Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 42

Die Pausenaufgabe

Wenn in den folgenden Aufgaben Wurzelausdrücke vorkommen, so ist damit gemeint, dass man sich in einem angeordneten Körper befindet, in dem es diese (positiven) Wurzeln gibt.

Aufgabe 42.1. Vergleiche $\sqrt[10]{10}$ und $\sqrt[3]{2}$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 42.2. Was hat die Din-Norm für Papier mit Wurzeln zu tun?

Aufgabe 42.3. Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

Aufgabe 42.4. Kann man ein Quadrat mit Seitenlänge 5 durch drei Quadrate mit Seitenlänge 4 überdecken?

Aufgabe 42.5. Erläutere, warum die Schreibweise $x^{\frac{1}{k}}$ für die k-te Wurzel aus x sinnvoll ist.

Aufgabe 42.6. Berechne $\sqrt[12]{2}^2 \cdot \sqrt[6]{2}^5$.

Aufgabe 42.7. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 42.8. Es sei p eine Primzahl. Zeige unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 42.9.*

Ist die Zahl $\sqrt{7} + \sqrt{7}$ rational?

Aufgabe 42.10.*

Ist die reelle Zahl

$$\sqrt{\frac{1}{11}}$$

rational?

Aufgabe 42.11.*

Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen“ Strecken vorkommen.

Aufgabe 42.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 42.13. Es sei K ein Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 42.14. Zeige, dass es in $\mathbb{Z}/(5)$ vier Lösungen für die Gleichung

$$x^4 = 1$$

gibt.

Aufgabe 42.15. Man konstruiere einen kommutativen Ring R, in dem die 4 mindestens drei Quadratwurzeln besitzt.

Aufgabe 42.16. Vergleiche

$$\sqrt[2]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}\,.$$

Aufgabe 42.17. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

Aufgabe 42.18. Vergleiche

$$\sqrt{2}+\sqrt{7} \text{ und } \sqrt{3}+\sqrt{5}\,.$$

Aufgabe 42.19. Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b, c \in K_+$ mit $a \geq b \geq c$. Zeige

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b} \leq \sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}.$$

Aufgabe 42.20. Bestimme die Quadrate und ihre Quadratwurzeln im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 42.21. Es sei K ein angeordneter Körper mit $\sqrt{n} \in K_+$, wobei $n \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl sei. Zeige, dass

$$\left\{p + q\sqrt{n} \mid p, q \in \mathbb{Q}\right\} \subseteq K$$

ein Körper ist.

Aufgabe 42.22. Betrachte die Menge

$$K = \left\{p + q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbb{Q}\right\},$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist.

a) Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird.

b) Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird.

c) Fasse die Elemente von K als Punkte im $\mathbb{Q}^2$ auf. Skizziere eine Trennlinie im $\mathbb{Q}^2$, die die positiven von den negativen Elementen in K trennt.

d) Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Zu einem kommutativen Ring R bezeichnet man die Elemente, die bezüglich der Multiplikation ein Inverses besitzen, als Einheiten. Sie bilden eine Gruppe, die sogenannte Einheitengruppe, die mit $R^\times$ bezeichnet wird. Bei einem Körper ist einfach $K^\times = K \setminus \{0\}$.

Aufgabe 42.23. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Quadrate in $K^\times$ eine Untergruppe von $K^\times$ bilden.

Aufgabe 42.24. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Quadrate in $K^\times$ eine Untergruppe von K_+ bilden.

Aufgabe 42.25. Es sei $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{Q}_+$ die (multiplikative) Untergruppe der Quadrate innerhalb der positiven rationalen Zahlen und es sei $\sim$ die zugehörige Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}_+$. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen Repräsentanten besitzt, der durch eine natürliche Zahl gegeben ist, in deren Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor einfach ist (die 1 erfülle diese Eigenschaft).

Aufgabe 42.26. Wir betrachten die Menge

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q}).$$

(1) Zeige, dass R eine Untergruppe von $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$ (bezüglich der Addition) ist.
(2) Zeige, dass R unter der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.
(3) Zeige, dass R die rationalen $\mathbb{Q}$ als Diagonalmatrizen enthält.
(4) Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist.
(5) Zeige, dass R ein Körper ist.
(6) Zeige, dass R eine Quadratwurzel zu -1 enthält.

Aufgabe 42.27.*

Berechne

$$\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5}\right).$$

Aufgabe 42.28. Berechne

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + \frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right) \cdot \left(-4 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{5} + \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right).$$

Aufgabe 42.29.*

Ein angeordneter Körper K enthalte die Wurzeln $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[7]{2}$. Zeige, dass K auch $\sqrt[21]{2}$ enthält.

Aufgabe 42.30.*

Drücke

$$\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe 42.31. Drücke

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[4]{5}$$

mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe 42.32. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass

$$U = \{x \in K_+ \mid \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } x^m \in \mathbb{Q}\}$$

eine Untergruppe von $(K_+, 1, \cdot)$ bildet.

Aufgabe 42.33.*

Wir betrachten Rechtecke mit dem konstanten Flächeninhalt c. Zeige, dass unter diesen Rechtecken das Quadrat den minimalen Umfang besitzt.

Aufgabe 42.34. Wir betrachten auf $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N}_+$ die Relation $(p, m) \sim (q, n)$, falls $p^n = q^m$ gilt.

(1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Es sei
$$Q = (\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N})/\sim$$
die zugehörige Quotientenmenge. Zeige, dass auf Q durch
$$[(p, m)] \cdot [(q, n)] := [(p^n q^m, nm)]$$
eine wohldefinierte Verknüpfung gegeben ist.
(3) Zeige, dass Q eine kommutative Gruppe ist.
(4) Es sei K ein angeordneter Körper, in dem es zu jedem $p \in \mathbb{Q}_+$ und jedes $m \in \mathbb{N}_+$ die Wurzel $\sqrt[m]{p}$ gibt. Zeige, dass die Zuordnung
$$Q \longrightarrow K_+,\ [(p, m)] \longmapsto \sqrt[m]{p},$$
ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.35. (2 Punkte)

Bestimme die Quadrate und ihre Quadratwurzeln im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(19)$.

Aufgabe 42.36. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gleichung $x^n = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 42.37. (2 Punkte)

Zeige, dass es in $\mathbb{Z}/(7)$ sechs Lösungen für die Gleichung
$$x^6 = 1$$
gibt.

Aufgabe 42.38. (4 Punkte)

Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht in der Form

$$\sqrt{3} = p + q\sqrt{2}$$

mit $p, q \in \mathbb{Q}$ schreiben kann.

Aufgabe 42.39. (4 Punkte)

Es seien a, b ganze Zahlen und $x \in \mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Zeige, dass x eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 42.40. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$, $a \geq 1$. Es seien $m \geq n$ positive ganze Zahlen. Zeige

$$\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a}.$$

Abbildungsverzeichnis