Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 15

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 15.1. Führe im Fünfersystem die Addition

$$314201 + 401334$$

schriftlich durch.

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.2. Begründe, dass der Nachfolger der Dezimalzahl $999\ldots999$ (mit k Neunen) gleich $1000\ldots000$ (mit $k+1$ Ziffern, also k Nullen) ist.

Aufgabe 15.3. Bestimme, welche der beiden Zahlen im Zehnersystem größer ist.

$$m = 52866396034807681104629504792853235$$

oder

$$n = 52876373480104695047954506002853673\,.$$

Aufgabe 15.4. Bestimme, welche der beiden Zahlen im Zehnersystem größer ist.

$$m = 528663960348076811044629504792853235$$

oder

$$n = 52876373480104695047954506002853673\,.$$

Aufgabe 15.5. Ein Pokalwettbewerb werde mit 2^{n+1} Mannschaften im K.-o.-System ausgetragen. Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \, = \, 2^{n+1} - 1$$

durch eine inhaltliche Überlegung (Wie viele Spiele finden statt?).

Aufgabe 15.6. Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \,=\, 2^{n+1} - 1$$

mit Hilfe des Zweiersystems.

Aufgabe 15.7.*

Führe im Zehnersystem die Addition

$$794385 + 503819$$

schriftlich durch.

Aufgabe 15.8.*

Führe im Dreiersystem die Addition

$$201021 + 112002$$

schriftlich durch.

Aufgabe 15.9. Führe im Sechzehnersystem die Addition

$$5C4A7 + D330E$$

schriftlich durch.

Aufgabe 15.10. Zeige, dass in der Situation von Verfahren 15.5 stets die Beziehung

$$(a_i + b_i + d_i)10^i \,=\, c_i 10^i + d_{i+1} 10^{i+1}$$

gilt.

Aufgabe 15.11. Führe die Addition

$$9 + 19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 + 89 + 99 + 109 + 119$$

schriftlich durch. Welche „Besonderheit“ tritt dabei auf?

Aufgabe 15.12. Die Schüler sollen die Zahlen

$$31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31$$

aufaddieren. Heinz Ngolo rechnet

$$300, 301, 299, 300, 301, 302, 303, \underline{304}\,.$$

Ist das Ergebnis richtig? Was geht in seinem Kopf vor?

Mustafa Müller rechnet

$$365 - 61 \,=\, 304.$$

Was geht in seinem Kopf vor?

Aufgabe 15.13. Gabi Hochster sitzt in der Schule neben Heinz Ngolo. Sie üben schriftliches Addieren und rechnen $725 + 638$. Gabi ist fertig und Heinz hat gerade die hinterste Ziffer zusammengerechnet und den Übertrag notiert. Da kritzelt Gabi auf Heinzens Heft rum und radiert die Ziffern 5 und 8 weg. Gabi sagt: „Die brauchst du nicht mehr, konzentrier dich auf die anderen Ziffern, dann geht es schneller und wir können endlich weiter Schiffe versenken spielen“. Darauf sagt Heinz: „Lass mich in Ruhe, kleine Klugscheißerin, außerdem brauch ich die Ziffern doch, nämlich zur Probe“. Darauf Gabi: „Wer beim Rechnen eine Probe braucht, sollte zurück in den Kindergarten“.

Wir beurteilen Sie die Lage mathematisch und didaktisch?

Aufgabe 15.14. Ist für das schriftliche Addieren das Kommutativgesetz klar, ist es klar, dass 0 das neutrale Element ist, ist es klar, dass das Assoziativgesetz gilt?

Aufgabe 15.15. Es stehen verschiedene Zahlen an der Tafel. Der einzige erlaubte Rechenschritt ist, zwei beliebige Zahlen wegzuwischen und durch ihre Summe zu ersetzen. Nach hinreichend vielen Durchgängen steht nur noch eine Zahl da. Ist das Ergebnis unabhängig vom Ablauf? Man erläutere die Situation mit dem Begriff *Invarianzprinzip*.

Aufgabe 15.16. Gibt es für die folgenden Zahlensysteme ein für alle Zahlen korrektes Verfahren zum schriftlichen Addieren, welches wie das schriftliche Addieren im Zehnersystem nur auf der getrennten Addition von Ziffern gleicher Stelligkeit und dem Übertrag beruht? Welche Probleme treten auf?

(1) Das Strichfolgensystem
(2) Das Eurozahlensystem
(3) Das römische Zahlsystem

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.17. (4 Punkte)

Es sei $0 \leq k \leq 2$. Zeige: Eine positive natürliche Zahl ist genau dann $< 10^k$, wenn sie im Eurozahlensystem aus maximal $3k$ Ziffern besteht.

Aufgabe 15.18. (2 Punkte)

Führe im Dreiersystem die Addition

$$221002 + 22121$$

schriftlich durch.

Aufgabe 15.19. (3 Punkte)

Führe im Sechzehnersystem die Addition

$$A0BEE7 + 5C5DA3$$

schriftlich durch.

Aufgabe 15.20. (4 Punkte)

Die Kinder bekommen die Hausaufgabe, zwei 23-stellige Zahlen im Dezimalsystem zu addieren. Das ist ziemlich mühselig. Da es genau 23 Kinder in der Klasse gibt, macht Gabi Hochster den Vorschlag, dass jedes Kind genau eine Ziffer (gemäß der Sitzreihenfolge) ausrechnet und sie am nächsten Morgen daraus das Ergebnis zusammentragen (hat Gabi etwas vergessen?). Entwerfe einen Algorithmus, mit dem man die k-te Ziffer in der Summe ohne unnötige Rechnungen bestimmen kann.

Aufgabe 15.21. (3 Punkte)

Zeige mit dem allgemeinen Distributivgesetz die Beziehung

$$a^{n+1} - 1 \,=\, (a-1)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k \right)$$

für natürliche Zahlen $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 15.22. (1 Punkt)

Beweise die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \,=\, 2^{n+1} - 1$$

mit Hilfe von Aufgabe 15.21.

Abbildungsverzeichnis