y_2+g_1}=\frac{hx_1+by_1+f}{h_1x_2+b_1y_2+f_1}=\frac{C}{kC_1} \qquad (7)$$

ヲ得ベク,之ニヨリテ相似ノ中心ノ一ナル $P(x_1, y_1)$ ヲ知リテ他ノ一點 $P'(x_2, y_2)$ ヲ見出スコトヲ得ベシ．(6)ナル條件ガ成立スレバ,ソノ各分數ヲ m ニ等シト置クトキハ

$$\frac{A}{A_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{h}{h_1}=\frac{b}{b_1}=m$$

ナルヲ以テ,(7)ノ各分數ハ km ニ相等シキモノニシテ,之ヲ(7)ニ添付シテ x_2, y_2 ト同時ニ k ノ値ヲ決定シ得ベシ．故ニ(6)ハマタ十分ナル條件ナリ．

二ツノ與ヘラレタル曲線 ϕ_1, ϕ_2 ガソノマヽニテハ相似ニシテ相似ノ位置ニアラザルモ,何レカ一方ヲ或ル角丈回轉スルトキハ,相似ニシテ相似ノ位置ニアラシムルコトヲ得ルトキハ, ϕ_1, ϕ_2 ハ單ニ **相似ナリ** ト稱ス．

今 ϕ_1 ト ϕ_2 トハソレゾレ(1)及ビ(3)ナル方程式ヲ有シ,相

似ナレドモ相似ノ位置ニアラズト考ヘ, ϕ_1 ヲ θ ナル角丈回轉スルトキニ始メテ相似ノ位置ニ來ルモノトスベシ．

曲線 ϕ_1 ヲ θ ナル角ダケ回轉シタル後ノ方程式ヲ求メンニハ,(1)ニ於テ座標軸ヲ $-\theta$ ナル角ダケ回轉シタル時ノ方程式ヲ作レバ可ナリ．コレ ϕ_1 ヲ回轉スル代ハリニ軸ヲ反對ノ方向ニ回轉スルトキハ所要ノ方程式ヲ得ルガ故ナリ．

此變換後ノ方程式ヲ

$$a_2x^2+2h_2xy+b_2y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \qquad (8)$$

トセバ,第三章ノ問題5ニヨリ,(1)ト(8)トノ間ニハ次ノ關係アリ．

$$\begin{aligned} a+b-2h\cos\omega&=a_2+b_2-2h_2\cos\omega,\\ ab-h^2&=a_2b_2-h_2^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

而シテ(8)ト(3)トハ相似ニシテ相似ノ位置ニアルベキニヨリ,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{b_2}{b_1} \qquad (10)$$

ナラザル可ラズ．此各分數ヲ m ニ等シト置カバ,(9)ハ

$$\begin{aligned} a+b-2h\cos\omega&=m(a_1+b_1-2h_1\cos\omega),\\ ab-h^2&=m^2(a_1b_1-h_1^2) \end{aligned} \qquad (11)$$

トナル．依テ

$$\frac{\sqrt{ab-h^2}}{a+b-2h\cos\omega}=\pm\frac{\sqrt{a_1b_1-h_1^2}}{a_1+b_1-2h_1\cos\omega} \tag{12}$$

ナル關係ヲ得. 第68節(7)ニヨリ,コレ即チ ϕ_1, ϕ_2 ノ實又ハ虛ナル二ツノ漸近線ノ間ノ角ノ相等シキコトヲ示スモノニシテ,兩曲線ガ單ニ相似ナルタメノ條件ナリ.

逆ニ(12)ガ滿足セラルヽトキハ之ヨリ(11)ヲ得ベシ,ヨリテ m ヲ決定シ,更ニ回轉ノ角 θ ヲ $\frac{h_2}{h_1}=m$ ナル樣ニ適當ニ選ブトキハ,ツイニ(10)ニ相當スル比例式ヲ得ベシ. 故ニ(12)ハ又十分ナル條件ナリ.

ϕ_1, ϕ_2 ガ共ニ拋物線ナルトキハ(12)ハ常ニ滿足セラル. 故ニ任意ノ二ツノ拋物線ハ常ニ相似ナリ.

ϕ_1, ϕ_2 ガ相似ニシテ相似ノ位置ニアルトキハ,(6)ナル條件ヲ滿足スルニヨリ兩曲線ハ共ニ楕圓ナルカ,双曲線ナルカ,又ハ拋物線ナルベシ. 而シテソノ漸近線ハソレゾレ平行ス. 而シテコレラノ性質ハ元來曲線自身ノ形及ビ位置ニ關スルモノニシテ,座標軸ノ取リ方ニハ無關係ナル筈ナレバ,今假リニ座標軸ノ方向ヲ ϕ_1 及ビ ϕ_2 ノ主軸ノ方向ト一致セシメタリトスレバ, $h=h_1=0$ トナリ,

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$$

ヲ得. コノ a, b, a_1, b_1 ハソレゾレ ϕ_1 及ビ ϕ_2 ノ方程式ヲ標準形ニ直ストキ x^2 及ビ y^2 ノ係數ニ比例スベキモノナリ. 依テ ϕ_1 及ビ ϕ_2 ハ同一ノ心差率ヲ有スベキコトヲ知

ル. 從テマタ相似ノ位置ニアラザルモノト雖,トニカク相似ナル限リハ同一ノ心差率ヲ有セザル可ラズ.

72. 定點ヲ通ズル二次曲線.

二次曲線ノ方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \tag{1}$$

ハソノ係數ノ比

$$a:h:b:g:f:c \tag{2}$$

ヲ知ルコトニヨリテ定マルモノト見ルヲ得ベシ. 故ニ一般ニ五點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, $P_5(x_5, y_5)$ ヲ通ズル二次曲線ノ方程式ヲ得ンニハ(2)ノ比ヲ聯立方程式

$$\left.\begin{aligned} ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c&=0\\ ax_2^2+2hx_2y_2+by_2^2+2gx_2+2fy_2+c&=0\\ ax_3^2+2hx_3y_3+by_3^2+2gx_3+2fy_3+c&=0\\ ax_4^2+2hx_4y_4+by_4^2+2gx_4+2fy_4+c&=0\\ ax_5^2+2hx_5y_5+by_5^2+2gx_5+2fy_5+c&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ヨリ求メテ,コレヲ(1)ニ代入セバ可ナリ,而シテ(2)ノ比ハ一般ニ(3)ニヨリテ定マルヲ以テ與ヘラレタル五點ヲ通ズル二次曲線モ亦一般ニ確定ス. 從ヒテ與ヘラレタル任意ノ六點ヲ通ル二點曲線ハ一般ニ存在セズ.

73. 一點ヲ通ズル二次曲線.

一定點 $P_1(x_1, y_1)$ ヲ過ギル二次曲線ノ方程式ノ一般ノ

形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy$$
$$-(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1)=0 \qquad (1)$$

ニヨリテ表ハスコトヲ得,コヽニ a, h, b, g, f ハ同時ニ零ナラザル常數ナリトセバ,(1)ガ更ニ他ノ任意ノ四點ヲ通ル樣ニ比 $a:h:b:g:f$ ヲ決定スルコトヲ得.

74. 二點ヲ通ズル二次曲線.

二定點 P, Q ヲ通ル直線ノ方程式ヲ

$$X_1\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$$

トシ, P 及ビ Q ヲ夫々一ツヅヽ通ル二ツノ直線ヲ任意ニ取リ,ソノ方程式ヲ

$$X_2\equiv a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$
$$X_3\equiv a_3x+b_3y+c_3=0 \qquad (3)$$

トセヨ. サテ, p, q, r, k ヲ常數ナリトシテ

$$(px+qy+r)X_1+kX_2X_3=0 \qquad (4)$$

ナル方程式ヲ考フルニ,明カニ一ツノ二次曲線ヲ表ハシ且ツ,P 點ノ座標ヲ X_1, X_2 ニ代入スルトキハ零トナリ,又 Q 點ノ座標ヲ X_1, X_3 ニ代入スルトキニモ零トナルガ故ニ(4)ハ二點 P, Q ヲ通ル. 又 P, Q ノ他ニ三點ヲ通ゼシムルコトニヨリテ二次曲線ハ一般ニ確定スルモノナルガ,(4)ニ於テ $p:q:r:k$ ノ比ヲ適當ニ選ブトキハ(4)ヲシテ一般ニ他ノ三點ヲ通ル樣ニナスコトヲ得ベシ,故ニ(4)ヲ

以テ二點 P, Q ヲ通ル二次曲線ノ一般ノ形トスルコトヲ得.*

75. 三點ヲ通ズル二次曲線.

三定點ヲ P, Q, R トシ,此等ハ同一直線上ニアラザルモノト假定ス.

直線 PQ, QR, RP ノ方程式ヲ夫々

$$X_1\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$X_2\equiv a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$X_3\equiv a_3x+b_3y+c_3=0$$

トシ, p, q, r ヲ任意ノ常數ナリトシテ

$$pX_2X_3+qX_3X_1+rX_1X_2=0 \qquad (1)$$

ナル方程式ヲ考フルトキハ,一ツノ二次曲線ヲ表ハシ,前節ノ如ク論ズルコトニヨリ(1)ハ P, Q, R 三點ヲ通リ,且又 $p:q:r$ ノ比ヲ適當ニ定ムルコトニヨリ更ニ他ノ二點ヲ通ゼシムルコトヲ得. 故ニ三點 P, Q, R ヲ通ル二次曲線ノ方程式ノ一般ノ形ハ(1)式ニヨリテ表ハサルベシ.

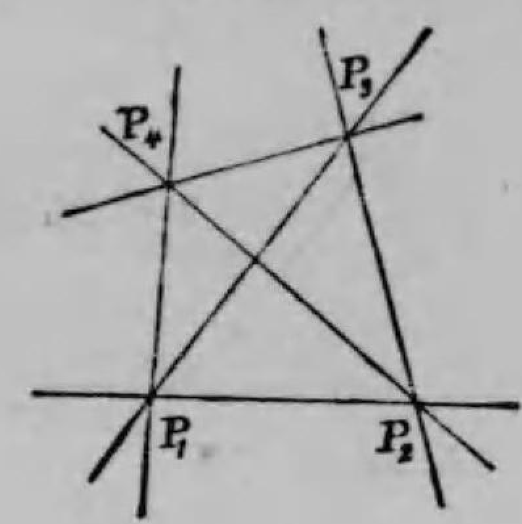
76. 四點ヲ通ズル二次曲線.

四定點ヲ P_1, P_2, P_3, P_4 トシ何レノ三點ヲ取ルモ一直線上ニアラザルモノト假定ス.

* 二點,三點,四點,又ハ五點ヲ通ズル二次曲線ノ方程式ノ詳細ナル理論ハ中川解析幾何 379—389 頁ヲ見ヨ.

直線 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 ノ方程式ヲ夫々

第九十九圖



$$X_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$X_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$X_3 \equiv a_3x+b_3y+c_3=0$$
$$X_4 \equiv a_4x+b_4y+c_4=0$$

トシ, p, q ヲ任意ノ常數ナリトシテ

$$pX_1X_3+qX_2X_4=0 \qquad (1)$$

ナル方程式ガ表ハス曲線ヲ考フルニ,明カニ $X_4=0$, $X_1=0$ ノ交點即チ P_1; $X_1=0$, $X_2=0$ ノ交點即チ P_2; $X_2=0$, $X_3=0$ ノ交點即チ P_3; $X_3=0$, $X_4=0$ ノ交點即チ P_4 ノ四點ヲ通ル二次曲線ナルヲ知ル,而シテ $p:q$ ノ比ヲ適當ニ定ムルコトニヨリ(1)ヲシテ更ニ他ノ一點ヲ過ラシムルコトヲ得.
故ニ(1)ハ與ヘラレタル四點ヲ通ル二次曲線ノ方程式ノ一般ナル形ナリ.

更ニ直線 P_1P_3, P_2P_4 ノ方程式ヲ夫々

$$X_5 \equiv a_5x+b_5y+c_5=0$$
$$X_6 \equiv a_6x+b_6y+c_6=0$$

トスルナラバ,P_1, P_2, P_3, P_4 ヲ通ル二次曲線ノ一般ノ方程式ハ

$$p_1X_1X_3+q_1X_5X_6=0$$
$$p_2X_2X_4+q_2X_5X_6=0$$

ト取リテモ可ナリ,コヽニ p_1, q_1, p_2, q_2 ハ常數ナリ.

サテ

$$S \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \qquad (2)$$
$$U \equiv l_1x+m_1y+n_1 \qquad (3)$$
$$V \equiv l_2x+m_2y+n_2 \qquad (4)$$

トシ, λ, μ ヲ任意ノ常數ナリトスルトキハ二次曲線

$$\lambda S+\mu UV=0 \qquad (5)$$

ハ明カニ二次曲線 $S=0$ ト二直線 $U=0$, $V=0$ トノ四ツノ交點ヲ通ル一ツノ二次曲線ノ一般ノ形ナルヲ見ル.
今 $U=0$ ト $V=0$ トガ漸次相近ヅクトキハ四ツノ交點ノ中漸次二ツ宛相近クベシ,而シテ遂ニ $U=0$ ト $V=0$ トガ相合スルトキハ

$$\lambda S+\mu U^2=0 \qquad (6)$$

ハ $S=0$ ト $U=0$ トノ交點ノ各ニ於テ夫々二點ヲ共有スルモノト考ヘ得ベシ. コノ場合ニ(6)ハ $S=0$ ト二ツノ異ナレル點ニ於テ夫々相切スト云フ. コノ定義ニ從ヒ(6)ハ $S=0$ ト $U=0$ トノ交點ノ各ニ於テ $S=0$ ト切スル二次曲線ノ一般ノ形ナリ.

77. 五點ヲ通ズル二次曲線.

第72節ノ方法ニヨリテ五定點ヲ通ル二次曲線ノ方程式ヲ作ルコトハ極メテ煩雜ナルヲ以テ先ヅ前節ノ方法ニヨリ五定點ノ中ノ四ツヲ通ル二次曲線ノ方程式ノ一

般ノ形,例ヘバ前節ノ(1)ニ相當スルモノヲ作リ然ル後殘レル點ヲ通ズル樣ニ $p:q$ ノ比ヲ決定スルヲ得策トス.

斯クノ如ク二次曲線ハ一般ニ五點ニヨリテ確定セラルヽモノナレバ,任意ノ六點ヲ過ル二次曲線ハ一般ニハ存在セズ.

78. ぱすかるノ定理.

固有ノ二次曲線ノ上ニアル六ツノ點ヲ 1, 2, 3, 4, 5, 6 トシ,コレヲ頂點トスル內接六角形ヲ 123456 トス.

頂點 1 ト 4, 2 ト 5, 3 ト 6 ヲ **對頂** ト云ヒ,邊 12 ト 45, 23 ト 56, 34 ト 61 ヲ **對邊** ト名ヅク.

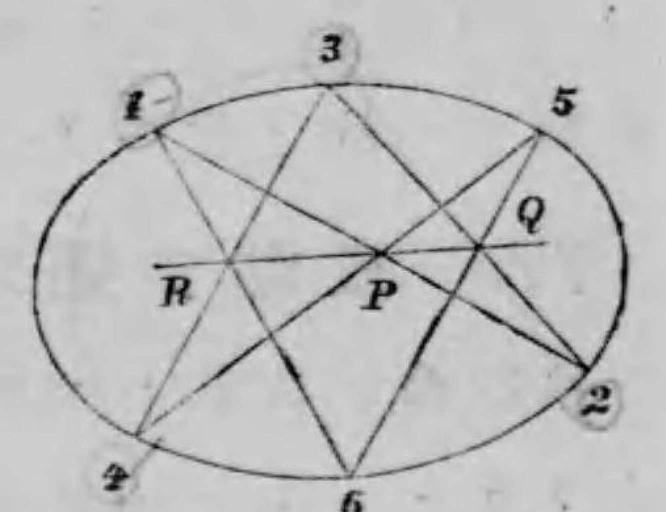
固有ノ二次曲線ニ內接スル六角形ノ三對ノ對邊ノ交點ハ一直線上ニアリ. 之ヲ **ぱすかる** ノ定理ト云フ.

今 i 及ビ k ヲ以テ 1 ヨリ 6 マデノ中ノ數ヲアラハスモノトシ,二ツノ頂點 i, k ヲ結ビ付クル直線ヲアラハスニ

$$l_{ik}=0 \quad 又ハ \quad l_{ki}=0$$

ト書クコトニ定ムベシ. 然ルトキハ與ヘラレタル二次曲線ハ四點 1, 2, 3, 4 ヲ通ズルヲ以テ,ソノ方程式ハ第76節ニヨリ

第百圖



$$\phi=a_1l_{12}l_{34}-a_2l_{23}l_{14}=0 \qquad (1)$$

ナル形ヲ有スベシ,コヽニ a_1, a_2 ハ適當ニ選バレタル常數

トス. 又此曲線ハ 1, 4, 5, 6 ノ四點ヲモ通ズルニヨリ.

$$\phi=a_3l_{16}l_{45}-a_4l_{56}l_{14}=0 \qquad (2)$$

トモ考ヘラル,コヽニ a_3, a_4 ハマタ適當ニ選バレタル常數ナリ. 而シテ假定ニヨリ二次曲線ハ固有ナルモノトスルヲ以テ, a_1, a_2, a_3, a_4 ハ何レモ零ナラズ.

(1) ト (2) トハ何レモ同ジ式 ϕ ニ等シキヲ以テ,邊々相減ズレバ,一ノ恒等式

$$a_1l_{12}l_{34}-a_3l_{16}l_{45}=(a_2l_{23}-a_4l_{56})l_{14} \qquad (3)$$

ヲ得ベシ.

直線 $l_{23}=0$ ト $l_{56}=0$ トハ同一ノ直線ニアラザルガ故ニ,(3)ノ右邊ハ恒等的ニ零ナルコトナシ,從テ左邊モ亦然リ. 然ルニ(3)ノ右邊ヲ零ニ等シト置キタル二次式ハ明カニ二ツノ直線

$$a_2l_{23}-a_4l_{56}=0, \quad l_{14}=0 \qquad (4)$$

ヲアラハスヲ以テ,(3)ノ左邊ヲ零ニ等シト置キタル

$$a_1l_{12}l_{34}-a_3l_{16}l_{45}=0 \qquad (5)$$

モ亦同ジ二ツノ直線ヲアラハスベシ.

(5)ハ明カニ直線 $l_{12}=0$ ト $l_{16}=0$ ノ交點 1, $l_{34}=0$ ト $l_{45}=0$ ノ交點 4, $l_{12}=0$ ト $l_{45}=0$ ノ交點 P, $l_{34}=0$ ト $l_{16}=0$ ノ交點 R, ナル四點ヲ過ル. 故ニ(4)ナル二直線モ亦此等四點ヲ過ル. コレラノ四點ハ相異ル點ニシテ又ソノ中何レノ三點モ一直線上ニアラズ. 今(4)ニ於ケル二直線ノ中一ハ

$l_{14}=0$ ニシテ 1 ト 4 トヲ過ルヲ以テ,他ノ一ナル

$$a_2l_{23}-a_4l_{53}=0$$

ハ即チ直線 PR ナラザル可ラズ. 而シテ此式ニヨリテ見レバ PR ナル直線ハ $l_{23}=0$ ト $l_{56}=0$ ノ交點Qヲ通ズ. 故ニ P, Q, R ハ一直線上ニアリ.

此直線ヲ **ぱすかる直線** ト稱ス.

二次曲線ガ二ツノ直線ヨリナル場合ニテモ, 1,3,5 ガ一方ノ直線上ニアリ, 2,4,6 ガ他ノ直線上ニアラバ,上ノ證明中ニ於テ矢張 a_1, a_2, a_3, a_4 ハ何レモ零ナラザルニヨリ,此定理ハナホ眞ナリ.

79. ぶりあんしよんノ定理.

固有ノ二次曲線ニ外切セル一ノ六邊形ノ六邊ヲ順次ニ $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ トシ,二邊 t_i ト t_k トノ交點ヲ表ハスニ T_{ik} 又ハ T_{ki} トスルコトヽ定ムベシ.

t_1 ト t_4, t_2 ト t_5, t_3 ト t_6 ヲ **對邊** ト名ヅケ, T_{12} ト T_{45}, T_{23} ト T_{53}, T_{34} ト T_{61} ヲ **對頂** ト云フ.

固有ノ二次曲線ニ外切スル六邊形ノ三對ノ對頂ヲ夫夫結ビ付クル三ツノ直線ハ一點ニ會ス. 之ヲ **ぶりあんしよん** ノ定理ト云フ.

各邊 $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ ノ切點ヲ夫々 1, 2, 3, 4, 5, 6 トシ,コノ切點ノ中一般ニ i ト k トヲ結ブ直線ヲ l_{ik} 又ハ l_{ki} ト名付クレバ,直線 $l_{12}, l_{23}, l_{34}, l_{45}, l_{55}, l_{61}$ ハ夫々點 T_{12}, T_{23}, T_{34},

T_{45}, T_{53}, T_{61} ノ此曲線ニ關スル極線ナリ.

故ニ l_{12} ト l_{45} トノ交點 P ノ極線ハ直線 $T_{12}T_{45}$ ナラザル可ラズ. 同様ニシテ, l_{23} ト l_{55} ノ交點 Q ノ極線ハ直線 $T_{23}T_{53}$, 又 l_{34} ト l_{61} トノ交點 R ノ極線ハ直線 $T_{34}T_{61}$ ナリ. 然ルニ前節ノ定理ニヨリ, P, Q, R ノ三點ハ一直線上ニアルヲ以テ,コノ三點ノ極線ハ何レモ直線 PQR ノ極ヲ通ズベシ. 是レ即チ證明セント欲シタル處ノ結果ナリ.

問　　題

1. 双曲線 $2x^2+xy-y^2+3y+2=0$ ノ漸近線ヲ求ム.

2. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

上ノ二點トスルトキハ,直線 PQ ノ方程式ハ

$$a(x-x_1)(x-x_2)+2h(x-x_1)(y-y_2)+b(y-y_1)(y-y_2)$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

ナルコトヲ證明シ,因テ P ニ於ケル切線ノ方程式ヲ作レ.

3. 定點 A ト二次曲線 $\phi=0$ ノ上ニアル一點 P トヲ結ブ直線ガ定直線 g ト交ル點ヲ Q トス. P ガ $\phi=0$ ノ上ヲ動クトキ, A ト Q トニ對シ P ノ調和共軛點 B ノ軌跡ヲ求ム.

4. 二ツノ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

ノ四ツノ交點ヲ通ズル二次曲線ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

5. 四ツノ點ヲ通ズル拋物線ハ一般ニ二個アルコトヲ示セ.

6. 平行四邊形ノ四ツノ頂點ヲ通ズル拋物線ハ存在セザルコトヲ證明セヨ.

7. 四ツノ點ヲ通ズル任意ノ二次曲線ニ關シ,一定點ノ極線ヲ作ルトキハ,コレラハマタ或ル一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ.

8. 二次曲線ガ三角形ノ三ツノ邊 BC, CA, AB ト交ル點ヲ夫々 P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2 トセバ

$$AR_1.\,AR_2.\,BP_1.\,BP_2.\,CQ_1.\,CQ_2$$
$$=BR_1.\,BR_2.\,CP_1.\,CP_2.\,AQ_1.\,AQ_2$$

ナルコトヲ證明セヨ.

9. 二次曲線ト圓トガ二ツノ點 P, Q ニ於テ切スルトキ,切點ヲ結ビ付クル直線 PQ ハ二次曲線ノ一ツノ主軸ト直交スルコトヲ證明セヨ.

10. 拋物線ノ焦點ヲ通リ,頂點及ビ他ノ一點ニ於テ拋物線ニ切スル任意ノ二次曲線ノ中心ノ軌跡ハ又一ツノ拋物線ナルコトヲ證明セヨ.

問題之答

第一章

5. 中點ノ座標ハ $\dfrac{a+b}{2}$, 三等分點ノ座標ハ $\dfrac{2a+b}{3}$ 及ビ $\dfrac{a+2b}{3}$.

第二章

1. 相互ノ距離ハ夫々 $\sqrt{10}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{50}$.

2. $\left(\dfrac{10}{11}, \dfrac{2}{11}\right)$.

3. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

4. (i) $\left(\dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{2a^2}, \dfrac{b(c^2+a^2-b^2)}{2a^2}\right)$, (ii) $\left(\dfrac{bc}{b+c}, \dfrac{bc}{b+c}\right)$.

5. $(\sqrt{3}, 1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$(-\sqrt{3}, 1)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7. $\rho=a\cos\theta$, $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

8. $(x^2+y^2)y^2=a^2x^2$, $y^2=4a(a-x)$.

10. $\rho=\dfrac{2\rho_1\rho_2\cos\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}{\rho_1+\rho_2}$, $\theta=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$. (三角法ニ於ケル三角

形ノ面積ノ公式ヲ應用セヨ)

第 三 章

1. (i) $x^2-y^2=0$, (ii) $x^2+y^2=r^2$.
2. $4x^2+9y^2=36$.
3. $x^2-4y^2=a^2$.
4. 座標ノ變換ノ公式ト比較セヨ.

第 四 章

2. $\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$.
3. $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=2$.
4. $4x-3y+2=0$.
5. $x+y=a+b$, $x-y=a-b$.
6. 同ジ側ニアリ. 距離ハ夫々3及ビ $\frac{33}{5}$
7. $3x+4y-3a=0$.
8. $2x-y+7a=0$.
9. $(b_1-b_2)x-(a_1-a_2)y+a_1b_2-a_2b_1=0$,

   $(b_1-b_2)x+(a_1-a_2)y+a_2b_2-a_1b_1=0$.
10. $60°$.
11. $\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. ($a \neq b$ トシテ)
12. $\frac{m^2+1}{m^2-1}\tan\omega$.

13. $\frac{3}{2}$.
14. $\frac{1}{8}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$.
15. $32x+56y-67=0$, $7x-4y-37=0$.
16. $x=x_1\pm\frac{ra}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=y_1\pm\frac{rb}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
17. 垂線ノ長サハ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
18. $\rho\{\rho_1\sin(\theta-\theta_1)+\rho_2\sin(\theta_2-\theta)\}+\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)=0$.
19. (i) $(3x+2y-5)(2x-3y+6)=0$,

    (ii) 直線ヲ表サズ,

    (iii) $(y+1)(-3x+3y+5)=0$,

    (iv) $(2x-3y-1)^2=0$,

    (v) 直線ヲ表サズ,

    (vi) 直線ヲ表サズ.
20. 前者ノ表ス二直線ト後者ノ表ス二直線トハ夫々原點ニ關シテ點對稱ノ位置ニアリ.
21. $2x^2-2y^2+xy=0$.
22. 二直線ノナス角ハ θ, 二等分線ハ $x^2-y^2=0$.
23. 定點ハ二直線 $ax+by+c=0$ 及ビ $a'x+b'y+c'=0$ ノ交點ナリ.
24. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{k}$ トセバ,定點ノ座標ハ $x=y=k$.
25. 座標軸ヲ適當ニ取レ,例ヘバ對角線ノ中點ヲ結ブ直

線ヲ x 軸,一ツノ對角線ヲ y 軸ニトリテモ計算ハ簡單ニナル.

34. 極座標ヲ用ヒヨ.

36. O ヲ原點トシテ直交軸ヲ取リ三ツノ直線ノ方程式ヲ一ツノ三次方程式ニマトメ,然ル後極座標ニ直セ.

39. 直線 OPQ ヲ x 軸トシ, OL ヲ y 軸トスベシ.

40. OA, OB ヲ夫々 x 軸, y 軸トシ,直線 ST ノ方程式ヲ作リ,問題23ヲ利用セヨ.

第五章

1. $x^2+y^2=\pm 2ry,\quad x^2+y^2=\pm 2rx.$

2. $x^2+y^2\pm 2rx\pm 2ry+r^2=0.$

3. $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$

4. $x+3=0,\quad y-8=0.$

5. $y=x+2\pm 6$, 切點ハ $(-2,\ 6)$, $(4,\ 0)$.

6. 切點ハ $(-1,\ 2)$.

7. 切線ノ方程式ハ第27節ニアリ.

8. $(3,\ 1)$.

12. $7(x^2+y^2)+15x-3y-112=0.$

16. $x^2+y^2=a\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right).$ (a ハ一邊ノ長サ)

17. $\sqrt{4c^2-2(a-b)^2}.$

23. $(g^2-c)x^2+2fgxy+(f^2-c)y^2=0.$

24. $\rho=2a\cos\theta,\quad \rho=-a\sec\theta$ 〔圓ト直線〕.

26. 同心圓.

34. $\begin{cases} x=0, \\ 3x+4y-10=0. \end{cases}\qquad \begin{cases} y-4=0, \\ 4x-3y=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{b_1(c_2-c_3)+b_2(c_3-c_1)+b_3(c_1-c_2)}{b_1(a_2-a_3)+b_2(a_3-a_1)+b_3(a_1-a_2)}, \\ y=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{a_1(c_2-c_3)+a_2(c_3-c_1)+a_3(c_1-c_2)}{a_1(b_2-b_3)+a_2(b_3-b_1)+a_3(b_1-b_2)}. \end{cases}$

36. $\cos\omega=-\dfrac{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}.$

39. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ (根心ト,ソノ羃ヲ求メヨ).

第六章

1. (1) $-3x^2+2y^2=1,$

(2) $4x^2-y^2=-2,$

(3) $\sqrt{5}\,y^2=-2x,$

(4) $-6x^2+4y^2=3,$

(5) $6x^2+y^2=1,$

(6) $3x^2+2y^2=1,$

(7) $8x^2+3y^2=1,$

(8) $9y^2-x^2=1,$

(9) $y^2-2x^2=4,$

(10) $2x^2+7y^2=7,$

(11) $2y^2=3x$,

(12) $y^2=2x$.

2. (1) 抛物線,

(2) 二直線,

(3) 實楕圓.

3. 全體ヲ左邊ニ移シテ因數ニ分解スルトキハ

$$(x^2+y^2+\sqrt{2}\,xy-a^2)(x^2+y^2-\sqrt{2}\,xy-a^2)=0.$$

各楕圓ヲ標準形ノ方程式ニテ表サバ

$$\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^2+\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)y^2=a^2.$$

5. $k=-\frac{5}{4}$.

7. $\phi+\theta\neq 90°$ ナル時ノ標準形ヲ $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$ トセバ,

$$A=\frac{q^2 sin^2\theta cos^2\theta}{(cos^2\theta-sin^2\phi')^2},\quad B=\frac{q^2 sin^2\theta}{cos^2\theta-sin^2\phi'}$$

ニシテ,心差率ハ

$$e=\frac{sin\phi'}{cos\theta}.$$

$\phi+\theta=90^0$ ナル時ノ標準形ハ

$$y^2=-\frac{2q sin\theta}{cos\theta}.x$$

ニシテ,心差率ハ1ナリ.

第　七　章

7. 求ムル條件ハ $n^2(a^2\pm m^2b^2)=m^2(a^2\mp b^2)^2$, 依テ法線ノ方程式ハ

$$y=mx\pm\frac{m(a^2\mp b^2)}{\sqrt{a^2\pm m^2b^2}}.$$

9. 直交軸ノ場合ト同一ノ形.

10. 中心ヲ極トスル極座標ニテ計算セヨ.

13. 長軸ノ半分ヲ a,短軸ノ半分ヲ b トスレバ, $\sqrt{2}b<a$ ナルトキハ求ムル半徑ハ be, $\sqrt{2}b\geqq a$ ナルトキハ $\frac{a}{2}$ ナリ.

15, 16. 心差角ヲ利用セヨ.

17, 18. 心差角ヲ用フルトキハ計算ハ簡單ナリ.

24. 心差角ヲ用ヒテP點ノ座標ヲ表ハセ.

29. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

35. 漸近線ヲ軸ニ取レ.

38. 共軛ナル直徑ヲ軸ニ取レ.

40. 心差角ヲ用ヒヨ.

43. 漸近線ヲ軸ニ取レ.

60. 任意ノ平行ナル二ツノ弦ヲ作リ,ソノ中點ヲ結ベバ一ノ直徑ヲ得.

第　八　章

3. $4d(2\pm\sqrt{3})$.

17. 平行ナル弦ノ中點ヲ結ベバ一ノ直徑ヲ得.

18. $b+dm'm^2+2=0$.

第　九　章

1. $x+y-1=0$,　$2x-y+2=0$.

2. 切線ノ方程式ハ第69節ニアリ.

術語及ビ固有名詞

第　一　章

線分	Segment, Sect	Strecke
半直線	Halfline, Ray	Halbgerade
原點	Origin	Anfangspunkt
座標	Abscissa	Abscisse

coordinates

第　二　章

橫線	Abscissa	Abscisse
縱線	Ordinate	Ordinate
座標	Coordinates	Coordinaten
x 軸	Axis of **x**	x−Axe
y 軸	Axis of **y**	y−Axe
座標軸	Axes of coordinates	Coordinatenaxen
原點	Origin	Anfangspunkt
直交軸	Rectangular axes	Rechtwinklige Axen
斜交軸	Oblique axes	Schiefwinklige Axen
直角座標	Rectangular coordinates	Rechtwinklige Coordinaten
平行座標	Parallel coordinates	Parallelcoordinaten

でかると	Descartes	
かるてしあん座標	Cartesian coordinates	Cartetische Coordinaten
動徑	Radius vector	Radiusvector
傾角	Vectorial angle	Anomalie, Argument
極座標	Polar coordinates	Polarcoordinaten
原線	Initial line	Nullstrahl
極	Pole	Pol
方程式ノ軌跡	Locus of equation	Ort der Gleichung
表ハス(圖形ヲ)	to represent	darstellen
流通座標	Current coordinates	Laufende Coordinaten

第三章

座標ノ變換	Transformation of coordinates	Transformation der Coordinaten
平行移轉	Translation	Translation, Verschiebung
回轉	Rotation	Rotation, Drehung
代數曲線	Algebraic curve	Algebraische Curve
超越曲線	Transcendental curve	Transcendente Curve

第四章

方向係數	Coefficient of direction	Richtungscoefficient
角係數	Angular coefficient	Sinusteilverhältnis

截片	Intercept	Abschnitt
標準形	Normal form	Normalform
無窮遠ニアル直線	Line at infinity	Unendlich ferne Gerade
共線ナリ	to be collinear	liegen auf einer Geraden
共點ナリ	to be concurrent	treffen in einem Punkte zusammen
めねらうす	Menelaus	
判別式	Discriminant	Discriminante
相合シタル直線	Coincident straight lines	Coincidente Geraden, Zusammenfallende Geraden
虛直線	Imaginary straight line	Imaginäre Gerade
極方程式	Polar equation	Polar-Gleichung

第五章

點圓	Point-circle	Punktkreis
虛圓	Imaginary circle	Imaginärer Kreis
切線	Tangent	Tangente
切點	Point of contact	Berührungspunkt
法線	Normal	Normale
足	Foot	Fusspunkt
冪	Power	Potenz
內ニアリ	to be within	im Innern liegen
外ニアリ	to be without	aussen liegen
虛點	Imaginary point	Imaginärer Punkt

極線	Polar	Polare
極	Pole	Pol
相反性	Reciprocal property	Dualistische Eigenschaft
共軛ナル點	Conjugate points	Conjugierte Punkte
共軛ナル直線	Conjugate straight lines	Conjugierte Geraden
極三角形	Self-conjugate triangle	Poldreieck, Polardreieck
とれみー	Ptolemy	
根軸	Radical axis	Potenz-linie, Radicalaxe
根心	Radical centre	Radicalcentrum
媒介變數	Parameter	Parameter
圓束	{Sheaf of circles, Coaxial circles	Kreisbüschel
交角	Angle of intersection	Schnittwinkel
内切ス	to touch internally	von innen berühren
外切ス	to touch externally	von aussen berühren

第六章

中心	Centre	Mittelpunkt, Centrum
有心二次曲線	{Central curve of the second degree	Centralcurve zweiten Grades
無心二次曲線	{Noncentral curve of the second degree	Nichtcentrische curve zweiten Grades
標準形	Canonical form, Normal form	Kanonische Form
軸	Axes	Axen

楕圓	Ellipse	Ellipse
長軸	Major axis	Hauptaxe, Grosse Axe
短軸	Minor axis	Nebenaxe, Kleine Axe
頂點	Vertex	Scheitel
主軸	Principal axes	Axen
點楕圓	Point-ellipse	Punkt-ellipse
虛楕圓	Imaginary ellipse	Imaginäre Ellipse
双曲線	Hyperbola	Hyperbel
共軛ナル双曲線	Conjugate hyperbola.	Conjugierte Hyperbel
交軸	Transverse axis	{Transversale axe, Hauptaxe
共軛軸	Conjugate axis	Nebenaxe
頂點	Vertex	Scheitel
主軸	Principal axes	Axen
抛物線	Parabola	Parabel
主軸	Principal axis	Axe
頂點	Vertex	Scheitel
固有ノ二次曲線	Proper curve of the second degree	Eigentliche Curve zweiten Grades
圓錐	Cone	Kegel
母線	Generating line	Erzeugende
頂點	Vertex	Scheitel
直圓錐	Right circular cone	Gerader Kreiskegel
軸	Axis	Axe

圓錐曲線	Conic section	Kegelschnitt
焦點	Focus	Brennpunkt
準線	Directrix	Directrix, Leitgerade
心差率	Eccentricity	Eccentricität

第 七 章

補助圓	Auxiliary circle	Hauptkreis, Scheitelkreis
心差角,偏角	Eccentric angle	Excentrische Anomalie
直角双曲線	Rectangular hyperbola	Rectanguläre Hyperbel
等邊双曲線	Equilateral hyperbola	Gleichseitige Hyperbel
漸近線	Asymptote	Asymptote
切線	Tangent	Tangente
切點	Point of contact	Berührungspunkt
法線	Normal	Normale
足	Foot	Fusspunkt
切線影	Subtangent	Subtangente
法線影	Subnormal	Subnormale
外ニアリ	to be without	aussen liegen
內ニアリ	to be within	im Innern liegen
準圓	Director circle	Hauptkreis
極線	Polar	Polare
極	Pole	Pol

共軛ナル直徑	Conjugate diameter	Conjugierte Durchmesser
縱線	Ordinate	Ordinate
補弦	Supplemental chords	Supplementar-sehnen
焦點半徑	Focal radius	Focalradius, Brennstrahl
通徑	Latus rectum	Latus rectum
同焦點有心二次曲線	Confocal central conics	Confocale Centralkegelschnitte

第 八 章

主通徑	Principal parameter	Hauptparameter
直徑	Diameter	Durchmesser
通徑	Parameter	Parameter
極線	Polar	Polare
極	Pole	Pol
通徑	Latus rectum	Latus rectum
同焦點拋物線	Confocal parabolas	Confocale Parabel

第 九 章

虛ナル漸近線	Imaginary asymptotes	Imaginäre Asymptoten
相似ニシテ相似ノ位置ニアリ	to be similar and similarly situated	ähnlich und ähnlich gelegen
相似ノ中心	Centres of similarity	Ähnlichkeitscentrum
相似ナリ	to be similar	ähnlich sein
對頂	Opposite vertices	Gegenecken

對邊	Opposite sides	Gegenseiten
ぱすかる	Pascal	
ぱすかる直線	Pascal's straight line	Pascal'sche Linie
ぶりあんしよん	Brianchon	

附　錄

重要公式集

二點間ノ距離

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}, \qquad (10\ 頁)$$

$$\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}. \qquad (15\ 頁)$$

二點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ヲ通ズル直線上ニアル一點 R ノ座標

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right), \quad \frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}. \qquad (12\ 頁)$$

座標ノ變換

$$\left.\begin{aligned} x&=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y&=X\sin\theta+Y\cos\theta \end{aligned}\right\}(25\ 頁) \qquad \left.\begin{aligned} X&=x\cos\theta+y\sin\theta \\ Y&=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{aligned}\right\}(26\ 頁)$$

$$\left.\begin{aligned} x&=X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+Y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega} \\ y&=X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\sin\beta}{\sin\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (28\ 頁)$$

$$\left.\begin{aligned} X&=x\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} \\ Y&=-x\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}+y\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} \\ \alpha&=\angle(x, X), \ \beta=\angle(x, Y). \end{aligned}\right\} \qquad (28\ 頁)$$

直　線

直線ノ方程式

一點 (x_1, y_1) ヲ通ズルモノ

$$\left.\begin{array}{l} a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \\ y-y_1=m(x-x_1) \end{array}\right\} \qquad (39\ 頁)$$

二點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ通ズルモノ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (42\ 頁)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (42\ 頁)$$

其他ノ形ノ方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad a,\ b\ ハ截片. \qquad (43\ 頁)$$

$$y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1) \qquad (40\ 頁)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+l\cos\alpha \\ y=y_1+l\sin\alpha \end{array}\right\} \quad (直交軸) \qquad (40\ 頁)$$

$$y=mx+b \qquad (41\ 頁)$$

$$ax+by+c=0$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0 \quad (直交軸) \qquad (44\ 頁)$$

$$x\cos\theta+y\cos(\omega-\theta)-p=0 \qquad (44\ 頁)$$

直線 $ax+by+c=0$ ノ方向係數トコノ直線ガ x 軸トナス角 α トノ關係

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{-b}{\sin(\omega-\alpha)}, \qquad (41\ 頁)$$

$$\tan\alpha=\frac{m\sin\omega}{1+m\cos\omega}, \quad m=-\frac{a}{b}. \qquad (51\ 頁)$$

直線ノ方程式 $ax+by+c=0$ ト $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ トノ係數ノ關係

$$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{-p}{c}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (45\ 頁)$$

直線ノ方程式 $ax+by+c=0$ ト $x\cos\theta+y\cos(\omega-\theta)-p=0$ トノ係數ノ關係

$$\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\cos(\omega-\theta)}{b}=\frac{-p}{c}=\frac{\sin\omega}{\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}} \qquad (64\ 頁)$$

垂線ノ長サ

一點 (x_1, y_1) ヨリ直線ニ下セル垂線ノ長サ

$$x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p \quad (直交軸) \qquad (63\ 頁)$$

$$\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (直交軸) \qquad (64\ 頁)$$

$$x_1\cos\theta+y_1\cos(\omega-\theta)-p \qquad (63\ 頁)$$

$$\frac{(ax_1+by_1+c)\sin\omega}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}} \qquad (64\ 頁)$$

二直線ノ間ノ角

直線ノ方程式ヲ

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad \text{又ハ} \quad \begin{cases} y=m_1x+b_1 \\ y=m_2x+b_2 \end{cases}$$

トシ,ソノ間ノ角ヲ ϕ トセバ

$$\tan\phi=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} \quad \text{(直交軸) (49 頁)}$$

$$\tan\phi=\frac{(m_2-m_1)\sin\omega}{1+(m_1+m_2)\cos\omega+m_1m_2} \quad \text{(52 頁)}$$

二直線ガ垂直ナル條件

$$a_1a_2+b_1b_2=0 \quad \text{(直交軸) (49 頁)}$$

$$1+m_1m_2=0 \quad \text{(直交軸) (48 頁)}$$

$$1+(m_1+m_2)\cos\omega+m_1m_2=0 \quad \text{(52 頁)}$$

二直線ガ平行ナル條件

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \quad \text{(49 頁)}$$

$$m_1=m_2 \quad \text{(48 頁)}$$

三點ガ一直線上ニアル條件

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{(56 頁)}$$

三直線ガ一點ヲ共有スル條件

直線ノ方程式ヲ

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

トセバ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \text{(57 頁)}$$

二直線ノ交點ヲ通ズル直線ノ方程式

直線ノ方程式ヲ

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

トセバ,

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \text{(54 頁)}$$

三角形ノ面積

$$\frac{\sin\omega}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(71 頁)}$$

二次方程式ガ二ツノ直線ヲ表ハス條件

方程式ガ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ナラバ,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \quad (75\text{ 頁})$$

二直線 $ax^2+2hxy+by^2=0$ ノ間ノ角

$$\tan\phi=\frac{2\sqrt{h^2-ab}\sin\omega}{a+b-2h\cos\omega} \quad (78\text{ 頁})$$

二直線 $ax^2+2hxy+by^2=0$ ノ間ノ角ヲ二等分スル直線ノ方程式

$$h(x^2-y^2)-(a-b)xy=0 \quad (\text{直交軸}) \quad (80\text{ 頁})$$

直線ノ極方程式

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=p \quad (81\text{ 頁})$$

二點 (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2) ヲ過ズル直線ノ極方程式

$$\rho\left\{\rho_1\sin(\theta-\theta_1)+\rho_2\sin(\theta_2-\theta)\right\}+\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)=0 \quad \left(\begin{matrix}88\text{ 頁,}\\ \text{問 } 18\end{matrix}\right)$$

圓*

圓ノ方程式

I. $$x^2+y^2=r^2 \quad (94\text{ 頁})$$

* 以下スベテ直交軸ヲ用フルモノトス.

II. $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad (93\text{ 頁})$$

III. $$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad (95\text{ 頁})$$

IV. $$\left.\begin{array}{l} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{array}\right\} \quad (131\text{ 頁})$$

V. $$\rho=r \quad (135\text{ 頁})$$

VI. $$\rho=2r\cos(\theta-\alpha) \quad (135\text{ 頁})$$

VII. $$\rho^2+2(a\cos\theta+b\sin\theta)\rho+c=0 \quad (135\text{ 頁})$$

圓ノ上ニアル一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線

圓ノ方程式ガ I ナラバ

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad (98\text{ 頁})$$

II ナラバ

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \quad (98\text{ 頁})$$

III ナラバ

$$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0 \quad (99\text{ 頁})$$

IV ナラバ

$$(x-a)\cos\theta_1+(y-b)\sin\theta_1=r \quad (132\text{ 頁})$$

但シ θ_1 ハ (x_1, y_1) ニ相應スル θ ノ値トス.

VII ナラバ

$$\rho\rho'\cos(\theta-\theta')+a(\rho\cos\theta+\rho'\cos\theta')+b(\rho\sin\theta+\rho'\sin\theta')+c=0$$

(136 頁)

但シ (ρ', θ') ハ圓上ノ一點トス.

一點 (x_1, y_1) ヨリ引ケル一對ノ切線

圓ノ方程式ガ II ナラバ

$$\{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2\}\{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2\}$$
$$=\{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)-r^2\}^2 \qquad (113\ 頁)$$

與ヘラレタル方向ヲ有スル切線

圓ノ方程式ガ I ナラバ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (106\ 頁)$$

直線ガ圓ニ切スル條件

直線 $c_1x+c_2y+c_3=0$ ガ圓 II ニ切スル條件ハ

$$r^2(c_1^2+c_2^2)=(c_1a+c_2b+c_3)^2 \qquad (108\ 頁)$$

極及ビ極線

一點 (x_1, y_1) ノ極線ノ方程式ハ (x_1, y_1) ヲ曲線上ノ一點トシタルトキノ其點ニ於ケル切線ノ方程式ト同一ノ形ヲ有ス. (113 頁)

直線 $c_1x+c_2y+c_3=0$ ノ圓 II ニ關スル極ノ座標ハ

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a-\frac{c_1r^2}{c_1a+c_2b+c_3} \\ y_1&=b-\frac{c_2r^2}{c_1a+c_2b+c_3} \end{aligned}\right\} \qquad (117\ 頁)$$

二點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ヲ過ズル圓ノ方程式

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2$$
$$-k\{(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1\}=0 \qquad (127\ 頁)$$

二圓 $S_1=0$, $S_2=0$ ノ交點ヲ過ズル圓ノ方程式

$$S_1+kS_2=0 \qquad (128\ 頁)$$

二次曲線

二次曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

トシ,ソノ判別式ヲ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

トス.

二次曲線ノ分類

$ab-h^2>0$ $\begin{cases} a\Delta>0 \text{ 又ハ } b\Delta>0 \text{ ナラバ,虛楕圓} \\ a\Delta<0 \text{ 又ハ } b\Delta<0 \text{ ナラバ,實楕圓} \\ \Delta=0 \text{ ナラバ,點楕圓又ハ二ツノ虛直線} \end{cases}$

$ab-h^2<0$ $\begin{cases} \Delta\neq0 \text{ ナラバ,双曲線} \\ \Delta=0 \text{ ナラバ,二ツノ實直線} \end{cases}$

$ab-h^2=0$ $\begin{cases} \Delta\neq0 \text{ ナラバ,拋物線} \\ \Delta=0 \text{ ナラバ,二ツノ平行ナル實又ハ虛直線又ハ相重レル二直線} \end{cases}$

(156, 163, 272 頁)

二次曲線ノ中心ノ座標

$$x_0=\frac{hf-bg}{ab-h^2},\qquad y_0=\frac{hg-af}{ab-h^2}$$ (146 頁)

有心二次曲線ノ方程式ノ標準形

$$a'x^2+b'y^2+c'=0,$$

但シ a', b' ハ $z^2-(a+b)z+(ab-h^2)=0$ ノ二根, (149 頁)

又 $$c'=\frac{\Delta}{ab-h^2}=gx_0+fy_0+c.$$ (147 頁)

兩軸(主軸)ノ方程式ハ

$$h(x^2-y^2)-(a-b)xy=0$$ (151 頁)

拋物線ノ方程式ノ標準形

$$y^2=px,$$

但シ $$p=\pm\frac{2\sqrt{(ag-ka)^2+(af-kh)^2}}{a^2+h^2},$$ (165 頁)

$$k=\frac{a(ag+hf)}{a^2+h^2}=\frac{ag+hf}{a+b}.$$ (164 頁)

x 軸(主軸)ノ方程式ハ

$$ax+hy+k=0,$$ (165 頁)

y 軸ノ方程式ハ

$$2(ag-ka)x+2(af-kh)y+(ac-k^2)=0$$ (165 頁)

一點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線ノ方程式

一般ニハ

$$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+(gx_1+fy_1+c)=0$$ (275 頁)

又ハ

$$ax_1x+h(y_1x+x_1y)+by_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$ (275 頁)

楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ナラバ

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$ (187 頁)

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ナラバ

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$ (187 頁)

拋物線 $y^2=4dx$ ナラバ

$$y_1y=2d(x+x_1)$$ (248 頁)

極及ビ極線 (318 頁ヲ見ヨ)

定方向ヲ有スル切線ノ方程式

楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ナラバ

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$ (195 頁)

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ナラバ

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$$ (195 頁)

拋物線 $y^2=4dx$ ナラバ

$$y=mx+\frac{d}{m}$$ (249 頁)

共軛直徑

楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ共軛ナル直徑ハ

$$y=m_1x, \qquad y=m_2x$$

ニシテ,コヽニ $$m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}.$$ (201 頁)

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ共軛ナル直徑ハ

$$y=m_1x, \qquad y=m_2x$$

ニシテ,コヽニ $$m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}.$$ (201 頁)

抛物線 $y^2=4dx$ ニ關シ,直線 $y=mx$ ト共軛ナル直徑ハ

$$y=\frac{2d}{m}.$$ (251 頁)

共軛直徑ノ端ノ座標

楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テハ

$$P(x_1, y_1), \qquad Q\left(\frac{a}{b}y_1, \ -\frac{b}{a}x_1\right)$$

或ハ (207 頁)

$$P(x_1, y_1), \qquad Q\left(-\frac{a}{b}y_1, \ \frac{b}{a}x_1\right).$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テハ

$$P(x_1, y_1), \qquad Q\left(\frac{a}{b}y_1, \ \frac{b}{a}x_1\right)$$

或ハ (209 頁)

$$P(x_1, y_1), \qquad Q\left(-\frac{a}{b}y_1, \ -\frac{b}{a}x_1\right).$$

心差率, 焦點, 準線

楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$, ニ於テハ

心差率 $$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

焦點 $F(ae, 0)$, $F'(-ae, 0)$, (174 頁)

準線 $x=\dfrac{a}{e}$, $\quad x=-\dfrac{a}{e}$.

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テハ

心差率 $$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

焦點 $F(ae, 0)$, $F'(-ae, 0)$, (174 頁)

準線 $x=\dfrac{a}{e}$, $\quad x=-\dfrac{a}{e}$.

抛物線 $y^2=4dx$ ニ於テハ

心差率 $e=1$,

焦點 $F(d, 0)$, (175 頁)

準線 $x=-d$.

焦點ヨリ曲線上ノ一點 $P(x_1, y_1)$ マデノ距離

楕圓又ハ双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テハ

$$PF=|a-ex_1|, \qquad P'F=|a+ex_1|.$$ (215 頁)

抛物線 $y^2=4dx$ ニ於テハ

$$PF = x_1 + d \qquad (253 頁)$$

極方程式

中心ガ極ナルトキハ

橢圓 $$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2\theta} \qquad (180 頁)$$

双曲線 $$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2\theta - 1} \qquad (182 頁)$$

焦點ガ極ナルトキハ

$$\rho = \frac{l}{1 - e\cos\theta} \qquad (230 頁)$$

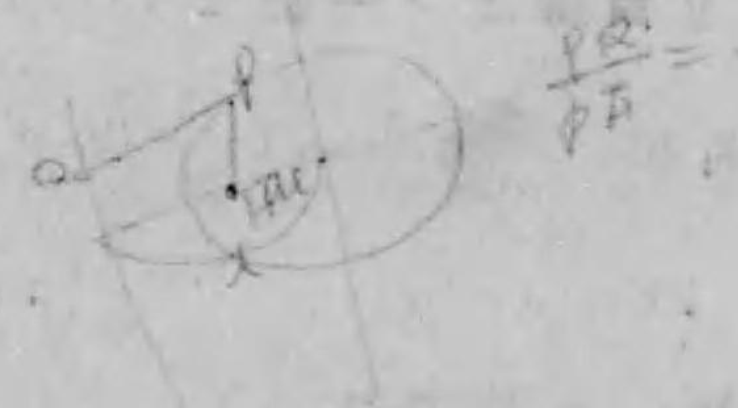
同焦點二次曲線

有心同焦點二次曲線

$$\frac{x^2}{a-k} + \frac{y^2}{b-k} - 1 = 0 \qquad (221 頁)$$

拋物線 $y^2 = 4dx$ ト同焦點ナル拋物線

$$y^2 = 4k(x + k - d) \qquad (259 頁)$$



索引

ア行

カ行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ラ 行

ワ 行

大正九年七月十三日印刷

大正九年七月十六日發行

解析幾何學教科書

平面之部

不許複製

定價金貳圓五拾錢

著者　中川銓吉

著者　竹內端三

東京市神田區裏神保町九番地

發行兼印刷者　合資會社　冨山房

同所　合資會社冨山房社長

代表者　坂本嘉治馬

發行所　東京市神田區裏神保町九番地　合資會社　冨山房

(長電話神田三〇一〇四番・三七六〇番　振替貯金口座東京五〇一番)

東京　三協印刷株式會社印刷

381
87

終