

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 28

Aufgaben

AUFGABE 28.1. Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiert und sei $D \subseteq M$ ein Fundamentalbereich für diese Operation. Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe und sei $R \subseteq G$ ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen G/H . Zeige, dass

$$\bigcup_{g \in R} g(D)$$

ein Fundamentalbereich der auf H eingeschränkten Operation auf M ist.

AUFGABE 28.2. Skizziere einen Fundamentalbereich für die Operation der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ zur Stufe 2 auf der oberen Halbebene \mathbb{H} gemäß Aufgabe 27.1 unter Verwendung des Repräsentantensystems für

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2)$$

aus Aufgabe 27.6 und Lemma 9.9.

AUFGABE 28.3. Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiere, und es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass es eine kanonische surjektive Abbildung

$$M/H \longrightarrow M/G$$

zwischen den Bahnräumen gibt.

AUFGABE 28.4. Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiere, und es sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Zeige, dass auf dem Bahnenraum M/H die Restklassengruppe G/H in natürlicher Weise operiert, und dass der Bahnenraum $(M/H)/(G/H)$ mit dem Bahnenraum M/G übereinstimmt.

AUFGABE 28.5. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{n} z^n$ für $|z| < 1$ konvergiert.

AUFGABE 28.6. Es sei E eine elliptische Kurve über \mathbb{Q} und es sei

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_+} a_n n^{-s}$$

die zugehörige L -Reihe. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}_+} a_n q^n$ für $|q| < 1$ konvergiert.

AUFGABE 28.7. Zeige: Um den Satz von Wiles für alle Exponenten $n \geq 3$ zu zeigen, genügt es, ihn für alle ungeraden Primzahlen als Exponenten zu beweisen.

AUFGABE 28.8. Es sei

$$x^n + y^n = z^n$$

eine Fermat-Gleichung. Zeige: wenn es keine nichttriviale Lösung (x, y, z) in natürlichen Zahlen gibt, so gibt es auch keine nichttriviale Lösung in ganzen Zahlen.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3