Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 25

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 25.1. Ein Bakterium möchte entlang des Äquators die Erde umrunden. Es ist ziemlich klein und schafft am Tag genau 2 Millimeter. Wie viele Tage braucht es für eine Erdumrundung?

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.2. Zeige, dass es in einem archimedisch angeordneten Körper zu jedem Element $x \in K$ eine ganze Zahl m mit $m \leq x$ gibt.

Aufgabe 25.3. Wie oft muss man eine Strecke der Länge $\frac{7}{4293}$ Meter mindestens hintereinander legen, um einen Kilometer zu erhalten?

Aufgabe 25.4. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es für jedes $s \in K$ eine ganze Zahl q und ein $t \in K$ mit $0 \leq t < 1$ und mit

$$s = q + t\,.$$

Aufgabe 25.5. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K \mid x \geq n \text{ und } x < n+1\}\,,\, n \in \mathbb{Z}\,,$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

Aufgabe 25.6. Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest. Zeige, dass

$$q = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

ist.

Aufgabe 25.7. Berechne die Gaußklammer
$$\left\lfloor \frac{513}{21} \right\rfloor .$$

Aufgabe 25.8. Berechne die Gaußklammer
$$\left\lfloor -\frac{734}{29} \right\rfloor .$$

Aufgabe 25.9.*

Es sei z eine rationale Zahl. Zeige, dass z genau dann ganzzahlig ist, wenn
$$\lfloor -z \rfloor = - \lfloor z \rfloor$$
gilt.

Aufgabe 25.10.*

Es seien x, y rationale Zahlen. Zeige, dass
$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$
genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Aufgabe 25.11. Runde die folgenden Brüche auf ganze Zahlen.

(1) $\frac{317}{15}$,
(2) $\frac{982}{323}$,
(3) $-\frac{477}{26}$.

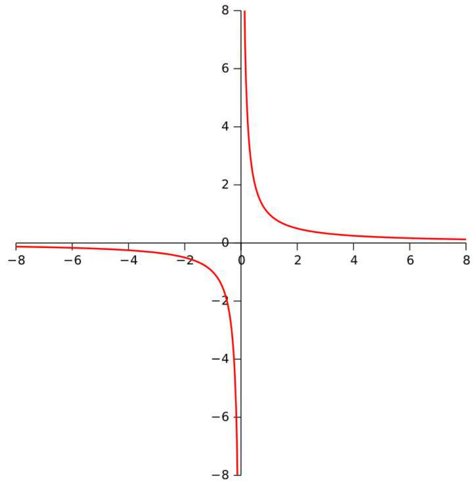
Aufgabe 25.12. Führe die folgenden Rechnungen durch, wobei die Angaben als gemischte Brüche zu lesen sind. Auch die Ergebnisse sollen als gemischte Brüche angegeben werden.

(1) $7\frac{4}{9} + 2\frac{6}{7}$,
(2) $8\frac{2}{7} + 4\frac{10}{13}$,
(3) $5\frac{8}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$.

Aufgabe 25.13. Wir betrachten positive rationale Zahlen als gemischte Brüche.

a) Zeige, dass bei der Addition von zwei gemischten Brüchen der Bruchterm der Summe nur von den Bruchtermen der Summanden abhängt.

b) Wie sieht dies mit dem ganzen Teil aus?



Aufgabe 25.14. Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \setminus \{0\} \longrightarrow K, \, x \longmapsto x^{-1}.$$

Aufgabe 25.15. Es sei K ein angeordneter Körper. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \setminus \{0\} \longrightarrow K, \, x \longmapsto -x^{-1}.$$

Aufgabe 25.16. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q}, \, x \longmapsto -\frac{7}{4}x^{-3}.$$

Aufgabe 25.17. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \, x \longmapsto x^3 - x,$$

weder wachsend noch fallend ist.

Aufgabe 25.18. Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \longrightarrow K, \, x \longmapsto |x| \, .$$

Aufgabe 25.19. Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Gaußklammer

$$K \longrightarrow K, \, x \longmapsto \lfloor x \rfloor \, .$$

Aufgabe 25.20. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann konstant ist, wenn f gleichzeitig wachsend und fallend ist.

Aufgabe 25.21. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann wachsend ist, wenn die Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto -f(x),$$

fallend ist, und dass dies äquivalent dazu ist, dass die Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto f(-x),$$

fallend ist.

Aufgabe 25.22.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine bijektive Abbildung mit der Umkehrfunktion f^{-1}. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) f ist genau dann streng wachsend, wenn f^{-1} streng wachsend ist.
(2) f ist genau dann streng fallend, wenn f^{-1} streng fallend ist.

Aufgabe 25.23. Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

deren Werte zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 25.24. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x < y$ Elemente in K. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.25. (2 Punkte)

Eine kleines Sandkorn hat ein Gewicht von $\frac{13}{2757}$ Gramm. Wie viele Sandkörner muss man nehmen, um eine Sanddüne aufzubauen, die 5906 und eine halbe Tonne wiegt?

Aufgabe 25.26. (3 Punkte)

Zeige, dass für jede rationale Zahl x die Abschätzungen

$$0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \leq 1$$

gelten.

Aufgabe 25.27. (1 Punkt)

Lucy Sonnenschein verbringt einen Urlaubsnachmittag in einem Seebad. Sie hält sich eineinviertel Stunden am Strand auf, dann eine halbe Stunde in der Eisdiele, dann eineinhalb Stunden im Park, sodann wieder zweidreiviertel Stunden am Strand und schließlich 40 Minuten im Café. Wie lange war ihr Nachmittag?

Aufgabe 25.28. (3 Punkte)

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto -\frac{3}{11}x^{-4}.$$

Aufgabe 25.29. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien Abbildungen

$$f_1, \ldots, f_n \colon K \longrightarrow K$$

gegeben, die jeweils entweder streng wachsend oder streng fallend sind. Es sei k die Anzahl der streng fallenden Abbildungen darunter. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ genau dann streng fallend ist, wenn k ungerade ist.

Aufgabe 25.30. (3 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Abbildungsverzeichnis