Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 63.1. Es sei $W = [0,1[^n$ der halboffene Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ und das zugehörige Gittermaß $\mu_{\frac{1}{k}}$ die Beziehung

$$\mu_{\frac{1}{k}}(W) = 1$$

gilt.

Aufgabe 63.2. Wir betrachten die Menge $T = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, und zu jedem $\epsilon > 0$ das zugehörige Gittermaß μ_ϵ. Zeige, dass

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{\frac{1}{k}}(T)$$

existiert, dass aber

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(T)$$

nicht existiert.

Aufgabe 63.3.*

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $T_i \subseteq M$, $i = 1, \ldots, n$, messbare Teilmengen mit $\mu(T_i) < \infty$. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$T_J = \bigcap_{i \in J} T_i .$$

Beweise die Formel

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J)=k} \mu(T_J) \right).$$

Aufgabe 63.4. Es sei

$$f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine streng wachsende Funktion. Zu $k \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die äquidistante Unterteilung des Einheitsintervalls in k gleichlange Teilintervalle und die zugehörige maximale untere Treppenfunktion s_k von f und die zugehörige minimale obere Treppenfunktion t_k. Es seien S_k bzw. T_k die zugehörigen Subgraphen.

a) Zeige, dass im Allgemeinen S_k, $k \in \mathbb{N}_+$, keine Ausschöpfung und T_k, $k \in \mathbb{N}_+$, keine Schrumpfung ist.

b) Zeige, dass S_{2^n}, $n \in \mathbb{N}_+$, eine Ausschöpfung und T_{2^n}, $n \in \mathbb{N}_+$, eine Schrumpfung ist.

c) Welche Mengen werden in (b) ausgeschöpft bzw. geschrumpft, und wie verhalten sich diese Mengen zum Subgraphen von f?

d) Wogegen konvergieren die zugehörigen Folgen von Treppenintegrale?

Aufgabe 63.5. Man zeige durch ein Beispiel, dass die „Schrumpfungsformel" aus Lemma 63.4 (6) nicht ohne die Endlichkeitsvoraussetzung gilt.

Aufgabe 63.6. Wo geht in den Beweis zu Satz 63.7 die Endlichkeit der M_n ein?

Aufgabe 63.7. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung aus offenen Mengen, wobei I abzählbar sei. Zeige folgende Aussagen.

a) Eine Teilmenge $T \subseteq X$ ist genau dann eine Borelmenge, wenn $T \cap U_i$ eine Borelmenge ist für jedes $i \in I$.

b) Ein σ-endliches Maß μ ist durch die Einschränkungen $\mu_i = \mu|_{U_i}$ eindeutig bestimmt.

c) Es sei für jedes $i \in I$ ein σ-endliches Maß μ_i auf U_i gegeben. Für jedes Paar $i, j \in I$ sei

$$\mu_i|_{U_i \cap U_j} = \mu_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß auf X mit $\mu|_{U_i} = \mu_i$.

Aufgabe 63.8. Es sei

$$\beta\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ. Es sei

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \beta(x) > 0\}.$$

Zeige, dass μ genau dann σ-endlich ist, wenn T abzählbar ist.

Aufgabe 63.9. Es sei

$$\beta\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ. Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^k$ sei die Bedingung $\sum_{n=0}^{\infty} \beta(x_n) < \infty$ erfüllt. Zeige, dass μ σ-endlich ist.

Aufgabe 63.10. Zeige, dass das Bildmaß eines Maßes unter einer messbaren Abbildung in der Tat ein Maß ist.

Aufgabe 63.11. Es seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ und $(S, \mathcal{C})$ Messräume und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

und

$$\psi\colon N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei μ ein Maß auf M. Zeige, dass für die Bildmaße die Beziehung

$$(\psi \circ \varphi)_* \mu = \psi_*(\varphi_* \mu)$$

gilt.

Aufgabe 63.12. Es seien M und N Messräume und es sei

$$\varphi \colon M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei δ_x das im Punkt $x \in M$ konzentrierte Dirac-Maß. Zeige $\varphi_*(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}$.

Aufgabe 63.13. Es seien M und N Messräume und es sei

$$\varphi \colon M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei

$$\beta \colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ. Zeige, dass das Bildmaß $\varphi_* \mu$ ebenfalls ein Summationsmaß ist und bestimme die zugehörige Belegungsfunktion.

Aufgabe 63.14. Es seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ die kleinste Topologie ist, bezüglich der die beiden Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ stetig sind.

Aufgabe 63.15.*

Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale

$$\triangle = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

Aufgabe 63.16. Es seien X, Y, Z topologische Räume und

$$f \colon X \longrightarrow Y$$

und

$$g \colon X \longrightarrow Z$$

stetige Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$(f, g) \colon X \longrightarrow Y \times Z,\ x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

ebenfalls stetig ist.

Es sei M eine Menge. Unter der *diskreten Topologie* auf M versteht man diejenige Topologie, bei der jede Teilmenge $T \subseteq M$ offen ist.

Aufgabe 63.17. Es seien X und Y diskrete topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum diskret ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 63.18. (2 Punkte)

Bestimme die Belegungsfunktion zum Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ im $\mathbb{R}^n$.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) $x \sim x$ (*reflexiv*),
(2) aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*),
(3) aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 63.19. (3 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(N, \mathcal{B})$ ein Messraum und C die Menge der messbaren Abbildungen von M nach N. Für $f, g \in C$ sei

$$f \sim g, \text{ falls } \mu(\{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

(dabei sei vorausgesetzt, dass diese Mengen messbar seien). Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 63.20. (6 Punkte)

Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(S) = \pi\,,$$

wobei μ_ϵ das Gittermaß zu $\epsilon > 0$ bezeichnet.

(Man denke an das Riemann-Integral.)

Aufgabe 63.21. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und eine messbare Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

in einen Messraum N derart, dass das Bildmaß $\varphi_*\mu$ nicht σ-endlich ist.

Aufgabe 63.22. (4 Punkte)

Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist, und dass die dadurch definierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.