高級工科職業學校教科書

圖解力學

J. T. Wight 著
呂諶 譯

商務印書館發行

高級工科職業學校教科書

圖解力學

J. T. Wight 著

呂諶譯

商務印書館發行

中華民國二十五年七月初版
中華民國二十七年九月四版

(66240)

高級工科職業學校教科書 圖解力學一冊

Elementary Graphic Statics

每冊實價國幣壹元貳角
外埠酌加運費匯費

原著者 J. T. Wight

譯述者 呂謀

發行人 [redacted] 長沙南正路

印刷所 商務印書館 長沙南正路

發行所 商務印書館 各埠

(本書校對者陳忠杰)

F三三九八

目　　錄

第七章 勻稱式屋架

第八章　非匀稱式屋架

第九章　風壓

第十章　橋梁

第十一章 重心——中立軸——惰力率——抗力圖

圖解力學

第一章

引論

近世科學之發達，大部應歸功於科學家對於數量之重視。誠以數量精準，則推算正確，任何發見或發明自易迎刃而解。學工程者朝夕所推求，書本所研究，乃一數量問題耳。蓋任何工程問題，均不能離開數量，學工程者平時苟疏忽於此，則其造詣必不能深。

圖解力學者乃對於繪圖與量算並重之一學問也。凡欲研究其中任一問題，必先之以繪圖，再加之以量算，以求得其結果。固有對此種學問持反對論者，以為藉圖與尺以求數量，其結果必不能準確。殊不知事實並不盡然，因吾人所欲解決之種種工程問題，其所需精度多在百分之一以下，如此精度，果能於繪圖或量算時加以愼重者，固極易達到也。

用圖解力學以解決工程問題，其優點誠顯而易見：方法淺易，

手續簡單,工作迅速,不比用數學公式,意義旣屬精奧,計算亦頗複雜。

工程問題中常有討論及力與速度者,其數量純爲抽象,果能用圖解作紙面之研究,以求得此等力與速度在某一點上所生之影響,其便利誠莫大焉。

1. 力之定義及條件

在未討論本題之先,且將力之定義及其所需條件約略述說於下:

力之定義—— 凡使靜止物體運動,或使變更其運動狀態之作用,稱曰力。

似此定義未免稍涉含糊,用作物理現象之解釋則可,用作工程問題之計算,則意義實尙未能明瞭,頗有加以擴充之必要。

大凡力之作用於某一物體也,必須具備幾個重要條件,而後其所生影響方能完全明瞭。條件爲何?曰

(a)施力點

(b)方向

(c)大小

(d)意識

此數條件統稱爲力之圖解表示。

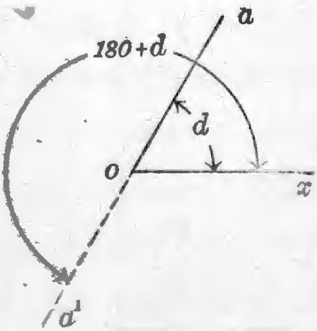
2. 力之圖解表示法

今且就上述諸條件之圖解表示法分釋於下。

施力點 —— 吾人研究力學，對於力統認爲作用於點上，稱爲施力點。但在幾何學上，所謂點者絕對不含有任何面積之意義於其中。今欲將施力點表現於紙面之上，將如何方能使事實適符字義？因作用於物體之力，其施力點多少常佔據若干面積，無論此面積如何微小。因此，吾人研究施力點時，須先將點之數學的意義拋開，專就實事講求，即認其爲一極小面積，而仍名之爲點。

試就機車牽引列車而言，其施力點乃在太極鉤，太極鉤本身實含有一相當面積，但如取與列車尾端之全面積相比，則頗覺渺小，即仍呼之爲施力點亦無不可。總之，所謂施力點者，並非一單純之點，乃包含力所作用之實在範圍，故若於紙面上以鉛筆點表示施力點，則結果亦頗能符合所需精度也。

方向 —— 其次所欲討論者爲力之方向。試就第1圖觀之，若命 o 表示施力點，oa 綫表示所施之力，則因 oa 可任意繞 o 點左右轉動，該力將得無數之方向：oa 每取得一新位置時，該力即取得一新方向。



第1圖

故欲求力之方向，須先認定某綫爲基本，而後述明該力與此綫所作之角度。徒有角度，並未指定基綫，則方向之意義仍未明瞭。在第1圖中試由 o 點向右作一水平綫 ox 以爲基綫，再由 o 點繞同一方向（習慣多取反時針向），作無數直綫，使與基綫交成種種角度，於是每一直綫將表示某一力之方向。

大小——再次所欲研究者爲力之大小。凡力之可以量算者，均可按某一比例尺，作一直綫以表示之，此直綫之長度卽表示該力之大小。綫之長短本無關得失，所須注意者乃在所採用之量算單位或比例尺，務使綫之長度與其所表示之數量及所用比例尺能互相協調。

試舉一例以明其概。今欲作一綫表示 50 斤之力，則此綫之長度使等於 3 寸固可，4 寸亦可，卽 5 寸，6 寸亦無不可，惟所用比例尺須合符節。但若擇定比例尺爲 1 寸等於 20 斤，則該綫之長度必爲 2.5 寸，將不能有分毫之差也。

選擇比例尺須依力之大小及圖紙上可用之地位而定。有一要點必須注意者，卽所作之圖，其誤差之最大可能限度常有定，而圖之大小則不同，因之，比例尺愈大，則比差愈小，易言之，卽比例尺愈大，則精度愈大也。

意識——其次尙有一點須加研究者乃力之意識。力之施力點，方向，及大小旣經逐步加以說明，但苟忽略力之意識，則該力

究係向施力點作用，抑背道而馳——究係一種推力，抑一種牽力——仍未能加以決定。若於力之作用綫上加一矢頭以表示向背，則力之意識亦明，各事均可解決矣。

至論及力之意識，習慣多將力分爲正負兩種：正力（卽牽力，術詞則稱引力）係假設背施力點之向作用，負力（卽推力，術詞則稱壓力）則向之。故凡遇有論及力之正負者，如於作用綫上並無負號之表明，卽認定其爲背施力點作用之正力可也。例如有一60斤之牽力，取 45° 之角度，作用於某一點，則該力之表示法將爲 60_{45} 斤，但如同一力係向此點作用，則其表示法將爲 -60_{45} 斤。

正負兩力旣係方向相反，故若分別命之爲 P 及 −P，則

$$P_a=-P_{180+a}$$

試就第1圖觀之，其意自明。命 oa 綫上之P表示正力，oa' 綫上之P表示相等之負力。若 oa 與 oa' 係在同一直綫上，則就 o 點而言，無論P力係在 oa 綫上抑在 oa' 綫上作用，其效果常相同。因之，

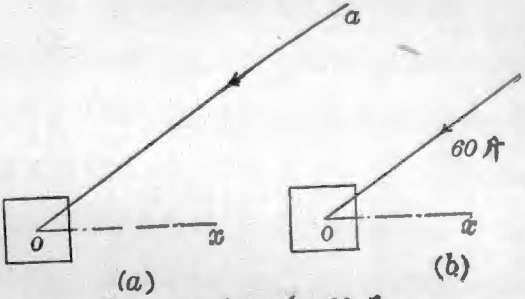
$$oa_a=-oa'_{180+a}$$

或書作更普通之式

$$P_a=-P_{180+a}$$

玆更舉一實例於下，以明上述諸點之應用。例如有一 -60_{35} 斤之力作用於某一點 o，如第2圖(a)。先由 o 作一基綫 ox。由

ox 綫反時針向量 35° 之角度，作直綫 oa。在未量計 oa 長度之先，應卽決定所用比例尺。今試假定其爲 1 寸＝30 斤。於是 oa 長度應爲 2 寸。更查所施之力乃是一種負力，故於 oa 綫上加一向 o 點作用之矢頭。



比例尺 1 寸＝30 斤

第　2　圖

如此之圖，對於力之表示已十分完備，見者一目卽能瞭然其爲惟一專指之力，故圖解法之簡單明瞭，逈非用繁雜之文字及數目表示者可比，此實其最大優點。圖中所用比例尺，負絕大關係，必須在旁註明，否則本圖將歸無用。但在位置圖（其意義將於後面說明）中，oa 綫之長度，並不必依照比例尺，惟於綫旁註明力之大小，如第 2 圖（b）可矣。

3. 同平面之力

一組之力可同作用於一點，向各方面成輻射之狀，若此等力

均在同一平面上，則稱爲同平面之力。本書所欲討論者，蓋完全屬於此類也。

4. 同心力及非同心力

一組之力作用於一共同點者稱爲同心力，若此等力並非作用於一共同點,而係施於不同之點,苟將此等作用綫引長,並不能相交於一共同點者，則此等力稱爲非同心力。

5. 合力及分力

若有多數之力作用於一物體，可用適宜方法將此等力聯合使成一單獨之力,仍作用於該物體,而其所生影響仍等於原有諸力一同作用者,此種方法稱爲力之合成,此單獨之力則稱爲合力。

若有一力作用於一物體,可用適宜方法將此力分成數力,使仍一同作用於該物體，而其聯合所生影響仍與原有之力單獨作用時相等，此種方法稱爲力之分解，分得之數力則稱爲分力。用力之分解法,依理實可將任一力分成無數之力,但通常爲事實之便利,所分之力每有定數,並分別或指定其大小,或指定其方向。

6. 力之平衡

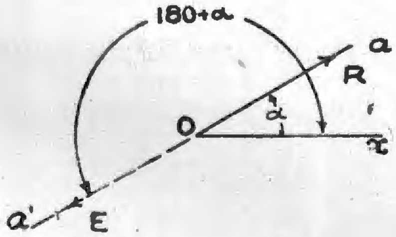
二個或二個以上之力作用於一物體，而該物體並不起運動

時，此等力稱爲相平衡，此時諸力之合力爲零。

二力相平衡時，其力之大小必須相等，方向必須相反。三力相平衡時，一力與其餘二力之合力，其大小須相等，方向須相反。數力相平衡時，其中任意一力與其餘諸力之合力，大小須相等，方向須相反，此任意一力則稱爲平衡力。

由以上定義觀之，平衡力與合力務須辨別清楚。試按上述定義作第3圖加以解釋。

命 oa 表示諸力之合力，oa' 表示平衡力，則



第 3 圖

（a）兩力之施力點相同。

（b）其大小相等，$oa=oa'$。

（c）其意識亦相同，兩者均爲正力，背施力點之向作用。

（d）惟其方向則正相反對，合力之角度爲 a，平衡力之角度則爲 $180^\circ+a$。故平衡力與合力不同之點惟在其方向，兩者正相反對。

7. 單位

力之絕對單位，在公制中為達，即作用於質量一公分之物體上，生一每秒每秒公厘之加速度時之力；在英制中為磅達，即作用於質量一磅之物體上，生一每秒每秒呎之加速度時之力。在工程問題中，所採用之單位為一公斤或一磅，稱為力之重力單位，力過大時則用一公噸等於 1000 公斤，或一英噸等於 2240 磅為單位。質量一公分之重力約為 980 達，一磅之重力約為 32 磅達。此重力即發生於地心吸力，與本書所欲研究之問題頗有關係。地心吸力之大小，因地域之不同而略有變化，惟為數極微，對於工程問題並不發生影響也。

第　二　章

力之分解及合成

8. 力之作用於同一直綫上者

設有力兩組，如第4圖，一為 A,B,及 C,一為 P,Q,及 R,作用於同一直綫上，惟一則向左，一則向右。則此兩組力作用之結果，見圖自明，固不用多加解釋。蓋 A,B,C 及 P,Q,R 旣皆作用於同一直綫上，則其合力必仍在此直綫上，大小則等於六力之

第　4　圖

代數和，方向則或左或右，一視 $(A+B+C)$ 或 $(P+Q+R)$ 孰者較大而定。

9. 兩同心力之合力

力之動作於同一直綫上者，其解決之易旣如上述，其次所欲研究者，當屬同心力及非同心力。其中最簡單而同時亦為最重要

之一種，當推兩同心力之合力，玆特詳為解釋於下。

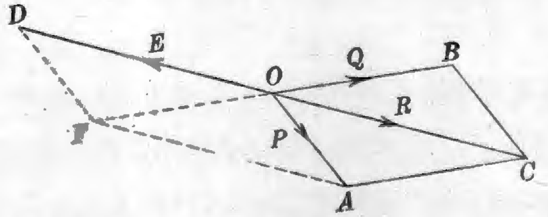
欲解決此種問題，共有兩種方法可用：一稱為平行四邊形法，一稱為位置及力綫圖法。

第一法——此法係利用一種力之平行四邊形說，其應用於實際問題雖不如第二法之廣，然有時亦頗能解決若干問題，固值得研究者也。

10. 力之平行四邊形說

今有兩力同作用於一點，若用平行四邊形之兩隣邊表示此兩力之大小及方向，則經過施力點所作之對角綫將表示合力之大小及方向。

如第5圖，有 P,Q 兩力同作用於一點 O。在 P,Q 兩綫上，



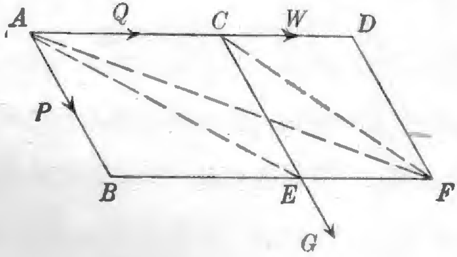
第　5　圖

依某一比例尺，分別量得 OA,OB 兩距離，使各等於 P,Q 兩力之大小。完成 $OBCA$ 平行四邊形，並聯結 OC。於是 OC 將按同

一比例尺表示所求合力之大小及方向。

此一重要命題最初演述之者爲牛頓爵士，時在 1687 年，隨後有多少大數學家用種種方法加以解證。今且擇一最有名之杜切耶氏證明法述說於下。

有一力 P 在 A 點順 AB 方向作用於一物體，另有兩力 Q 及 W 亦順 ACD 方向作用於 A 點。如第 5 圖（A）。今假設 W



第 5 圖 (A)

力係在 C 點作用，並依比例尺以 CD 表示之。完成平行四邊形 $ACEB$ 及 $ECDF$。

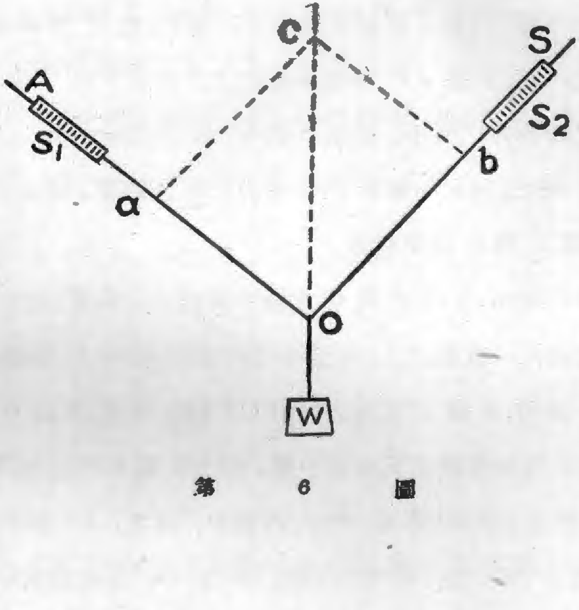
姑假設 P 與 Q 之合力爲一力 T，作用於 AE 綫上。於是 P 與 Q 可卽以 T 代替之，其施力點並可假設係在其作用綫上之任一點。命此施力點爲 E。此作用於 E 點之力 T 可仍分解爲兩力，分別等於 P 及 Q，沿 EG 及 EF 之方向作用。再將 P，Q 兩力之施力點分別移至 C 及 F。於是在 C 點又得到兩力，一爲 P 沿 CE 綫上作用，一爲 W 沿 CD 綫上作用。按同樣方法，

P 與 W 之合力復可假設爲某一力 S 作用於 CF 綫上，其施力點並假設係在任一點 F。如此，所有P,Q,及 W 三力均可假設係施於同一點 F,而其聯合影響並不致變更。故 F 實爲合力作用綫上之一點。於是 AF 實表示合力之方向。

茲再論合力之大小。在第 5 圖中,命 E 表示另外一力，作用於 OD 綫上,其大小等於 P,Q 兩力之聯合影響。而其方向則相反,是爲 P 與 Q 之平衡力。

由前一說明,既知 P 與 Q 之合力係沿 OC 作用,因之,OD 與 OC 必在同一直綫之上。完成平行四邊形 $ODFA$，聯結 OF。今按前一說明,E 與 P 之合力將沿 OF 綫上作用,又因 O 點在 P,Q，及 E 三力作用之下而成平衡，則 OB 與 OF 必在同一直綫之上。於是 $OFAC$ 亦爲一平行四邊形，因之，FA 等於 OC。但 FA 等於 DO，故 OC 等於 OD。於是 OC 長度實表示合力之大小,而該綫之傾度則表示合力之方向。

此一定理如用兩彈簧秤及一已知大小之錘加以試驗，更易證明。此種器械可佈置於一黑板上如第 6 圖。A,B 爲兩固定點，兩彈簧秤卽懸著於其上。用一長繩聯結兩秤鈎，並於繩上之 O 點懸一已知大小之錘 W。於是三力將取如圖所示之位置,成平衡之勢,而 OA,OB 及 OW 三繩則分別表示三力之作用綫。按此試驗之位置,將三作用綫移繪於黑板上,並於 OA 上取 oa 長



第 6 圖

度使等於 S_1 力之大小，於 OB 上取 ob 長度使等於 S_2 力之大小。作 ac 平行於 ob 及 bc 平行於 oa。聯結 oc。用尺實地量算之，將見 oc 適等於 W 力之大小，並適在 WO 之延長綫上。

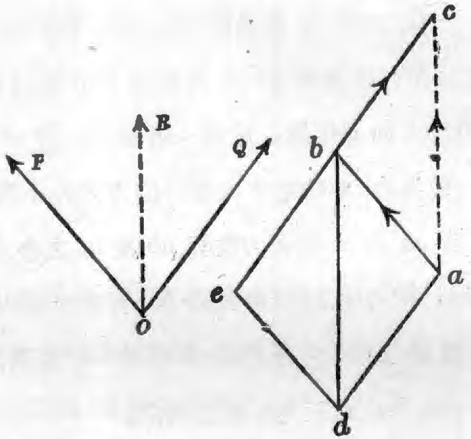
第二法——本法所含原則極關重要，凡有討論及力之工程問題而欲用圖解法解決者，均依之爲基礎，讀者實應加以重視也。

在此法中須用兩種不同之圖，一稱爲位置圖，一稱爲力綫圖，

茲且述之於下。

11. 位置圖及力綫圖

如第7圖左面 POQ 表示 P,Q 兩力之位置圖。今於右面任一適宜地點作一 ab 綫使與 P 力平行,並使 ab 綫之長度按照某



第　7　圖

一比例尺等於 P 力之大小,其 a,b 兩字之次序則表示該力之意識。由 b 復作一 bc 綫使與 Q 力平行,其長度並按照同一比例尺等於該力之大小。聯結 ac。於是 ac 長度將等於 P,Q 兩力之合力之大小,其方向則表示合力應取之方向。更於位置圖中之 O 點作 OR 使與 ac 平行,則 OR 將表示合力之方向,矢頭則表示該力之意識。

今欲證明以上所述爲實際所求之情形，且先就以下三觀點將此合力加以研究，即

(a)大小

(b)方向

(c)意識

試先論大小，求證 ac 實表示 R 之値。引長 cb 至 e，使 be 等於 cb。完成平行四邊形 $abcd$，並聯結 bd。茲且就 b 點而言，無論係 bc 力自 b 向 c 作用，成爲一種牽力，抑 eb 力自 e 向 b 作用，成爲一種推力，其結果常相等。因力之大小實相等（$P_a=-P_{180+a}$），故 ab 及 eb 之合力將與 ab 及 bc 之合力相同。在平行四邊形 $abcd$ 中，前已證明對角綫 bd 實表示合力之大小及方向，故若 ac 爲 ab 及 bc 之合力，必將等於 bd，並與之平行。

試再取 cba, bed 兩三角形而比較之。

因　bc 等於並平行於 eb，

　　ba 等於並平行於 ed，

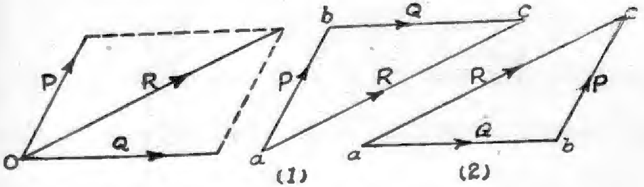
又　abc 角等於 deb 角，

　　兩三角形之各方面既互相等，故 db 實等於並平行於 ac。

　　於是 ac 實表示合力之大小及方向。

由上所述，可知在位置圖中，各力均以直綫表示之，其方向則與各該力之作用綫吻合。矢頭即表示各力作用之方向。在力綫

圖中，各力均按某一比例，依循環次序，以直綫表示之，其方向則與各該力之作用綫平行。此中應注意者，卽力綫圖中之力綫必須依循環次序，至以何力爲起始，順時針向抑反時針向，均無關重要。如第7圖(A)，若力綫圖係以 P 起始，則得如(1)之結果；如



第　7　圖　(A)

係以 Q 起始，則得如 (2) 之結果。兩圖之形式雖不同，而結果之 R，其方向與大小則完全相同。力綫圖中多置小寫羅馬字母於各頂點，a 卽表示起點，其餘依次用之。

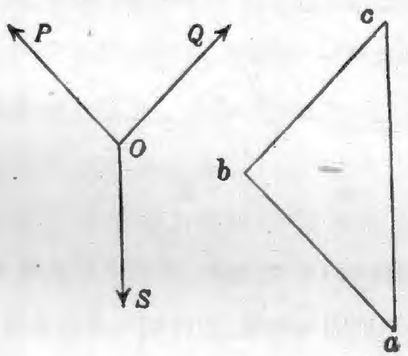
力綫圖中各綫並不必有矢頭之符號，今特加以矢頭者，乃表示研究力之意識之方法耳。因合力 R 在位置圖中其作用之方向爲自 O 向 R，在力綫圖中爲自 a 向 c。但按力綫圖之原則，所有之力應按循環次序，故 ac 綫上矢頭所表示之方向實與其他 ab 及 bc 兩力所示循環方向相反。因得以下之定律。

定律——在力綫圖中，合力之方向常與其他諸力所示循環方向相反，平衡力則常指對其他諸力所示同一循環方向。

12. 力之三角形

今有三力同作用於一點，設用三角形之三邊依次表示其大小及方向，則此三力將成平衡。

此一定理試用第 8 圖加以解說，其意更易明瞭。有三力 $P, Q,$



第 8 圖

及 S 同作用於 O 點，成平衡狀態。

任取其中之一力 P 爲起始，作一力綫圖，命 ab 等於並平行於該力。再由 b 作一 bc 綫等於並平行於 Q 力，最後由 c 作一 ca 綫等於並平行於 S 力。

若此三力係成平衡，則 ca 綫之一端 a 將與 ab 綫之一端 a 適相吻合，因兩點苟不相吻合，則在此力綫圖中，必須另有一閉合綫。此閉合綫將表示另有一合力之存在，與本題之假設不合，

因前述三力係成平衡，並無任何合力之存在也。

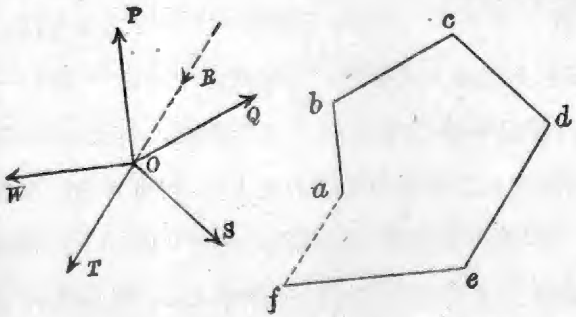
故三角形 abc 表示 $P,Q,$ 及 S 三力之大小及方向。

在上述定理中，有一事實須注意者，卽若有三力作用於一物體而成平衡，則三者必爲同心力。試先就 P 與 Q 而言，其合力必通過 O 點。今第三力 S 旣與 P,Q 兩力成平衡，則依力之平衡定理，S 必爲 P,Q 兩力之平衡力，而與其合力相平衡，其方向則相反，因之，S 亦必通過 O 點。總之，三力中之任一常爲其餘二者之平衡力。此一定理實僅下述普通定理中之一特例耳。

13. 力之多邊形

今有多數之力同作用於一點，設用多邊形之各邊依次表示其大小及方向，則諸力將成平衡；設此多邊形並不能閉合，則自其始點至終點所作之閉合綫，將表示合力之大小及方向。

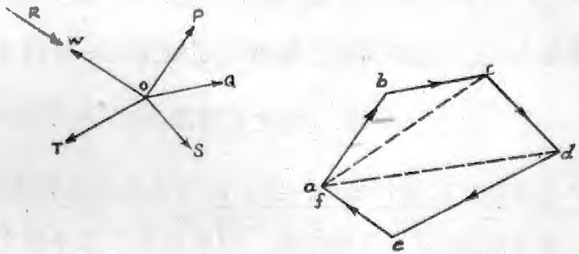
如第9圖有 P,Q,S,T,W 五力同作用於 O 點，試求得其合力。



第　9　圖

茲且任取一力 P 爲起始，作 ab 使等於並平行於 P。依循環次序，第二將輪及 Q，由 b 作 bc 使等於並平行於 Q。如此繼續作 cd, de 等綫使分別等於並平行於 S, T 等力，直待輪及最後一力 W，其在力綫圖中之代表則爲最末一綫 ef。

若終點 f 與始點 a 適相吻合，則此多邊形將爲一閉合之形，而 P,Q,S,T,W 將成平衡，如第 9 圖(A) 所示，其中任何一



第 9 圖(A)

力，如 W，將爲其餘諸力之平衡力，並與其合力 R 成平衡。

但若 f 並不與 a 吻合，則聯結 a,f 兩點之閉合綫，如第 9 圖，將表示上述諸力之合力，於位置圖中通過 O 點作一綫使與 af 平行，於是該綫將爲合力 R 之作用綫，其大小則等於 af 長度，其意識則由力綫圖中反諸力之方向，卽自 a 至 f，求得之。

此一定理欲予證明，頗屬易事。在第 9 圖(A)中，聯結 ac 及 ad，於是按力之三角形定理，ac 將表示 ab, bc 兩力合力之大小及方向。同樣，ad 將表示 ac, cd 兩力合力之大小及方向；ae 將

表示 ad, de兩力合力之大小及方向。故 ae 實爲 ab, bc, cd de 諸力之合力。

14. 力之分解

上述定理固爲解決所有關於同心力之合成問題之捷徑，但「力之分解」實爲「力之合成」之反面工作。故解決力之分解問題,如應用力之多邊形法,亦頗屬簡易也。

力之分解,問題雖多,要不出簡單幾何學之範圍，讀者如能熟習力之多邊形法之原則,則舉一反三,對於其他問題，自能融會貫通。

大凡解決此種問題,其中未知數只能限於二個,如有二個以上之未知數,則此問題成爲不確定,而解決將屬不可能。此二個未知數不外以下數項之一:

(a) 任一力之方向及大小。

(b) 任一力之方向及其他一力之大小。

(c) 任二力之方向。

(d) 任二力之大小。

概言之，若 n 爲作用於某一點之力數，則欲詳述諸力如何作用於該點,必須知其 $2n$ 個事實,卽 n 個大小與 n 個方向。若只知其 ($2n-2$) 個事實,則問題之解決僅屬可能，如所知不及

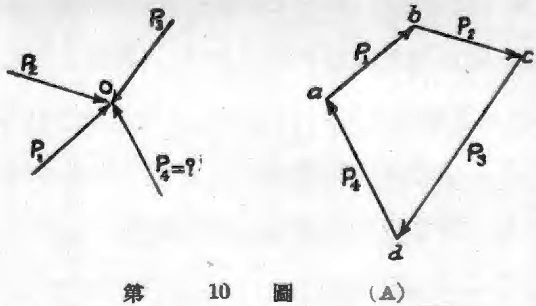
此數 則解決爲不可能矣。

研究此等問題，第一步係作一位置圖，表明所有已知之力及其作用綫，由此圖中求得何力或何綫爲未知，而後決定該問題是否可以解決。如可解決，則就所有已知事實作一力綫圖。於是按照平衡之情形，此力綫圖必爲一閉合多邊形，閉合綫則表示所求之力或作用綫之方向焉。

今且舉例於下。

例一——今有同心力一組成平衡之勢，其中除有一力之大小及方向不知外，餘均爲已知。試求此未知之力。

如第 10 圖(A)，命 P_1-P_4 爲所有之力，其中 P_4 爲未知。先

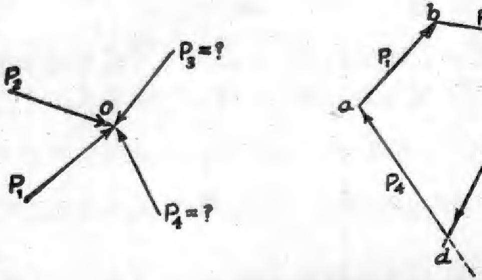


第 10 圖 (A)

就已知事實，作 ab, bc, cd 三綫。今因諸力係成平衡，故力綫圖必爲一閉合四邊形。於是由 d 所作於 a 之直綫將表示所求 P_4 力之大小及方向。在位置圖中，通過 o 點作一綫使與 da 平行，此綫將表示 P_4 之作用綫，矢頭則表示其意識。

例二——今有同心力一組成平衡之勢。其中所有力之作用綫均爲已知，惟有二力之大小未知。試求此未知之數。

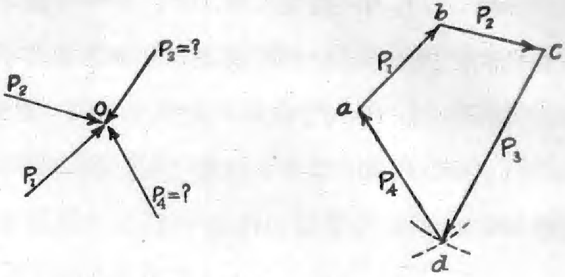
如第 10 圖(B)，命 P_1-P_4 爲所有之力，其中 P_1 及 P_2 之大小及方向均爲已知，P_3 及 P_4 之方向爲已知，大小則不知。先就已知事實作 ab, bc 兩綫。今因諸力係成平衡，故力綫圖應爲一閉



第　10　圖　(B)

合四邊形，其閉合綫應各與 P_3 及 P_4 之作用綫平行。由 a 作一直綫 ad 使與 P_4 之作用綫平行，由 c 作一直綫 cd 使與 P_3 之作用綫平行，並與 ad 相交於 d。於是 cd, da 將各等於 P_3, P_4 之大小。

例三——如在上例中，已知 P_3 及 P_4 之大小，但不知其作用之方向。則解決之道將如第 10 圖(C)所示。以 a 及 c 爲圓心，以 ad 等於 P_4 之大小及 cd 等於 P_3 之大小爲半徑，各作一圓弧使相交於 d。於是 cd, da 將分別表示 P_3, P_4 之方向。在位置圖

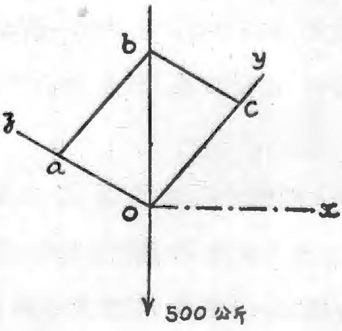


第 10 圖 (C)

中，通過 O 點作兩直綫分別與 dc, ad 平行，此等綫將表示 P_3, P_4 之作用綫。

例 題

1. 有一 500 公斤之錘用兩繩 oy 及 oz 繫之。兩繩與基綫所交之角各爲 50° 及 150°，如第 11 圖所示，試求各繩上之牽力。



第 11 圖

比例尺爲 1 公分＝250 公斤。

（解）　將載重之作用綫向上引長，取 ob 長度使等於 2 公分。由 b 作 bc 與 oz 平行及 ba 與 oy 平行。於是 oc 等於 oy 繩之牽力，oa 等於 oz 繩之牽力。

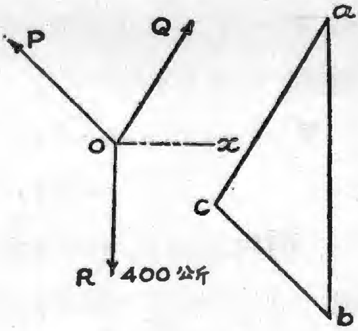
由圖量得

$oc=1.75$ 公分 $=1.75\times250=437.5$ 公斤，

$oa=1.32$ 公分 $=1.32\times250=330.0$ 公斤。

2.　有二力作用於一點 O，其方向各爲 60° 及 135°。設使該點對於運動之抵抗爲 400 公斤，取 270° 之角度作用。試求當運動正在開始時所施二力之大小如何。比例尺爲 1 公分＝100 公斤。

（解）如第 12 圖，當運動正在開始時，所施二力適勝過 400 公斤之抵抗，O 點將在三力之作用下而成平衡：此三力一爲 400 公斤之抗力 R，背 O 點之方向作用，其他二者爲 P 及 Q，取相反方向作用。



第　12　圖

先作一 4 公分長之綫 ab 平行於 R。由 b 作 bc 平行於 P，由 a 作 ac 平行於 Q；acb 將爲一力之三角形，其中 bc 及 ca

將分別表示 P, Q 二力之大小。

$$bc = 2.1\ \text{公分} = 2.1 \times 100 = 210\ \text{公斤},$$

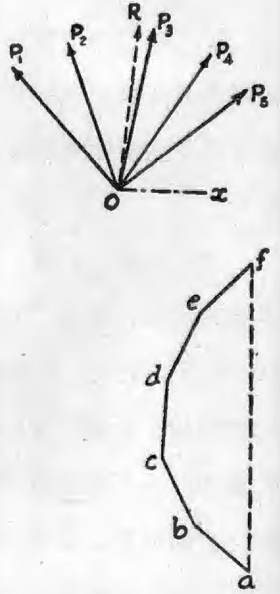
$$ac = 2.9\ \text{公分} = 2.9 \times 100 = 290\ \text{公斤}。$$

3. 有五人共牽一物體，如第 13 圖所示，各施以 30 公斤之力。今欲用一絞車代替五人之力。試求此絞車所生單獨之力，俾能等於五人所生之同一效果。比例尺為 1 公分＝30 公斤。

(解)命 $P_1 - P_5$ 分別表示五人所施之力。先作一 1 公分長之綫 ab 平行於 P_1，次作同樣長之綫 bc 平行於 P_2，如此繼續進行，直至 ef 綫平行於 P_5。聯結 af。於是 af 將表示 ab——ef 之合力，亦即為絞車所應生之力，其大小等於

$$af = 4.18\ \text{公分} = 4.18 \times 30$$
$$= 125\ \text{公斤}。$$

在位置圖中，通過 O 點作一綫與 af 平行，如 R，此綫將表示絞車之中心綫，其方向為 83°。

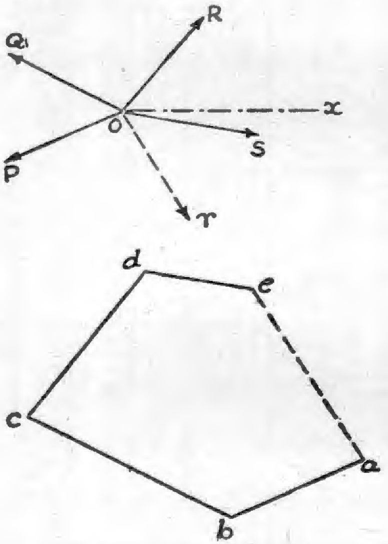


第 13 圖

4. 有一起重杆用拉條五根緊繫之，其中四根 P, Q, R, S，有如第 14 圖所示。今知在杆頂

此等拉條所生之水平力各爲 2,3,$2\frac{1}{2}$ 及 $1\frac{1}{2}$ 屯，試求第五拉條所生水平力之大小及方向。比例尺爲 1公分＝1 屯。

(解)先自 P 始，作一長 2 公分之綫 ab 平行於 P，其他諸力均仿此，直至與 S 平行之綫 de。聯結 e, a。通過 o 作一綫



第　14　圖

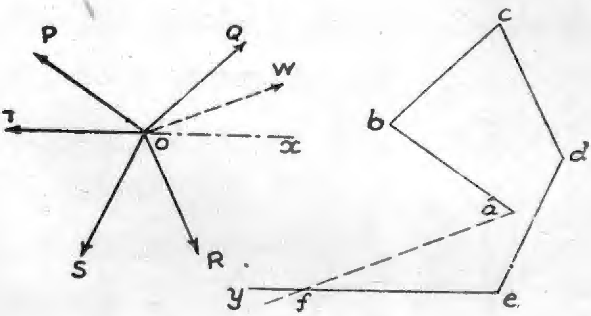
or 使與 ea 平行。於是 ea 表示所求第五拉條之水平力，or 表示其方向。

$$ea = 2.76 \text{ 公分} = 2.76 \times 1 = 2.76 \text{ 屯。}$$

第五拉條之方向＝301°。

5.　第 15 圖中之 O 點表示一電綫杆之平面圖。假設由

此點共向外放射鉛綫六根，其中四根之位置分別用 P, Q, R, S 等綫表示之，其牽力各爲 20 公斤。其餘二根內有一根之方向已知爲 180°，其他一根之牽力則已知爲 30 公斤。若 O 點係成平衡，試求此末後二根之未知項。比例尺爲 1 公分＝10 公斤。



第 15 圖

(解) 先自 P 始，作一長 2 公分之綫 ab 平行於 P，其他諸力均仿此，直至與 T 平行之 ey。ey 綫之長度假設爲無限。

此一多邊形仍不能成爲閉合。惟在位置圖中另有一 30 公斤之力 W，其方向爲未知，與其他諸力適成平衡。故若將該力加入於多邊形中，則該圖將成一閉合形。以 a 爲圓心，af 等於 3 公分之長爲半徑，作一圓弧，使交 ey 於 f。於是 ef 綫之長度將表示 T 力之大小，fa 綫之傾度將表示 W 力作用綫之方向。

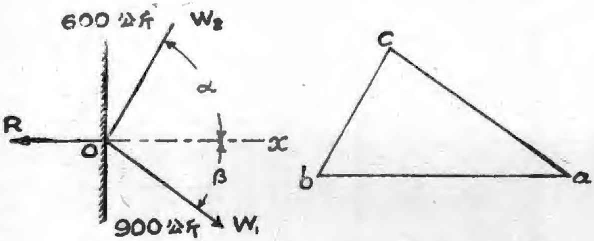
$ef=2.6$ 公分 $=2.6\times10=26$ 公斤。

af 之方向$=22°$。

∴　$T=26_{180°}$公斤，$W=30_{22°}$公斤。

6.　有一駁船停靠於河邊，須用 1000 公斤之牽力方能將其拉開，今用絞車兩個，分別能生 600 及 900 公斤之牽力，安置於河之兩岸，將駁船拉開。試求兩拉繩與通過駁船停靠之點所作垂直於河岸之綫相交之極向。比例尺爲 1 公分$=300$ 公斤。

(解)如第 16 圖，假設 O 爲駁船停靠之點，過通 O 作一垂



第　16　圖

直於河岸之綫 OX。駁船之抗力卽假定沿此綫作用。

作一長 3.33 公分之綫 ab 平行於 OX。以 b 爲圓心，3 公分之長爲半徑(代表 900 公斤絞車之牽力)，作一圓弧。再以 a 爲圓心，2 公分之長爲半徑(代表 600 公斤絞車之牽力)，作一圓弧，使交第一圓弧於 c。

聯結 ac 及 bc，通過 o 點作 OW_1 及 OW_2 兩綫使分別與

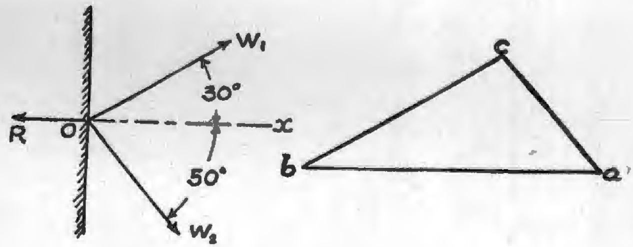
ac 及 bc 平行。此兩綫將表示兩拉繩作用之方向:——

小絞車之拉繩在 $61^\circ=\alpha$

大絞車之拉繩在 $36^\circ=\beta$。

7. 在前題中,若兩絞車之位置已固定,其拉繩與 OX 綫相交之角度各爲 30° 及 60°, 則欲對於駁船生一 1000 公斤之牽力,所需兩絞車之最小力量將各爲幾何?比例尺 1 公分$=250$ 公斤。

(解) 如第 17 圖,命 OW_1 及 OW_2 分別表示兩絞車之拉



第 17 圖

繩。

作一長 4 公分之綫 ab 平行於 OX。由 b 作 bc 平行於 OW_1,由 a 作 ac 平行於 OW_2。於是 ac 及 bc 將分別表示 W_1 及 W_2 兩絞車所生之牽力。

$ac=2.1$ 公分$=2.1\times250=525$ 公斤,

$bc=3.14$ 公分$=3.14\times250=785$ 公斤。

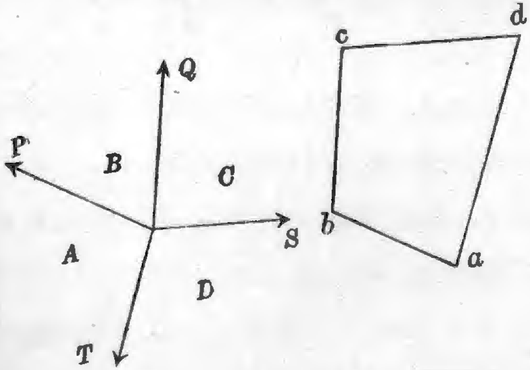
15.　波氏記號法

所有圖解力學中之問題，不外兩種圖形之研究，卽位置圖與力綫圖。在位置圖中，各綫只表明力之方向，而在力綫圖中，各綫則表明作用於位置圖中相當點之力之大小。

兩圖之性質旣不同，記號之方法亦應互異，故欲由一圖變化爲其他一圖，須採用一種適宜字母，適用於二者之間，惟其意義則顯然有別。此種方法當推波氏記號法爲最佳（有時稱爲亨利西氏記號法）。

波氏記號法最適於硏究在平衡狀態中之力，例如屋架或桁梁上各部分之力，惟對於以前所述各種問題則並不甚適用也。玆且舉一實例於下，以表明波氏記號法之應用。

有　$P, Q, S,$ 及 T 四力作用於一點 O, ——O 係在平衡



第　18　圖

狀態中，如第 18 圖。今不用 P, Q, S, T 四字名此四力，而用大寫羅馬字母置於力之作用綫之兩旁，易言之，即於每兩作用綫之空間各置一字母，其次序則順時針向。例如在 T, P 兩力之空間置一 A 字，在 P, Q 兩力之空間置一 B 字，餘仿此。於是欲表明 P 力，可不必稱之為 P，而稱之為 AB，Q 力則稱之為 BC，餘仿此。

在力綫圖中，其與 AB 力平行之綫則以 ab 表示之，a 為首而 b 為尾，各置於綫之兩端，以表示力之意識，其餘各綫均仿此依次進行。

總之，波氏記號法在位置圖中，所有之力係用大寫羅馬字母依次表示之，其在力綫圖中，則用相當小寫字母表示之。讀者觀於第 18 圖，當知其如何簡明便利也。

習　題

1. 今有二力，一為 32 公斤，一為 24 公斤，作用於一點。兩作用綫所交之角度為 73°。試求合力之大小。

2. 今有一物體 O 為二力 P 與 Q 所作用。P 等於 90 公斤，作用於與基綫成 28° 角度之綫上；Q 等於 72 公斤，作用於 103° 角度之綫上。假設 O 方欲為 P, Q 二力所運動，適又有一力加以阻止。試求此力之大小及方向。

3. 有一 18 尺長之鏈索用以舉起一 45 噸重之鑄物。鏈索之兩端係繫於鑄物之眼頭釘上，其水平距離為 $3\frac{1}{3}$ 尺。試求當鑄物被鏈索弔起時，鏈索上應生之牽力。

4. 今有四力 P,Q,S,T 同作用於一點使成平衡。已知 P 與 Q 之大小各為 200 與 280 公斤，其作用之角度各為 30° 與 110°。S 與 T 作用之角度則各為 220° 與 280°。試求後二力之大小。

5. 有一重 30 噸之桁梁弔於一起重機上，弔繩長 26 尺。今欲將此桁梁向外推 3 尺之水平距離，試求所需之水平推力，俾能達此偏度。

6. 有一駁船，用馬一匹牽之沿河而行。駁船與河岸之距離為 34 尺，馬則距岸邊 5 尺。繂長 64 尺。馬所生牽力為 140 公斤。若駁船重 25 噸試求每噸之抗力幾何。

7. 有一鋼烟囱，高 20 尺，直徑 $2\frac{1}{2}$ 尺，用鐵索四根順東西南北方向繫之。鐵索係繫於距地面 10 尺高之鐵箍上，與地面成 34° 之傾斜。今有北風以每方尺 30 公斤之力正吹在烟囱上。假設所有荷重均為北面一索所擔承，試求該索之牽力。若風為東北向，其力度等於每方尺 40 公斤，試求東北兩根鐵索之牽力。

第　三　章

實　用　問　題

前章所討論者爲解決圖解力學中種種簡單問題之原則，本章所欲討論者則爲此種原則之實際應用。

16. 載　重　平　台

第 19 圖表示一平台 HP，上有均佈載重。平台之一端係鉸釘於 H，他端之兩邊則各用牽桿 FP 一根將其支持於水平位置。設命

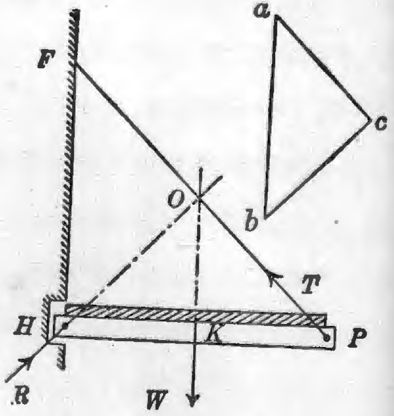
L = 平台之長度，以尺計。

B = 平台之寬度，以尺計。

w = 每平方尺之載重，以公斤計。

W = 總載重。

於是 $W = L \times B \times w$ 公斤。



第 19 圖

在本例中，載重係假設爲平均分佈者，故 W 可假設爲一集中之力，作用於平台面積之中心。

平分 HP 於 K 點，通過 K 作一垂綫使交 FP 於 O。於是平台將爲三種力所作用而成平衡，即載重 W，牽桿之引力 T，及鉸釘處之抗力 R。

前經證明若有一物體被三力所作用而成平衡，則此三力必通過一公共點。今載重 W 及引力 T 旣相交於 O，故鉸釘處之抗力必亦通過該點。

通過 H 與 O 兩點作一直綫，即得抗力之作用綫。如是已完成位置圖。由此再作力綫圖以求得各力之大小，乃屬簡易之事矣。

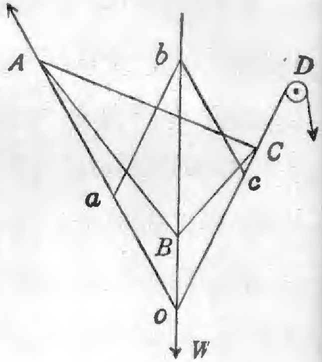
先按比例尺作一 ab 綫表示載重 W；由 b 作一 bc 綫與 R 平行，由 a 作一 ac 綫與 T 平行。於是 abc 將爲所求力綫圖。按照所用比例尺在圖上量算 bc 及 ac 之長度，即得鉸釘處之抗力及牽桿之引力。

注意： 每一牽桿之引力 $=\frac{T}{2}=\frac{ac}{2}$ 公斤。

17. 三角框

有一三角框 ABC 如第 20 圖，在 A 點爲一鉸釘所支持，

在 C 點為一通過滑車 D 之繩所繫着，在 B 點則繫有載重 W。試求繩之牽力及鉸釘處之抗力。

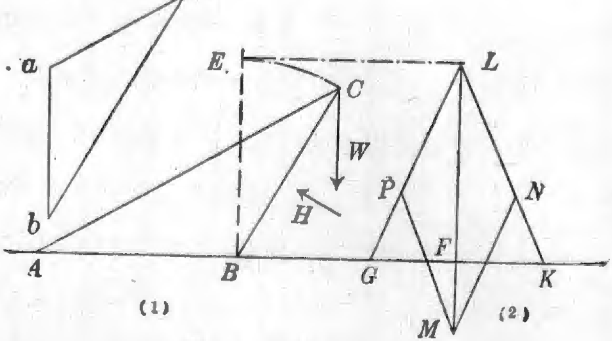


第 20 圖

延長在 C 點之繩之作用綫 DC 使交 BW 於 O；通過 A, O 兩點作一直綫。延長 OB，於此延長綫上按比例尺取 Ob 長度使等於 W。由 b 作 ba 平行於 CO 及 bc 平行於 AO。於是 Oa 長度將依同一比例尺表示在 A 點之抗力之大小，Oc 則表示繩之牽力。

18. 起重架

起重架為起重機之一種，其構造極簡單而應用頗廣，因一値



第 21 圖

得討論之題目也。第 21 圖即表示此種構造，其中 CB 為兩根支木，交叉安置(其實在正面觀之，將如圖(2)中之 LG 與 LK)，AC 則為一背柱，今於 C 點起有載重 W，試求背柱上之牽力及兩支木所支持之推力。

第一步，先作一力之三角形 abc，其中 ab 表示 W，ac 及 bc 則分別與背柱及支木平行。於是 ac 將表示背柱上牽力之大小；bc 則表示兩支木所支持之推力。惟此種推力係作用於兩支木間之中綫上，而由兩支木所分擔，故兩支木究應各支持若干，仍須加以推求也。

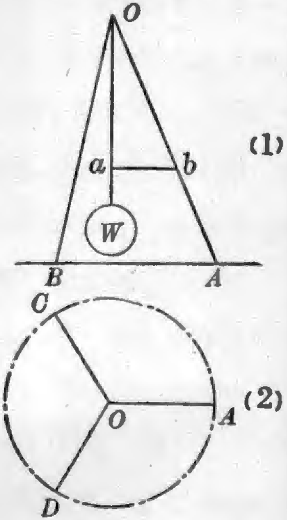
欲知此種推力 bc 對兩支木究係如何作用，須先求得兩支木之實在正面圖。今於支木之立脚點 B 作一垂綫；以 B 為圓心，BC 支木為半徑，作一圓弧，使交該垂綫於 E。在地平綫 ABK 上任擇一點 F，並於兩邊各取 FG 及 FK 使等於兩支木之兩脚支距之一半。另於 F 作一垂綫，將 E 點投射於此垂綫上，得 L 點。聯結 LG 及 LK。於是此兩綫將表示兩支木之實在長度，而 GLK 將表示順矢頭 H 之方向觀視之兩支木實在正面形。

今因推力 bc 係作用於 LF 綫上，故由 L 取 LM 長度使等於 bc。由 M 作 MN 平行於 GL 及 MP 平行於 KL。於是 LP 及 LN 長度將表示 LG 及 LK 兩支木上所生之推力。

19. 三脚架

三脚架爲另一種簡單器械，用以支持載重或將其舉起。其構造爲三根支木，作爲三脚，在頂端互相聯結，如第 22 圖，載重 W 即由此頂端弔下。圖中之(1)表示三脚架之正面觀。O 爲頂端，OA, OB 爲三脚，其中 OA 表示其實在長度。圖(2)表示三脚架之平面觀。所有三脚與地面或中綫相交之角均互相等，故每脚所支持之載重均與總載重之三分之一成相等比例。

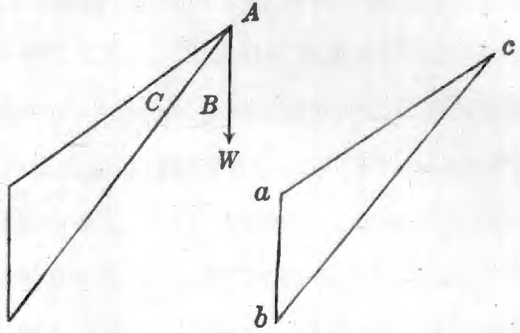
今於中綫 OW 上取 Oa 長度等於 $\frac{W}{3}$，由 a 作一橫綫 ab 使交 OA 於 b 點。於是 Ob 將表示每脚之推力。



第　22　圖

20. 單式起重機用懸吊滑車起重者

第 23 圖爲一種單式起重機，機臂 BC（用波氏記號法）之最外端懸有一複滑車，其下弔有載重 W。試求機臂 BC 之推力及繫柱 AC 之牽力。

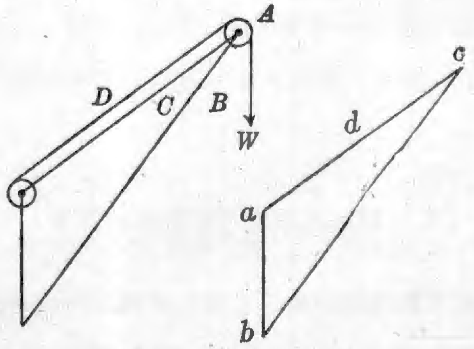


第　23　圖

此一問題頗易解答。作 ab 綫使代表載重 W；由 b 作 bc 平行於 BC，由 a 作 ac 平行於 AC。於是 bc 將表示機臂之推力，而 ac 則表示繫柱之牽力。

21. 單式起重機用單絞鏈起重者

第 24 圖所示之起重機與前述又略有不同。在前式中，起重



第　24　圖

只用一複滑車,而在本式中，起重之法係用一絞鏈，通過機臂頂上固定之滑車,由此再沿繫柱通到桅竿頂上之另一滑車。

今欲求機臂之推力及繫柱之牽力，可作一 ab 綫使代表載重 W; 由 b 作 bc 平行於 BC。查在機臂頂端共有兩種力作用:一爲繫柱 CD 上之牽力,一爲絞鏈 DA 上之牽力。關於此兩種力,已知以下之事實:——絞鏈上之牽力,其大小實等於 W, 其方向則與繫柱平行;至於繫柱上之牽力，則僅知其係沿 CD 綫上作用。

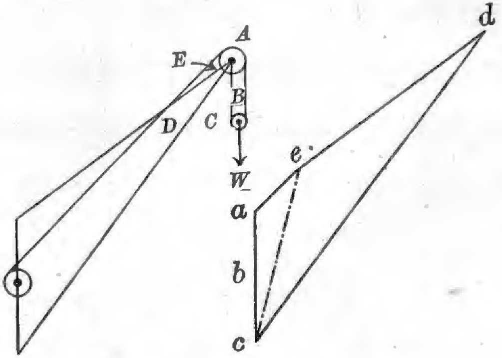
根據以上已知之事實,可將力綫圖繼續完成。由 a 作一 ac 綫平行於 DC, 並於該綫上取 ad 長度使等於絞鏈之牽力 W (因絞鏈係與繫柱平行)。於是 dc 長度將表示繫柱之牽力,而 bc 則表示機臂之推力。

解決上述兩問題,如用同一載重及形狀,則有一極顯明之事實,卽兩例中之力綫圖必互相吻合,因之，機臂上之推力必互相等，不過在前一例中，繫柱之牽力等於 ac, 而在後一例中則等於 $ac-W=dc$。

22. 單式起重機用雙絞鏈起重者

第 25 圖又爲第 24 圖之進步，於機臂頂端之滑車下另加一小滑車,載重卽藉此小滑車之媒介而舉起。絞鏈之一端繫於機

臂之頂尖，由此向下，繞過小滑車，再向上通過大滑車，而後通至安置於桅竿中心處之絞筒。如此，將見與前例顯然有兩不同之點：其一，載重 W 在此處係爲兩段絞鏈所維繫，因之，若除去摩擦



第　25　圖　(A)

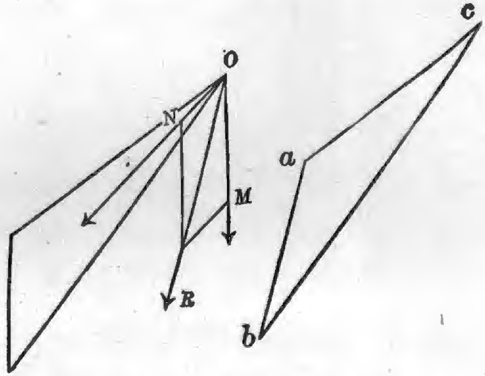
力而言，絞鏈之牽力將等於 $\frac{W}{2}$，而非如前例之等於 W。其二，絞鏈由機臂頂端至絞筒之路綫並非與繫柱平行。

解決此種問題共有兩法可用，或將各力分別討論，或先求得在機臂頂端因各段絞鏈之牽力而生之合力。茲先述分別討論之法。

作 ab—bc 綫表示兩根懸弔之絞鏈所生於機臂頂端之牽力(第25圖(A))。今因此兩絞鏈各分擔 $\frac{W}{2}$ 之力，故 $ab=bc=\frac{W}{2}$。由 c 作 cd 平行於 CD，但因機臂 CD 上應力之大小並不得而知，故 d 點之位置仍不能確定。惟絞鏈 AE 上牽力之大小及方向

業已知之,故可由 a 作一 ae' 綫平行於 AE,其大小則等於 $\frac{W}{2}$ (絞鏈上之恆引力)。最後再由 e 作 ed 平行於 ED, 於是完成 $abcde$ 力綫圖。所有機臂及繫柱之應力均可由此力綫圖上按相當比例尺求得之。

至於第二法係先於表示載重 W 之作用綫上取 OM 使等於 W,如第 25 圖(B),(因 CB, BA 兩絞鏈之牽力均各等於



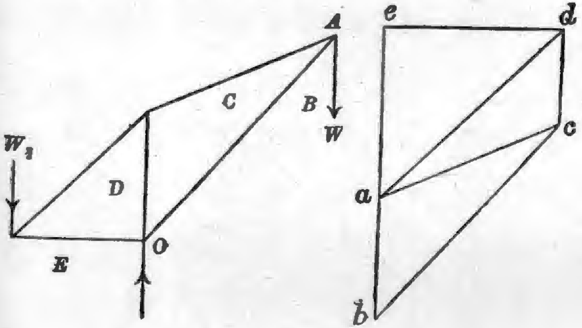
第 25 圖 (B)

$\frac{W}{2}$,故 OM 卽表示此兩絞鏈作用於機臂頂點 O 之牽力)。再於絞鏈 AE 之作用綫上取 ON 使等於 $\frac{W}{2}$。完成平行四邊形 $NOMR$ 於是對角綫 OR 將表示上述三牽力之合力。作 ab 等於並平行於 OR, 再按前法完成力之三角形 abc。於是 ac 及 bc 將分別表示繫柱及機臂之應力。如將前後兩力綫圖(第 25 圖(A)中之 ecd 及第 25 圖(B)中之 abc)加以比較,將見前後兩法所得結

果完全相同，蓋若將 bc 綫與 cd 綫吻合，則 a 點亦將與 e 點吻合，易言之，卽 abc 三角形完全與 ecd 三角形吻合也。

23. 旋轉起重機

第 26 圖表示一種簡單旋轉起重機，裝置於一中央樞軸 O 上，可以向四面旋轉。當此種機械起重時，常有一向前傾倒之趨



第　26　圖

勢，欲使其保持平衡狀態，須於尾端另加一種平衡力 W_1，其大小務使 W_1 繞 O 點之力率適能與 W 繞 O 點之力率（力率之意義詳見後）相抵消。此一問題如能按下述之次序，則解決亦頗容易：——

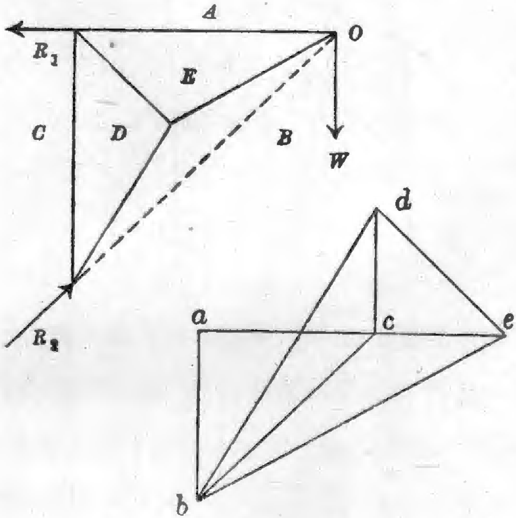
作 ab 綫使等於 W，由 b 作 bc 平行於機臂 BC，由 a 作 ac 平行於繫柱 AC，於是完成力之三角形 abc。再由 a 作 ad 與繫柱 AD 平行，由 c 作 cd 與桅竿 CD 平行，於是完成力之

三角形 acd。再由 a 作 ae 與 W_1 平行，由 d 作 de 與橫臂 DE 平行,於是完成力之三角形 ade。如此,所有各力均可求得矣。

注意——ae 卽表示所需平衡力 W_1 之大小。

24. 倉庫起重機

第 27 圖表示一種簡單倉庫起重機,在機臂 BE 之頂端懸



第　27　圖

有一滑車,用以起重。立柱 CD 之下端係安置於一樞軸承上,在立柱之上端則裝有一簡單軸承,俾起重機可以旋轉頗大之角度。

立柱上端之軸承只在立柱上生有一種水平力 R_1，而其下端之樞軸則在其下端生有水平力及垂直力兩種，其合力為 R_2。故欲解決本題，須先求得此兩種抗力 R_1 及 R_2。

按力之平衡定理，如有三力作用於一物體而成平衡，則此三力必通過一共同點。今 W, R_1, 及 R_2 作用於起重機上既成平衡，則必共同通過起重機上之某一點。今 R_1 之作用綫成水平，而 W 之作用綫則成垂直，兩綫將相交於 O，因之，R_2 亦必通過此點，於是 R_2 之作用綫將如圖中虛綫所示。

既知 W, R_1, 及 R_2 之方向與 W 之大小，由此可作一力之三角形 acb, 以求得 R_1 及 R_2 之大小，如圖中之 ca 及 bc。於是由 b 作 be 平行於 BE, 使交 ac 之引長綫於 e，完成 abe 三角形。再由 c 作 cd 平行於 CD, 由 e 作 ed 平行於 ED,完成 cde 三角形。聯結 bd 於是所有各力之大小均可於此圖上求得之。

習　　題

1. 有一弔橋長 30 尺，寬 20 尺，用絞鏈弔之使成水平，如第 19 圖。絞鏈與弔橋所交之角度為 56°。若弔橋載有每尺 120 公斤之均佈載重，試求每一絞鏈之引力及鉸釘處之抗力。

2. 有一小起重機，機臂為一 10 尺長之木柱，其下端係鉸

釘於牆內，上端則用一鋼繩支持之，繩係緊於牆上距鉸釘 8 尺高之點。在距機臂頂端 3 尺之處懸一滑車。今若用此滑車起一 4 噸之重，試求鉸釘處之抗力及鋼繩上之牽力。

3. 有一門 4 尺高，6 尺寬，裝在兩樞鈕上，下一樞鈕係在右下角，所有垂直重力均由其承擔。兩樞鈕之距離為 $3\frac{1}{2}$ 尺。若門重 200 公斤，試求兩樞鈕上抗力之大小及方向。

4. 有一 16 噸重之鍋爐，用起重架一付將其安裝在座上。起重架之兩支木各長 40 尺，其兩脚之支距為 28 尺。含有兩支木之平面與地面所交之角度為 70°，背柱之長度則為 54 尺。試求背柱之牽力及各支木之推力。

5. 有一三脚架，三脚各長 30 尺，用以舉起重 2.4 噸之蒸汽機汽缸。若三脚與地面所交之角度均相等，其脚端則均在一直徑 12 尺之圓圈上，試求各脚上之推力。

6. (a) 有一與第 23 圖相似之起重機，其各部之尺寸如下：——桅竿高 10 尺；機臂長 28 尺；繫柱長 21 尺。若用此機起一 4 噸之載重，試求繫柱之牽力及機臂之推力。

(b)若起重機之形式如第 24 圖，試求各部分之應力。

(c)若起重機之形式如第 25 圖，絞筒距桅竿脚端 4 尺，試求各部分之應力。

7. 有一旋轉起重機如第 26 圖所示，其各部分之尺寸如

下:—桅竿 10 尺;桅竿中心至載重中心 20 尺;桅竿中心至平衡力中心 12 尺;機臂頂端高出地平面 18 尺。若用此機起一10 噸之重,試求各部分之應力。

8. 有一倉庫起重機,式如第 27 圖,用以起 15 噸之重。若其各部分之尺寸如下:——$AE=CD=12$ 尺; $DE=7$尺, 試求各部分之應力及 R_1, R_2 兩抗力。

第　四　章

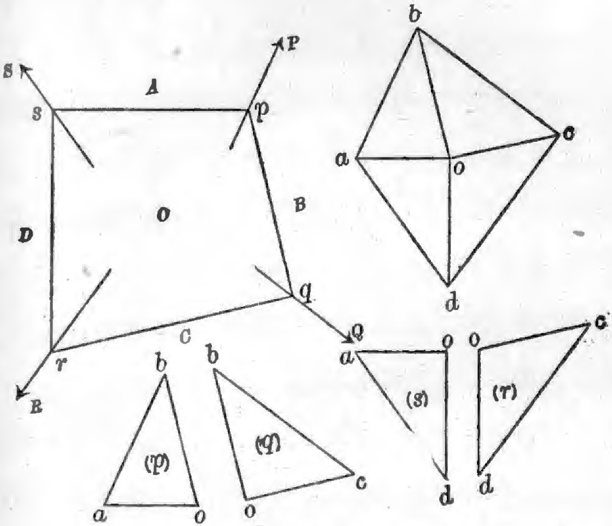
非同心力之合成

25. 連鎖多邊形

以前兩章所討論之問題僅屬於同心力，本章所欲研究者，則為一組之力並非作用於同一施力點，卽所謂非同心力之問題。

研究同心力之平衡，須注意一重要條件，卽力之多邊形必成閉合。但研究非同心力之平衡，更有一重要條件必須符合者，卽連鎖多邊形亦必成閉合是也。

何謂連鎖多邊形？此一名詞實有加以解釋之必要。如第 28 圖，有 P, Q, R, S, 四個非同心力作用於一物體成平衡之勢。此等力之作用綫如用一虛幻之索連繫之，使成一連環形，如 $pqrs$, 則此連環索在該組力之作用下，成一緊張狀態者，卽稱為連鎖多邊形，亦稱平衡多邊形，今且先就 p 點而言，此點因受 OA, AB 及 BO 三個同心力之作用而成平衡，於是按照第二章所述，OA, AB, 及 BO 三力可用一力之三角形表示之，如第 28 圖中之 aob。同樣，因 q,r 及 s 三點亦各受三個同心力之作用而成平衡，故



第　28　圖

可用三個力之三角形，如 *boc*, *cod* 及 *doa*, 分別表示各該點之平衡作用。此等三角形，如仔細加以研究，將見有一極密切之關係發生於其間；例如在(*p*)圖中之 *ob* 實等於並平行於 (*q*) 圖中之 *ob*；同樣，(*q*)圖中之 *oc* 實等於並平行於(*r*)圖中之 *oc*; (*r*)圖中之 *od* 實等於並平行於(*s*)圖中之 *od*; (*s*)圖中之 *oa* 實等於並平行於(*p*)圖中之 *oa*。

再者，各個三角形之位置實可任意編排，不受任何限制，故若將其合成一整形，如圖中之 *abcd*,固屬可能而合理也。於是在 *ABCD* 及 *abcd* 兩形中，有頗值得比較之數點焉。第一，因 *ab*,

bc, cd 及 da 分別等於並平行於 AB, BC, CD 及 DA, 故 $abcd$ 實代表該組力之多邊形。此多邊形係一閉合形,適合力之平衡條件,故在位置圖中之一組放射綫實可使變成一閉合力綫圖。第二,因 oa, ob, oc 及 od 分別等於並平行於 OA, OB, OC 及 OD 各部分上所生之力,故在力綫圖中,若有一組放射綫,則在位置圖中,實可使變成一閉合形。

此兩種圖發生上述之相互關係時,卽稱爲相互圖形, $pqrs$ 稱爲連鎖多邊形, o 則稱爲極點。

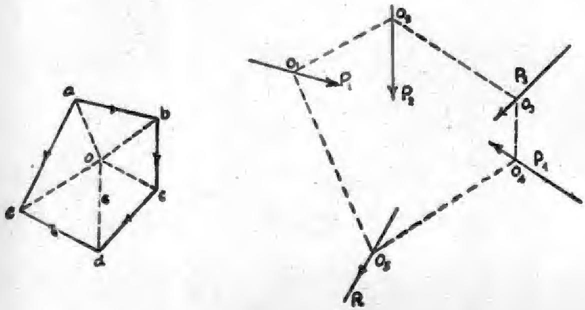
惟此處有須注意者, AB, BC, CD 及 DA 諸力均有一定之大小及方向,故僅能有一個力之多邊形。至於連環索之長短可有種種變化,因之,可得無數連鎖多邊形。故在某種平衡狀態下,力綫圖 $abcd$ 之形狀常相同,而極點 o 可有種種之位置。力之多邊形及連鎖多邊形均應閉合。

上述情形對於顚倒造圖亦頗適用。例如有四個非同心力,作用於一物體成平衡之勢,今欲求得在此一組力之作用下任一連環索之形式。法先作一力之多邊形,任擇一極點 o, 連結此點與多邊形之各邊角。再在位置圖中自任一邊起始,作一連鎖多邊形,使各邊依次與力綫圖中之各放射綫相平行。於是此連鎖多邊形必爲一閉合形,其各邊角必落在力之作用綫上。

26. 非同心力之合力

此種顛倒造圖法卽用以求得一組非同心力之合力。茲爲求明瞭起見，特舉一例於下，以表示其應用。

有 P_1-P_4 四力作用於一物體，如第 29 圖(A)，今欲求得



第　29　圖　(A)

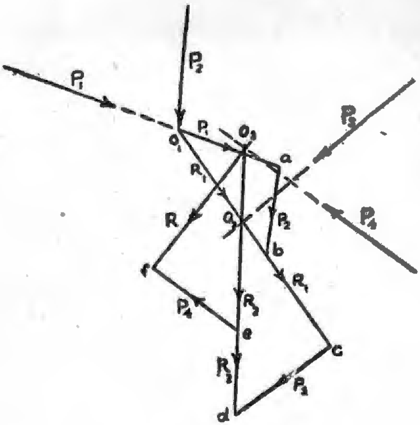
合力之大小及方向。

先作一力綫圖 $abcde$。茲因 P_1-P_4 四力並不成平衡，故此綫圖並非一閉合形，因之，閉合綫 ae 將表示合力 R 之大小。

任擇一極點 o，連結 oa, ob, oc, od 及 oe。於是由 P_1 力之用綫上任一點 o_1，作一 o_1o_5 綫平行於 oa；由 o_1 作 o_1o_2 平行於 ob；由 o_2 作 o_2o_3 平行於 oc；由 o_3 作 o_3o_4 平行於 od，由 o_4 作 o_4o_5 平行於 oe，使交 o_1o_5 於 o_5。通過 o_5 作一綫平行於 ae，於是該綫將表示合力 R 之作用綫，其意識，如矢頭所

示，則依力之多邊形之循環次序求得之。

第 29 圖(B)表示另一解法。先求得 P_1, P_2 二作用綫之交點 o_1。於 P_1 之延長綫上取 o_1a 使等於 P_1。由 a 作 ab 綫等

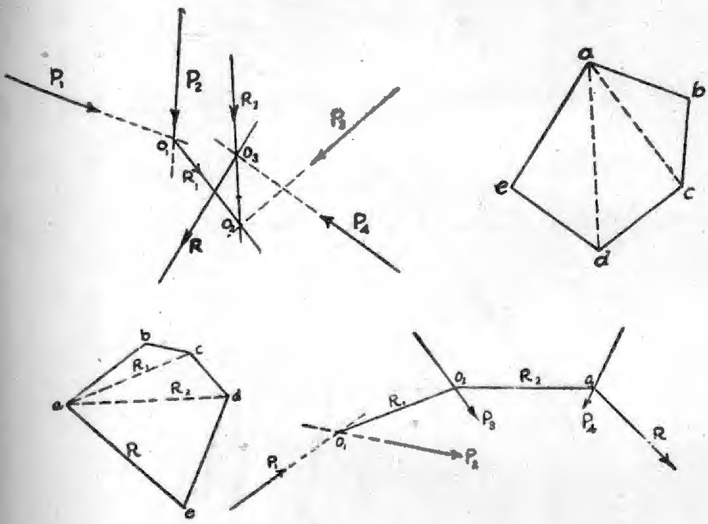


第 29 圖 (B)

於並平行於 P_2。聯結 o_1b。於是 o_1b 將表示 P_1 及 P_2 之合力 R_1。再求得 P_3 作用綫與 o_1b 之交點 o_2。於 o_1b 之延長綫上取 o_2c 使等於 R_1。由 c 作 cd 綫等於並平行於 P_3。聯結 o_2d。於是 o_2d 將表示 P_1 —— P_3 之合力 R_2。再求得 P_4 作用綫與 o_2d 之交點 o_3。於 o_3d 綫上取 o_3e 使等於 R_2。由 e 作 ef 綫等於並平行於 P_4。聯結 o_3f，於是 o_3f 將表示 P_1——P_4 之合力 R 之大小及方向。此法係直接應用力之平行四邊形之原則，

所得結果與前法完全相同。

或如第 29 圖(C),先作一力綫圖 $abcde$。聯結 ac, ad, 及 ae。



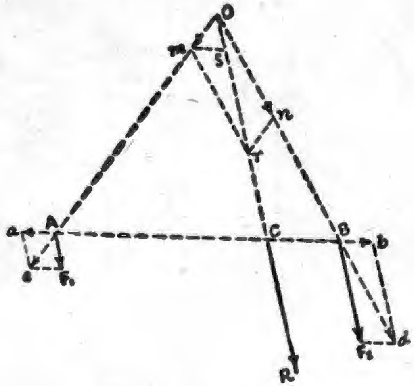
第 29 圖 (C)

於是 ac 將表示 ab 與 bc 之合力,ad 將表示 ab, bc 及 cd 之合力,ae 將表示 ab, bc, cd 及 de 之合力。由 P_1, P_2 二作用綫之交點 o_1 作一綫與 ac 平行,於是該綫將表示 P_1 及 P_2 之合力 R_1。次求得 R_1 與 P_3 之交點 o_2, 由 o_2 作一綫與 ad 平行,於是該綫將表示 P_1-P_3 之合力 R_2。最後求得 R_2 與 P_4 之交點 O_3, 由 O_3 作一綫與 ae 平行, 於是該綫將爲所求 P_1-P_4 之合力 R。

讀者如將前後三圖互相對照，使三圖中之 P_1-P_4 各相吻合，則 R 亦必互相吻合，其大小並相等。

27. 兩平行力之合力

命 F_1,F_2 為兩平行力，分別作用於 A,B 兩點，如第 30 圖，



第 30 圖 (A)

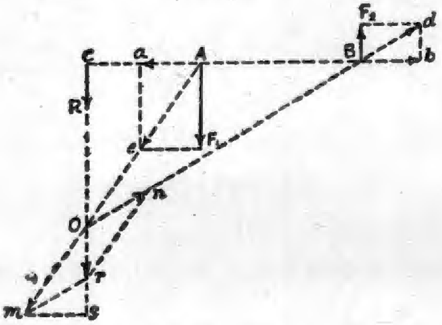
今欲求得其合力之大小。法於 A,B 兩點引進兩相等而相反之力 Aa 及 Bb，其作用綫卽與 AB 綫吻合。此兩相等而相反之力將互成平衡，對於原有平行力並不致發生任何影響。

用力之平行四邊形法求得 F_1 與 Aa 之合力 Ae，及 F_2 與 Bb 之合力 Bd。延長 Ae 及 Bd 使相交於 O。於 OA 或其延長綫上取 Om 使等於 Ae。由 O 作 OR 平行於 AF_1。由 m 作 ms 平行於 AB 並與 OR 相交於 s。於是在 $Ae\ F_1$, Oms 兩

兩相似三角形中，因 Om 等於 Ae，故 Os 等於 AF_1，又 ms 等於 eF_1。又由 m 作 mr 平行於 Bd 並與 OR 相交於 r。於是在 mrs，dF_2B 兩相似三角形中，因 ms 等於 eF_1，但 eF_1 又等於 dF_2，故 ms 等於 dF_2，又 sr 等於 BF_2。因之，

$$Or = Os + sr = F_1 + F_2$$

〔無論 F_1 與 F_2 爲相同平行力，如圖 (A)，或不同平行力，如圖(B)〕。故 Or 卽爲所求 F_1 與 F_2 之合力 R。命 C 爲 R 之



第　30　圖　(B)

作用綫與 AB 相交之點。於是依相似三角形之定理

$$\frac{AC}{OC}=\frac{Aa}{F_1},\ 又\ \frac{BC}{OC}=\frac{Bb}{F_2}$$

$\therefore\quad AC\times F_1 = OC\times Aa$，　又 $BC\times F_2 = OC\times Bb$。

但　　$Aa = Bb$，

$\therefore\quad AC\times F_1 = BC\times F_2$，

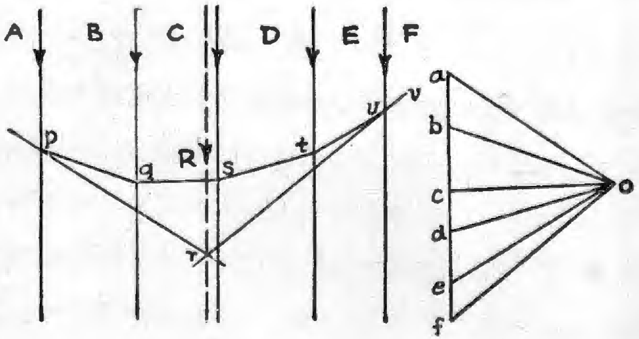
或 $$\frac{F_1}{F_2}=\frac{BC}{AC}$$

因之，任何兩平行力（無論其方向相同或不同，其大小相等或不等）之合力，其方向常與兩力平行，其大小則等於兩力之代數和，並將連結兩施力點之綫分成兩部分，其長度與兩力之大小適成反比例。

無論 F_1 與 F_2 兩平行力爲相同或不同，苟於 R 之相反方向加入一與 R 相等之力，則此力將與 F_1 及 F_2 成平衡。故若有三平行力成平衡時，此三力必作用於同一平面上；其代數和必等於零。

28. 相同平行力之合力

惟上述引進兩相等而相反之力之法，只適用於兩個平行力，



第 31 圖

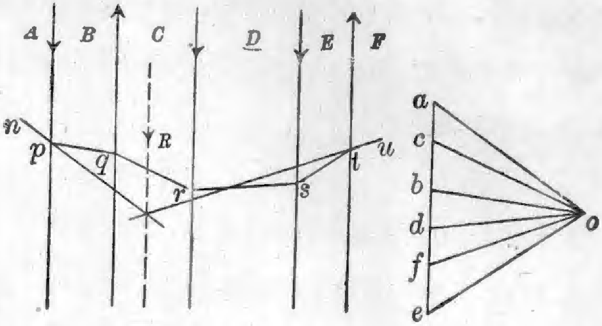
若有兩個以上之平行力，則以應用連鎖多邊形法爲最適宜。如第 31 圖，有相同平行力 AB, BC, CD, DE 及 EF 一組，作用於一物體，今欲求得其合力。

作 ab, bc, cd, de 及 ef 分別表示 AB, BC, CD, DE 及 EF 諸力（在本例中，力之多邊形實乃一直綫，而閉合綫 af 則表示合力之大小）。任擇一極點 o，聯結 oa, ob, oc, od, oe 及 of。於是由 AB 力之作用綫上任一點 p，在 A 之空間，作 np 平行於 oa；由 p 再在 B 之空間作 pq 平行於 ob，如此依次進行，直至 F 之空間，作 uv 與 of 平行。

引長 np 及 vu 使相交於 r，通過 r 作一綫平行於 af。於是該綫將爲合力 R 之作用綫，其大小則等於 af—— 所有向下諸力之和。

29. 不同平行力之合力

至求不同平行力之合力，其法與前述完全相同，試觀第 32 圖便可明瞭，毋庸多贅。其中僅有一點須加注意者，卽力綫圖中各力綫之方向是也。例如 AB 乃一向下作用之力，故 ab 亦向下，但其次一力 BC 則是向上，故 bc 亦向上，再次兩力 CD 及 DE 均係向下，故 cd 及 de 亦均向下，最後一力 EF 又向上，故 ef 亦向上。再者，由力綫圖中觀之，f 點係在 a 點之下，易



第 32 圖

言之，卽 af 爲一向下之力，故其所代表之合力 R 亦應爲一向下作用之力。

30. 非同心力之平衡問題

大凡解決此種問題，其中未知數只能限於三個，如有三個以上之未知數，則此問題成爲不確定，而解決將屬不可能。此三個未知數不外以下數項之一：

(a) 任一力之方向及大小。

(b) 任二力之方向。

(c) 任一力之大小及其他一力之大小及方向，惟其施力點則爲已知。

(d) 任三力之大小。

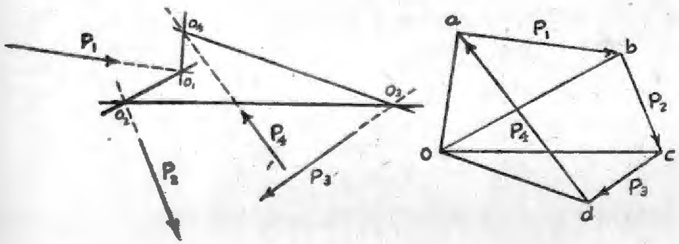
解決此等問題，須先作一力綫圖，於是按照平衡情形，此力

綫圖必爲一閉合多邊形，此閉合綫則表示所求之力。次再作一連鎖多邊形，於是按照平衡情形，此連鎖多邊形亦必爲一閉合形，各施力綫必依次通過其各邊角　因之，可以求定未知力之方向。

今且舉例於下：

例一——今有非同心力一組成平衡之勢，其中除有一力之大小及方向不知外　餘均爲已知。試求此未知之力。

如第 33 圖（A），命 $P_1 - P_4$ 爲所有之力，其中 P_4 爲未



第　33　圖　(A)

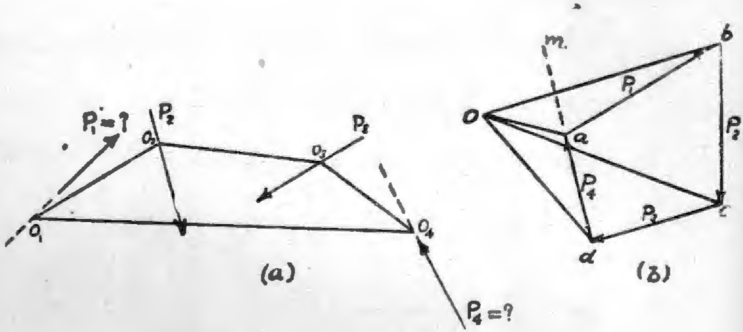
知。就已知事實作 ab, bc 及 cd 三綫。今因諸力係成平衡，故此力綫圖必爲一閉合形。於是 da 綫將表示所求 P_4 力之大小及方向。

任擇一點 o，聯結 oa, ob, oc 及 od。在位置圖上作連鎖多邊形 $o_1o_2o_3o_4$，o_1o_4 與 o_3o_4 兩邊之交點 o_4 必在 P_4 之作用綫上。於是通過 o_4 作一綫平行於 da，此綫將表示 P_4 之方向。

例二——今有非同心力一組成平衡之勢，其中除有一力之

大小不知，及其他一力之大小及方向均不知，但知其作用點外，餘均為已知。試求此未知之力。

如第 33 圖(B)，命 $P_1 - P_4$ 為所有之力，其中 P_1 只知其



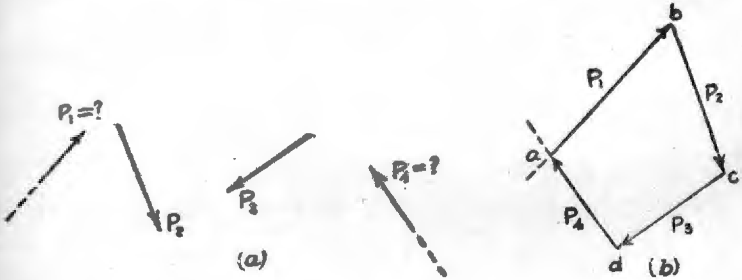
第 33 圖 (B)

作用點為 O_1，P_4 只知其作用綫，如圖中虛綫所示。就已知事實作 bc, cd 兩綫，並由 d 作 dm 與 P_4 平行。

任擇一極點 o，聯結 ob, oc 及 od。於是於(a)圖中自已知點 o_1 始，依次作 o_1o_2, o_2o_3, 及 o_3o_4，各與 ob, oc 及 od 平行。今因諸力係成平衡，故此連鎖多邊形應為一閉合形，而 o_1o_4 應為一閉合綫。由(b) 圖中之 o 作一綫平行於 o_1o_4，使交 dm 於 a，於是 ad 長度將表示所求 P_4 力之大小。聯結 ob。於是，因在 o_1 點，P_1 力與 o_1o_2, o_1o_4 兩連鎖成平衡，o_1o_2 之方向及大小已由 ob 表示之，又 o_1o_4 之方向及大小亦已由 oa 表示之，故

在力之三角形 oab 中，ab 將表示 P_1 力之大小及方向。通過 o_1 點作一綫平行於 ab，此綫將爲 P_1 力之作用綫。至於 P_1, P_4 兩力之意識，則須順從力之多邊形自始點至終點之循環次序有如矢頭所示。

若在上例中，已知 P_1 之方向，僅不知其大小，則解決之法又較容易，不必作連鎖多邊形，僅須作一力之多邊形，卽可求得未知之力。如第 33 圖 (C)，先作 bc, cd 兩綫，而後由 d 作一綫



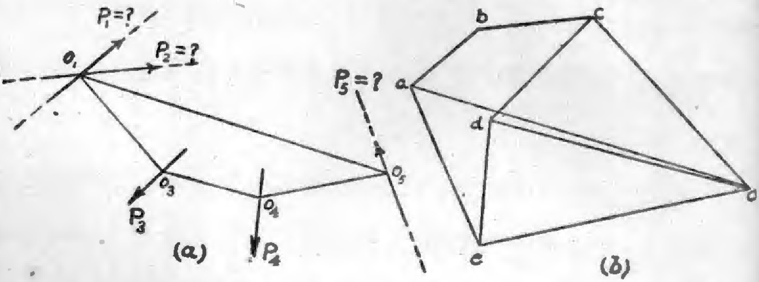
第　33　圖　(C)

平行於 P_4，由 b 作一綫平行於 P_1，使交 P_4 之平行綫於 a。於是 ab 及 da 兩綫將分別表示 P_1 及 P_4 二力之大小，其意識則如矢頭所示。

例三——今有非同心力一組成平衡之勢，其中有三力之大小未知，餘均爲已知。試求此未知之力。

如第 33 圖 (D)，命 P_1-P_5 爲所有之力，其中 P_1, P_2 及 P_5

三力之大小未知。今欲解決此種問題，須先求得其中任兩未知力



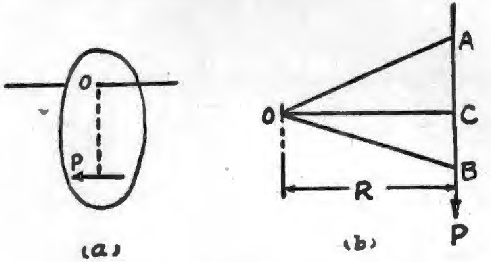
第 33 圖 (D)

之合力。法將任二力 P_1 及 P_2 之作用綫延長使相交於 o_1，並假設此二力已由一合力代表，其作用點卽爲 o_1。於是解決之法將與例(二)完全相同。連鎖多邊形將自 o_1 點起始，得 $o_1o_3o_4o_5o_1$。(*b*)圖中之 *ea* 將表示 P_5 力之大小及方向，而 P_1, P_2 之合力將由 *ac* 表示其大小及方向。

由 *a* 作一綫與 P_1 平行，由 C 作一綫與 P_2 平行，使兩綫相交於 *b*。於是 *ab* 與 *bc* 將分別表示分力 P_1 與 P_2 之大小及方向。

31. 力率

設有一力 P 作用於一物體，該物體係固定於一點 O，如第 34 圖，於是 P 力所生之影響，將使物體繞 O 點轉動。此種轉動之影響，依兩種情形而定——P 之大小及 R 之長度，而其實値則



第　34　圖

等於P與R之積，按適宜之單位計算者。

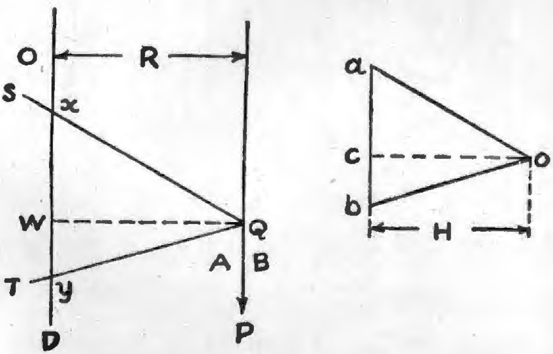
此種轉動之趨勢稱為P力對於O點之力率，O則稱為極點。若P係按磅或公斤計算，R係按尺計算，則力率將按「尺磅」或「尺公斤」計算。

設於P力之作用綫上量得AB長度，使按某一比例尺等於P之大小，聯結OA及OB。於是AOB三角形之面積將等於$\frac{1}{2}AB\times OC$。今P力對於O點之力率等於$P\times OC$，亦即等於$AB\times OC$。故P對於O點之力率可用三角形AOB之面積表示之。總之，任一力率均可用面積表示之，因其等於兩個數量之積也。

在本例中，P力將生一種繞O點順時針向轉動之趨勢。凡順時針向轉動者，依習慣均稱為負力率。正力率則發生一種逆時針向之轉動。

32. 力率之圖解表示法

力率亦可藉助於連鎖多邊形用圖解表示之。如第 35 圖，命



第 35 圖

AB 爲已知之力，O 爲極點。AB 發生繞 O 點轉動之趨勢。

作 ab 等於並平行於 AB。任擇一極點 o。聯結 oa 及 ob。選擇 o 點之位置時，宜使 H 之尺寸爲一偶數。在 AB 之作用綫上任取一點 Q，作 QS 及 QT 兩綫使各平行於 oa 及 ob。通過 O 作一 OD 綫平行於 AB，使交 QS 及 QT 兩綫於 x 及 y 兩點。作 QW 垂直於 OD。

試將 Qxy 及 oab 兩三角形加以比較，將見兩者乃是相似，因之

$$ab : xy :: oc : WQ$$

$$\therefore \quad ab \times WQ = xy \times oc$$
$$= AB \times WQ$$

今 $AB\times WQ$ 等於 P 力對於 O 點之力率，故 $xy\times oc$ 亦等於 P 對於 O 點之力率。又 oc 等於 H，故 P 對於 O 點之力率等於 $xy\times H$，卽等於連鎖多邊形之首尾兩綫與通過極點所作平行於該力之綫相交之距離——xy 極距。

xy 長度必須按相當比例尺量算。例如力之比例尺若爲 1 公分 $=n$ 公斤，又距離之比例尺若爲 1 公分 $=m$ 尺，則 P 之力率將爲

$$xy \times n \times m \times H \text{ 尺公斤。}$$

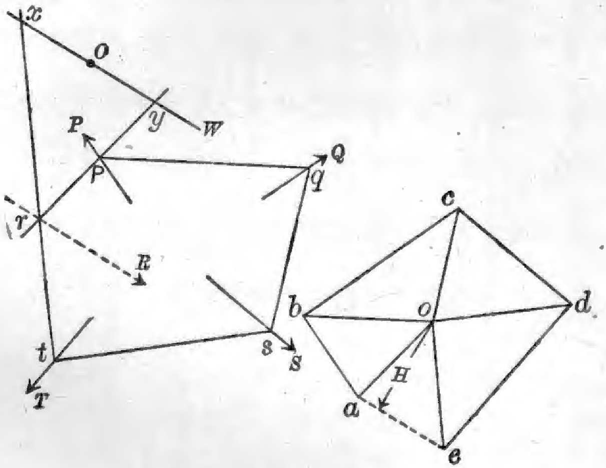
由靜力學之研究，得知若有一組之力繞某點轉動，則其合力之力率將等於各力繞該點轉動所得力率之代數和。若此一組之力並無繞該點轉動之趨勢，則其合力如不等於零卽必通過該點。

在第 35 圖中所舉之例，只論及一單個之力，對於實際之研究，似不發生多大效用，但根據此種原則，可以求得某組力之合力之力率，則爲用頗廣矣。

此種問題若綜合之，不外以下兩項，卽非平行力與平行力是也。玆且分別述之於下。

33. 一組非平行力之力率

如第 36 圖，有一組非平行力 P, Q, S 及 T，今欲求得該組



第 36 圖

力對於 O 點之力率，易言之，即欲求得其合力對於 O 點之力率。

欲解決此種問題，須經過三個步驟。第一、必先求得合力之大小；第二、必再求得合力之作用綫；第三、而後再求得此合力對於 O 點之力率。

先作一力之多邊形 $abcde$，聯結 ae。於是 ae 長度表示合力之大小。任擇一極點 o，聯結 oa, ob, oc, od 及 oe。選擇 o 點務使 H 之尺寸爲一偶數。由 P 力之作用綫上任取一點 p，由 p 作 pr 平行於 oa，及 pq 平行於 ob；由 q 作 qs 平行於 oc，

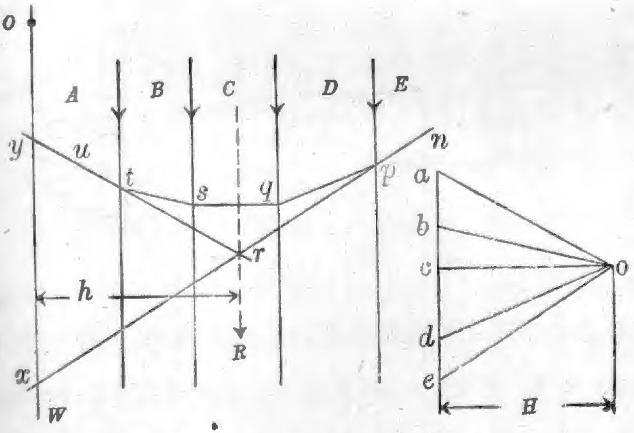
如此依次進行，直至連鎖多邊形之末一綫 tr 與第一綫 pr 相交於 r。

通過 r 作一綫平行於 ae, 於是此綫將表示合力 R 之作用綫。

通過 O 作一 OW 綫平行於 R, 使交 rp 之引長綫於 y 及 tr 之引長綫於 x。於是合力之力率將等於 $xy \times H$ 尺公斤(假定 xy 係按公斤計，H 係按尺計)。

34. 一組平行力之力率

如第 37 圖，AB, BC, CD 及 DE 表示一組相似平行力，



第 37 圖

其合力 R 之大小及方向，可按前法分別作力之多邊形及連鎖

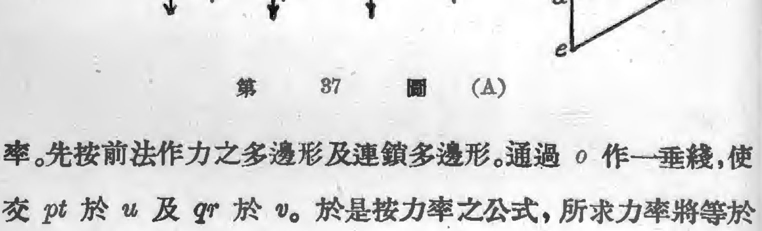
多邊形求得之。

通過極點 O 作一 OW 綫。引長 np 使交 OU 於 x,並將 u
向兩邊引長使交 OW 於 y 及 nx 於 r。通過 r 作一綫平行於
ae。於是合力 R 對於 O 點之力率將等於

$$R\times h=xy\times H$$

由第 37 圖觀之,將見以上諸力實可組合成一種情形,使其合力 R 之作用綫適通過 O 點。在此種情形下, xy 將等於零。合力 R 並無對於 O 點之力率可言,是卽一種平衡狀態也。

假設第 37 圖 (A) 表示一組不同平行力在平衡狀態中,今欲求得其中一部分之力,例如 AB 及 BC, 對於某一點 O 之力



第 37 圖 (A)

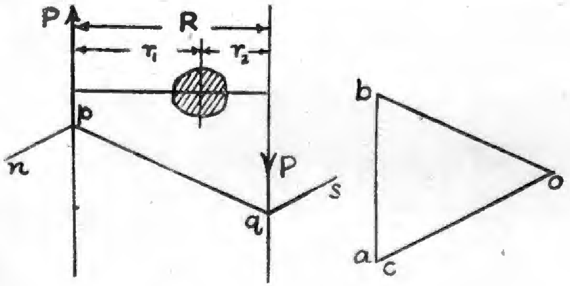
率。先按前法作力之多邊形及連鎖多邊形。通過 o 作一垂綫,使交 pt 於 u 及 qr 於 v。於是按力率之公式,所求力率將等於 Hy。

對於任一組平行力,極距 H 常相同,因之, Hy 之積認爲

於另一部分之力，例如 CD, DE 及 EA, 對於該點之力率亦可。故連鎖多邊形實可作爲一種力率圖，以表示任一定點之左面或右面一部分力之力率。

35.　偶　力

今且討論力率之一種特殊情形。設有大小相同而方向相反之兩平行力，如第 38 圖中之 P 與 P, 作用於一物體，兩力之垂直距離等於 R。今欲研究該二力對於物體所生之影響，且作



第　38　圖

一力之多邊形 abc: 先作 ab 綫向上，表示向上之力 P,再作 bc 向下，表示向下之力 P。因兩力既平行又相等，故 c 必與 a 適相吻合，而 abc 實爲一條直綫。任擇一極點 o, 聯結 ob 及 oa (亦卽 oc) 由 p 作 pn 平行於 oa; 再由 p 作 pq 平行於 ob, 最後由 q 作 qs 平行於 oc。

由上觀之，c 既與 a 適相吻合，故力之多邊形乃一閉合形

因之，符合平衡之一個條件。惟由另一方面觀之 np 與 qs 既係平行於同一直綫，故亦互相平行。因之，無論將二綫如何引長，終不能使之相交，而連鎖多邊形亦不能成一閉合形。如此，則又不能符合平衡之條件。

若將此一組之力作用於一物體，則必成某項運動也明甚，試觀第 38 圖所示之結果，P 與 P 將致物體成順時針向之迴轉，惟絕不能有向任何方向之移動。

此種力稱爲偶力，其距離 R 則稱爲偶力矩。試就本圖觀之，其作用於物體之影響，等於兩個力率之和，卽

$$\begin{aligned}總力率&=(P\times r_1)+(P\times r_2)\\&=P(r_1+r_2)\\&=P\times R\end{aligned}$$

$\therefore$總力率＝其中一力與偶力矩相乘之積。

此積數卽稱爲偶力之力率，至於迴轉之方向則稱爲偶力之意識，習慣多以逆時針向爲正，順時針向爲負。偶力之力率無論在平面上之任何點，其值常相等。

偶力係依其迴轉趨勢之大小計算，故若兩偶力對於某一物體生同等迴轉影響者，其大小必相等。但若有兩偶力，其迴轉趨勢之大小相等，但意識則相反，於是影響之結果將等於零，易言

之,即兩偶力互相抵消也。故若欲抵消任一偶力之影響,必須於物體上應用一同等之偶力,即力率相等而意識相反之偶力。

習　　題

1. 試作一正五邊形,邊長三公分。以頂點為始,順時針向分別以 A,B,C,D,E 等字母表示之。平分諸邊,並於平分點各作一垂綫以表示所施之力。各力之大小如下:

在 AB 上為 13 公斤;在 BC 上為 12 公斤;在 CD 上為 20 公斤;在 DE 上為 18 公斤;在 EA 上為 14 公斤。試求合力之大小與方向,及其作用綫與頂點 A 之垂直距離。

2. 今有四力 P,Q,S,T 作用於四方形 $ABCD$ 之四角。諸力之大小為 $P=40$ 公斤;$Q=60$ 公斤;$S=30$公斤;$T=25$公斤。力之作用綫與各邊所交之角度為

$PAB=120°$;　$ABQ=150°$;　$BCS=135°$;　$CDT=120°$。

求合力之大小及其與 AD 之傾度,並與 A 點之垂直距離,(於必需時該綫或與 AD 之引長綫相交)。

3. 試作一正方形,邊各長 4 公分,用 $PQRS$ 等字母依次表示之。有 10,8 及 4 公斤之力分別取 RP,SQ 及 QR 之方向作用。試用一連鎖多邊形,求得合力之大小及其與 P 點之垂直距離,及與 PQ 綫之傾度。

4. 試作一水平綫，並於綫上任取一點 O。由 O 向左取 $OA=2$ 公分，$OB=5$公分，向右取 $OC=4$公分，$OD=9$ 公分。通過 A,B,O,C 及 D 各作一垂綫代表作用之力，其大小如下：
$P=20$公斤；$Q=35$公斤；$S=28$公斤；$T=14$公斤；$W=40$公斤，所有之力均向下作用。試求合力之大小及其與 O 點之相對位置。

5. 今有三個垂直力 P,Q 及 S 同向下作用於一物體。P 與 Q 之距離爲 4 尺，Q 與 S 之距離爲 3 尺。力之大小各爲 80, 45 及 60公斤。今欲單用一力以抵消 P,Q,S 三力之聯合作用，試求該力之大小及位置。

6. 在第 4 題中，若 P,S 及 W 三力係向上作用，試再求合力之大小及位置。

7. 今有一圓箍，直徑 3 尺。沿箍緣有 P,Q,T 及 S 四力均取切綫之方向作用，其傾度各爲 28°, 108°, 210° 及 295°。力之大小各爲 80, 93, 74 及 34 公斤。試求該組力對於箍心 O 之力率。

8. $ABCD$ 爲一 8 公分見方之形，今有四力其大小各爲80, 90, 45 及 60 公斤，分別在 A,B,C,D 四角沿對角綫之方向向外作用。試求該組力對於 A 角之力率。

9. 若在前題中，諸力係沿正方形各邊之方向向外作用(均欲使正方形取同一方向轉動)，試求該組力對於正方形中心點之力率。

第　五　章

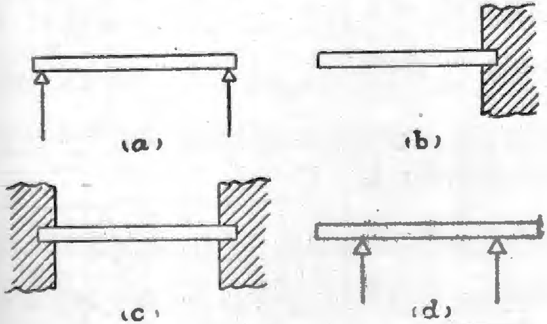
彎曲率及剪力圖

36. 結合構造

以前數章僅就解決圖解問題之一般原則加以討論，惟圖解物學之功用，在能解決實用問題，使方法簡明而手續迅捷。實用問題中最重要者為研究各種結合構造，例如屋架及橋梁之應力。以下數章卽欲就此種應力加以論述焉。

結合構造中最簡單之一種為條梁。關於梁之結合法共有數種如下：

一、其兩端單靠於支柱上者，謂之平支梁，如第 39 圖之(a)。



第　39　圖

二、其一端插定，一端懸空者謂之懸臂梁，如圖之(*b*)。

三、其兩端均插定者謂之固定梁，如圖之(*c*)。

四、其一端或兩端伸過其支柱者謂之外伸梁，如圖之(*d*)。

梁之載重共有三種：

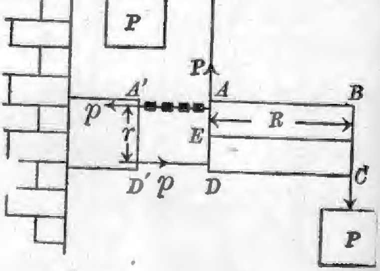
一、凡數個重量分施於梁上各點者謂之集中載重。如係單一重量施於梁之中點者，則謂之中點集中載重。

二、凡重量係均等分佈於梁之全身者謂之均佈載重。

三、凡在均佈載重之上又加有集中載重者謂之複合載重。

37. 彎曲率

凡梁加以載重，則其外部必於支持點生向上之抗力以支持之，其內部則生應力以抵抗之。此內部之應力乃為我輩所欲研究者也。今且用一模形，如第 40 圖，說明於下。



第 40 圖

圖中為一懸臂梁，其一端插定於牆內，另一端則懸有一重量 P。設將梁之中間一部分 $A'D'AD$ 取

去,使 $ABCD$ 一部分與插定之一部分完全脫離。今欲使此 $ABCD$ 一部分仍能成平衡狀態,並能保持其在 $A'D'AD$ 一部分未經移去前之同一位置,可於牆上釘一滑輪,將弔繩之一端繫著 AD 一端,繩之另一端則繫一相等之重量 P。今欲研究此外加之力 P 對於梁之影響,須先研究原有重量 P 對於梁之影響如何。

試假設梁之本身並無重量可言,於是原有重量 P 對於梁之第一影響,將使 $ABCD$ 一部分向下墜落,欲抵抗此種趨勢,須用一相等而相反之力。在 $ABCD$ 一部分未經與插定一部分脫離時,則此種向下之運動將爲 AD 剖面上實質所抵抗,但既經脫離之後,如仍欲維持此種現狀,必須於該點應用一種外加之力以平衡之。此卽爲如圖所示之 P 力是也。由圖中觀之,此種 P 力,無論其爲假擬或實在,與原有重量 P 將合成一偶力,其力率爲 $P\times R$,而其迴轉趨勢則爲順時針向。

此種偶力卽構成在 AD 剖面上之彎曲率,故

梁內任何剖面之彎曲率等於在該剖面左方或右方諸外力之力率之代數和。

試再就此種迴轉趨勢言之。前已說明此種趨勢惟有用一大小相等而方向相反之偶力可以抵消之。今假設 $ABCD$ 開始繞 E 點轉動,於是其所生影響之一將使距離 DD' 縮短,而距離

AA' 伸長。爲消除此種影響起見，特於 DD' 處用一支木支之，而於 AA' 處用一鏈索繫之。於是在鏈索上所作用之力將爲一種牽力或稱引力，而在支木上所作用之力將爲一種推力或壓力。此兩種力作用於 AD 剖面亦成一偶力，其偶力矩爲 r，其力率則爲 $p\times r$，稱爲抵抗率，等於 $P\times R$，但其迴轉趨勢則爲逆時針向，故以上兩種偶力 $p\times r$ 與 $P\times R$ 適成平衡。

38. 剪 力

此種構成偶力 $p\times r$ 之牽力及推力，在原梁上乃分別爲內部纖維之引應力及壓應力所代表，而施於 AD 剖面之向上力則爲該剖面之抵抗剪力所代表。因之，凡施任何力 P 於梁上，其所生影響將有二：其一，在任何剖面 AD 上將引進一種彎曲率 $P\times R$，爲物質纖維中之抵抗率 $p\times r$ 所抵消；其二，將引進一種垂直剪力，爲該剖面之抵抗剪力所抵消。

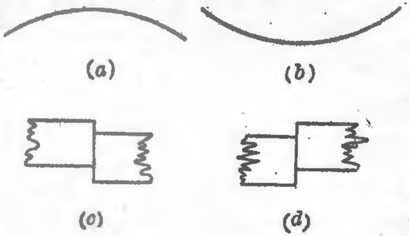
垂直剪力（簡稱剪力）既等於抵抗剪力，故

梁內任何剖面之剪力等於在該剖面左方或右方諸外力之代數和。

39. 彎曲率及剪力之符號表示法

在第 40 圖中，懸臂梁之上部應力既屬引張性質，因之，若

其實質可以引伸者，則其上部長度必將增長，反之，其下部應力既屬擠壓性質，則其長度必將縮短，其最後形狀，將如第41圖(*a*)所示，成一向上凸之曲綫；如此，彎曲率則稱爲正，彎曲率圖應繪在基綫之上。但若梁之形式，因受外力作用，致上部長度縮短，而下部長度增長，成一向上凹之曲綫，如圖(*b*)所示，則彎曲率將稱爲負，彎曲率圖應繪在基綫之下。



第　41　圖

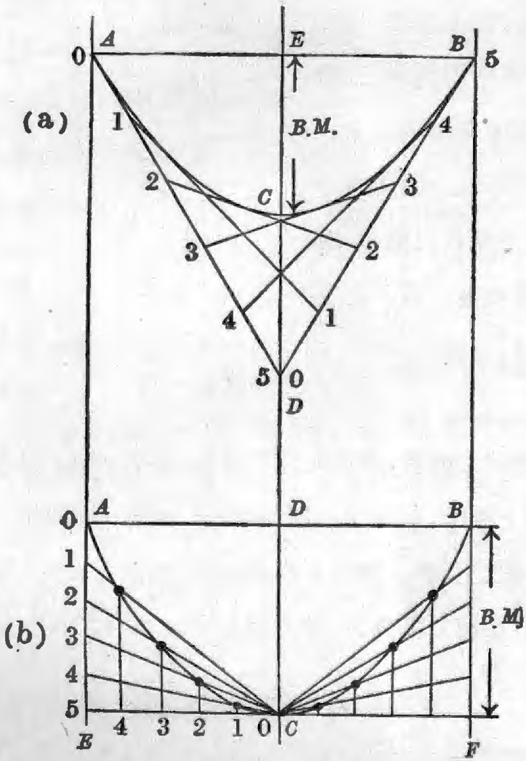
至就剪力而言，若梁內任何剖面，相對於其右方隣近剖面而言，成向上運動，如第 41 圖(*c*)所示，則剪力稱爲正，剪力圖應繪在基綫之上。若相對於其右隣而言，該剖面成向下運動，如圖(*d*)所示，則剪力稱爲負，剪力圖應繪在基綫之下：

40. 拋物綫之繪法

表示彎曲率之圖形，普通多爲一種拋物綫。玆且將描繪拋物綫之兩種近似法分述於下：

第一法——如第 42 圖(*a*)命 AB 爲一基綫，今欲於其上繪一拋物綫。平分 AB 於 E，作 EC 垂直於 AB，使 EC 長

度適等於所求拋物綫之深度。引長 EC 至 D, 使 CD 等於 EC
聯結 AD 及 BD, 並將兩綫分成若干相等部分,依次以數字表



第 42 圖

示之,如圖(a)所示,將兩綫上相當之數字連成直綫。沿此種交跨綫作一曲綫,使依次與各綫相切,於是此曲綫將爲所求之拋物綫。

第二法——如前所述,命 AB 爲一基綫。平分 AB 於 D,

作 DC 垂直於 AB，並使其等於所求拋物綫之深度。完成 $AEFB$ 長方形，將 CE 及 AE 分成同數之相等部分，依次以數字表示之，如圖(b)所示。聯結 AE 綫上之 1,2,3,4 各點至 C。由 EC 綫上之 1,2,3,4 諸點各作一垂直綫，使與聯結 AE 綫上之相當數字及 C 點之綫相交。通過此種交點作一曲綫，於是此曲綫將為所求之拋物綫。

以上兩種近似法之精度，依所分部分之數目而定，數目愈大則愈精準。

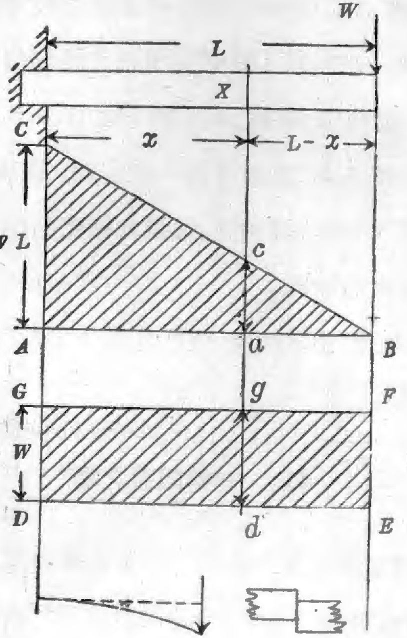
41. 勻稱載重之梁

凡梁之載重成勻稱之勢者，則彎曲率及剪力兩圖之描繪極易，僅須求得其最大彎曲率，其餘問題立可解決。玆且先討論此種問題，而後再論及非勻稱載重之梁，因其情形比較複雜，須用連鎖多邊形方可解決也。

彎曲率在英文中之縮寫為 $B.M.$，而剪力則為 $S.F.$，本書將採用之。

例一　懸臂梁：在懸空之一端有集中載重者。

如第 43 圖，懸臂梁之懸空一端有集中載重 W。今試研究在 X 處之剖面。命 L 為梁之長度，x 為該剖面與插定一端之距離。於是在該剖面之彎曲率將為 $W(L-x)$。此為一次方程式，



第 48 圖

按解析幾何學之原則，應表示一直綫。彎曲率之最大值係當 $x=0$ 時，易言之，卽懸臂梁之最大彎曲率係在其插定之端，等於 WL。又當 $x=L$ 時，彎曲率成爲零數，故在懸空一端之彎曲率等於零。

任擇一基綫 AB，於 A 端取 AC，使按適宜比例尺代表 WL；聯結 CB。於是 ABC 三角形將爲所求彎曲率圖。又因彎曲率在本例中乃一正數，故該圖應作在基綫之上。

在 X 剖面之剪力等於 W，在其他諸剖面其值亦均相等，剪力圖應爲一長方形 $DEFG$，其高度 DG 即按相當比例尺代表 W。又因剪力爲一正數，故該圖應作在基綫 DE 之上。

今試假設欲求梁之任何剖面 X 之彎曲率及剪力。由 X 作一垂直綫使交彎曲率圖於 ca 及剪力圖於 gd。

若彎曲率圖上所用比例尺爲 1 分公 $=n$ 公斤公尺，於是

$$B.M._X=(n\times ca)\text{公斤公尺。}$$

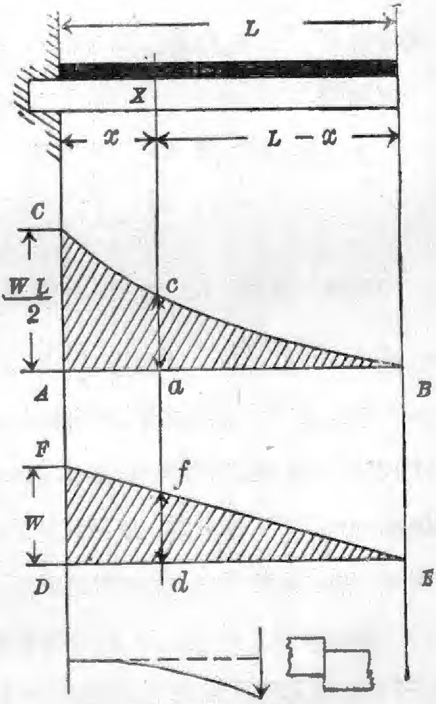
又若剪力圖上所用比例尺爲 1 公分 $=m$ 公斤，於是

$$S.F._X=(m\times gd)\text{公斤。}$$

例二　懸臂梁：有均佈載重者。

如第 44 圖，假設在懸臂梁上有每公尺等於 w 公斤之均佈載重，梁之長度爲 L 公尺，於是

總載重 $W=w\times L$ 公斤。



第　44　圖

今試在梁之剖面 X 略去其左部，僅研究其右部之彎曲率，將見作用於右部之總載重將等於 $W(L-x)$，均等分佈於梁之 $(L-x)$ 公尺長度。惟此種均佈載重係假設作用於其重心，其與剖面 X 之距離爲 $\frac{L-x}{2}$ 公尺。

$$\therefore \quad B.M._X = w(L-x) \times \frac{L-x}{2}$$

$$= \frac{w}{2}(L-x)^2$$

其中含有一平方，故屬二次方程式，因之，其所代表之圖形將爲一拋物綫。

上一方程式，當 $x=o$ 時將爲一最大數，等於

$$\frac{w}{2} \times L^2 = \frac{WL}{2}。$$

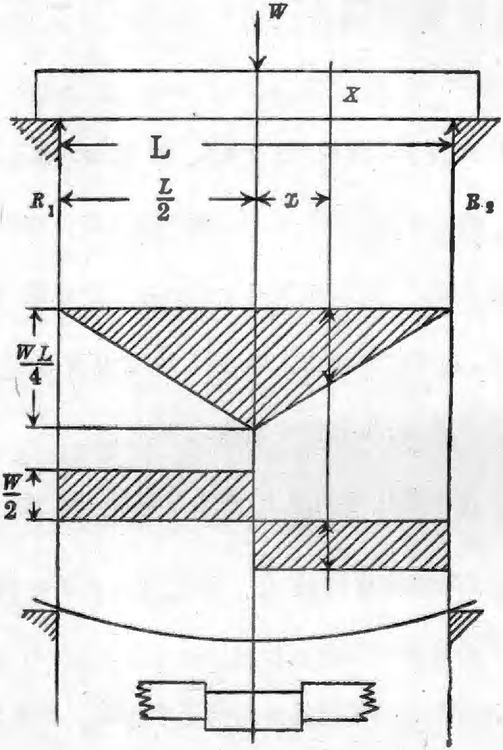
任擇一基綫 AB，並於 A 端取 AC，使按適宜比例尺代表 $\frac{WL}{2}$。於是按第 42 圖 (b) 之法作一拋物綫，以 B 爲其頂點。

至於在 X 剖面之剪力則等於 $w(L-x)$。此爲一一次方程式，表示一直綫，其最大值，係當 $x=o$ 時，等於 $w \times L$；其最小值，係當 $x=L$ 時，等於零。故所求剪力圖乃一三角形 FDE，如圖所示，其中長度 DF，按相當比例尺，代表 wL 或 W。

如前所述，ca 及 fd 將分別表示在剖面 X 之彎曲率及剪力，各按其相當比例尺量算者。

例三　平支梁：有中點集中載重者。

如第 45 圖，在平支梁之中點有一集中載重 W。按力率原理，在兩端之抗力 R_1 及 R_2 將分擔載重之半，即



第 45 圖

$$R_1 = R_2 = \frac{W}{2}$$

在 X 剖面之彎曲率將爲

$$B.M._x=R_2\times\left(\frac{L}{2}-x\right)$$

$$=\frac{W}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)$$

$$=\frac{W}{4}(L-2x)$$

此方程式表示一直綫。如 $x=o$，則 $B.M.$ 爲一最大值，等於$\frac{WL}{4}$；如 $x=\frac{L}{2}$，則 $B.M.$ 爲一最小值，等於零。故彎曲率之最大值在梁之中心，而其最小值則在梁之兩端。彎曲率圖則爲一三角形，其頂點卽在梁之中心綫上，其高度等於$\frac{WL}{4}$。又因彎曲率乃一負數，故應作在基綫之下。

在梁之左半部任何剖面上，剪力常等於 R_1 或 $\frac{W}{2}$，故剪力圖爲一長方形，其高度等於 $\frac{W}{2}$。又因剪力在該半部乃一正數，故應作在基綫之上。

苟再由梁之左半部通過中點而至右半部，則剪力之值將由正數變爲負數，其發生變換之處乃在梁之中部。因是處之剪力，若就左半部而言，可假設係發生於在中心綫之左方極相接近之點，其與中心綫之距離爲無限小。於是載重 W 仍不在範圍之內

可以捨而不論，而剪力之值仍等於 R_1 或 $\frac{W}{2}$。但若就右半部而言，則可假設係發生於在中心綫之右方極相接近之點，其與中心綫之距離爲無限小。於是剪力之值將等於載重 W 及抗力 R_2 之代數和。今抗力 R_2 係向上作用，而載重 W 則係向下作用，故剪力等於

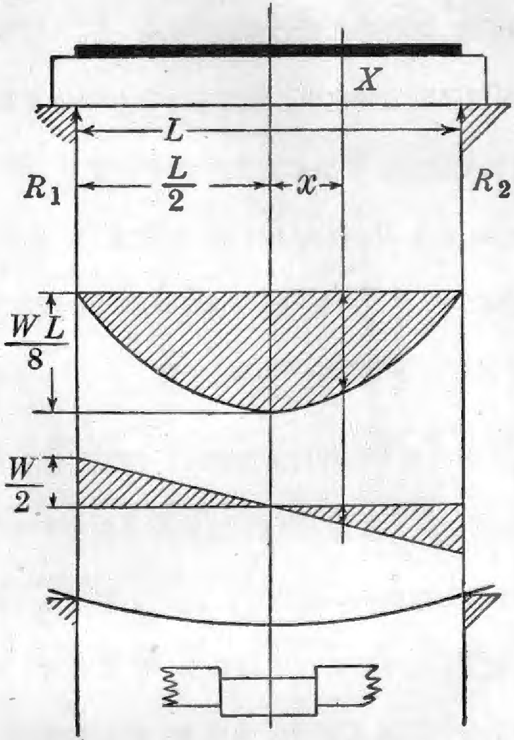
$$+\frac{W}{2}-W=-\frac{W}{2},$$

其值與左半部之剪力相等而方向相反。但左半部之剪力乃一正數，故右半部之剪力應爲一負數，其值無論在右半部任何剖面上常相等，故剪力圖應爲一長方形，其高度等於 $\frac{W}{2}$，並應作在基綫之下。總之，凡在抗力 R_1 及載重 W 之間者，剪力常等於 $+\frac{W}{2}$，在載重 W 及抗力 R_2 之間者，剪力常等於 $-\frac{W}{2}$。

由上觀之，剪力由正數變換爲負數，必先通過一零數之值，此剪力等於零之點，在梁之中心，亦卽發生最大彎曲率之處也。

例四　平支梁：有均佈載重者

假設平支梁上有均佈載重，如第 46 圖，其重量爲每公尺等於 w 公斤，於是總載重將等於 $w\times L$ 或 W 公斤。梁之兩端抗



第 46 圖

力 R_1 及 R_2 將仍如前例，各等於總載重之半，即 $\frac{wL}{2}$ 或 $\frac{W}{2}$。

試取梁內任何剖面 X 而研究之，假設其與中綫之距離為 x。在剖面之右方將見有兩個外力，一為向上之抗力 $R_2=\frac{wL}{2}$，取逆時針向作用，其與 X 剖面之距離為 $\left(\frac{L}{2}-x\right)$；一為梁上

長度$\left(\frac{L}{2}-x\right)$之一部分載重 $=w\left(\frac{L}{2}-x\right)$，取順時針向作用，其與 X 剖面之距離爲$\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)$。於是在剖面 X 之彎曲率將爲

$$B.M._X=\left\{R_2\times\left(\frac{L}{2}-x\right)\right\}-\left\{w\left(\frac{L}{2}-x\right)\times\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right\}$$

$$=\left\{\frac{wL}{2}\times\left(\frac{L}{2}-x\right)\right\}-\left\{w\left(\frac{L}{2}-x\right)\times\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right\}$$

$$=\left\{\frac{w}{4}\left(L^2-2xL\right)\right\}-\left\{\frac{w}{8}\left(L-2x\right)\left(L-2x\right)\right\}$$

$$=\frac{w}{8}\left(2L^2-4xL-L^2+4xL-4x^2\right)$$

$$=\frac{w}{8}\left(L^2-4x^2\right)$$

$$=\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right)$$

由此公式觀之，將見彎曲率圖應爲一拋物綫。彎曲率之最小值爲零，係當 $x=\pm\frac{L}{2}$時，即在梁之兩端，其最大值係當 $x=o$ 時，即在梁之中心，等於$\frac{wL^2}{8}$或$\frac{WL}{8}$

在剖面 X 之剪力等於作用於其左方或右方之抗力及一部

分載重之代數和，即

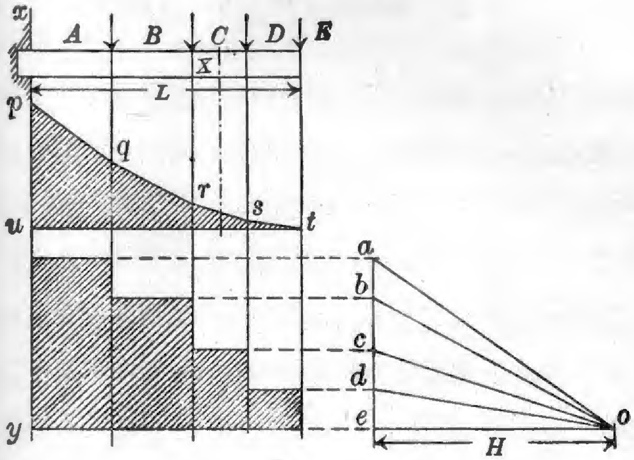
$$S.F._x = \frac{wL}{2} - w\left(\frac{L}{2} - x\right) = wx。$$

故剪力圖應爲一直綫，剪力之最小值等於零，係當 $x=o$ 時，即在梁之中心，其最大值係當 $x=\pm\frac{L}{2}$ 時，即在梁之兩端，等於 $\frac{wL}{2}$。剪力圖之構造法，讀者見圖自明，姑不贅述。

以上所舉四例，與其謂爲「圖解」，無甯謂爲「代數算法」，蓋因所有彎曲率及剪力之最大與最小值，均先經代數算法求得，而後方作圖以表示之也。惟其表示載重勻稱之現象，則頗易使讀者明瞭其結果將歸如何，故特意舉說於上。今且舉一二非勻稱載重之梁，利用連鎖多邊形以造彎曲率圖之例而言之。

42. 非勻稱載重之梁

設有一普通懸臂梁，上有 AB,BC,CD 及 DE 等集中載重，如第 47 圖。



第　47　圖

先按比例尺作 ab, bc, cd 及 de, 使各等於 AB, BC, CD 及 DE。由 e 作 eo 垂直於 ae (但 eo 並非必須垂直於 ae), 並使 eo 長度爲一整公分數。聯結 ao, bo, co 及 do。在位置圖中,延長各載重之作用綫,如圖所示。在空間 A 內, 任作一綫 pq, 使與 ao 平行;在空間 B 內,作 qr 平行於 bo; 如此繼續進行,直至 t, 而後由 t 作 tu 平行於 oe, 並使 pu 爲連鎖多邊形之閉合綫。於是 $pqrstu$ 多邊形將表示一彎曲率圖。

再由 a, b, c, d 及 e 諸點各作一射影於 A, B, C, D 及 E 各空間,此等射影所作成之圖形將爲所求之剪力圖。

43. 彎曲率及剪力之比例尺

惟如是作成之圖，苟不說明其所用之比例尺，俾能量算縱坐標之長度，由此以求得彎曲率及剪力之大小，則毫無價值可言。

苟知圖中所用比例尺，則彎曲率之比例尺可按下法求得：設圖中梁之長度係按 1 公分 $=m$ 公尺描繪，力綫 ae 之比例尺則爲 1 公分 $=n$ 公斤；又極距（注意——此處所謂極距係指極點 o 與 ae 之垂直距離而言）爲 H 公分。於是彎曲率圖中之縱坐標將爲

$$1 \text{ 公分} = m \times n \times H \text{ 公斤公尺。}$$

是即彎曲率之比例尺也。

例如長度 L 之比例尺爲 1 公分 $=10$ 公尺；力綫之比例尺爲 1 公分 $=50$ 公斤，又 $H=8$ 公分。於是

彎曲率之比例尺將爲 1 公分 $=10\times50\times8=4000$ 公斤公尺。

今欲求 X 剖面之彎曲率，可作一垂直綫，量算其與 rs 及 tu 兩綫所交之縱坐標，假設得 2.6 公分，則彎曲率將等於

$$2.6\times4000=10400 \text{ 公斤公尺。}$$

惟前述之 $pqrstu$ 連鎖多邊形是否確實表示一彎曲率圖，並未經證明，尚有加以申說之必要。在第四章中曾經說明，若有一

組之力繞某點轉動，則其合力之力率等於連鎖多邊形之首尾兩線與通過該點所作平行於合力之綫相交之距離乘極距。

今試就接近於牆端之剖面而言。在該剖面有一 xy 綫與諸重之合力平行。連鎖多邊形之第一綫爲 pq，末一綫爲 tu，因之，其與 xy 綫相交之距離爲 pu。於是該組之力在此一剖面之力率實爲 $pu\times H$，其中 pu 表示力之大小，而 H 則表示距離。

由上述情形觀之，將見苟將梁之長度放大一倍，其餘各節仍維原狀，則 pu 長度必亦隨之增加一倍。故若將 L 按一定比例尺約化之，則 pu 之實在長度亦將按同樣比例化小焉。因之，若圖中用 1 公分$=m$ 公尺之比例尺，則彎曲率圖亦將化小至100 m 倍，而 pu 之足尺長度將爲$(pu\times 100m)$公分。再者，若力綫每公分代表 n 公斤，則 pu 所代表之力，其大小將爲 $(pu\times 100 m\times n)$公斤。故該組之力在此剖面之力率實等於

$$pu\times 100m\times n\times H \text{ 公斤公分,}$$

或　$$pu\times \quad m\times n\times H \text{ 公斤公尺。}$$

惟讀者對於上述有應加注意者，卽力率之計算雖按公斤公尺，但 H 距離之量算則按公分，並非按公尺，此點每易發生錯誤也。

至於剪力圖之解證則頗屬易事。因 ab, bc, cd 及 de 係按相當比例尺分別等於 AB, BC, CD 及 DE 諸力，故 ea 應等於

梁端之抗力 R。今在抗力 R 及第一載重 AB 間任何剖面之剪力爲

$$R=ae$$

而在空間 A 內剪力圖之任一縱坐標均等於 ae。同樣，在第一載重 AB 及第二載重 BC 間任何剖面之剪力爲

$$R-AB=ae-ab=be。$$

在第二載重 BC 及第三載重 CD 間任何剖面之剪力爲

$$R-(AB+BC)=ae-(ab+bc)=ce。$$

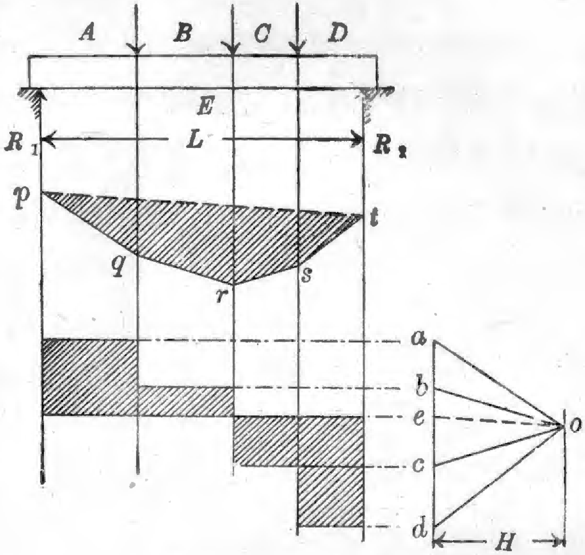
在第三載重 CD 及第四載重 DE 間任何剖面之剪力爲

$$R-(AB+BC+CD)=ae-(ab+bc+cd)=de。$$

故根據上述情形，足證所作之圖實爲所求之剪力圖。

例五 平支梁：有集中載重者。

第 48 圖表示一平支梁，上有集中載重 AB,BC 及 CD。引長各載重之作用綫，並作 ab,bc 及 cd，使分別等於上述三力。任擇一點 o，惟務使極距 H 爲一整公分數。聯結 oa, ob, oc 及 od。由抗力 R_1 之作用綫上任一點 p，在空間 A 內，作一 pq 綫平行於 oa；由 q 在空間 B 內作 qr 平行於 ob，如此繼續進行，直至 t。聯結 pt，於是 $pqrst$ 多邊形將爲所求之彎曲率圖。



第 48 圖

由 o 作 oe 平行於 pt, 於是 de 及 ea 將分別表示抗力 R_2 及 R_1。

剪力圖之作法則係由 a, b, e, c, d 各點分別作一投影於相當載重之作用綫上,如圖所示。今且就梁之左半部而言, 在抗力 R_1 及第一載重 AB 間之剪力等於 R_1 並爲一正數, 故此一部分之剪力圖爲一長方形,其高度等於 R_1 或 ea。在載重 AB 及 BC 間之剪力等於向上作用之 R_1 及向下作用之 AB 二力之代數和,或等於

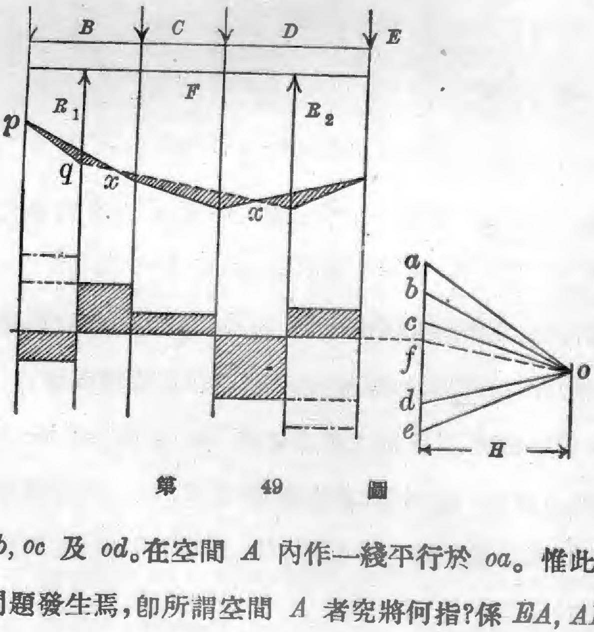
$$R_1 - AB = ea - ab = eb。$$

係向上作用者，故此部分之剪力圖應爲一長方形，其高度爲 eb。其餘諸部分之剪力圖情形相同，不再贅述。

例六　外伸梁；有集中載重者。

本節所舉之例，爲前述兩例之結合，情形較爲複雜，實有詳加解釋之必要。

如第 49 圖，有一外伸梁，上受集中載重 AB, BC, CD 及 DE。作 ab, bc, cd 及 de 分別等於以上諸載重。任擇一點 o，聯



第　49　圖

結 oa, ob, oc 及 od。在空間 A 內作一綫平行於 oa。惟此處有一困難問題發生焉，即所謂空間 A 者究將何指？係 EA, AB 兩

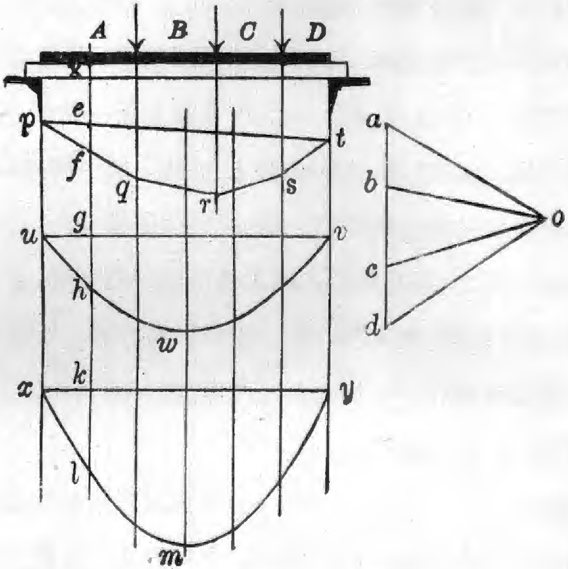
力間之空間乎？抑係 R_1, AB 兩力間之空間乎？今試就所作力綫圖加以研究，將見力之多邊形係按 ab——de 之次序，由 a 至 e, 故 ea 應為一閉合綫。惟 ea 之內實含有兩個抗力 R_2 及 R_1, 即 ef 與 fa, 故 a 應認為係 fa 與 ab 之交點，並非 ea 與 ab 之交點，而 A 亦應認為 R_1 與 AB 間之空間，並非 EA 與 AB 間之空間也。因之，由 AB 力之作用綫上任一點 p, 作一綫與 oa 平行，應即落在 R_1 之作用綫上 q 點。此一問題解決之後，其他各綫可即按前法求得之，不致再發生困難矣。

由圖中觀之，將見所作連鎖多邊形成一交叉形，其中交叉點 x, x, 稱為曲折點，表示在該處之彎曲率等於零。梁之曲度至此等地點即發生變化——原先向上凸者，至此則轉而向上凹，原先向上凹者，至此則轉而向上凸。

至於剪力圖，其在 R_1 與 R_2 之間者，可按前法由 b, c, d 諸點各作一投影，惟在 AB 與 R_1 之間及在 R_2 與 DE 之間，若仍分別由 a,e 兩點各作一投影，如圖中虛綫所示，則結果不免錯誤。在 AB 與 R_1 之間任何剖面上剪力實等於 AB, 並為一負數，故應在基綫之下。又在 R_2 與 DE 之間任何剖面上，剪力實等於 DE, 並為一正數，故應在基綫之上，如圖所示。由圖中觀之，將見曲折點 x,x 適與剪力圖中其剪力值為最大之部分相吻合。

例七 平支梁:有複合載重者。

第 50 圖表示一受有複合載重之平支梁。今欲求得其彎曲率圖,可分別按集中載重及均佈載重各作一彎曲率圖,而後結合

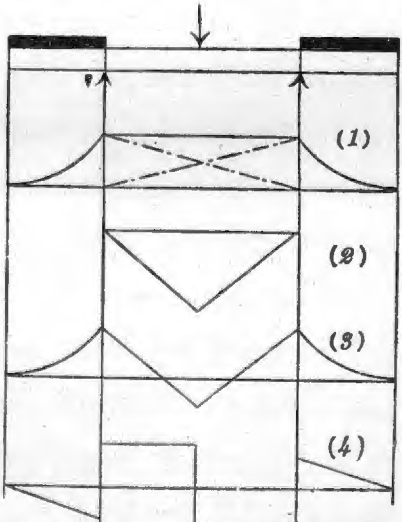


第 50 圖

之卽得。法先作 ab, bc 及 cd, 分別等於集中載重 AB, BC 及 CD。作 pq, qr, rs 及 st, 分別與 oa, ob, oc 及 od 平行,於是連鎖多邊形 $pqrst$ 將爲集中載重之彎曲率圖。再計算在梁之中心,由於均佈載重而發生之最大彎曲率,於是作一拋物綫,如 uwv, 此曲綫將爲均佈載重之彎曲率圖(注意——前後兩彎曲率

圖須用同一比例尺)。而後作一水平綫 xy, 並將其分成若干相等部分,由此等分點各作一縱綫,使與兩曲綫相交。將兩曲綫上之縱坐標逐一相加,卽得所求之總彎曲率。例如在 X 剖面,由於集中載重之彎曲率等於縱坐標 ef, 由於均佈載重之彎曲率等於縱坐標 gh,於是在該剖面之總彎曲率將等於$(ef+gh)$。由 xy 綫上之分點 k 量 kl 距離使等於$(ef+gh)$,則 l 將爲新彎曲率圖中之一點。如此求得若干新總坐標而聯結之,卽爲所求之新彎曲率圖。

剪力圖之作法與上相同:先分別求得集中載重及均佈載重之剪力圖,而後將兩圖中之縱坐標逐一相加,求得新坐標而聯結之,卽成一新剪力圖。



第 51 圖

第 51 圖表示另一種特別結構,梁爲外伸式,其伸出之兩端均受有均佈載重,兩支柱之間則有一中點集中載重。仍按前法先分別求得均佈載重及集中載重之彎曲率圖,如(1)及

(2)，而後結合之如(3)，即得複合載重之彎曲率圖。至於剪力圖則如(4)，亦係按均佈載重及集中載重分別求得，但無須再結合。

本圖所示係屬勻稱載重，但如遇非勻稱載重，其法自亦相同。

均佈載重亦可按照集中載重用連鎖多邊形法解之。法將承受之梁分成若干相等部分，每一部分上之均佈載重即可認爲等於一集中載重，作用於各該部分之中心。如此，則均佈載重將分成若干相等之集中載重矣。

習　　題

1. 有一水平綫 AB 長 10 公分，試作一拋物綫於其上，其頂點高出 AB 6 公分。

2. 有一懸臂梁長 14 尺，在懸空之端承一 2 噸之載重。試作彎曲率及剪力圖，並量算距懸空一端 2 尺，5 尺，及 8 尺處之彎曲率。用代數算法覆核之。

3. 若上題中之懸臂梁受有每尺 $\frac{1}{2}$ 噸之均佈載重，其最大彎曲率將等於若干？試作彎曲率及剪力圖，並量算距懸空一端 3 尺及 9 尺處之彎曲率及剪力。用代數算法覆核之。

4. 今有一梁長 30 尺，兩端平支於基座上。在梁之中心載有一 3 噸之重。試作彎曲率及剪力圖，並求得距左端 6 尺處之彎曲率及剪力。

5. 若上題中之梁承有每尺 600 公斤之均佈載重，則最大彎曲率將等於若干?試作彎曲率及剪力圖，並求得距右端 8 尺處之彎曲率及剪力。

6. 有一懸臂梁長 20 尺，設有 400, 600, 700, 900 及 500 公斤之載重各置於距懸空一端 0 尺，4 尺，8 尺，12 尺及 16 尺之處，試作彎曲率及剪力圖，並求得距懸空一端 6 尺及 10 尺處之彎曲率及剪力。其最大彎曲率等於若干?

7. 今有一梁長 40 尺，平支於基座上，設距左端 4 尺，17 尺，24 尺，及 32 尺處各釘有一擱柵，其上各承有 2, 3, 2.5 及 4 噸之載重。試作彎曲率及剪力圖，並求得在梁之中心處及距左端 10 尺與 26 尺處之彎曲率及剪力。

8. 設有一長 40 尺之梁，靠於兩支柱上，其距離為 28 尺。梁之左端伸出 7 尺，右端伸出 5 尺。在梁之極左端承有一 4 噸之載重，在其極右端則承有一 3 噸之載重，另於兩支柱之間有二載重，各重 2 噸，一距左支柱 8 尺，一距右支柱 10 尺。試作彎曲率及剪力圖，並求得在梁之中心處之彎曲率及剪力。

9. 今有一每尺重 40 公斤之梁，長 36 尺，承有每尺 200 公斤之均佈載重，另有各重 1 噸之載重三，分別置於距左端 8 尺，14 尺及 28 尺之處，試作彎曲率及剪力圖。最大彎曲率將等於若干，發生在何處?距右端 10 尺處之彎曲率及剪力等於若干?

10. 假設在第 8 題中之梁，除已有之集中載重外，復受有每尺 150 公斤之均佈載重，試求在梁之中心處之彎曲率及剪力，最大彎曲率及剪力將各等於若干，發生在何處?

第　六　章

梁之載有活重者

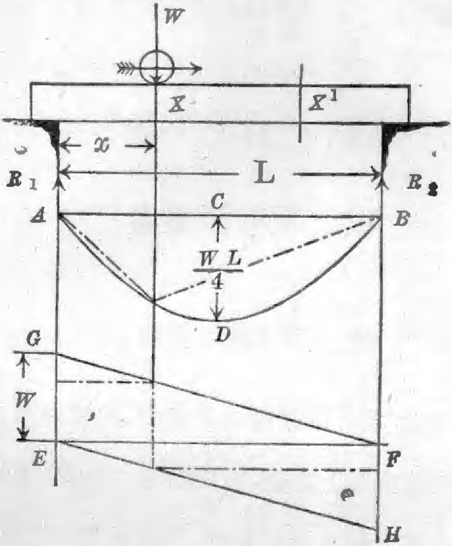
44　單獨集中活重

前章所述之梁，其所承載重或屬集中，或屬均佈，皆稱之爲靜重，以其一經置在梁上之後，即成靜定之勢也，本章所欲討論者則爲另一種載重，稱爲活動載重，或簡稱爲活重者，與梁之關係。例如車輛行駛於橋梁之上，或大風吹在屋脊，此皆屬於活重者也。

今且舉一最簡單之例言之。如第 52 圖，有單獨集中活重 W，取自 R_1 至 R_2 之向滾動於平支梁上。今欲求得在任何剖面 X 之彎曲率，須先計算抗力 R_1 及 R_2。假設該剖面與左支柱之距離爲 x，則依力率原理

$$R_1 \times L = W(L-x),$$

$$\therefore\ R_1 = \frac{W(L-x)}{L}$$



第 52 圖

依前章所述，凡梁之受有一集中靜重者，其最大彎曲率常直接發生於該載重之下，故當 W 在 X 剖面上時，最大彎曲率亦應發生於 X 處，因之，

$$B.M._x = R_1 \times x = \frac{W(L-x)}{L} \times x$$

$$= \frac{W(Lx-x^2)}{L}$$

上式表示載重 W 滾動至任何剖面上時，即在該剖面所發生之彎曲率，因其屬於二次方程式，故必爲一拋物綫，其最小値等於零，係當 $x=0$ 及 L 時，其最大値係當 $x=\frac{L}{2}$，即當 W

在梁之中點時。

$$B.M._{\text{中點}}=\frac{W\left(\frac{L^2}{2}-\frac{L^2}{4}\right)}{L}=\frac{WL}{4}。$$

此亦卽前章所述集中靜重在平支梁之中心所得最大彎曲率之值，彎曲率圖卽依此數值爲根據。法先作一水平綫 AB，在中點 C 作一垂直綫 CD，使等於$\frac{WL}{4}$。以 D 爲頂點，於 AB 綫上作一抛物綫，此曲綫卽爲所求之彎曲率圖。

再者，當載重 W 靜止於任何剖面上時，彎曲率圖實爲一三角形，其頂點卽直接在載重之下，如圖中所示之虛綫。但如 W 自 R_1 向 R_2 一面滾動時，則此三角形頂點之軌跡將始終落在抛物綫 ADB 上。曲綫 ADB 實包含所有彎曲率圖，因此，常稱之爲彎曲率之外包曲綫(簡稱包綫)。

當載重 W 在 X 剖面時，在該剖面左方之剪力等於$+R_1$，$+\frac{W(L-x)}{L}$，此爲一一次方程式，表示包綫實爲一直綫。當 $x=0$ 時，剪力爲一最大值，等於 $+W$；當 $x=L$ 時，剪力等於零，爲一最小值。作一水平綫 EF，並取 EG 距離使等於 W，聯結 GF。於是 GF 將爲正剪力之包綫，其在任何剖面 X 處之剪力圖，則如圖中虛綫所示。同樣可以證明在 X 剖面右方之剪

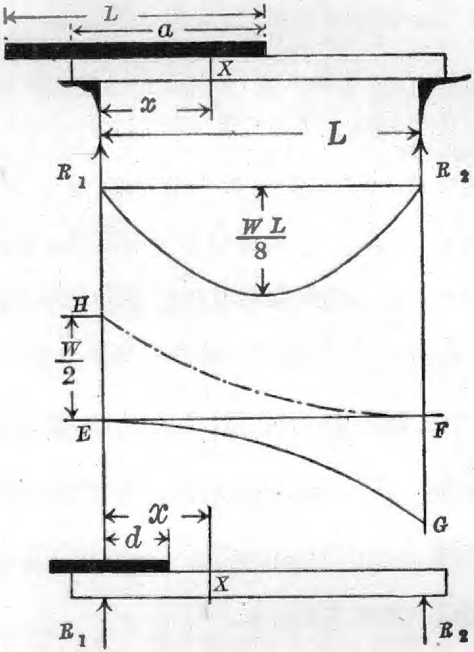
力等於$\frac{W(L-x)}{L}-W=-W\frac{x}{L}$。此式仍表示一直綫，其最大值等於 $-W$，係當 $x=L$ 時；其最小值等於零，係當 $x=o$ 時。再由 F 作 FH 使等於 $-W$，聯結 EH。於是 EH 將爲負剪力之包綫。

活重 W 由 R_1 向 R_2 滚動時，正剪力（或活重左方之剪力）之變化係用三角形 EGF 表示之，而負剪力（或活重右方之剪力）之變化則用三角形 EFH 表示之。總之，欲求任何剖面之剪力，無論其爲正爲負，均須取其最大值。

今苟取任何剖面 X^1 而研究其剪力，若 W 係由 R_2 向該剖面進行，則在該剖面之剪力將爲一正數，反之，若 W 係由 R_1 向該剖面進行，則在該剖面之剪力將爲一負數。

45. 均佈活重

其次所欲研究者，乃爲均佈活重，假設其重量爲每公尺 w 公斤，取自 R_1 至 R_2 之向運動於平支梁上。梁之長度爲 L 公尺，活重之長度亦爲 L 公尺，其在梁上之長度則爲 a 公尺，如第 53 圖。



第　53　圖

於是在任何剖面 X 處之彎曲率將為

$$B.M._X = R_2(L-x) - \frac{w(a-x)^2}{2}$$

又 $R_2 \times L = aw \times \frac{a}{2}$,

$$\therefore \quad R_2 = \frac{a^2w}{2L}。$$

$$\therefore \quad B.M._X = \frac{a^2w}{2L}(L-x) - \frac{w(a-x)^2}{2}$$

$$=\frac{w}{2}\left(a^2-\frac{a^2x}{L}-a^2+2ax-x^2\right)$$

$$=\frac{w}{2}\left(2ax-\frac{a^2x}{L}-x^2\right)$$

上式屬於二次方程式，故亦爲一拋物綫。當 $x=o$ 及 L 時，彎曲率之值爲最小，等於零；載重自左逐漸向右移動時，彎曲率之值亦逐漸加大，直待全梁爲活重所佔滿，〔$a=L$，上式變爲 $B.M._x=\frac{w}{2}(Lx-x^2)$〕，於是最大彎曲率發生於梁之中心，其值等於 $\frac{WL}{8}$。今依此值作一拋物綫，如圖所示，是卽爲最大彎曲率之包綫。再查 $\frac{WL}{8}$ 一值，在受有均佈靜重之平支梁上，如第 46 圖，其最大彎曲率亦等於此數，故上述之彎曲率包綫亦卽與第 46 圖之彎曲率圖完全相似也。

至欲求剪力，則假設該活重僅在梁上行駛 d 之距離（見第 53 圖之下圖）。於是在 X 剖面之剪力將等於 R_2。

今 $$R_2\times L=wd\times\frac{d}{2}=\frac{wd^2}{2},$$

$$\therefore\quad R_2=\frac{wd^2}{2L}。$$

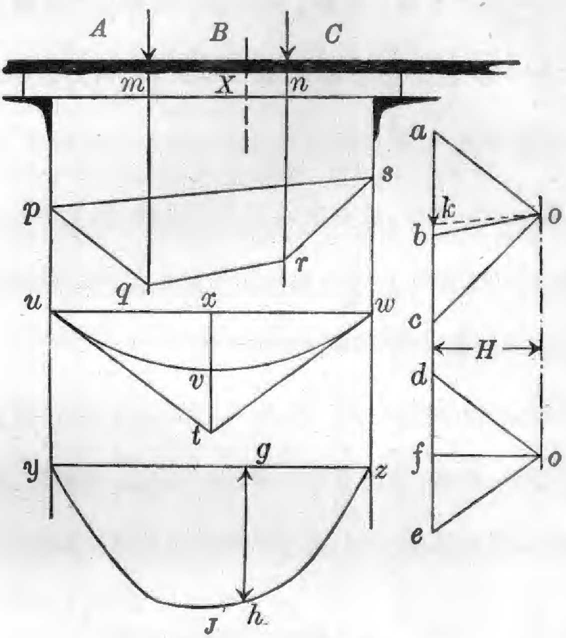
由上式觀之，將見 R_2 之值依 d 之值而定，d 之值加大，則 R_2 之值亦加大，其最大值將爲 d 適等於 x 時，易言之，卽當活重適來至 X 剖面時，在該剖面之剪力其值乃爲最大。最大

$S.F._x=-\frac{wx^2}{2L}$，並係一負數。此式表示負剪力之包綫乃一拋物綫，當 $x=o$ 時，剪力亦等於零；當 $x=L$ 時，剪力則等於 $\frac{wL}{2}$ 或 $\frac{W}{2}$。由圖中觀之，將見當活重逐漸由左向右移動時，正在活重前面之剪力乃一負數。故欲求負剪力之包綫，應先作一基綫 EF，於 F 點作 FG 使等於 $\frac{W}{2}$，而後依前述方法作一拋物綫，如 EG 即爲所求之包綫。

反之，若活重係自 R_2 向 R_1 一面行動，則正在活重前面之剪力將爲一正數，而正剪力之包綫將仍爲一拋物綫，如圖中之虛綫 FH，其形狀與 EG 適相似而方向則適相顚倒。

46. 梁之兼載活重與靜重者

前述之梁僅載有活重，然實際情形往往不能如此簡單，除活重之外，另有某種靜重加於其上，如此，則所生彎曲率及剪力又將比較複雜矣。茲且舉一例於下。如第 54 圖，平支梁上旣有均佈活重——其長度較長於梁，自左向右運動，同時又有兩個靜重 AB 及 BC 作用於 m 及 n 兩點。於是欲求兩種載重聯合而生之彎曲率及剪力，須先分別求得活重及靜重各自所生之彎曲率及剪力。



第 54 圖

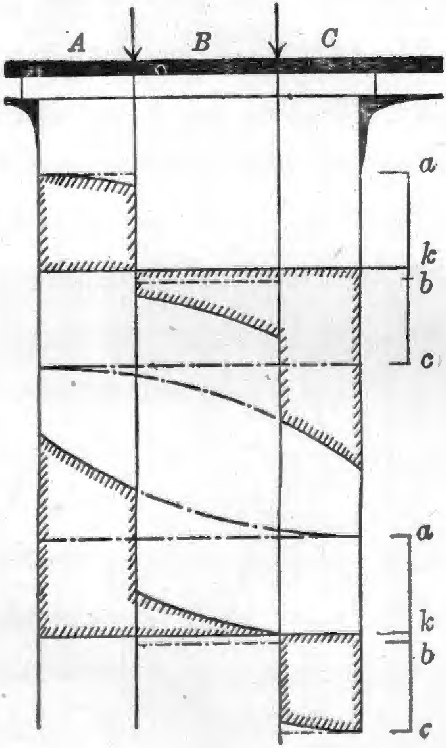
法先作力之多邊形 *abc*, 而後作連鎖多邊形 *pqrs*, 是卽爲靜重 *AB* 及 *BC* 之彎曲率圖。次作均佈活重之彎曲率包綫,如圖中之抛物綫 *uvw*。而後將兩圖中之相當縱坐標相加, 以求得一聯合彎曲率圖,如 *yJz*。於是欲知因上述兩種載重聯合作用而生之最大彎曲率,其值等於若干, 將發生於何處,均可於該圖中求得之。

惟 *pprs* 及 *uvw* 兩圖之作法須依同一比例尺。如此, 則 *yJz*

圖中之任何彎曲率將等於在該剖面量得之縱坐標，與彎曲率比例尺相乘之積。例如在 X 剖面之縱坐標為 gh，於是

$$B.M._x = gh \times m \times n \times H \text{ 公斤公尺。}$$

至於拋物綫 uvw 之繪製，並不必先用算式求得其最大彎曲率，如依下述方法則較為簡捷。法先作一綫 de，使代表梁上所能



第　55　圖

承受之最大活重 $w \times L$。作 de 之垂直分中綫 fo, 使等於 H。聯結 do 及 eo。作水平綫 uw, 由 u 作 ut 平行於 do, 由 w 作 wt 平行於 oe。作 tx 垂直於 uw, 求其分中點 v。即以 v 爲頂點,求得拋物綫 uvw。

剪力圖之形狀須依活重運動之方向而定。如第 55 圖,其由 a,k,b,c 各點所作之投影, 表示靜重之剪力者,上下兩圖之形式完全相同。其表示活重之剪力者,在上圖係由於活重自左向右運動所致,其零點在左端,而最大值則在右端; 在下圖係由於活重取相反之方向運動所致,故其形式亦與上圖完全顚倒,即零點在右端,而最大值則在左端。所求剪力圖,其縱坐標等於靜重及活重兩剪力圖中相當縱坐標之代數和,因成兩種不同形狀,如圖中陰綫所示之部分。

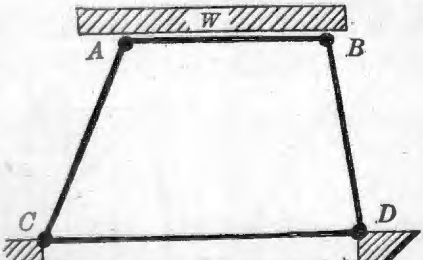
第七章

勻稱式屋梁

47. 框架構造

條梁為一種最簡單之構造，故其應力之推算亦比較容易。惟圖解力學之實際應用，在解決各種結合構造中所生內部應力之問題，前已言之，本章卽欲就一種框架構造，如屋架者，先加以研究。

所謂框架構造者，乃若干條桿，兩端用栓結合之，使成一種框架形式，俾可以繞其中心點自由運動於一個平面之中。此種條桿則稱為框架之部材。



第 56 圖

第 56 圖表示一種框架，中含四個部材，如 AB, BD, AC 及 CD。今假使將 CD 部材之兩端安置於牆頭之上，則 AB 部材上可使擔承載

重 W。惟如此結構之框架有一可以疵議之點，卽假使一旦有任何橫力，例如風壓，向 AC 或 BD 部材上施來，則 AC 及 BD 兩部材將成繞 C, D 兩栓轉動之勢，全部框架亦將致成動搖，而載重將不免傾落矣。欲使框架處在此種情形下，能擔任其工作而不虞隕越，必須設法加固 A, B, C, D 各接縫之結合，使框架任受若何外力，絕不致發生變形。

48. 框架之種類

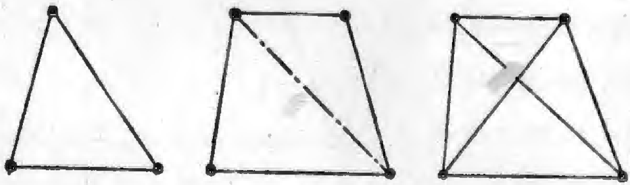
框架概括之可分爲三類如下：

(a) 健全式框架

(b) 不健全式框架

(c) 贅冗式框架

健全式框架——第 57 圖(a)表示一種健全式框架。此種框架，無論在其平面內受到任何外力，苟各部材之應力未出乎安全



(a) (b) (c)

第 57 圖

限制之外者,其原形絕不致有改變之趨勢,因其中各部材之組織健全,結合穩固,足以抵抗外力之傾軋也。再者,在此種框架中,任一部材自身之長度可以任意伸縮,而絕不致影響於其他二部材之應力。

不健全式框架——第 57 圖(b)表示一種不健全式框架。此種框架之組織不健全,故各部材之結合不能穩固,一經遭受外力之橫施,常不免發生變形之現象,前已言之。

吾人若參考連鎖多邊形之結構,將見此種多邊形既可在某組力之作用下,成一平衡之局面,則上述之不健全框架,最少在某組力之作用下,亦可保持其原狀,惟一旦此組力中任有一力忽發生變化,則框架之原有局面將被打破,各部材將不能再與原有多邊形之連鎖相吻合矣。故此種框架絕不能在任何力之作用下常成安定。欲圖補救此種缺憾,可加入一部材,如(b)圖中虛綫所示,如此,則框架將變成一穩固之式,無論在其平面內遭受任何力之作用,苟各部材之應力未出乎安全限制之外者,均不致再改變其原形。此外尚有一優點,卽任一部材之長度可以任意伸縮,而不致影響於其他部材之應力,

贅穴式框架——第 57 圖(c)表示一種贅穴式框架。在此種框架中,其部材之數量實超過必需之限度,有如(c)圖中之對角,有其一卽不必有其他,此多餘部材卽稱爲贅料。此種結構對於大

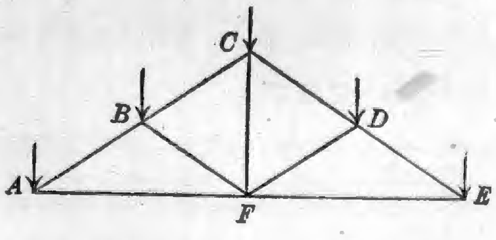
局並無妨礙，蓋在任何力之作用下，均能保持安定，惟有一絕大缺點，卽苟其中任一部材之長度發生變化，將影響至其他諸部材之應力是也。故若部材之長度不能依設計之尺寸，或因工人手藝不良，安裝不慎，致不符原有圖樣，則裝成後各部材自身將發生一種初期應力，影響於框架之結構實大也。

總之，若 n 爲框架之接縫數，則一個完全框架應有 $(2n-3)$ 個部材。

49. 屋架

惟屋頂或橋梁所用框架，因各部分組織之不同，故實際並不十分符合上述框架所需之理想條件，因之，此種框架又專稱爲構架：屋頂所用者稱爲屋架，橋梁所用者則逕稱之爲橋梁。

雖然，屋架與橋梁實際固不符合框架所需之理想條件，但在計算應力時，爲便利起見，則仍依照框架之結構討論焉。例如第 58 圖所示之屋架，AC 及 CE 兩人字梁，實際均係一根整料，



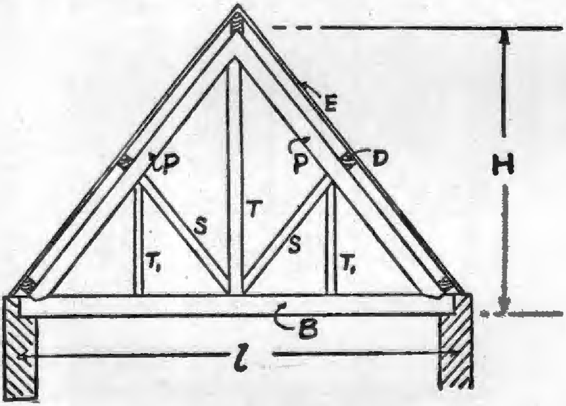
第 58 圖

並非分別接合於 B, D 兩點，而大料 AE 亦係一根整材，並非用 AF, FE 兩部材聯結而成，至於 BF, CF 及 DF 諸部材，則係分別用螺栓或帽釘接合於 B, C, D 及 F 諸點。惟在討論時，則假設 AB, BC, CD, DE, AF, FE 均係個別部材，與其他部材分別用栓接合於 B, D, F 諸點，因而結成若干三角形框架，計算應力即可按照此種假設分別進行。

50. 定義

茲且將屋架各部分之名詞解釋於后：

人字樑——人字樑爲屋架之軀幹，如第 59 圖(A)中之 P,



第 59 圖 (A)

P, 一端架在牆頭，一端支爲屋脊。桁條卽架設於其上，其內部應力多爲壓力。

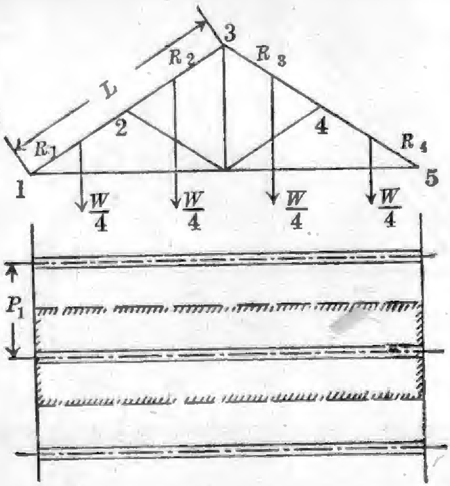
大樑——大樑(又稱大料)爲屋架之主樑，如圖中之 B，兩端均架在牆頭，所有繫柱，斜角撐等料均承接於其上。其內部應力多爲引力，此爲與人字樑不同之點。

繫柱及斜角撐——圖中之 T 及 T_1, T_1 均稱爲繫柱(T又稱爲正柱)，S, S 稱爲斜角撐。所有繫柱其內部應力均爲引力；所有斜角撐其內部應力均爲壓力。

桁條——桁條乃一種橫木，如圖中之 D，藉助於角鐵或小木塊，固釘於人字樑之上，用以承受椽子。

椽子——椽子爲若干木條，如圖中之 E，固釘於桁條之上，用以承托蓋瓦。

間隔——間隔爲兩屋架間中對中之距離例如第 59 圖 (B)



第 59 圖 (B)

之平面圖中所示之 P_1。

流水——流水爲屋架之高度 H 與其寬度 l 之比率 $=\frac{H}{l}$

例如 H 等於 20 公尺，l 等於 60 公尺，則流水等於 $\frac{1}{3}$。

坡度——坡度爲人字樑與大樑所交之角度，其正切等於屋架高度與其寬度之半之比，即等於流水之倍。

流水與坡度兩名詞之意義常易混淆，茲且將最常見之流水與其相當坡度列表於下。

流水	坡度
$\frac{1}{6}$	18°26′
$\frac{1}{5}$	21°48′
$\frac{1}{4}$	26°34′
$\frac{1}{3}$	33°41′
$\frac{1}{2}$	45°00′

51. 載重之分佈

屋架所承受之載重計分二種：一爲靜重，如桁條，望板，蓋瓦，等屬之；一爲活重，如風壓，積雪等屬之。凡靜重均假設垂直作用

於屋架之各接縫上，積雪亦然，惟風壓則假設作用於與人字樑成垂直之方向，茲且將計算靜重之方法詳述於下。

第 59 圖 (B) 表示屋架之正面及平面。平面圖中計有梁三架，其間隔各等於 P_1 公尺。今且就中間一屋架而言，因屋頂材料實際雖係均佈於屋頂，惟計算時則假設由兩端之屋架平均擔承。故若人字樑之長度爲 L 公尺，則在某一間隔之內，其載重面積將爲 $2\ L\times P_1$。若屋頂材料之重爲每平方公尺等於 w 公斤，則每一間隔所承受之總載重將爲 $2\ L\times P_1\times w$ 公斤，姑用 W 代表之。

此種載重既係平均分佈於兩屋架之間，故每一屋架所承受之載重應爲 $\frac{W}{2}$。但中間一屋架在左面固承受載重 W 之半，在右面仍須承受 W 之半，故其所承受之總載重應爲 $\frac{W}{2}+\frac{W}{2}=W$。平面圖中陰綫內之一部分即表示中間一屋架應承受之載重。

該屋架既承受如是之載重後，復假設將其平均分佈於兩人字樑之上，於是 R_1, R_2, R_3 及 R_4 各部材均將承受 $\frac{W}{4}$ 公斤之載重。此等載重或假設均佈於各部材之上，或假設集中於其重心，其結果均將於各接縫，如 1,2,3, 等點發生等於 $\frac{W}{8}$ 之抗力。因之，在 R_1 部材上，1,2, 兩端之抗力各等於 $\frac{W}{8}$。同樣，在 R_2 部

材上，2,3 兩端之抗力亦各等於$\frac{W}{8}$。由此觀之，將見在牆頭上之接縫，如 1 及 5，其載重將各等於$\frac{W}{8}$，在其他各接縫，如 2, 3,4 等，其載重將各等於$2\times\frac{W}{8}=\frac{W}{4}$。總之，

若命 $N=$人字樑上部材之數，

$W=$屋架上總載重，

則在牆頭接縫之載重將$=\frac{W}{2N}$,

在其他各中間接縫之載重將$=\frac{W}{N}$。

上述之 W 係指施於屋架上之外部載重而言，屋架自身亦有若干重量，計算時應列入於靜重之內。惟因設計時必先知載重之大小，而後方能定屋架各部材料之大小，今各部材料之大小既未能定，則載重之大小又焉能知之？計算又何從着手？故在未設計之先，必須假定一種近似公式，以爲計算根據。本書所用近似公式如下：

命　$l=$屋架之寬度，以公尺計，

$P_1=$屋架之間隔，以公尺計，

$W_1=$近似載重，以公斤計。

則　$W_1=\frac{15}{4}lP_1\left(1+\frac{1}{3}l\right)$。

下表表示各種屋頂材料每平方公尺之重量，並其可以安放於屋架上之最小坡度。

材料	重量(公斤)	坡度
油毛氈	2.5	4°
鋅	7.5—10	4°
鉛	27—42	4°
瓦隴鐵 16 *G*	17.5	4°
石礮瓦	30—50	26.5°
蓋瓦	50—80	30.0°
木板 $\frac{3}{4}''$ 厚	12.5	26.5°
木板 $1''$ 厚	17.5	26.5°

玆且舉例於下，以示計算載重之詳法。

例題——今有一屋架，如第 58 圖所示，其寬度為 9 公尺。人字樑長 6 公尺。屋架間隔為 3 公尺。屋架上鋪 $\frac{3}{4}''$ 松板，石礮瓦每平方公尺重 35 公斤。試求各接縫之載重。

(解)第一步先用近似公式求得屋架自身之約重，

$$W_1=\frac{15}{4}l\ P_1\left(1+\frac{1}{3}l\right)$$

$$=\frac{15}{4}\times9\times3\left(1+\frac{1}{3}\times9\right)$$

$=405$ 公斤。

第二步再計算屋頂材料之重量。今查 $\frac{3}{4}''$ 松板每平方公尺重 12.5 公斤。石砾瓦每平方公尺重 35 公斤。桁條每平方公尺重 7.5 公斤。

故屋頂材料每平方公尺之總重量等於

$$12.5+35+7.5=55 \text{ 公斤。}$$

今　$W=w\times 2L\times P_1$

$$=55\times 2\times 6\times 3=1980 \text{ 公斤。}$$

∴　每一屋架之總載重 $=W_1+W$

$$=405+1980$$

$$=2385 \text{ 公斤。}$$

此種載重應分配於各接縫，其比例則爲 A,E 兩接縫各得 1 分，B,C,D 三接縫各得 2 分。易言之，卽上述載重實應 8 股均分也。因之，

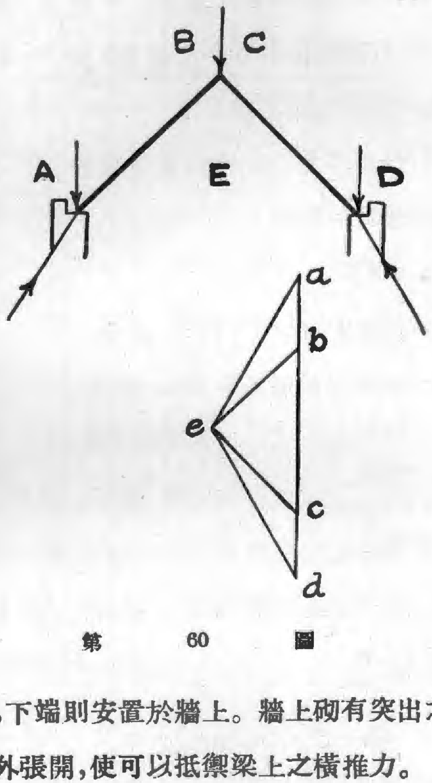
$$\text{每 1 分}=\frac{2385}{8}=298 \text{ 公斤。}$$

∴　在 A 及 E 之載重各 $=298$ 公斤，

在 B,C 及 D 之載重各 $=596$ 公斤。

52.　最簡單式屋架

屋架形式最簡單者當推第 60 圖所示，僅有兩人字樑，其上



第 60 圖

端用螺栓結紮，下端則安置於牆上。牆上砌有突出之牆頭，用以防止人字樑向外張開，使可以抵禦梁上之橫推力。

今欲求牆頭之抗力，第一步先按上法求得各接縫之載重，如 AB, BC 及 CD，而後按適當比例尺，作 ab, bc 及 cd，等力綫，使分別等於上述各載重。今因 AB, BC, CD 三力作用於屋架之上，牆頭乃發生抗力 AE 及 ED 使成平衡。故 $abcd$ 一綫並非一閉合形，必須有代表 AE 及 ED 二力之綫加入，方能成爲閉

合。

屋架受載重之作用，因於兩端發生抗力，如此，固使屋架全部成爲平衡，但若就各接縫分析之，每一接縫亦均在平衡狀態之中，因之，每一接縫均可用一力之多邊形表示之。惟求此等力之多邊形須按各接縫之循環次序，其方向多爲順時針向，並多以左面牆頭起始。

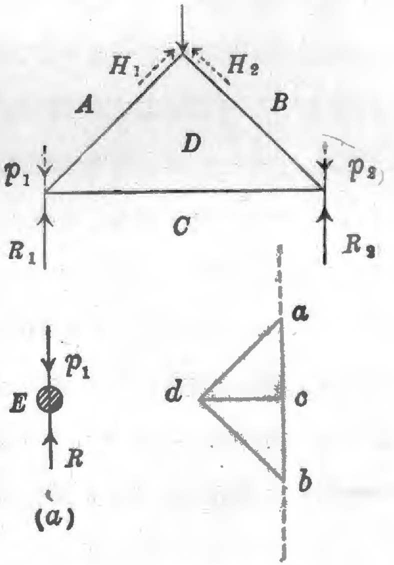
今試先就左面牆頭言之，在此一接縫，共有三種力作用焉：一爲載重 AB，已知其大小及方向；一爲左樑之內部應力 BE，已知其方向但不知其大小；一爲牆頭之抗力 EA，既不知其大小又不知其方向。因之，在此一平衡狀態中，共有三個未知之數，一屬大小，兩屬方向，而解決乃屬不可能。

試再研究屋頂，在此一接縫，亦有三種力作用焉：一爲載重 BC，已知其大小及方向，兩爲左右二樑之內部應力 CE 及 EB，均已知其方向，但不知其大小，因之，在此一平衡狀態中，共有二個未知之數，於是可按前述方法，求得 CE 及 EB 二力之大小。

法先自已知之力 BC 起始，此一力已有力綫圖中之 bc 代表之。第二步自 c 作 ce，平行於 CE，再自 b 作 be 平行於BE。於是 ce,eb 將分別表示 CE,EB 二力之大小。聯結 ea 及 ed。於是在力之多邊形 abe 中，因 ab 代表載重 AB 之大小及方向，be 代表左樑之內部應力 BE 之大小及方向，故 ea 將表示左面

牆頭之抗力 EA 之大小及方向。又在力之多邊形 cde 中，因 cd 代表載重 CD 之大小及方向，de 代表右梁之內部應力 DE 之大小及方向，故 ec 將表示右面牆頭之抗力 EC 之大小及方向。此種力綫圖 $abcde$，此處又稱爲應力圖。

第 61 圖表示上述屋架之進化，其中除兩個人字樑外，另加一大樑 CD，用以承擔人字樑之向外推力，使成功一種自助之



第　61　圖

構架，不必再藉助於左右牆頭之力。凡屋架成如此結構者，其兩端抗力並無橫的分力，只有垂直之力 R_1, R_2，而此垂直抗力對

於 P_1 及 P_2 兩載重將生如何影響，實有討論之價值也。

今試任取一端而研究之，如圖中之(a)。假設 E 爲一施力點，受 R 及 P_1 二力之作用，其中 P_1 爲在該點之載重；R 爲因[illegible]之載重而生於該點之總抗力，二力係在同一直綫上而方向[illegible]相反。於是作用於 E 點之淨力實等於$(R-P_1)$，命之爲 R_1，[illegible]爲在屋架左端之抗力。此處有須注意者，卽凡屋架兩端只有[illegible]直抗力時，則作用於兩端接縫之垂直載重將與各部材之應力[illegible]發生絲毫影響，故計算時可以棄置不論，（因之圖中只以虛綫[illegible]示之）。惟在設計支牆或支柱時，則 P_1 必須算入，垂直之力必等於 R_1 與 P_1 之和，絕不可用 R_1 單獨之值也。

推算抗力 R_1, R_2 及各部材之應力，法殊簡便。以頂點爲起始，作 ab 等於並平行於載重 AB。自 b 作 bd 平行於 BD，自 a 作 ad 平行於 AD。於是 bd 及 da 將分別表示 BD 及 DA [illegible]樑之應力。次再順各接縫之循環次序，而至屋架之右端。因 db [illegible]平行於 DB，ab 表示載重 AB，亦卽等於 R_1 與 R_2 之和。由 d 作 dc 平行於大樑 DC 於是 cd 及 bc 將分別表示大樑之應力 CD 及抗力 R_2，而 ca 將表示抗力 R_1。

上述之例，情形十分簡單，故欲區別何者爲發生引力之繫柱，[illegible]爲發生壓力之斜角撐，頗屬易事。惟屋架結構苟較複雜，則[illegible]別亦將不易，欲明任一部材內部應力之性質，勢必用特別方法。

讀者苟能瞭解下述法則，解決自易。

試就第 61 圖中屋架之頂點而言，此處共有 AB, BD, DA 三力，沿三個不同方向作用，成一極簡單之平衡狀態。此三力在力綫圖中卽爲三角形 abd 所代表，三角形之三邊依循環次序卽表示三力之意識。今已知載重 AB 之意識乃向下者，故 ab 綫之次序應爲自 a 至 b。於是其他兩邊將爲自 b 至 d 及自 d 至 a，此乃表示 BD 樑之應力應爲自右向左作用，而 DA 樑之應力應爲自左向右作用者也，姑分別以虛矢綫 H_2 及 H_1 表示其方向。故在屋架之頂點，BD, DA 二樑之內部應力實爲向頂點推壓者。根據同一理由，在屋架之兩端，二樑之內部應力亦爲向兩端推壓者。在 BD, DA 二樑上，因得兩個沿同一直綫而外向之矢頭，有如第 62 圖 (a) 所示，故其內部應力應爲一種壓應

第 62 圖

力。若矢頭係向內者，如圖中之 (b) 所示，則該部材之內部應力將爲一種引應力。

讀者如不明壓力與壓應力及引力與引應力之分，則驟視上圖所示之矢頭，將疑其方向與其所示之意義適相反也。須知所謂應力者，乃物體受有外力時內部所發生之抵抗力也，故應力之

向與外力實相反。因之,在上圖中,凡矢頭表示向外者,其外力必內向,故爲一種壓力,反之,凡矢頭向內者,其外力必外向,故爲一種引力。

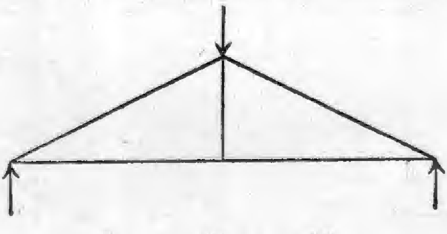
又由力綫圖中觀之,表示大樑 *DC* 之力綫 *dc*, 其方向係自 *d* 至 *c*,(就屋架左端而言)故大樑上之矢頭應爲內向,因之,其外力應爲外向,表示一種引力焉。

各部材之應力用圖解法求得之後,可卽立成一表,以爲計算材料之根據。下表爲一種最簡明之格式。

部材	*BF*	*CG*	*EF*	*FG*	*GH*	*HE*	
壓力	6.1	5.8		0.8			公噸
引力			5.4		3.2	2.9	公噸

53.　簡式正柱屋架

此種屋架爲上述一式之變形,係由屋架之頂點至大樑之中心,多裝置一支柱,稱爲正同柱。此種正同柱,如用圖解法研究之,

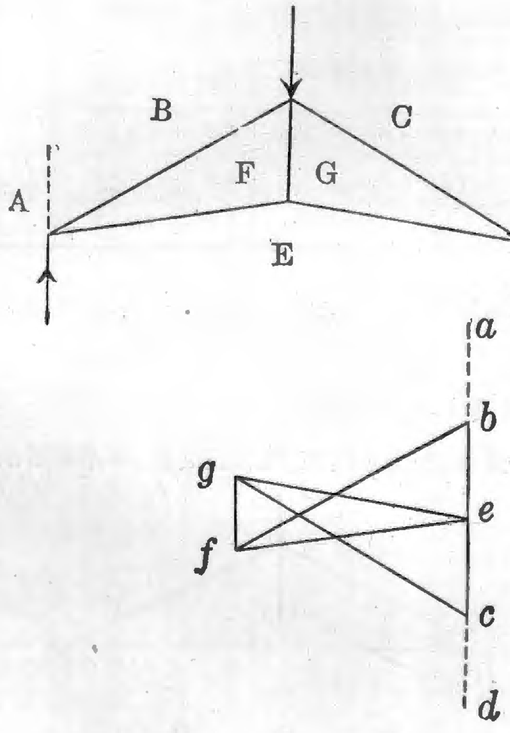


第　63　圖

其應力將等於零，實乃一贅冗部材，其作用不過加強大樑之結構耳(見第 63 圖)。

正同柱之高多爲屋架寬度之五分之一，惟因在人字樑中間各點之桁條並未受到任何斜角撐之支持，故此種構架仍不適宜於較大之寬度，其最大寬度不宜超過 5 公尺。

54. 瑞士式屋架



第　64　圖

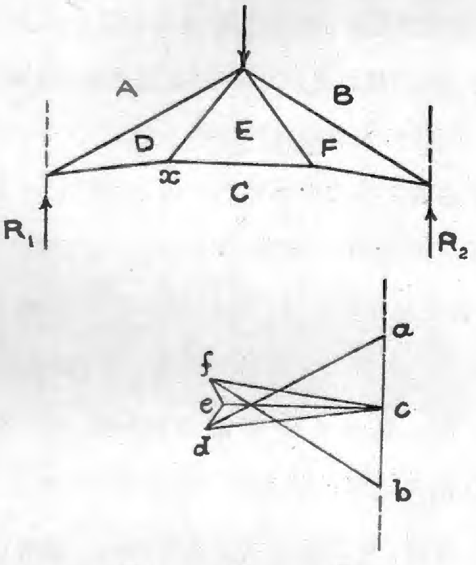
如將第 63 圖中之大樑分爲兩部材，成傾斜之勢（本書以後將稱之爲斜梁），如第 64 圖中所示，則正同柱將不再爲一贅冗部材矣。此種構架稱爲瑞士式屋架，其目的乃在增加屋內之空間。欲求此種構架之應力圖，可先算得 AB, BC 及 CD 三力，而後作 ab, bc 及 cd 三綫，使分別等於以上三力（注意——AB 及 CD 可以棄置不計，故圖中特以虛綫表示之）。今因屋架上載重係屬勻稱，故兩端之抗力亦必相等，因之，若將 bc 綫均分於 e，則 ae 及 ed 兩綫將表示兩抗力之大小。

今試先就屋架左端而言，已知應力圖中之 ea 平行並相等於抗力 EA，又 ab 平行並相等於載重 AB。於是由 b 作 bf 平行於人字樑 BF，再由 e 作 ef 平行於大樑 EF，並使與 bf 相交於 f，則依循環次序，bf 及 fe 兩綫將分別表示 BF 及 FE 二樑之應力。同樣，可求得力之多邊形 $cdeg$，其中 eg 及 gc 兩綫將分別表示 EG 及 GC 二樑之應力。聯結 gf，該綫將表示正同柱 GF 之應力。所有各應力均可就此應力圖用尺量得之，而後按照前述格式立成一表。

此種構架適宜於五六公尺之寬度，其中正同柱之高度普通約爲寬度之五分之一，而大樑之中間則較兩端高起約及寬度之三十分之一。

55. 複式瑞士屋架

苟屋架之寬度加大，則上式將不能適用，須用如第 65 圖所



第 65 圖

示之構造，稱爲複式瑞士屋架。欲求此種構架之應力圖，可按上述方法，先求得在屋架左端 R_1 處之力之三角形，如 cad。惟按照求力綫圖之一般方法，屋架左端解決之後，卽應順時針方向，依各接縫循環次序，輪及屋架之頂點。但因作用於此點之力共有五，其中乃有三力之大小未知（卽 BF, FE, ED），故成爲一種不能解決之問題，勢不得不暫爲擱置一旁，姑先研究其他接縫。

茲繼 R_1 之後，且取接縫 x 而研究之。因 cd 爲已知之綫，由 d 作 de 平行於斜角撐 DE，由 c 作 ce 平行於 CE，使交 de 於 e。於是 cde 將爲在接縫 x 處之力之三角形，此一三角形求得之後，則作用於屋架之頂點者，只有 EF，FB 二力爲未知之數，而力之多邊形 $abfed$ 之求得，將不再有若何困難矣。讀者觀於圖中所示，自易明瞭，姑不多贅。

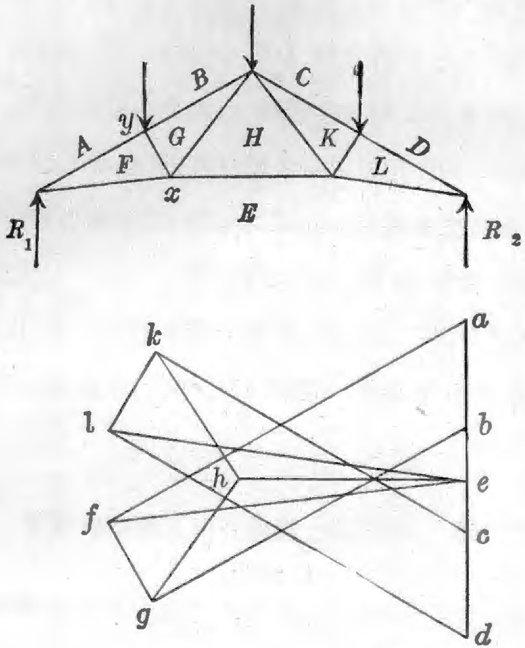
全部應力圖完成之時，cf 綫可作爲覆核之用，因 c，f 均爲已定之點，故若由 c 點作一綫與 CF 平行，則該綫必與 cf 綫相吻合也。

56. 複式瑞士屋架裝有正角形斜撐者

第 66 圖所示，係於複式瑞士屋架中加入兩根斜撐，用以支撐人字樑之中點，其方向係與人字樑成正角形。

在此種構架中，欲作應力圖，其困難情形亦正與前述相彷，但若仍按前法，繼左端 R_1 及接縫 y 之後，且先研究接縫 x，而後再及頂點，則問題當較易解決。

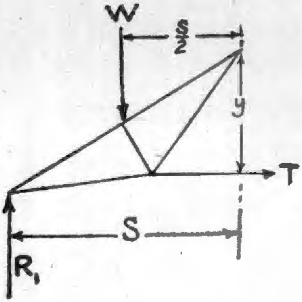
如圖，eaf 表示在左端 R_1 處之力之三角形，由 b 作 bg 平行於 BG，由 f 作 fg 平行於 FG，$abgf$ 將表示在接縫 y 處之力之多邊形。於是在接縫 x 處，只有 GH 及 HE 二力之大小未知，其力之多邊形，如 $fghe$，自易求得。



第 66 圖

上式爲一種最先用鐵料構造之屋架，最適宜於寬度在十公尺左右之用，其優點在所有各部材苟能依其內部應力之適當比例設計者，則可用最經濟之材料焉。

另有一法雖非純屬圖解，似可應用。法先用下述計算之式，求得 HE 內部之引應力，由此求定 h 點，則其餘問題自可迎刃而解。



第 67 圖

命 T=HE 內部之引應力,(第 67 圖)

y=由頂點至 HE 之垂直距離,

$2S$=屋架寬度,

W=在每一接縫之載重。

今求各載重對於頂點之力率,得

$$R_1\times S=\left(W\times\frac{S}{2}\right)+(T\times y),$$

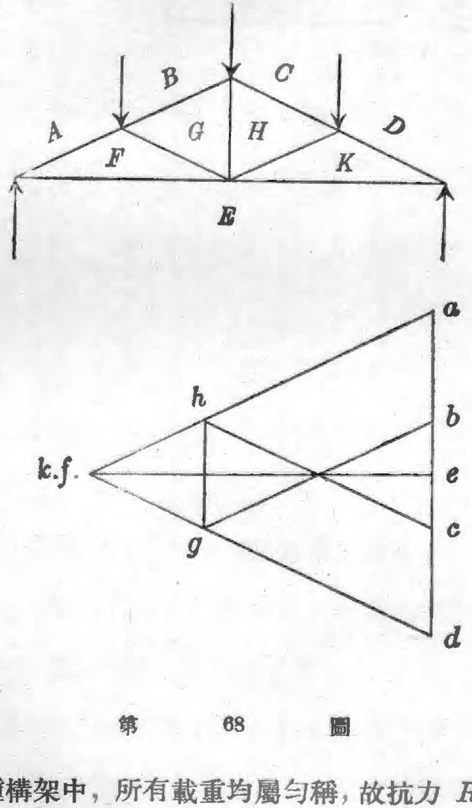
$$\therefore\quad T=\frac{(R_1\times S)-\left(W\times\frac{S}{2}\right)}{y}=\frac{S}{y}\left(R_1-\frac{W}{2}\right)$$

求得此引應力 T,即於應力圖上用尺量得 eh 距離,使等於 T, 於是 h 點可以求定。

在此種構架中,頂點高度普通約爲寬度之五分之一。

57. 簡式正柱屋架裝有單斜角撐者

簡式正柱屋架荷裝置兩根斜角撐，如第 68 圖所示，則寬度可增至八九公尺。



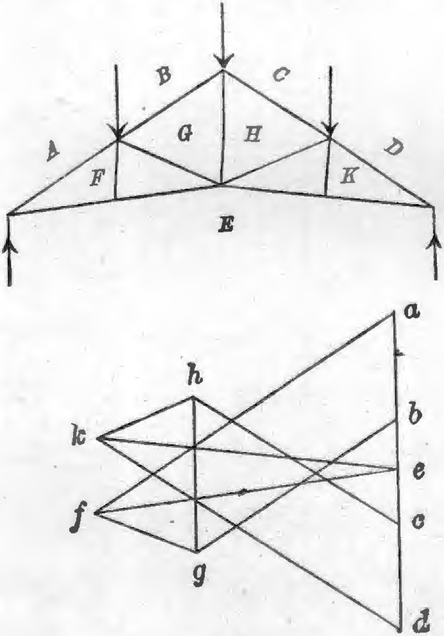
第 68 圖

在此種構架中，所有載重均屬勻稱，故抗力 R_1 及 R_2 應各等於 $\frac{1}{2}$ $(AB+BC+CD)$。於是在應力圖中，ea 及 de 將分別

代表 R_1 及 R_2,而 e 將爲 ad 之分中點。至其他各接縫苟依循此次序而硏究之，則作用於各該接縫之力，其未知之數均在兩個以下，故頗易解決。此中有應注意者，卽應力圖中之 kf 兩點恒相吻合。故硏究至在載重 CD 下之一接縫時，如作 hk 與 HK 平行，則該綫必與已有之 hf 綫適相吻合，因此，可用以覆核應力圖有無錯誤。

58. 正柱屋架裝有斜角撐及斜樑者

第 69 圖所表示之正柱屋架，其大樑已非水平而成爲傾斜，



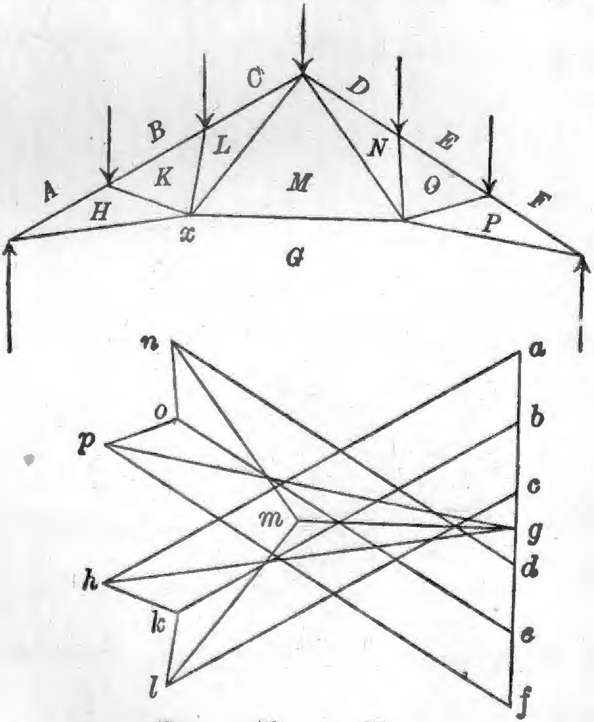
第　69　圖

此種結構所以使屋內可得多餘空間。至應力圖之解法，讀者見圖自明。惟 k, f 兩點此時已不再吻合矣。

此種構架如寬度超過十公尺，宜另用兩根繫柱，如圖中虛綫所示。連結人字樑及斜樑之中點，以資加強斜樑之結構。

59. 瑞士式屋架裝有兩對斜角撐者，或稱比國式屋架

第 70 圖表示瑞士式屋架更進步之改造，或稱爲比國式屋



第 70 圖

架,其中裝有兩對斜角撐,使人字樑可以分支於四點。

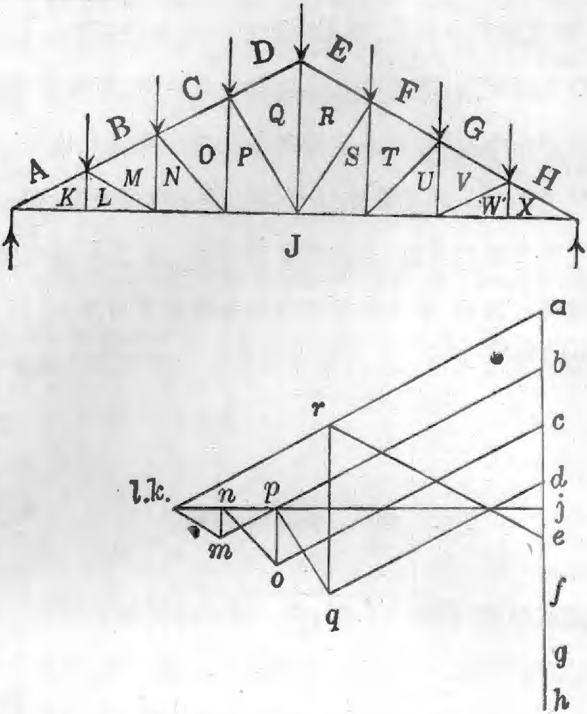
設計此種屋架,係先將人字樑均分爲三段,而後依規定 MG 線之高度作一水平綫。由人字樑之中點作一垂直分中綫,使與此水平綫相交於 x, 於是繫柱 LM 及 HG 均可求定。聯結 x 與人字樑中間之兩均分點,卽爲斜角撐 HK 及 KL 應取之方位。此種結構雖較複雜,但力綫圖之作法並無困難可言。

屋架之寬度可自六公尺至十五公尺。屋架之間隔多爲三公尺。

60. 英國式屋架

英國式屋架,如第 71 圖,乃一種正柱屋架之裝有三對斜角撐者,其寬度可達二十公尺。此種構架之應力圖,其作法亦頗稱易事。圖中所示只屬屋架之左半部,因屋架本爲勻稱,故應力圖亦應成勻稱,左右兩面各相當部材之應力應互相等也。

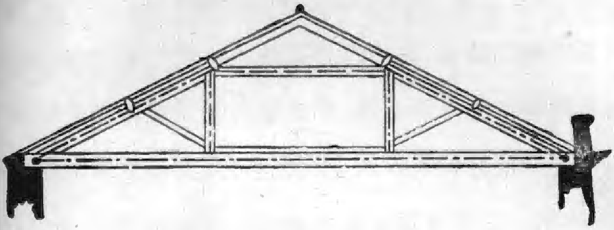
屋架中 KL 及 WX 兩柱實爲贅冗部材。其作用不過欲加強大樑之結構而已,其中並無應力發生。故在應力圖中 kl 及 wx 應等於零,易言之,卽 k 與 l 兩點應互相吻合,w 與 x 兩點亦應互相吻合也。此種屋架又稱爲哈愛式,其中繫柱均用鋼桿,其餘各部材均爲木料。



第 71 圖

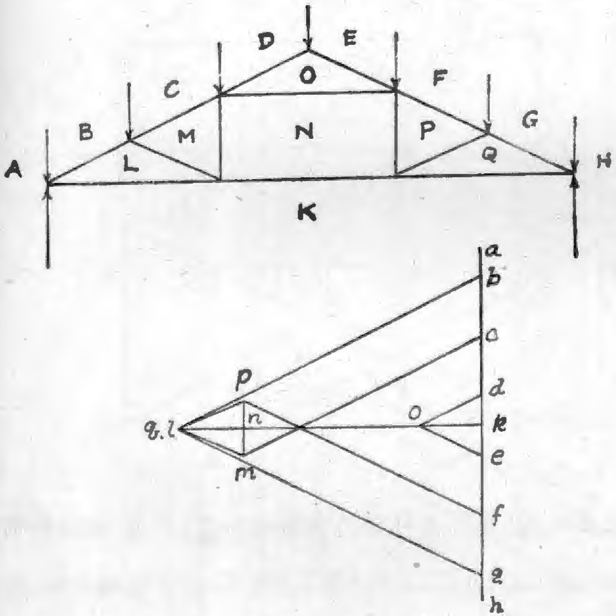
簡式副柱屋架

第 72 圖表示一種稱爲副柱式之屋架，其中 X,X 兩部材即稱爲副柱。此種屋架之寬度可達十一二公尺，其所用材料多爲木。第 72 圖(A)則表示此種屋架之應力圖。由圖中觀之，將見此種結構實爲兩種形式不同之框架所組成，其兩副柱中間之一



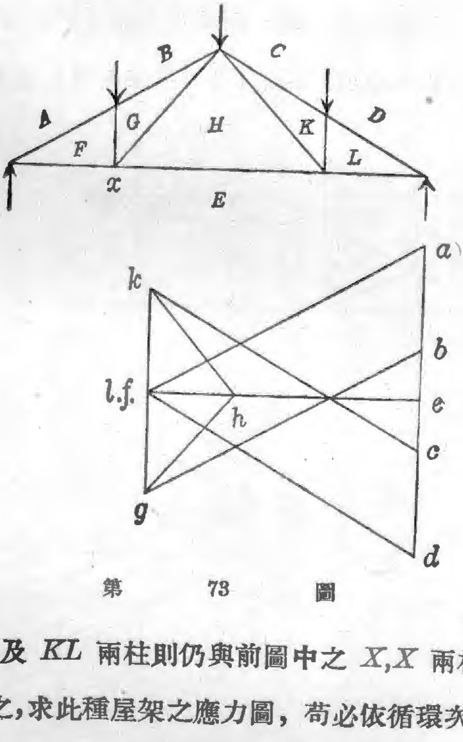
第　72　圖

部分實形成一不健全式框架，而兩旁之部分則均爲健全式框架。因之，此種結構，苟就理想論之，萬一屋架兩邊之載重不能勻稱，



第　72　圖　(A)

則將有發生變化之虞。但實際並不如此，因所用大樑普通均頗粗大，加有人字樑之結合，其力實足以防止中間框架之變形而有餘也。但如所用材料非木而爲鐵，則鐵製大樑實難保中間框架不發生變形，中間一部分將有採用支柱之必要。其最簡單之構造莫如第 73 圖所示，係將中間框架之過樑改爲兩根支柱，如 GH 及



第 73 圖

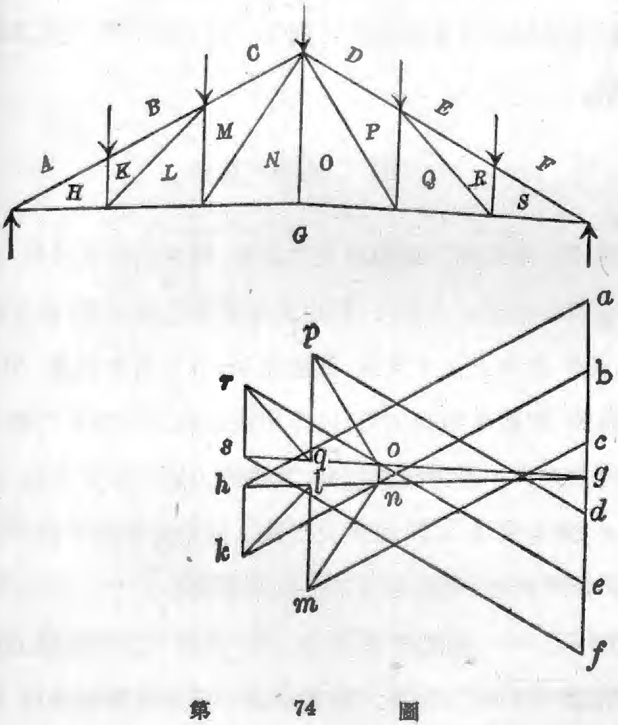
HK，至 FG 及 KL 兩柱則仍與前圖中之 X,X 兩柱性質相等。

前已言之，求此種屋架之應力圖，苟必依循環次序，繼在載重 AB 下之接縫之後；即研究頂點之應力，則因其中有三個未

知之數，困難問題自將發生，但若先研究在接縫 x 處之應力，則問題將易於解決。

62. 複式副柱屋架

第 74 圖爲一種複式副柱屋架，又稱爲勃熱提式屋架，如將此圖與第 71 圖之英國式屋架驟加比較，將見其外表頗稱相似，



第　74　圖

但若詳細研究之，則其性質實大不相同。在此種屋架中，所有垂直部材，其內部應力均屬壓力，所有傾斜部材，其內部應力均屬引力；而在英國式屋架中，其情形正與此相反，所有垂直部材，其內部應力均屬引力，所有傾斜部材，其內部應力均屬壓力。再者，在副柱屋架中，所有傾斜部材均係自下端向內傾斜，而在英國式屋架中，所有傾斜部材則均係自下端向外傾斜，此其所以致成內部應力不同之原因也。

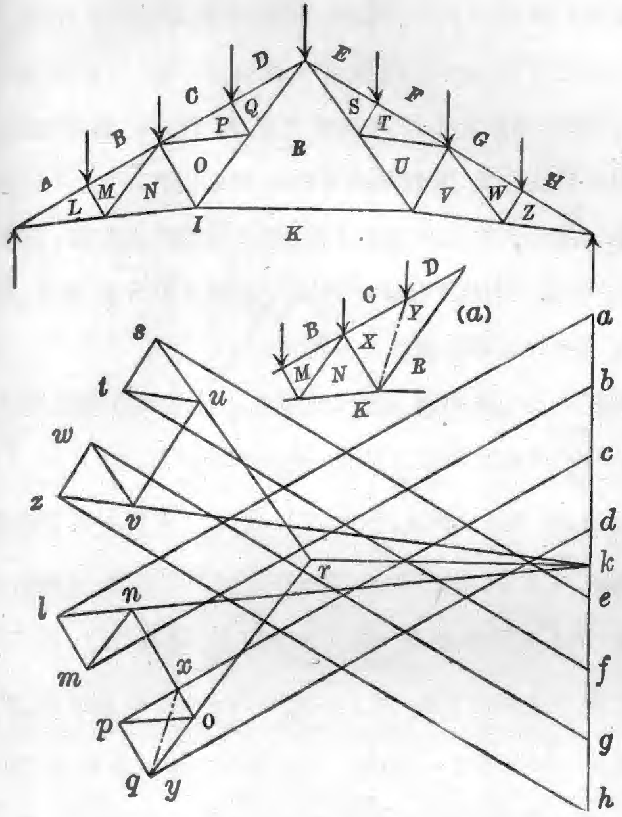
副柱屋架雖有多種樣式之變化，但其應力圖作法之原則實無二致。

63. 法國式屋架

第 75 圖表示一種頗通用之屋架，稱為法國式屋架，其寬度可自十四公尺至十八公尺。欲求此種構架之應力圖，在屋架之左端及 LM 部材之上下兩端，頗屬易事，惟及至在載重 BC 下之一接縫時，困難問題發生焉。因作用於該點之力共有六個，其中只有兩力之大小及方向為已知，其餘四力則已知其方向，並不知其大小（如先解決 LM 部材之下端，則未知之數可減少一個）。

欲解決此種困難，以下三法均可採用。

第一法——係假設 MN 及 OP 兩部材之內部應力適相等（此種情形惟有屋架兩邊之載重成為勻稱時方屬眞確）。根據此



第　75　圖

一假設，即可用最簡單之幾何學法則求定 p 點：因 l,m 均爲已知之點，lm 又垂直於 bm，於是延長 lm，使交與 CP 平行之 cp 綫於 p，即得所求之 p 點。由 m 作 mn 平行於 MN，使交 kl 於 n，則 mn 將表示 MN 部材之應力（如 LM 部材

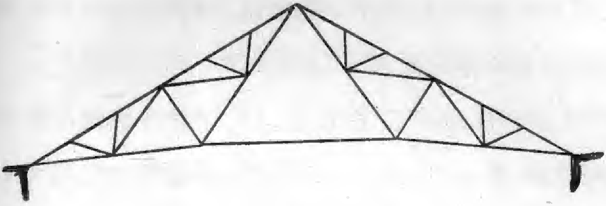
之下端先已解決，則 mn 實爲一已知之數)。由 n 作 no 平行於 NO，由 p 作 po 平行於 PO，使交 no 於 o，於是 no 及 op 將分別表示 NO 及 OP 兩部材之應力，而 op 並將等於 mn。此一問題解決之後，其餘各部分將不再成爲問題矣。

第二法——係按照前述方法，先取屋架之左半部，計算各載重，對於頂點之力率（見第 67 圖），求得水平大樑 KR 之應力以定 r 點，於是其他問題自易解決。

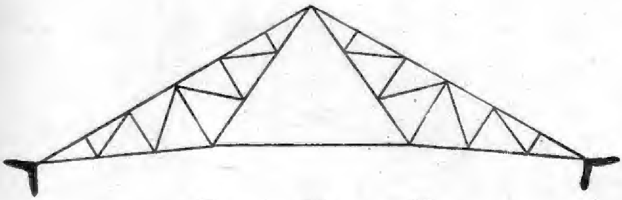
第三法——係利用一種代替框架，此法爲巴爾教授所最先引用，乃一種最完善之方法也。茲且詳述於下。

如第 75 圖(a)所示，法將 OP 及 PQ 兩部材暫行取開，另用一部材 XY 代替之。如此，則在載重 BC 下之一接縫，載重 BC 及 BM, MN 兩部材之應力均爲已知，只餘 NX 及 XC 兩部材之應力爲未知之數，力之多邊形 $bcxnmb$ 自易求定。其次輪及在載重 CD 下之一接縫，可依同樣方法，求定力之多邊形 $cdyxc$。終乃輪及接縫 I，求得力之多邊形 $knxyrk$。茲仍將 OP 及 PQ 兩部材放入原位，先研究接縫 I，而後再輪及在載重 BC 及 CD 下之兩接縫，自不致再有困難可言。

此種法國式屋架，如寬度超過二十公尺，則構造方法須略加變更，有如第 76 及 77 兩圖所示。



第 76 圖

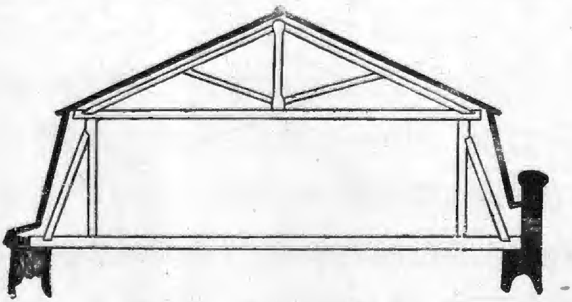


第 77 圖

讀者苟已明瞭前述之代替框架法，則以上兩式自不難仍用此法解決之。

64. 曼薩式屋架

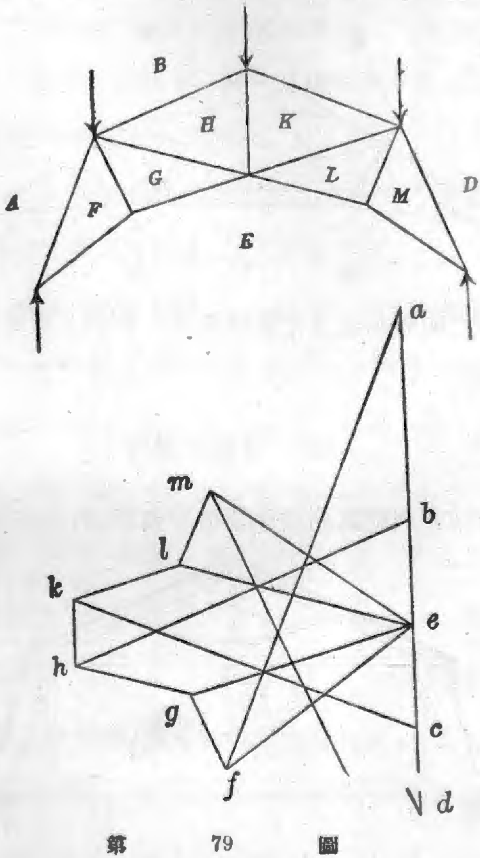
此種屋架亦與前述副柱屋架情形相彷，有用木製者，如第78



第 78 圖

圖所示，有用鐵製者，如第 79 圖所示。兩圖之外緣雖並無不同之處，但其內部結構則頗有出入。

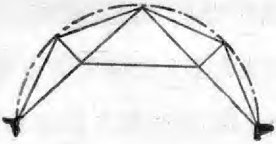
第 79 圖中所示構架，在載重 AB 下之一接縫，因其中有三個未知之數，應力之求得似略有問題，但讀者如先研究 FG 部



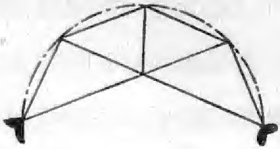
第　79　圖

材之下端，而後再及其上端，則問題自易解決。

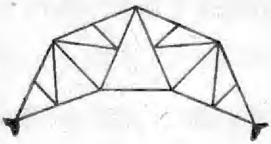
曼薩屋架尚有其他多種樣式，如自第 80 至 83 圖所示，其



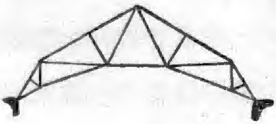
第　80　圖



第　81　圖



第　82　圖



第　83　圖

應力圖之作法，可由讀者自求之，姑不多贅。

習　題

1. 今有一簡式屋架，如第 61 圖所示，其寬度等於 5 公尺，高度等於 1.2 公尺。屋頂材料等於 200 公斤之靜重作用於屋架之頂點。試求兩人字樑內之壓應力及大樑內之引應力。

2. 有一瑞士式屋架，如第 64 圖所示，其寬度等於 6 公尺，高度等於 1.5 公尺，斜樑之中點較兩端高起 2 公寸。屋架頂點之載重等於 400 公斤。試求各部材之應力並列成一表。

3. 有一倉庫，其頂棚係用複式瑞士屋架，如第 65 圖，上

鋪松板及石砥瓦。屋架之寬度爲 7 公尺，高度爲 2 公尺，水平大樑較兩端高起 3 公寸。屋架之間隔爲 2 公尺。松板厚 $\frac{3}{4}''$，石砥瓦每平方公尺重 35 公斤。試求各部材之應力並列成一表。

4. 今欲建一小工廠，定用複式瑞士屋架裝有正角形斜撐者，如第 66 圖所示，上鋪上等玻璃片。設屋架之寬度爲 9 公尺，高度爲 2 公尺，水平大樑較兩端高起 3 公寸。屋架之間隔爲 2 公尺。玻璃片每平方公尺重 25 公斤，片下所釘木條每平方公尺重 8 公斤。試求各部材之應力。

5. 有一機車房，其屋架係用比國式，如第 70 圖，寬度爲 12 公尺，高度爲 2.4 公尺。水平大樑較兩端高起 4 公寸。屋架之間隔爲 3 公尺。屋頂鋪 1″ 厚之松板，上用石砥瓦，其重量爲每平方公尺等於 35 公斤。桁條及其附件之重量爲每平方公尺等於 6 公斤。設將屋架本身之重量加入計算，試求各部材之應力，並須將繫柱及斜角撐分別清楚。

6. 在前題中之頂棚，苟將寬度改爲 18 公尺，並採用英國式屋架，其高度爲 4.2 公尺，水平大樑較兩端高起 6 公寸。屋架之間隔及屋頂材料之重量均仍如前數。試求各部材之應力。

7. 有一複式副柱屋架，如第 74 圖，其寬度爲 14 公尺，高度爲 3 公尺。下部大樑係成水平。設在屋架兩端之載重各爲 200 公斤，在其他各接縫者各爲 400 公斤。試求各部材之應力

並列成一表。

8. 有一工廠用法國式屋架建築。屋架之寬度爲 12 公尺，高度爲 2.4 公尺。水平大樑較兩端高起 4 公寸。屋架之間隔爲 2.4 公尺。屋頂材料係用 16 *G* 瓦隴鐵，每平方公尺重 17.5 公斤，桁條及其附件等每平方公尺重 7.5 公斤。屋架本身之重量一併加入計算。試求各部材之應力。

9. 今有一房屋寬度等於 12 公尺，其屋架擬用曼薩式，如第 80 圖所示。設在屋架兩端之載重各爲 300 公斤，在其他各接縫之載重各爲 600 公斤。試求各部材內因於此等載重而生之應力。

10. 設第 9 題中之房屋係採用如第 81, 82, 及 83 圖所示之曼薩式屋架，其在各接縫之載重均與上題所述相同。試分別求得各屋架中各部材之應力。

第八章

非勻稱式屋架

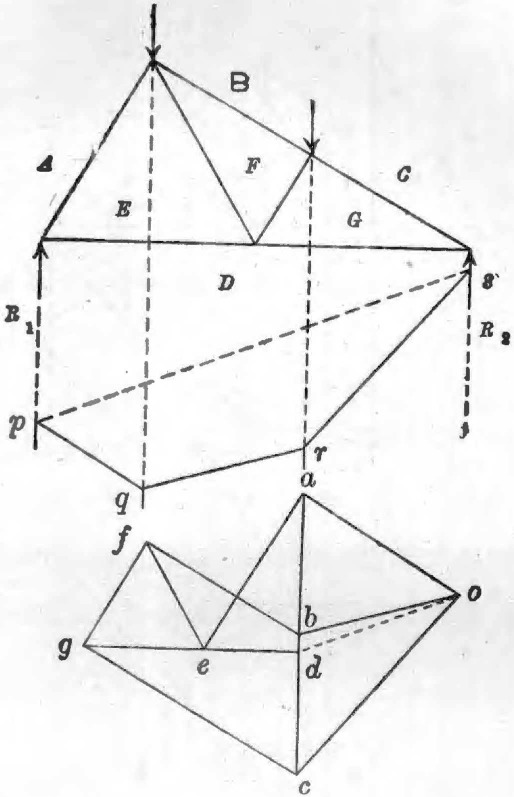
前章所述種種屋架，所有兩邊載重均對其中綫成勻稱之狀，因之，屋架兩端之抗力 R_1 與 R_2 其值常相等，故求得殊易。但若載重並非勻稱，則情形較爲複雜，抗力 R_1 與 R_2 之值已不能再相等。欲求各部材之應力，將不能如前章所述之易，蓋必須另用連鎖多邊形，先求得兩抗力之值，而後方能進行應力圖也。

屋架之成爲非勻稱式，有因各接縫之載重不相等者，亦有因各接縫之間距不相等者。本章將略舉數例分述於下。

65. 鋸齒式或朝北式屋架

此種屋架之形式有如鋸齒，如第 84 圖，因以得名，又因其較短一邊裝有玻璃，面朝北，俾能吸取日光，而免太陽之直射，故又稱爲朝北式。

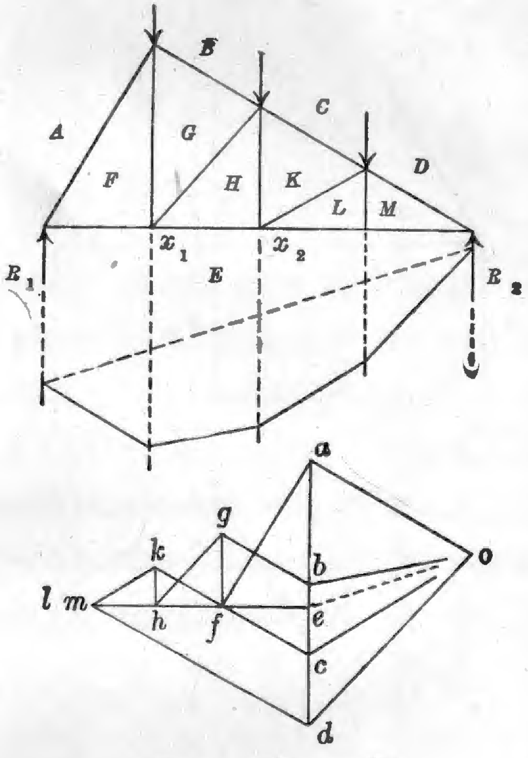
作 ab 及 bc 兩綫使分別等於 AB 及 BC 兩載重。任擇一極點 o，聯結 oa, ob, oc。延長 AB 及 BC 兩作用綫，作連鎖多邊形 $pqrs$，完成 sp 閉合綫。由 o 作 od 平行於 sp，於是 da



第　84　圖

及 cd 將分別表示抗力 R_1及 R_2。既已求得兩抗力之值，則應力圖之解決將無困難可言。

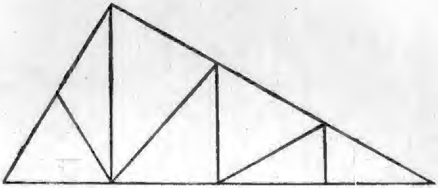
設屋架之寬度加大，則兩邊人字樑實有添置一二斜角撐以資加固之必要。第 85 圖表示較長一邊添置一副斜角撐及繫柱



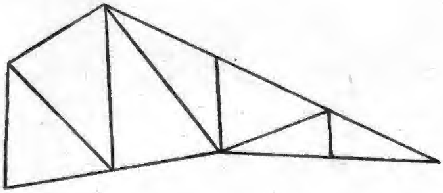
第 85 圖

者。第 86 圖表示較短一邊更添置一根斜角撐者。第 87 圖則表示另一種變形。

解決第 85 圖，仍係先用連鎖多邊形，求得抗力 R_1 與 R_2 之值，而後再作應力圖。惟作應力圖至載重 BC 及 CD 下之聯接縫時，將有困難發生。因在此等接縫處作用之力均有五個，其



第 86 圖

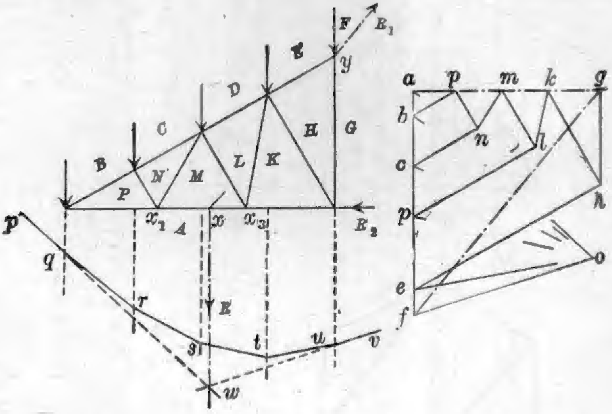


第 87 圖

中乃有三個未知之數，成爲一種不能解決之問題。但若各接縫係照下述次序研究之，即 R_1, AB, x_1, BC, x_2, CD 及 R_2，則困難自可免去。

66. 懸臂式屋架

第 88 圖表示一種稱爲懸臂式之屋架，其上端各接縫分別載有 AB, BC, CD, DF, EF 等重。今欲求得抗力 R_1 與 R_2，必先求得諸載重之合力 R。依第四章第 31 圖所述之法，作連鎖多邊形 $pqrstuv$。延長第一綫及末一綫使相交於 w。通過 w 作一綫平行於 af，此綫將表示所求之合力。於是就大體而言，屋架



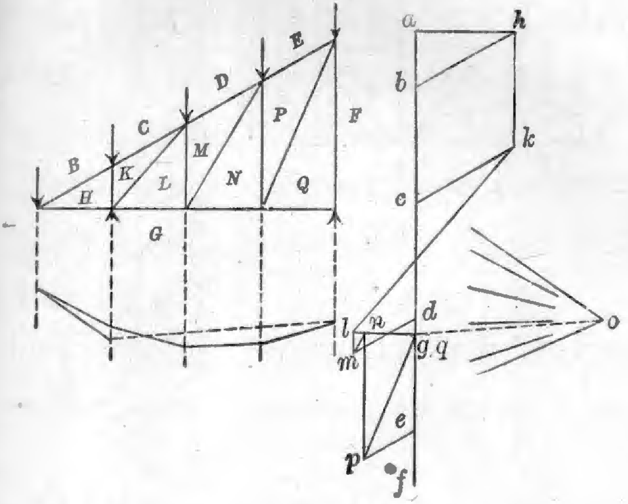
第 88 圖

將受 R_1, R_2 及 R 三力之作用而成平衡。因之,此三力必相交於一共同點。今因 R 爲一垂直綫,R_2 爲一水平綫,其相交之點必爲 x 無疑,於是通過 x 及 y 兩點之綫必爲 R_1 之作用綫。由 a 作 ag 平行於 R_2, 由 f 作 fg 平行於 R_1,於是 fg 及 ga 將分別表示 R_1 及 R_2 之大小。

既已求得 R_1 及 R_2 之値,則應力圖之作法,如依 AB, BC, x_1, CD, x_2, DE, EF, 及 R_2 各接縫之次序,將頗易從事。

67. 懸臂式屋架前面用柱支持者

第 89 圖表示前述一式之變形, 除一端完全裝置於牆上者外,更於前面用一柱支持之。實則此種屋架之稱爲懸臂式, 僅可

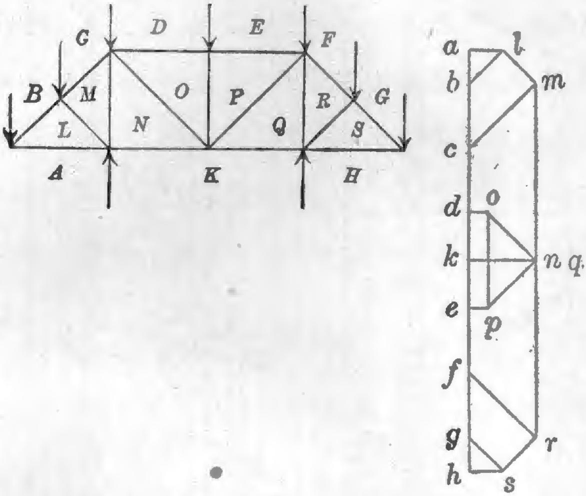


第　89　圖

就其最外一節而言耳。在此種情形下，所有抗力將均成爲垂直，其值用連鎖多邊形頗易求得之。讀者苟由應力圖中觀之，將見在載重 BC 下之一接縫，人字樑及大樑之內部應力忽發生絕大變化：人字樑上 BH 一部材，其內部應力係屬引力；而其他各部材之內部應力則均屬壓力。反之，大樑上 AH 一部材，其內部應力係屬壓力，而其他各部材之內部應力則均屬引力。

68.　車場用屋架

第 90 圖爲車場上常用之一種屋架，其外緣形狀雖較其他式樣又有不同，惟抗力及應力圖之求法初無二致，讀者見圖自明，



第 90 圖

不用贅述。不過在此種構架中，一旦受有風壓作用，其情形將比較複雜，非簡單手續所可解決，本書將於下一章中特加詳述焉。

習 題

1. 有一鋸齒式屋架，如第 84 圖所示，其頂角等於 90°，兩端之角度各爲 60° 及 30°。屋架寬度爲 7 公尺，間隔爲 2.4 公尺。部材 *FG* 爲較長一邊人字樑之垂直平分綫。假設長邊上鋪松板及石硋瓦，每平方公尺重 60 公斤，短邊上裝玻璃片，每平方公尺重 25 公斤。試求各部材之應力並列成一表。

2. 試作一與第 85 圖相仿之屋架，其頂角等於 90°。兩端

之角度各為 60° 及 30°。屋架之寬度為 10 公尺，間隔為 3 公尺。假設屋頂材料與第 1 題中所用完全相同。試求各部材之應力並列成一表。述明抗力 R_1 與 R_2 之值。

3. 試作一與第 86 圖完全相似之屋架，其寬度等於 12 公尺，間隔等於 3 公尺。假設屋頂材料與第 1 題中所用完全相同，試求各部材之應力。

4. 若將第 3 題中之屋架再改為與第 87 圖相似之式，其餘各項情形仍與前題相同。試求各部材之應力及抗力 R_1，R_2之值。

5. 有一懸臂式屋架，如第 88 圖所示。懸臂之長度為 6 公尺。人字樑與水平綫所交之角度等於 30°，並分成四等分，在各接縫處均用斜角撐支持之，斜角撐均與人字樑成垂直。假設屋架之間隔為 2.4 公尺。屋頂材料每平方公尺重 70 公斤。試求抗力之大小與方向及各部材之應力。

6. 假使在第 5 題中之屋架，各接縫之載重係按下述之比例分佈者——

$AB=1$, $BC=2$, $CD=3$, $DE=3.5$, 又 $EF=1.5$。試求抗力之大小與方向及各部材之應力。

7. 設使第 89 圖表示某一鐵路車站所用之屋架，其懸臂之長度等於 12 公尺，前柱與屋架最外一點之距離為 3 公尺。

屋架之間隔爲 3 公尺。屋頂材料每平方公尺重 70 公斤。試求抗力之大小及各部材之應力。

8. 有一車場用屋架,形式有如第 90 圖所示,其全寬爲 12 公尺,高度爲 3 公尺, 兩柱之距離爲 6 公尺。屋架之間隔爲 3 公尺。假設屋頂材料每平方公尺重 60 公斤,試求各部材之應力。

第九章

風壓

69. 風壓之計算

以前所述屋架上之載重僅屬屋頂材料及屋架本身之重量，其性質爲靜定，其所生於屋架之影響本有定限，故各部材之應力頗易計算。惟屋頂露出天空，時經風雨，當大風之襲來，其壓力實大過靜重若干倍，故各部材之應力，由於靜重而生者實遠不如由於風壓而生者之大。此種情形，在我國北部大風常臨之地帶爲尤然。因之，設計屋架不可不將風壓加入計算。

惟風之性質頗不相同，自最輕微之靜風至最酷厲之颶風，故其壓力亦大有出入，加之尙有其他種種原因，亦能影響於風壓。因而此種問題頗爲複雜難解，欲求得一完全數學的解法，以適合實際情形，實不可能。吾人今日所能者，不過藉試驗室之試驗及實地之經驗，假定一種公式，以爲計算之根據耳。

今試假設有氣流一陣垂直射擊於一平面之上，並假設平面之面積實大過此一陣氣流之面積，於是生於此平面上之風壓，可

用下式求得之。

命 P＝風壓，每平方公尺之公斤數，

v＝風速，每秒之公尺數，

W＝每秒每平方公尺所射擊之空氣重量，公斤數，

w＝空氣重量，一立方公尺之公斤數。

並假設空氣射擊於平面上後，其垂直於此平面之速度已等於零。於是按照牛頓運動第二定律：

動量之變化等於力積，因得

$$\frac{W}{g}\times v=P\times t。$$

但本例所述之氣流，係以一秒之時間而言，故 t＝一單位，於是上式應改爲

$$P=\frac{W}{g}\times v$$

易言之，即每平方公尺之風壓實等於發生於該面積上之動量每秒之變化。

吾人今茲所討論者，乃一平方公尺之面積及每秒 v 公尺之空氣速度，因之，每秒每平方公尺面積上所射擊之空氣，將有 v 立方公尺之多。

∴ 每秒所射擊之空氣重量 $=w\times v$ 公斤。

$=W$ 公斤

今動量每秒之變化$=\dfrac{W}{g}\times v$

$$=\frac{w\times v}{g}\times v=\frac{wv^2}{g}$$

將 $w=1.28$ 公斤及 $g=9.80$ 公尺之值分別代入上式之中，因得

動量每秒之變化$=\dfrac{1.28\times v^2}{9.80}=.131\,v^2$

其中 $v=$空氣速度，每秒之公尺數。

$\therefore\quad P=.131\,v^2$ 公斤/平方公尺。

易言之，即垂直射擊於一平面上之風壓與其速度之平方成正比例。

例如疾風之速度爲每秒 14 公尺，若依上式則每平方公尺之風壓將爲

$$.131\times14\times14=25.7 \text{ 公斤。}$$

惟據斯湯屯博士在英國國立理化試驗室中所得之經驗，認爲由上式求得之風壓，其值未免過大。依氏之意見，風壓應依下式計算，

$$P=.079\,v^2 \text{ 公斤/平方公尺。}$$

氣流射擊於任一建築物上，其向風一面，因適當其衝，固受到直接風壓，但其背風一面，因受到吸收影響，對於風壓亦發生重要關係。建築物之面積愈薄，則由於此種吸收影響而生之風壓

將愈大,反之,建築物順氣流方向之長度增加,則此種吸收影響將急速減小。

屋架之坡度對於風壓亦有相當關係,坡度愈大,則在背風一面之吸收影響將隨之而加大,因之,在向風一面之風壓亦將增加。再者,房屋四圍有其他建築物與否,對於風壓亦頗有關係。

70. 最大風壓

設計屋架及橋梁,對於風壓均取其最大值。英國習慣係以每平方英尺等於 40 磅為準則(約合每平方公尺 200 公斤),此一數值係用 $P=.131\ v^2$ 公式算得颶風(其速度為每小時 90 英里)所生之壓力;美國習慣係以每平方英尺等於 30 磅為準則(約合每平方公尺 150 公斤),此一數值係用 $P=.079\ v^2$ 公式算得颶風(其速度為每小時 100 英里)所生之壓力。此種每小時 90 英里或甚至 100 英里之颶風,在我國殊屬罕見,且英國之標準未免過高,故本書將依美國之標準,以為計算之根據。

以上所討論之風壓,均係假設垂直於其所射擊之平面,惟實際情形並不如此,風力之方向多為水平,而屋架之面積多為傾斜(橋梁之面積則成垂直)。因之,風壓實係斜射於屋架之上,吾人研究時須將其分解為兩個分力:一與屋架之面積成垂直,一則與之平行。後一分力為數極微,可以棄置,前一分力則為吾人所欲

討論者也。

計算此種垂直分力，多用一種實驗公式，稱爲胡通公式如下：

$$P_n=P(\sin\theta)^{1.84\cos\theta-1}$$

其中 P＝射擊於與其方向成垂直之平面上之風壓，每平方公尺之公斤數。

P_n＝射擊於與其方向成傾斜之平面上之垂直分力，每平方公尺之公斤數。

θ＝平面之傾斜角度。

試舉一例於下：

例　題

今有一水平向吹來之颶風，其速度爲每小時 160 公里，射擊於與水平綫成 35° 傾斜之面積上。試求該面積上之垂直分壓力每平方公尺之公斤數。

颶風之速度＝160 公里/時。

於是　壓力　$P=150$ 公斤/平方公尺。

$$P_n=P(\sin\theta)^{1.84\cos\theta-1}.$$

$$\sin\theta=\sin 35^\circ=0.57,$$

又 $\cos\theta=\cos\ 35^\circ=0.82;$

$$\therefore\quad P_n=150\times(0.57)^{(1.84\times0.82)-1}$$

$$=150\times(0.57)^{0.5}=150\times0.756$$

$$=113\text{公斤/平方公尺。}$$

玆且將在各種坡度之屋架上垂直分壓力之值列表於下:——

屋架之坡度	$P=150$	$P=100$
5°	25	17
10°	50	34
15°	73	48
21°48′($\frac{1}{5}$ 流水)	99	65
26°34′($\frac{1}{4}$ 流水)	112	70
30°	120	80
33°41′($\frac{1}{3}$ 流水)	127	85
40°	134	89
45°($\frac{1}{2}$ 流水)	142	95

據天文台之觀察,風之種類,依其速度之高低,自每秒在 0.3 公尺以下之無風至每秒在 33.5 公尺以上之颶風,共分爲十三級,其分類法如下:

說　明	速度 公尺/秒	說　明	速度 公尺/秒
無　風	0.3 以下	強　風	10.8—13.8
軟　風	0.3—1.5	疾　風	13.9—17.1
輕　風	1.6—3.3	大　風	17.2—20.7
微　風	3.4—5.4	烈　風	20.8—24.4
和　風	5.5—7.9	狂　風	24.5—28.4
清　風	8.0—10.7	暴　風	28.5—33.5
		颶　風	33.5 以上

屋架上之活重，除風壓以外，積雪亦佔一重要部分。但依一般情形，颶風與雪罕有同時交加者，故屋架受有最大風壓時，多不致再受積雪之壓力。吾人設計屋架，即根據此種情形，只計最大風壓，不再算積雪。

71. 由於風壓而生之應力計算法

欲求構架上由於靜重與活重聯合而生之應力，共有兩種解法可用：或先將靜重與活重結成一合力，再求得此種合力對於構架之影響。或先分別求得靜重與活重對於構架之影響，再將兩種影響結合之，求其最大應力。茲且先將第二種解法詳述於下。

解決此種問題，首須求得作用於構架上之總風壓，其計算法如下：

命　L＝人字樑之長度，以公尺計。

p＝屋架之間隔，以公尺計。

P_n＝垂直分壓力，每平方公尺之公斤數。

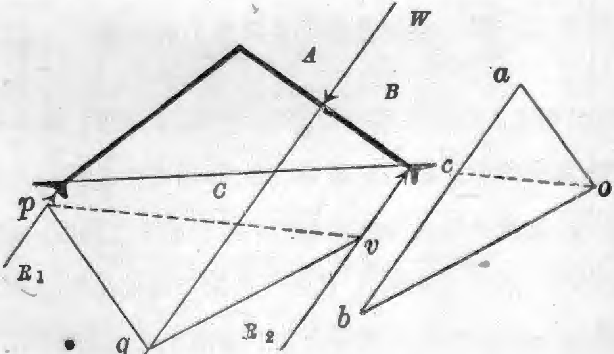
W＝在任一屋架上之總風壓，以公斤計。

於是 $W=L\times p\times P_n$ 公斤。

此一載重應平分於該面人字樑之各接縫上。設命 N 爲人字樑之節數，則在兩端接縫（卽屋架之頂點及牆端）之載重將各爲 $\frac{W}{2N}$ 公斤，在其他中間接縫之載重將各爲 $\frac{W}{N}$ 公斤。

第二步須求得兩端抗力 R_1 與 R_2。兩端抗力，其大小及方向，依屋架兩端支持法之不同，發生三種不同情形如下。

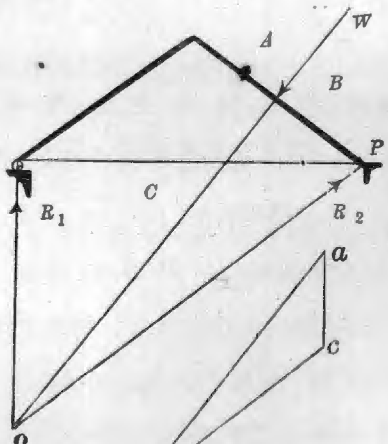
第一例——屋架兩端均用螺釘等件固定於牆上者，如第 91 圖所示。在此種情形下之抗力 R_1 與 R_2，其性質究竟如何，實



第 91 圖

不得而知。惟一解決之法只有假定其與風壓之合力 W 平行，並假定風壓之合力係作用於該面人字樑之中點。引長 W 之作用綫，通過兩端接縫各作一綫與 W 平行。作 ab 力綫等於並平行於 W。任擇一極點 o，並聯結 oa 與 ob。在空間 A 內作 pq 平行於 ao，又在空間 B 內作 qv 平行於 bo。作 pv 閉合綫，並由 o 作 oc 與 vp 平行。於是 ca 及 bc 將分別表示抗力 R_1 與 R_2 之大小。

第二例——假定風係由右面吹來，屋架右端係固定於牆上，左端則裝於一滾軸上，如第 92 圖所示。在此種情形下，屋架左



第　92　圖

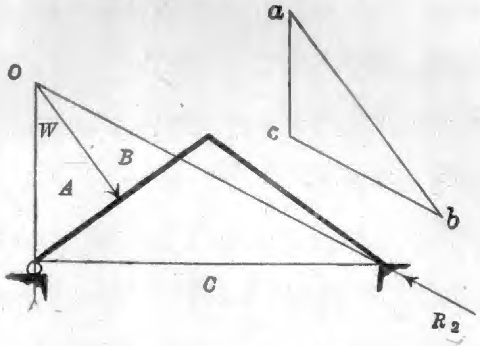
端可以自由運動，因之，可以自行糾正其位置，直待抗力成爲垂直爲度。

根據第二章中所述，若有三力同作用於一物體而成平衡，則此三力必通過一共同點。

今第92圖中所示之框架係在 W, R_1, R_2 三力之作用下而成平衡，而 R_1 及 W 之方向爲已知：R_1 係垂直作用者，W 則係通過人字樑之中點垂直作用於該樑上者，所不知者爲 R_2 之方向，僅知其作用綫通過 P 點而已。但欲適合平衡之情形，R_2 之作用綫亦必通過 W 與 R_1 兩作用綫之交點。延長 W 與 R_1，使相交於 0 點，於是聯結 P,O 兩點之綫必爲 R_2 之作用綫無疑。

吾人旣已求定 W, R_1 與 R_2 之方向及 W 之大小，僅餘 R_1 與 R_2 之大小未知，於是問題將易於解決。作 ab 綫等於並平行於 W，由 b 作一綫平行於 BC，由 a 作一綫平行於 AC。於是 ac 與 cb 將分別表示 R_1 與 R_2 之大小。

第三例——假定風係由左面吹來，屋架之支持法則仍與第二例相同，如第 93 圖。根據上例所述同樣情形，R_1 之作用綫係成垂直，而 W 之作用綫則通過人字樑之中點並與之成垂直。今框架旣在 W, R_1, R_2 三力之作用下而成平衡，故 R_2 之作用綫必通過 W, R_1 兩綫之交點 O。至於 R_1 與 R_2 之大小則可



第　93　圖

仍由力之三角形 abc 中求得之。

因屋架兩端支持法之不同，及因兩邊靜重之不等，計算各部材之應力，應先假定風係由左面(或右面)吹來，再假定風係由右面(或左面)吹來，將兩種情形所得結果加以比較而取其最大值。

[illegible]2. 兩種解法之比較

茲且舉一實例，將前述兩種解法分別表示於下，並將所得結果加以比較。

例　題

有一工廠擬用複式瑞士屋架，如第 94 圖，上鋪松板及石硕瓦。屋架擬用鋼料，桁條則用木料。屋架寬度爲 7.2 公尺，間隔爲 2.4 公尺，坡度爲 30°。其他各載重則如下：

桁條 每平方公尺 10 公斤。

松板 每平方公尺 15 公斤。

石破瓦 每平方公尺 40 公斤。

水平風壓 每平方公尺 150 公斤。

屋架之約重

$$W_1 = \frac{15}{4} l\, p_1 \left(1+\frac{1}{3} l\right)$$

$$= \frac{15}{4} \times 7.2 \times 2.4\left(1+\frac{7.2}{3}\right) = 220 \text{ 公斤。}$$

人字樑之長度(由圖中量得之)＝4.1 公尺。

∴每一屋架所支持之屋頂面積＝2×4.1×2.4

＝19.7 平方公尺。

靜重等於——桁條，19.7×10＝197

松板，19.7×15＝295

石破瓦，19.7×40＝788

1280 公斤。

於是靜重包括屋架自身重量等於

$$1280+220=1500 \text{ 公斤} = W\text{。}$$

∴在屋架兩端接縫之靜重＝$\frac{1500}{8}$＝187.5 公斤。

命之爲 190 公斤。

在中間各接縫之靜重$=\frac{1500}{4}=375$ 公斤。

命之爲 380 公斤。

水平風壓＝每平方公尺 150 公斤$=P$，

$P_n=P(\sin\theta)^{1.84\cos\theta-1}\quad(\theta=30^\circ)$，

$$\log P_n=(1.84\cos\theta-1)\log\sin\theta+\log P$$
$$=\{(1.84\times0.86)-1\}\log 0.5+\log 150$$
$$=(0.58\times\overline{1},699)+2.176$$
$$=(-0,175)+2.176$$
$$=2.001$$

∴垂直於人字樑之風壓 $P_n=$ 每平方公尺 100 公斤。

在屋架之一面之垂直風壓$=2.4\times4\times100$

$=960$ 公斤$=W_2$。

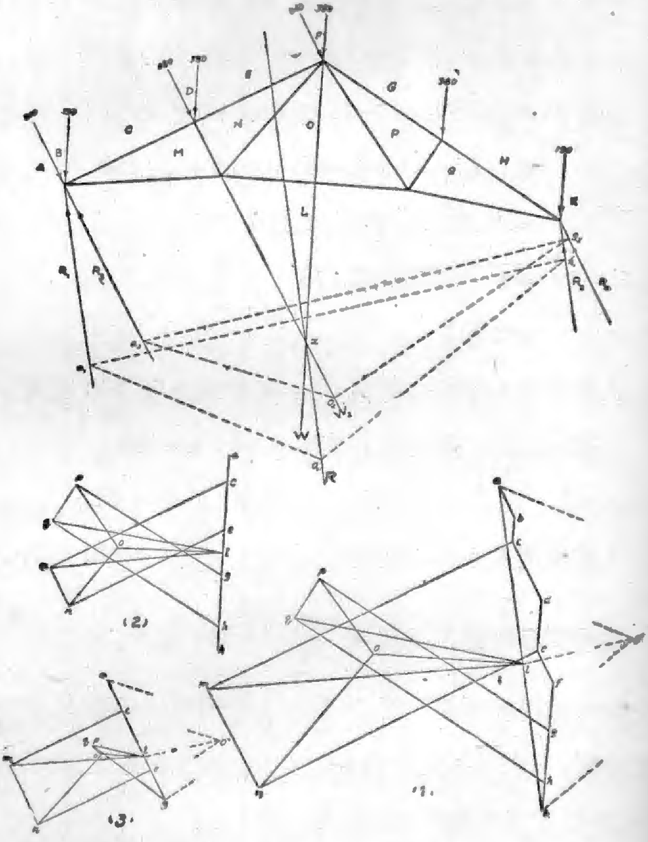
∴在屋頂及兩端各接縫之風壓$=\frac{960}{4}=240$ 公斤，

在中間各接縫之風壓$=\frac{960}{2}=480$ 公斤。

旣已算得靜重與風壓，可卽將其分佈於各接縫上，開始應力圖之繪製，以求得各部材之最大應力。至於屋架之支持法，在本例中，將假定其兩端係固定於牆上者。

玆且先按第一種解法，將靜重與風壓結成一合力，再求得此種合力對於構架之影響。如第 94 圖，命 AB,CD,EF 表示各接

縫之風壓，*BC, DE, FG, GH, HK* 表示各接縫之靜重，其值均已分別註明於圖上。……作 *ab, bc, cd,* …… *hk*,等力綫，如圖中



第 94 圖

之(1)，使分別等於並平行於 *AB,BC,CD,*……*HK*, 等重。聯結

ak，於是 ak 將等於上述諸載重之合力，其傾度則表示此合力作用於該屋架之方向，亦卽 R_1, R_2 二抗力之方向也（因 ab, bc 二力之合力等於 ac; ac, cd 之合力亦卽 ab, bc, cd 之合力等於 ad; 依此類推，故 ak 實等於 $ab, bc, cd, \cdots\cdots hk$ 諸力之合力）。

至欲求 R_1, R_2 二抗力之大小，必先求得合力 ak 之施力點。今因靜重原係平均分佈於屋架之上，故其合力之施力點必在屋架之中心，而其方向則爲垂直，有如圖中所示通過屋頂之綫 W。至於風壓則係垂直作用於屋架之一面，並係平均分佈者，故根據同一理由，其合力必作用於該面人字樑之中點，有如圖中之 W_2。此兩種合力 W 與 W_2 之作用綫將相交於 x，因之，W 與 W_2 之合力 R 亦必通過此點，故通過 x 作一綫 R 與 ak 平行，並作 R_1, R_2 兩綫與 R 平行。於(1)圖中任擇一點 o'。聯結 $o'a$, $o'k$。由 R 綫上之任一點 o_1，作 o_1a_1, o_1k_1，二綫分別與 $o'a$, $o'k$ 平行。聯結 a_1k_1。由 o' 作一綫平行於 a_1k_1，使交 ak 於 l。於是 la 與 kl 將分別表示 R_1 與 R_2 之大小。

抗力 R_1 與 R_2 求得之後，應力圖之繪製將無困難可言。圖成後再用相當比例尺量得各部材之應力，列成一表如(I)。

玆復按第二種解法，先分別求得靜重與活重對於構架之影響，再將兩種影響結合之，求其最大應力。爲求地位經濟，手續簡便起見，所有靜重與風壓將用與第一解法相同之位置圖，惟在靜

重與風壓中間之一字，例如 $B,D,F,$ 均將省略不用。於是就靜重而言，在屋架左端之力將爲 AC (並非 BC)，在人字樑中間一接縫之力將爲 CE (並非 DE)。同樣，就風壓而言，在屋架左端之力將仍爲 AC(並非 AB)，在人字樑中間一接縫之力將仍爲 CE (並非 CD)。

今欲求靜重對於構架之影響，誠屬易事。因所有靜重均係垂直作用於屋架之上，故兩端抗力亦必取垂直之方向。圖中之 (2) 卽表示由於靜重之作用而得之應力圖，其作法讀者見圖自明，姑不多贅。

至欲求風壓對於構架之影響，其抗力 R_3 與 R_4 首先如何求得，尙有加以解釋之必要。當風壓單獨作用於屋架上時，吾人可假設其爲一單個之力，垂直作用於該面人字樑之中點，有如圖中之 W_2，於是由於風壓而生之抗力 R_3 與 R_4，其方向將與該作用綫 W_2 平行，其大小則可由力綫圖中求得之。作 ac, ce, eg 分別等於並平行於風壓 AC, CE, EG，如圖中之 (3)。任擇一點 o''。聯結 $o''a, o''g$。由 W_2 綫上之任一點 o_2，作 o_2a_2, o_2g_2 分別與 $o''a, o''g$ 平行。聯結 a_2g_2。由 o'' 作一綫平行於 g_2a_2，使交 ag 於 l。於是 la 及 gl 將分別表示 R_3 及 R_4 之大小。

抗力 R_3 及 R_4 求得之後，應力圖〔見圖(3)〕自易繪製。由圖中觀之，將見 p,q 兩點適成吻合，表示 PQ 部材上並不發生

任何應力。(2),(3)兩圖完成後，仍用相當比例尺分別量得各部材之應力,列成一表如 II。而後將(2),(3)兩圖中各相當部材之應力相加,求得其總應力。

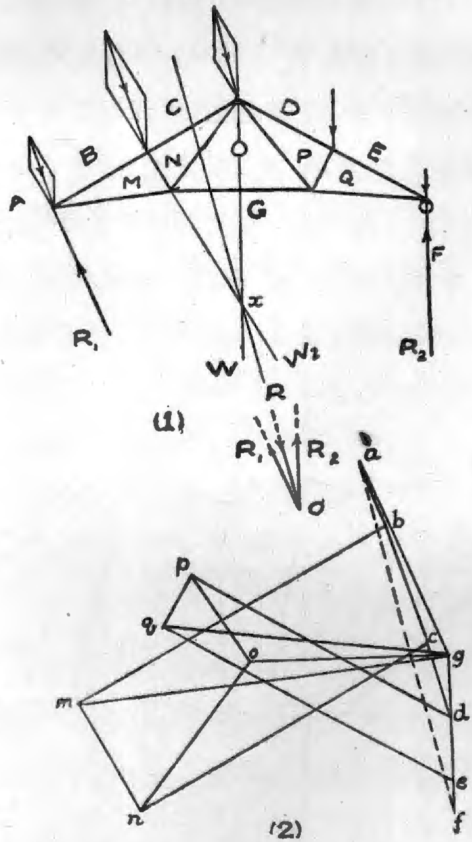
表 (I)　　　　表 (II)

部材	應力		部材	圖 (2)		圖 (3)		總應力	
	+	−		+	−	+	−	+	−
C M	—	2380	*C M*	—	1440	—	930	—	2370
E N	—	2200	*E N*	—	1270	—	930	—	2200
G P	—	1930	*G P*	—	1270	—	670	—	1940
H Q	—	2120	*H Q*	—	1440	—	670	—	2110
L M	2230	—	*L M*	1270	—	980	—	2250	—
MN	—	810	*MN*	—	320	—	490	—	810
N O	1240	—	*N O*	560	—	680	—	1240	—
O P	640	—	*O P*	560	—	100	—	660	—
P Q	—	330	*P Q*	—	320	—	0	—	320
Q L	1620	—	*Q L*	1270	—	400	—	1670	—
O L	1050	—	*O L*	760	—	310	—	1070	—

(I),(II)兩表,依前述之理論，所得結果本應相同，乃實際情形有不盡然者。例如 *CM* —部材,在(I)表中其應力為 2380,而在(II)表中其應力為 2370，相差有 10 公斤。*LM* —部材之應力相差有 20 公斤。而 *QL* —部材之應力相差甚至有 50 公

斤之多.此何故歟?要知此種結果不符之原因，實由於下述兩種情形,並非理論之不當,手續之不合也:第一,應力圖中各力綫係令與位置圖中相當部材平行,繪時輾轉推移,每易發生誤差。第二,用繪圖尺量算時,因所用比例尺頗小,所量尾數常有出入,亦易發生誤差。要之,屋架兩端因受支牆之屈伏影響，及固定物之扭轉作用,其抗力性質究屬如何,終非吾人所得而知，欲求一正確結果終不可能。吾人對於抗力之方向，亦只能作上述之假定，而所用解決方法,固可認爲合理而準確，兩表雖發生些微誤差，固可忽略也。

設使前述屋架之左端爲固定,而右端則載於一滚軸之上,如第 95 圖所示,所有靜重與風壓仍與上例相等。於是因右端之裝置不同,抗力之解法亦將稍異。右端之抗力 R_2 將爲一垂直之力，其方向固不成問題，惟左端之 R_1，其方向須按下法求之。在向風一面,先求得各接縫上靜重與風壓之合力,如圖 (1)。於是作 ab, bc, cd 諸力綫使分別等於並平行於 AB, BC, CD 諸合力。再作 de, ef 兩力綫使等於並平行於靜重 DE, EF, 如圖 (2)。聯結 af,於是 af 綫之傾度將表示所有靜重與風壓之合力 R 之方向。依照前述方法,通過屋架之頂點作靜重之合力綫 W, 通過左面人字樑之中點作風壓之合力綫 W_2,再通過此兩綫之交點 x 作一綫與 af 平行。於是該綫將爲所求合力 R 之作用綫。

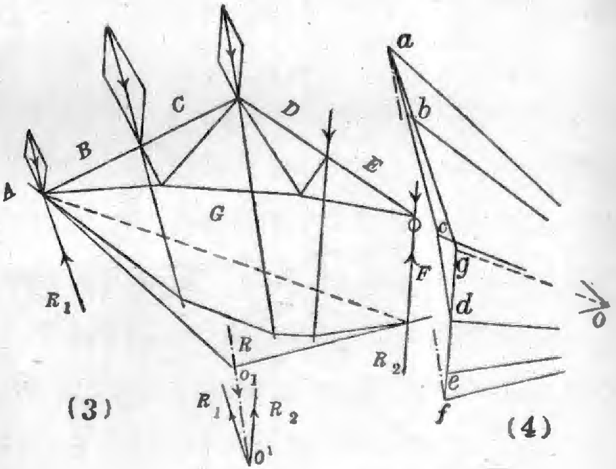


第 95 圖 (A)

屋架所受載重旣已歸納爲一合力 R, 則該屋架將在 R, R_1 及 R_2 三力之作用下而成平衡。根據第二章中所述，若有三力同作用於一物體而成平衡，則此三力必通過一共同點。故若引長

R 與 R_2 之作用綫使相交於 o'，聯結 o' 與左端接縫點，此綫將爲抗力 R_1 之作用綫。由 a 作 ag 平行於 R_1，由 f 作 fg 平行於 R_2，使交 ag 於 g。於是因 af 表示合力 R 之大小，故 ga 及 fg 將分別表示 R_1 與 R_2 之大小。

抗力 R_1 如不用上述方法，而用連鎖多邊形，亦可求得之。如圖之(4)，作力綫 ab, bc, cd, de, ef。任擇一點 o，聯結 oa, ob, oc, od, oe, of。作連鎖多邊形，如圖之(3)。惟此處有一疑問發生



第 95 圖 (B)

焉，蓋由圖(4)觀之，吾人知此連鎖多邊形之閉合綫，必將聯結 R_1 與 R_2 二抗力。關於 R_2 之方向，已知其爲垂直，惟 R_1 之方向如何，則不得而知，僅知其必通過該端之接縫點而已。今連鎖多

邊形之閉合綫必終止於 R_1 之作用綫上，故該多邊形應即以左端之接縫點爲起始，因得如圖所示之形。引長連鎖多邊形之第一綫及末一綫，使相交於 o_1。通過 o_1 作一綫平行於 af，於是此綫將爲合力 R 之作用綫。又通過 o 作一綫 og 平行於連鎖多邊形之閉合綫(如圖中所示之虛綫)，使與由 f 點所作垂直綫 fg 相交於 g。於是 fg 及 ga 兩綫將分別表示 R_2 及 R_1 之大小。前後兩種解法所得之 R_1 與 R_2，其大小及方向均將相等。

讀者苟將 R_1 與 R_2 之兩作用綫引長，使相交於 O'，則 R 之作用綫必將通過 O'。

R_1 與 R_2 求得之後，應力圖自無問題。

73. 哈愛式屋架之分析

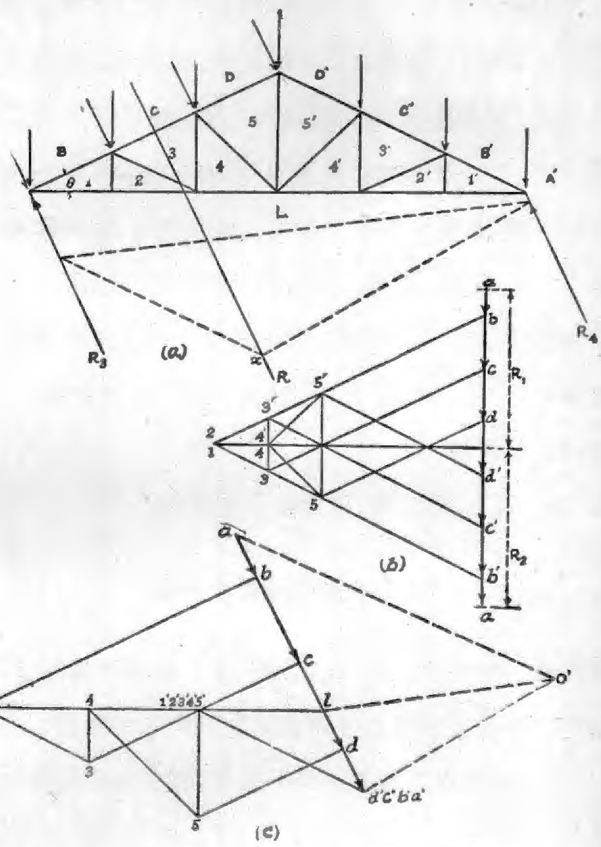
假設有一哈愛式屋架，如第 96 圖，兩端均爲固定，其各接縫上所受之靜重及風壓已分別算得如下所示之數值：

(1)在兩端接縫之靜重＝450 公斤，在其他各接縫之靜重＝900 公斤。

(2)在左端及屋頂接縫之風壓＝830 公斤，在其他各接縫之風壓＝1660 公斤。

今欲求各部材之最大應力。

按前述第二解法，先求得由於靜重而生之應力，如圖(*b*)，圖



第 96 圖

中 ab 及 $b'a'$ 各按相當比例尺等於 450 公斤，$bc, cd, dd', d'c'$, $c'b'$ 則各等於 900 公斤。因屋架係成勻稱，故 $R_1(la)$, $R_2(a'l)$ 各等於 2700 公斤。注意圖中之 1,2,2',1', 四點互相吻合，因

$1-2$ 及 $2'-1'$ 乃兩贅冗部材也。所有各部材之應力，其大小及性質均分別列於附表第一欄內。

次求得由於風壓而生之應力，如圖 (c)。解決此種問題，可假設風壓先投射於屋架之一面，再投射於另一面而分別研究之。今因屋架兩端係屬固定，故由於風壓而生之兩端抗力必與風壓之方向平行。於是先求得風壓之合力 R，再作 R_3, R_4 之作用綫平行於 R。次作 ad' 力綫等於並平行於合力 R。任擇一點 o'。聯結 $o'a$, $o'd'$。由 R 之作用綫上任一點 x 作連鎖綫分別與 $o'a$, $o'd'$ 平行。聯結連鎖三角形之閉合綫。由 o' 作 $o'l$ 平行於閉合綫，使交 ad 於 l，於是 la 及 $d'l$ 將分別等於 R_3 及 R_4。圖 (c) 係表示由於風壓投射於屋架左面而生之各部材之應力，其大小及性質均分別列於附表第二欄內。

至欲求由於風壓投射於屋架右面而生之各部材之應力，仍可利用圖 (c)，將其方向左右反轉卽可。易言之，卽當風壓由右面射來時，其右面各部材所生之應力，實與當風壓由左面射來時，與左面相當各部材所生之應力相等。例如當風壓由右面射來時，$c'3'$ 一部材所生之應力，實與當風壓由左面射來時，$c\ 3$ 一部材所生之應力相等。其他各部材亦然。所有各部材所生應力之大小及性質均分別列於附表第三欄內。

旣已求得各部材在各種載重下所生之應力，卽應分別將各

種載重，例如靜重與左面風壓，或靜重與右面風壓互相結合，

部 材	1	2	3	4
	靜 重	左面風壓	右面風壓	最大應力
B1	−5050	−5140	−3080	−10190
C3	−4030	−3900	−3080	− 7930
D5	−3010	−2660	−3080	− 6090
D'5'	−3010	−3080	−2660	− 6090
C'3'	−4030	−3080	−3900	− 7930
B'1'	−5050	−3080	−5140	−10190
L1	+4510	+5340	+1630	+ 9850
L2	+4510	+5340	+1630	+ 9850
L4	+3590	+3480	+1630	+ 7070
L4'	+3590	+1630	+3480	+ 7070
L2'	+4510	+1630	+5340	+ 9850
L1'	+4510	+1630	+5340	+ 9850
1 2	0	0	0	0
3 4	+ 450	+ 930	0	+ 1380
5 5'	+1810	+1850	+1850	+ 3660
3'4'	+ 450	0	+ 930	+ 1380
1'2'	0	0	0	0
2 3	−1010	−2060	0	− 3070
4 5	−1270	−2610	0	− 3880
4'5'	−1270	0	−2610	− 3880
2'3'	−1010	0	−2060	− 3070

而求其最大應力，如附表第四欄所示，此即爲所欲求得之各部材之應力也。

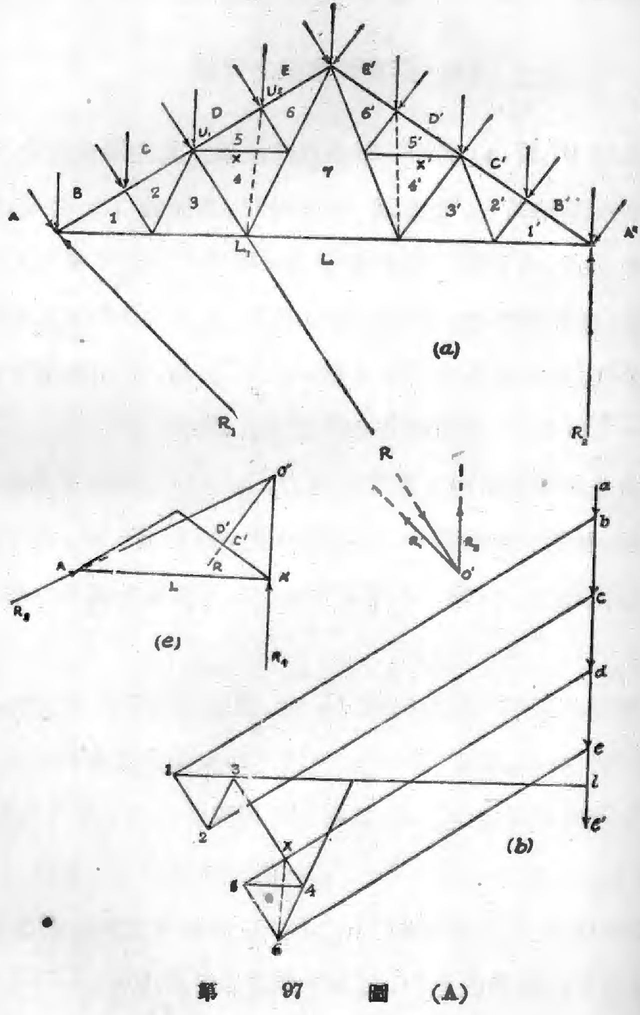
74. 芬克式屋架之分析

命第 97 圖(a) 表示一種芬克式屋架，其左端爲固定，右端則裝於一滚軸之上。寬度爲 21.6 公尺，高度爲 7.2 公尺，間距爲 4.8 公尺。各接縫上所受靜重及風壓均已分別算得如下所示之數值：在兩端接縫之靜重 =440公斤，在其他各接縫之靜重=880 公斤；在兩端及屋頂之風壓=1100 公斤，在其他各接縫之風壓=2200公斤。今欲求各部材之最大應力。

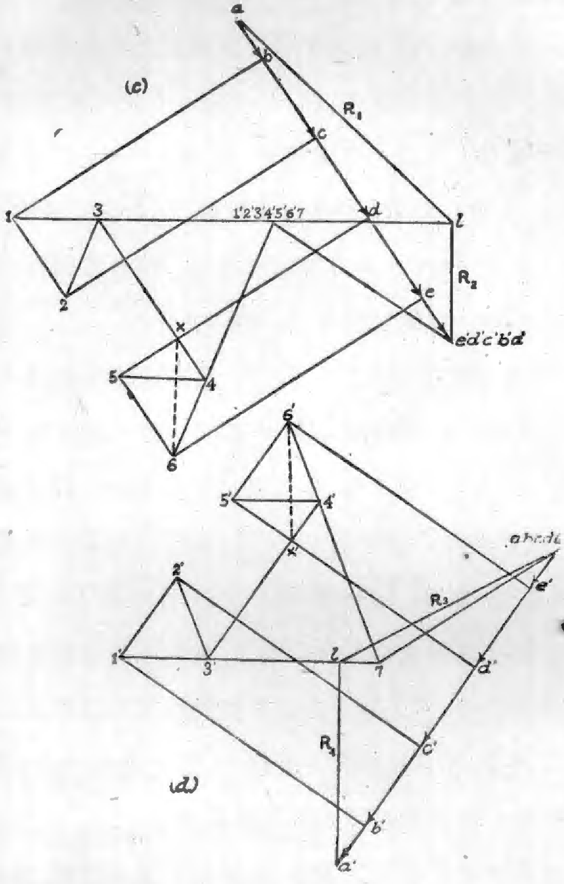
法先求得由於靜重而生之應力，如圖(b)。因屋架及載重均成勻稱，故應力圖亦應以 $1-l$ 爲中綫，兩面成勻稱之勢。茲爲節省地位起見，只繪其一半，其他一半可由圖中相對之部材求得之。

繪製此種應力圖至接縫 U_1 時，因發生三個未知之數，$D-5$, $5-4$, $4-3$，似稍有問題，但讀者如倘能記憶在第七章中所述解決法國式屋架之法者，則解決此種問題固易如反掌也。法於接縫 U_2 下另用一部材 $6-X$，如圖中虛綫所示，代替 $6-5$, $5-4$ 兩部材。於是在接縫 U_1 下，三個未知之數已化爲兩個，如此，即可依照常法進行，其力之多邊形將爲 $3-2-c-d-x-$

3，見圖(b)。及至接縫 U_2 時，其力之多邊形將為 $x-d-e-6-$



第 97 圖 (A)



第 97 圖 (B)

x，其中 XD 及 6 X 兩部材之應力 $x-d$ 及 $6-x$ 雖爲暫定，但 $E6$ 部材之應力 $e-6$ 則爲眞實。蓋因在接縫 U_2 下之屋架，

形式無論如何變化，荷載重 DE 始終不變者，則 $E6$ 部材之應力亦將始終不變，此乃極爲明顯之事實也。旣已求得 $E6$ 之應力，仍將 $6X$ 一部材取去，將 $6-5$，$5-4$ 兩部材放回原位，再作一在接縫 U_2 下之力之多邊形，如 $d-e-6-5$，由此求得 $D5$ 及 $D6$ 之實在應力。於是返至接縫 U_1，因只賸有兩個未知數 $5-4$ 及 $3-4$，其應力自易求得矣。所有各部材之應力，其大小及性質均分別列於附表第一欄內。

由(b)圖中觀之，將見 1，2，5，6 諸點同在一直綫上，此種事實能使吾人得一解決接縫 U_1 之捷徑，固不必另用 $6X$ 代替 $6-5$ 及 $5-4$ 也。法於 1 點求得之後，卽作一綫垂直於 $b-1$。由 c，d，e 諸點各作一綫平行於 $b-1$，使與此垂綫分別相交於 2，5，6。於是 $c-2$，$d-5$，$e-6$ 將分別表示 $C2$，$D5$，$E6$ 諸部材之應力。旣已求得此等部材之應力，其他各部材卽易解決。惟此爲一種特殊情形，必屋架上之載重旣屬相等並成勻稱，方成事實，否則 1，2，5，6 並不能在同一直綫上，則上述方法固不能採用。此種方法對於解決風壓應力圖亦能適用。

次求由於風壓而生之應力。因屋架左端係固定，而右端則裝於滾軸之上，故無論風壓係由左面抑由右面射來，其右端抗力必始終成垂直，惟左端抗力則依風壓投射之方向而有不同，有如圖(a)及(c)所示。因之，在此兩種情形下所生之應力將不能成爲

部　材	1	2	3	4
	靜　重	左面風壓	右面風壓	最大應力
B 1	−5510	−6710	−4750	−12220
C 2	−5020	−6710	−4750	−11730
D 5	−4530	−6710	−4750	−11240
E 6	−4050	−6710	−4750	−10760
$E'6'$	−4050	−4750	−6710	−10760
$D'5'$	−4530	−4750	−6710	−11240
$C'2'$	−5020	−4750	−6710	−11730
$B'1'$	−5510	−4750	−6710	−12220
L 1	+4580	+9850	− 900	+14430
L 3	+3930	+7900	− 900	+11830
L 7	+2620	+3950	− 900	+ 6570
L 3′	+3930	+3950	+3050	+ 7880
L 1′	+4580	+3950	+5000	+ 9580
1 2	− 730	−2200	0	− 2930
3 4	−1460	−4400	0	− 5860
5 6	− 730	−2200	0	− 2930
5′6′	− 730	0	−2200	− 2930
3′4′	−1460	0	−4400	− 5860
1′2′	− 730	0	−2200	− 2930
2 3	+ 650	+1950	0	+ 2600
4 5	+ 650	+1950	0	+ 2600
4′5′	+ 650	0	+1950	+ 2600
2′3′	+ 650	0	+1950	+ 2600
4 7	+1300	+3920	0	+ 5220
6 7	+1950	+5900	0	+ 7850
6′7′	+1950	0	+5900	+ 7850
4′7′	+1300	0	+3920	+ 5220

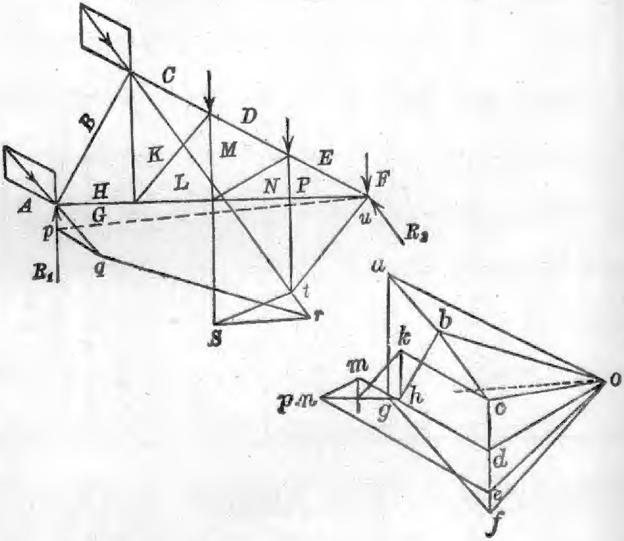
解，須分別求得之，如圖 (c) 及 (d)。所有由圖 (c) 中量得各部材之應力，均分別列於附表第二欄；所有由圖 (d) 中量得各部材之應力，均分別列於附表第三欄。而後求其最大應力，如附表第四欄所示。

由 (c)，(d) 兩圖中觀之，將見 $L-1$，$L-2$ 及 $L-7$ 三部材，當風壓由右面射來時，其內部應力爲負，係屬一種壓力；惟由於

靜重而生之應力則爲正,係屬一種引力,兩者之代數和仍爲一正數,故結果仍屬引力。此與一般情形不同之處。

75. 鋸齒式屋架

第 98 圖表示一種鋸齒式屋架,其右端爲固定,左端則裝於



第 98 圖

一滾軸之上,風壓係由左面射來。在本例中, 屋架旣不成勻稱之式,故前述解決抗力之方法已不可用,必須應用連鎖多邊形。

依屋架裝置情形, 抗力 R_1 之方向已知其爲垂直, 但抗力 R_2 之方向如何則不得而知, 僅知其必通過該端之接縫而已。今

連鎖多邊形之閉合綫必聯結 R_1 與 R_2，故必須以右端接縫為始點，向左繪製之。惟因載重 BC 之作用綫，引伸之後，將至載重 CD 之作用綫之右，故讀者繪至與 oc 平行之綫時，或將發生疑問，該綫究將如何繪製？要知 oc 本為 bc, cd 二力共有之輻射綫，故在連鎖多邊形中，其與 oc 平行之綫應卽為 BC, CD 二力之作用綫之連鎖，易言之，卽應繪在空間 C 之內也。如是，因得一交叉之形，如圖所示之 $qrst$。

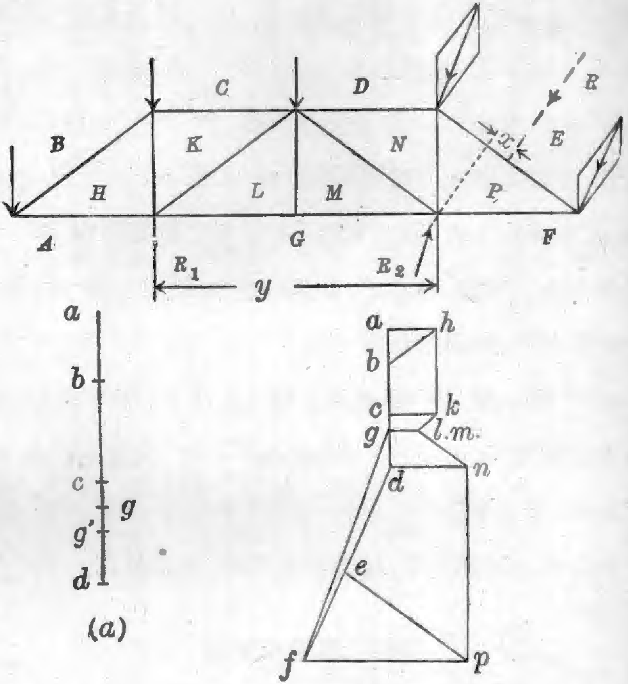
由 o 作一綫 og，使與閉合綫 pu 平行，並使與由 a 所作之垂直綫相交於 g。於是 ga 將表示 R_1 之大小，fg 將表示 R_2 之大小及方向。

其餘應力圖之繪製，讀者自易明瞭，不必贅述。

76.　車場用屋架

在此種構架中所難解決之問題，乃在抗力之求得。蓋假使屋架上只受有靜重，並係平均分佈者，則兩端抗力必各等於總載重之一半無疑。惟一旦涉及風壓，則問題複雜，非簡單方法所能解決矣。

今假設風壓係由右面射來，命 R 表示其合力，作用於 EP 部材之中點，如第 99 圖，並命 R 作用綫與屋架右端之垂直距離等於 x。於是合力 R 對於屋架將發生一種影響：將致成一種



第 99 圖

繞右端支點 O_2 轉動之趨勢，其力率則等於$(R\times x)$。此種轉動之趨勢實爲一種作用於左端支點 O_1 之向下力（姑命之爲 R_3）所抗衡。設兩支點之距離等於 y，於是因兩種趨勢適成平衡，故得

$$R\times x=R_3\times y,$$

$$\therefore\ R_3=\frac{R\times x}{y}。$$

屋架左端旣發生向下之抗力 R_3，則原有由於靜重而生之抗力，

其值將不能再等於 R_1,必須減去 R_3 計算，卽等於 R_1-R_3是也。

$$\therefore\ R_1=\frac{1}{2}\text{總靜重}-\frac{R\times x}{y}.$$

玆再研究由於靜重及風壓而生之應力圖。先作力綫 adf，並將 ad 一部分放大，如圖之(a)。假使只計靜重，不問風壓，則抗力 R_1 必將等於 $g'a$, g' 爲全部力綫(只就靜重而言)之中點，亦卽 cd 之中點。但因風壓須加入計算，故 $g'a$ 應減去等於$\frac{R\times x}{y}$之長度。今假設投射於右面之總風壓爲 1800 公斤，又由圖中量得

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}.$$

於是　$$R_3=\frac{1800\times 1}{12}=150\ \text{公斤}.$$

於(a)圖中，按相當比例尺量得 $g'g$ 長度等於 150 公斤。於是 ga 將爲所求實在抗力 R_1。聯結 fg，該綫將表示 R_2 之大小及方向。通過右端支點 O_2 作一綫與 fg 平行，該綫將爲抗力 R_2 之作用綫。其餘應力圖之繪製將無困難可言。

習　　題

1. 今有一瑞士式屋架，如第 66 圖所示，其右端爲固定，

左端則裝於一滾軸之上。屋架之寬度爲 8 公尺，高度爲 2 公尺。水平大樑較兩端高起 3 公寸。屋架之間隔爲 3 公尺。屋頂用松板及石砥瓦，松板厚 $\frac{3}{4}''$，桁條每平方公尺重 10 公斤，石砥瓦每平方公尺重 35 公斤。水平風壓每平方公尺 150 公斤。試求各部材之最大應力並列成一表。

2. 今有一屋架如第 70 圖，其寬度爲 12 公尺，高度爲 3 公尺，下部大樑係成水平。屋架之間隔爲 3 公尺，兩端固定，上鋪上等玻璃片，其重量爲每平方公尺等於 25 公斤。片下所釘木條每平方公尺重 8 公斤。水平風壓每平方公尺 150 公斤。試求各部材之最大應力並列成一表。

3. 有一工廠採用如第 74 圖所示之複式副柱屋架，其寬度爲 15 公尺，高度爲 3.5 公尺。斜梁之中點較兩端高起 4 公寸。設在屋架兩端之靜重各爲 300 公斤，在其他各接縫者各爲 600 公斤。在屋頂及兩端之風壓各爲 700 公斤，在其他各接縫者各爲 1400 公斤。試求各部材之最大應力。

4. 今有一哈愛式屋架，其寬度爲 15 公尺，流水爲 $\frac{1}{3}$。屋架之間隔爲 4.8 公尺，兩端固定。屋頂材料每平方公尺重 45 公斤。水平風壓每平方公尺 150 公斤。試求各部材之最大應力。

5. 有一芬克式屋架，如第 97 圖所示，一端固定，一端裝於一滾軸之上。屋架之寬度爲 21 公尺，高度爲 7 公尺，間隔爲

4.5 公尺。設在屋架兩端之靜重各爲 350 公斤，在其他各接縫者各爲 700 公斤。在兩端及屋頂之風壓各爲 800 公斤，在其他各接縫者各爲 1600 公斤。試求各部材之最大應力。

6. 有一鋸齒式屋架如第 85 圖，其頂角等於 90°，兩端之角度各爲 60° 及 30°。屋架寬度爲 9 公尺，間隔爲 3.5 公尺。假設長邊上鋪松板及石硤瓦，每平方公尺重 60 公斤，短邊上裝玻璃片，每平方公尺重 30 公斤。水平風壓爲每平方公尺 150 公斤。試求抗力之大小及各部材之最大應力。

7. 有一懸臂式屋架如第 89 圖所示，其懸臂之長度等於 10 公尺，人字樑與水平綫所交之角度等於 30°。前柱與屋架最外一點之距離爲 2.5 公尺，屋架之間隔爲 3 公尺。屋頂材料每平方公尺重 65 公斤。水平風壓爲每平方公尺 150 公斤。試求抗力之大小及各部材之最大應力。

第　十　章

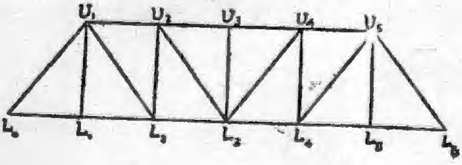
橋　　梁

77. 橋梁各部之名稱

圖解力學之最大應用，乃在解決各種結構，當承受外力之作用時，其內部將發生若何應力之問題。由以上三章所舉種種屋架之分析觀之，可見其方法之簡捷，迥非用代數式計算者所可幾及。此外對於橋梁之分析，亦以應用圖解力學爲最便利。

橋梁之結構與屋架稍異，故各部材之名稱亦有不同，玆且分別解釋於下。

上下弦。如第 100 圖中之 U_1-U_2, U_2-U_3, ……U_4-U_5 均稱爲上弦(亦有稱爲上橫桿或上肢者)，其內部應力均屬壓力。



第　100　圖

L_0-L_1, L_1-L_2, ……L_5-L_6 均稱爲下弦（亦有稱爲下橫桿或

下肢者)，其內部應力均屬引力。

斜桿　如 U_1-L_0, U_1-L_2, U_2-L_3,……均稱爲斜桿，其內部應力有屬引力者，有屬壓力者，其屬引力者則稱爲拉桿，其屬壓力者則稱爲壓桿。

直柱　如 U_1-L_1, U_2-L_2,……均稱爲直柱，其內部應力均屬壓力，此正與屋架之情形相反。

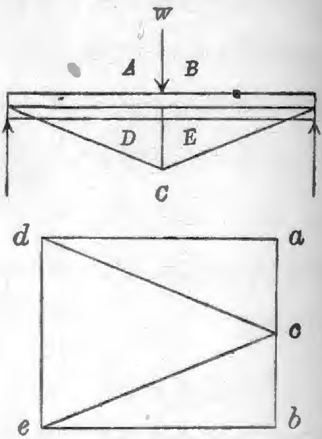
78. 橋梁之載重

屋架捨本身之重量外，其外部所受之力計有兩種：一爲屋頂材料，稱之爲靜重；一爲風壓(有時積雪亦加入計算)，稱之爲活重。此兩種載重本書均曾於前三章中詳細研究之。至於橋梁之載重，其性質與屋架所承受者則大有不同。橋梁之主要目的在通過車輛行人，如係用於鐵路，則一輛機車之重達數百噸之多，故橋梁所承受之載重，其性質大有分別，計算之法，必須依照某種繁雜公式，此爲橋梁結構學之事，非本書所欲加以討論者。今本篇所舉之載重均屬一種假定，只爲便利橋梁之分析起見，其性質究竟如何，並不過問也。

79. 梁之裝有單直柱者

橋梁中一種最簡單之構造爲一單梁，其中心有一直柱，如第

101 圖所示。由圖中觀之，將見此種構造實爲一種正柱式屋架顚倒裝置者，惟各部材之應力，其性質則完全變換：凡在正柱式屋架中屬引力者，在此種構造中均變爲壓力；反之，凡屬壓力者則均變爲引力。此乃兩種構架不同之處也。



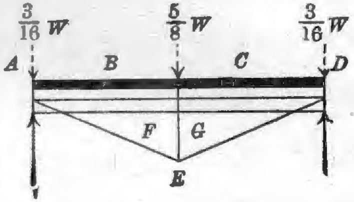
第 101 圖

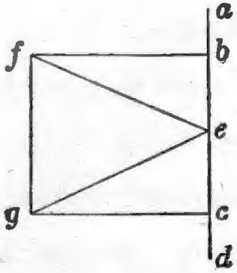
如此結構之梁，其載重之法可有兩種：一爲集中載重，假設其直接作用於直柱之上者；一爲均佈載重，假設其均佈於全梁之上者。

如依前一情形，則其解決之法頗屬易事，有如第 101 圖所示，不必多加贅述。惟如依後一情形，則分析之法須稍費思索。凡梁受有均佈載重時，可仍將其化爲集中載重，惟此時之梁已非一種單式而變爲一種兩孔連貫式，所有載重卽按連貫梁之公式計算。於是中間一載重得全部載重 W 之 $\frac{5}{8}$，直接作用於直柱之上，兩端載重則各爲 W 之 $\frac{3}{16}$，有如第 102 圖所示。

作 ab, bc 及 cd 使分別等於 $\frac{3}{16}W$, $\frac{5}{8}W$, 及 $\frac{3}{16}W$。完成應力圖 $abfgce$。由應力圖中觀之，將見兩端之載重 AB 及 CD

對於各部材之應力毫不發生關係，其能發生關係者，只中間之載重 BC 耳。雖然，應力圖中之 bf 並非眞正表示 BF 部材內之總壓力，因除載重 BC 能致其發生一種壓應力之外，倘有因於在左端及直柱之間所支持之載重而發生之彎曲作用，亦將致成一種壓應力，應加入計算。





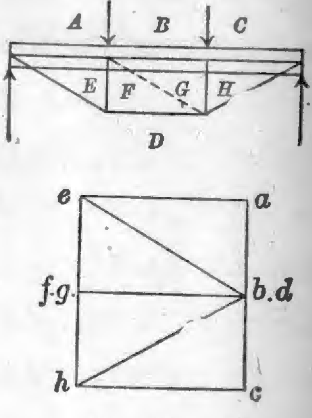
第　102　圖

80. 梁之裝有雙直柱者

如橋梁之跨度加大，則一根直柱有不足維持之虞，勢須改用兩根：將橋梁分成相等三節，兩直柱卽裝置於中間兩分點，如第 103 圖。此種構造之外表雖與副柱式屋架顚倒裝置者相似，惟各部材之應力則適相反，其情形亦正似前述單直柱之梁與正柱式屋架不同之處。

在此種構架中倘有一二特別之點值得討論者。蓋假使在兩直柱之下端均用螺栓聯結，則中間一節將成爲一不健全式框架，

荷欲其始終保持健全狀態，須另行加入一斜桿 FG，有如圖中虛綫所示。但若在兩直柱頂上之載重 AB 及 BC，其值旣屬相等，其性質叉頗穩定，則所得應力圖將成一勻稱之式，而 FG 一部材之應力將等於零，易言之，卽在此種特殊情形之下，FG 將成爲一贅冗部材，而橋梁之中間一節，不

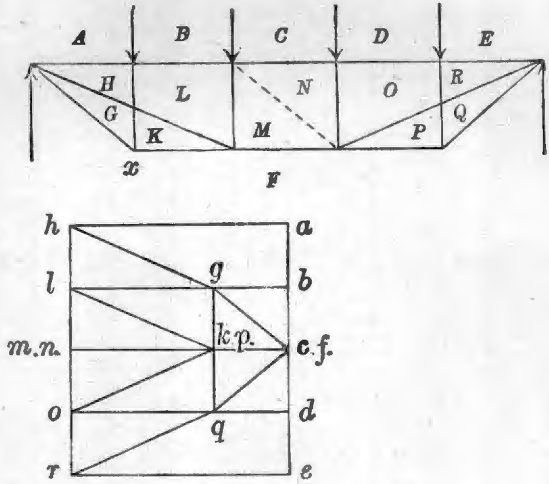


第 103 圖

必加入 FG，亦將成爲一健全式框架。惟依一般情形，各載重未必卽能相等，更不能常成穩定，因之，應力圖亦不能成勻稱之式。FG 一部材多少將發生若干應力，而成爲一必需之件矣。如載重時生變化，則兩個交叉之斜桿均須加入以資堅固。

81. 梯形梁

梯形橋梁，如第 104 圖所示，乃上述之梁更進一步之變遷用於更大跨度者。前述關於中間一節如何成爲一不健全式框架之情形，此處亦頗適用，因之，載重若爲一變值，則中間一節亦須加入兩個交叉之斜桿。讀者解決此種構架之應力圖，勢將發生困難，因在左右兩端均有三個未知數，似無從起始。但讀者苟能本



第　104　圖

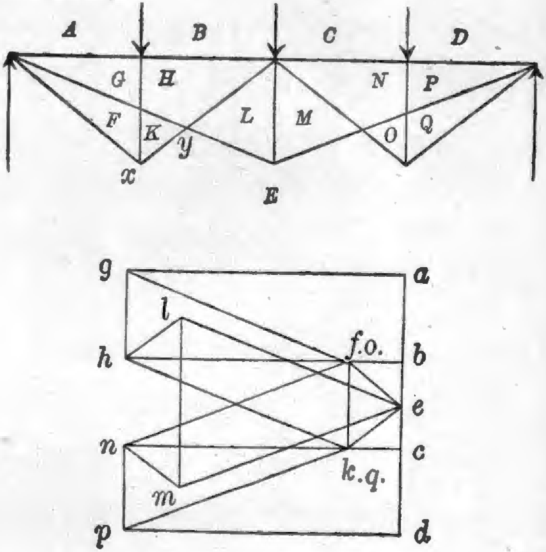
記下述一原則，則問題自易解決，即

任一直柱之應力常等於其頂端所受之載重。

根據此一原則，直柱 HL 之應力將等於載重 AB 之值，因之，在接縫 x 處之三個未知數將減爲兩個。於是應力圖即以此一接縫爲起始，而後順時針向依次求得之。

82. 芬克梁

芬克式屋架曾於前一章中詳加論及，在橋梁構造中，此種式樣亦有用之者。第 105 圖表示其中較爲簡單之一種。在此種構架中共有三根直柱，其頂端各受有相等之載重 AB, BC, 及 CD。



第 105 圖

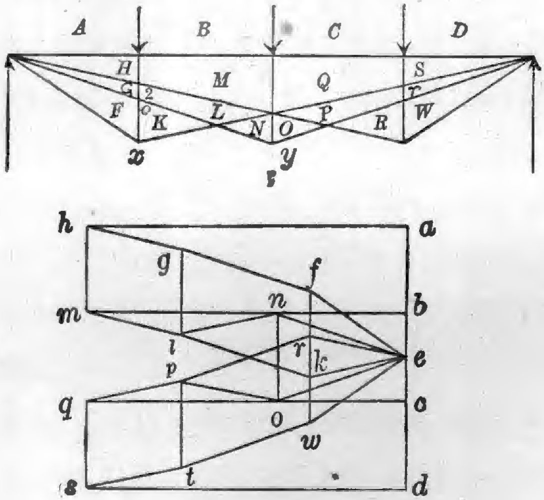
作力綫 $ab, bc,$ 及 cd。今因橋梁左端共有三個未知數，故應力圖不能以之爲起始。惟查接縫 x 處雖有三個未知數，但因根據前述原則，直柱 FK 之應力應等於載重 AB 之值，故實際僅有兩個未知數，以之起始，自不發生問題，因得力之三角形 efk。此一接縫解決之後，乃輪及左端一接縫，得力之多邊形 $eagf$。次再輪及在載重 AB 下之一接縫。其次所欲研究之點爲註有 y 字之一接縫，得力之多邊形 $ekhl$。於是 l 點可以求定。此點解決之後，其餘問題均甚簡單，讀者自易領會。

上述載重 AB, BC 及 CD，其值係假設相等，故應力圖亦

成匀稱之式，苟其值並不相等，則應力圖之形式又將略有不同。讀者試按 AB, BC, CD 成 2,3,4 之比率而求得之。

83. 波耳門梁

第 106 圖所示構架稱爲波耳門式梁，其中各部材之結構，



第　106　圖

形式較爲複雜，因而應力圖之求得似頗困難，但讀者如能按下述步驟，則問題自易解決。

作力綫 ad，先自接縫 x 起始，由抗力點 e 作 ef 平行於 EF，及 ek 平行於 EK。作一等於載重 AB 之垂綫，並將其向

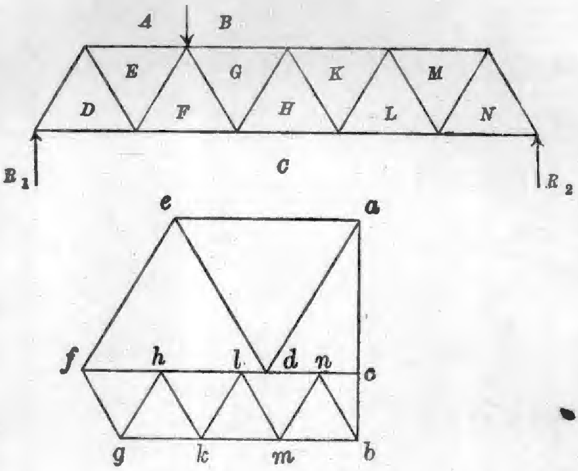
e 點逐漸推進，直待該垂綫之兩端 f 及 k 適分別落在 ef 及 ek 兩綫上，使成力之三角形 efk。次輪及接縫 y，由 b,c 兩點各作一水平綫。由 e 作 en 平行於 EN，及 eo 平行於 EO，使分別與以上兩水平綫相交於 n 及 o，得力之三角形 eno。再次輪及註有 Z 字之一接縫，其中雖有 FG, GL, 及 LK 三個未知數，但因 KL 之應力實等於 EN 之應力，又 GL 之應力實等於 FK 之應力，故一經分析，情形非常簡單。此一接縫解決之後，方輪及橋梁之左端；而後輪及載重 AB 下之接縫。其餘各點已不成問題。

讀者試再假設載重 AB, BC, 及 CD 之値並不相等，繪一應力圖，此亦一頗有研究價値之問題也。

84. 華倫梁

華倫梁乃橋梁建築中一種最簡單最有名之構架，爲華倫氏所發明，其形式有如第 107 圖，係用上下兩弦及斜桿組織而成，上下兩弦係成平行，中間加入斜桿使成爲若干三角形。此種三角形通常均屬等邊，即兩斜桿之長度相等，惟其性質則不同：一生壓應力，一則生引應力。

此種橋梁之載重法共有種種之不同，本書茲舉三種最常見之例詳釋於下。



第　107　圖

第一例　集中載重——第 107 圖表示一種華倫梁，共分五節，由左端算起，在上弦第二接縫處受有一集中載重 W。試求各部材之應力。

作 ab 綫代表 W。今因該橋梁所受外力共有三種，一爲集中載重 W，其他二者爲兩端之抗力 R_1 及 R_2。此三力作用於橋梁之上而成平衡，故其力率之代數和必等於零。由圖中觀之，若將 W 之作用綫向下引長，必將交切下弦，使成 1.5 與 3.5 之比。

故若以右端接縫爲極點，則 W, R_1, 及 R_2 諸力對於該點之力率將爲 $W\times3.5\,l$, $R_1\times5\,l$, 及 $R_2\times0$，其中 l 等於每節之

長度。

根據上述情形，三力旣成平衡，則

$$W\times 3.5\,l-R_1\times 5\,l-R_2\times 0=0,$$

$$\therefore\quad R_1=\frac{3.5}{5}W=0.7\ W。$$

同樣可得

$$R_2=\frac{1.5}{5}W=0.3\ W$$

由此可以求定應力圖中 c 點之位置，卽

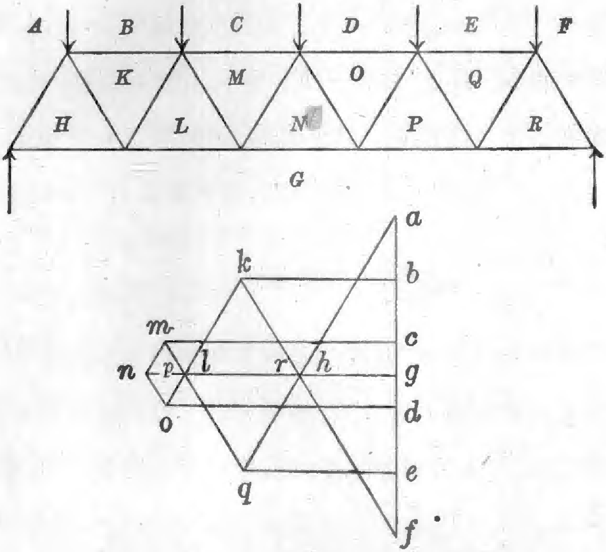
$$ca=0.7\ W=0.7\ ba,$$

$$bc=0.3\ W=0.3\ ba。$$

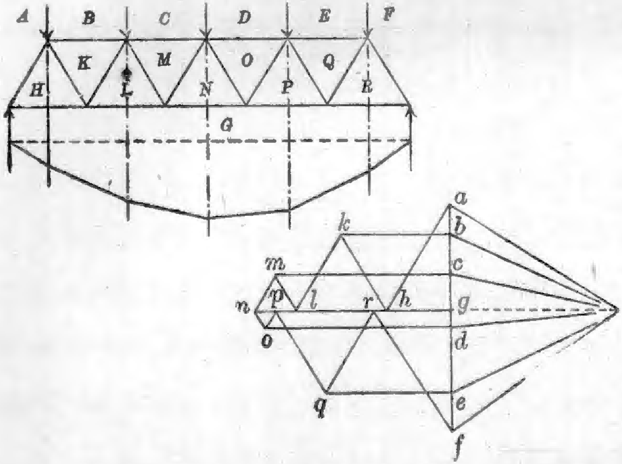
c 點求得之後，其餘各點自無問題，卽以左端接縫爲始，依各斜桿之上下接縫交錯次序繼續解決之可也。

第二例　均佈載重——此爲前述一例之擴展，蓋在前例中僅有單獨集中載重作用於上弦之某一接縫上，在本例中，則載重係均佈於上弦之上，如第 108 圖。

今假設在上弦各接縫之載重 AB, BC, CD, DE 及 EF，其大小均相等，於是兩端之抗力 R_1 與 R_2，其大小亦必相等，各等於總載重之一半。其他問題可依前例解決之。


A
B
C
D
E
F
K
M
O
Q
H
L
N
P
R
G
a
k
b
m
c
n
p
l
r
h
g
d
o
e
q
f

第　108　圖

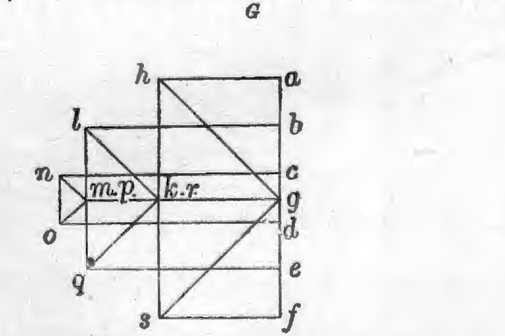

A
B
C
D
E
F
K
M
O
Q
H
L
N
P
R
G
a
k
b
m
c
n
p
l
r
h
g
d
o
q
e
f

第　109　圖

第三例 非勻稱載重——其次所欲討論者爲非勻稱載重，如第 109 圖所示，載重 AB——EF 之大小並不相等，此乃一種最重要而亦最常見之情形。解決此種問題，須應用連鎖多邊形，方能求得兩端之抗力。至於全部解法，讀者見圖自明，不必多贅。

85. 林維爾梁

在前述華倫式梁中，其腹部結構只用斜桿並不用直柱，至於斜桿之應力則有屬壓力者，亦有屬引力者。惟根據事實所得，凡屬引應力之部材，其力量並不受其長度增減之影響。但凡屬壓應力之部材，其力量則常隨其長度而異，長度減短則力量增加。故



第 110 圖

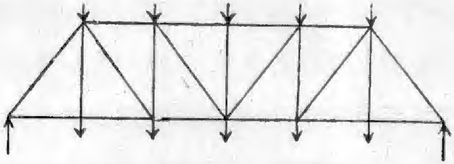
若就腹部之結構而言，則華倫梁僅用斜桿尚非經濟之道。欲求經濟之道，所有屬於壓應力之部材（壓桿），其長度須使減至最短限度。吾人知在兩平行綫間，以垂直綫為最短之交綫。林維爾即根據此一原則，設計一種橋梁，將所有華倫式梁中之壓桿均改為直柱，其形式有如第 110 圖。

欲求此種構架之應力，可先作力綫 af 求得其中點 g。因所有載重均係相等，故兩端抗力亦應相等，於是 g 將為兩抗力之分點。再以左端接縫為起始，依上下弦各接縫交錯之次序，繼續求得其應力，直至直柱 NO 之下端一接縫。因該處共有三個未知數，似稍有問題，但如將其上下端之次序顛倒，先解決上端再及下端，則自無困難可言。

86.　勃熱提梁

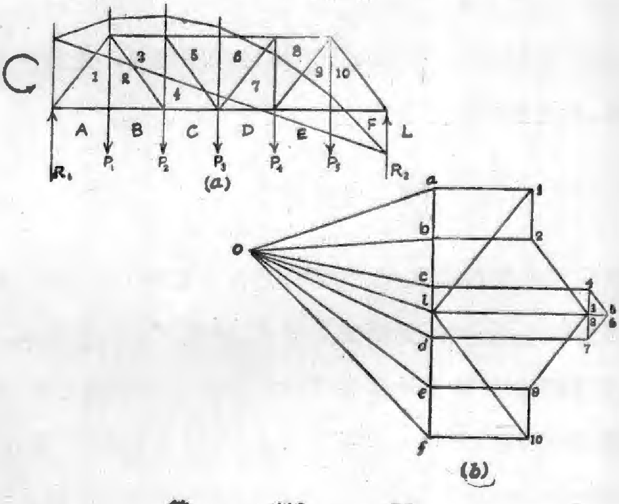
橋梁因承托載重方法之不同，乃有上托與下承之分。如車輛行人係由橋頂通過者，則稱為上托式，前圖所示林維爾梁，即其一例。此種橋梁之載重均係假定作用於上弦之接縫上者，故有上托之稱。如車輛行人係由梁間穿過者，則稱為下承式，第 111 圖所示，即其一例。此種橋梁之載重均係假定作用於下弦之接縫上者，故有下承之稱。

第 111 圖所示稱為勃熱提梁，其結構與林維爾梁實大同小



第 111 圖

異，故世人常將後者用前者之稱謂，而加以上托與下承之區別。第 112 圖表示勃熱提梁之應力圖。兩式所得應力圖，其形狀亦大致相同，不過因載重一則作用於上弦，一則作用於下弦，故兩圖之位置適左右相反耳。

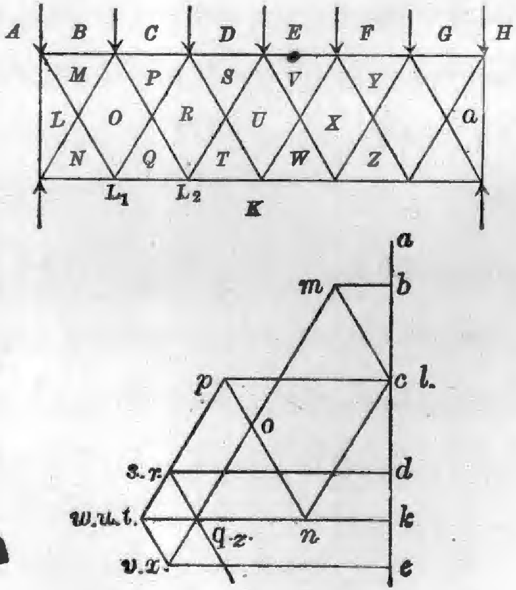


第 112 圖

勃熱提梁與華倫梁同為最有名之構架，均為世人所最常用，讀者應特加注意焉。

87. 格子式梁

吾人若取兩個華倫式梁，一正一反而疊置之，使成如第 113 圖之結構，則得一種格子式梁。欲求此種格子式梁之應力圖，根據其結構情形，卽可仍將其分成兩個華倫式梁，依照前述方法分別求得各個梁架之應力而後再結合之。惟此種分析法，固屬解決問題之捷徑，但往往不免引進若干誤差，不如直接取其全體而



第　113　圖

研究之，繪成一個應力圖之爲得也。

第 113 圖所示格子式梁，所有各接縫之載重均成勻稱之式，因之，兩端抗力其值必各等於總載重之一半。茲且作力綫 ah，求得其分中點 k（因梁架係成勻稱之式，故為求地位經濟起見，本應力圖只表示其一半）。於是 ka 將表示抗力 KA 之大小。惟吾人解決各部材之應力，開始卽將遇到困難。因由圖中觀之，將見無論作用於任何接縫之力，其未知之數常在二個以上，是乃一不能解決之問題。但吾人若先取兩個華倫式梁分別研究之，將見在正置梁架中，其所承擔之載重為 BC, DE, FG，此等載重均直接傳達於左右兩橋座之上；在反置梁架中，其所承擔之載重為 AB, CD, EF, GH，此等載重則間接由 AL 及 Ha 兩部材分別傳達於左右兩橋座之上。因之

AL 部材之應力應等於 $AB+\dfrac{CD+EF}{2}$（或等於$AB+BC$，

因 BC, CD, DE, EF, FG 等載重之值均相等）。

又　Ha部材之應力應等於$GH+\dfrac{CD+EF}{2}$（或等於$FG+GH$）。

根據上述情形，左端抗力 KA 將為兩個不同之力所致成，一為正置梁架上之載重，等於

$$\frac{BC+DE+FG}{2}\text{（在力綫圖上等於 }kc\text{），}$$

一為反置梁架上之載重，等於

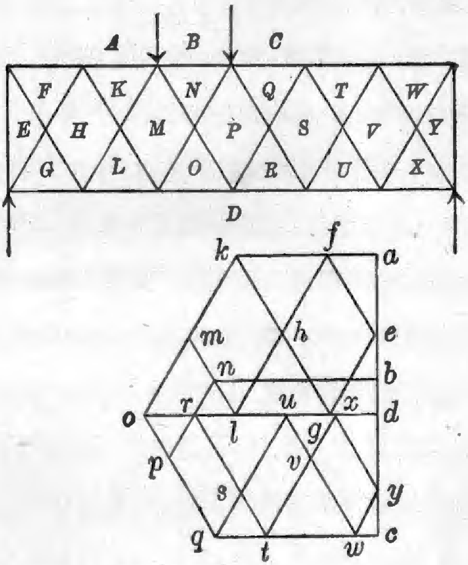
$$AB+\frac{CD+EF}{2}\text{(在力綫圖上等於 }ca\text{)。}$$

後一數值亦卽等於 AL 部材之應力。故吾人可由此計算 AL 之值,並在力綫圖上求定 l 點之位置;在本例中 l 實與 c 點吻合。

AL 之應力求定之後,則在左端及在載重 AB 下之兩接縫均只有兩個未知之力,問題自易解決。其他各接縫如依以下次序,亦自易分析:假定梁架爲一羣 N 字式之組織。先自 N 字左面直綫之脚端起始,例如圖中之 L_1 接縫,依次至該直綫之頂端,例如圖中在 BC 下之一接縫,再沿坡綫至右面直綫之脚端,例如 L_2 接縫,而後輪及該直綫之頂端,例如在 CD 下之一接縫。如此繼續進行。本圖只繪其一半,其他一半可由圖中相對稱之部材類推之。

上述之例係假設所有載重均成勻稱之式,若載重並非勻稱,則情形又將不同。如第 114 圖,梁架之上僅受有兩個載重 AB 及 BC,其值並不相等。載重 AB 係由反置梁架所承擔,而 BC 則由正置梁架所承擔。因之,AE 部材之應力僅受載重 AB 之影響其大小卽可依下法計算之。

因梁架係分成相等六節,而 AB 係作用於自左端數起之第二分節點上,故 AB 將梁架分成 2 與 4 之比率。於是以右端接縫爲極點,求得 AE 與 AB 對於該點之力率,得



第 114 圖

$$AE\times 6 = AB\times 4,$$

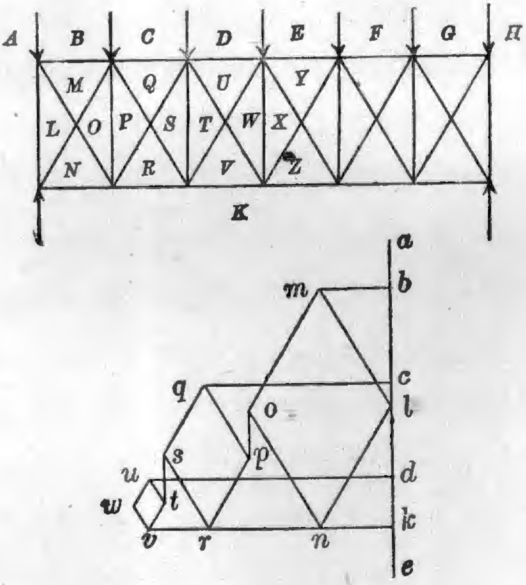
或 $AE=\frac{2}{3}AB$。

於力綫 ac 上取 ae 使等於應力 AE。

總之，如梁架上所受載重不止一個，讀者欲知其中何者對於兩端之直柱發生影響，何者則否，可即由各該載重之施力點始，沿此種鋸齒式斜桿之方向順次追尋之，直至最末一桿。苟此斜桿之尾端係直接終止於橋座之上，則該載重對於直柱將不發生影

何影響。苟此斜桿之尾端係終止於直柱之頂端，則該載重對於直柱將發生影響，其大小可按前述力率原理求得之，此種方法，無論載重係作用於上弦，抑作用於下弦，均能適用。

雖然，此一法則對於前述之格子式梁，中間並無直柱支撐者固適用之，但若格子之間亦裝有直柱，有如第 115 圖所示，各載重即直接作用於直柱之上者，則解決之法又將不同。此種直柱之裝設係假定負有某項絕大作用，惟實際所得結果究能符合此種



第　115　圖

假定與否，則仍不得而知。蓋吾人如就第 113 圖而研究之，將見

任何兩個交叉斜桿上所生應力，其值均不能相等、故特於格子之間引進一種直桿，將左右兩斜桿之應力加以均衡。其所根據之原則，係假定每一直桿均擔承作用於其頂端之載重之一半。例如就 CD 而言，若在該載重之下並未裝有直柱，則其全部之力將由反置梁架擔承之；但如裝有直柱，則反置梁架將只分擔 CD 之一半，其餘一半將由該直柱傳達至其下端之接縫，再由正置梁架擔承之。

於是吾人首欲研究者，乃所有載重對於 AL 一部材之影響。茲姑假設所有梁架腹部之斜桿及直柱均被取去，僅有兩端之直柱支撐上下兩弦，易言之，卽梁架僅賸一長方形外框也。根據前一假定，所有中間各載重如 BC, CD, DE, EF 及 FG 作用於各直柱之頂端，其力將由上下兩弦均分擔承。今各該直柱雖已取去，但上下兩弦所分擔之力依然存在，故下弦所分擔之總力將等於

$$\frac{BC+CD+DE+EF+FG}{2}$$

此總力將由下弦直接傳達至兩端橋座上，至於上弦所分擔之總力亦將等於上數，不過將由上弦經兩端之直柱再傳達至橋座上。因之，AL 部材所承總載重將等於

$$AB+\frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2}+\frac{CD}{2}+\frac{DE}{2}+\frac{EF}{2}+\frac{FG}{2}\right)$$

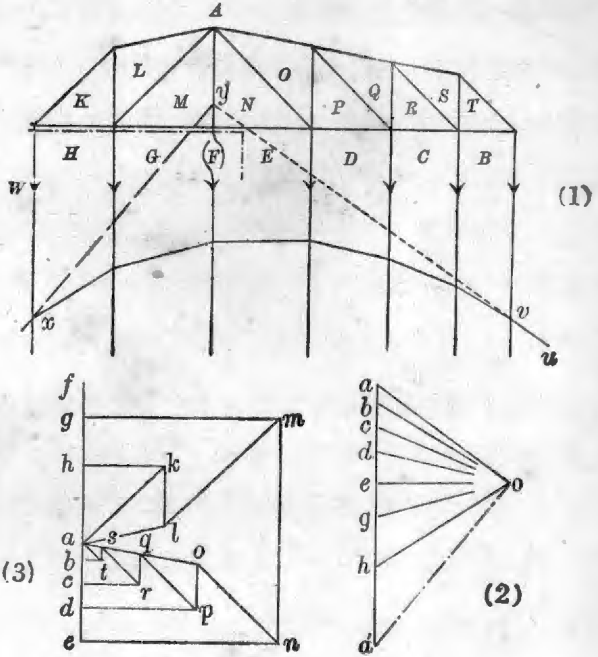
因於 ah 力綫上取 al 長度使等於 AL 之應力。AL 一部材解決之後,則其上下兩端之接縫自無問題。至於其他各接縫,雖有三個未知數,但因任一直桿,其應力均假定等於其頂端載重之一半,例如 op 之應力等於$\frac{BC}{2}$,在應力圖中即由 O 作一垂直綫 OP 使等於$\frac{BC}{2}$。故分析時若仍依前述 N 字之次序,則並無困難可言。

不過直桿之影響是否眞能均衡其左右兩交叉斜桿之應力,仍成爲一疑問耳。

88. 懸臂梁

第 116 圖表示一種懸臂梁,可以繞橋礅左右旋轉,用於通行船艘之河中,俾船艘可以通過無阻者。本圖所示兩懸臂,其長度並不相等,因之,在短臂之外端特加一平衡重 W,其大小須使全部構架能支持於 MN 部材下端之一接縫而適成平衡之勢。

解決此種特殊問題,首須求得平衡重 W 之大小。欲達此目的又須採用連鎖多邊形。惟讀者繪製連鎖多邊形,第一步即發生疑問,蓋在 MN 部材之下端接縫共有兩力作用焉:一爲向上之力或抗力 EF,其大小等於所有載重之和,其平衡重 W 亦包括在內;一爲向下之力 FG,其大小即等於在該接縫之載重。故作



第 116 圖

力綫 ah 時，此兩種力究應將何者算入乎？吾人根據相似平行力之合力一原理，則爲繪製連鎖多邊形起見，應暫將 EF 一力删去，僅留 EG 一力，因之，F一字亦卽暫時不能存在。於是得如圖(2)所示之力綫 ah。任擇一極點 o，聯結 $oa, ob,$……oh 等綫，並作連鎖多邊形如圖(1)，其最末一連鎖與 oh 平行，交 W 之作用綫於 x。延長多邊形之第一綫 uv，使交 MN 部材於 y。於是多邊形之閉合綫必將爲聯結 x 與 y 之綫。由 o 作 oa' 與

xy 平行，於是 ha' 將表示平衡重 W 之大小，而此一平衡力將使全部梁架支持於 MN 部材之下端而適成平衡。

在連鎖多邊形中，〔圖(1)〕，抗力 EF 可以暫爲删去不問，惟在應力圖中〔圖(3)〕，則不可不加入計算。由圖中觀之，將見抗力 EF 實爲僅有之向上作用之力，其值等於所有向下作用諸力之和，平衡力 W 亦包括在內。故在應力圖中，EF 之力綫實應等於 $AB, BC, \cdots\cdots HA$ 諸力綫之和，亦卽等於圖(2)中之 $a'a$。作力綫 ab, bc, cd, de；其次一力卽爲 EF，其大小等於 $a'a$，其意識爲向上作用。故自 e 向上取 ef 長度使等於 $a'a$，再由 f 向下量 fg, gh，使分別等於 FG, GH 二力。於是 ha 將代表平衡重 W，亦卽等於圖(2)中之 ha'。其餘各點則已不成問題。

習　　題

1. 今有一如第 101 圖之梁，其跨度爲 6 公尺，直柱長 6 公寸。設在直柱之頂點受有 2 噸之載重，試求直柱及拉桿之應力，並求大梁每平方公寸之壓應力，若大梁之剖面爲 2.5 公寸 ×1.5 公寸。

2. 今有一橋，跨度 20 公尺，寬 6 公尺，係用兩個如第 103 圖所示之梁架支持之。梁架中兩個直柱各長 2.4 公尺，將全梁分成相等三節。橋梁上部建築與梁架相聯繫於橋座及直柱之頂

點。假設最大載重相等於每平方公尺 900 公斤,試求各部材之應力。

3. 今有一梯形梁，跨度 12 公尺，用三根 1.5 公尺長之直柱分成相等四節。假設在各直柱頂端之載重,自左至右，各爲 2，3,及 2 噸,試求各部材之應力。

4. 若在前一題中,所載之重各爲 2,3，及 5 噸，試求兩端之抗力及各部材之應力。

5. 今有一芬克式梁,長 10 公尺，分爲相等四節，直柱長 1.2 公尺。在各直柱頂端之載重均等於 2 噸，試求各部材之應力。

6. 今有一公路橋,跨度 14 公尺,係用兩個波耳門式梁支持之。梁高 2 公尺,分成相等四節。橋上載重計分兩種：一爲靜重,其最大值係按每公尺長度等於 2 噸計算;一爲活重,其最大值係按每公尺長度等於 3 噸計算。試求各部材之最大應力。

7. 今有一波耳門式梁,跨度 18 公尺，高度 2.8 公尺,分成相等六節。假設各直柱頂端之載重均等於 2 噸，試求各部材之應力。

8. 若在前一題中,各直柱頂端之載重,自左數起,計爲 3, 2,4,3, 及 2 噸。試求兩端之抗力及各部材之應力。

9. 今有一華倫式梁,跨度 12 公尺，分成相等四節。各斜

桿與水平綫所交角度均等於 60°。上弦各接縫之載重，自左端數起，計為 4,6,5,及 4 噸。試求各部材之應力。

10. 若於前一題中，除上弦各接縫受有上述載重外，下弦各接縫亦各受有 2 噸之載重。於是各部材之應力將各等於若干？

11. 今有一鐵路橋，跨度 30 公尺，決定採用林維爾式梁。梁之高度擬定為 4.2 公尺，並分成相等六節。橋梁上部建築重 140 噸，最大活重假定為兩個機車之通過，其重量相等於每公尺長度 7 噸。試求各部材之應力。

12. 今有一勃熱提式梁，跨度 24 公尺，高度 3 公尺，分成相等六節。下弦各接縫均受有集中載重，計兩端各為 2 噸，中間各為 4 噸。試求各部材之應力。

13. 若於前一題中，除下弦各接縫受有上述載重外，上弦各接縫亦各受有 3 噸之載重。於是各部材之應力將各等於若干？

14. 今有一如第 113 圖所示格子式梁，跨度 20 公尺，其中反正兩架均為三個三角形所組成，其底角各為 45°。若在上弦兩端接縫上之載重各為 2 噸，在中間接縫上之載重各為 4 噸，試求各部材之應力。

15. 若於前一題中，除上弦各接縫受有上述載重外，下弦各接縫亦各受有 3 噸之載重，試再求各部材之應力。

16. 今有一格子式梁，跨度 24 公尺，高度 4.8 公尺，其中

反正兩架均爲三個三角形所組成。若上弦所受載重相等於每公尺長度 1.5 噸，下弦各接縫所受載重，自左數起，計各爲 6,8,10,8,6 噸，試求各部材之應力。

17. 試用如第 116 圖所示比例繪一懸臂式梁，其長臂之長度爲 24 公尺，所有斜桿均成 45° 之坡度。若各接縫之載重，自右端數起，計各爲 2,3,4,5,6,5 及 W 噸，試求 W 之大小及各部材之應力，並區別何者屬引力，何者屬壓力。

第十一章

重心——中立軸——惰力率——抗力圖

89. 重力及重心

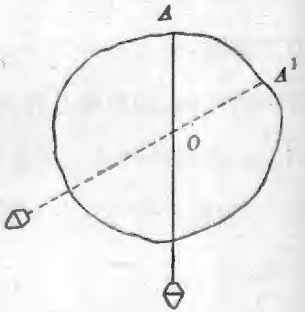
若有一物體從高處落下，則必以逐漸增加之速度向地心運行，此乃一極明顯之事實，而爲讀者所習見者也。惟物體落下必向地心運動者何哉？曰此中有力之作用在焉，此種力吾人稱之爲重力（亦稱地心吸力，蓋由於地球吸引地面之物體而生。最初悟及此理者爲牛頓爵士，卽有名之蘋果墜地故事也）。對於此種重力之認識，吾人已知其方向——係垂直作用；已知其意識——係背物體之向，卽向地心作用；再者，若將物體懸於一彈簧秤之下，則指針必指對秤碼上之某一刻度，此一刻度卽表示該物體之重量，亦卽表示作用於該物體之重力之大小，因之，重力之大小亦可知。

關於力之四個條件，今已知其三，所餘者僅有施力點尚不得而知耳。蓋重力作用於某一物體，係假定作用於該物體上之各質點。無論物體之位置如何，各重力之方向常成平行，此等平行力

必有一合力，其大小卽等於作用於各質點之重力之和，亦卽等於物體之全重量，其施力點卽爲吾人所欲求得者也。此種施力點吾人特稱之爲物體之重心。苟使物體能凝聚爲一極微渺之質點，則此質點卽可認爲原有物體之重心。故重力之施力點實以稱爲質心較爲妥切，但以重心一名詞爲世人所習用，故本書亦决定採用之。

前已言之，任一物體均可假設爲無數微渺之質點所組成，當其受重力之作用時，可卽假設其中之每一質點均受到重力之作用，無論物體之位置如何，此等重力之方向常成平行，於是吾人所欲研究者，乃爲解決一組平行力之合力問題矣。

求物體重心之一種最簡單方法，係用一綫將物體懸起，俾其在重力之作用下能任意取得任何位置。例如在第 117 圖中，有一形式不規則之板，今欲求其重心。先在板上任取一點 A，從此點繫一綫將板懸起，並另於此點懸一錘綫，則板之重心必在此垂綫之上，以筆記此錘綫之方向於板上。



第 117 圖

次再任取一點 A'，仍依前法於此點將板懸起，則其重心亦必在此錘綫之上，仍以筆記此錘綫之方向於板上。此綫與前綫所交之

點 O, 即爲板之重心。

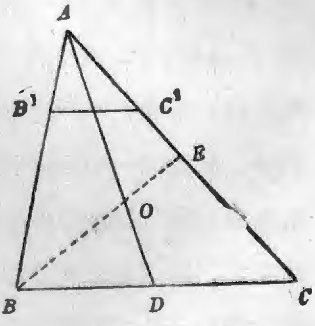
惟此種實驗法，對於某種形體有時亦不能適用，果欲求一能適用於任何情形之法，必須另覓途徑。其最爲世人所常用之法蓋有兩種：一爲幾何圖解法，用於比較簡單之形體；一爲連鎖多邊形法，用於比較複雜之形體。茲且分別述之於下。

幾何圖解法係用以解決比較簡單之幾何圖形。例如三角形，四邊形，多邊形，直柱體，三角錐體，等等，其中尤以三角形及平行四邊形最關重要。

90. 三角形

有一三角形 ABC, 如第 118 圖所示，今欲求得其重心。

試取粗細一律之綫一根而支持其中心，則此綫必成平衡；故綫之中心即爲其重心所在。依此原則，吾人可假設三角形 ABC 即爲一羣粗細一律之細綫所組成，其位置則與底邊 BC 平行依次排置直至頂點 A, 其長度則自最大等於 BC, 依次遞減，直至最小等於零。



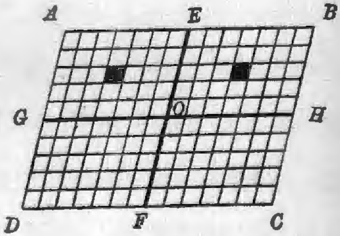
第 118 圖

平分 BC 於 D, 連結 AD。於是根據幾何學原理，所有此一羣細綫均將爲中綫 AD 所平分，因之，每綫之重心皆將在中綫 AD 之上，易言之，卽全三角形之重心必在中綫 AD 之上也。故若命 AD 代表刀鋒，將三角形支持於刀鋒之上，則全形必成平衡。以同理推之，全形之重心必在中綫 BE 之上。於是兩中綫之交點 O 卽爲所求之重心。DO 等於 $\frac{1}{3}AD$; EO 亦等於 $\frac{1}{3}BE$。因得定律如下：

任一三角形之重心必在其中綫三等分之點，卽中綫之交點。

91. 平行四邊形

第 119 圖表示一平行四邊形 $ABCD$, 茲且假設其爲無數微小之斜方形板所組成，其大小及重量均相等。



第 119 圖

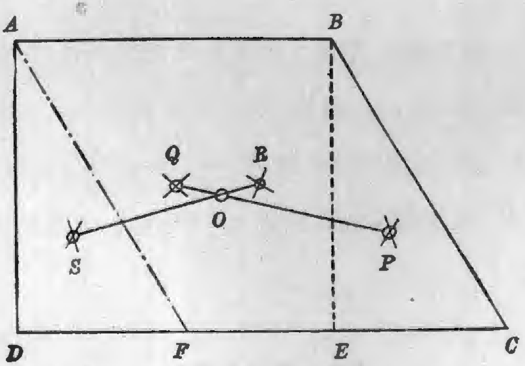
平分 AB 及 CD 於 E 及 F, 連結 EF。於是在 EF 平分綫之兩邊，小板之數將相等。試於同一橫列中任取兩個與 EF 等距之小板而研究之，因兩者之大小旣相等，其與 EF 之距離又相等，故其對於 EF 軸之力率亦必相等而相反，因之，此兩小板爲 EF 綫所支持必成平衡。今在 EF 之

右邊，凡有一小板之存在者，則在 EF 之左邊，亦必有一相當四偶與之成平衡，因之，所有在 EF 一邊之小板將與所有在其他一邊之小板成平衡。故平行四邊形之重心應在平分綫 EF 之上。以同理推之，平行四邊形之重心亦必在平分綫 GH 之上。於是 EF 與 GH 之交點 O 將爲所求之重心。根據幾何學原理，O 亦卽爲 AC, BD 兩對角綫之交點。因得定律如下：

任一平行四邊形之重心必在其兩對角綫之交點。

至於其他幾何圖形，苟其形狀簡單，亦往往可以將其分成若干三角形及平行四邊形，而後依照上述方法解決之。玆且試舉兩例於下以明其概。

例(1)　第 120 圖中之 $ABCD$ 係表示一鋼板，其中 AB 與



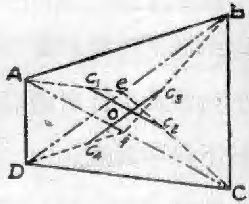
第　120　圖

DC 平行，今欲求得一適宜位置鑿一小孔，俾能由此小孔繫以綫

繩，將鋼板吊起時適成水平位置。

作 BE 平行於 AD，及 AF 平行於 BC。求得三角形 BEC 及平行四邊形 $ADEB$ 之重心，如 P 及 Q，聯結 PQ。再求得三角形 AFD 及平行四邊形 $ABCF$ 之重心，如 S 及 R，聯結 SR。於是 PQ 與 SR 之交點 O 卽爲所求小孔之位置，亦卽鋼板 $ABCD$ 之重心。

例(2)　第 120 圖 (A) 表示一四邊形 $ABCD$。先作對角綫 BD，將全形分成兩個三角形 ABD 及 CBD。平分 BD 於 e；聯結 Ae 及 Ce。取 $ec_1=\frac{1}{3}Ae$，及 $ec_2=\frac{1}{3}Ce$；於是 c_1 及 c_2 將各爲三角形 ABD 及 CBD 之重心。聯結 c_1c_2，則全形之重心將在 c_1c_2 綫上。次再作對角綫 AC，將全形分成兩個三角形 ACD 及 ACB。依同一方法，求得該兩三角形之重心，如 c_3 及 c_4。聯結 c_3c_4。於是 c_1c_2 與 c_3c_4 之交點 o 將爲全形之重心。



第 120 圖 (A)

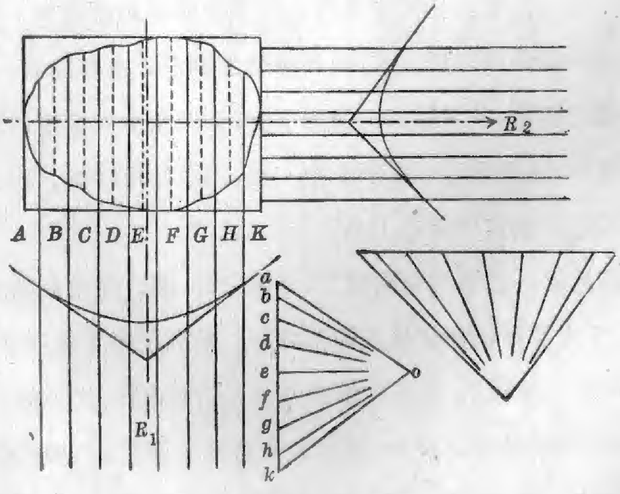
92. 連鎖多邊形

但若物體之形狀過於複雜，苟依上述方法將其分成若干平

行四邊形及三角形，則所分中綫過多，將徒致紊亂，不易辨清，而此種方法實已不適應用矣。凡遇有複雜及不規則之圖形，實以用連鎖多邊形法解決之最爲合宜。

連鎖多邊形法係先將全部圖形包圍於兩對直綫之內，此兩對直綫則交成相當角度，以交成正角爲最宜。而後用間距相等，方向則與各該對直綫相平行之綫，將全形分成若干部分，假設每一部分代表一分力，再分別求得此等分力之合力，兩合力之交點即爲所求之重心。玆且舉例以說明之。

舉例——今有一形式不規則之板，如第 121 圖所示。分別作垂直綫及水平綫各一對，將全形包圍。將兩垂直綫間之水平距

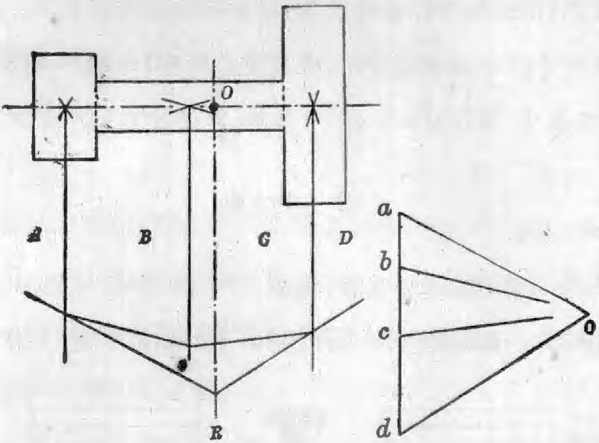


第　121　圖

離分成若干相等部分，如圖中虛綫所示，——在本例中係分成八個相等部分。通過圖形任作一水平綫，於此綫上求得各相等部分之中點，各作一垂直綫。於是此等垂直綫將各爲圖形之上下兩緣所交切。用尺量得此等交切綫之長度，卽命此等交切綫代表各該部分圖形之分力，如 AB, BC,……HK, 而後根據其長度，按相當比例尺，作力綫 ab, bc,……hk。作連鎖多邊形，如圖之左下部所示，依照前法求得合力 R_1 之位置。以同一方法將兩水平綫間之垂直距離分成若干相等部分，求得各部分圖形之分力，而後作一連鎖多邊形，求得合力 R_2 之位置，如圖之右上部所示。於是 R_1 與 R_2 兩作用綫相交之點將爲所求之重心。

上述方法對於任何重量均一之平面圖形均能適用。若該圖形對其中綫係成勻稱之式，例如鋼軌之剖面，其形狀爲一工字，或大梁之剖面，其形狀爲一長方形者，則問題更爲簡單，蓋遇有此種情形，連鎖多邊形僅須求得一個，問題卽可解決，因此種圖形之重心必在其中綫之上也。

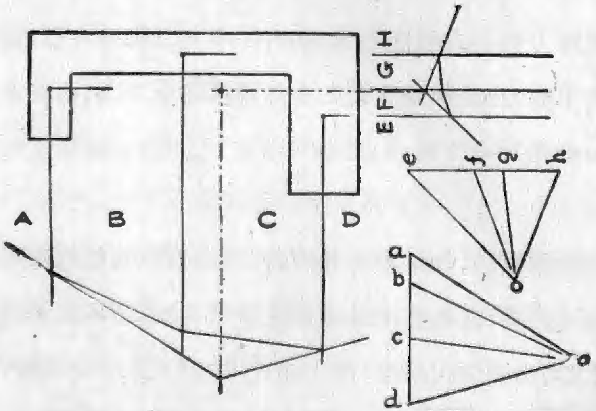
玆且舉一工字剖面而言之，如第 122 圖。欲求此種剖面之重心，可先將該剖面分成三個長方形，分別求得各部材之重心，如圖中之×字所示。通過此等重心各作一垂直綫。作力綫。ab,bc, cd, 使分別依相當之比例，表示各長方形之面積。作連鎖多邊形，求得合力 R。此合力 R 之作用綫與工字剖面之中心綫相交之



第　122　圖

點 O，卽爲所求之重心。

至若圖形並非勻稱，有如第 123 圖所示槽字剖面，則欲求

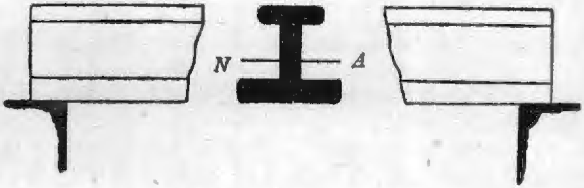


第　123　圖

重心,仍須作兩個連鎖多邊形,而後求得兩合力之交點。讀者試依下開尺寸作一槽字剖面圖,求其重心所在:短邊 4 公分×1.5 公分;長邊 6 公分×2.5 公分;腹部 8 公分×1.5 公分。

93. 中立軸

若有一梁兩端靠於支牆,如第 124 圖所示,則當其受外力之作用時,上部纖維受壓力而縮短,下部纖維將受引力而伸長,



第 124 圖

惟在此壓力與引力變換之處,必有一中立之部分在焉,並不發生任何水平應力。此部分在梁之全部則稱爲中立面,而在其中之任一剖面則稱爲中立軸,如圖中所示之 $N.A.$, 即爲該工字形之中立軸。

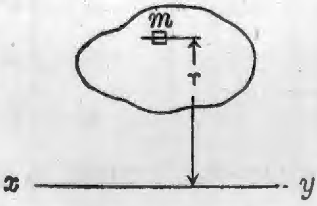
由歷來實驗,知梁當受外力時,如應力並未超過彈限 (彈限之釋義可謂爲:凡物體受外力則生變形,設其力不過某限度, 則當移去時,仍能回復原形;倘一過此限,則不能完全恢復,而有永久之變形。在此限度之單位應力,即爲其材料之彈限),則中立軸

必通過該剖面之重心。吾人設計任何形式之梁，蓋必求得中立軸對於該剖面之位置也。

94. 惰力率

梁受外力則生撓曲，欲研究梁之撓度，必須引用一種係數，稱為剖面之惰力率者，通常以I表示之，此一係數依剖面之形狀及大小而定，計算時並須認定某一定軸為對象。在梁之剖面中，中立軸即被用為對象之軸。

今若有一物體對於某一軸 xy 取如第 125 圖所示之位置。試於此物體中任取一微粒 m，其與 xy 軸之距離為 r，於是該微粒之惰力率，對於 xy 軸而言，將等於 mr^2。全體之惰力率對於 xy 軸而言，將為此等微粒之惰力率之和，等於

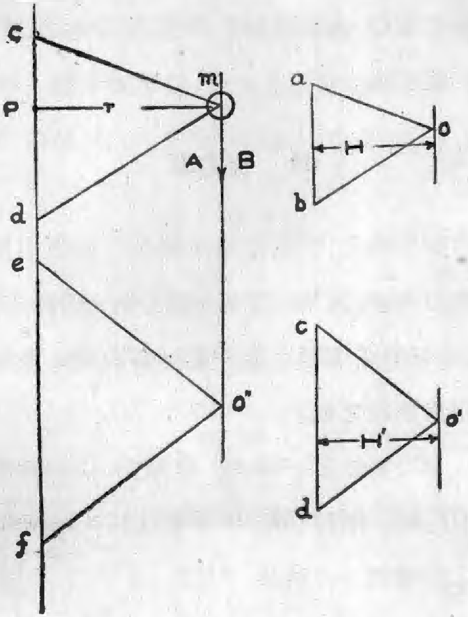


第 125 圖

$$I=\Sigma m\times r^2 (\Sigma \text{ 為表示和數之記號})。$$

此種惰力率亦可用圖解法求得之。試就第 126 圖而言，命 P 為某一軸 xy 之旁面觀，m 為一微粒，今欲求得該微粒對於 P 之惰力率。

作 ab 力綫使代表 m。任擇一點 o，其與 ab 之距離為 H，



第 128 圖

H 以等於整公分數爲最佳。聯結 oa, ob, 並作 mc, md, 分別與 oa, ob 平行。於是依第四章中所述原理,將得

$$ab\times r=cd\times H。$$

$ab\times r$ 爲微粒 m 對於 P 點之力率,亦稱初力率。

玆再另作一 cd 綫,如圖之右下邊所示,並任擇一點 o', 其與 cd 之距離爲 H', 如能使 H' 等於 H 最佳。由 m 之重心作一垂直綫,於此垂直綫上任擇一點 o''。作 $o''e$, $o''f$ 使分別與 $o'c$, $o'd$ 平行。

於是依同一原理,將得

$$ef\times H'=cd\times r$$

但 $$cd=\frac{ab\times r}{H},$$

$$\therefore\quad ef\times H'=\frac{ab\times r}{H}\times r,$$

$$\therefore\quad ef\times H'\times H=ab\times r^2=mr^2=I_p。$$

此$(ab\times r^2)$一數卽稱爲 m 對於 p 點之複力率(因其含有力矩 r 之自乘方),或稱爲 m 對於 p 點之惰力率。若上圖中 ab 之比例尺係按 1 公分=1 公斤計算,而 r 又係按足尺繪製,則 I_p 之求得將毫無困難可言。但事實往往不能如此簡單容易,大概 ab 及 r 常須用一種較爲複雜之比例尺,於是對於 I_p 之眞值將不免引起紊亂,讀者務須注意。

試命力之比例尺爲 1 公分$=p$ 公斤,

空間之比例尺爲 1 公分$=q$ 公尺,

於是 $$(m\times r)=cd\times H=(cd\times p)\times(H\times q)$$

$$=cd\times p\times q\times H\text{ 公斤公尺。}$$

$$(m\times r^2)=(ef\times p)\times(H'\times q)\times(H\times q)$$

$$=(ef\times p\times q^2)\times H'\times H\text{ 公斤}\overline{\text{公尺}}^2。$$

例如命 m 等於 20 公斤,r 等於 3 公尺,圖中所用力之比例尺爲 1 公分=10 公斤,又空間之比例尺爲 1 公分=1 公

尺。於是 $ab=2$ 公分。又命 $H=H'=2$ 公分。

由圖中量得 $ef=4.6$ 公分。

於是按直接計算法，用公式 $I=mr^2$，

得　$I=20\times3\times3=180$ 公斤$\overline{公尺}^2$。

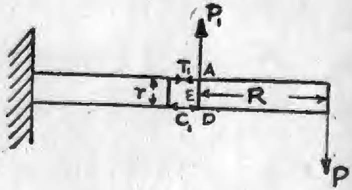
按圖解法，用公式 $I=ef\times p\times q^2\times H\times H'$，

得　$I=4.6\times10\times1^2\times2\times2=184$ 公斤$\overline{公尺}^2$。

兩結果相差有 4 個單位數，此係因在圖上描繪平行綫，輾轉移動三角板，致不免發生些微誤差，繪圖時苟能愈加謹愼，則結果將愈近準確。

95. 抗力圖及剖面係數

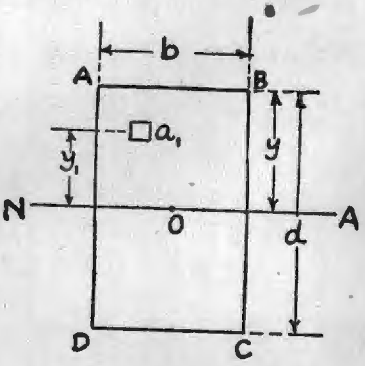
本書前於第五章中曾經述及抗力率之意義，茲再將此意義引伸之。如第 127 圖，設將第 40 圖所示之梁略去其左部，僅就右部而論，則載重 P 與平衡力 P_1 將致成一種彎曲率，有使該梁繞 AD 剖面之重心 E 順時針向而旋轉之趨勢，同時引力 T_1 及壓力 C_1 亦將致成一種抵抗率，有使該梁繞 E 點逆時針向而旋轉之趨勢。此兩種偶力作用於梁上乃致成梁之平衡，因之，彎曲率與抵抗率。



第　127　圖

其大小必相等而方向則相反。

依歷來實驗，知梁當受外力時，如應力並未逾過彈限，則其任何剖面上各處之水平應力，均與其離中立軸之距離成正比例。今命 f 爲梁之上邊或下邊之最大水平單位應力(壓力或引力)，y 爲自中立軸至上邊或下邊之距離，第 128 圖 y' 爲任何纖維至中立軸之距離，則在 y' 處之水平單位應力將爲 $f\dfrac{y'}{y}$。又設將該剖面分爲無數微渺之元面，命在 y_1 處之元面爲 a_1，則在此面之應力將爲 $a_1\times f\dfrac{y_1}{y}$。同樣，在



第　128　圖

其他各元面 $a_2, a_3, \cdots\cdots$ 之應力將各爲 $a_2\times f\dfrac{y_2}{y}$，$a_3\times f\dfrac{y_3}{y}$，$\cdots\cdots$。此等應力對於中立軸之力率將各爲

$$\left(a_1\times f\frac{y_1}{y}\right)\times y_1=\frac{f}{y}\times a_1y_1^2,$$

$$\left(a_2\times f\frac{y_2}{y}\right)\times y_2=\frac{f}{y}\times a_2y_2^2,$$

$$\left(a_3\times f\frac{y_3}{y}\right)\times y_3=\frac{f}{y}\times a_3y_3^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但全剖面之抵抗率卽爲此等應力之代數和，故

$$抵抗率=\frac{f}{y}(a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2+\cdots\cdots)$$

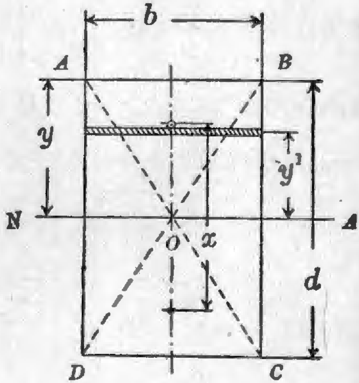
$$=\frac{f}{y}\times I$$

前已述明任何剖面之彎曲率等於該剖面之抵抗率。

命 M＝彎曲率，

則得 $M=\frac{f}{y}\times I$; 或 $\frac{M}{I}=\frac{f}{y}$。

此式卽稱爲撓曲公式，其中之$\frac{I}{y}$一係數則稱爲剖面係數。此$\frac{I}{y}$之值隨剖面之形式而各有不同。凡梁受有載重而致成彎曲時，欲研究其強度，必先將此剖面係數加以討論。如已知某剖面之大小，欲求其剖面係數，亦可用簡單圖解法如下。



第 129 圖

假設有一剖面 $ABCD$，如第 129 圖所示，將其分成若干狹條，並命在某一狹條內所生最大水平單位應力(壓力或引力)爲每平方公分 f 公斤，狹條與中立軸 $N.A.$ 之距

離則等於 y。於是依前述原則，在任何距離 y' 處之狹條內所生單位應力將等於 $f\frac{y'}{y}$，其值將較 f 爲小。

命此狹條之面積等於 a 平方公分，於是作用於該狹條上之總應力將爲 $f\frac{y'}{y}\times a$。今若將面積 a 縮小爲 a'，則因總應力並未變化，於是其單位應力將見增大。姑假設面積由 a 縮小爲 a' 時，係將狹條之寬度改窄，至於深度則仍如原狀，並命此新得之應力強度仍爲每平方公分 f 公斤，於是

$$f\times\frac{y'}{y}\times a=f\times a'$$

$$\therefore\ \frac{a'}{a}=\frac{y'}{y}。$$

故苟欲於全部面積上得到一勻等之應力強度，則各狹條之寬度必使其與離中立軸之距離成正比例。易言之，即各狹條之兩端將爲三角形 AOB 或 COD 所包圍，三角形之底邊即爲該剖面之上下兩邊 AB 或 CD，而三角形之兩邊則爲剖面之兩對角綫 AC 及 BD。

吾人於是得到一種三角形面積，其中應力強度常等於 f，因之，其總應力 P 將等於三角形之面積乘應力強度之積。

$$\therefore\ P=\frac{1}{2}\left(b\times\frac{d}{2}\right)\times f=f\times\frac{bd}{4}。$$

此一公式對於中立軸之上下兩三角形均適用之。

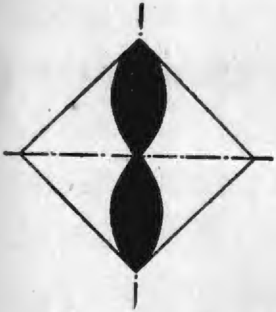
上述之總應力 P 可以假設其係作用於三角形之重心，其與頂點 O 之距離等於$\frac{2}{3}$三角形之高度，因之力矩 $x=\frac{2}{3}d$，而該剖面之抵抗率將等於

$$f\times\frac{bd}{4}\times\frac{2}{3}d=f\times\frac{bd^2}{6}。$$

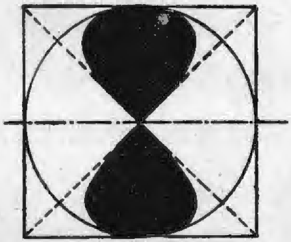
$\frac{bd^2}{6}$一值即爲剖面係數，AOB 及 COD 兩三角形則稱爲抗力圖。故欲用圖解法求得剖面係數，可按兩個簡單步驟進行：第一步，先作抗力圖，一在中立軸之上，一在其下；第二步，求得兩圖之重心，而後用上式計算之。

由上述抗力圖觀之，將見苟某一剖面中任何部分之寬度，其寬窄能適合應力之需要，則所用材料將爲最經濟之道，不過此爲一種理想情形，事實絕難辦到。試取抗力圖與原有剖面形互相比較，將見事實距理想殊遠也。

根據所得抗力圖之情形，則長方形誠非一經濟之剖面，因在中立軸之附近，所生應力實非常微小(在中立軸上則已等於零)並無須如許之寬度。但尙有若干剖面，其形狀尤劣於此者，例如第 130 圖中所示方形，其對角綫一成垂直，一成水平，及第 130 (A) 圖所示圓形，苟取與各該剖面中之抗力圖(塗黑部分)相較，將見其中部材料等於廢棄者如何之多！



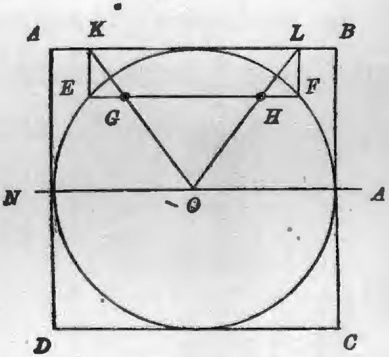
第 130 圖



第 130 圖(A)

抗力圖亦可用圖解法求得之,茲且詳述其方法於下。

如第 131 圖,先求得中立軸 $N.A.$ (如係勻稱圖形,則手續殊簡便,如係非勻稱圖形,則須用兩個連鎖多邊形)。在剖面之左右兩邊作 AD 及 BC 兩切綫,使與 $N.A.$ 成垂直,再在上下作 AB 及 DC 兩綫,使與 $N.A.$ 平行,並與之等距,其中最少有一綫須於距 $N.A.$ 最遠之點與該剖面相切。任作一綫 EF, 平行於 $N.A.$ 使交剖面於 E,F 二點。由 E 及 F 各作一垂直綫,使交 AB 於 K 及 L。聯結 OK 及 OL。此兩綫(可稱爲造圖綫)將與 EF 相交於



第 131 圖

G, H二點。於是 G, H 將為所求抗力圖之兩點。依此作一羣如 EF 之平行綫，求得一羣如 G, H 之交點。聯結此等交點，卽得所求抗力圖。

抗力圖繪成後，或用懸吊法，或用連鎖多邊形法，再求得其重心。

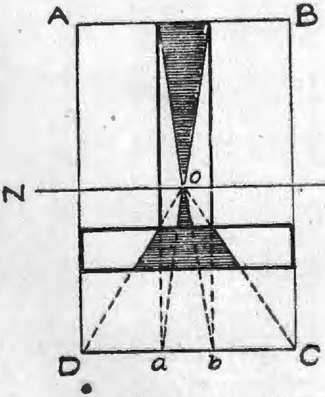
命 x＝兩重心之距離，以公分計，

A＝一半抗力圖之面積，以公分^{2}計，

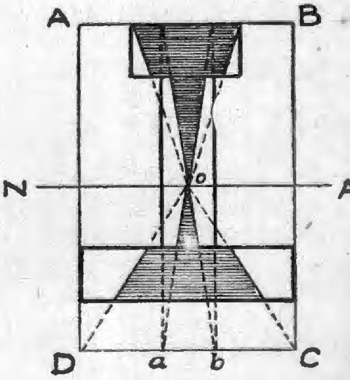
Z＝剖面係數，以公分^{3}計。

於是 $Z = A \times x$。

第 132 圖表示一 **T** 字剖面，第 133 圖表示一 **I** 字剖面，其中影綫部分均為求得之抗力圖，至於虛綫則為造圖綫。在此種



第 132 圖



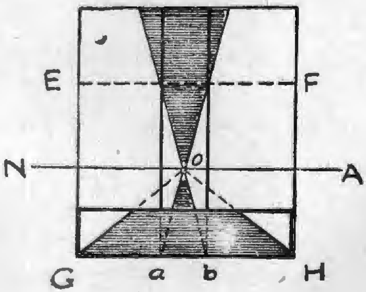
第 133 圖

剖面中，因腹部或邊緣之寬窄，上下一律，故對於各該部分，僅須

求得兩點，如 D, C, 或 a, b, 聯結此等交點與重心 o, 即可求得各該部分之抗力圖。

抗力圖固可指示吾人以某項圖形應依如何結構，其材料方能稱爲經濟，然亦有某種剖面，其處在抗力圖範圍以外之部分，並非完全無用者，誠未可一概而論也。

吾人苟就第 132 圖所示 T 字剖面之抗力圖而研究之，將見腹部材料所受應力較邊緣材料所受者殊高。於是，若材料之引應力及壓應力強度相等，例如鋼或熟鐵，則 T 字形誠非一經濟之剖面，不宜用爲桁梁。但若材料之引應力及壓應力強度相差大有懸殊，例如生鐵，其壓應力強度大於引應力強度有五倍之多則情形自有不同。吾人研究用生鐵製成之物形，應求得其兩種不同之抗力圖，一係依壓應力基綫爲準則，如第 132 圖所示，一係依引應力基綫爲準則，如第 134 圖所示。在前一圖中，其與中立軸平行之上下兩綫，如 AB 及 CD, 其一係與剖面之最遠一點相切，如 AB, 此綫稱爲壓應力基綫；在後一圖中，其與中立軸平行之上下兩綫，如 EF 及 GH, 其一係與剖面之最近一點相切，如 GH,



第 134 圖

此綫稱爲引應力基綫。

今欲說明此兩種不同抗力圖之重要，且舉一實例於下。

例題 —— 有一生鐵製 T 字梁，其剖面高 9 公分，寬 7.6 公分，厚 1.6 公分。梁之跨度爲一公尺。假設梁之腹部安置在上，邊緣安置在下，試求其中心處剖面所能承受之安全載重。

若生鐵之壓應力 f_C＝每平方公分 420 公斤，

引應力 f_T＝每平方公分 140 公斤。

(解) (a)依壓應力基綫爲準則者。

先按足尺作一剖面形，如第 132 圖。次量算在中立軸以上之抗力圖面積，得 4.84 平方公分，又量兩邊重心距離得 6.35 公分。

$$\therefore \quad \text{剖面係數 } Z = 6.35 \times 4.84 = 30.73。$$

命 W＝所求安全載重，

L＝梁之跨度，

M＝最大彎曲率，

$$\text{於是} \quad M = \frac{WL}{4} = f_c \times Z_c,$$

$$\therefore W = \frac{f_c \times Z_c \times 4}{L} = \frac{420 \times 30.73 \times 4}{100} = 520 \text{ 公斤。}$$

故若就壓應力而言，梁之安全載重將爲 520 公斤。

(b)依引應力基綫爲準則者。

仍按足尺作一剖面形，如第 134 圖。次量算在中立軸以上之抗力圖面積，得 9.67 平方公分。

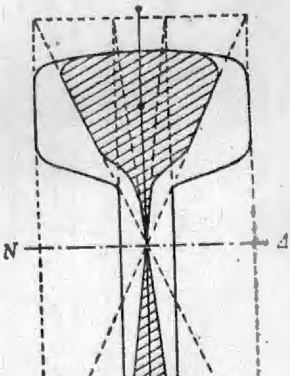
$$\therefore \quad \text{剖面係數}\ Z_t=6.35\times 9.67=61.41$$

$$M=\frac{WL}{4}=f_t\times Z_t,$$

$$\therefore \quad W=\frac{f_t\times Z_t\times 4}{L}=\frac{140\times 61.41\times 4}{100}=350\ \text{公斤。}$$

故若就引應力而言，梁之安全載重將爲 350 公斤。吾人設計生鐵製之梁，應將引應力及壓應力同加考慮，而取其較小一數，故在中心處剖面所能承受之安全載重應爲 350 公斤。

惟吾人若就第 134 圖觀之，將見其在 EF 綫以上之一部分抗力圖，其範圍似已出乎腹部之寬度以外，是在該部分之材料將受到逾限之應力，而成過分緊張之狀。要知此種抗力圖係依引應力基綫爲準則而求得者，今在該部分之應力係屬壓力，其值遠高於引應力之極限，故上述情形並不致發生問題。



第 135 圖

第 135 圖表示某種鋼軌剖面之抗力圖。由圖中量得一半抗力圖之面積爲 19.67 平方公分，兩重心

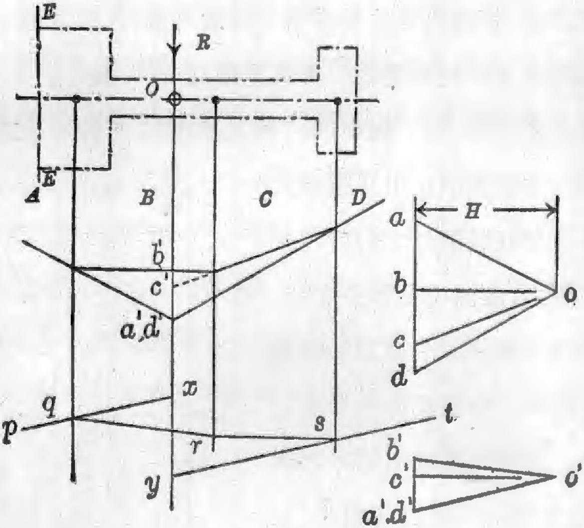
之距離爲 11.43 平方公分。

剖面係數＝19.67×11.43＝224.83＝225。

(注意——該剖面之高度＝15.24 公分)。

96. 一組力之惰力率

依前述惰力率之圖解法,亦可求得一組力之惰力率,有如第 136 圖所示,圖中虛綫表示一 I 字梁之剖面。



第 136 圖

今姑將該剖面分成三個部分，一爲壓力邊緣,一爲腹部,一爲引力邊緣。分別計算各該部分之面積,並以 *AB*, *BC*, 及 *CD*

代表之。作力綫 ab, bc 及 cd 分別代表 AB, BC 及 CD。任擇一點 O，務使其極距 H 等於整公分數。作連鎖多邊形，求得合力 R。於是 R 之作用綫必將通過剖面之重心無疑。

假定 R 之作用綫卽取作對象之軸，今欲求得此一組力對於該軸之惰力率。法先求定連鎖多邊形之各邊與 R 之作用綫相交之點，如於必需時，可將連鎖綫延長之，例如 a', b', c' 及 d'。於是依第四章所述原理，得

AB 對於 O 點之力率 $=+(a'b'\times H)$，

BC 對於 O 點之力率 $=-(b'c'\times H)$，

CD 對於 O 點之力率 $=-(c'd'\times H)$。

由上式觀之，將見此等間距 $a'b'$，$b'c'$，$c'd'$ 如以 H 乘之，將等於各該力對於對象軸之初力率。

玆再將此等間距依樣作於圖之右下面。任擇一點 O'，其極距為 H'，H' 以等於 H 為最適宜。依法再作一第二連鎖多邊形 $pqrst$。延長 pq 及 st，使分別與對象軸相交於 x 及 y。於是所求惰力率將等於

$$xy\times H\times H'。$$

xy 係按適當比例尺量算。

依理，此一組力之惰力率應卽等於原剖面之惰力率，不過實際所得結果往往不能相等，有時兩值且相差頗大。試舉一例於下

例題——命第 136 圖中I字剖面之壓力邊緣為 20 公分 ×10 公分=200 平方公分；腹部為 30 公分 ×5 公分 =150 平方公分；引力邊緣為 15 公分 ×5 公分 =75 平方公分。於是 ab，bc，及 cd 將分別等於 200，150，及 75 平方公分。

按照上開尺寸繪一足尺圖，並依如第 136 圖所示解法，求得 R 之作用綫及 xy 距離。命 $H=H'=12$ 公分，力之比例尺為 1 公分 =30 平方公分。

由圖中量得 $xy=23.3$ 公分。

於是該組力對於重心 O 之惰力率

$$=xy\times p\times q^2\times H'\times H=23.3\times 30\times 1^2\times 12\times 12$$

$$=100650\ \overline{\text{公分}}^4。$$

但如用公式計算，則原剖面之惰力率將為

$$I_{\circ}=I_E+d^2A,$$

其中 $I_{\circ}$ =該剖面對於中立軸之惰力率；

I_E =該剖面對於 $E-E$ 軸之惰力率；

d =中立軸與 $E-E$ 軸之距離，由圖中量得=16.1公分。

A =該剖面之面積。

由此得 $I_{\circ}=101840\ \overline{\text{公分}}^4$。

注意——在本例中，AB，BC 及 CD 均係以面積計算，故其單位為平方公分，於是所謂惰力率之單位將為 $\overline{\text{公分}}^4$。如命

AB, BC, 及 CD 分別代表剖面中各部分之重量，即等於剖面所用材料之比重乘各該部分之面積，以公斤計，則其單位將爲公斤 / $\overline{\text{公分}}^2$。易言之，即前一單位係依面積而言，後一單位則依比例於面積之力而言也。

由以上所得兩結果觀之，將見其間不免發生頗大之差數，故對於此種剖面，欲求一準確惰力率，則上述圖解法似不能採用。

查此種差數所以發生之原因，實以剖面之分析過於簡單。吾人苟將剖面分成若干與中立軸平行之狹條，卽以此等狹條之面積表示一組之力，而後依前法製成一連鎖多邊形，量算其面積，由此求得剖面之惰力率，則結果自能近乎眞確。此種方法爲摩耳教授所創立，故稱爲摩耳氏解法。茲且詳述於下。

如第 137 圖，先將剖面分成若干寬度相等之狹條，由各個狹條之重心各作一垂直綫，如圖中之虛綫所示。

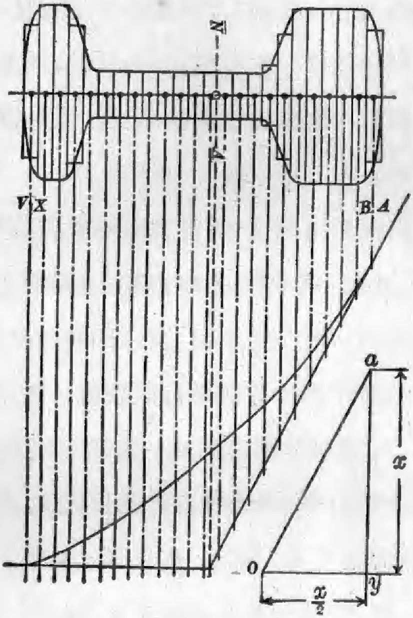
作力綫 ay 使表示 $AB, BC, \cdots\cdots XY$ 等力之和。命 ay 長度等於 x 公分，並使極距 H 等於$\frac{x}{2}$公分。作連鎖多邊形，用面積計量算其面積，並量算剖面之面積。

命　A_1＝連鎖多邊形之面積，以平方公分計，

A_2＝剖面之面積，以平方公分計，

I ＝惰力率，以$\overline{\text{公分}}^4$計，

於是　$I = A_1 \times A_2$。



第 137 圖

本圖所示形狀與第 135 圖完全相同，故其結果亦應相等。今用足尺繪一圖，並依法作一連鎖多邊形。分別量算其面積，得

連鎖多邊形之面積(A_1)＝29.67 平方公分，

剖面之面積(A_2) ＝64.50 平方公分，

$$\therefore\ I.=29.67\times 64.50=1913.71\,\overline{\text{公分}}^4。$$

及剖面係數 $Z=\dfrac{I}{y}$，

其中 y＝剖面中受有最大應力之纖維與中立軸之距離，由圖中

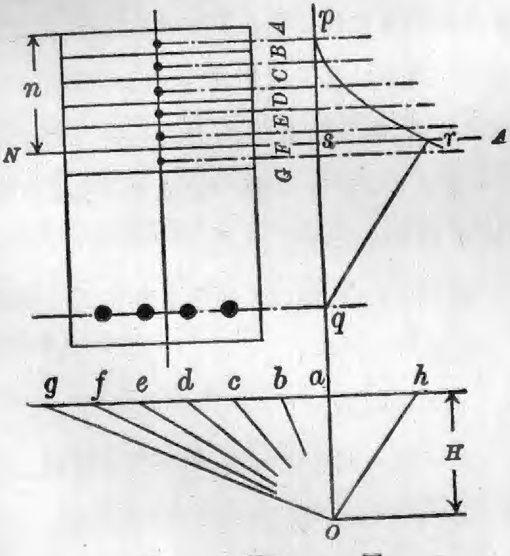
量得爲 8.255 公分。

$$\therefore \quad Z=\frac{1913.71}{8.26}=232。$$

上一數值與第 135 圖中所示由抗力圖算得之 $Z\ (=225)$ 相差無幾，故摩耳氏解法實一頗爲準確之法。

97. 鋼筋混凝土梁之惰力率

第 138 圖表示一矩形混凝土梁，內置鋼筋四根。混凝土內



第 138 圖

置有鋼筋，其目的在使鋼筋受引力，而混凝土則受壓力。此種剖

面亦可用摩耳氏法解剖之。

由歷來實驗知

$$\frac{\text{鋼筋之彈率}}{\text{混凝土之彈率}}=15$$

(按彈率爲某一有彈性之物體受外力時,其單位應力與單位變形之比率。此比率又稱楊氏係數,其公式爲

$$E=\frac{f}{\delta},$$

其中 $E=$彈率, $f=$單位應力, $\delta=$單位變形。)

今欲求此種剖面之惰力率, I 及剖面係數 Z 之值,先將剖面中受壓力之一邊分成若干狹條,通過各條之重心作一水平綫。量算各狹條之面積,並分別用 AB, BC, ······· FG 代表之。作力綫 ab, bc, ·······fg (注意 —— 圖中之壓力一邊僅須將一部分分成狹條,其理由見下述自明)。

通過 a 作一垂直綫,取 oa 長度使等於 H, 務使 H 等於整公分數。量算鋼筋之面積。

命 $m=$鋼筋數,

$a'=$每一鋼筋之面積,以平方公分計。

於是 鋼筋之總面積$=(m\times a')$平方公分。

作 ah 使等於$(15\times m\times a')$平方公分, ah 所用比例尺務使與 ag 所用者相同。聯結 b, c, ·······各點與極點 o, 並作連鎖多

邊形 pqr，如圖所示。於是通過 r 所作水平綫將爲剖面之中立軸，而剖面對於中立軸之惰力率 I 將等於面積 $pqr \times 2H$。

因鋼筋之惰力率 $I_s = 15 \times$ 鋼筋面積 $\times \overline{sq}^2 = ah \times \overline{sq}^2$。

但 $\dfrac{sr}{sq} = \dfrac{ah}{ao} = \dfrac{ah}{H}$，

$$\therefore \quad sq = \frac{sr \times H}{ah}，\quad 又 \quad ah = \frac{sr \times H}{sq}。$$

$$\therefore \quad ah \times \overline{sq}^2 = sq \times sr \times H = 2 \times 面積\ qsr \times H。$$

$$\therefore \quad I_s = 面積\ qsr \times 2H。$$

同樣，混凝土之惰力率 $I_c =$ 面積 $psr \times 2H$。

$\therefore$ 剖面之惰力率 $I = I_s + I_c =$ 面積 $pqr \times 2H$。

剖面圖常按某一比例尺繪製，故量算 pqr 面積務須注意所用比例尺。例如剖面圖係按 $\frac{1}{2}$ 尺寸繪製，則所量剖面及連鎖多邊形之面積將僅等於足尺之 $\frac{1}{4}$。又若 ah 係按某一縮尺繪製，則 sr 亦將按同等比例縮小。

今若命 $k =$ 剖面縮小之倍數，

$n =$ 力綫 ag 之比例尺，

$A_8 = pqr$ 之實在面積，以平方公分計。

於是 $\quad I = (A_8 \times k^2 \times n) \times 2H$

$= (A_8 \times k^2) \times (2H \times n)\ \overline{公分}^4$。

茲試舉一實例於下。

例題——設有一鋼筋混凝土梁，其剖面爲 30 公分 ×45 公分，內置 2 公分直徑之鋼筋四根。

命剖面比例尺爲 1 公分=5 公分，

$\therefore$ $k=5$；力綫比例尺爲 1 公分=50平方公分，

$\therefore$ $n=50$。

依前法繪一剖面形，並作力綫圖及連鎖多邊形。

命　極距 $H=6$ 公分。

由圖中量得中立軸與鋼筋之距離 $sq=21$ 公分。

面積 $qsr=5.5$ 平方公分。

面積 $psr=2.8$ 平方公分。

$\therefore$ 面積 $pqr=8,8$ 平方公分。

又鋼筋面積 $\times 15=4\times(3.14\times 1^2)\times 15=188$ 平方公分。

於是 $I=pqr\times k^2\times 2H\times m=8.3\times 5^2\times 2\times 6\times 50$

$=124500\ \overline{\text{公分}}^4$。

又 $I_s=qsr\times k^2\times 2H\times m=5.5\times 5^2\times 2\times 6\times 50$

$=82500\ \overline{\text{公分}}^4$。

如用 $I=mr^2$ 之公式，則得

$I_s=$ 鋼筋面積 $\times\overline{sq}^2=188\times\overline{21}^2=82900\ \overline{\text{公分}}^4$。

以上 I_s 之兩値略有不同，則以繪圖時不免發生些微誤差

所致也。

I 旣求得之後，則欲求剖面係數已屬易事。

命 f_c = 混凝土之定限應力，以公斤/公分^{2}計，

n = 剖面中受有最大應力之纖維與中立軸之距離，以公分計。

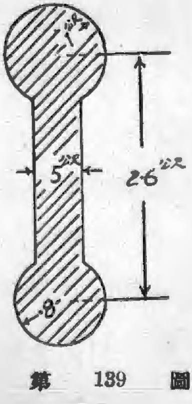
於是 $Z=\frac{I}{n}$，　又抵抗率 $=f_c\times Z=\frac{f_c\times I}{n}$。

習　　題

1. 任作一不規則之圖形，有如第 121 圖所示，試用連鎖多邊形法求得其重心。

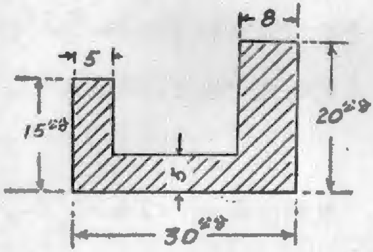
將原圖仔細剪下　再用懸吊法求得其重心以資核對。

2. 有一鋼板如第 139 圖，兩端爲兩圓形，其直徑各爲 1 公尺及 8 公寸，中間爲一矩形，寬 5 公寸，其中心綫與兩圓心在同一直綫上。兩圓心之距離爲 2.6 公尺。試求鋼板之重心。



第　139　圖

3. 設有一槽形剖面，其尺寸有如第 140 圖。試求其中立軸。



第 140 圖

4. 有一矩形梁高 16 公分，寬 8 公分。試作一抗力圖並求得其剖面係數，再用計算法核對之。若梁之跨度爲 1.2 公尺，最大應力不得過 210 公斤/公分^2，試求梁上所能承受之安全均佈載重。

5. 試求下述諸剖面之抗力圖。

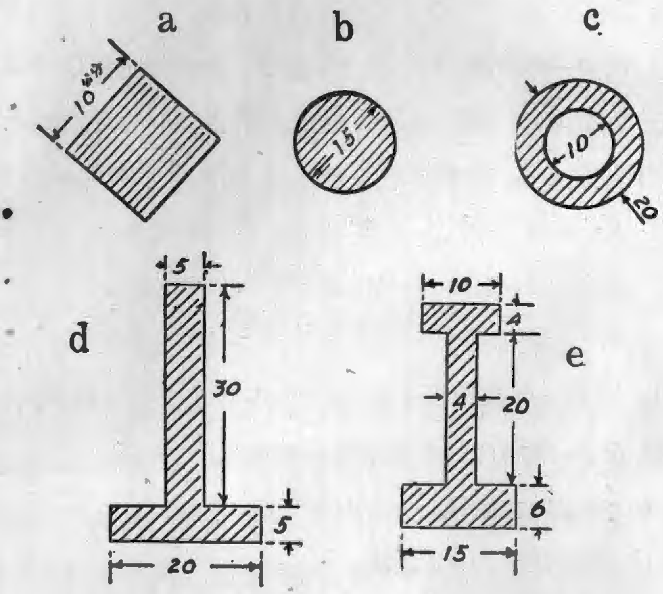
(a)方形，每邊 10 公分，對角綫成垂直，如第 141 圖之(1)。

(b)圓形，直徑 15 公分，如第 141 圖之(2)。

(c)圓環，外環直徑 20 公分，內環直徑 10 公分，如第 141 圖之(3)。

(d)T字形，如第 141 圖之(4)。

(e)工字形，如第 141 圖之(5)。



第　141　圖

6.　有一生鐵製工字梁，高 45 公分。引力邊緣爲 20 公分 ×7.5 公分；壓力邊緣爲 15 公分 ×5 公分；腹邊寬 5 公分。試求其重心並作一抗力圖求得其剖面係數。

若梁之跨度爲 2.4 公尺，最大引應力不得過 140 公斤/$\overline{公分}^2$，試求梁上之安全均佈載重。

7.　試作一如第 135 圖之工字剖面，高 20 公分。求其重心，並作一抗力圖求得其剖面係數。

8.　試用摩耳氏法求得第 7 題中所示 I 字剖面之惰力率。

計算 Z 之值並與第 7 題中求得之值相核對。

9. 試作一水平綫 AB 長 20 公分。於此綫上施以 $P, Q,$ 及 S 三力，其與 A 端之距離各爲 8,12, 及 20 公分。若三力各等於下開之大小，試求該組力對於 A 點之惰力率：——

P	+16 公斤，	+12 公斤，	+16 公斤，
Q	+12 公斤，	−20 公斤，	−14 公斤，
S	+20 公斤，	+22 公斤，	−20 公斤，

10. 今有一鋼筋混凝土梁，計用圓徑 2.5 公分之鋼筋六根。梁寬 45 公分。鋼筋與頂邊之距離 60 公分。試求

(a) 中立軸之位置。

(b) 剖面之惰力率 I 之值。

(c) Z 之值。

假定梁係平支於兩端，上承每公尺 $\frac{1}{2}$ 噸之均佈載重。試求梁之最大安全跨度，若混凝土之定限應力不得過 42 公斤/$\overline{公分}^2$。

11. 今有一鋼筋混凝土梁，其剖面寬 25 公分，高 40 公分，內置鋼筋三根，每根之面積爲 3.14 平方公分。試求剖面之惰力率。若 f_c 等於 42 公斤/$\overline{公分}^2$，則抵抗率當爲若干？

第 十 二 章

擋土牆及攔水壩

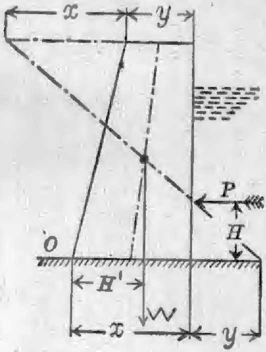
98. 攔水壩之設計

擋土牆爲一種防護土工之建築，其條件要能承受土壓，而不致發生崩裂傾覆現象，其所用材料多爲磚，石，或鋼筋混凝土。至於攔水壩則爲一種擋水之設備，其作用雖與擋土牆稍有不同，但兩者結構之形式及壓力之計算則完全相似。

作用於擋土牆之土壓，或作用於攔水壩之水壓，及此種建築物所生反應力，其性質究屬如何，至今仍成爲學者討論之問題。以前雖有多數學者根據某種假定，成立某種理論，但此種理論究與事實相符與否，固仍屬疑問也。此種問題誠屬煩複難解，尙有待於世人之繼續努力研究。茲篇所欲論述者，僅其中之最簡單易解者耳。

今試取一最簡單之攔水壩而言，如第 142 圖。根據水力學之原理，則在壩之背面將受到水壓力之作用，其大小等於 P，其方向則與背面成垂直。此水壓 P 將致成一種顚覆力率，等於 P

$\times H$,足使攔水壩有繞 O 點顛覆之趨勢。但同時壩之本身重量 W,作用於與 O 點相距 H' 之處,將致成一種抵抗率,等於 $W\times H'$ 以抵抗之,俾本身常能保持穩定狀態。苟 $W\times H'$ 適等於 $P\times H$,則攔水壩將適在顛覆焦點,故設計攔水壩,務使前一力率大過後一力率,俾顛覆焦點永不致達到焉。



第 142 圖

吾人若將 P 與 W 二力結合之而求得其合力,則合力之作用綫與壩之底邊相交之點,對於壩之安定頗有關係。蓋此交點如能在底邊之中間三分之一以內,則壩之安定自無問題。此卽世人所用之一種傳統假定而爲設計之根據者也。

今姑取長度一公尺之壩而討論之(凡討論壩之問題時,爲便利起見,長度均按一公尺計算)。

命第 142 圖(A)中之 $ABCD$ 表示壩之剖面。

A=壩之剖面面積,以平方公尺計。

W=壩之重量,以公斤/立方公尺計。

h=水之深度,以公尺計,

於是 $W=A\times1\times w=Aw$, 作用於剖面之重心。

至於水壓作用之情形,則有 GHC 三角形表示之:三角形之

底邊 CH 即表示在水底之壓力，其值為最大，愈向上則愈減小，及至水面則已成為零。

命水之總壓力等於 P。於是 P 將等於一公尺長度之施力面積$(h\times1)$乘水之深度之一半$(\frac{1}{2}h)$，此一積數再乘以每立方公尺水之重量，即

$$P=h\times1\times\frac{h}{2}\times1002=501\,h^2\text{ 公斤}$$

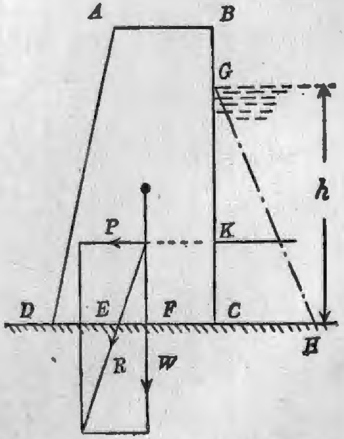
(其中 1002＝一立方公尺水之重量)。

此總壓力 P 即作用於 GHC 三角形之重心。但依第十一章中所述，三角形之重心係在距底邊三分之一之高處，故在壩之背面，P 之施力點 K 將為

$$CK=\frac{1}{3}GC=\frac{1}{3}h。$$

計算 P 與 W 之值，再用力之平行四邊形法求得其合力 R，如圖所示。

三等分底邊 DC 於 E 及 F。若 R 之作用綫與底邊相交於中間三分之一(EF)以內，則所有安定之必需條件業已得到，攔水壩自無顛覆之患矣。不過



第　142　圖(A)

事實上有時 R 之作用綫已出乎中間三分之一以外，而並未發生若何問題。故上述之假定雖爲一種理想的條件，世人固有未能盡守者。惟此終非正規，不宜輕於嘗試也。玆且舉例於下。

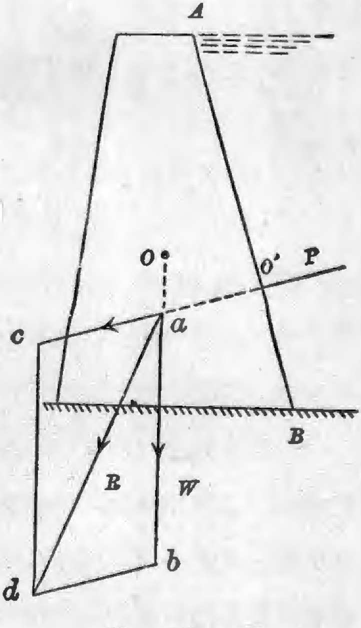
舉例 —— 有一攔水壩高 2.4 公尺，底寬 1.5 公尺，頂寬 5 公寸。壩之外面成 $\frac{1}{8}$ 之傾斜。水有時可以漲至壩頂。試用圖解法求定在此種情形下攔水壩之建築是否安全。壩之重量 w = 每立方公尺 2410 公斤。

(解) $P=501\times h^2=501\times 2.4\times 2.4=2886$ 公斤。

此壓力 P 係垂直作用於壩之背面 AB 上，其施力點 O' 與 B 點之距離 $O'B=\frac{1}{3}AB$。見第 143 圖。

又 $W=\left(\frac{1.5+.5}{2}\right)\times 2.4\times 2410=5784$ 公斤。

求得壩剖面之重心 o，通過 o 作一垂直綫代表 W。引長 P 之作用綫使與 W 相交於 a。取 ac 長度使等於 2886，



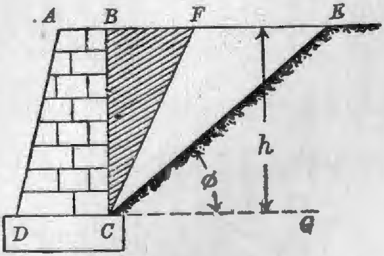
第 143 圖

ab 長度使等於 5784。完成平行四邊形 $abcd$，聯結 ad。於是 ad 將表示合力 R 之作用綫。但由圖中觀之，將見此綫已出乎底邊之中間三分之一以外，是則此種建築或尙未能稱爲安全。

99. 擋土牆之設計

吾人設計攔水壩，欲研究水壓所生影響，以有水力學之實驗可資參考，問題尙易解決。但若設計擋土牆，則問題比較困難，蓋牆背上所受土壓，其大小等於若干，其施力點究在何處，吾人至今尙不得而知，惟有根據某種假定以爲推算而已。

第 144 圖之 $ABCD$ 表示一擋土牆之剖面，牆後有土一堆，



第　144　圖

其頂面 BE 適成水平，並與牆頂 AB 相齊。

查土之爲物，亦與其他同樣性質之物體相似，如將其任意堆置於一平面，如 CG 之上時，將成功一種梯形，其邊坡必有一定，如圖中之 CE（吾人見於修築土壩或道路時，工人所塡之土必自

然成功某種形狀，當可明瞭)。此綫所取之坡度即稱爲「自然坡度」,其與水平綫所交之角度則稱爲「靜角」，通常均以 ϕ 表示之。故若將土堆置於牆之背後,則在 CE 綫左面之一部分，如圖中之 CEB，自將發生一種推力,但在 CE 綫右面之一部分，對於牆背將不致發生任何影響。誠以在此一部分之土,因其本身之微粒間互生摩擦之力,足以維持其自然坡度,固不再需任何外力之助。故 CE 所交之角 ϕ 又稱爲「摩擦角」。由力學之實驗,知在此平面上任一微粒之土均適在滑瀉焦點,而有向下滑瀉之趨勢,其所以未致滑瀉者,則以微粒間之摩擦力有以維持之也。

故擋土牆所需擁護者僅爲 CEB 三角形一部分之土，吾人所需研究者亦即此一部分之土對於牆背將發生若何推力之問題耳。

此一問題曾經多數學者之研究,並有各種學說,其最著者當推讓金,古龍兩氏之學說,今且分述於下。

100. 讓金氏學說

讓金氏學說係先取土堆內部之各個微粒而研究之；求得所有影響於其平衡之種種條件,而後綜合此種條件,以定全部之壓力。

氏謂若土面成水平,而牆背成垂直,則土之水平壓力可用下

式求得之:——

命　P=作用於長度一英尺牆上之水平壓力，以磅計，

h=牆之高度，以英尺計，

w=每立方英尺土之重量，以磅計，

ϕ=靜角。

於是
$$P=\frac{1}{2}wh\times\left(\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}\right)。$$

此壓力取水平方向作用於牆上，其施力點與底邊之距離等於 $\frac{1}{3}h$。

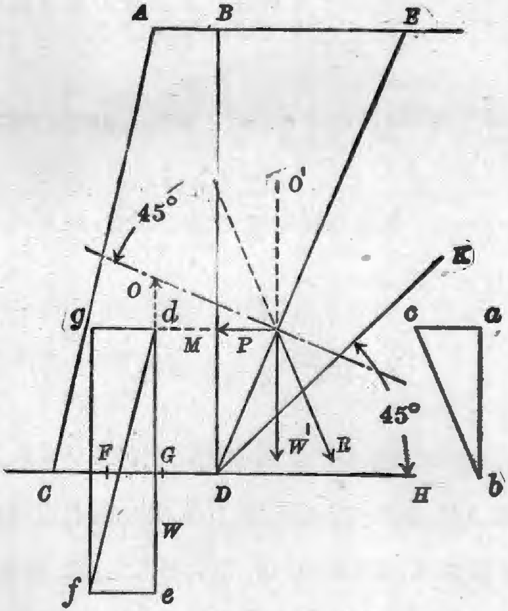
惟依歷來實驗，知由上述公式求得之 P，超過其實值頗大，有時兩數相差至百分之三十之多。不過吾人所敢斷言者，此一差數係屬安全一面，如對於問題無相當把握者，則用此種公式，絕不致發生任何危險也。

101.　古龍氏學說

古龍氏學說則稱凡在自然坡度以上，即 BCE 三角形一部分之土(第 144 圖)，常有欲沿 CE 平面溜下而將擋土牆顛覆之趨勢。氏卽根據此種事實以計算土壓之大小。但由歷來實驗，知 BCE 一部分之顛覆影響，實遠不及 BCF 一部分之大，蓋如 BCF 一部分之土沿 CF 平面溜下時，則其所生顛覆影響將爲

最大也。此 CF 平面卽稱爲崩裂平面，CF 綫則平分 BCE 角。茲且舉例於下，以述明此種方法之應用。

舉例——有一擋土牆高 4.2 公尺，底寬 1.5 公尺，頂寬 0.6 公尺，牆背成垂直，今欲用此擋土牆擁護一堆濕土，土面與牆頂相齊。若土之靜角爲 45°，試求如此設計之牆，在此種情形下是否安全。濕土每立方公尺重 1920 公斤。牆每立方公尺重 2720 公斤。



第 145 圖

(解)命第 145 圖中之 $ABDC$ 表示擋土牆之剖面 BE 表

示土面，與 AB 在同一水平面上，DK 爲自然坡度；DE 平分 BDK 角，爲崩裂平面。

$$今因土之靜角=45^\circ,\quad \therefore KDH 角=45^\circ.$$

$$BDK=90^\circ-45^\circ=45^\circ.$$

$$BDE=EDK=22\tfrac{1}{2}^\circ.$$

BE 長度將由圖中量得等於 1.72 公尺。

求 BDE 三角形之重心，得 O'。

命 $W_1=BDE$ 三稜體之重量，其剖面爲 BDE 三角形，其厚度爲一公尺。於是

$$W_1=(\tfrac{1}{2}\times1.72\times4.2\times1)\times1920=6935 \text{ 公斤。}$$

再求得牆剖面 $ABDC$ 之重心，得 O，並計算其一公尺長度之重量，得

$$W=[\tfrac{1}{2}(1.5+.6)\times4.2\times1]\times2720=11995 \text{ 公斤。}$$

其次所欲求得者，則爲土壓 P 之大小。古龍氏學說係假定土與牆背之間並不發生任何摩擦，依此假定則壓力 P 將垂直作用於牆背上，其施力點 M 與 D 點之距離 $DM=\frac{1}{3}DB$。於是 P 之作用綫將與 DE 相交於距 D 三分之一之處。又通過重心 O' 之垂直綫亦將與 DE 相交於距 D 三分之一之處。故 P 與 W_1 二力之作用綫將相交於崩裂平面上。

再者，若在 BDE 一部分之土與崩裂平面 DE 之間亦未

發生任何摩擦，則抗力 R 將與 DE 成垂直。但因摩擦角$=45°$，故 R 之作用綫應與垂直於 DE 之綫成 $45°$ 之交角，如圖所示。今 W_1, R 及 P 三力係成平衡，而 W_1 之值爲已知，故可用力之三角形 abc 分別求得 R 與 P 之值。

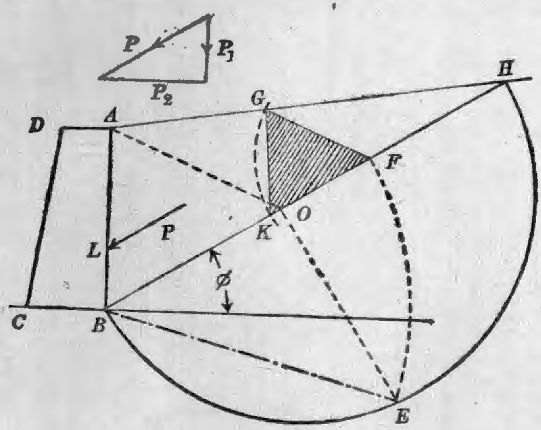
通過剖面之重心 o 作一垂直綫，代表 W 之作用綫，並引長 P 之作用綫使與之相交於 d。取 dg 使等於 ac, de 使等於 W。完成平行四邊形 $defg$。聯結 df，卽得 P 與 W 之合力作用綫。由圖中觀之，將見此綫與底邊相交於中間 FG 三分之一以內。故此種設計頗屬安全。

惟以上所述並未計入牆背上之土摩擦力，苟將此種摩擦加入計算，則問題較爲複雜，本書姑不具論，讀者欲知其詳，尙須就專論此項問題之書籍研究之也。

102. 熱本氏法

熱本氏法係根據古龍氏學說而得之一種圖解法，而爲歐陸諸國所通用者。由此種方法所得結果頗能符合實際情形，茲且概述於下。

命第 146 圖中之 $ABCD$ 表示擋土牆之剖面，AH 表示土之表面，其 H 一端較牆頂高出若干。命 BH 表示自然坡度，於此綫上作一半圓形 BEH。在 A 點作一 BAO 角使等於 2ϕ。



第 146 圖

由 O 作 OE 垂直於 BH。以 B 爲圓心，BE 爲半徑，作一圓弧，使與 BH 綫相交於 F，並作 FG 平行於 AO。取 FK 使等於 FG，聯結 GK。於是三角形 FGK 稱爲「土壓三角形」。土壓 P 卽可由此三角形中求得之。

命 $A=FGK$ 之面積，以平方公尺計。

$P=$作用於長度一公尺牆上之合壓力，以公斤計。

$w=$每立方公尺土之重量，以公斤計。

於是 $P=(A\times 1\times w)$公斤。

於 BA 綫上取 BL 使等於 $\frac{1}{3}BA$。通過 L 作 P 之作用綫使與自然坡度平行。於是 P, W 二力之作用綫可按前法結合之而求得其合力。P 可以分解爲垂直及水平兩分力，如圖之上面

所示力之三角形。

總之,土壓問題較水壓複雜殊多,歷來雖有多數學者從事研究,但其性質究屬如何,說者紛紜,莫衷一是,後人往往認前人之說爲尙有未當,從而標新立異,期能使學理更近事實。故至今此種土壓仍成爲學者討論之問題,尙不能稱爲已經解決也。

0·30